2021 第六届“数维杯”大学生
数学建模竞赛论文

题　　目　**基于动态规划的运动会优化比赛模式研究**

摘　要

为了引进一种科学而合理的运动会优化比赛模式，本文利用基于动态规划的多个数学模型，对一场学院运动会的比赛模式进行优化研究。

针对问题 1，为了满足比赛中允许学院合并后共同参加比赛，分组数量不低于 12 个的、各组人员总数和男女性别比较为均衡，建立了一个基于动态规划中的非平衡指派问题的数学模型，以各组人数及男女比例均衡为目标函数，利用匈牙利算法结合 lingo 软件进行最优分配方案的求解，并定义了一种讨论比赛公平性的公平指标，从而对得到的优化分配方案进行了讨论。

针对问题 2，为了将每个学院分为甲乙两组进行比赛，为了使得各学院的实力较均衡，通过分析考虑将每个学院按专业进行分组，再利用问题 1 建立的非平衡指派的优化分配模型求解每个学院的最优分组方案，最终确定了最优的甲乙组分配方案。

针对问题 3，为了使各学院比赛实力更为均衡，考虑以各学院总人数近似相等为均衡条件，将特长生分配到不同的学院。因特长生与普通学生在体育竞技上的显著差异，采取将每名特长生与普通学生按 1:5 的比例进行分配。特长生分配方案类似与动态规划中的资源分配问题，因此建立动态规划中的资料分配问题模型来进行特长生分配。在考虑特长生不参加比赛的情况下，为了让各学院的实力均衡，分别给每个学院引入一个获奖概率权重，然后利用建立的公平席位分配模型，通过调节每个学院的获奖概率权重，从而使得各学院获奖的机会是均等的。

针对问题 4，在前面 3 个问题建立的模型的基础上，拟通过计算机模拟的方式，对四种优化分配模型进行探索，并分析四种不同的公平指数，从而选择一种最优的分配模式。

关键词　非平衡指派；匈牙利算法；资源分配问题；公平席位分配

目 录

一、问题重述

5月中旬恰好是各个大学召开每年一届的运动的时间节点。运动会已成为了大学校园里一道亮丽的风景线，运动会上振奋人心的开幕式、拍手称赞的比赛、激动人心的颁奖仪式都给参加运动会的同学们带来了一次精神上的享受。每一次运动会举办的过程中运动场上运动员奋勇拼搏，用自己的努力证明自己，展示自己的速度与激情。运动场下各班级啦啦队为选手们加油呐喊，展现着青春活力，运动会依然成为了校园里不可或缺的一部分。

运动会不仅是同学们展示自己的舞台，更为重要的这是难得的提高大学生团队意识与身体素质的良机。然而，不同学院人数与性别之间的显著性差异，导致了部分学院排名的多年垄断。这也导致了大量学院运动会参与热情的下降，从而未能发挥运动会应有的作用。为此，引进一种科学而合理的运动会优化比赛模式迫在眉睫。

已知某校运动会的积分规则为：第一名得9分，第二名至第八名获得7至1分。各学院男生和女生累积得分最终构成团体得分。附件1中给出了某大学20个学院，104个专业，共计28523名学生的分布情况数据，请结合此数据努力完成如下任务：

问题1：若在比赛中允许学院合并后共同参加比赛，我们拟提出一个分组数量不低于12个的、各组人员总数和男女性别比较为均衡的优化分配模型，并定义了分组公平指数，从而讨论分组方案的公平性；

问题2：若对各个学院进行甲组和乙组分类进行比赛，我们拟提出一个将每个学院按专业进修分组的方案，并讨论这一分组方案的公平指数；

问题3：如果特长生可以跨学院参加比赛，请你提出尽量保障各学院比赛实力更为均衡的方案。如果特长生不参加比赛您能否提出一个对各学院相对公平的加权积分方案？

问题4：最后通过计算机仿真模拟或理论推导来对上述四种优化比赛模式进行分析，从而选出最优的比赛模式。

二、问题分析

2.1 问题1的分析

问题一属于数学优化问题，对于解决此类问题，我们要重点分析三个重要点，以此来建立模型。1、分组的数量为十二个；2、分好的各组人员总数要大约一致;3、各组人员中的男女比例要近似相等。

由于以上原因，我们可以首先建立一个统计表的数学模型I，再建立一个指派模型(0-1规划的特例)的数学模型II,然后将这12个组里面，每组的人数与总人数的平均值的标准差Z1、每组的男女比例、总人数的男女比例的标准差 Z2 作为目标函数，最后求得解，找出分组方案的公平指数。

2.2 问题 2 的分析

问题二属于数学优化问题，对于解决此类问题，将每个学院分为甲组和已组,我们要重点分析两个重要点，以此来建立模型。1.按专业分组;2.将每个学院的人数按照各组人员总数和男女性别较为均衡的要来进行。

由于以上原因,我们首先可以利用问题 1 建立的非平衡指派的优化分配模型对按专业分组的每个学院进行分组求解,其次讨论该分组方式的公平指数,最终确定最优的甲乙组分配方案。

