

2020 年第五届“数维杯”大学生 数学建模竞赛论文

题 目 基于多元线性回归与非线性规划的农畜产规划

摘 要

本文主要研究了全球化疫情蔓延和国民生活水平稳步提高大形势下农户的种植养殖问题。我们综合考虑了人力成本、土地投入、资源循环利用的多种因素，结合搜集到的数据，给出了农户收入与成本的关系函数以及适用于不同模式下的最优种植养殖计划。主要使用的工具有：Matlab, Excel, 及 SPSS。

对于问题 1，在对所需分析的数据作指数平滑预处理以后，我们采用了灰色关联分析法，进一步探究农产品产量与价格之间关联度；接下来，考虑到人力成本是农业发展成本的主导因素，我们将造成人力成本的主要原因（人工成本和家庭用工折价）作为变量因子，建立多元线性回归模型，得到了不同农产品收入与成本的关系函数。结论是：人工成本对净利润的影响程度也超过了 1，远大于家庭用工折价。由方程系数，我们还可得知一般情况下，薯类作物的净利润最小，水果类作物如苹果的净利润相对较大的结论。

对于问题 2，通过查阅相关文献提出了“东莴笋——春莴笋——春玉米”的循环高效种植模式，以实现资源的循环利用；并基于经济学的投入产出分析范式，建立了非线性规划模型，以求得利润最大化的最优解。最终得出，在土地资源充足的前提下，全年该种植模式产值最大为：17842 元/亩。

对于问题 3，通过查阅相关文献提出了“春马铃薯/春玉米 - 秋玉米 - 冬青菜”的高效节水种植方式；并基于问题 2，建立了存在水资源、土地资源限制的复合非线性规划模型。最终得出：在限制农户灌溉用水量最大值为全国平均水平的 1.25 倍，拥有的土地面积上限为 1.35 亩的条件下，农户每年能得到的最大收益为 10347.5 元。

对于问题 4，我们创新性的提出了“稻—鱼—牧”的高资源的循环利用共养方式；并在问题 2 的基础上，建立了农牧渔复合非线性规划模型，利用 SUTM 外点罚函数进行模型求解，最终得出：在此种模式下，若水稻与放牧所占的面积为 9:1，可实现资源的循环利用和收益的最大化，此时每年每亩地净折合收益约为 18217 元。

对于问题 5，我们将 n 个家庭收入的目标函数表示为一个家庭收入目标函数的总和，在问题 4 的基础上建立了引入劳动力和家庭数量限制的农牧渔复合非线性规划模型，同样利用 SUTM 外点罚函数来求解，最终得出：在大规模种植与养殖模式下，以“稻—牧—鱼”为代表的共养模式所带来的收益更大。

关键词 指数平滑预测；灰色关联分析法；多元线性回归模型；非线性规划模型

目 录

一、问题重述.....	2
1.1 问题背景.....	2
1.2 问题提出.....	2
二、问题分析.....	2
2.1 问题 1 的分析.....	3
2.2 问题 2 的分析.....	3
2.3 问题 3 的分析.....	3
2.4 问题 4 的分析.....	3
2.5 问题 5 的分析.....	4
三、模型假设.....	4
四、定义与符号说明.....	4
五、模型的建立与求解.....	5
5.1 准备工作.....	5
5.1.1 问题背景的分析.....	5
5.1.2 数据的初步处理.....	5
5.2 基于问题 1 的求解与结果分析.....	8
5.2.1 灰色关联分析法——产量及价格的关系.....	8
5.2.2 多元线性回归模型——收入及成本的关系.....	9
5.3 基于问题 2 的求解.....	10
5.3.1 问题 2 模型的建立.....	10
5.3.2 结果分析.....	12
5.4 基于问题 3 的求解.....	12
5.4.1 问题 3 模型的建立与求解.....	12
5.4.2 结果分析.....	13
5.5 基于问题 4 的求解.....	13
5.5.1 问题 4 模型的建立与求解.....	13
5.5.2 结果分析.....	14
5.6 基于问题 5 的求解.....	15
5.6.1 问题 5 模型的建立与求解.....	15
5.6.2 结果分析.....	16
六、模型的评价及优化.....	16
6.1 误差分析.....	17
6.2 模型的优点.....	17
6.3 模型的缺点.....	18
6.4 模型的推广.....	18
参考文献.....	19
附 录.....	20

