TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
VIGILADA MINEDUCACIÓN

MATEMÁTICAS

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

La Construcción del Conjunto de los Números Reales: Estructura y Propiedades

1. Introducción a la Construcción de los Números Reales

La construcción del conjunto de los números reales representa uno de los logros más significativos del análisis matemático moderno, dado que se fundamenta en la necesidad de completar el conjunto de los números racionales para satisfacer propiedades topológicas esenciales. Esta construcción se basa en el concepto de completitud, donde se busca llenar los "huecos" que existen en la recta numérica racional mediante un proceso riguroso que garantice la continuidad y densidad del nuevo conjunto. El procedimiento más común implica el uso de cortaduras de Dedekind o sucesiones de Cauchy, métodos que permiten definir cada número real como el límite de una sucesión convergente de números racionales. La importancia de esta construcción radica en que proporciona el fundamento teórico necesario para el desarrollo del cálculo diferencial e integral, así como para la comprensión profunda de conceptos como continuidad, límites y convergencia.

Los **números reales** son todos aquellos que pueden representarse en la recta numérica. Incluyen tanto los números **racionales** como los **irracionales**, y forman el conjunto numérico más completo que se utiliza comúnmente en matemáticas para representar magnitudes continuas.

Clasificación de los números reales:

1. **Números racionales ($\mathbb{Q}$):**

   Son los que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, es decir, como una fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y b≠0. Ejemplos:

   $\frac{1}{2}$, −3, 0, 7, $\frac{-4}{5}$

2. **Números irracionales:**

   Son los que **no pueden** expresarse como fracción. Su representación decimal es **infinita y no periódica**.

   Ejemplos:

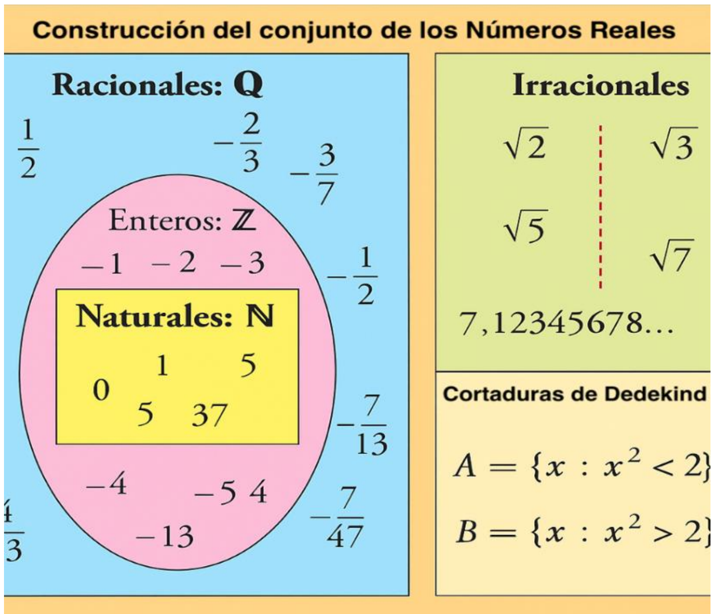
   $\sqrt{2}$2, π, e, ϕ

Propiedades clave de los números reales:

- **Densidad:** Entre dos números reales siempre hay otro número real.
- **Orden:** Se pueden comparar usando menor que (<), mayor que (>), etc.
- **Completitud:** No hay “huecos” en la recta real, a diferencia de los racionales.

Aplicación:

Los números reales se utilizan para medir longitudes, temperaturas, tiempos, velocidades, áreas, etc., en contextos tanto científicos como cotidianos.