2.3 问题 3 的分析

问题三属于资源分配数学问题，此类问题可以是多阶段决策过程，也可以是静态规划问题,而对于解决此类问题，都能构造动态规划模型求解。

由于以上原因,我们首先可以利用附件 1 中给出的各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差最小作为目标函数，其次求解出特长生最优分配方案，最后再利用问题 1 定义的公平指数定义讨论其公平指数。

2.4 问题 4 的分析

问题 4 属于验证问题。在前面 3 个问题建立的模型的基础上，拟通过计算机模拟的方式，对四种优化分配模型进行探索，并分析四种不同的公平指数，从而选择一种最优的分配模式。

三、模型假设

1. 假设男生和女生参赛队员的实力是均衡的;
2. 假设体育特长生参赛的实力大于普通学生;
3. 假设比赛过程中所有参赛队员的状态都是理想状态;
4. 假设参赛过程中的人数不会发生不确定性变化。

四、定义与符号说明

符号定义	符号说明
C_1	第 i 个学院到第 j 分组的总人数
c_2	第 i 个学院到第 j 分组的男女生之比
X_{ij}	第 i 个学院到第 j 分组的实际人数
Z_1	每个分组的实际总人数与学校平均到每个分组的人数标准差

Z_2	每个分组的男女生之比与学校总的男女生之比的标准差
$\overline{X}_1$	学校平均分到每个组的人数
$\overline{X}_2$	学校总的男女生之比
n	表示要求的分组数
m	表示学院数
D_{ij}	学院各专业到每个分组的总人数
d_{ij}	每个学院各专业到每个分组男女生之比
$Z_{1(i)}$	每个分组的实际总人数与每个学院平均
$Z_{2(i)}$	每个分组的男女生之比与每个学院总的
K	特长生总数
K_i	分配给第 i 个学院的数量
a_i	每个奖项代表的学生数
α_i	第 i 个学院按学生数比例应获得奖项的
N_i	实际获得的奖项数
W_i	每个学院的获奖概率权重

五、模型的建立与求解

从运筹学中，我们知道工作中常遇到这样的问题：有 m 项任务需要 n 个人来承担，每个人都能完成其中的每项任务，只是由于每个人的特点与专长不同，每个人完成各项任务所需的时间、费用或所产生的效益各不相同，又因为任务性质的要求和管理上的需要等原因，每项任务只能由一个人来完成，每个人也只能承担其中的一项任务. 问应指派哪个人去完成哪项任务才能使完成各项任务花费的总时间最短或总费用最少，或所产生的总效益最佳. 我们把这类最优匹配问题称为指派问题.[1]

5.1 问题 1 的模型建立与求解

在实际应用中指派问题通常有平衡与非平衡两种类型，即有 n 项任务，指派 n 个人员来分派完成称为平衡指派问题；有 m 项任务，指派 n 个人员来分派完成称为非平衡指派问题。根据题目条件允许 20 各学院合并为 12 个以上分组，要求建立一个分配模型使得各组人数及男女性别比例均衡。所以问题 1 采用以非平衡指派问题建立优化分配模型。

5.1.1 数据预处理

根据题目中所给数据（附件 1），由给出的每个学院的男女生人数，计算得到每个学院的总人数。由于每个学院的总人数为一个整体，不可分割，因此将每个学院的总人数完整的分配给某一个分组，从而构建每个学院到每个分组的总人数效率矩阵或系数矩阵

$$C_1 = \left(C_{ij}\right)_{m\times n} \tag{5-1}$$

其中，用 $C_{ij} > 0\left(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n\right)$ 表示分配第 i 个学院到第 j 分组的总人数。

又由给出的每个学院的男女生人数，计算得到每个学院的男生与女生人数之比，同时将每个学院的男生与女生人数之比分配给某一个分组，从而构建每个学院到每个分组男女生之比的效率矩阵或系数矩阵

$$C_2 = \left(c_{ij}\right)_{m\times n} \tag{5-2}$$

其中，用 $c_{ij} > 0\left(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n\right)$ 表示分配第 i 个学院到第 j 分组的男女生之比。

5.1.2 建立双目标非平衡指派的优化分配模型

1.决策变量

为了建立模型，引入 0-1 变量，从而定义决策变量：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当分配第i个学院去第j个分组} \\ 0, & \text{当不分配第i个学院去第j个分组} \end{cases} \tag{5-3}$$

2.目标函数

根据题目要求，需要通过设计一个较为优化的分组数量不低于 12 个、各组人员总数和男女性别比较为均衡的优化分配方案。使得每个分组的实际总人数与学校平均到每个分组的人数标准差 Z_1、每个分组的男女生之比与学校总的男女生之比的标准差 Z_2 最小，从而使得分配最为均衡。当学院数大于或等于分组数时 $\left(m \ge n\right)$，建立目标函数：

$$\min Z_1 = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} C_{i1}x_{i1} - \overline{X_1})^2 + (\sum_{i=1}^{m} C_{i2}x_{i2} - \overline{X_1})^2 + \ldots + (\sum_{i=1}^{m} C_{in}x_{in} - \overline{X_1})^2} \tag{5-3}$$

$$\min Z_2 = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1} - \overline{X_2})^2 + (\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2} - \overline{X_2})^2 + \ldots + (\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in} - \overline{X_2})^2} \tag{5-4}$$

