

# 2022 第二届天府杯全国大学生数学建模竞赛论文

## 题 目 基于最优化方法的地铁运营与规划

### 摘 要

城市轨道交通是缓解城市拥挤的重要途径之一。城市轨道交通的设计难度高、建设工期长,修建完成后线路无法更改,后期的运行管理对便捷安全出行也有着重要的作用。因此城市轨道交通的合理设计、站点规划和协调运行问题显得尤为重要。本文基于杭州市轨道交通的有关数据,分别对以上问题进行研究。

对于问题一,我们首先根据附件 3 中的数据作出各线路各站点的进出站人数变化趋势图,根据曲线的变化趋势,我们判断采用**指数平滑模型**能够较好地拟合地铁站点实际的人数变化曲线。此外我们对指数平滑模型进行了优化,通过使用**均方误差(MSE)**作为衡量标准,得出了优化后的指数平滑模型,得到了更加精确的预测结果。

对于问题二,我们采用了两个模型:**多目标发车间隔优化模型**和**最优发车时间间隔模型**。在第一个模型中,根据附件 3 中的数据以及目前杭州市地铁发车方式的基本信息,通过对乘车舒适度和乘车满载率进行研究分析,发现当前发车方案的不合理,因此根据舒适度与满载率之间的关系,我们建立了多目标发车间隔优化模型,采用基于 NSGA-II 的多目标遗传算法求解该问题的 Pare-to 解集,并得到了最优参数。最后,综合考虑了相邻时段的发车间隔的稳定性,确定了各时间段的发车间隔,结果见表 6-2。在第二个模型中,首先,我们分别建立了乘客候车满意度、乘车满意度和地铁运营满意度为目标函数的多目标优化模型;其次,通过对各个目标函数进行加权将多目标优化模型单一化成为单目标优化模型;最后,我们对三条线路的客流数据进行计算得出最优发车策略为:高峰时段发车间隔为 6 分钟、平峰时段发车间隔为 7 分钟,同时计算出此策略下的综合满意度更高,证明优化后的发车策略更加合理。

对于问题三,我们同样采用了两个模型:**站点选择的 AHP 综合评价模型**和**车站选取的覆盖量模型**。在第一个模型中,我们将杭州以原 1、2、4 号线的站点间的平均距离作为划分区域的长度,建立 AHP 综合评价模型来将区域的相关属性进行定量化分析,构建的体系划分为 4 个方面,7 次级影响因子。得出的 AHP 评价结果以此来作为设计站点选择的参考。在路线的设计上采用了贪心算法,首先确定出最优地铁站中心,将线路问题从中心划分为两个子问题,再用贪心算法将其余的站点方向逐步分成多个子问题,求出局部最优解,最后综合结果得出地铁线路的设计方案。在第二个模型中,我们通过覆盖量模型对地铁站点的人口覆盖程度进行分析,根据公交站点位置与居民下车变更交通方式的便捷性,得出了地铁最优站距与站点的布设方案。结果表明:新增线路优化后共有 15 个站点,人口覆盖量为 314268 人。

**关键词:** 轨道交通; 指数平滑; 多目标遗传算法; AHP; 贪心算法

目 录

一、问题重述.....2

    1.1 问题背景.....2

    1.2 需要解决的问题.....2

二、问题分析.....2

    2.1 问题 1 的分析.....2

    2.2 问题 2 的分析.....2

    2.3 问题 3 的分析.....3

三、模型假设.....3

四、定义与符号说明.....3

五、模型的准备.....3

    5.1 对地铁乘客数量与时间特性的调查分析.....3

    5.2 地铁乘客流动特性的调查分析.....4

六、模型的建立与求解.....5

    6.1 问题 1 的模型建立与求解.....5

        6.1.1 基于指数平滑法的地铁进出站人口流量预测模型.....5

    6.2 问题 2 的模型建立与求解.....6

        6.2.1 模型 I：多目标发车间隔优化模型..... 6

        6.2.2 模型 II：最优发车时间间隔模型..... 9

    6.3 问题 3 的模型建立与求解.....12

        6.3.1 模型 I：站点选择的 AHP 综合评价模型..... 12

        6.3.2 模型 II：车站选取的覆盖量模型..... 16

八、模型评价与推广.....18

    8.1 模型的优点.....18

    8.2 模型的缺点.....19

    8.3 模型的推广.....19

九、参考文献.....20

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

在城市交通环境日益拥挤的今天,发展以城市轨道交通为核心的骨干交通项目是改善城市交通环境的最基本方法之一。城市轨道交通的快速发展有效地缓解了当前城市交通压力,极大地方便了城区居民的生活出行。在城市轨道交通网络中,地铁是不可或缺的重要组成部分。地铁指的是以地下运行为主的,高密度、高运量城市轨道交通系统,具有快速、准时、节能、节约地面空间等优点。鉴于地铁建成后给城市居民带来的诸多优点,中国大陆地区许多城市都将地铁建设纳入了城市长远发展规划当中。

目前在全国范围内有地铁线路运营的城市共四十三个。然而,因其高昂的建设成本、后期运营成本以及便民的收费标准,众多地铁线路均存在一定规模的亏损。因此提出合理的地铁建设以及运营方案显得非常重要,特别是对于诸如杭州市这类人口数量较多的城市。

### 1.2 需要解决的问题

**问题一:** 预测 1 小时内 A 线各站点的人流量变化。

**问题二:** 根据人流量数据分析,针对 A、B、C 三条地铁线路,怎样设置发车间隔能够避免早高峰和晚高峰所造成的人流拥堵。

**问题三:** 若你是地铁运营方,考虑到公交站点位置与居民下车变更交通方式的便捷性,你会选择新增哪几条地铁线路。

## 二、问题分析

### 2.1 问题 1 的分析

对于问题一,我们首先根据附件 3 中的数据作出各线路各站点的进出站人数变化趋势图,根据曲线的变化趋势,我们判断采用指数平滑模型能够较好地拟合地铁站点实际的人数变化曲线。此外我们对指数平滑模型进行了优化,通过使用均方误差(MSE)作为衡量标准,得出了优化后的指数平滑模型,从而得到了更加精确的预测结果。

### 2.2 问题 2 的分析

问题 2 要求我们根据杭州市地铁人流量来分析当前杭州市地铁发车方案的合理性,并提出一个最优发车间隔确定模型。根据题目中所给出的附件 2 和附件 3 以及其他相关信息,我们首先建立了多目标行车间隔时间优化模型;采用基于 NSGA-II 的多目标遗传算法求解该问题的 Pareto 解集,得到了最优的参数;最后,综合考虑相邻时段的发车间隔的稳定性,确定了各时间段的发车间隔。此外,我们还建立了一个以乘客满意度和企业满意度加权平均值最大为总体目标的最优发车时间间隔模型。其中,乘客满意度为乘客候车满意度和车内拥挤程度的加权平均值。满意度可以通过隶属度函数,将乘客候车时间和车内人数转换而得。运营企业满意度则可以由运营企业的收益,即客票收入和运营成本之差转换而得。最后通过模型计算优化前后发车方案的满意度,进行对比分析,并给出优化后的发车方案。

## 2.3 问题 3 的分析

对于问题 3，线路规划要与城市发展规划紧密结合，服从城市总体发展以及改造规划，为市民提供方便快捷的交通工具。根据杭州市的现实情况，我们将影响地铁路线规划的设计因素总结归纳为：区域社会经济情况、区域未来发展情况、区域交通发展情况、居民出行特征情况，以此为依据来综合全面性规划线路，可以在这一基础上与当地的现有地铁线路进行连接形成地铁线路网，以提升交通效率。设计的地铁线路的有关数据需要符合实际的设计规范。我们通过站点选择的 AHP 综合评价模型以及覆盖量模型对地铁站点路线的各项指标进行分析，判断地铁线路的人口覆盖程度，在两种模型的比对中，得到了最佳的地铁线路布设方案。