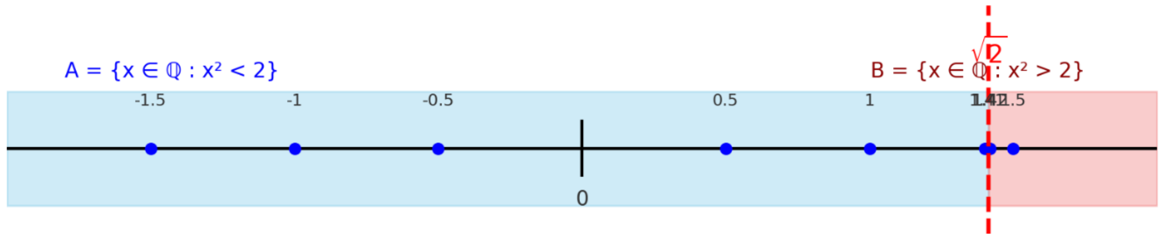


La aplicación práctica de esta construcción se manifiesta claramente en el campo de la ingeniería y la física, donde se requiere modelar fenómenos continuos que no pueden representarse adecuadamente mediante números racionales únicamente. Por ejemplo, cuando se analiza la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, se necesita considerar valores que pueden no ser expresables como fracciones simples, como aquellos que surgen de funciones trigonométricas o exponenciales. En el diseño de circuitos eléctricos, las corrientes alternas involucran valores que requieren la completitud de los números reales para su descripción matemática precisa. De igual forma, en la arquitectura moderna, el cálculo de estructuras complejas demanda la utilización de números irracionales como π o √2, cuya existencia y propiedades solo pueden garantizarse mediante una construcción rigurosa del conjunto de los números reales.

Para comprender mejor este concepto, se considera el siguiente ejercicio práctico: demostrar que √2 es un número real mediante el método de cortaduras de Dedekind.

Se define la cortadura $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 > 2\}$.
Se verifica que $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, ambos conjuntos son no vacíos, y todo elemento de A es menor que todo elemento de B.
Se observa que A no tiene elemento máximo (para cualquier $a \in A$ con $a > 0$, se puede encontrar otro racional en A mayor que a), y B no tiene elemento mínimo.

Construcción del número real √2 mediante una cortadura de Dedekind



Esta cortadura define precisamente el número real $\sqrt{2}$, demostrando que el conjunto de los números reales contiene elementos que no pertenecen a los racionales. El resultado es $\sqrt{2} = \sup(A) = \inf(B)$, estableciendo la existencia de este número irracional dentro de la estructura completa de los reales.

2. Propiedades Algebraicas de los Números Reales

Las propiedades algebraicas de los números reales se fundamentan en la estructura de cuerpo ordenado completo, donde se satisfacen los axiomas de la adición y multiplicación junto con las propiedades de orden y completitud. En esta estructura, se cumple la propiedad conmutativa, asociativa y distributiva para las operaciones básicas, además de la existencia de elementos neutros e inversos. La propiedad de tricotomía establece que para cualesquiera dos números reales a y b, exactamente una de las siguientes relaciones es verdadera: $a < b$, $a = b$, o $a > b$. La completitud se manifiesta a través del axioma del supremo, que garantiza que todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente tiene una cota superior mínima o supremo. Esta combinación de propiedades algebraicas y de orden convierte a los números reales en el sistema numérico más apropiado para el análisis matemático avanzado.

Un ejemplo concreto de estas propiedades se observa en el cálculo de interés compuesto en finanzas, donde se aplica la fórmula $A = P(1 + r)^t$. Aquí se utilizan simultáneamente las propiedades algebraicas de los reales: la multiplicación y exponenciación requieren las propiedades asociativa y distributiva, mientras que la comparación de diferentes tasas de interés emplea las propiedades de orden. Cuando se calcula el tiempo necesario para duplicar una inversión, se obtienen valores que frecuentemente son números irracionales, como $t = \ln(2)/\ln(1 + r)$, donde ln representa el logaritmo natural. La existencia y unicidad de este valor tiempo se garantiza por la completitud de los números reales, permitiendo que los cálculos financieros tengan precisión y coherencia matemática. Esta aplicación demuestra cómo las propiedades abstractas de los números reales se traducen en herramientas prácticas para la toma de decisiones económicas.

Se propone resolver el siguiente ejercicio: demostrar que, si a y b son números reales positivos, entonces $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$ (desigualdad media aritmética-geométrica). Se inicia elevando al cuadrado ambos lados: $(\sqrt{ab})^2 \leq ((a + b)/2)^2$, lo que equivale a $ab \leq (a + b)^2/4$. Expandiendo el lado derecho: $ab \leq (a^2 + 2ab + b^2)/4$, multiplicando por 4: $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$. Simplificando: $2ab \leq a^2 + b^2$, reordenando: $0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Como $(a - b)^2 \geq 0$ siempre es verdadero para números reales, la desigualdad original se verifica. La igualdad se da cuando $a = b$. Este resultado demuestra cómo las propiedades algebraicas de los números reales permiten establecer relaciones fundamentales que tienen aplicaciones en optimización y análisis de funciones.