其中，$\overline{X_1}$ 表示学校平均到每个分组的人数，$\overline{X_2}$ 表示学校总的男女生之比，n 表示要求的分组数。

3.约束条件

从分配的一次性考虑，每个学院只能分配到一个分组里，考虑到学院的数量大于分组数，所以部分分组中的学院数可能大于 1 个，但分配给各组的学院总和应该为 m，从而建立约束条件：

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, i=1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=m, j=1,2,\cdots n \\ x_{ij}\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{5-5}$$

综上所述建立的非平衡指派优化分配模型为：

$$\min Z_1=\sqrt{(\sum_{i=1}^{m} C_{i1}x_{i1}-\overline{X_1})^2+(\sum_{i=1}^{m} C_{i2}x_{i2}-\overline{X_1})^2+\ldots+(\sum_{i=1}^{m} C_{in}x_{in}-\overline{X_1})^2}$$

$$\min Z_2=\sqrt{(\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}-\overline{X_2})^2+(\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}-\overline{X_2})^2+\ldots+(\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}-\overline{X_2})^2} \tag{5-5}$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, i=1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=m, j=1,2,\cdots n \\ x_{ij}\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

又根据题目要求，还要根据建立的优化分配模型对分组方案的公平指数进行讨论，公平指数应由各个分组的人数、男女比例与平均人数、平均男女比例的标准差等统计量组成。

因此本文定义公平指数为：每个分组的实际总人数与学校平均到每个分组的人数标标准差 Z_1、每个分组的男女生之比与学校总的男女生之比的标准差 Z_2 的加权和。即将 Z_1 和 Z_2 分别设置合适的权重进行加权求和，即可作为该方案的公平指数，进而选出最优化的分配方案。根据定义，公平指数的值越小，说明分配方案越好，公平指数公式定义为：

$$F=0.5*Z_1+0.5*Z_2 \tag{5-6}$$

5.1.3 基于匈牙利算法的模型求解

针对此类多旅行商问题的求解过程是相当复杂的，被认为是 NP 问题。而选择算法也是相对困难的。本文选择用匈牙利算法来求解该指派问题的最优解。

1.匈牙利算法的基本原理

简要地讲，求指派问题的最优解就是要在n阶系数方阵中找到n个这样的元素：它们分布在方阵的不同行、不同列上，并且这些元素之和为最小[1].而要使这些元素之和为最小，就要使其中的每一个元素尽可能的小——最好这些元素都是其所在行和列上的最小元素。

而指派问题的最优解又有这样的性质[2]：如果从分配问题效率矩阵$\left[C_{ij}\right]$的一行（列）各元素中分别减去该行（列）的最小元素，得到新的矩阵$\left[B_{ij}\right]$为效率矩阵求得的最优解和用原效率矩阵$\left[C_{ij}\right]$求得的最优解相同。

由于新矩阵$\left[B_{ij}\right]$中每行、每列的最小元素均为“0”，因此，求原指派问题的最优解就转化为在新矩阵$\left[B_{ij}\right]$中找出 n 个分布在不同行、不同列上的“0”元素（简称为独立 0 元素[8]），这些独立 0 元素就是新矩阵$\left[B_{ij}\right]$的最优解，找到新矩阵的最优解也就找到原矩阵的最优解了。

要在矩阵$\left[B_{ij}\right]$中找到几个分布在不同行、不同列上的“0”元素，前提首先是在矩阵$\left[B_{ij}\right]$中确定存在几个这样的“0”元素.那么，如何判断在矩阵$\left[B_{ij}\right]$中是否存在 n 个这样的独立 0 元素呢？考尼格（Koning）证明了这样一个定理（定理 2）[3]：“覆盖所有’0’元素的最少直线数等于矩阵中独立 0 元素的最多个数.”利用这一定理，就可以通过寻找“能覆盖所有 0 元素的最少直线”来确定矩阵$\left[B_{ij}\right]$中独立 0 元素的具体数量。倘若矩阵$\left[B_{ij}\right]$中独立 0 元素的数量小于矩阵的阶数 n，就得继续对矩阵$\left[B_{ij}\right]$进行化简，直到有了 n 个独立的 0 元素为止，找到这 n 个独立 0 元素也就找到了原指派问题的最优解.这就是匈牙利算法的基本思路。

2.匈牙利算法的解题步骤

第一步，对耗费矩阵 C 进行行（或列）约减，即每一行（或列）数据减去本行（或列）数据中的最小数，得矩阵C_1；

第二步，检查矩阵C_1，若矩阵C_1各行各列均有“0”，则跳过此步，否则进行列（或行）约减，即每一列（或行）数据减去本列（或行）数据中的最小数，得矩阵C_2;

第三步，画盖“0”线.即画最少的线将矩阵C_2中的 0 全部覆盖住，得矩阵C_3；

第四步，数据转换.若“盖 0”线的数目等于矩阵的维数则直接跳到第六步，若“盖 0”线的数目小于矩阵的维数则进行数据转换，进行数据转换的操作步骤如下：（1）找出未被“盖 0”线覆盖的数中的最小值λ

（2）将未被“盖 0”线覆盖住得数减去λ

（3）将“盖 0”线交叉的数加上λ

第五步，重复第三步和第四步，直到“盖 0”线的数目等于矩阵的维数.