一、问题重述

1.1 问题背景

在全球化疫情蔓延和国民生活水平稳步提高大形势下，居民对于绿色农畜产品的需求可能会迎来新的爆发期。传统的大规模种植或养殖计划在面临疫情的冲击下逐步丧失了竞争优势。这也给了以家庭为单位和小规模个性化种植与养殖计划的机会，因为国家所提倡的乡村振兴策略以及各地发展不充分不协调的问题迫切需要解决。这种模式可以有效地在我国这一人口基数庞大以及城镇化比例高的国家进行推广。而大规模的种植与养殖模式和较小规模的精细化和绿色化的生产模式将会成为未来农村牧区经营模式的两个极端。

1.2 问题提出

1. 通过网络平台搜集适合不同地区种植的农产品（包括粮食、蔬菜、水果）的产量和价格的时间序列数据，通过建立数学模型分析讨论不同农产品预期的人力成本及收入。

2. 为有充足的土地资源的农户提供一个合理的大规模种植计划，要求兼顾保障农民的稳定收入和实现土地资源的循环利用。

3. 为缺乏土地资源的农户提供一个合理的小规模种植计划，要求既能保证农民的基本收入又能尽量的减少水资源的过度使用。

4. 提供一个农业、牧业和渔业三者相结合的合理的种植与养殖计划。

5. 为减少人力成本的消耗，提供一个供几个家庭合作的最优养殖计划。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 主要有两个部分，一是对产量、价格相关时间序列数据的搜集整理；二是对不同农产品预期人力成本及收入作进一步讨论以获取利润相对较大的种植方式。因此，我们首先要利用现有的网络平台（中国农业网、CSMAR 数据库等）获取相关的数据。

其中，对于获取的产量和价格的时间序列数据，我们可以对其作指数平滑的数据预处理以对变化趋势进行补充，产量和价格二者之间并不是毫无关联的，我们决定采用灰色关联分析法，进一步探究二者之间关联度；明确不同农产品收入与成本关系对农户的种植方向具有指导作用，由于人力成本是农业发展成本的主导因素，我们考虑到可以将造成人力成本的主要原因(人工成本和家庭用工折价)作为变量因子，建立多元线性回归模型以得到不同农产品收入与成本的线性回归方程式，且可以通过对变量系数的比较分别得出人工成本和家庭用工折价对总成本的影响度。

2.2 问题 2 的分析

问题 2，需要为土地资源充足的农民们提供兼顾稳定收入和土地资源的循环利用的大规模农产品种植计划。对此，我们可以首先考虑不同土地利用方式的优缺点：如分块种植不轮耕、轮耕不分块种植等。

对于土地资源的循环利用，鉴于同一时间内有且仅有一种农产品收益最大，我们选择轮耕不分块种植的土地利用方式实现农民收益的最大化，此时可以查阅相关文献，寻找较为合适的轮耕不分块土地循环利用模式；对于利润最大化问题，考虑到净利润=收入-成本,其中，收入可以表示为市场价格 p *产量 Y ,成本又来源于土地投入、劳动力、技术水平等多项因素，因此我们可以建立一个非线性规划模型，以求得利润最大化的最优解。

2.3 问题 3 的分析

问题 3 需要我们兼顾小规模农户的收入及水资源保护问题。为了在水资源受限条件下取得最大收益，我们需要选取对水资源需求不大的农作物进行轮种，此时可以查阅相关文献，寻找较为合适的轮耕方式。因此，在问题 2 模型的基础上，我们可以建立引入了水资源、土地资源限制的非线性规划模型，代入查询到的相关数据，便可求得利润最大化的最优解。