3. Propiedades Topológicas y de Completitud

Las propiedades topológicas de los números reales se centran en conceptos como continuidad, convergencia y compacidad, elementos fundamentales que distinguen este conjunto de otros sistemas numéricos. La completitud topológica se manifiesta a través del hecho de que toda sucesión de Cauchy en los números reales es convergente, lo que significa que no existen "lagunas" en la estructura del conjunto. La propiedad de Arquímedes establece que, para cualquier número real positivo, por pequeño que sea, siempre se puede encontrar un número natural suficientemente grande cuyo recíproco sea menor que dicho número. La densidad de los números racionales e irracionales en los reales implica que entre cualesquiera dos números reales distintos siempre existe tanto un número racional como uno irracional. Estas propiedades conjuntamente garantizan que los números reales forman un continuo matemático perfecto, sin discontinuidades ni vacíos.

Esta completitud topológica encuentra aplicación directa en el modelado de fenómenos físicos continuos, como la propagación del calor en un material. La ecuación del calor requiere que la temperatura pueda tomar cualquier valor real en cualquier punto del espacio y tiempo, no solo valores racionales. La convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución exacta depende crucialmente de la completitud de los números reales. En el análisis de señales digitales, aunque se trabaje con muestras discretas, la teoría subyacente requiere la continuidad que proporcionan los números reales para garantizar que la reconstrucción de la señal sea matemáticamente consistente. Los algoritmos de compresión de audio y video se fundamentan en transformadas que operan en el dominio de los números reales, donde la completitud asegura la existencia de las funciones de base necesarias para la descomposición y reconstrucción de las señales.

Para ilustrar estas propiedades, se considera el siguiente ejercicio: demostrar que la sucesión $x_n = (1 + 1/n)^n$ converge en los números reales.
Se establece que esta sucesión es creciente: se demuestra que $x_{n+1} > x_n$ aplicando la desigualdad de Bernoulli y manipulaciones algebraicas.
Luego se prueba que está acotada superiormente: usando el desarrollo binomial y la desigualdad $n!/(k!(n-k)!) \leq 1/k!$ para $k \leq n$, se obtiene $x_n \leq 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + ... + 1/n! < 3$.
Por el axioma de completitud de los números reales, toda sucesión monótona y acotada converge.
El límite de esta sucesión es precisamente el número $e \approx 2.71828$, cuya existencia está garantizada por la completitud de los números reales. Este resultado demuestra cómo las propiedades topológicas permiten establecer la existencia de constantes matemáticas fundamentales.

4. La Recta Real y su Representación Geométrica

La representación geométrica de los números reales mediante la recta real establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de una línea recta infinita y los elementos del conjunto de los números reales. Esta identificación geométrica permite visualizar las propiedades algebraicas y topológicas del conjunto de manera intuitiva, donde la ordenación de los números se corresponde con la posición relativa de los puntos en la recta. La densidad se manifiesta en el hecho de que entre cualesquiera dos puntos de la recta siempre existen infinitos puntos intermedios, mientras que la completitud garantiza que no hay "huecos" en la representación. El concepto de distancia entre dos números reales a y b, definida como $|a - b|$, se corresponde directamente con la distancia geométrica entre los puntos correspondientes en la recta. Esta representación geométrica facilita la comprensión de conceptos como intervalos, entornos y límites, fundamentales para el desarrollo del análisis matemático.

La aplicación práctica de esta representación geométrica se encuentra en múltiples campos, desde la cartografía hasta la programación de videojuegos. En los sistemas de posicionamiento global (GPS), las coordenadas de ubicación se representan mediante números reales que corresponden a posiciones específicas en la superficie terrestre. La precisión de estos sistemas depende de la capacidad de representar ubicaciones con exactitud arbitraria, lo cual es posible gracias a la densidad de los números reales. En el desarrollo de gráficos por computadora, las coordenadas de los objetos tridimensionales se almacenan como números reales (típicamente en formato de punto flotante), permitiendo representar posiciones, rotaciones y escalas con la precisión necesaria para generar imágenes realistas. La recta real también se utiliza en la programación de animaciones, donde los valores de tiempo y las interpolaciones entre diferentes estados requieren la continuidad que proporciona esta representación geométrica.

Se propone el siguiente ejercicio práctico: determinar la distancia entre los puntos que representan los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta real, y ubicar el punto medio del segmento que los une.
Se calcula la distancia como $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ (ya que $\sqrt{3} > \sqrt{2}$).
Aplicando la racionalización: $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})/(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (3 - 2)/(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1/(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
Racionalizando nuevamente el denominador: $1(\sqrt{3} - \sqrt{2})/((\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/(3 - 2) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
Por lo tanto, la distancia es $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318$. El punto medio se encuentra en $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/2 \approx 1.573$. Este ejercicio demuestra cómo las operaciones algebraicas con números irracionales se traducen directamente en medidas geométricas sobre la recta real, consolidando la conexión entre la abstracción algebraica y la intuición geométrica.