第六步，求最优解.对 n 维矩阵，找出不同行，不同列的 n 个“0”，每个“0”的位置代表一对配置关系，具体步骤如下：

（1）先找只含有一个“0”的行（或列），将该行（或列）中的“0”打“⊗”

（2）将带“⊗”的“0”所在列（或行）中的“0”打“×”

（3）重复（1）步和（2）步至结束.若所有行列均含有多个“0”，则从“0”

（4）的数目最少得行或列中任选一个“0”打“⊗”

第七步，打“⊗”即为员工所对应的指派任务。

5.1.4 结果

1.构建效率矩阵

通过附件 1 给出的数据，结合建立的双层非平衡指派模型，由题意及匈牙利算法分别构建每个学院到每个分组的总人数效率矩阵或系数矩阵效率矩阵和每个学院到每个分组男女生之比的效率矩阵。

$$C_1=\begin{pmatrix}
1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636 & 1636\\
1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435 & 1435\\
446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446 & 446\\
2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478 & 2478\\
2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131 & 2131\\
999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999\\
2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395 & 2395\\
983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983 & 983\\
819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819 & 819\\
2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406 & 2406\\
1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740 & 1740\\
929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929 & 929\\
1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388 & 1388\\
2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393 & 2393\\
515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515 & 515\\
1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087 & 1087\\
1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418 & 1418\\
1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167 & 1167\\
943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943 & 943\\
1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215 & 1215
\end{pmatrix} \tag{5-7}$$

$$C_2=\begin{pmatrix} 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 & 7.03 \\ 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 & 3.86 \\ 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 & 4.19 \\ 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 & 2.33 \\ 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 & 2.49 \\ 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 & 1.08 \\ 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 & 0.39 \\ 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 & 27.09 \\ 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 & 2.15 \\ 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 & 3.01 \\ 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 & 0.77 \\ 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 \\ 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 & 2.27 \\ 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 & 4.12 \\ 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 \\ 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 \\ 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 & 3.26 \\ 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 & 3.03 \\ 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 & 3.76 \\ 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 & 1.31 \end{pmatrix} \tag{5-8}$$

2.模型求解

利用 lingo 软件进行非平衡指派问题的动态规划求解，最终可得到将 20 个学院分成 12 个组的最优分配方案。分配结果如表 1 所示。

表 1 问题 1 将各学院分成 12 组的优化分配结果

分组序号	分配学院	总人数	总人数占比	男女比例
第 1 组	A+I	2455	0.08607089	4.3
第 2 组	B+L	2364	0.082880482	1.62
第 3 组	C+E	2577	0.09034814	2.7
第 4 组	D	2478	0.086877257	2.33
第 5 组	F+T	2214	0.077621569	1.2
第 6 组	K+O	2255	0.079059005	0.65
第 7 组	G	2395	0.083967325	0.39
第 8 组	H+M	2371	0.083125898	4.15
第 9 组	P+R	2254	0.079023946	3.03
第 10 组	J	2406	0.084352978	3
第 11 组	Q+S	2361	0.082775304	3.45
第 12 组	N	2393	0.083897206	4.12

又根据问题 1 定义公平指数，可以得到每个分组的实际总人数与学校平均到每个分组的人数标标准差 Z_1=338.746，每个分组的男女生之比与学校总的男女生之比的标准差 Z_2=4.937 在采用双层非平衡指派的分配模型下的公平指数为：

$$F=0.5*Z_1+0.5*Z_2=171.86$$

5.2 问题 2 的模型建立与求解

若要对各个学院进行甲组和乙组分类进行比赛，根据题目给定的数据，可以按照男女性别将每个分为甲组和乙组，也可以考虑按专业将每个学院进行分组，将每个学院的

总人数按照不同专业分为甲乙两组。结合问题 1，为了使得各组人员总数和男女性别比较为均衡的要求，我们选择按专业将每个学院进行分组。

再利用问题1建立的非平衡指派的优化分配模型对按专业分组的每个学院进行分组求解，并讨论该分组方式的公平指数，最终确定最优的甲乙组分配方案。

5.2.1按专业分组模型的建立

1.数据预处理

根据题目中所给数据（附件 1），由给出的每个学院的男女生人数，计算得到每个学院各专业的总人数。将每个学院各专业的总人数视为一个不可分割的整体，因此将每个学院各专业的总人数完整的分配给某一个分组（甲组或乙组），从而构建每个学院各专业到每个分组的总人数效率矩阵或系数矩阵

$$D_1=\left(D_{ij}\right)_{a\times b} \tag{5-9}$$

其中，用 $D_{ij}>0\left(i=1,2,\cdots,a,\ j=1,2,\cdots,b\right)$ 表示分配每个学院第 i 个专业到第 j 组的总人数。

