TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
VIGILADA MINEDUCACIÓN

MATEMÁTICAS

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Operaciones con Expresiones Algebraicas: Binomios y Términos Semejantes

1. **Binomios: Conceptos Fundamentales y Operaciones Básicas**

Los binomios representan una categoría específica dentro de las expresiones algebraicas, caracterizándose por estar conformados exactamente por dos términos algebraicos unidos mediante operaciones de suma o resta. Se comprende que la estructura básica de un binomio responde a la forma general a + b o a - b, donde cada componente puede incluir variables, coeficientes numéricos y exponentes. Las operaciones básicas con binomios incluyen la suma, resta, multiplicación y división, cada una con procedimientos específicos que se fundamentan en las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa. Se analiza que el dominio de estas operaciones constituye la base para el desarrollo de productos notables, factorización y resolución de ecuaciones cuadráticas más complejas.

En el ámbito de la ingeniería estructural, se implementa el concepto de binomios para calcular fuerzas resultantes y momentos en vigas. Por ejemplo, cuando se determina la carga total sobre una viga que soporta tanto cargas puntuales como distribuidas, se expresan mediante binomios como ($P_1 + P_2$) para cargas puntuales y ($w_1L_1 + w_2L_2$) para cargas distribuidas. De manera similar, en el análisis económico se utilizan binomios para representar funciones de costo total, donde los costos fijos y variables se combinan en expresiones como (CF + CV), permitiendo calcular variaciones en la rentabilidad cuando cambian los volúmenes de producción.

Ejercicio suma de binomios:
Dados A = 5x + 3 y B = 2x - 7, calcular A + B.

- Paso 1: Se escriben ambos binomios manteniendo sus signos originales: (5x + 3) + (2x - 7).
- Paso 2: Se eliminan los paréntesis, conservando los signos de cada término: 5x + 3 + 2x - 7.
- Paso 3: Se identifican los términos semejantes, donde 5x y 2x comparten la misma variable con igual exponente: (5x + 2x) + (3 - 7).
- Paso 4: Se realizan las operaciones: 5x + 2x = 7x y 3 - 7 = -4.
- Paso 5: Se obtiene el resultado final A + B = 7x - 4, verificando que se mantiene la estructura binomial.

Ejercicio resta de binomios:
Dados C = $4x^2 + 6$ y D = $x^2 - 9$, calcular C - D.

- Paso 1: Se plantea la operación aplicando correctamente el signo de sustracción: $(4x^2 + 6) - (x^2 - 9)$.
- Paso 2: Se distribuye el signo negativo al segundo binomio, cambiando los signos de todos sus términos: $4x^2 + 6 - x^2 + 9$.
- Paso 3: Se agrupan los términos semejantes: $(4x^2 - x^2) + (6 + 9)$.
- Paso 4: Se simplifican las operaciones: $4x^2 - x^2 = 3x^2$ y 6 + 9 = 15.
- Paso 5: Se establece el resultado C - D = $3x^2 + 15$, confirmando la aplicación correcta de la propiedad distributiva del signo negativo.

Ejercicio multiplicación de binomios:
Dados E = 3x + 4 y F = 2x - 5, calcular E × F.

- Paso 1: Se aplica la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer binomio por cada término del segundo: $(3x + 4)(2x - 5) = 3x(2x) + 3x(-5) + 4(2x) + 4(-5)$.
- Paso 2: Se realizan las multiplicaciones individuales: $3x \times 2x = 6x^2$, luego $3x \times (-5) = -15x$, después $4 \times 2x = 8x$, y finalmente $4 \times (-5) = -20$.
- Paso 3: Se obtiene la expresión completa: $6x^2 - 15x + 8x - 20$.
- Paso 4: Se identifican y combinan términos semejantes: $-15x + 8x = -7x$.
- Paso 5: Se presenta el resultado final $E \times F = 6x^2 - 7x - 20$, observando que el producto de dos binomios genera un trinomio.

2. Términos Semejantes: Identificación y Simplificación

Los términos semejantes constituyen elementos algebraicos que poseen idéntica parte literal, es decir, las mismas variables elevadas a los mismos exponentes, diferenciándose únicamente en sus coeficientes numéricos. Se comprende que esta característica fundamental permite la simplificación de expresiones algebraicas mediante la combinación de dichos términos, aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y resta. La identificación correcta de términos semejantes requiere un análisis detallado de la estructura de cada término, considerando tanto las variables presentes como sus respectivos exponentes. Se analiza que este proceso de simplificación resulta esencial para reducir la complejidad de las expresiones y facilitar operaciones posteriores como factorización y resolución de ecuaciones.

