

2022 第二届天府杯全国大学生数学建模竞赛论文

题目: 基于变权-博弈综合高校评价模型

摘 要:

高等院校是为社会培养和输送人才的重要基地,高校作为人才资源、科技创新地,在服务经济社会发展方面发挥特殊重要的作用。高校为社会源源不断地提供强有力的智力支持和人才支撑,高校整体发展质量与关键学科建设成效是社会多方面人的密切关注,实施公开、公正的外部评估制度,并据此调剂和配置教育资源,进而保证和提高教学质量,综合评判各类高校在过去几年建设发展中的利与弊,预测高校未来发展趋势,深入了解高校现状。本文需在规定的高校评价方法的基础上,对高校进行综合评价。给出相应的评价方案,使用模型对最终结果进行求解。

针对问题(1),经过审题这问是隶属评价类问题。我们为了选取合理的指标,首先浏览了各大有关高校排名有关的网站,通过查看这些网站在对大学排名的指标,将指标综合得出我们所需要的该题指标,并针对我们选择的指标进行查找数据。为了使评价结果更加的精确,我们使用变权博弈综合评价模型。通过我们所确定的指标和查找的相关数据,分别使用主观和客观的求权法求出主观和客观上的权重,通过使用变权理论和博弈论将结果进行综合,并对模糊综合和秩和比综合评价的结果进行综合,最后得出最终的得分。通过该模型得出重量级成果和论文对高校的排名有很大影响,并得出同济大学得分最高,厦门大学得分最低。

针对问题(2),通过审题该问隶属评估类问题,根据题意将对十一所高校的计算机科学与技术专业的学科发展质量进行评估。对于此类问题,我们首先确定评估的标准。同时根据研究的对象和研究的要求,我们选择查看题所提供的参考文献和参考全国第四轮学科评估的情况,对比得出本问的评估依据。我们使用层次序关系分析法作为我们的评估模型,对十一所高校的学科进行评估。查找对应指标的数据,通过计算得出这些指标的均值。使用模型对指标求解,得出它们对应的得分和平均的得分。将十一所高校的得分情况与平均分作对比,通过分析比较结果得出高校的计算机科学与技术的发展情况。分析得清华大学的计算机科学与技术评分远远高出均值,其次是国防科技大学和北京大学。

针对问题(3),该题隶属评价预测类问题。我们需要对题目中的大学的共同点、发展特色以及未来前景进行一个分析。并将大学与所在地进行一个相关性分析,对比各高校与所在地之间的关系。我们首先查找各高校进五年的综合排名和所在地的经济变化,通过灰色相关性分析模型,得出未来五年的走势,通过初步的数形结合得出高校受所在地经济发展的影响。较为明显的是成都大学。再查找与地区发展和高校发展有关的数据,如:教育资金、人才流入等数据。建立典型相关性模型,对高校与所在地之间的发展关联度。通过画出相关性热图,对热图进行研究分析,最后得出结果。通过分析得出汉江大学的综合排名与人才的流入密切相关,其次是广州大学。广州大学的综合排名变化和其教育资金的投入有关,成都大学则对其并无多大关系。但是成都大学的招生人数与教育资金有很大关系。同时成都大学的招生人数与当地经济的发展有密切关系,这方面汉江大学也是。

关 键 词:博弈论 变权理论 高校排名 灰色预测 典型相关性分析 相关性热图

一、 问题重述

1.1 问题背景

“国势之强由于人,人材之成出于学”。高等院校是为社会培养和输送人才的重要基地,其中一流大学与一流学科的建成是实现社会主义共同富裕的重要基础。随着国家第二轮“双一流”计划评选结果的公布以及第五轮学科评估的有序开展,高校整体发展质量与关键学科建设成效引起多方位的热切关注,实施公开、公正的外部评估制度,并据此调剂和配置教育资源,进而保证和提高教学质量。合理地、有效地评判各类高校在过去几年建设发展中的利与弊,评价高校发展态势,了解高校现状。

1.2 问题重述

问题(1):根据高校排名网提供的信息收集 10 所中国有名大学的相关数据,选取相关指标判断 10 所高校在某一时间里的的发展水平,给出合理的分析。

问题(2):选取中国“计算机科学与技术”专业出名的十大高校,分析相关的资料和文献,对这十所高校的该专业进行合理的发展质量评估,做出合理的评价。

问题(3):将高校的发展和地区之间的发展联系结合起来,首先对所给出的五所高校的共同点、发展特色以及未来前景做对比,给出合理对比的结果。再分析学校发展与城市政策之间的关系度。

二、 问题分析

2.1 问题(1)的分析

问题(1)属于评价类数学问题,对于此类问题,我们首先分析各大有关高校排名的网站,结合他们所提供的评价指标得出我们使用的指标。先分为 4 个一级指标,再细分为 10 个二级指标,选择 2019 年的数据为研究范围。通过主观和客观两个方面去求出权重,将两种权重通过变权理论,求得出较为合理的综合权重。根据综合权重确定在对高校发展水平进行评价的依据。将所找到的相关数据和权重相结合求出问题一中高校的得分。比较得分确定 2019 年这些高校的发展水平。

2.2 问题(2)的分析

问题(2)属于评估类数学问题,对于此类问题,我们首先要确定评估的标准。针对题目中要求我们研究的学科发展情况,所以我们根据参考文献和全国第四轮学科评估的情况来确立我们的指标。使用层次分析和序关系分析法建立我们的评估模型。计算出这些大学的相关数据的平均值,分别求出他们对应的得分和平均的得分。通过比较个高校的得分与平均得分进行比较,得出各高校的计算机科学与技术的发展情况。

2.3 问题(3)的分析

问题(3)属于预测类和相关性数学问题,对于此类问题,我们分部进行解决。首先对应预测类问题,我们选取灰色预测为我们所需的模型,查找得出问题三中对应的五所大学的综合排名,根据他们排名的现有数据使用灰色预测求出未来几年的排名走势。再去判断研究相关性问题的,为了解决此问题我们选择典型相关性模型进去求解。根据大学和所在城市的一些指标数据,对其进行相关性分析并画出相关性热图。

三、模型假设

1. 假设题目所给的数据真实可靠;
2. 假设各高校教师在选择高校时没偏见意识
3. 假设政府的政策对高校发展有影响
4. 假设城市流入的人口均为有效人才
5. 假设疫情对各地的人口流动无关

四、定义与符号说明

符号	符号说明
A	原始矩阵
E_j	评价体系中的指标信息熵元素
W_j	差异系数
R_{ij}	样本权重
B	综合评价价值
$\delta(k)$	相对误差值
$\rho(k)$	级比偏差值
$\mu(k)$	最小二乘序列
$\sum_{k=1}^n \tilde{x}_{ki} \cdot \tilde{x}_{kj}$	级比总和
S_{ij}'	熵值效益型指标
a_i^*	权重最优分配比系数
X_{ij}	第 i 个样本第 j 项评价指标的数值
S_j	第 j 个指标的标准差
r_{ij}	表示评价指标 i 和 j 之间的相关系数

五、模型的建立与求解

第一部分：准备工作

(一) 数据的处理

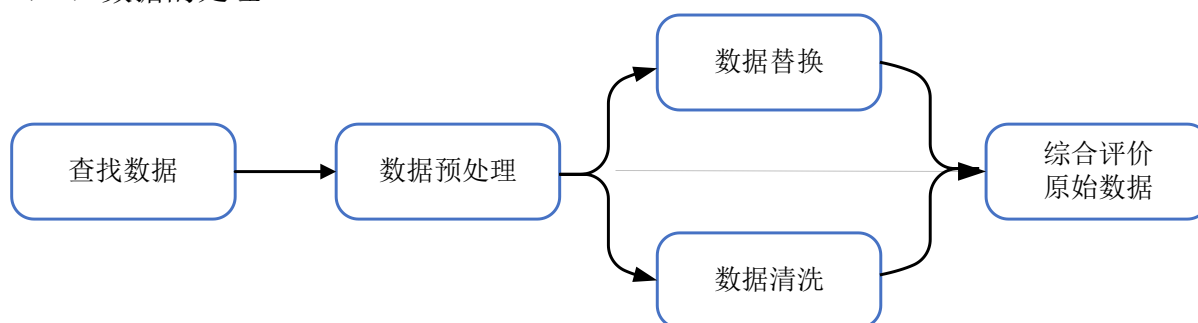


图 1 数据的处理过程

（二）聚类分析

该模型用 *matlab* 软件聚类分析，分析结果如图 2 所示：

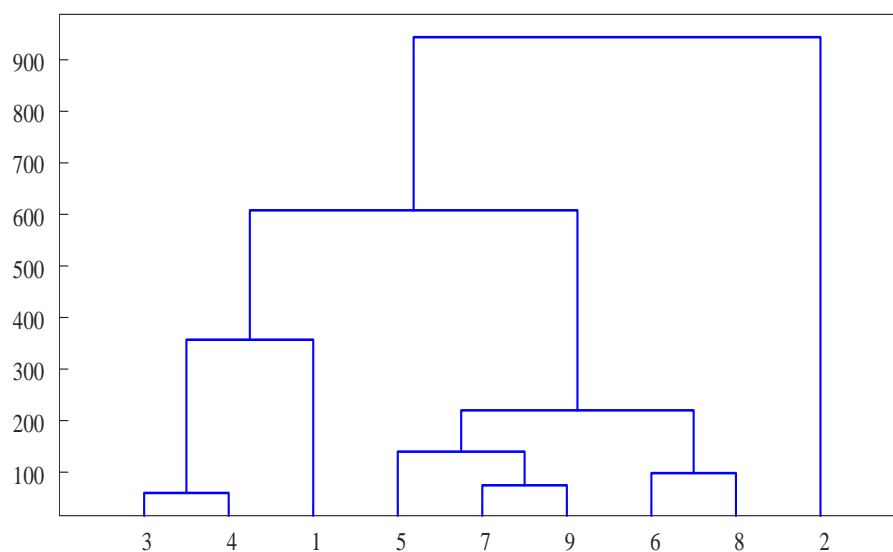


图 2 聚类分析结果

（三）预测的准备工作

表 1 问题三 5 所大学对应城市的经济情况

	广东省深圳	广东省广州	四川省成都	湖北省武汉	山东省青岛
年份	深圳大学	广州大学	成都大学	江汉大学	青岛大学
2017	22438.39	21503.15	13889.39	13410.34	11037.28
2018	24221.98	22859.35	15342.77	14847.29	12001.50
2019	26927.09	23628.60	17012.65	16223.21	10949.38
2020	27670.24	25019.11	17716.70	15616.06	12400.56
2021	30664.85	28231.97	19916.98	17716.76	14136.46