又由给出的每个学院各专业的男女生人数，计算得到每个学院各专业的男生与女生人数之比，同时将每个学院各专业的男生与女生人数之比分配给某一个分组，从而构建每个学院各专业到每个分组男女生之比的效率矩阵或系数矩阵

$$D_1=\left(d_{ij}\right)_{a\times b} \tag{5-10}$$

其中，用 $d_{ij}>0\left(i=1,2,\cdots,a,\ j=1,2,\cdots,b\right)$ 表示分配每个学院第 i 个专业到第 j 组的男女生之比。

2.模型的建立

利用问题 1 建立的非平衡指派的优化分配模型，将 20 个学院分别按照专业分成甲乙两组、每组人员总数和男女性别比较为均衡的优化分配方案。使得每个分组的实际总人数与每个学院平均到每个分组的人数标准差 $z_1(i)$、每个分组的男女生之比与每个学院总的男女生之比的标准差 $z_2(i)$ 最小，从而使得分配最为均衡。

最后，将每个学院每个分组的实际总人数与每个学院平均到每个分组的人数标准差 $z_1(i)$、每个分组的男女生之比与每个学院总的男女生之比的标准差 $z_2(i)$ 进行累加，再利用问题 1 定义的公平指数进行讨论和分析，最后得到各学院按照专业分成甲乙两组的分配公平指数。

$$F=0.5*\sum_{i=1}^{20}z_1(i)+0.5*\sum_{i=1}^{20}z_2(i) \tag{5-11}$$

5.2.2 模型的求解

通过附件 1 给出的数据，结合问题 1 建立的双层非平衡指派模型，由题意及匈牙利算法分别构建每个学院的各专业到甲乙组的总人数效率矩阵或系数矩阵效率矩阵 D_i。

$$D_1=\begin{bmatrix}142&142\\156&156\\48&48\\192&192\\146&146\\226&226\\147&147\\292&292\\287&287\end{bmatrix} D_5=\begin{bmatrix}350&350\\403&403\\137&137\\413&413\\724&724\\74&74\\30&30\end{bmatrix} D_9=\begin{bmatrix}338&338\\386&386\\95&95\end{bmatrix} D_{13}=\begin{bmatrix}348&348\\387&387\\30&30\\306&306\\317&317\end{bmatrix} D_{17}=\begin{bmatrix}260&260\\454&454\\453&453\\149&149\\102&102\end{bmatrix}$$

$$D_2=\begin{bmatrix}839&839\\596&596\end{bmatrix} D_6=\begin{bmatrix}140&140\\130&130\\189&189\\201&201\\339&339\end{bmatrix} D_{10}=\begin{bmatrix}368&368\\216&216\\189&189\\177&177\\1122&1122\\334&334\end{bmatrix} D_{14}=\begin{bmatrix}358&358\\286&286\\243&243\\315&315\\255&255\\505&505\\431&431\end{bmatrix} D_{18}=\begin{bmatrix}261&261\\455&455\\451&451\end{bmatrix}$$

$$D_3=\begin{bmatrix}142&142\\44&44\\120&120\\86&86\\54&54\end{bmatrix} D_7=\begin{bmatrix}250&250\\305&305\\207&207\\222&222\\189&189\\225&225\\209&209\\98&98\\223&223\\271&271\\196&196\end{bmatrix} D_{11}=\begin{bmatrix}320&320\\316&316\\296&296\\375&375\\433&433\end{bmatrix} D_{15}=\begin{bmatrix}166&166\\349&349\end{bmatrix} D_{19}=\begin{bmatrix}207&207\\269&269\\245&245\\159&159\end{bmatrix}$$

$$D_4=\begin{bmatrix}297&297\\491&491\\487&487\\185&185\\138&138\\348&348\\365&365\\167&157\end{bmatrix} D_8=\begin{bmatrix}343&343\\246&246\\109&109\\198&198\\87&87\end{bmatrix} D_{12}=\begin{bmatrix}416&416\\513&513\end{bmatrix} D_{16}=\begin{bmatrix}306&306\\305&305\\281&281\\195&195\end{bmatrix} D_{20}=\begin{bmatrix}191&191\\238&238\\40&40\\267&267\\171&171\\308&308\end{bmatrix}$$

5.2.3 结果

利用 lingo 软件对每个学院各专业进行非平衡指派问题的动态规划求解，最终可得到将 20 个学院每个学院按专业分两组的最优分配方案。分配结果如表 2 所示。

表 2 问题 2 将各学院分成甲乙组的优化分配结果

学院	分组类别	专业序号	总人数	总人数占比	男女比例
A	甲组	3+4+8+9	819	0.02871367	5.991452991
	乙组	1+2+5+6+7	817	0.028643551	8.453488372
B	甲组	2	596	0.020895418	3.226950355
	乙组	1	839	0.029414858	4.448051948
C	甲组	2+3+5	218	0.007642955	3.638297872
	乙组	1+4	228	0.007993549	4.846153846
D	甲组	2+4+7+8	1208	0.042351786	2.388732394
	乙组	1+3+5+6	1270	0.044525471	2.276485788
E	甲组	2+3+4+6+7	1057	0.037057813	2.253869969
	乙组	1+5	1074	0.037653823	2.751748252