En el contexto de la contabilidad empresarial, se implementa el concepto de términos semejantes para consolidar cuentas que representan la misma categoría de activos o pasivos. Por ejemplo, en un balance general se pueden encontrar múltiples partidas de inventario expresadas como $25000P + 15000M + 18000P + 12000M$, donde P representa productos terminados y M materias primas. Se observa que los términos 25000P y 18000P son semejantes, así como 15000M y 12000M, permitiendo la consolidación en categorías específicas para obtener una visión más clara de la composición patrimonial de la empresa y facilitar la toma de decisiones financieras.

Ejercicio identificación de términos semejantes:
Simplificar la expresión $8a^2 - 3ab + 5a^2 + 7ab - 2a^2 + ab$.

- Paso 1: Se identifican todos los términos según su parte literal: términos con a^2 ($8a^2$, $5a^2$, $-2a^2$), términos con ab ($-3ab$, $7ab$, ab).
- Paso 2: Se agrupan los términos semejantes utilizando paréntesis para mayor claridad: $(8a^2 + 5a^2 - 2a^2) + (-3ab + 7ab + ab)$.
- Paso 3: Se combinan los términos con a^2: $8a^2 + 5a^2 - 2a^2 = (8 + 5 - 2)a^2 = 11a^2$.
- Paso 4: Se combinan los términos con ab: $-3ab + 7ab + ab = (-3 + 7 + 1)ab = 5ab$.
- Paso 5: Se establece el resultado final: $11a^2 + 5ab$, verificando que no existen más términos semejantes para simplificar.

Ejercicio expresiones con múltiples variables:
Simplificar $6x^2y - 4xy^2 + 9x^2y + 2xy^2 - x^2y + 7xy^2$.

- Paso 1: Se clasifican los términos según su parte literal completa: términos con x^2y ($6x^2y$, $9x^2y$, $-x^2y$) y términos con xy^2 ($-4xy^2$, $2xy^2$, $7xy^2$).

- Paso 2: Se agrupan los términos semejantes: $(6x^2y + 9x^2y - x^2y) + (-4xy^2 + 2xy^2 + 7xy^2)$.
- Paso 3: Se simplifican los términos con x^2y: $6 + 9 - 1 = 14$, obteniendo $14x^2y$.
- Paso 4: Se simplifican los términos con xy^2: $-4 + 2 + 7 = 5$, obteniendo $5xy^2$.
- Paso 5: Se presenta la expresión simplificada: $14x^2y + 5xy^2$, confirmando que cada término resultante tiene una parte literal única y diferente.

Ejercicio expresiones complejas con términos independientes:
Simplificar $12m^3 - 8m^2 + 15 - 5m^3 + 3m^2 + 7m - 2m + 9 - 4$.

- Paso 1: Se identifican y clasifican todos los términos: con m^3 ($12m^3$, $-5m^3$), con m^2 ($-8m^2$, $3m^2$), con m ($7m$, $-2m$), e independientes (15, 9, -4).
- Paso 2: Se agrupan por categorías: $(12m^3 - 5m^3) + (-8m^2 + 3m^2) + (7m - 2m) + (15 + 9 - 4)$.
- Paso 3: Se simplifican los términos con m^3: $12 - 5 = 7$, resultando $7m^3$.
- Paso 4: Se simplifican los términos con m^2: $-8 + 3 = -5$, resultando $-5m^2$.
- Paso 5: Se simplifican los términos con m: $7 - 2 = 5$, resultando $5m$.
- Paso 6: Se simplifican los términos independientes: $15 + 9 - 4 = 20$.
- Paso 7: Se establece la expresión final: $7m^3 - 5m^2 + 5m + 20$, ordenada de mayor a menor grado.

3. Construcción de Ecuaciones a partir de Expresiones Algebraicas

La construcción de ecuaciones representa el proceso sistemático mediante el cual se establecen relaciones de igualdad entre expresiones algebraicas, constituyendo la herramienta fundamental para la modelación matemática de situaciones reales y la resolución de problemas cuantitativos. Se comprende que una ecuación surge cuando se igualan dos expresiones algebraicas, creando una condición de equilibrio que debe satisfacerse para determinados valores específicos de las variables involucradas. El proceso de construcción requiere la identificación precisa de las cantidades conocidas e incógnitas, así como el establecimiento claro de las relaciones funcionales existentes entre ellas. Se analiza que la estructura algebraica desarrollada previamente, incluyendo el manejo eficiente de binomios y la simplificación mediante términos semejantes, proporciona las herramientas metodológicas necesarias para formular ecuaciones coherentes y proceder a su resolución sistemática.