表 2 问题三 5 所大学的大学排名情况

大学排名	深圳大学	广州大学	成都大学	江汉大学	青岛大学
2017	76	155	443	438	119
2018	73	146	441	435	137
2019	86	140	401	396	152
2020	107	128	277	344	167
2021	57	143	272	321	108

第二部分：问题(1)的变权博弈综合评价模型

模型 I (变权博弈综合评价模型)

对题目中所给的 10 所大学进行数据处理，得到评价的指标。通过主观的求权方法，层次分析法、序关系分析法和客观的求权方法 *CRITIC* 赋权法、熵值取权法分别求出各个指标的主观权重和客观权重，进而利用变权理论计算出各指标的综合权重。建立博弈综合评价模型，求得最终得分。

问题(1)的流程图如图 3 所示:

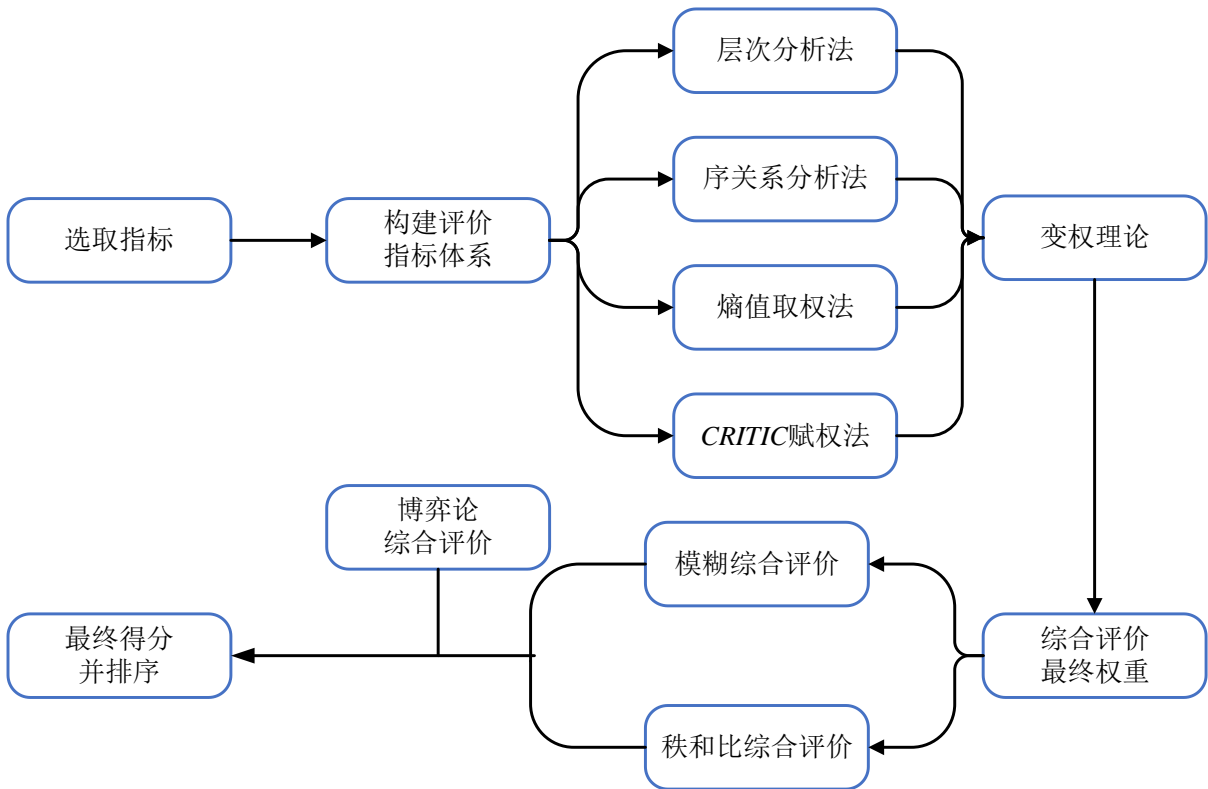


图 3 问题(1)流程图

1. 变权博弈综合评价模型的建立和求解

(1) 利用层次分析法求主观权重①

层次分析法基于定性决策问题进行定量化处理的一种方法，通过建立递阶层次结构，把人的主观判断转化成若干两两因素重要程度的判断上，从而把难以操作定性判断量化为可操作的重要性程度判断上。此次层次分析法将有决策有关元素为目标层、准则层、予准则层等，从而进行定向与定量结合求得主观权重①。

为了所建立的模型的指标更加的准确可靠，我们查找了中国大学排行榜，QS 世界大学排行榜等多个网站，查找他们对于大学排名的依据及他们所使用的指标。我们通过自己的分析将这些网站的指标做了如下可视化分析，结果如图所示：

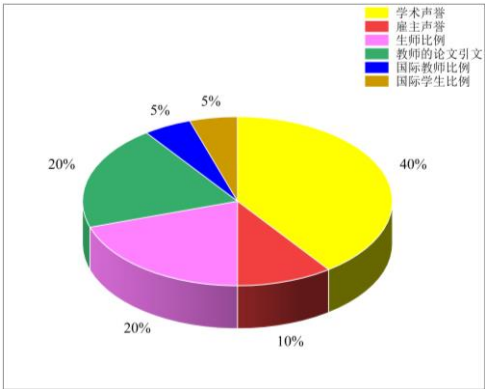


图 4 QS 世界大学排名

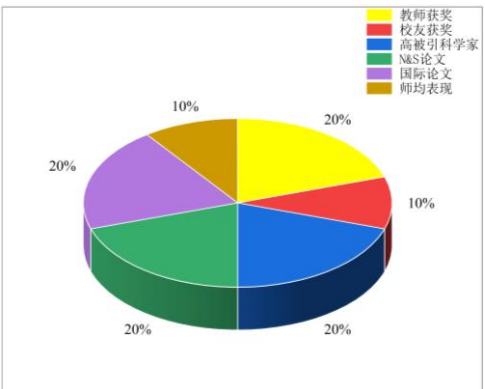


图 5 软科世界大学排名

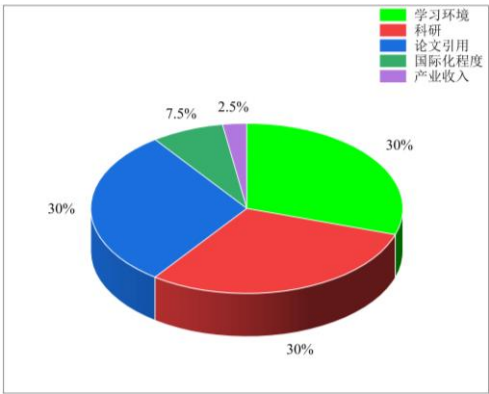


图 6 英国泰晤士

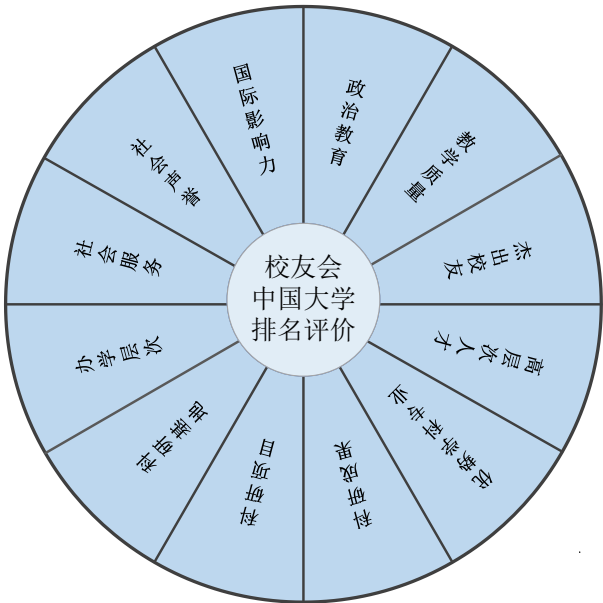


图 7 校友会中国大学排名评价体系

根据这些网站所提供的指标，我们将他们的指标进行综合，得出我们使用的指标。将我们的指标分为 4 个一级指标和 10 个二级指标，这些指标的层次结构图如图 8 所示：

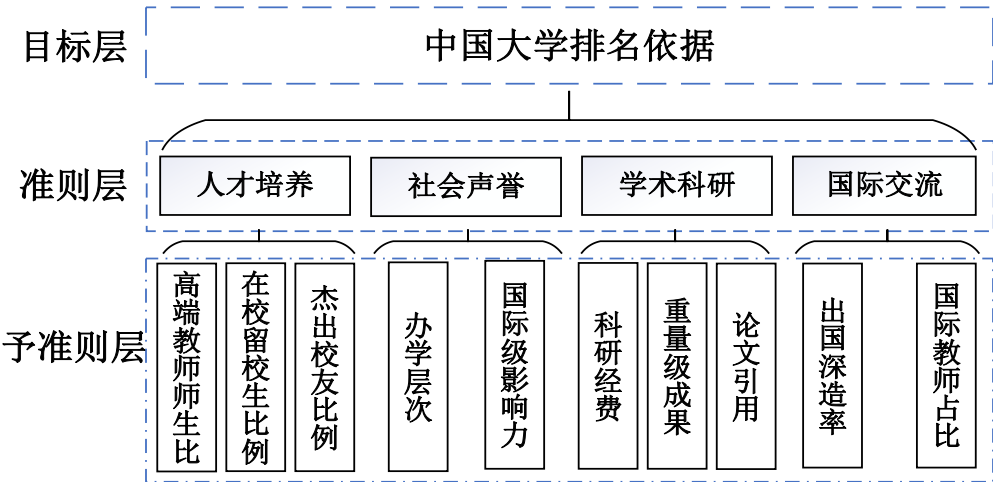


图 8 层次结构图

层次分析法步骤如算法 1:

Algorithm 1: 层次分析法分析法

Step 1: 计算判断矩阵的最大特征值根当最大特征值跟等于矩阵阶数的数量, 我们的正互反矩阵才为一致矩阵

$$\lambda_{\max} = N \quad (1)$$

Step 2: 已知将数据进行带入, 计算一致性指标 CI

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1} \quad (2)$$

Step 3: 查找对应的平均随机一致性指标 RI

Step 4: 计算一致性比例 CR

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (3)$$

Step 5: 得出最终权重

(2) 利用序关系分析法求主观权重

序关系分析法是在层次分析法的基础上改进的一种新的主观赋值法, 该方法在克服层次分析法缺点的同时, 减少了在确定各指标权重时的计算量, 即不需要构建判断矩阵, 且无需一致性检查, 其可操作性强。

序关系分析法步骤如算法表 2:

Algorithm 2: 序关系分析法

Step 1: 确定指标之间的序关系:

根据研究对象中各评价指标的重要程度, 确定各指标的排序关系。若指标 X_i 相对于 X_j 重要, 则记为 $X_i > X_j$ 依据这一原则, 确定评价对象中各个指标的重要性排序。

Step 2: 给出相邻指标之间相对重要程度的比较判断准则

设关于评价对象的评价指标 X_{k-1} 和 X_k 的相对重要程度之比 X_{k-1}/X_k 进行赋值为:

$$r_k = \frac{w_{k-1}}{w_k} (k = n, n-1, \dots, 2) \quad (4)$$

其中, n 是产品质量的评价指标总数。

Step 3: 计算指标权重 w_k , 假设给出 r_k 为理性赋值,

则:
$$w_n = (1 + \sum_{k=2}^n \prod_{i=k}^n r_i)^{-1} \quad (5)$$

$$w_{k-1} = r_k w_k (k = n, n-1, \dots, 2) \quad (6)$$

求得最终权重的合为:
$$w_k = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \quad (7)$$

(3) 利用熵值取权法求客观权重

熵值取权法是一种客观不确定各个指标权重的方法, 利用熵值取权法可以估算各个指标的权重, 其本质是利用指标信息的差异来计算其权重以及熵值, 其差异系数越高, 对评价的重要性就越大(或称权重越大, 对评价的结果的贡献也就最大)。现利用熵值取权法, 通过现有数据进行相关权重计算。在信息论中, 熵是对不确定性的一种度量。信息量越大, 不确定性就越小, 熵也就越小; 信息量越小, 不确定性越大, 熵也越大。根据熵的特性, 可以通过计算熵值来判断一个事件的随机性及无序程度, 也可以用熵值来判断某个指标的离散程度, 指标的离散程度越大, 该指标对综合评价的影响(权重)越大, 其熵值越小。

熵值取权法步骤如算法 3:

Algorithm 3: 熵值取权法

Step 1: 构建原始指标构建矩阵构造数据矩阵 A , 则构造的原始指标数据矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nm} \end{pmatrix} \quad (8)$$

对原始指标数据进行归一化处理

$$A_{ij} = \frac{A_j - A_{\min}}{A_{\max} - A_{\min}} \quad (9)$$

Step 2: 计算第 j 项指标下第 i 项样本占该指标的比重

$$R_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sum_{i=1}^m X_{ij}} \quad (10)$$

Step 3: 计算第 j 项指标下的信息熵及其指标差异程度

计算第 j 个指标的熵值大小, 公式如下:

$$E_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^m r_{ij} \ln r_{ij} \quad (11)$$

Step 4: 计算各个指标熵值

$$G_j = 1 - E_j \quad (12)$$

Step 5: 计算样本综合评价

$$W_j = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^m G_j} \quad (13)$$

(4) 利用 CRITIC 客观赋权法求客观权重

CRITIC 法是一种比熵权法和标准离差法更好的客观赋权法。它是基于评价指标的对比强度和指标之间的冲突性来综合衡量指标的客观权重。考虑指标变异性大小的同时兼顾指标之间的相关性, 并非数字越大就说明越重要, 完全利用数据自身的客观属性进行科学评价。

CRITIC 客观赋权法步骤如算法 4:

Algorithm 4: CRITIC 客观赋权法

Step 1 : 假设有 n 个待评价样本, p 项评价指标, 形成原始指标数据矩阵:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中 x_{ij} 表示第 i 个样本第 j 项评价指标的数值。

Step 2 : 无量纲化处理

为消除因量纲不同对评价结果的影响, 需要对各指标进行无量纲化处理。CRITIC 权重法一般使用正向化或逆向化处理, 不建议使用标准化处理, 原因是如果使用标准化处理, 标准差全部都变成数字 1, 即所有指标的标准差完全一致, 这就导致波动性指标没有意义。

正向化或逆向化处理:

若所用指标的值越大越好 (正向指标)

$$x'_{ij} = \frac{x_j - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (15)$$

若所用指标的值越小越好 (逆向指标)

$$x'_{ij} = \frac{x_{\max} - x_j}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (16)$$

Step 3 : 计算指标变异性
以标准差的形式来表现

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (17)$$

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-1}} \quad (18)$$

S_j 表示第 j 个指标的标准差。

Step 4 : 计算指标冲突性
用相关系数进行表示

$$R_j = \sum_{i=1}^p (1 - r_{ij}) \quad (19)$$

r_{ij} 表示评价指标 i 和 j 之间的相关系数。使用相关系数来表示指标间的相关性, 与其他指标的相关性越强, 则该指标就与其他指标的冲突性越小, 反映出相同的信息越多, 所能体现的评价内容就越有重复之处, 一定程度上也就削弱了该指标的评价强度, 应该减少对该指标分配的权重。

Step 5 : 求得信息量

$$C_j = S_j \sum_{i=1}^p (1 - r_{ij}) = S_j \times R_j \quad (20)$$

C_j 越大, 第 j 个评价指标在整个评价指标体系中的作用越大, 就应该给其分配更多的权重。

Step 6 : 最终得到客观权重

所以第 j 个指标的客观权重 w_j 为:

$$w_j = \frac{C_j}{\sum_{j=1}^p C_j} \quad (21)$$

上述使用主观和客观求权方法, 得到主观和客观权重。结果如图 9 所示:

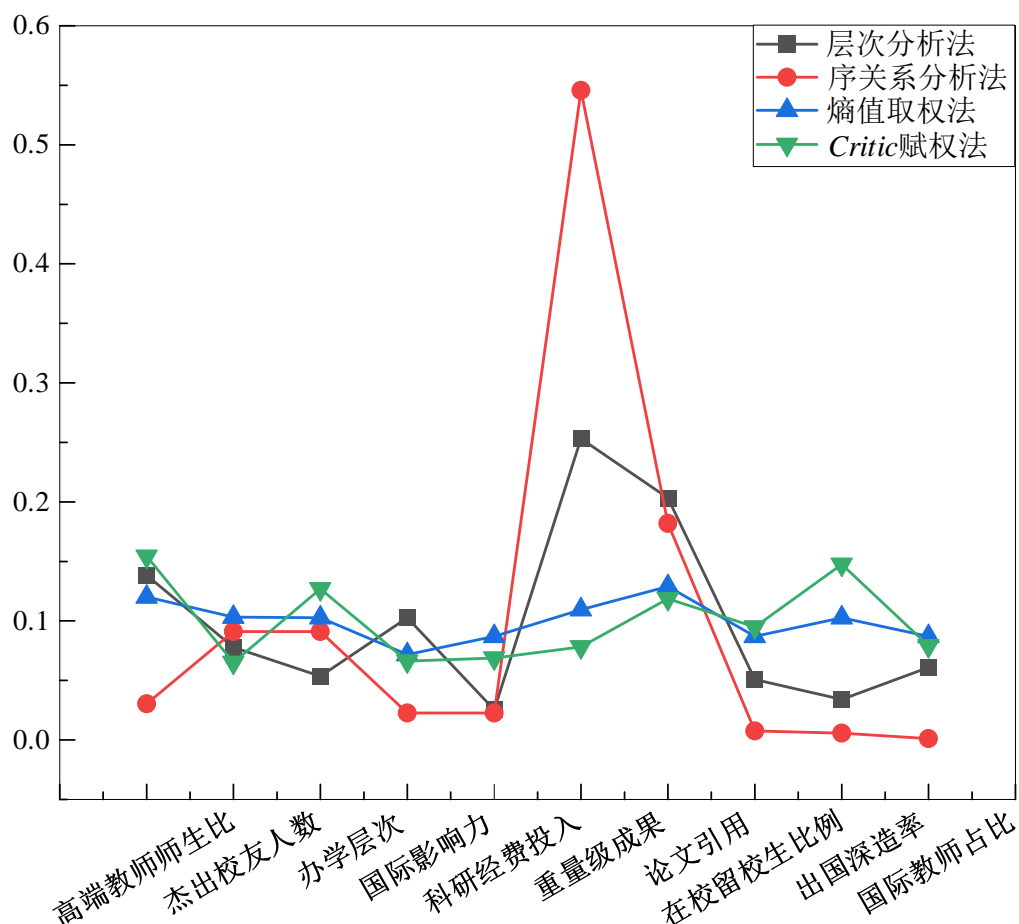


图 9 各个求权法得出的权重

再使用变权理论, 得到综合权重。为了得到最优权重, 使用变权理论, 来求得最优权重。

(5) 变权理论求得最终权重

变权实在常权的基础上, 根据各指标真实取值, 通过均衡函数求得均衡因子, 动态修正指标常权, 使得最终权重尽可能地反映出指标实测值对评估结果的影响。其基本原理是: 设指标的取值向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 定义变权是指 m 个映射 $w_j (j = 1, 2, \dots, m): [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ 满足:

