第21卷 第7期
2004年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 21 No. 7
Dec. 2004

文章编号:1005-3085(2004)07-0131-06

饮酒与驾车的关系

李蒙赫， 黄二梅， 张 洁
指导教师： 徐昌贵
(西南交通大学峨眉校区，四川峨眉 614202)

编者按： 对于微分方程求解的问题有进行误差与灵敏度分析的意识——模型检验。

摘 要： 本文针对酒后驾车问题，建立了一个反映体液中酒精含量变化的微分方程模型，接下来用常数变易法对模型进行求解，用最小二乘法并借助于Matlab软件对数据进行了拟合，得到了模型的具体解。然后我们利用Mathematica软件对题目中的各个问题一一做出了解答：（1）很好地解释了大李碰到的问题；（2）饮酒后分别在11.6341小时、12.7169小时内驾车就会违反国家新标准；（3）对两种饮酒方式分别在饮酒后1.35067小时和2.62436小时时体液中酒精含量达到最大值；（4）如果天天饮酒，则酒精涉入量的极限安全值为8288.93毫克，相当于0.382瓶啤酒所含的酒精量。此外，我们还对一般模型进行了误差和灵敏度分析，利用微分方程的稳定性理论严格的证明了微分方程对初值和非齐次项都是渐进稳定的。

关键词： 微分方程； 酒精； 饮酒

分类号： AMS(2000) 65L80 **中图分类号**： O241.81 **文献标识码**： A

1 问题的提出（略）

2 问题假设

为了更简便的解决问题，我们在研究这个问题的过程中作出以下假设：

1. 假设整体过程中人没有摄入任何影响代谢的药类物质和作剧烈性运动。
2. 人的吸收速率和代谢速率是恒定的。
3. 酒精代谢速率与当前血液中酒精浓度成正比。
4. 人体体液对酒精吸收速率与当前肠胃中酒精含量成正比。
5. 人体自身产生的酒精忽略不计。

3 符号说明

表1 变量定义表

变量	含义	单位	备注
a	吸收能力系数	1/小时	
b	代谢能力系数	1/小时	
C_0	开始饮酒时人体体液中的酒精浓度	毫克/百毫升	
Q_0	人喝下酒精的总量	毫克	一瓶啤酒中酒精的量约为21700毫克[1]
V_0	人体液所占的体积	百毫升	约为420百毫升[2]
t	时间	小时	
T	较长时间饮酒时的持续时间	小时	

变量	含义	单位	备注
$f(t)$	酒精由肠胃进入人体体液的速率	毫克/小时	
$f_1(t)$	酒精由口进入肠胃的速率	毫克/小时	
$x(t)$	t时刻体液中酒精的量	毫克	
$y(t)$	t时刻肠胃中酒精的量	毫克	
$C(t)$	在t时刻人体体液（或血液）中的酒精浓度	毫克/百毫升	

4 问题分析及模型的建立

1) 问题分析

依常识，我们知道酒精无需经过消化系统即可被肠胃直接吸收，进入血管，吸收过程和代谢过程是同时进行的。由此我们可以知道血液中酒精浓度同时受吸收和代谢影响。接下来我们将分别对吸收过程和代谢过程作分析和讨论：

(1) 吸收过程

在此过程中我们考虑的是肠胃吸收酒精进入体液所引起的酒精量的增量，其中用$f(t)$代表t时刻酒精由肠胃进入人体体液的速率（单位：毫克/小时），以刚开始饮酒的时刻为记时的初始时刻，即t=0，由于喝下的酒精在时间无穷长时总会被全部吸收，故有：$\int_0^\infty f(t) = Q_0$

(2) 代谢过程

这里我们认为酒精的代谢的速率与当前体液中含有的酒精量成正比关系，设比例系数为b，以$x(t)$表示t时刻体液中酒精的量，结合以上两个过程，依据量守恒定律可得方程：$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) - bx(t)$

又因$x(t) = V_0C(t)$，故$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{f(t)}{V_0} - bC(t)$

2) 模型建立

根据以上分析，我们可以得出血液中酒精浓度关于时间变化的一般模型：

一般模型：

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \frac{f(t)}{V_0} - bC(t) \\ \int_0^{+\infty} f(t)dt = Q_0 \\ C(0) = C_0 \end{cases}$$

由题中可知，酒可以在很短时间内喝完，也可以在一段较长的时间内喝完，这样将有两个不同的吸收速率，即可以得到两个不同的$f(t)$表达式，于是可以得到两个具体模型。

具体模型Ⅰ的建立：

由于考虑的是短时的饮酒效应，可以认为酒精进入人体体液的速率与肠胃中酒精的含量成正比，这样便可以得到：

$$f(t) = ay(t)$$

再结合一般模型，我们可以得出如下模型：

具体模型Ⅰ：

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \frac{f(t)}{V_0} - bC(t) \\ \int_0^{\infty} f(t)dt = Q_0 \\ C(0) = C_0 \\ f(t) = ay(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) \\ y(0) = Q_0 \end{cases}$$