En el ámbito de la planificación urbana, se implementa la construcción de ecuaciones para optimizar la distribución de espacios y recursos en proyectos de desarrollo. Por ejemplo, al diseñar un parque urbano donde el área destinada a zonas verdes debe ser el triple del área de senderos, y el área total disponible es de 2400 metros cuadrados, se establece un sistema donde x representa el área de senderos y 3x el área de zonas verdes. Se observa que la ecuación de restricción se formula como $x + 3x = 2400$, incorporando conceptos de términos semejantes para su simplificación. Esta metodología se extiende también a problemas de asignación presupuestaria, distribución de recursos humanos y planificación de infraestructura en proyectos de ingeniería civil y arquitectura.

Ejercicio construcción de ecuaciones lineales:
Un comerciante mezcla dos tipos de café, donde el precio del café tipo A es \$15 por kilogramo y del tipo B es \$25 por kilogramo. Si desea obtener 40 kilogramos de mezcla a un precio promedio de \$20 por kilogramo, determinar las cantidades de cada tipo.

- Paso 1: Se definen las variables donde x representa los kilogramos de café tipo A, entonces (40 - x) representa los kilogramos de café tipo B.
- Paso 2: Se construye la ecuación basada en el costo total: $15x + 25(40 - x) = 20(40)$.
- Paso 3: Se desarrolla la expresión aplicando la propiedad distributiva: $15x + 25(40) - 25x = 800$, resultando $15x + 1000 - 25x = 800$.
- Paso 4: Se combinan términos semejantes: $(15x - 25x) + 1000 = 800$, obteniendo $-10x + 1000 = 800$.
- Paso 5: Se despeja la variable: $-10x = 800 - 1000 = -200$, por tanto, $x = 20$.
- Paso 6: Se calculan las cantidades: café tipo A = 20 kg y café tipo B = 40 - 20 = 20 kg.
- Paso 7: Se verifica: $15(20) + 25(20) = 300 + 500 = 800 = 20(40)$, confirmando la solución.

Ejercicio construcción de ecuaciones cuadráticas:
Un terreno rectangular tiene un perímetro de 60 metros, y su área es de 200 metros cuadrados. Determinar las dimensiones del terreno.

- Paso 1: Se definen las variables donde x representa el ancho y y la longitud del terreno.
- Paso 2: Se establecen las ecuaciones del sistema: perímetro $2x + 2y = 60$ y área $xy = 200$.
- Paso 3: Se simplifica la primera ecuación: $x + y = 30$, por tanto $y = 30 - x$.
- Paso 4: Se sustituye en la ecuación del área: $x(30 - x) = 200$.
- Paso 5: Se expande: $30x - x^2 = 200$, reordenando: $x^2 - 30x + 200 = 0$.
- Paso 6: Se aplica la fórmula cuadrática: $x = (30 \pm \sqrt{(900 - 800)})/2 = (30 \pm \sqrt{100})/2 = (30 \pm 10)/2$.
- Paso 7: Se obtienen las soluciones: $x_1 = 20$ y $x_2 = 10$.
- Paso 8: Se determinan las dimensiones correspondientes: si $x = 20$, entonces $y = 10$; si $x = 10$, entonces $y = 20$. Por tanto, las dimensiones son 20 metros por 10 metros.

Ejercicio construcción de sistemas de ecuaciones:
Una empresa produce dos productos A y B. El producto A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de materia prima, mientras que el producto B requiere 2 horas de mano de obra y 4 unidades de materia prima. Si se dispone de 18 horas de mano de obra y 20 unidades de materia prima, determinar cuántas unidades de cada producto se pueden fabricar para utilizar exactamente todos los recursos.

- Paso 1: Se definen las variables donde x representa unidades del producto A e y unidades del producto B.
- Paso 2: Se construyen las ecuaciones basadas en las restricciones de recursos: mano de obra $3x + 2y = 18$ y materia prima $2x + 4y = 20$.
- Paso 3: Se simplifica la segunda ecuación dividiendo entre 2: $x + 2y = 10$, por tanto, $x = 10 - 2y$.
- Paso 4: Se sustituye en la primera ecuación: $3(10 - 2y) + 2y = 18$.
- Paso 5: Se desarrolla: $30 - 6y + 2y = 18$, combinando términos semejantes: $30 - 4y = 18$. Paso 6: Se despeja y: $-4y = 18 - 30 = -12$, por tanto $y = 3$.
- Paso 7: Se calcula x: $x = 10 - 2(3) = 10 - 6 = 4$.

- Paso 8: Se verifica la solución: mano de obra $3(4) + 2(3) = 12 + 6 = 18$ ✓, materia prima $2(4) + 4(3) = 8 + 12 = 20$ ✓.
- La empresa puede producir 4 unidades del producto A y 3 unidades del producto B.