①归一性: $\sum_{j=1}^m w_j = 1$

②连续性: $w_j (x_1, x_2, \dots, x_m), (j = 1, 2, \dots, m)$ 关于每个单元是连续的。

③单调性: $w_j (x_1, x_2, \dots, x_m), (j = 1, 2, \dots, m)$ 关于的单元 x_j 的单调减少,

即: $x_i \geq x_j \Rightarrow s_i(x) \geq s_j(x)$ (针对逆稳指标进行惩罚性变权) 或单调增加,

即: $x_i \geq x_j \Rightarrow s_i(x) \leq s_j(x)$ (针对益稳指标进行激励性变权)。

变权理论步骤如算法表 5:

Algorithm 5: 变权理论

Step 1: 对评价指标状态向量 X_i 构造状态变权均衡函数, 如下式:

$$S'_{ij} = \frac{S_{ij} - \min(S_j)}{\max(S_j) - \min(S_j)} X_i \quad (22)$$

$$\alpha'_i = \frac{4}{m^2} \left[m \sum_{j=1}^m x_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} \right)^2 \right] \quad (23)$$

式子 α'_i 为均衡因子, 其值越大, 针对低于水平的惩罚性指标进行的惩罚越重。

Step 2:

记 $W(X) = [\omega_1(X), \omega_2(X), \dots, \omega_m(X)]$ (24)

为一组 (m 维) 变权向量, 则对于任何常权向量。

$$W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \quad (25)$$

都可以得到第 i 个评价对象 Y_i 指标的变权向量 $W_j(X_i)$ 。

$$W \cdot S(X_i) = W(X_i) \cdot \sum_{j=1}^m [\omega_j \cdot S_j(X_i)] \quad (26)$$

$$\omega_j(W_i) = \frac{\omega_j \cdot S_j(X_i)}{\sum_{j=1}^m [\omega_j \cdot S_j(X_i)]} \quad (27)$$

$$W \cdot S(X) = [\omega_1 \cdot S_1(X), \omega_2 \cdot S_2(X), \dots, \omega_m \cdot S_m(X)] \quad (28)$$

式 (28) 是 *Hardarmard* 乘积。

Step 3: 通过上述步骤得到最终的权重。

通过上述求常权方法, 我们得到最终权重。权重结果如图 10 所示。

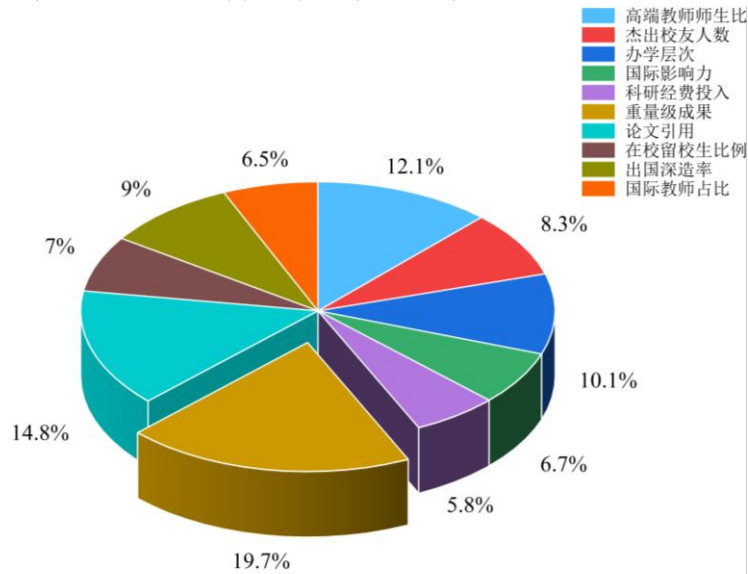


图 10 最终权重

有图像可知, 重量级成果在所有指标中, 所占权重最大, 同时重量级成果在现实生

活中, 对于衡量一个学校, 也起到较大作用。所以我们求得出较为合理的综合权重。故重量级成果的优劣对于高校排名起到重要作用。

对于问题一的评价, 我们在得到最终权重的基础上, 采用模糊综合评价法和秩和比评价法, 通过博弈论, 求得最终的得分。

(6) 基于模糊综合评价的综合评定

模糊综合评价法是一种基于模糊数学的综合评价方法。该综合评价法根据模糊数学的隶属度理论把定性评价转化为定量评价, 即用模糊数学对受到多种因素制约的事物或对象做出一个总体的评价。它具有结果清晰, 系统性强的特点, 能较好地解决模糊的、难以量化的问题, 适合各种非确定性问题的解决。因此我们来解决高校求得分问题。

模糊综合评价法步骤如算法表 6:

Algorithm 6: 模糊综合评价

Step 1: 确定因素及集

对于各高校发展水平的综合权重需要从多个方面进行综合评判, 如高端教师师生比、杰出校友人数、办学层次、国际影响力、科研经费投入等 10 个指标构成了评价指标体系的几何级因素, 即记为:

$$U = (A_1, A_2, A_3 \dots A_m) \quad (29)$$

Step 2: 确定各个因素的权重

一般情况下因素集中的各因素, 在综合评价中所起的作用是不相同的, 综合评价结果不仅与各因素的评价有关, 而且在很大程度上还依赖各因素对综合评价所起的作用, 这就需要确定一个各因素之间的权重分配, 它是 U 上的一个模糊向量, 记为:

$$A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_i) \quad (30)$$

公式中: a_i 为各个因素 i 的权重, 且满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$

Step 3: 确定模糊综合判断矩阵

且对于指标 U_i 来说, 对于指标的评判记 U_i 为

$$R_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} \dots r_{im}) \quad (31)$$

则各指标的模糊综合判断矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad (32)$$

它是一个从 U 到 V 的模糊关系矩阵

Step 4: 综合评价

利用 R 可得到一个模糊变换

$$T_R : F(u) \rightarrow F(V) \quad (33)$$

由此变换, 就可得综合评判结果

$$B = A \cdot R \quad (34)$$

综合评判后可以看作是 U 上的模糊向量, 记为

$$B = [b_1, b_2, b_3 \dots b_m] \quad (35)$$

进行矩阵合成运算中国十大高校发展水平的模糊综合评价。

(7) 秩和比综合评价方法 (RSR)

秩和比综合评价方法原理: 秩和比综合评价法基本原理是在一个 n 行 m 列矩阵中, 通过秩转换, 获得无量纲统计量 RSR ; 以 RSR 值对评价对象的优劣直接排序或分档排序, 从而对评价对象做出综合评价。因此, 我们在这里使用秩和比综合评价方法来解决高校求得分问题。

秩和比综合评价方法步骤如算法表 7:

Algorithm 7: 序关系分析法

Step 1: 编秩

将 n 个评价对象的 m 个评价指标排列成 n 行 m 列的原始数据表。编出每个指标个评价对象的秩, 其中效益性指标从小到大编秩, 成本型指标从大到小编秩, 同一指标数据相同者编平均秩。得到的秩矩阵记为 $R=(R_{ij})_{n \times m}$ 。

Step 2: 计算秩和比(RSR)

根据公式
$$RSR_i = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m R_{ij}, i=1, 2, \dots, n \quad (36)$$

当各评价指标的权重不同时, 计算加权秩和比($WRSR$),

其计算公式为
$$WRSR_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m R_{ij}, i=1, 2, \dots, n \quad (37)$$

w_j 为第 j 个评价指标的权重
$$\sum_{j=1}^m w_j = 1 \quad (38)$$

Step 3: 分档排序

根据 RSR_i 或 $WRSR_i(i=1, 2, \dots, n)$ 的值, 对评价对象进行分档排序, RSR_i 或 $WRSR_i$ 值越大, 其评价效果越大。

通过 (6) 和 (7) 步骤, 我们得到两组不同的得分, 为了将二者综合起来, 我们使用博弈论是指研究多个个体或团队之间在特定条件制约下的对局中利用相关方的策略, 而实施对应策略的学科。基于博弈论模型计算综合得分时, 通过各二者间间的偏差最小化, 使二者既相互竞争又协调一致。因此得到最终得分。

博弈论综合得分算法步骤如算法表 8:

Algorithm 8: 博弈论综合得分算法

Step 1: 建立基本得分向量集

若由 m 种方法来确定 n 所大学的得分, 则得到 m 组得分为:

(39)

由此得到一个得分集:

$$k = (k_{1j}^T, k_{2j}^T, \dots, k_{mj}^T), i=1, 2, \dots, m \quad (40)$$

Step 2: 确定最优综合得分

对 m 组得分向量进行任意线性组合

$$k = \sum_{i=1}^m a_i k_i^T, (a_i > 0) \quad (41)$$

对 a_i 进行优化使 k 和 k_i 的离差极小化,

$$\text{即} \quad \min \left\| \sum_{i=1}^m a_i k_i^T k_i \right\|, i = 1, 2, \dots, m. \quad (42)$$

由矩阵的微分性质导出最优一阶导数条为

$$\begin{pmatrix} k_1 k_1^T & k_1 k_2^T & \cdots & k_1 k_m^T \\ k_2 k_1^T & k_2 k_2^T & \cdots & k_2 k_m^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_m k_1^T & k_m k_2^T & \cdots & k_m k_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 k_1^T \\ k_1 k_2^T \\ \cdots \\ k_m k_m^T \end{pmatrix} \quad (43)$$