## 三、模型假设

1. 车厢人数均匀分布
2. 各列车的车厢数量恒定
3. 同一时间段的发车间隔固定
4. 每一时间段内客流量均匀到达车站和离开车站
5. 在没有达到最大的车容量时，乘客没有在车站多等待一班车
6. 进行客流量分析时，剔除观光和季节客流的影响
7. 各次列车到达线路终点站或折返站时，车上的乘客全部下车
8. 线路客流需求独立，不受相邻线路运行状况的影响
9. 客流需求独立于发车频率，即不受发车频率的影响

## 四、定义与符号说明

符号定义	符号说明
$Q$	列车定员
$q$	线路的最大断面客流量
$h_{min}, h_{max}$	模拟期间的最小及最大发车间隔
$I$	模拟期间线路发车数
$m_{min}, m_{max}$	模拟期间的最小及最大车辆满载率
$d$	车内乘客站立人员密度
$L$	乘客能够接受的候车时间
$CI$	一致性指标
$CR$	一致性比例

## 五、模型的准备

### 5.1 对地铁乘客数量与时间特性的调查分析

根据现实情况,乘客数量在不同时间的数量是完全不同的。通过对附件 3 中的数据对时间进行处理,得到该日乘客数量随时间变化的分布图。需要根据数据中的数据量走向相同和数量相差不大的时间段归纳合并。通过 Python 得出了 A、B、C 线路各时段进出站人流量的变化趋势图,分别如图 5-1、图 5-2、图 5-3 所示。

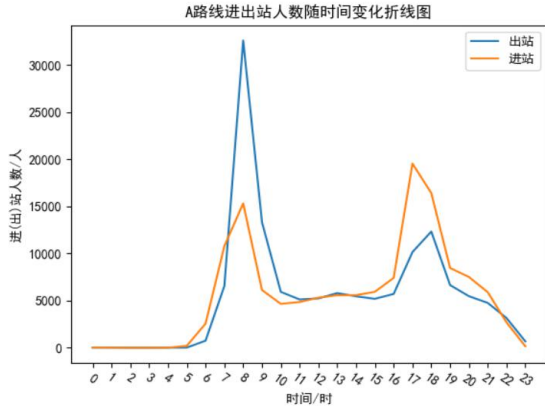


图 5-1 A 线进出站人数分时统计

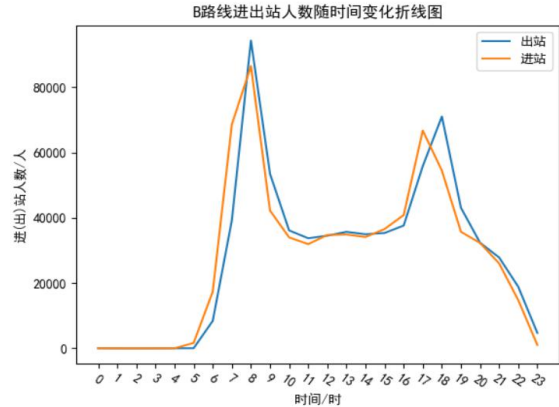


图 5-2 B 线进出站人数分时统计

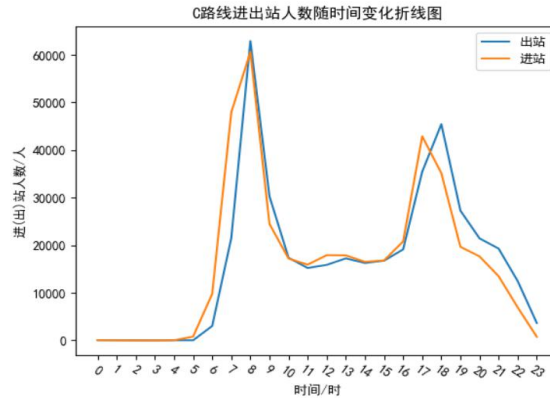


图 5-3 C 线进出站人数分时统计

## 5.2 地铁乘客流动特性的调查分析

根据仿真数据,对各个站点的数据进行处理,通过变化来为研究各线路乘客流动情况提供依据。以此估计出入口流动区域的情况。以下分别是 A、B、C 线路各站点人口流动变化趋势图。

