第 31 卷第 1 期
2001 年 1 月
数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY
Vol. 31 No. 1
Jan. 2001

管 道 订 购 和 运 输

马 欣, 郭世强, 王 佳
指导老师: 教师组

(大连海事大学, 大连 116026)

编者按: 本文只是 B 题的第一问的求解部分, 该求解过程对所建立的非线性优化模型, 采用两阶段法求解, 首先通过对铺设路线上运输费用的分析, 为非线性规划的线性化提供了依据, 从而直接采用线性规划方法求解 然后采用拆分法, 将原管道运输网络图分成二部分, 利用类似于原网络的方法, 逐步对问题调优 最后, 以所得可行解为初始点, 采用模拟退火算法, 求得最后的近似最优解

摘要: 在对图形一分析的基础之上, 首先建立了问题一的非线性规划的模型 然后采用了两种方法分别对问题一求解

1 问题的重述(略)

2 基本假设(略)

3 符号约定

P_i: 各钢厂的钢管的出厂销价(万元/单位).

$C_{i,j}$: 单位钢管从钢厂 S_i 购出并经单位运费最小路运至 A_j 时单位钢管的所需费用包括销价和运费两部分.

$X_{i,j}$: 从 S_i 到 A_j 运输钢管的总数

l_j: 从 A_j 点到 A_{j+1} 点所需要铺设钢管的数量

Ca_j: 表示从 A_j 到 A_{j+1} 段上钢管的运输费用

D: 钢管总的需求量

s_i: 各钢厂 S_i 的最大供给力.

a_j: 运到 A_j 的钢管总数

$a_{j,1}$: 为从 A_j 向左铺设的里程数

$a_{j,2}$: 为从 A_j 向右铺设的里程数

t_i: 钢厂 S_i 的实际供给量

$Cost$: 总费用函数

4 问题的分析和模型的建立

(1) 分析:

依照题目中所给出的数据, 我们可以计算出由 S_i 经单位运费最小路运至 A_j 点时单位钢管的费用(即运费与出厂销价之和 $C_{i,j}$).

(2) 模型的建立: 在运送钢管时, 必须将钢管先运到各 A_j 点, 再由各 A_j 点转运到铺设地点, 因此我们考虑下将整个购运过程分为两个阶段:

Ⅰ. 将钢管从各钢厂 $S_i(i = 1, \cdots, 7)$ 运到 $A_j(j = 1, \cdots, 15)$ 点

Ⅱ. 从 A_i 分别向左右两端运输并铺设

在Ⅰ阶段中, 费用为 $\mathrm{Cost}_1 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} C_{i,j}X_{i,j}$

在Ⅱ阶段中, 费用用为 $\mathrm{Cost}_2 = \sum_j Ca_j$

其中任意施工段 L_j 内所花费的运输费用为

$$Ca_j = \frac{0.1 \times (a_{j,2} - 1) \times a_{j,2}}{2} + \frac{0.1 \times (a_{j+1,1} - 1) \times a_{j+1,1}}{2}$$

再根据题目所要求的各种约束条件, 我们可以建立模型如下:

$$\min \mathrm{Cost} = \mathrm{cost}_1 + \mathrm{cost}_2 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} C_{i,j}X_{i,j} + \sum_{j=1}^{15}\left[\frac{(a_{j,1} - 1)\cdot a_{j,1}}{2} + \frac{(a_{j,2} - 1)\cdot a_{j,2}}{2}\right] \times 0.1$$

$$\text{s.t}\quad a_{j,2} + a_{j+1,1} = l_j\ (j = 1, \cdots, 14)$$

$$500 \le \sum_{j=1}^{15} X_{i,j} \le S_i \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^{15} X_{i,j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} X_{i,j} = a_{j,2} + a_{j+1,1}\ (j = 1, \cdots, 14)$$

$$X_{i,j} \ge 0, a_{j,1} \ge 0, a_{j,2} \ge 0$$

5 模型的求解

由于目标函数的图像是一个多维的抛物面, 它的约束条件所对应的区域不是凸集, 因而模型给出的是在非连续可行域上的二次规划问题. 这样就很难找到一个统一的方法来求解. 我们注意到: 在 A_2 和 A_{15} 处, 有 $a_{2,1} = 104$, $a_{15,2} = 0$; 在 $A_1 \to A_2 \to \cdots A_{15}$ 上有 $a_{j,2} + a_{j+1,1} = l_j$, 并且

$$\begin{aligned} Ca_j &= 0.05\times[(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - a_{j,2} - a_{j+1,1}] \\ &= 0.05\times[(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - (a_{j,2} + a_{j+1,1})] \\ &= 0.05\times[(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - l_j] \\ &\ge 0.05\times(2a_{j,2}\cdot a_{j+1,1} - l_j) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} Ca_j &= 0.1\times[(a_{j,2} - 1)a_{j,2} + (l_j - a_{j,2} - 1)(l_j - a_{j,2})]/2 \\ &= 0.05\times[2(a_{j,2})^2 + l_j^2 - 2l_j\cdot a_{j,2} - l_j] \\ &= 0.05\times[2(a_{j,2} - l_j/2)^2 + l_j^2/2 - l_j] \end{aligned}$$

所以, 当 $a_{j,2} = a_{j+1,1}$ 成立时, 在这段路上费用最少; 当 $a_{j,2} = 0$ 时, 这段路上的费用最大.