Step 3: 归一化得到 $a_x (x=1, 2, \dots, m)$, 最终得到最终得分

归一化得到权重最优分配比系数 a_i^* ; 通过以下的两个公式, 求得最优综合得分 k_i^*

$$a_i^* = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^m a_i} \quad (44)$$

$$k^* = \sum_{i=1}^m a_i^* k_i^T \quad (45)$$

通过上述方法, 我们求得最终得分。得分结果如图 11 所示:

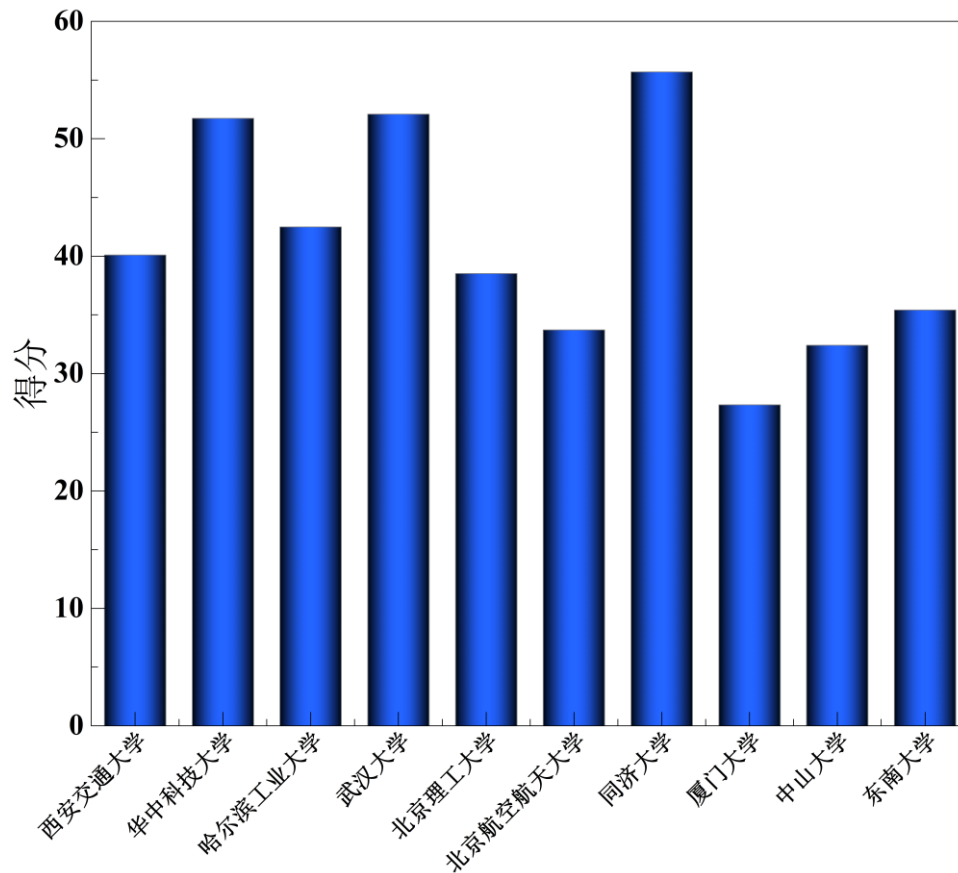









图 11 10 所大学的得分情况

由图像可知同济大学的得分最高，武汉大学和华中科技大学次之，其余七所学校尾随其后。由此便得到了最终的排名。排名表如表 3 所示：

表 3 十所学校得分情况					
学校					
得分	55.69	52.09	38.52	35.41	51.74
学校					
得分	33.71	42.49	32.41	40.1	27.34

第三部分：问题(2)的层次序关系分析模型

(1)利用层次分析法求主观权重①

层次分析法基于定性决策问题进行定量化处理的一种方法，通过建立递阶层次结构，把人的主观判断转化成若干两两因素重要程度的判断上，从而把难以操作定性判断量化为可操作的重要性程度判断上。此次层次分析法将有决策有关元素为目标层、准则层、予准则层等，从而进行定向与定量结合求得主观权重①。

层次分析法步骤如算法 9：

Algorithm 9: 层次分析法分析法

Step 1:计算判断矩阵的最大特征值根当最大特征值跟等于矩阵阶数的数量，我们的正互反矩阵才为一致矩阵

$$\lambda_{\max} = N$$

(46)

Step 2:已知将数据进行带入，计算一致性指标 CI

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1}$$

(47)

Step 3:查找对应的平均随机一致性指标 RI

Step 4:计算一致性比例 CR

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

(48)

Step 5:得出最终权重

(2)利用序关系分析法求主观权重

序关系分析法是在层次分析法的基础上改进的一种新的主观赋值法，该方法在克服层次分析法缺点的同时，减少了在确定各指标权重时的计算量，即不需要构建判断矩阵，且无需一致性检查，其可操作性强。

序关系分析法步骤如算法表 10：

(3)基于模糊综合评价的综合评定

Algorithm 10: 序关系分析法

Step 1: 确定指标之间的序关系:

根据研究对象中各评价指标的重要程度, 确定各指标的排序关系。若指标 X_i 相对于 X_j 重要, 则记为 $X_i > X_j$ 依据这一原则, 确定评价对象中各个指标的重要性排序。

Step 2: 给出相邻指标之间相对重要程度的比较判断准则

设关于评价对象的评价指标 X_{k-1} 和 X_k 的相对重要程度之比 X_{k-1}/X_k 进行赋值为:

$$r_k = \frac{w_{k-1}}{w_k} (k = n, n-1, \dots, 2) \quad (49)$$

其中, n 是产品质量的评价指标总数。

Step 3: 计算指标权重 w_k , 假设给出 r_k 为理性赋值,

$$\text{则: } w_n = (1 + \sum_{k=2}^n \prod_{i=k}^n r_i)^{-1} \quad (50)$$

$$w_{k-1} = r_k w_k (k = n, n-1, \dots, 2) \quad (51)$$

$$\text{求得最终权重的合为: } w_k = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \quad (52)$$

模糊综合评价法是一种基于模糊数学的综合评价方法。该综合评价法根据模糊数学的隶属度理论把定性评价转化为定量评价, 即用模糊数学对受到多种因素制约的事物或对象做出一个总体的评价。它具有结果清晰, 系统性强的特点, 能较好地解决模糊的、难以量化的问题, 适合各种非确定性问题的解决。因此我们来解决高校求得分问题。

模糊综合评价法步骤如算法表 11:

Algorithm 11: 模糊综合评价

Step 1: 确定因素及集

对于各高校发展水平的综合权重需要从多个方面进行综合评判, 如高端教师师生比、杰出校友人数、办学层次、国际影响力、科研经费投入等 10 个指标构成了评价指标体系的几何级因素, 即记为:

$$U = (A_1, A_2, A_3 \dots A_m) \quad (53)$$

Step 2: 确定各个因素的权重

一般情况下因素集中的各因素, 在综合评价中所起的作用是不相同的, 综合评价结果不仅与各因素的评价有关, 而且在很大程度上还依赖各因素对综合评价所起的作用, 这就需要确定一个各因素之间的权重分配, 它是 U 上的一个模糊向量, 记为:

$$A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_i) \quad (54)$$

公式中: a_i 为各个因素 i 的权重, 且满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$

Step 3: 确定模糊综合判断矩阵

且对于指标 U_l 来说, 对于指标的评判记 U_l 为

$$R_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} \dots r_{im}) \quad (55)$$

则各指标的模糊综合判断矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad (56)$$

它是一个从 U 到 V 的模糊关系矩阵

Step 4: 综合评价

利用 R 可得到一个模糊变换

$$T_R : F(u) \rightarrow F(V) \quad (57)$$

由此变换, 就可得综合评判结果

$$B = A \cdot R \quad (58)$$

综合评判后可以看作是 U 上的模糊向量, 记为

$$B = [b_1, b_2, b_3 \dots b_m] \quad (59)$$

进行矩阵合成运算问题(2)中高校的计算机科学与技术的学科发展情况的模糊评价

在使用上述的模型进行求解时, 我们根据自己的需求查找资料和相关文献。根据查阅所得, 我们确立了六个指标来对问题二进行求解。我们查找出对应的数据, 将数据进行可视化处理, 得出的结果如下图所示:

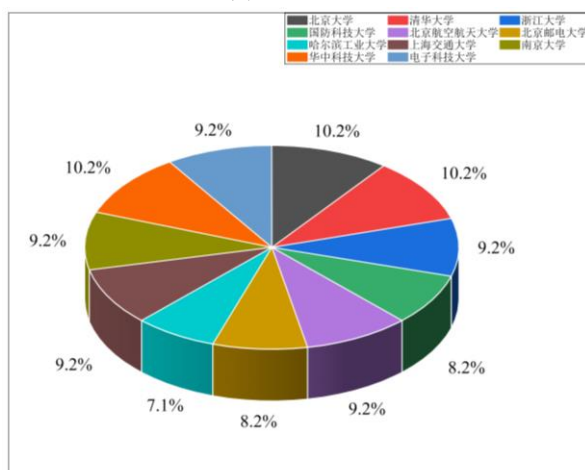


图 12 科研获奖

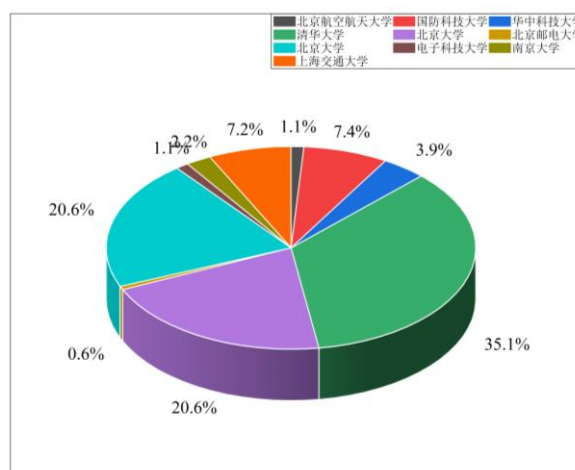


图 13 科研成果

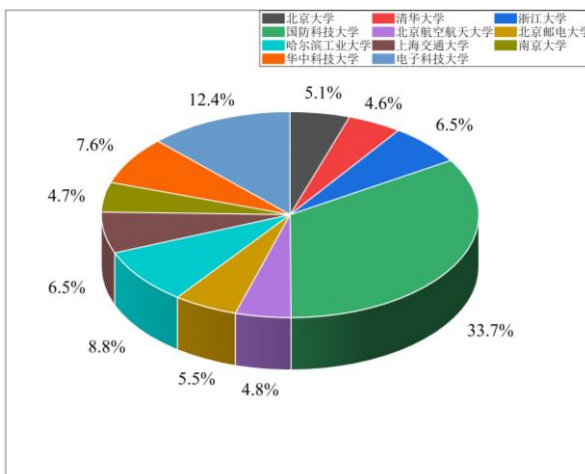


图 14 师资质量

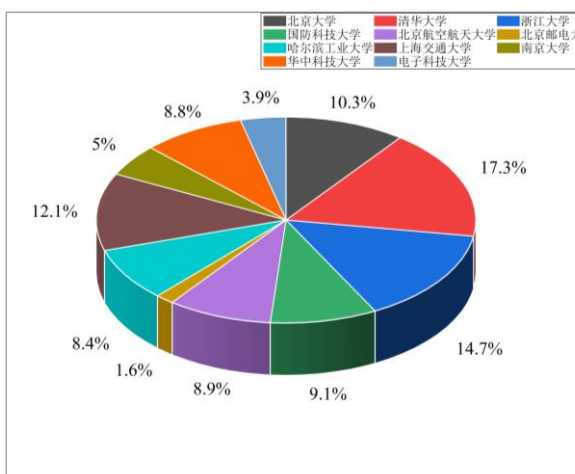


图 15 校区资源

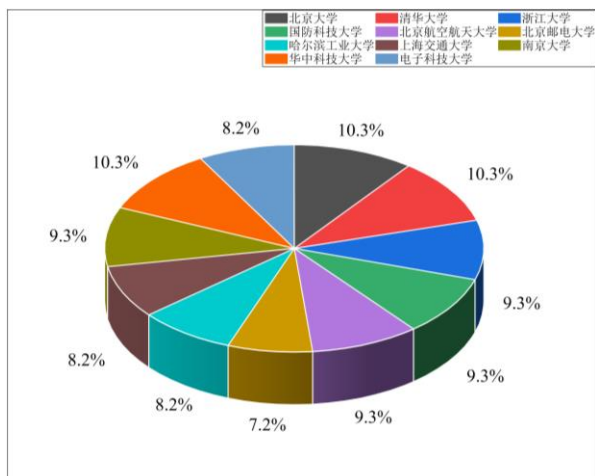


图 16 学科声誉

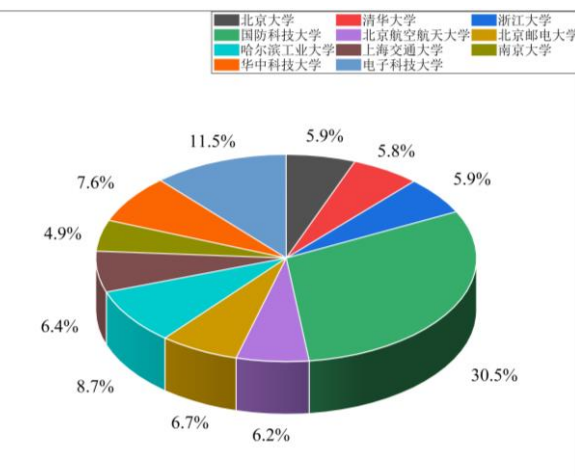


图 17 专任教师

根据所找的数据和可视化后的数据结果对问题(2)进行一个初步的分析,确定所找的数据可靠且贴切题目与实际。

通过所找的数据和我们所建立的模型进行求解。将求解后的结果如图 18

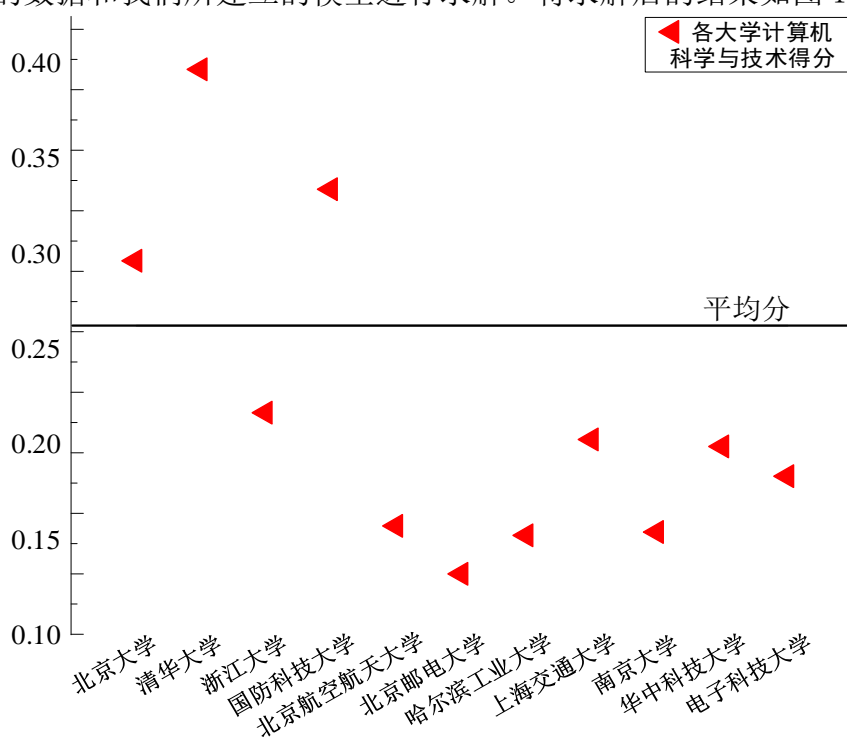


图 18 十一所大学计算机专业得分情况

由图可知的结果是:在问题二中提及的大学中,清华大学的计算机科学与技术位居前列,其次为国防科技大学和北京大学。较多数的大学位于得分榜平均分的下面。其中北京邮电大学的计算机科学与技术得分最低,排名在这些大学里最靠下。其余大学得分和平均分之间还有差距。

第四部分: 问题(3)的灰色相关性模型

为了确保五所大学未来的发展情况,在此使用灰色预测,对五所大学的排名以及五所大学所在城市进行预测。得到科学准群的预测值。

灰色系统理论是研究解决灰色系统分析、建模、预测、决策和控制的理论. 灰色预测模型是通过少量的、不完全的信息, 建立数学模型做出预测的一种预测方法。是基于客观事物的过去和现在的发展规律, 借助于科学的方法对未来的发展趋势和状况进行描述和分析, 并形成科学的假设和判断。

灰色预测步骤如算法表 12:

Algorithm 12: 灰色预测模型

Step 1: 对原始数列 $X^{(0)}$ 作一次累加处理:

$$X^{(1)} = (X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)) \quad (60)$$

其中
$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n \quad (61)$$

Step 2: $X^{(1)}$ 的均值生产序列

$$Z^{(1)} = (Z^{(1)}(2), Z^{(1)}(3), \dots, Z^{(1)}(n)) \quad (62)$$

其中
$$Z^{(1)}(k) = 0.5X^{(1)}(k) + 0.5X^{(1)}(k-1), k = 2, 3, \dots, n \quad (63)$$

Step 3:

建立灰微分方程:
$$X^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b, k = 2, 3, \dots, n \quad (64)$$

相应白化微分方程:
$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt} + aX^{(1)}(t) = b \quad (65)$$

a 为发展系数, b 为灰色作用量

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = (X^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}})e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \quad (66)$$

Step 4: 构造数据矩阵 B 及数据向量 Y ,

有:
$$Y = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

并计算
$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (68)$$

可得:
$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = (X^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}})e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \quad (69)$$

Step 5: 检验预测值

相对误差检验:
$$\delta(k) = \frac{|X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k)|}{X^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (70)$$

级比偏差值检验:
$$\rho(k) = 1 - \left(\frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \right) \lambda(k) \quad (71)$$

由灰色预测, 我们得到了五所大学的未来五年的大学排名和相应城市的经济发展情况。并对所得到的结果数值进行可视化。如图 19, 20 所示:

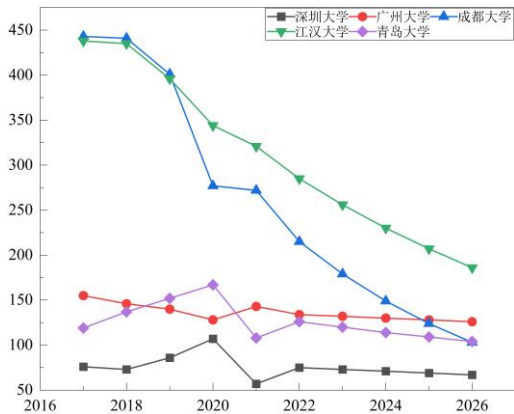


图 19 大学排名变化

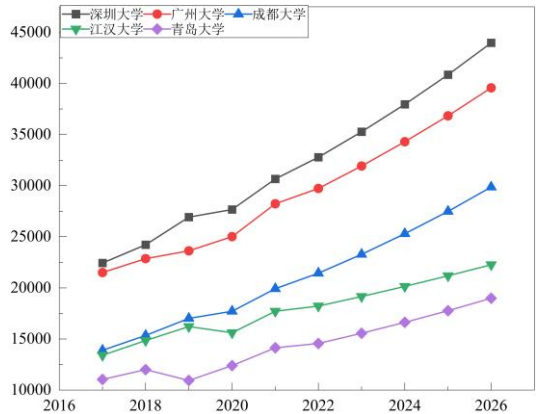


图 20 大学所在地经济变化

在灰色预测模型中，我们通过该模型得出在未来五年里成都大学的综合排名迅速上升，在各地经济都在上升的环境下成都大学未来告诉发展，同时由于深圳大学的综合排名一直高居不下进而源源不断的人才推动着深圳市的经济发展。广州市的经济虽然飞速发展，但并未很有效的推动着广州大学的发展，并未实现经济推动高校，高校带动经济的发展趋势。并对城市经济对大学排名影响对一个初步的分析，分析结果如下图：