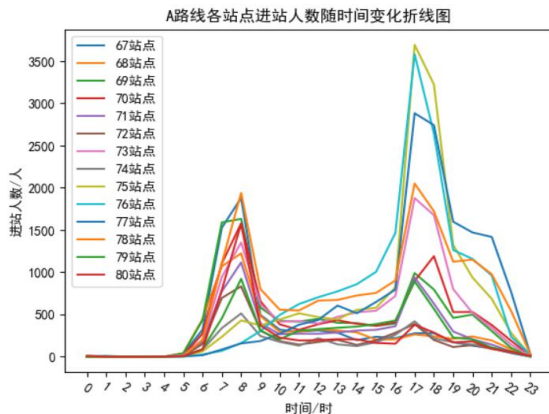


图 5-4 A 线各站点进站人数分时统计

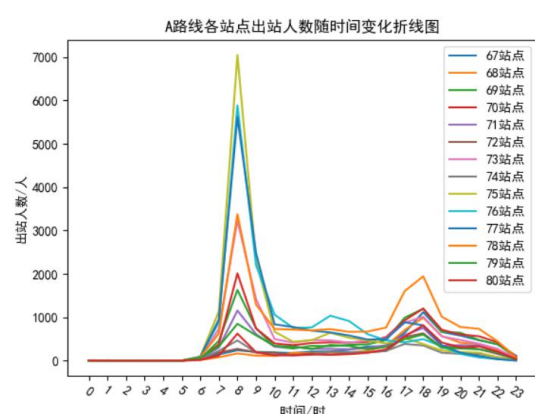


图 5-5 A 线各站点出站人数分时统计



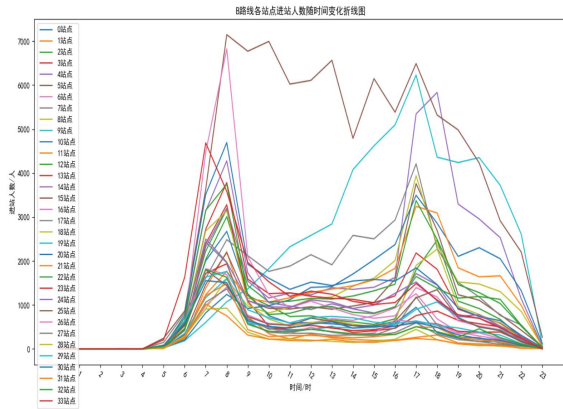


图 5-6 A 线各站点进站人数分时统计

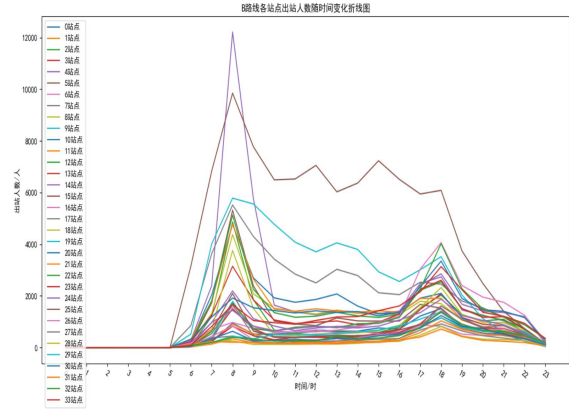


图 5-7 A 线各站点出站人数分时统计

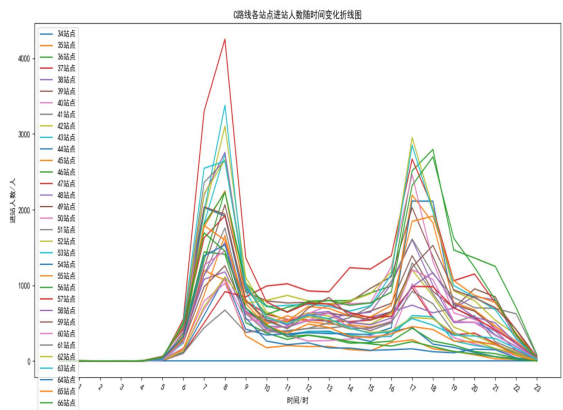


图 5-8 A 线各站点进站人数分时统计

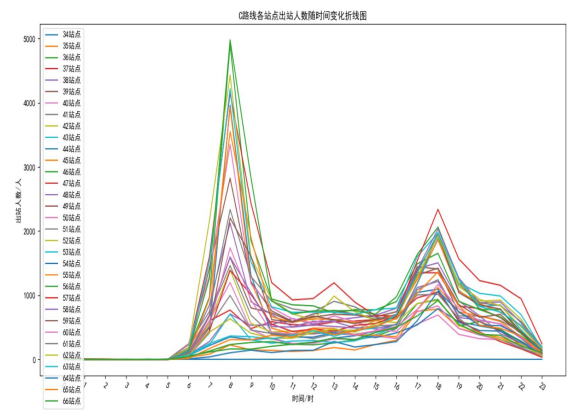


图 5-9 A 线各站点出站人数分时统计

## 六、模型的建立与求解

### 6.1 问题 1 的模型建立与求解

#### 6.1.1 基于指数平滑法的地铁进出站人口流量预测模型

##### 6.1.1.1 基于指数平滑法的地铁进出站人口流量预测模型的原理

指数平滑模型是简单且可靠的预测方法，较为流行的四种模型形式有：Holt 模型、阻尼 Holt 模型、Pegels 模型、阻尼 Pegels 模型。

##### （一）Holt 模型

以下表达式定义了 Holt 模型。

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (1)$$

$$T_t = \gamma(S_{t-1} + T_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1} \quad (2)$$

$$\hat{X}_t(m) = S_t + mT_t \quad (3)$$

式中： $X_t$  是实际观测值， $\alpha$  和  $\gamma$  是平滑参数， $\hat{X}_t(m)$  是  $m$  步之前的预测值。

##### （二）Pegels 模型

以下表达式定义了 Pegels 模型。

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (4)$$

$$R_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma)R_{t-1} \tag{5}$$

$$\hat{X}_t(m) = S_t R_t^m \tag{6}$$

式中： $R_t$  是局部增长率， $S_t/S_{t-1}$  是平滑连续率， $S_t$  是局部水平， $X_t$  是实际观察值。  
通过平滑局部水平  $S_t$  连续率  $S_t/S_{t-1}$ ，Pegels 模型的多元趋势模型估计出局部增长率  $R_t$ ，并导入到预测方程  $\hat{X}_t(m)$  中。

6.1.1.2 基于指数平滑法的地铁进出站人口流量预测模型的求解

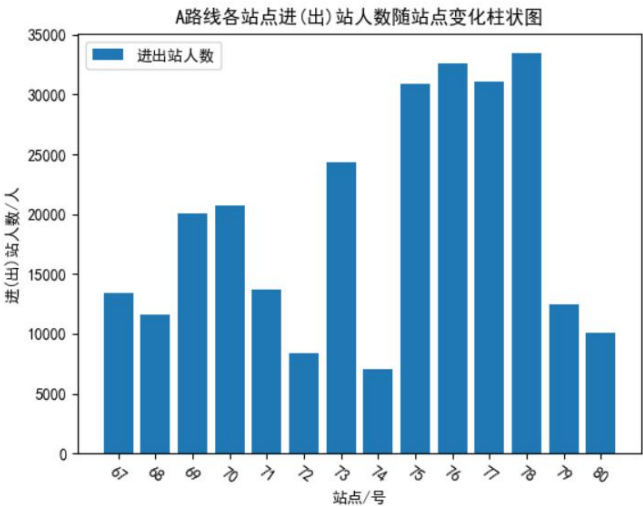


图 6-1 A 线各站点人口流量预测柱状图

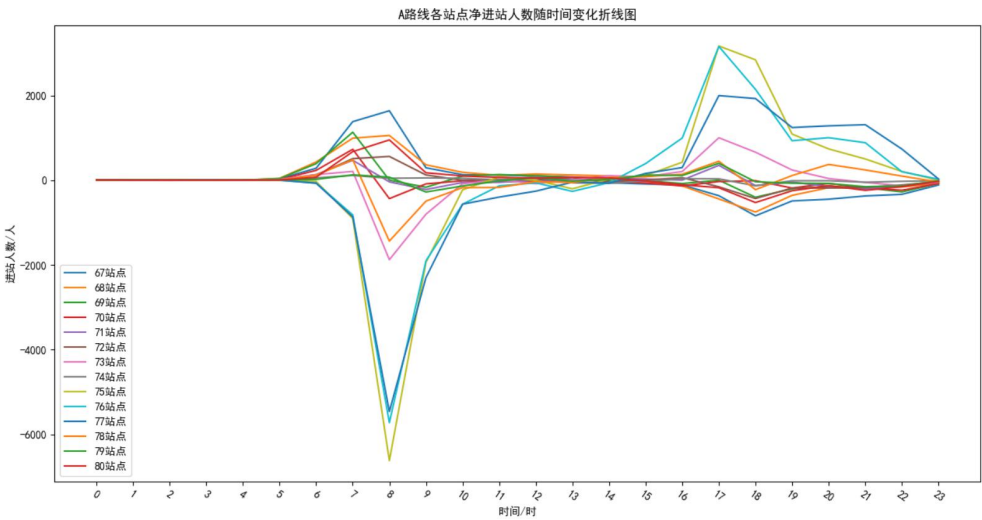


图 6-2 A 线各站点净进站人口流量预测柱状图

6.2 问题 2 的模型建立与求解

6.2.1 模型 I：多目标发车间隔优化模型

6.2.1.1 多目标发车间隔优化模型的分析及建立

(1) 乘客舒适度

地铁车厢拥挤程度直接影响乘客的乘车舒适度，用车辆内乘客站立人员密度作为衡量舒适度的标准，也就是定员标准。《城市轨道交通工程项目建设标准》建议的车辆内

乘客站立人员密度评价标准见表 6-1。

表 6-1 车内乘客站立人员密度评价标准表

站席密度 (人/m <sup>2</sup> )	乘客拥挤情况	评价标准
3	乘客可以自由流动, 十分宽松	舒适
4	有较大的宽松度, 乘客可以看书报	良好
5	有一定宽松度, 部分乘客可以看书报	良好
6	感到不宽松、不拥挤、稍可活动, 是舒适度的临界状态	临界状态
7	感到有些拥挤, 站席范围有些突破	有些拥挤
8	身体有接触, 需错位排列, 并突破站席范围, 感到比较拥挤	比较拥挤
9	平均每人占有的空间非常拥挤, 需突破站席范围, 挤入座区, 此情况偶有可能出现 (车辆制造强度必须满足)	非常拥挤 (超员标准)
10	乘客突破站席范围, 挤入座区, 极为拥挤, 难以忍受, 影响上下车行为和总时间, 属极端情况	难以忍受

车内乘客站立人员密度  $d$  可表示为:

$$d = (\frac{q}{I} - S) / A \quad (7)$$

式中:  $q$  为站点的最大断面客流量;  $I$  为模拟期间线路发车数;  $S$  为列车坐席数量;  $A$  为列车立席分配面积。

对于乘客而言, 当舒适度空间恰好接触但不挤压乘客身体, 乘客可小幅活动, 此时乘客的舒适度良好, 随着乘客数量的增加, 舒适度逐渐降低, 根据表 6-1 的标准, 可以构建乘客舒适度的分段效用函数如下:

$$U(d) = \begin{cases} 9, d \leq 6 \\ 7, 6 < d \leq 7 \\ 5, 7 < d \leq 8 \\ 1, 8 < d \end{cases} \quad (8)$$