综合以上, 我们可以得到 Ca_j 的最值为:

$$\min Ca_j = 0.1\times[(l_j)^2 - 2l_j]/4, \text{从而得} \min \sum Ca_j = 61064.325,$$

$$\max Ca_j = 0.1\times[(l_j)^2 - l_j]/2, \text{从而得} \max \sum Ca_j = 122387.2,$$

于是, $\max \sum Ca_j - \min \sum Ca_j = 61322.875$.

我们先把Ⅰ, Ⅱ两个阶段分开分析, 因为公路和铁路的路线较长并且单价已经加入到

S_i 到 A_j 的费用上, 这一段的费用占总费用的大部分, 所以考虑先将 A_j 各点的钢管到达量固定　由上面的推断, 我们知道, 在不考虑其他条件时, 当 $a_{j,2}=a_{j+1,1}=l_j/2$ 时费用最低　所以, 我们先固定 $a_j=(l_{j-1}+l_j)/2$　这时模型变成:

$$\min Cost_1=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15}C_{i,j}X_{i,j}$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{i=1}^{7}X_{i,j}=a_j(j=1,\cdots,14) \quad ①$$

$$500\le\sum_{j=1}^{15}X_{i,j}\le S_i \quad \text{or}\quad \sum_{j=1}^{15}X_{i,j}=0 \quad ②$$

$$X_{i,j}\ge 0(i=1,\cdots,7,j=1,\cdots,14) \quad ③$$

如果让所有工厂全部生产 500 单位以上时, 即忽略掉约束②的后一半, 那么原问题就被简化成为一个线性规划问题

通过计算, 得到总费用最优时的供给情况如下表所示:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
供给量	800	800	1000	500	831	740	500

此时目标函数的值为: 1242957.

我们发现, 工厂 S_4 和 S_7 都只生产 500 个单位, 那么有可能是在让 S_4 和 S_7 不生产时费用更低　在前面的线性规划中可以假设钢厂 S_4 不生产, 就得到结果如下表所示:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
供给量	800	800	1000	0	1331	740	500

此时目标函数的值为: 1237047.　同样, 当 S_7 不生产时, 得到结果如下表所示:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
供给量	800	800	1000	500	831	1240	0

此时目标函数的值为: 1241672　当 S_4 和 S_7 都不生产时, 得到结果如下表所示:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
供给量	800	800	1000	0	941	1630	0

此时目标函数的值为: 1236122　可以看到, 当 S_4 和 S_7 都不生产时, 目标函数更优化一些

因此, 当我们固定 a_j 的值时, 可以得到沿管道的运输费用为 61064, 进而, 得到总费用为: 1236122+ 61064= 1297186　这是一个满足模型约束的可行解

为了进一步优化, 我们尝试将这个图形进行拆分　观察下表:

	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_5	212	188	206	221.2	228	242
S_6	212	201	195	176.2	161	178

通过对图的右半部分作简单的计算, 可以发现:

由 S_6 单独供应 $A_{14}\to A_{15}$ 时的费用要比由 S_7 单独供应或 S_7, S_6 共同供应时的费用少, S_6

离A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}比S_7更近, 但这几段管道的总需求不能使S_6的供给达到饱和, 所以由S_6而不是S_7来供应A_{11}, A_{12} A_{13}, A_{14}, 同理由于S_4距A_{10}, A_{11}, A_{12}比S_5远, 所以由S_5而不是S_4来供应A_{10}, A_{11}, A_{12}. 所以A_{11}, A_{12}由S_5和S_6共同供应

根据上述模型, 我们可以求出各段所用的费用, 相加便得到右半部分费用的最小值为

$$\sum_{j=10}^{14} Ca_j = 306972.6$$

而在前面求得的线性规划问题的最优解中, S_1, S_2, S_3的供给量已经达到饱和, 这说明左半部分的需求量比供给量大, 需要由右半部分来补充, 补充量为 445 单位. 通过观察可以发现在右半部分的工厂中, S_5距离这些点是最近的, 而且在供给左半部分不足部分后其供给量也不会达到饱和

这样图的左半部分A_1到A_{10}加上工厂S_1, S_2, S_3, S_4, S_5就形成了一个类似原大图模型的小模型, 但已经不存在不生产的工厂, 因为右半部分已经可以求到最优, 再对左边继续进行优化

类似前述对大图进行优化的方法, 我们固定a_j, 依旧求解线性规划, 得出到各A_j点的运输费用: 934628, 再加上沿管道的运输费用 46725, 得到总费用 1288326.

至此我们就得到了一个更优化的解, 可以相信已经非常接近最优值, 以这个值为初值, 继续进行优化, 我们采取了模拟退火算法来优化, 得到目标函数值为: $Cost = 1278198$.

参考文献:

[1] 钱颂迪, 薛华成. 《运筹学》. 清华大学出版社, 北京, 1990.

[2] 盛昭瀚, 曹 忻. 《最优化方法基本教程》. 东南大学出版社, 江苏, 1992.

[3] 陈宝林. 《最优化理论和算法》. 清华大学出版社, 北京, 1989.

[4] 杨 冰. 《使用最优化方法及计算机程序》. 哈尔滨船舶工程学院出版社, 哈尔滨, 1994.

Model for Ordering and Transportation of Pipeline

MA Xin, GUO Shi-qiang, WANG Jia

(Dalian Maritime University, Dalian 116026)

Abstract: By analysing of the graph, we gave a nonlinear optimum model of question one, and we solve the question one in two ways