F	甲组	2+3+4	520	0.018230901	1.071713147
	乙组	1+5	479	0.016793465	1.082608696
G	甲组	1+3+5+8+10+11	1211	0.042456965	0.375715922
	乙组	2+3+6+7+9	1184	0.04151036	0.395734597
H	甲组	2+4+5	531	0.018616555	21.125
	乙组	1+3	452	0.01584686	40.09090909
I	甲组	1+3	433	0.015180731	1.485507246
	乙组	2	386	0.013532938	2.163934426
J	甲组	5	1122	0.039336676	2.871527778
	乙组	1+2+3+4+6	1284	0.045016303	3.132258065
K	甲组	4+5	808	0.028328016	0.815315315
	乙组	1+2+3	932	0.032675385	0.724907063
L	甲组	1	416	0.014584721	0.510948905
	乙组	2	513	0.017985485	0.540785498
M	甲组	1+3+5	665	0.023314518	2.23255814
	乙组	2+4	723	0.025347965	2.3
N	甲组	5+6+7	1191	0.041755776	4.925373134
	乙组	1+2+3+4	1202	0.04214143	3.515037594
O	甲组	2	349	0.01223574	0.347490347
	乙组	1	166	0.005819865	0.371900826
P	甲组	2+3	586	0.020544823	2.959459459
	乙组	1+4	501	0.017564772	3.106557377
Q	甲组	2+4+5	705	0.024716895	3.768707483
	乙组	1+3	713	0.024997371	2.858695652
R	甲组	1+3	712	0.024962311	2.858695652
	乙组	2	455	0.015952039	3.346153846
S	甲组	2+3	514	0.018020545	3.589285714
	乙组	1+4	429	0.015040494	3.988372093
T	甲组	1+2+5	600	0.021035655	1.310077519
	乙组	3+4+6	615	0.021561547	1.312030075

又根据问题 1 定义公平指数，可以得到每个分组的实际总人数与每个学院平均到每个分组的人数标准差 $z_1(i)$=0.707、每个分组的男女生之比与每个学院总的男女生之比的标准差 $z_2(i)$=0.027，在采用双层非平衡指派的分配模型下的公平指数为：

$$F = 0.5*\sum_{i=1}^{20} z_1(i) + 0.5*\sum_{i=1}^{20} z_2(i)=367.09 \qquad (5\text{-}12)$$

5.3 问题 3 的模型建立与求解

第一问要求为了使各学院比赛实力更为均衡，考虑以各学院总人数近似相等为均衡条件，将 20 名特长生分配到不同的学院。因特长生与普通学生在体育竞技上的显著差异，通过查阅相关体育类文献和资料，采取将每名特长生与普通学生按 1:5 的比例进行分配。特长生分配方案类似与动态规划中的资源分配问题，因此采用动态规划中的资料分配问题来解决该问题。

5.3.1 建立基于资源分配的特长生分配模型

资源分配是一种或几种资源（包括资金）分配给若干用户，或投资于几家企业，以获得最大的效益的问题。资源分配问题可以是多阶段决策过程，也可以是静态规划问题，都能构造动态规划模型求解。以附件 1 中给出的各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差最小作为目标函数，求解出特长生最优分配方案，然后再利用问题 1 定义的公平指数定义讨论其公平指数。

1.模型构建

基于动态规划的资源分配问题的应用范围非常广泛。本文主要研究该学校特长生的分配问题，该学校有 20 个特长生用来分配到 20 个学院，从而使得各学院比赛实力更为均衡。将每名特长生与普通学生按 1:5 的比例进行分配，如果将第 i 个特长生分配到各学院，则可以得到的收益为 20。根据这个原理，动态规划解决多级决策问题是从最后一级开始倒向计算的。现在分配这些特长生到各个学院上使得所有学院的比赛实力更为均衡。即要使各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差最小。其中满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le x_j,\ j = 1,2,\dots,m$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$$

上面的问题可以用动态规划求解。设特长生的总数为 K，分配给第 i 个学院的数量为 K_i，则性能指标为

$$\min Z_3 = \sqrt{(C_1 + K_1 - \overline{X_1})^2 + (C_2 + K_2 - \overline{X_1})^2 + \dots + (C_n + K_n - \overline{X_1})^2}$$

取最大，约束条件是

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x, x_i \ge 0$$

为了用动态规划求解，引进一个函数 $f_i(K_i)$，它表示将特长生分配给第 1 至第 i 个学院时所能得到的最佳收益。显然 $f_n(K_i)$ 表示将总的特长生分配到所有学院上所得的收益最优。