具体模型Ⅱ的建立：

在这里研究的是长时饮酒效应，可近似认为在持续饮酒的过程中酒精是匀速进入肠胃的，

则酒精进入肠胃的速率与整个过程中喝入的酒精量有如下关系：

$$f_1(t)=\begin{cases}Q_0/T, & t\le T\\ 0, & t>T\end{cases}$$

而肠胃里的酒精量的变化有：

肠胃里的酒精量的变化量= 喝入机体的酒精量- 机体对酒精的吸收量

即得：

$$\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{Q_0}{T}-ay(t), & t\le T\\ -ay(t), & t>T\end{cases}$$

而与模型 I 一样有：$f(t)=ay(t)$

再结合一般模型我们可以得到模型 II 如下：

具体模型 II：

$$\begin{cases}\frac{dC(t)}{dt}=\frac{f(t)}{V_0}-bC(t)\\ \int_0^T f(t)dt+\int_T^{+\infty}f(t)dt=Q_0\\ C(0)=C_0\\ f(t)=ay(t)\\ \frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{Q_0}{T}-ay(t), & t\le T\\ -ay(t), & t>T\end{cases}\\ y(0)=0\end{cases}$$

5 模型求解

1) 一般模型的求解

观察一般模型，运用常数变易法，易得原方程的解：

$$C(t)=C_0e^{-bt}+e^{-bt}\int_0^t\frac{1}{V_0}f(\tau)e^{b\tau}d\tau$$

2) 具体模型 I 的求解

由$\frac{dy(t)}{dt}=-ay(t)$及$y(0)=Q_0$得：$y(t)=Q_0e^{-at}$，又$f(t)=ay(t)$，将其代入一般模型的特解中并化简得：

$$C(t)=\frac{aQ_0}{V_0(a-b)}(e^{-bt}-e^{-at})+C_0e^{-bt}$$

3) 具体模型 II 的求解

根据题设，我们取$T=2$。

$$由\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{Q_0}{2}-ay(t), & t\le 2\\ -ay(t), & t>2\end{cases},\ x_0(0)=0及f(t)=ay(t),$$

将其代入特解中并化简得：

$$C(t)=\begin{cases}\frac{(a(1-e^{-bt})+b(-1+e^{-at}))Q_0}{2(a-b)bV_0}, & t\le 2\\ \frac{e^{-bt}(10e^{-a(2+t)}(e^{2a}-1)(e^{2b+at}-e^{2a+bt})Q_0+2053(a-b)e^{2b}V_0)}{20(a-b)V_0}, & t>2\end{cases}$$

4) 参数估计及具体解

根据题中所给数据以及所给的条件我们运用最小二乘法结合Matlab软件[3]拟合出a、b的值分别为：$a=2.0261$，$b=0.1842$

于是具体模型 I 的解为：$C(t)=113.667e^{-2.0261t}(e^{1.8419t}-1)$

图像为图1。

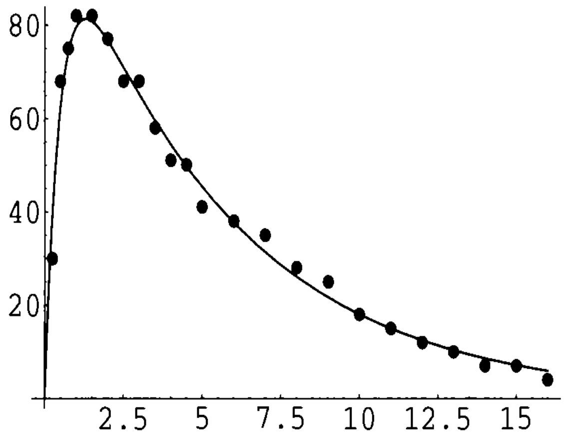

图1： 具体模型 I 的图象

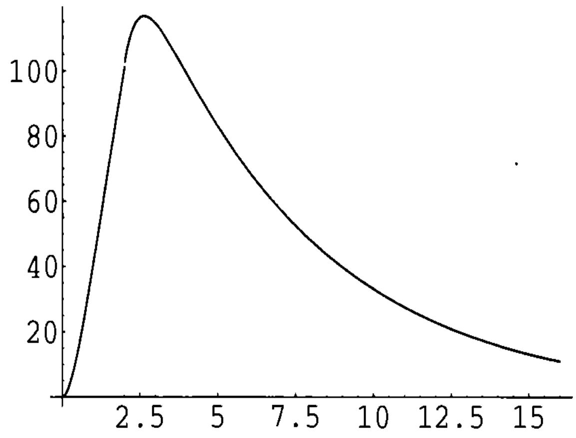

图2： 具体模型 II 的图象

具体模型 II 的解为：

$$C(t)=\begin{cases} 228.426\left[2.0261(1-e^{-0.1842t})+0.1842(e^{-2.0261t}-1)\right] & t\le 2 \\ 6.46331\times10^{-5}e^{-0.1842t}[2.29561\times10^{6}+3.6797\times10^{7}e^{-2.0261(2+t)}\times & \\ (e^{0.3684+2.0261t}-e^{4.0522+0.1842t})] & t>2 \end{cases}$$