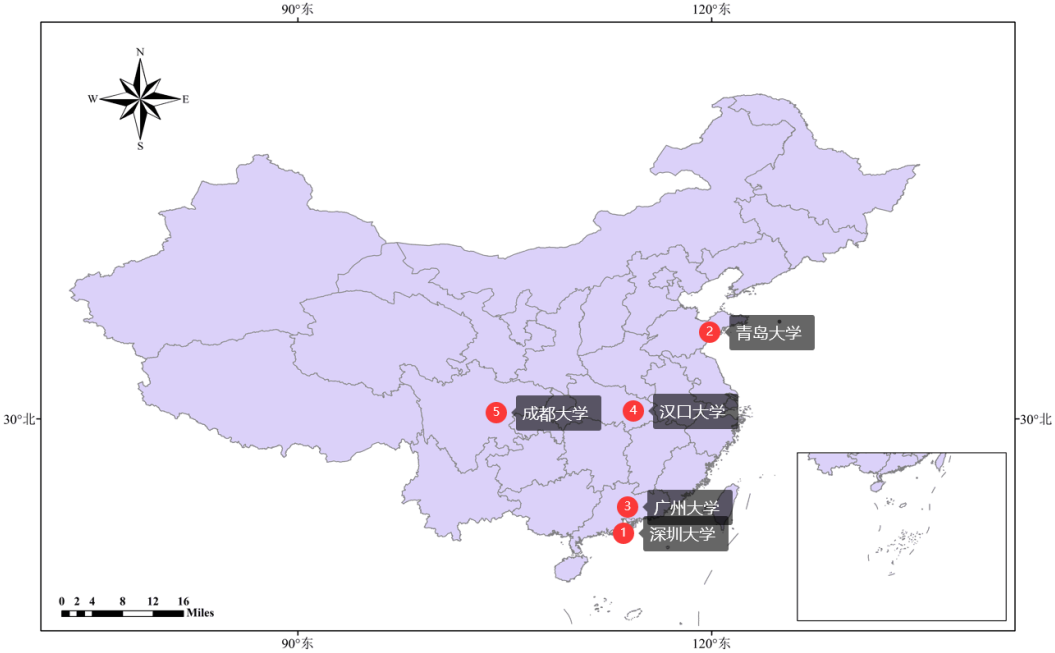


图 21 经济影响高校排名

通过灰色预测得到了五所大学未来的发展情况和五所大学对应城市未来的发展情况。在此将二者关联起来，使用典型相关性分析，分析出二者之间的相关性。

典型相关分析是研究两组变量之间整体的线性相关关系，它是将每一组变量作为一个整体来进行研究而不是分析每一组变量内部的各个变量。所研究的两组变量可以是一组变量是自变量，而另一组变量是因变量的情况，两组变量也可以处于同等的地位，但典型相关分析要求两组变量都至少是间隔尺度的。因此使用典型性相关分析。

典型性相关分析步骤如算法 13:

Algorithm 13: 典型性相关分析

Step 1: 考虑两组变量的向量

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_q)^T \end{cases} \quad (72)$$

典型相关分析就是寻找 x 组的线性组合 $u_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{p1}x_p$ (73)

与 y 组的线性组合 $v_1 = b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \dots + b_{q1}y_q$, (74)

使得 u_1 和 v_1 之间的简单相关系数为最大, 其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sum_{xx} & \sum_{xy} \\ \sum_{yx} & \sum_{yy} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$a_1 = \begin{cases} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{cases} \quad b_1 = \begin{cases} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1q} \end{cases} \quad (76)$$

Step 2: 设 x 组与 y 组的协方差阵为:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sum_{xx} & \sum_{xy} \\ \sum_{yx} & \sum_{yy} \end{bmatrix} \quad (77)$$

其中 \sum_{xx} x 组的协方差矩阵 \sum_{yy} y 组变量的协方差矩阵; $\sum_{xy} = \sum_{yx}'$ 是 x 组和 y 组的协方差矩阵
则 u_1 的方差为

$$\text{Var}(u_1) = \text{Var}(a_1'x) = a_1' \sum_{xx} a_1 \quad (78)$$

v_1 的方差为

$$\text{Var}(v_1) = \text{Var}(b_1'y) = b_1' \sum_{yy} b_1 \quad (79)$$

u_1 和 v_1 的协方差为

$$\text{Cov}(u_1, v_1) = \text{Cov}(a_1'x, b_1'y) = a_1' \sum_{xy} b_1 \quad (80)$$

u_1 和 v_1 的简单相关系数(pearson)为

$$p(u_1, v_1) = \frac{\text{Cov}(u_1, v_1)}{\sqrt{\text{Var}(u_1) \times \text{Var}(v_1)}} = \frac{a_1' \sum_{xy} b_1}{\sqrt{a_1' \sum_{xx} a_1 b_1' \sum_{yy} b_1}} \quad (81)$$

Step 3: 典型相关问题就是使得 u_1 和 v_1 的简单相关系数最大, 故:

在 $\text{Var}(u_1) = 1$ 和 $\text{Var}(v_1) = 1$ 条件下, 求取使 $\text{Cov}(u_1, v_1)$ 最大的 a_1 和 b_1

然后再次估计组合系数, 直至进行到 r 步, 两组变量的相关性被提取完为止。

$$r \leq \min(p, q) \quad (82)$$

可以得到 r 组变量。求出每一组特征值, 满足

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \quad (83)$$

a_i 和 b_i 分别是 λ_i 的特征向量, 则 $u_i = a_i'x$ 和 $v_i = b_i'y$, 称为第 i 组典型变量, u_i 和 v_i 的第 i 典型相关
为 $\sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, r$

因为 $\sum_{xx}, \sum_{yy}, \sum_{xy}$ 未知, 改以 S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} 取代之, 而得到

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \quad (84)$$

Step 4: 典型变量的系数称为典型权重, 权重越大, 表示此变量对此典型变量的贡献越大。在以上的

计算中, 此权重为标准后的资源所得的, 故 k 个资料的第 i 典型变量得点为:

$$\sum a_{ij} \frac{(x_{jk} - \bar{x}_j)}{s_j} \quad (85)$$

根据我们建立的模型, 通过所找的数据进行相关性热图分析, 各大学相关性热图如下图所示:

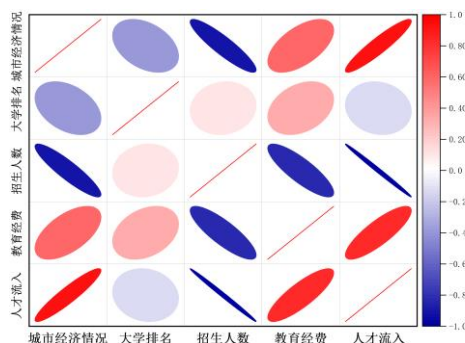


图 22 青岛大学

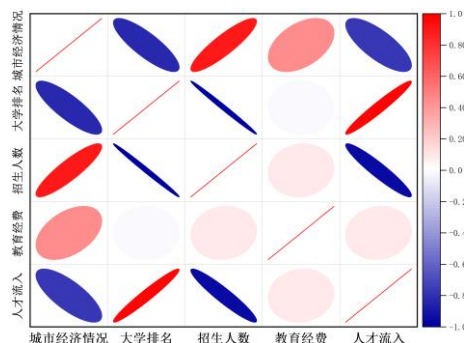


图 23 汉江大学

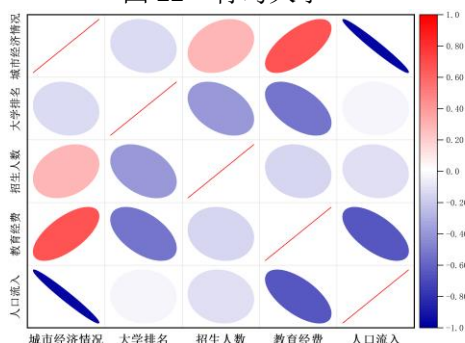


图 24 深圳大学

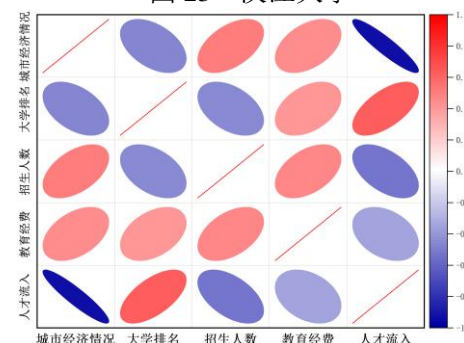


图 25 广州大学

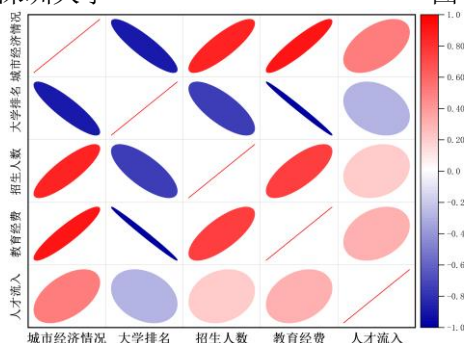


图 26 成都大学

根据相关性热图对问题(3)进行进一步的分析五所大学各自的发展特色。其中汉江大学的综合排名与人才的流入密切相关, 其次是广州大学。广州大学的综合排名变化和其教育资金的投入有关, 成都大学则对其并无多大关系。但是成都大学的招生人数与教育资金有很大关系。同时成都大学的招生人数与当地经济的发展有密切关系, 这方面汉江大学也是。