## (2) 满载程度衡量

地铁运营管理者为了降低经营成本, 往往会增大发车间隔以增加列车的满载程度。满载率一般可用车内实际的乘客数与车辆定员的比值来表示, 可构建以下效用函数对满载率进行衡量。

$$z_1 = 1 / \{1 + \alpha \exp[-\beta q(QI)]\} \quad (9)$$

式中:  $\alpha$  为成本参数;  $\beta$  为强度系数。

根据上述分析, 构建地铁列车行车间隔优化模型如下:

$$\max z_1 = U(d) \quad (10)$$

$$\max z_2 = 1 / \{1 + \alpha \exp[-\beta q/(QI)]\} \quad (11)$$

$$h_1 \leq \frac{T}{I} \leq h_2 \quad (12)$$

s.t.

$$m_1 \leq \frac{q}{QI} \leq m_2, I \text{ 为正整数} \quad (13)$$

其中: 式 (12) 为发车间隔限制约束; 式 (13) 为车辆满载率约束。



### 6.2.1.2 求解算法

由于该模型由 2 个相互冲突的目标函数构成, 因而需要寻求该模型的 Pare-to 最优集。遗传算法作为一种启发式的搜索算法, 在多目标优化问题中得到了广泛的应用。其中, NSGA-II 采用简洁明晰的非劣超排序和排挤机制, 使算法具有逼近 Pare-to 最优前沿的能力, 并采用排挤机制保证得到的 Pare-to 最优解具有良好的散布, 表现出较好的综合性能。本文基于 NSGA-II 设计模型的求解算法。

#### (1) 染色体的构造

采用二进制编码方式表示模拟时间段内的发车数、列车坐席数量  $S$ 、列车厢数  $M$ 、列车立席区分配面积  $A$ , 发车数满足约束条件式 (12) 和式 (13)。

#### (2) 交叉算子

按交叉概率  $p_c$  从父代选择一些染色体, 两两分组, 并对每组染色体进行如下操作: 随机产生两个交换位, 将两条染色体中的基因进行交换, 从而得到两条新的染色体。

#### (3) 变异操作

对 popsize 个染色体以变异概率  $p_m$  进行变异: 对被选择变异染色体的基因, 随机产生一个变异位置, 并重新产生其基因, 从而得到一条新的染色体。

#### (4) 拥挤度选择算子

快速非支配排序: 设  $n_i$  为种群中支配个体  $i$  的个体数,  $S_i$  为种群中被个体  $i$  支配的个体集合。

快速非劣分层的具体步骤为:

**步骤 1:** 找出种群中所有  $n_i=0$  的个体, 并保存在当前集合  $F_1$  中。

**步骤 2:** 对于当前集合  $F_l$  中的每个个体  $i$ , 遍历  $S_i$  中每个个体  $l$ , 执行  $n_i=n_l+1$ , 如果  $n_i=0$ , 则将  $l$  保存在集合  $H$  中。

**步骤 3:** 记  $F_l$  中得到的个体为第一个非支配层的个体, 并以  $H$  为当前集合, 重复以上操作, 直到整个种群被分层。

确定拥挤度的计算步骤为:

**步骤 1:** 对同层的个体初始化距离, 令每个个体  $i$  的拥挤度初始值  $L[i]_d=0$ 。

**步骤 2:** 对不同的目标函数, 重复步骤 3-1~3-3 操作。

**步骤 3-1:** 对同层的个体按目标  $m$  的函数值进行优劣排序;

**步骤 3-2:** 使得排序边界上的个体具有选择优势, 给定一个大数  $L[0]_d=L[l]_d=\infty$ , 以确保进入下一代;

**步骤 3-3:** 对边界点以外的个体, 求拥挤度:

其中:  $L[i]_m$  为集合  $L$  中的第  $i$  个个体的第  $m$  个目标函数的值;  $f_m^{\max}$ ,  $f_m^{\min}$  为该目标函数的最大值及最小值。

经过快速非支配排序和拥挤度计算, 群体中的每个个体  $i$  都得到两个属性: 非支配序  $i_{\text{rank}}$  和拥挤度  $i_d$ , 进而可以采用轮盘制选择算子进行选择。具体过程为: 对于个体  $i$ 、 $j$ , 当  $i_{\text{rank}} < j_{\text{rank}}$  或  $i_{\text{rank}} = j_{\text{rank}}$  且  $i_d < j_d$  时, 选择  $i$ , 如果两个个体在同一级, 取周围较不拥挤的个体。

### 6.2.1.3 多目标发车间隔优化模型的求解

根据目前杭州市地铁的发车方案, 计算以目前发车方案为条件的地铁满载率, 结果显示在此发车方案下, 地铁满载率在高峰期反而较低, 公共资源未能得到有效利用, 这显然不合理。

对当前发车方案进行发车间隔优化, 选取杭州市 1 号线、2 号线、4 号线, 结合附

件 1，设定参数为：优化后的车厢数  $M$ ，定员为  $400 \times M$  人，列车坐席数量  $S$ ，列车立席区分配面积  $A$ ，最大发车间隔为 16 分钟，最小发车间隔为 2 分钟，最大满载率为 1.1，最小满载率为 0.7。利用本文所设计的模型及算法结合附件 1 的模拟客流对发车间隔进行优化。

经过算法优化后得到最优参数为： $M=4$ ， $S=240$ ， $A=200\text{m}^2$ ，发车时间间隔见表 6-2。

表 6-2 发车时间间隔

时间段	发车间隔（原来）/min	时间段	发车间隔（优化后）/min
6:00-7:00	15	6:00-7:00	15
7:00-8:00	10	7:00-8:00	10
8:00-9:00	6	8:00-11:00	6
9:00-17:00	10	11:00-16:00	10
17:00-19:00	6	16:00-20:00	6
19:00-20:00	10	20:00 之后	15
20:00 之后	15		

## 6.2.2 模型 II：最优发车时间间隔模型

### 6.2.2.1 最优发车时间间隔模型的分析及建立

#### （1）目标函数 1：乘客候车满意度

乘客在候车时均有一定的忍耐程度，当候车时间较长时，乘客将会产生不满的情绪。通常情况下，乘客候车的忍耐程度随着时段的不同而变化。例如，早高峰时段多数出行目的为通勤、通学。因此乘客可以接受的候车时间相对比其他时段就要短一些。

乘客对于候车的满意度通常以候车时间的长短来衡量。候车时间越长则满意度越低，但由于乘客之间的差异使得计算较为复杂。为简化模型，本文以满意率（即满意人数占总乘客人数的比值）近似表示满意度。而满意人数指候车时间小于某一定值的乘客数。当列车到达时，若候车人数超过忍耐时间长度内到达的乘客数，那么候车的乘客中必定存在候车时间超时者。这部分乘客人数等于该站候车总人数减去在忍耐时间长度到达车站的乘客数。又考虑到并非每位乘客总能够搭乘到站后的第一列列车，甚至部分乘客因拥挤等原因选择继续等待若干次列车才上车，此时还应扣除重复计数的乘客数。因此在第  $j$  车在  $i$  站对应的超时乘客数  $u_{ij}$  分为三种情况计算：

**情况 1：**第  $j$  辆车到达  $i$  站，候车者中未有候车超时者时。即当  $P_{ij} - \int_{t_{ij}-L}^{t_{ij}} \lambda_i(t) dt \leq 0$

时：

$$u_{ij} = 0 \quad (14)$$

式中， $P_{ij}$  为第  $j$  辆车到达  $i$  站时候车的乘客数；为  $t$  时刻乘客到达率； $t_{ij}$  为第  $j$  辆车到达  $i$  站的时刻。