容易看出，函数有下列性质 ：

$(1) f_k(0) = 0,$即没有资源投入时收益为零；

$(2) f_0(x_T) = 0,$即不生产产品是收益为零；

$(3) f_1(x_T) = g_1(x_T)$

这表明将特长生只分配给一个学院时的总收益，就是这种特长生本身的收益。这些性质构成了以后解题的边界条件。

现在来推导 $f_i(K_i)$ 所应满足的关系式。已知分配前 i 个特长生的数量为 K_i，如果分配第 i 个特长生的数量为 K_i，则分配前 i-1 个特长生的数量为 $K_n - K_i$。这表明若在第 1 至 i 种产品上的最优分配为 $K_1, K_2, \dots, K_i$，则 $K_1, K_2, \dots, K_{i-1}$ 一定是特长生数量 $K_n - K_i$ 在前

i-1 种产品上的最优分配。

2.目标函数

根据题目要求，需要通过设计一个较为优化的各以各学院人员总数近似相等为均衡条件的分配方案。使得各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差最小，从而使得分配更为均衡。以各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差最小作为目标，建立目标函数：

$$\min Z_3 = \sqrt{(C_1 + K_1 - \overline{X_1})^2 + (C_2 + K_2 - \overline{X_1})^2 + \ldots + (C_n + K_n - \overline{X_1})^2} \tag{5-3}$$

又根据题目要求，还要根据建立的特长生分配模型对特长生方案的公平指数进行讨论，公平指数应由各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差等统计量组成。

因此，将各学院人数加上按比例分配后的特长生人数与学校平均到每个学院的人数的标准差Z_3进行累加，再利用问题 1 定义的公平指数进行讨论和分析，最后得到各学院分配特长生后的分配公平指数。

$$F = \sum_{i=1}^{n} Z_3$$

5.3.2 建立基于公平席位分配的加权积分模型

根据题目条件，在特长生不参加比赛，提出一个对各学院相对公平的加权积分方案。我们采用基于公平席位分配的方式，建立一个各学院的加权积分模型。在公平席位分配问题中，通常分配结果的公平与否以每个代表席位所代表的人数相等或接近来衡量。目前沿用的惯例分配方法为按比例分配方法，即：

学生代表席位分配数=学生总人数比例×总席位

如果按照上述公式参与分配的一些学生代表的席位分配数出现小数，则先按席位分配数的整数分配席位，余下席位按所有参与分配学生中小数部分最大的优先分配。

我们要解决的是这样的一个问题：学校共有 m 个学院，第 i 个学院学生数为 n_i(i=1, 2, …, m)，运动会共设 N 个奖项. 怎样才能让各个学院获得这些奖项的机会是公平地？

显然，m，n_i(i=1, 2, …, m)应为正整数，全校学生数记为$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. 假设每个学院至少应获得一个奖项（否则把其剔除），至多分得 n_i(i=1, 2, …, m)个奖项，n>N≥m。就全校而言，每个奖项代表的学生数记为 a=n/N，第 i 个学院按学生数比例应获得奖项的机会为$\alpha_i = \frac{n_i}{n} N = \frac{n_i}{a}$，最后实际获得的奖项数为 N_i($1 \le N_i \le n_i$, 整数)，每个奖项代表的学生数为$a_i = \frac{n_i}{N_i}$ (i=1, 2, …, m)。考虑到要让各学院获得这些奖项的机会是公平的，所以分

别给每个学院引入一个获奖概率权重W_i，然后利用建立的公平席位分配模型，通过调节每个学院的获奖概率权重W_i，从而使得各学院获奖的机会是均等的。

1.“公平”的标准

可认为，α_i越大的学院越吃亏，故应尽量照顾之。或认为各α_i应尽量接近。故可提出如下各种标准：

标准 1 要求 $z=\max_i a_i$ 最小（对不同方案而言）

标准 2 要求$z=\sum_{i=1}^{m}|a-a_i|$最小

标准 3 要求 $z=\min_i a_i$ 最大

标准 4 要求$z=\sum_{i=1}^{m}(a-a_i)^2$ 最小

2.模型准备

（1）人数比例模型

公平标准 $\frac{P}{N}=\frac{P_i}{N_i}$ ， $i=1,2,3\cdots$通过计算总获奖数与总人数、各学院获奖数与各学院总人数的比例相等，来确定各学院的获奖概率权重W_i的分配方案。

（2）最大剩余法模型

记$R_i=\frac{P_i}{N_i}, i=1,2,3\cdots$的余数， R_i越大说明i学院分一个奖项代表人数就越多，为了公平降低R_i，则剩余奖项优先分给R_i最大的i系。

3.不公平指标

为简单起见考虑A，B两学院获奖的情况。设两方人数分别为P_1，P_2，获奖机会均等的获奖数分别为n_1，n_2，则比值$\frac{p_1}{n_1}$，$\frac{p_2}{n_2}$为两方每个奖项所代表的人数。显然仅当$\frac{p_1}{n_1}=\frac{p_2}{n_2}$分配时才算完全公平的，但是因为人数和奖项都是整数，所以通常$\frac{p_1}{n_1}\neq\frac{p_2}{n_2}$，分配不公平，并且对比值较大的一方不公平。

不妨设$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，不公平程度可用$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}$衡量。如设$p_1=120$，$p_2=100$，$n_1=n_2=10$，则$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}=12-10=2$，它衡量不公平的绝对程度，常常无法区分不公平程度明显不同的情况。如当双方人数增至$p_1=1020$ $p_2=1000$，n_1、n_2不变时，则$\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}=102-100=2$。即不公平的绝对程度不变，但是常识告诉我们，后面这种情况的不公平程度比起前面来已经大为改善了。为了改进上述的绝对标准，自然想到用相对标准。仍设$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，定义

$$r_A(n_1,n_2)=\frac{\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}}$$

(1)即为 A 方的相对不公平度。若 $\frac{p_2}{n_2}>\frac{p_1}{n_1}$，定义

$$r_B(n_1,n_2)=\frac{\frac{p_2}{n_2}-\frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}}$$