5. Construcción por Cortaduras de Dedekind

La construcción de los números reales mediante cortaduras de Dedekind representa uno de los métodos más elegantes y rigurosos para formalizar el concepto de número real. Una cortadura de Dedekind se define como una partición del conjunto de números racionales en dos subconjuntos no vacíos A y B, tales que $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, todo elemento de A es menor que todo elemento de B, A no tiene elemento máximo, y B no tiene elemento mínimo. Cada cortadura define un único número real: si existe un racional r tal que $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$, entonces la cortadura representa el número racional r; en caso contrario, la cortadura define un número irracional. Este método permite completar el conjunto de los racionales añadiendo exactamente los números necesarios para llenar todos los "huecos" existentes. La construcción de Dedekind tiene la ventaja de ser conceptualmente clara y de preservar naturalmente las propiedades de orden de los números racionales.

Un ejemplo ilustrativo de esta construcción se encuentra en la definición de constantes matemáticas fundamentales utilizadas en ingeniería y ciencias aplicadas. La constante π, esencial en cálculos relacionados con geometría circular y análisis de Fourier, puede definirse mediante la cortadura A = {x ∈ ℚ : x < 0 o x es una aproximación racional por defecto del perímetro de un semicírculo de radio 1} y B = {x ∈ ℚ : x es una aproximación racional por exceso del perímetro de un semicírculo de radio 1}. Esta construcción garantiza la existencia de π como número real, permitiendo su utilización en fórmulas de áreas, volúmenes y transformadas trigonométricas. En el diseño de antenas circulares, los ingenieros requieren valores precisos de π para calcular las dimensiones que optimizan la radiación electromagnética. La rigurosidad matemática de la construcción de Dedekind asegura que estos cálculos tengan fundamento teórico sólido, independientemente de la precisión numérica requerida en las aplicaciones prácticas.

Se desarrolla el siguiente ejercicio: construir el número real √3 mediante una cortadura de Dedekind y verificar sus propiedades.
Se define $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 > 3\}$.
Se verifica que $A \cup B = \mathbb{Q}$ y $A \cap B = \emptyset$. Para demostrar que A no tiene máximo, se toma cualquier elemento $a \in A$ con $a > 0$ y $a^2 < 3$.
Se construye $a' = a + (3 - a^2)/(2a + 1)$, donde se puede verificar que $a' > a$ y $(a')^2 < 3$ mediante cálculo algebraico directo. Similarmente, B no tiene mínimo.
La cortadura (A, B) define el número real √3. Para verificar que $(\sqrt{3})^2 = 3$, se demuestra que 3 es la única cota superior de $\{x^2 : x \in A, x > 0\}$ y la única cota inferior de $\{x^2 : x \in B\}$.
Este resultado confirma que √3 es el número real cuyo cuadrado es exactamente 3, estableciendo la coherencia entre la construcción abstracta y las propiedades aritméticas esperadas.

6. Construcción por Sucesiones de Cauchy

La construcción de los números reales mediante sucesiones de Cauchy ofrece una perspectiva alternativa que enfatiza el aspecto dinámico de la convergencia y la completitud. Una sucesión de Cauchy en los números racionales se define como una sucesión $\{a_n\}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural N donde $|a_m - a_n| < \varepsilon$ para todos $m, n > N$. El conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales se organiza mediante una relación de equivalencia: dos sucesiones son equivalentes si su diferencia converge a cero. Cada clase de equivalencia representa un número real único, donde las sucesiones convergentes de racionales representan números racionales, y las no convergentes definen números irracionales. Esta construcción tiene la ventaja de conectar directamente con la intuición de aproximación numérica y con los métodos computacionales utilizados para calcular valores aproximados de números reales. La completitud se garantiza por construcción, ya que toda sucesión de Cauchy en este espacio es convergente por definición.

Esta perspectiva encuentra aplicación natural en algoritmos numéricos y métodos computacionales utilizados en ciencias aplicadas y ingeniería. Los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales, como el método de Newton-Raphson, generan sucesiones de aproximaciones que, bajo condiciones apropiadas, forman sucesiones de Cauchy convergentes hacia la solución exacta. En simulaciones numéricas de sistemas físicos complejos, como la dinámica de fluidos o la propagación de ondas electromagnéticas, se utilizan métodos de diferencias finitas que producen sucesiones de aproximaciones cada vez más precisas. La teoría de sucesiones de Cauchy proporciona el marco teórico que garantiza la convergencia de estos métodos hacia soluciones matemáticamente válidas. En el procesamiento digital de señales, los filtros adaptativos utilizan algoritmos que generan sucesiones de coeficientes que convergen hacia valores óptimos, proceso que se fundamenta en la completitud de los números reales construidos mediante sucesiones de Cauchy.