根据相关性热图得知五所大学的发展各有其特色, 也与当地的发展有很大关系。

六、结果分析

为了确保我们所得到的结果的准确性和可靠性, 我们选择了合理的变化曲度对我们的模型计算出的结果进行一个灵敏度分析, 以达到检验模型和验算结果的目的。通过如下图所示的灵敏度分析可知, 我们的模型所得结果会在我们给出的变化曲度里进行合理的变化, 进而说明我们的模型与结果具有准确性和可靠性。

问题(1) 灵敏度分析结果如下图:

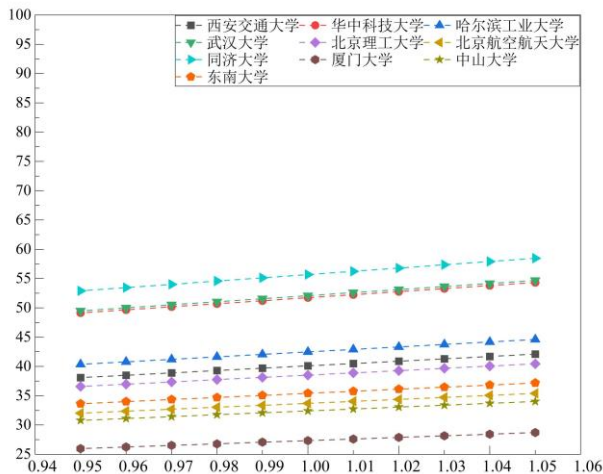


图 27 问题(1) 灵敏度分析

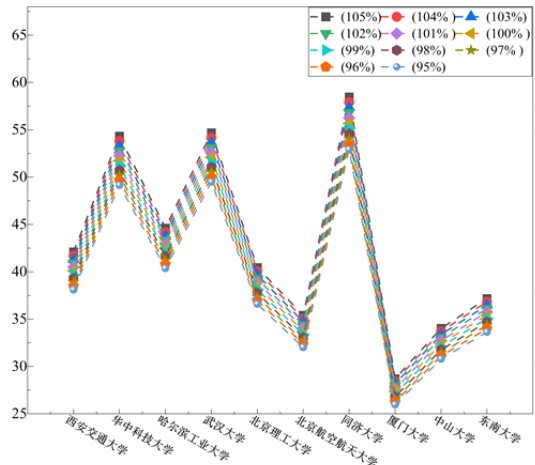


图 28 问题(1) 灵敏度分析

问题(2) 灵敏度分析结果如下图:

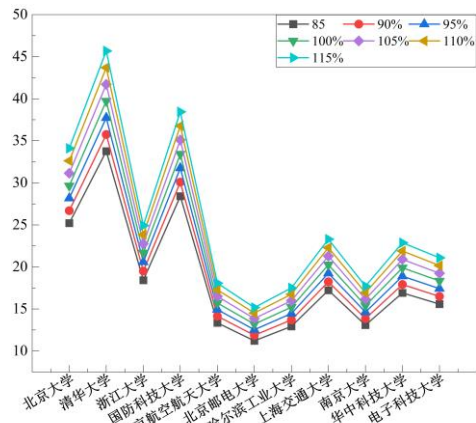


图 29 问题(2) 灵敏度分析

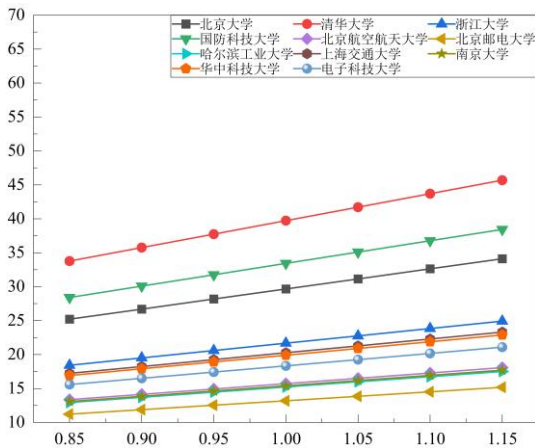


图 30 问题(2) 灵敏度分析

七、模型评价与推广

(一) 模型的优点

1. 对于求权重方法, 我们采用了层次分析法, 序关系法, *CRITIC* 赋值法和熵值取权法。同时基于博弈论理论, 从而得出最优组合权重。对结果的评价充分的考虑了主客观因素, 免了单一模型不准确问题。使研究的结果更加准确。
2. 本文提到的赋权方法较传统的赋权方法更加合理, 准确。
3. 利用灰色预测模型并且计算出未来五所大学排名情况和五所大学相应城市经济发展情况的变化趋势, 并且考虑预测值的变化对于该模型的关联度的影响, 使得关联度系数计算结果更加准确。
4. 该模型将复杂的问题简单化, 化繁为简。使得求解过程更加的简便, 更加精准。
5. 实用性很强, 可以用于多种模型的求解, 是较为经典的求解方法。

(二) 模型的缺点

1. 使用的模型过于理论化, 缺少实践。只适用于理论方面。在实际方向上缺少实践。
2. 考虑的影响因素较少, 在处理问题时可能存在一定误差。

(三) 模型的改进

在模型的改进方面,应该考虑更多的因素,从各个方面进行更全面,更精确的评价。消除应评价因素过少而造成的误差。我们的模型考虑的因素较少,对结果有造成误差。

八、参考文献

- [1]袁从万. 平板支撑与三种灵敏测试成绩之间的相关性分析[J]. 福建体育科技, 2022, 41 (01): 72-75.
- [2]王琼. 基于灰色预测和 BP 神经网络的一般公共预算收入预测分析——以无锡市为例[J]. 中国乡镇企业会计, 2021 (12): 12-14.
- [3]王黎蝶, 侯克鹏, 孙华芬, 孙伟. 基于改进的博弈论-变权可拓模型的边坡稳定评估[J]. 有色金属工程, 2021, 11 (09): 100-106.
- [4]支援. “博弈论”课程中的案例教学探索[J]. 教育教学论坛, 2021 (30): 86-91.
- [5]李子彬, 孙辉, 张丽珍. 基于 AHP-模糊综合评价法的加油站应急能力评估[J]. 科技风, 2022 (04): 154-156. DOI: 10. 19392/j.cnki.1671-7341.202204050.
- [6]刘良帅, 杜晓东, 王立斌, 刘成龙, 董娜. 基于秩和比法的配网台区运行状态评价[J]. 河北电力技术, 2021, 40 (06): 34-37.

九、附录

9.1 代码

9.1.1 序关系分析法

```
clc,clear
%% 采用序关系法确定指标权重
% 设排序后的指标为 u1>u2>...>un
% CmpVec: 排序后的指标标度值向量（横向量或列向量），第一个元素为 u1/u2 的标度值，第二个元素为 u2/u3 的标度值...，以此类推
% W: 排序后的指标权重列向量
CmpVec=[1 1/4 4 1/5 1/4 5];
n=length(CmpVec)+1;
sumr=0;
for i=1:length(CmpVec)
    prodr=1;
    for j=i:length(CmpVec)
        prodr=prodr*CmpVec(j);
    end
    sumr=sumr+prodr;
end
W(n,1)=1/(1+sumr);
for i=length(CmpVec):-1:1
    W(i,1)=W(i+1,1)*CmpVec(i)
End
```

9.1.2 模糊综合评价

```
clc,clear
x=[121 105 91.43 111 10 10
110 104 153.75 189 10 10
153 105 130.98 48 9 9
800 543 81 40 8 9
113 110 79.28 6 9 9
130 120 14.27 3 8 7
208 155 74.7 9 7 8
153 114 108.15 39 9 8
111 87 44.74 12 9 9
180 135 78.01 21 10 10
293 205 34.48 6 9 8
215.64 162.09 80.98 44.00 8.91 8.82];
```

```

[n,m]=size(x);
s=zeros(1,m);
for j=1:m
for i=1:n
s(j)=s(j)+x(i,j);
for l=1:m
for k=1:n
b(k,l)=x(k,l)/s(l);
end
end
end
end
l=max(b);
l=max(l);
k=min(b);
k=min(k);
c=(b-k)/(l-k);
c%归一化
w=[0.0719    0.1485    0.0508    0.2206    0.4347    0.0737];
t=w*c';
g=0;
for i=1:n
g=g+t(i);
end
t

```

9.2 问题三预测结果

9.2.1 五所大学所对应城市的经济情况，如表 4 所示：

表 4 未来五年五所大学所对应城市经济发展情况

	广东省深圳	广东省广州	四川省成都	湖北省武汉	山东省青岛
年份	深圳大学	广州大学	成都大学	江汉大学	青岛大学
2022	32777.98	29721.51	21434.06	18221.98	14562.05
2023	35276.39	31926.81	23286.81	19158.98	15561.85
2024	37965.24	34295.75	25299.70	20144.16	16630.28
2025	40859.04	36840.45	27486.59	21180.00	17772.07
2026	43973.41	39573.98	29862.51	22269.10	18992.26

9.2.2 五所大学所大学的大学排名情况，如表 5 所示：

表 5 未来五年五所大学大学排名情况

	广东省深圳	广东省广州	四川省成都	湖北省武汉	山东省青岛
年份	深圳大学	广州大学	成都大学	江汉大学	青岛大学
2022	75	134	215	285	126
2023	73	132	179	256	120
2024	71	130	149	230	114
2025	69	128	124	207	109
2026	67	126	103	186	104