**情况 2：**第  $j$  辆车到达  $i$  站，候车者中虽有超时者，但第  $j-1$  辆车开出  $i$  站时，车站无超时者时，即当  $P_{ij} - \int_{t_{ij}-L}^{t_{ij}} \lambda_i(t) dt \leq 0$  且  $P_{ij-1} - \int_{t_{ij-1}-L}^{t_{ij-1}} \lambda_i(t) dt - B_{ij-1} \leq 0$  时：

$$u_{ij} = P_{ij-1} - \int_{t_{ij-1}-L}^{t_{ij-1}} \lambda_i(t) dt \quad (15)$$

**情况 3：**第  $j$  辆车到达  $i$  站，候车者中含有第  $j-1$  辆车到达时超时但未能上车者，即

当  $P_{ij} - \int_{t_{ij}-L}^{t_{ij}} \lambda_i(t) dt \leq 0$  且  $P_{ij-1} - \int_{t_{ij}-L}^{t_{ij}-1} \lambda_i(t) dt - B_{ij-1} > 0$  时:

$$u_{ij} = P_{ij} - \int_{t_{ij}-1}^{t_{ij}} \lambda_i(t) dt - (P_{ij-1} - \int_{t_{ij}-L}^{t_{ij}-1} \lambda_i(t) dt - B_{ij-1}) \quad (16)$$

上述各式中:

$$P_{ij} = P_{ij-1} + \int_{t_{ij}-1}^{t_{ij}} \lambda_i(t) dt - B_{ij-1} \quad (17)$$

其中:

$$B_{ij-1} = \begin{cases} P_{ij-1}, q_{ij-1} \geq p_{ij-1} \\ C_{\max} - q_{ij-1}, \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

式中:

$$q_{ij-1} = C_{\max} - (V_{ij-1} - V_{ij-1} a(t_{ij-1})) \quad (19)$$

$$p_{ij-1}' = p_{ij-1} + \int_{t_{ij}-1}^{t_{ij}'} \lambda_i(t) dt \quad (20)$$

$$t_{ij-1}' = t_{ij-1} + \beta \cdot B_{ij-1} \quad (21)$$

式中:  $V_{ij}$  为在  $i$  站至  $i+1$  站区间内第  $j$  辆车上的乘客数;  $C_{\max}$  为列车最大载客量;  $t_{ij}'$  为第  $j$  辆车在  $i$  站的发车时刻。

以上计算公式具有传递性,可在给定初始状态的情况下,逐车逐站计算乘客候车不满意人数。最后乘客候车满意度目标函数可以表示为:

$$x_w = \frac{\sum_{i=1}^m \int_{T_1}^{T_2} \lambda_i(t) dt - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}}{\sum_{i=1}^m \int_{T_1}^{T_2} \lambda_i(t) dt} \quad (22)$$

## (2) 目标函数 2: 乘客乘车舒适度

乘客乘车舒适度主要体现在车内乘客的密度,可以采用隶属度函数来表示。不妨假设当乘客有座位时,满意隶属度为 1;乘客站立时,满意隶属度则随着车内拥挤程度的增加而减小。因此,站立者满意隶属度可以用下述函数表示:

$$\mu(x) = \begin{cases} k_0, 0 < V_{ij} - s < r_0 \\ \frac{C_{\max} - s - x}{C_{\max} - s - r_0} k_0, \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

式中:  $x$  为车内站立人数;  $k_0$  为车内不感觉拥挤时,乘客站立者满意的隶属度值;  $s$  为车厢内座位数;  $r_0$  为车内不感觉到拥挤的站立人数临界值。

此时第  $j$  辆从  $i$  站至  $i+1$  站区间内乘客坐车舒适度总值可以用下式表示:

$$V_{ij} = \begin{cases} V_{ij}, V_{ij} - s \leq 0 \\ s + (V_{ij} - s) \mu(V_{ij} - s), \text{其他} \end{cases} \quad (24)$$

最终, 乘客乘车舒适度目标函数表示为:

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} v_{ij}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} V_{ij}} \quad (25)$$

(3) 目标函数 3: 地铁运营部门满意度

通常情况下, 每发一列车运营企业都有一个收益的最低期望值。当收入低于该值时, 企业会感到不满意; 当收入超出某一值时, 企业将会感到满意。因此, 关于企业对收益的满意程度可以采用“半梯形分布”隶属度函数确定:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < b_1 \\ \frac{x - b_1}{b_2 - b_1}, 0 \leq x < b_2 \\ 1, x > b_2 \end{cases} \quad (26)$$

式中:  $x$  为客票收入;  $b_1$  为地铁部门对客票收入的最低期望值;  $b_2$  为地铁部门对客票收入的期望值。

那么, 地铁部门满意度可以由下式计算:

$$x_e = \frac{\sum_{j=1}^n \mu\left(\sum_{i=1}^{m-1} (B_{ij} \cdot \rho)\right)}{n} \quad (27)$$

(4) 约束条件

为了保证城市轨道交通线路能够安全运营, 目标约束主要有:

**约束条件 1:** 列车实际载客数不能超过列车最大载客量  $C_{max}$ 。列车的实际载客量若超过列车的最大载客量, 列车将容易发生刹车失灵等交通事故。因此, 为了保证行车安全应要求列车实际载客量不能超过列车最大载客量。

**约束条件 2:** 由于地铁站台修检规格固定, 最大的车厢数量具有一定限制, 列车长度不能超过站台长度, 同时为了具有一定的载客量, 列车长度也不能过小, 地铁车厢数量的约束条件表示如下:

$$n_{min} \leq n \leq n_{max} \quad (28)$$

**约束条件 3:** 列车的发车间隔不能过大也不能过小。若列车发车间隔过小, 两车之间很容易发生追尾事故; 若列车发车间隔过大, 可能导致车站候车人数超过车站站台的容纳能力, 使车站发生拥挤, 严重时可能发生踩踏事故。因此, 为了保证乘客和列车行驶安全, 应当要求列车的发车间隔适中。约束条件可表示如下:

$$\max \lambda_{ij} h_j \leq C_{max} \quad (29)$$

$$h_{min} \leq h_j \leq h_{max} \quad (30)$$

式中:  $\lambda_{ij}$  为  $i$  时刻  $j$  站点的到达率,  $h_j$  为第  $j$  个时间段的发车间隔,  $h_{min}$ 、 $h_{max}$  分别为最小发车间隔时间和最大发车间隔时间。

(5) 多目标单一化

综上所述, 模型的建立应当兼顾乘客和运营企业的利益。因此, 规划目标为乘客候

车满意度、乘客坐车舒适度和运营企业满意度加权平均值最大。单一化后目标函数为：

$$\max z = w_1 x_w + w_2 x_c + w_3 x_e \quad (31)$$

### 6.2.2.2 最优发车时间间隔模型的求解

（一）目标函数一单独求解：乘客候车满意度最高

在全时段发车间隔均为 5 分钟时乘客候车满意度最高。

（二）目标函数二单独求解：乘客坐车舒适度最高

在全时段发车间隔均为 5 分钟时乘客坐车舒适度最高。

（三）目标函数三单独求解：地铁运营部门满意度最高

在早高峰发车间隔为 8 分钟、晚高峰发车间隔为 10 分钟、平峰时段发车间隔为 12 分钟时，地铁运营部分满意度最高。

（四）单一化后目标函数求解结果

利用加权公式求得单一化后目标函数在相同的约束条件下的最优解（取整后），即在高峰时段发车间隔为 6 分钟、平峰时段发车间隔为 7 分钟时地铁运营各方面的综合满意度能够达到最优。

### 6.2.2.3 当前发车方案的合理性分析

当前发车方案为高峰发车间隔 6 分钟，平峰发车间隔 10 分钟，晚 20 点以后发车间隔 12 分钟的方案。首班车 6:00 发出，末班车 22:00 发出。根据附件 3 中的数据，将此地铁运行策略代入上述模型中进行求解，各方面满意度如图所示。