2.4 问题 4 的分析

问题 4，实则在问题 2 的基础上，即在土地投入不变的前提下，增加了畜牧业和渔业，所花成本也会随着劳动力及资本投入的增加而增加，根据生态循环的特点，牧业、渔业和农业三者可以相互促进，提高资源的循环利用率。此时同样可以查阅相关文献，寻找较为合适的“农牧渔”共养方式。综合考虑上述因素，在问题 2 模型的基础上，可以建立农牧渔复合非线性规划模型，我们可以利用 SUTM 外点罚函数来，通过代入查询

到的相关数据，便可求得利润最大化的最优解。

2.5 问题 5 的分析

问题 5，多个家庭共同合作，农业生产规模扩大，可以更加提高农业劳动生产率、集中有限的土地资源，是实现现代新型农业规模化、企业化发展模式。此时，我们需要兼顾一个家庭经营多种农畜产品，人力成本会存在消耗过多的问题和几个家庭合作的利润问题。

基于问题 4 所提出的“农牧渔”共养模式更适合多个家庭合作的大规模生产，事实上， n 个家庭收入的目标函数为一个家庭收入目标函数的总和；此外，我们还需考虑到劳动力的约束限制。在问题 4 模型的基础上，可以建立引入了劳动力和家庭数量限制的农牧渔复合非线性规划模型，同样可以利用 SUTM 外点罚函数来，代入查询到的相关数据，求得利润最大化的最优解。

三、模型假设

1. 假设所收集的数据均真实可靠；
2. 假设农产品的种植技术条件在一定时期内是相对恒定的；
3. 假设在种植、养殖过程中，不存在导致农产品数量减少的外在因素，且农户的产出的农产品皆可卖完；
4. 假设牧业和渔业可视为具有不同周期的农产品
5. 假设缺乏土地资源的农户拥有的土地面积最大为为 2018 年全国农村人均土地面积，为了了节水，农民灌溉用水量最大值为全国平均水平的 1.25 倍；
6. 假设一个标准的三口之家能提供 1.5 个单位的劳动力；

四、定义与符号说明

表 4-1 定义与符号说明

符号	含义
z	农产品收入
x_1	每亩人工成本
x_2	每亩家庭用工折价
e	随机误差
Y	农作物产量 (Yield)
G	土地(Ground)
K	资本(经济学中资本简称 K)
T	技术(Technology)
W	劳动力(Work)
r	资本花费

s	劳动力花费
t	土地花费
C	成本($Cost$)
p	农产品的市场收购价格
h	每亩用水量为 A , 水费为 h
T'	罚函数
η	罚因子
L	一个家庭提供的劳动力数

五、模型的建立与求解

5.1 准备工作

5.1.1 问题背景的分析

近期, 新冠疫情席卷全球, 严重影响着国民的正常出行和生活, 制约着社会经济的快速发展。此时, 传统大规模种植、养殖模式存在着的安全风险、产品质量非保障性、难以解决大规模居民就业问题等方面的缺陷显得尤为明显。通过对各类新闻网站的检索, 对疫情以来的新闻进行统计, 得到词云, 如图 5-1 所示:



图 5-1 新闻中的词频统计

由词云可知, 国家所提倡的乡村振兴策略、针对疫情的 2020 最新脱贫攻坚计划、解决各地区不平衡不充分发展问题的迫切需求等均预示着以家庭为单位或小规模的个性化种植与养殖计划有望成为国家新一轮的经济增长点, 居民对于绿色农畜产品的需求可能会迎来新的爆发期^[1]。

5.1.2 数据的初步处理

Step1 数据查找: 为了获取相关的数据, 我们首先通过各种网络平台 (如: 中国农业网、农产品信息网等) 以及相关数据库 (如 WIND、CSMAR 等), 搜集并整理了适合