图像为图2。

5) 问题1的解答

根据已知条件，大李第一次检测时血液中酒精浓度为：18.8198（毫克/百毫升），小于20毫克/百毫升，即通过检查。第二次检测时血液中酒精浓度为：20.3968（毫克/百毫升），大于20毫克/百毫升，即未通过检查。

6) 问题2的解答

(1) 从题可知此小题的情况符合模型 I，且由题可知：$\begin{cases} Q_0=21700\times3 \\ C_0=0 \end{cases}$

将此代入模型 I 的具体解，并计算出t的临界值，也就是当$C(t)=20$时t的值。可解如下方程：

$$113.667e^{-2.0261t}(e^{1.8419t}-1)=20$$

得：$t=11.6341$（**小时**）

即短时间喝完3瓶啤酒后11.3641小时内驾车出行就会违反标准。

(2) 从题可知此小题的情况符合模型 II，且由题可知：$\begin{cases} Q_0=21700\times3 \\ C_0=0 \end{cases}$

将此代入模型 II 的解，并计算出t的临界值，也就是当$C(t)=20$时t的值。这里我们同样假设$T=2$，于是可解如下方程：

$$6.46331\times10^{-5}e^{-0.1842t}[2.29561\times10^{6}+3.6797\times10^{7}e^{-2.0261(2+t)}(e^{0.3684+2.0261t}-e^{4.0522+0.1842t})]=20$$

得：$t=12.7169$（**小时**）

即用2小时喝完3瓶啤酒的方式，在开始饮酒后12.7169小时内驾车出行就会违反标准。

7) 问题3的解答

在模型 I 中，我们求解方程$\frac{dC(t)}{dt}=0$得：$t=1.35067$（**小时**），此时最大浓度$C(1.35067)=124.638$（毫克/百毫升）。

我们在模型II中求解方程$\frac{dC(t)}{dt}=0$，得$t=2.62436$（小时）此时最大浓度$C(2.62436)=116.682$（毫克/百毫升）。

8) 问题4的解答

在本问中我们假设每天喝进啤酒的量是Q_0，每天只喝一次，是短时间进酒，两次间隔24小时，

因此采用模型I的结果：$C(t)=\frac{aQ_0}{V_0(a-b)}(e^{-bt}-e^{-at})+C_0e^{-bt}$

将$V_0=420, a=2.0261, b=0.1842, t=24$的值代入上式得到当第一天饮酒$Q_0$时24小时之后血液中还有$3.1493\times10^{-5}Q_0$毫克/百毫升未被代谢。进而推得第n天血液中酒的量为：

$$(1+3.1493\times10^{-5}\times420+\cdots+(3.1493\times10^{-5}\times420)^{n-1})Q_0$$

当$n\to\infty$时体内的酒精的量为：$\frac{1}{1-3.1493\times10^{-5}\times420}Q_0=1.0134Q_0$

若司机还能开车，就要使$1.0134Q_0<20\times420$，进而计算出每天最多可喝**0.382**瓶。

6 误差与灵敏度分析

首先，根据微分方程解的存在唯一性定理可知，只要$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，则对于任意实数$t_0\in[0,+\infty)$及$C_0\in R$，方程$\begin{cases}\frac{dC(t)}{dt}=\frac{f(t)}{V_0}-bC(t)\\ C(0)=C_0\end{cases}$在$R$上存在唯一解$C(t)$满足初始条件$C(t_0)=C_0$。

其次，由于用微分方程描述的实际问题，其特解密切依赖于初始值和非齐次项，如本文中开始饮酒时人体体液中的酒精浓度和人饮酒的速率的快慢的度量，而初始值往往不能准确得到，于是我们必须考虑其会不会很严重的影响微分方程的解。这就是我们要考虑的方程的稳定性问题，实际上我们有下面的两个定理：

定理1 微分方程$\begin{cases}\frac{dC(t)}{dt}=\frac{f(t)}{V_0}-bC(t)\\ C(0)=C_0\end{cases}$**的解对于初值$C_0$是渐进稳定的。**