Para ilustrar esta construcción, se considera el ejercicio de definir el número e mediante la sucesión de Cauchy $a_n = (1 + 1/n)^n$.
Se demuestra que esta sucesión es de Cauchy calculando $|a_m - a_n|$ para m, n suficientemente grandes.
Utilizando el desarrollo $a_n = \Sigma_{k=0}^n (1/k!)(1 - 1/n)(1 - 2/n)...(1 - (k-1)/n)$, se establece que para $\varepsilon > 0$ dado, existe N tal que, para $m, n > N$, la diferencia $|a_m - a_n|$ puede acotarse por términos que involucran series convergentes de factoriales.
Específicamente, se demuestra que $|a_m - a_n| < 2/\sqrt{n}$ para n suficientemente grande, lo que confirma la propiedad de Cauchy.
La clase de equivalencia de esta sucesión define el número real $e \approx 2.71828$.
Este resultado establece la existencia de e como límite de aproximaciones racionales, proporcionando tanto el fundamento teórico como el método computacional para calcular esta constante fundamental con cualquier precisión deseada.

7. Axioma del Supremo y sus Consecuencias

El axioma del supremo constituye la propiedad fundamental que distingue a los números reales de otros sistemas numéricos ordenados, estableciendo que todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente posee una cota superior mínima o supremo. Esta propiedad, también conocida como completitud ordinal, implica que no existen "huecos" en la estructura ordinal de los números reales. El supremo de un conjunto A, denotado sup(A), se define como el menor de todos los números que son mayores o iguales a todos los elementos de A. Dualmente, el ínfimo o infimum, inf(A), es el mayor de todos los números que son menores o iguales a todos los elementos de A. La importancia de este axioma radica en que permite demostrar teoremas fundamentales del análisis, como el teorema del valor intermedio, el teorema de Bolzano-Weierstrass, y la convergencia de sucesiones monótonas acotadas. Sin esta propiedad, muchos resultados centrales del cálculo diferencial e integral no serían válidos.

Las aplicaciones prácticas del axioma del supremo se manifiestan en problemas de optimización y análisis de sistemas dinámicos. En economía, cuando se busca maximizar una función de utilidad sujeta a restricciones presupuestarias, la existencia del supremo garantiza que existe un valor máximo alcanzable o que se puede aproximar arbitrariamente cerca del óptimo teórico. En ingeniería de control, el análisis de estabilidad de sistemas requiere determinar el supremo de ciertas funciones sobre dominios acotados, como en el cálculo de la norma infinito de funciones de transferencia. Los algoritmos de optimización global utilizan el principio del supremo para establecer cotas superiores que guían la búsqueda hacia soluciones óptimas. En el diseño de estructuras, la carga máxima que puede soportar un material se relaciona con el supremo de los esfuerzos admisibles bajo diferentes condiciones de carga, donde la completitud de los números reales asegura que este valor límite esté bien definido matemáticamente.

Se propone resolver el siguiente ejercicio: encontrar sup{1 - 1/n : n ∈ ℕ} y demostrar que es efectivamente el supremo.
El conjunto A = {1 - 1/n : n ∈ ℕ} = {0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...} está acotado superiormente por 1, ya que 1 - 1/n < 1 para todo n ∈ ℕ. Se afirma que sup(A) = 1.
Para demostrarlo, se verifica que: (1) 1 es cota superior: 1 - 1/n ≤ 1 para todo n ∈ ℕ; (2) 1 es la menor cota superior: para cualquier ε > 0, se debe encontrar un elemento de A mayor que 1 - ε.
Se elige $n_0 > 1/\varepsilon$, entonces $1 - 1/n_0 > 1 - \varepsilon$. Por ejemplo, si ε = 0.01, se toma $n_0 = 101$, entonces 1 - 1/101 = 100/101 ≈ 0.99 > 0.99 = 1 - 0.01. Por lo tanto, sup(A) = 1, aunque 1 ∉ A.
Este ejercicio ilustra cómo el axioma del supremo permite identificar valores límite que pueden no pertenecer al conjunto original, concepto fundamental para entender la completitud de los números reales.