不同地区种植的农产品（包括粮食、蔬菜及水果等）的产量、价格、人力成本等相关时间序列数据。通过 MATLAB 软件的数据聚类分析，我们发现，黑龙江盛产大米、重庆的薯类作物产量位居前列、陕西苹果作为地理特产畅销全国。因此我们选取此三类农产品，分别作为粮食、蔬菜、水果的代表作物，进行进一步分析。为了有更加直观的感受，我们首先对选取的数据进行可视化。

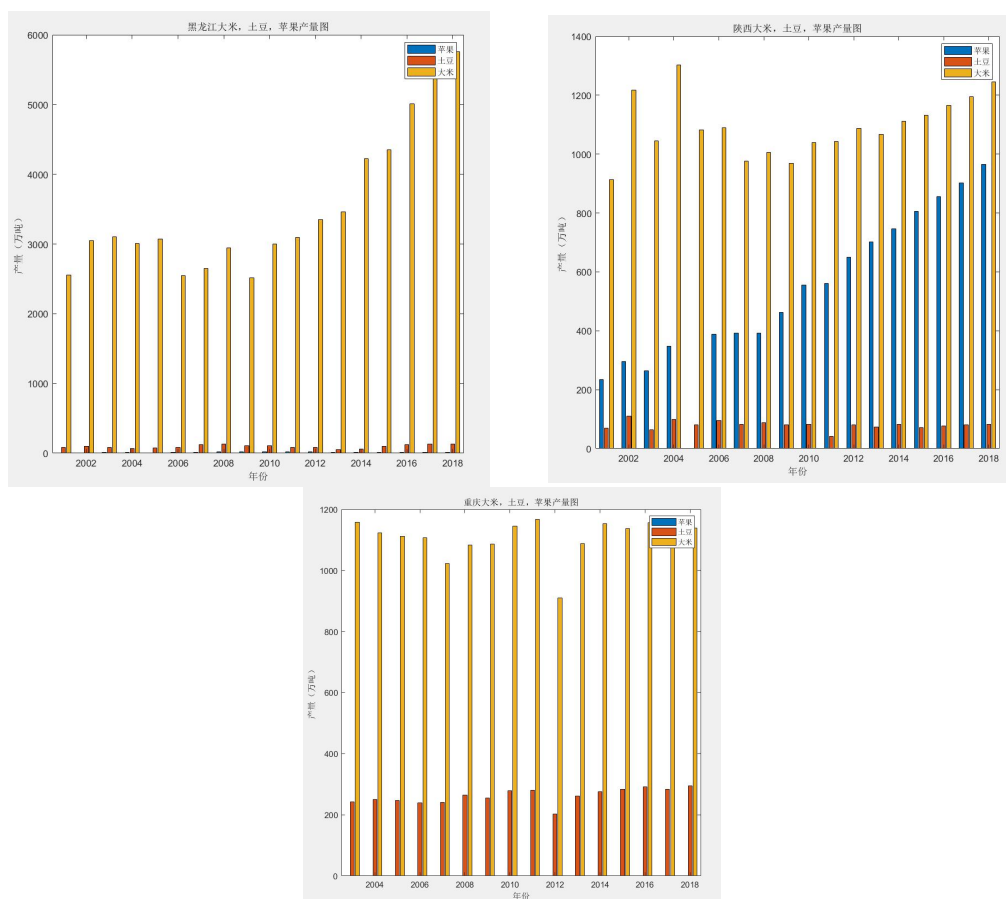


图 5-2 黑龙江、重庆、陕西三地的农产品产量分布

Step2 数据预处理:

(1)产量的指数平滑预测。指数平滑法是生产预测中常用的一种方法，也适用于中短期经济发展趋势预测，在所有预测方法中，指数平滑是用得最多的一种。由于只获取了截止到 2018 年的产量数据，为了进一步加强近期值对预测值的作用，我们利用 MATLAB 软件，通过三次指数平滑预测法，分别对黑龙江大米、重庆土豆、陕西苹果的 2018-2020 的产量作出拟合预测，进行变化趋势进行补充。对于时间序列， (y_1, y_2, \dots, y_n) , S_t^i 为第 i 次指数平滑参数，设 α 为第 i 期观测值对未来趋势的影响，则可以对各期观测值依照时间顺序加权作为预测值，则三次平滑递推可表示为：

$$\begin{cases} S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(1)} \\ S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(2)} \\ S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(3)} \end{cases}$$