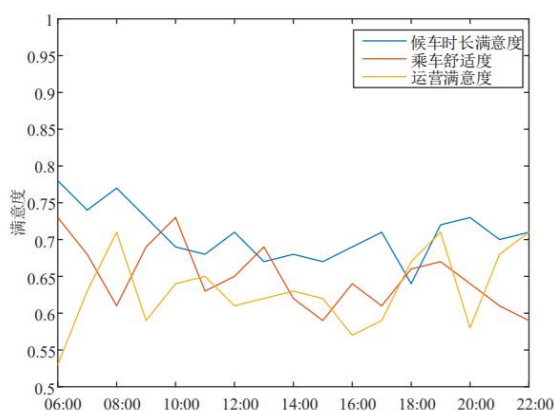


图 6-3 当前发车方案满意度

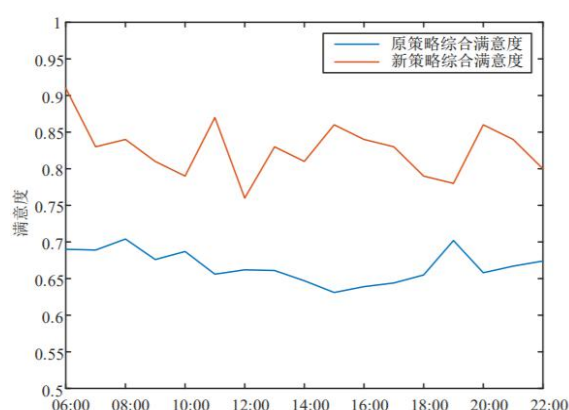


图 6-4 优化后发车方案满意度

## 6.3 问题 3 的模型建立与求解

### 6.3.1 模型 I：站点选择的 AHP 综合评价模型

#### 6.3.1.1 站点选择的 AHP 综合评价模型的分析及建立

在站点能在所选区域的前提下，是否适合作为站点的位置是由多种因素决定的，其影响机理很难用准确的数学模型来体现，不过可以用区域的相关数据来体现位置情况的反馈。因此，对于这样一个复杂的综合体系模型，将其中的定性因素采用层次分析法来将区域的相关属性分解为定量。在形式上，AHP 可以对多种因素分解成各个层次来在这一基础进行将定性进行量化的分析，在无其他外部因素影响的情况下综合分析出各区域的综合评价指数。因此，AHP 综合分析是对站点的选择分析一个完善的评价模型。在应用于分析站点选择评价模型的 AHP 法时，首先将系统影响的相关因素条理化、层



次化，来构造出一个有层次方案的区域评价模型。层次分为三类：目的层、准则层、方案层。层次结构中的相关性需要详尽地分析。

由于区域的相关数据复杂性、多变性以及相关数据资料的不完备的特点，因此采用AHP法将半定量半定性问题定量化。为了方便对体系分级分析，将体系划分为以下部分：区域经济发展情况、区域未来发展情况、区域交通情况、区域居民出行特征。有如下8个次级影响因子：政府政策、社会结构、环境、文化教育、交通网络情况、居民收入水平、人口分布、出行需求。地铁站点位置评价体系因子和体系分区建立的对应的递阶层次机构模型如下图所示。

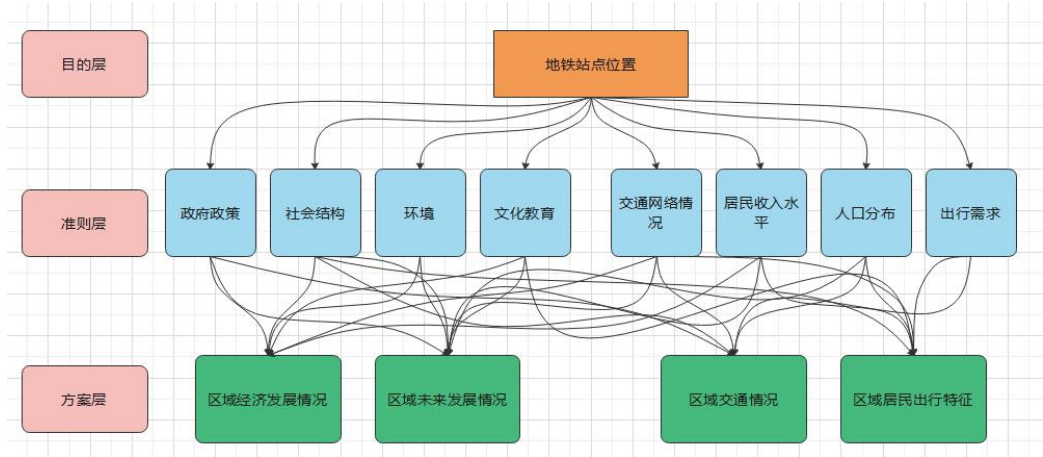


图 6-5 递阶层次机构模型

在地铁站点位置选择体系中准则层中各因子在评级中所占的比重在现实情况分析下，它们各占有一定的比例，应用数字 1 至 9 及其倒数作为标度来定义判断矩阵  $A=(a_{ij})_{n \times n}$ ，见下表。

表 6-3 判断矩阵标度定义

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有相同重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2,4,6,8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若因素 $i$ 与因素 $j$ 的重要性之比为 $a_{ij}$ ，那么因素 $j$ 与因素 $i$ 的重要性之比为 $1/a_{ij}$

层次单排序后需要对其一致性进行检验，为判断矩阵的最大特征值。一致性指标  $CI$  (Consistency Index)，计算公式如下：

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{32}$$

平均随机一致性指教  $RI$  见下表。

表 6-4 平均随机一致性指标

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.24	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58

计算其一致性比例  $CR$  (Consistency Ratio) 只有当  $CR<0.10$  时，地铁站点位置的影响因子的矩阵的一致性是可以接受的，否则对判断矩阵作适当的修改。 $CR$  的计算公式

如下。

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (33)$$

最终要得各因素对系统的排序权重，从而进行方案选择。在选择过程中特别要注意方案层对目标的权重。对层次的总排序也需要做一致性检验。在上一层次 B 包含  $n$  个因素  $B_1, B_2, \dots$ ，其层次权重值分别为  $b_1, b_2, \dots$ ，若 C 层次模型因素对于  $B_i$  单排序的一致性指标为  $CI_i$ ，相应的平均一致性指标为  $RI_i$ ，则 C 层次的总排序一致性比率为：

$$CR = \frac{\sum_{i=1}^n b_i CI_i}{\sum_{i=1}^n b_i RI_i} \quad (34)$$

在层次分析法中，一般采用其中的某一种方法来求权重向量，并且得出结果，我们依据文献发现，可以通过在常规的四种计算方法计算权重相互之间比较解决问题，但也有细微差别，考虑到细微差别可能在解决该实际问题中得出不一样的结果，，因此本文采取几何平均法、算术平均法、特征向量法，最小二乘法来求解权重向量，互相比，综合考虑来得出更科学的决策。以下是对计算方法的简单描述。

**几何平均法：**首先对 A 的元素按行相乘得到一个新的向量，接着将新的向量的每个分量开  $n$  次方，最后将所得向量归一化即位权向量，求解模型如下。

$$W_i = \frac{\left( \prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}} \quad (35)$$