(2)即为对 B 方的相对不公平度。

4.模型的建立

假设席位分配中要考虑 t 个因素，记之为 $r_1, r_2\cdots, r_i$, 又假设这些因素的权系数分别为 $w_1, w_2, ..., w_i$，它们用来刻画不同因素在分配中的重要性, 因此, 有如下关系式成立

$$\sum_{j=1}^{t} w_j = 1$$

设 a_{ij} (i = 1, 2, …, s, j =1, 2…, t)表示第 i 个团体关于因素 r_j;的水平, 称之为因素水平, 且 $A=(a_{ij})_{s\times t}$ 叫做因素水平矩阵. 特别地, 如果仅考总每个团体的人口因素, 即 t=1, 上述因素水平矩阵可定义为

$$a_{i1}\equiv\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{s} p_i}, \forall_i = 1,2,...,s$$

从 A 的定义可知, 对所有的 j=1, 2, …, t, 有等式

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij} = 1$$

成立. 根据前面式子可知

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} a_{ij}w_{ij} = 1$$

对给定的席位总数 h, 第 i 个团体应该得到的“严格的”或“完备的”席位数是

$$m_i \equiv \sum_{i=1}^{t} a_{ij}w_j h, \forall i = 1,2,...,s$$

且由上式不难推出

$$\sum_{i=1}^{s} m_i = h$$

如果对所有的 i = 1, 2, …, s ，m_i;恰好都是整数, 则由式(4)可得到一个“严格的”或“完备的”的席位分配方案, 且该分配方案“绝对”公平. 然而, 实际中上述这种理想

情形很少出现, 以致要确定一种公平的分配方案, 即选取一组近似m_i, 的非负整数序列变得十分困难.

设$a_i(i=1,2,...,s,m_i)$表示第主个团体拥有的席位数，则根据最小二乘的思想可知相对公平的席位分配方案可以被认为成序列$a_i(i=1,2,...,s)$是下列最优化问题的解

$$\min imize\sum_{i=1}^{s}(a_i-m_i)^2$$

$$s.t\begin{cases} a_i \in I, \\ 1 \le a_i \le h, \\ \sum_{i=1}^{s} a_i = h. \end{cases}$$

其中, I 表示整数集。

六、模型的评价及优化

6.1 模型的优点

1、模型的建立基于实际情况，具有一定的实用价值。

2、模型对问题研究合理、科学，理论性强。

3、模型适用范围广，易于推广。例如：在学校生活中对于“如何优化校园知识竞赛模式”等此类问题同样适用。

4、模型具有简洁性，非平衡指派、资源分配问题的基本原理和基本步骤易于理解，计算也相对简便，容易为决策者了解和掌握。

5. 模型使人们可以根据过去和现在的信息进行预测, 可用于教育训练, 训练人们看到他们决策的结果, 而不必作出实际的决策。

6. 模型便于利用计算机处理一个模型的主要变量和因素, 并易于了解一个变量对其他变量的影响。

6.2 模型的缺点

1、模型中对定义的学院人数、性别这两个不定项因素不够全面。

2、模型存在着主观性过强的问题，不能保证与实际情况分毫不差，存在不确定性。

3、模型对于一些人为因素只是进行了简单的定性的分析或是一些泛泛的改进想法而并未深入定量分析，显得不够具体准确，有一定的局限性。

4、非平衡指派法的比较与判断存在着人为主观因素的影响很大，使得决策可能难以被众人接受，具有一定的偏差。

6.3 模型的推广

本模型是基于矩阵的所有数据信息建立的,并且不断的分析、检验和完善改进使得模型具有了较高的准确性,同时也确保了模型结沟的严谨性。

本次对运动会组队问题的解决我们运用了两种模型进行解答，但其中的模型都可以推广到现实生活中去，这就很好的体现了数学建模的意义所在，我们可以通过对一个问题的解答，而将其推广到更多的现实事件中。而数据处理及模型求解时充分运用 matlab 等数学软件，较好的解决了问题，得到了较为合理的结果。

参考文献

[1] 杨文鹏，贺兴时，等．新编运筹学教程[M]．西安：陕西科学技术出版社，2005．
[2] 胡运权，运筹学基础及应用（第五版）［M］．北京：高等教育出版社，2010．
[3] 束金龙，闻人凯．线性规划理论与模型应用［M］．北京：科学出版社，2003．
[4] 袁迁，刘舒燕．关于匈牙利算法的优化[J]．武汉理工大学学报，2007，29(3)：146-149．
[5] 林同曾主编．运筹学 [M]．北京：机械工业出版社，1986．
[6] 杨国武．席位的公平分配数学模型 [J]．武汉交通科技大学学报，1996,23(3)．
[7] 万中，罗汉．席位分配问题的数学模型 [J]．湖南大学学报，2001,28(6)．