则第 $t+m$ 期预测模型可表示为：

$$y_{t+m} = a_t + b_t m + c_t m^2,$$

其中：

$$\begin{cases} a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \\ b_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \left[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)} \right] \\ c_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \left[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \right] \end{cases}$$

其中，黑龙江的拟合预测图展示如下：

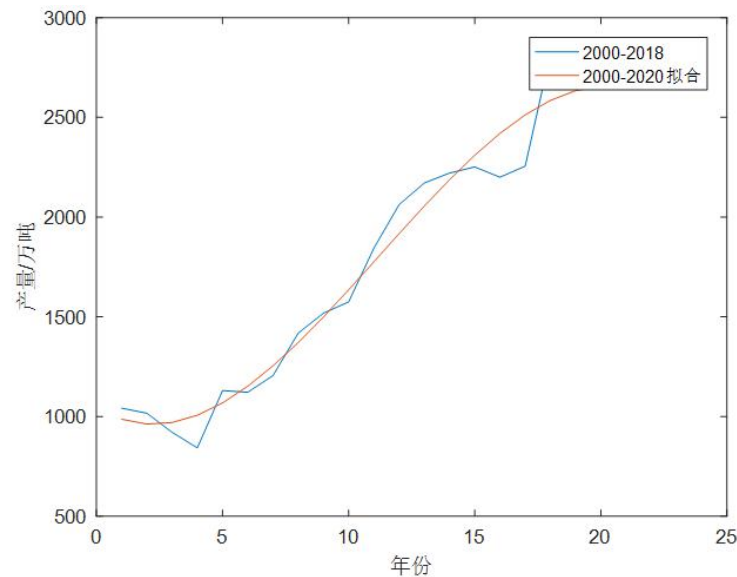


图 5-3 黑龙江省粮食产量及预测

通过对数据的可视化和预处理的初步分析，可以发现，受地域条件影响，适合不同地方种植的农产品不同。每个地区特有的农产品产量相对较高且保持较高水平，整体上呈上升趋势。这也说明了居民对绿色农畜产品的需求在不断增加的趋势。

(2)价格的平均处理。我们所获取不同农产品的价格数据具体到每一年的不同月份，为了和所搜集到的年产量相对应，我们将每一年不同月份的价格数据进行平均处理，以获得年平均价格。同样以黑龙江的大米价格为例。

表 5-1 黑龙江大米 2014 年的价格

统计日期	2014-01-17	2014-05-30	2014-09-05	2014-09-12	2014-09-19	2014-10-10
价格	6.46	6.47	6.47	6.48	6.48	6.48

则黑龙江 2014 年大米的年平均价格为：
 $(6.46 + 6.47 + 6.47 + 6.48 + 6.48 + 6.48) \div 6 \approx 6.47$ (元/千克)

5.2 基于问题 1 的求解与结果分析

5.2.1 灰色关联分析法——产量及价格的关系

Step1 灰色关联分析法的选取与求解：通过 5.1 的数据查找，我们得到了分别代表粮食、蔬菜、水果的黑龙江大米、重庆土豆、陕西苹果三种农产品产量和价格的相关数据，同时发现，每种农产品的产量和价格并不是稳定不变且毫无关联的。

灰色系统理论提出了对各子系统进行灰色关联度分析的概念，意图透过一定的方法，去寻求系统中各因素之间的数值关系^[2]。因此，对于农产品产量和价格的关系态势，借助灰色关联法分析可以找到一个度量值。为了进一步探究二者之间的联系，我们选择直接利用 SPSS 软件，采用灰色关联分析法，对三地三种农产品的产量和价格的相关性进行分析。