**算术平均法：**先将 A 的元素按列归一化，即求  $a_{ij} / \sum_{k=1}^n a_{kj}$ ，将归一化后的各列相加，最后将相加后的向量除以  $n$  即得权重向量，求解模型如下。

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

**特征向量法：**将权重向量 W 右乘权重比较矩阵 A，W 的分量均为正分量，最后，将求得的权重向量做归一化处理即位所求，求解模型如下。

$$AW = \lambda_{\max} W \quad (37)$$

**最小二乘法：**用拟合方法确定权重向量，使差的平方和最小。求解模型如下。

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j - w_i)^2 \quad (38)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (39)$$

$$w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

值得注意的是,需要在本题的侧重点居民选择地铁人数的情况下进行矩阵计算,然后不断对计算出的矩阵进行修正,使之满足 AHP 层次分析法的一致性要求,可求到各因素的权重系数,可以求得各方面因素的总权重。 $M$  指方案层的权重,  $b$  指站点区域的相关指数。

$$m_x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 + \dots + c_x m_x \quad (41)$$

$$J-Score = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 + m_4 b_4 \quad (42)$$

### 6.3.1.2 最优发车时间间隔模型的求解

对于站点路线规划在结合区域 AHP 层次分析的结果上使用贪心算法,将各站点选择分为子问题,对各子问题来求出局部最优解。由于路线设计要符合地铁建筑的要求,以及要确保能够形成地铁线在使用贪心算法的过程运用迭代来进行从中心到两端的路线规划。过程如下:首先以仿真数据中各线站点间的距离的平均值作为区域的长度,计算出各区域间的 AHP 评价得分,将 AHP 层次分析法得分最高的区域设为中心站点。如图 6-6 所示。



图 6-6 经 AHP 法得出的中心站点

接着将周围的区域作为下一子问题来考量,从中心向四周散开,选择 AHP 层次分析得分最高的区域来作为下一个站点的中心来展开下一个站点选择子问题。



图 6-7 站点选择子问题示意图

那么地铁站点选择路线设计如图所示。

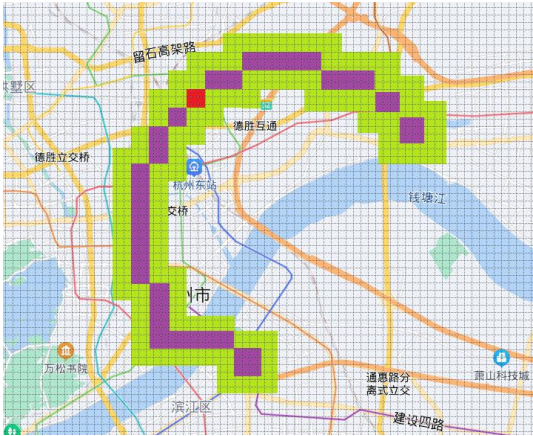


图 6-8 地铁站点选择路线设计

### 6.3.2 模型 II：车站选取的覆盖量模型

#### 6.3.2.1 车站选取的覆盖量模型的分析及建立

将城市轨道交通线路规划区域采用网格离散化，并设每一个整数坐标点  $(x, y)$  处的人口为  $p(x, y)$ 。站点的吸引区域（影响区域）采用如图所示的同心钻石形区域表示。

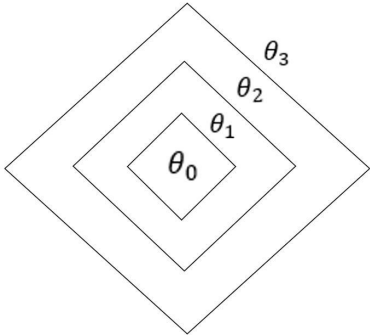


图 6-9 站点的钻石形吸引区域

通常，乘客采用轨道交通方式出行的比例随乘客距离轨道交通站点的距离而减小。对于轨道交通站点钻石形吸引区域，假设处于同一步行半径上的居民采用轨道交通方式出行的比例相同，用比例系数  $\theta_i$  表示距离站点  $i$  个步行单位的居民选择轨道交通出行的



比例, 并且假设乘客步行到附近轨道交通站点以 Manhattan 距离计量。

假设处于站点上的居民选择轨道交通出行的比例为  $\theta_0=1$ ; 距离轨道交通站点 1、2、3 个步行单位的居民选择轨道交通出行的比例为  $\theta_1=1$ 、 $\theta_2=0.5$ 、 $\theta_3=0.25$ 。对于距离轨道交通站点 3 个步行单位以上的居民选择轨道交通出行比例为 0, 即  $\theta_i=0, i>3$ 。

站点  $s$  覆盖的总人口数称为站点覆盖量, 定义如下。

$$C(s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{(x,y): D[(x,y),s]=i} \theta_i p(x,y) \quad (43)$$

式中:  $D[(x, y), s]$  为任一点  $(x, y)$  到站点  $s$  的 Manhattan 距离。

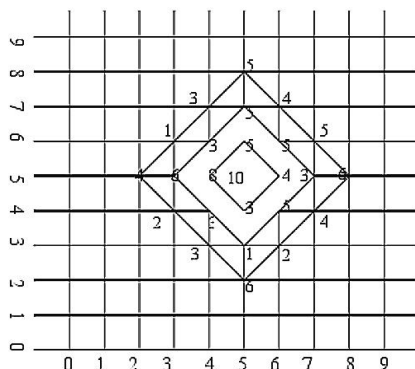


图 6-10 站点  $s$  的人口覆盖量示意图

图 6-10 中所示站点坐标为  $(5,5)$ , 坐标系中各点人口分布如图所示。以下式计算该站点的人口覆盖量。

$$C(s) = 10\theta_0 + 20\theta_1 + 31\theta_2 + 45\theta_3 \quad (44)$$

此处定义的站点覆盖率是将站点周围的人口离散化处理, 并假设人口集中于站点周围的某点上。因此在布设站点时, 考虑站点的覆盖量, 对于站点覆盖量大的点优先设置为候选站点。

### 6.3.2.2 车站选取的覆盖量模型的求解

杭州市地铁各线路交通站分布图如图 6-11 所示。

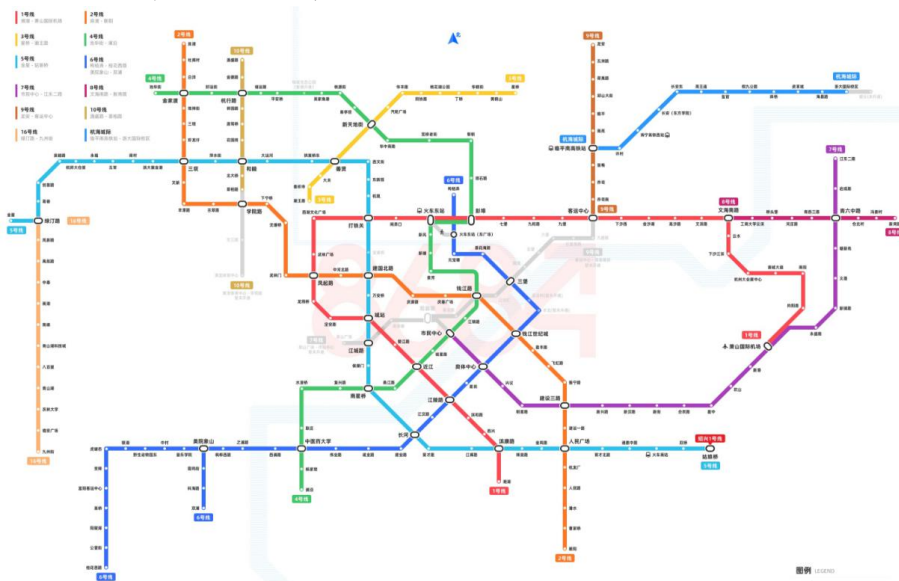


图 6-11 杭州市区当前交通站分区图

地铁 1、2、4 号线选取的部分线路站点的人口覆盖量为:



$$C(X) = \sum_{i=1}^{18} C(S_i) = 368426(\text{人})$$

地铁 1、2、4 号线选取的部分线路上单位长度的站点人口覆盖量为:

$$\frac{\sum_{i=1}^{18} C(S_i)}{\sum_{i=1}^{18} l_i} = \frac{368426}{18.64} \approx 19765(\text{人})$$