证明 上述微分方程的解为$C(t)=C_0e^{-bt}+e^{-bt}\int_0^t\frac{1}{V_0}f(\tau)e^{b\tau}d\tau$，

给初值$C(0)=C_0$一个微小的扰动，即$C(0)=C_0\pm\delta$，则解为：

$$C_1(t)=(C_0\pm\delta)e^{-bt}+e^{-bt}\int_0^t\frac{1}{V_0}f(\tau)e^{b\tau}d\tau$$

于是$\forall t\in[0,+\infty)$，$|C(t)-C_1(t)|=\delta e^{-bt}$。

由于$b>0$，故$|C(t)-C_1(t)|<\delta$，

取$\delta=\varepsilon$，有$|C(t)-C_1(t)|<\varepsilon$。（证毕）

定理1表明方程的解对初值并不敏感，因此我们不考虑人体内的酒精含量0.003%是完全可行的。

定理2 微分方程$\begin{cases}\frac{dC(t)}{dt}=\frac{f(t)}{V_0}-bC(t)\\ C(0)=C_0\end{cases}$的解对于**非齐次项$f(t)$是渐进稳定的。**

证明 上述微分方程的解为$C(t)=C_0e^{-bt}+e^{-bt}\int_0^t\frac{1}{V_0}f(\tau)e^{b\tau}d\tau$

考虑不同的非齐次项$f(t)$和$f_0(t)$，且$\forall t\in[0,+\infty)$，有$|f(t)-f_0(t)|<\delta$，

则

$$\begin{aligned}|C(t)-C_1(t)|&=\tfrac{1}{V_0}e^{-bt}|\textstyle\int_0^t(f(t)-f_0(t))e^{b\tau}d\tau|\\ &\le\tfrac{1}{V_0}e^{-bt}\textstyle\int_0^t|f(\tau)-f_0(\tau)|e^{b\tau}d\tau\\ &\le\tfrac{e^{-bt}}{V_0}\delta\textstyle\int_0^te^{b\tau}d\tau\\ &=\tfrac{1}{V_0}e^{-bt}\times\delta\times\tfrac{1}{b}(e^{bt}-1)=\tfrac{\delta}{V_0b}(1-e^{-bt})\le\tfrac{\delta}{V_0b}\end{aligned}$$

因此只要取$\delta = V_0 b\varepsilon$，那么$\forall t \in [0,+\infty)$，有$|C(t) - C_1(t)| < \varepsilon$。（证毕）

由定理2可知非齐次项$f(t)$对解的影响不大，即可以知道由一般模型推得具体模型Ⅰ和具体模型Ⅱ是可行的。

7 短文

据报载03年全国交通事故死亡率中由饮酒驾车造成的占有相当的比例。那么，为了避免不发生事故，驾驶人员就不能饮酒吗？其实不然，04年颁布的关于饮酒驾车的新标准中规定驾驶人员体液中含有的酒精量大于20毫克/百毫升才算为饮酒驾车。所以只要驾驶人员控制好饮酒的时间和喝的量，就可以享受酒带来的乐趣。我们考虑机体对酒精的吸收和代谢的过程得到了体液中酒精含量关于时间变化的大致情况，可以帮助驾驶人员解决此问题。现给出以下建议：

如果是经常要出车的驾驶人员，饮酒的频率应该要小，每次的量也不应该太多。而且在喝完酒的短时间内不要出车。

如果并不是经常出车，这样的驾驶人员要注意在出车前的一段较长时间内不要饮酒，至少是不要喝太多的酒。而考虑到酒对机体的作用，饮酒频率不要过多，饮酒量也不要过大。

爱好饮酒的驾驶朋友们，不要为了一时的乐趣而放开自己的职责，请结合自己的出车时间和频率，好好的安排自己饮酒的时间和饮酒的量，让自己喝得安心，在出车过程中很容易的就能符合新的驾车标准。

另外，长期饮酒还可导致急性酒精性胃病、肝细胞功能损害、慢性胰腺炎、高血压、心律失常、酒精性病、支气管痉挛等。这些疾病的发作对交通安全也是严重的潜在危险因素。

8 模型的评价与推广（略）

参考文献：

[1] 千龙新闻网．《酒在人体内的吸收》．http://finance.sina.com.cn, 2003-01-23
[2] 龚茜玲．《人体解剖生理学》[M]. 人民卫生出版社，2001年。第124页
[3] 云舟工作室．《MATLAB 6 数学建模基础教程》[M]. 北京：人民邮电出版社，2001年

Mathematical Model for Relationship Between Drinking Wine and Driving

LI Meng-he, HUANG Er-mei, ZHANG Jie
Teacher: XU Chang-gui

(Southweast Jiao Tong University, Sichuan Emei 614202)

Abstract: In this paper, we had established the differential equation model for variations of wine concentration in blood. This model is successful to explain the relationship between drinking wine and driving.

Keywords: mathematical model; alcohol; drinking wine