根据线路上候选点、线路覆盖量的定义以及覆盖量的计算方法计算相关区域所在位置的人口覆盖量。由于该线路全部覆盖于杭州市市区，为了简化起见，将各个站点区域的平均吸引半径定为以站点区域中心为圆心，500m 为半径的圆形区域。

根据确定站点间双向搜索算法，该线路的大致走向如图 6-12 中所示，线路长度为 16.75km

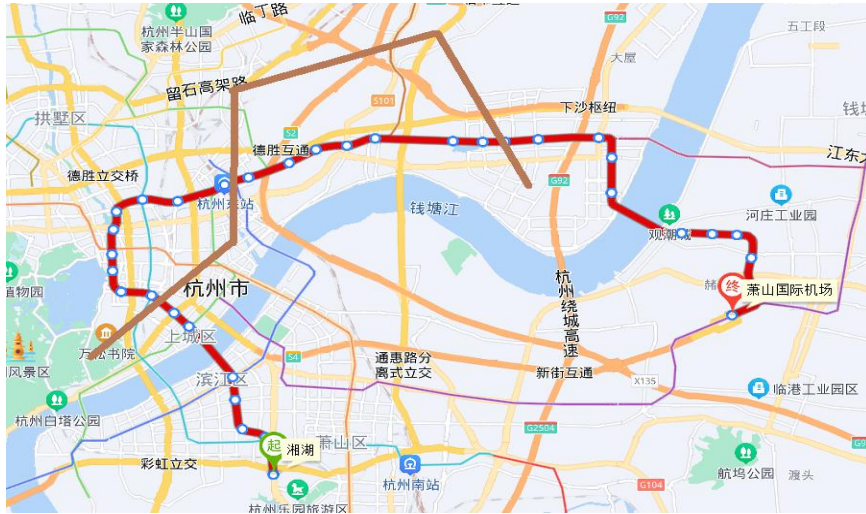


图 6-12 新建地铁路线大致走向

则新增线路站点的人口覆盖量为:

$$C(X) = \sum_{i=1}^{15} C(S_i) = 314268(\text{人})$$

则新增线路单位长度站点的人口覆盖量为:

$$\frac{\sum_{i=1}^{15} C(S_i)}{\sum_{i=1}^{15} l_i} = \frac{314268}{16.75} \approx 18762(\text{人})$$

由以上分析可知:运用城市轨道交通三阶段确定的轨道交通线路大致走向与市区东西向交通走廊上主要客流方向一致,缓解高峰端面流量。新线路单位长度上人口覆盖量要大于原始线路单位长度上人口覆盖量,若按此线路方案铺设线路,则能够更好地满足乘客出行需求。因此新线路走向能够较好地解决东西向交通走廊交通运能与运量的矛盾,改善交通条件,为市民出行创造良好的交通条件。

## 八、模型评价与推广

### 8.1 模型的优点

1. 问题 2 的多目标发车间隔优化模型的 NSGA-II 提出了一种新的选择方法,该方法不仅克服了第一代遗传算法复杂的调参过程和高时间复杂度,还为后面的改进提出了可行的方向,也就是通过拥挤度来度量系统元素分布的情况,从而选择出那些分布均匀,获得信息最多的基因。随后该方法被广泛地应用于各个领域。

2. 问题 2 的最优发车时间间隔模型综合考虑了多方面的满意度, 优化求解的结果具有一定的准确性。
3. 问题 3 的站点选择的 AHP 综合评价模型采用了贪心算法以及 AHP 层次分析法来综合地考虑了居民和城市的各个方面, 较为全面地设计出行相对最优路线。
4. 问题 3 的车站选取的覆盖量模型通过分析地铁站点路线的人口覆盖程度, 较为客观地给出了地铁规划的布设方案。

## 8.2 模型的缺点

1. 问题 1 模型中将时间按照一小时的时间段来划分, 时间长度相对较长。
2. 基于 NSGA-II 的多目标遗传算法没有考虑地铁线路间的乘客换乘的影响, 需要在今后进一步深入研究。
3. 站点选择的 AHP 综合评价模型具有一定的局限性, 只能得到相对最优路线, 无法得到精准的路线设计。
4. 地铁路线规划设计模型选择依据的是现有城市情况与近期规划, 缺乏与杭州市长期规划的结合。
5. 本文在研究时主要考虑单一线路上的客流需求, 在乘客服务水平的方面, 没有考虑到乘客的总乘车时间、换乘便捷度以及本线路时刻表与其他线路时刻表的衔接以及网络化运营需要考虑的其他因素。

## 8.3 模型的推广

本模型的研究对象虽然是地铁, 但是模型具有较强的实用性, 可以推广到其他城市的其他类型的公共交通, 因为它们属于一类问题, 只不过是人数流量和运输方式和方案有所不同, 依据模型可以全面地设计出符合居民出行需求的规划方案。

线路规划设计模型可以推广到其他城市, 依据当地的的城市特点以及居民出行情况来使用模型。

## 九、参考文献

- [1] 刘兰芬, 杨信丰. 地铁客流分析及列车发车间隔优化研究[J]. 武汉理工大学学报 (交通科学与工程版), 2015,39 (06): 1119-1124.
- [2] 张鹏, 俞亦舟. 城市轨道交通线路与站点规划理论研究[J]. 科技信息, 2012(30):144-145.
- [3] 杨丽辉. 城市常规公交与轨道交通协调发展的策略思考[J]. 工程技术研究, 2021,6(07):248-249.
- [4] 沙金硕. 城市轨道交通线路选线设计思路探究[J]. 铁道建筑技术, 2021(04):48-51.
- [5] 卫星佩, 吴桐. 城市轨道交通换乘候车时间最优化方法研究[A]. 中国城市规划学会城市交通规划学术委员会. 品质交通与协同共治——2019年中国城市交通规划年会论文集[C]. 中国城市规划学会城市交通规划学术委员会: 中国城市规划设计研究院城市交通专业研究院, 2019:10.
- [6] 姚向明. 城市轨道交通网络动态客流分布及协同流入控制理论与方法[D]. 北京交通大学, 2015.
- [7] 王林, 陈璨. 一种基于 DE 算法和 NSGA-II 的多目标混合进化算法[J]. 运筹与管理, 2010,19(06):58-64.
- [8] 王琼, 梁青槐. 城市轨道交通合理站间距的研究[J]. 铁道运输与经济, 2012,34(06):82-85.
- [9] 卞晓. 地铁线路网络规划问题及解决思路探讨[J]. 科技资讯, 2011(18):35-37.
- [10] 孙飞, 桂行东, 李婷, 等. 基于 Pareto 多目标遗传算法的高峰时段多地铁列车节能优化[J]. 铁道标准设计, 2017,61(12):114-119.
- [11] 严波. 城市轨道交通行车间隔时间优化模型研究[J]. 城市轨道交通研究, 2008(06):53-57.
- [12] 司雪丽. 城市轨道交通换乘站行人流特性与人流量预测研究[D]. 重庆大学, 2019. DOI:10.27670/d.cnki.gcqdu.2019.001791.
- [13] 蔡凯达. 基于指数平滑和人工智能算法的预测[D]. 兰州大学, 2013.
- [14] 薛彤. 城市轨道交通列车开行计划调整优化方法研究[D]. 西南交通大学, 2018.
- [15] 陈怀杰. 地面常规公交与城市轨道交通接驳研究[D]. 长安大学, 2015.
- [16] 魏华. 轨道交通与常规公交衔接优化关键问题研究[D]. 长安大学, 2014.
- [17] 杨晓光, 褚浩然. 错峰出行对城市交通的影响分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006(07):899-903.
- [18] 袁绍欣, 赵祥模, 刘占文, 等. 交通错峰出行策略仿真模型[J]. 长安大学学报 (自然科学版), 2010,30(05):75-78.
- [19] 张也弛. 城市地铁选址方法研究[J]. 科技创新导报, 2015,12(11):78.