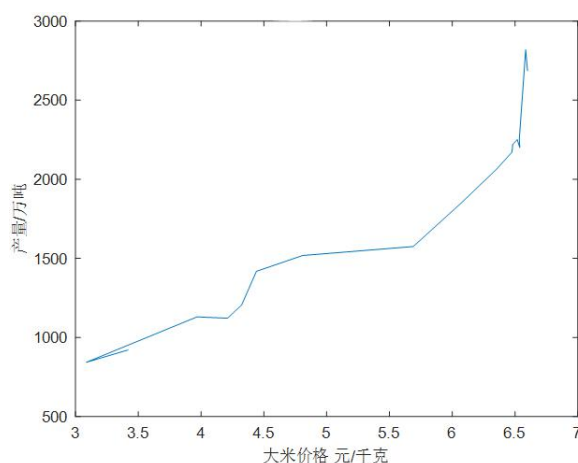


图 5-4 黑龙江大米的产量与价格

利用 SPSS 软件和同样的分析方法，我们分别对重庆土豆、陕西苹果的产量和价格进行了分析。

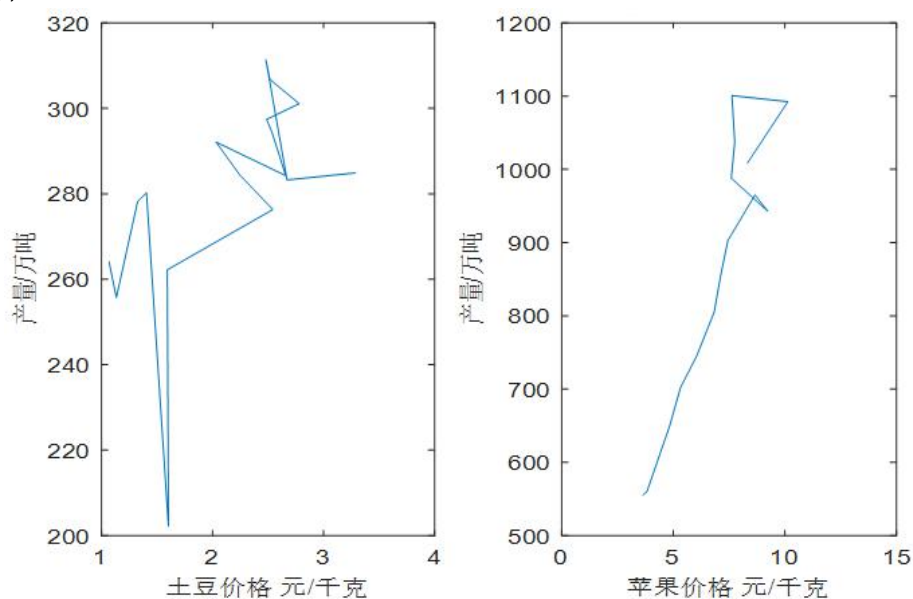


图 5-5 土豆、苹果的产量与价格

通过输出结果，我们可以看到大米、土豆、苹果三者产量与价格的灰色关联度分别为：大米 0.821；土豆：0.583；苹果：0.842。此关联度的值越接近 1，说明产量和价格两项因素之间的相关性越好。

Step2 结果分析:综合关联度值和图形的直观展示，我们不难得出，三种农产品的产量与价格在整体上呈正相关。我们认为，该现象的主要原因有以下三种：其一，近年来我国有效采取了乡村振兴策略、大力发展生产力，农业机械化、种植技术的提高有效增加了农产品的产量；其二，在国民生活水平稳步提高大形势下，居民对于绿色农畜产品的需求量增大，经济水平的发展也带来了通货膨胀引起的同向变化，导致了产品价格的提高；其三：由于产品价格上升，更多的农户投入种植，反过来促进增产。

5.2.2 多元线性回归模型——收入及成本的关系

Step1 多元线性回归模型的建立与求解：众所周知农业是劳动密集型产业，其生产主要依靠使用大量劳动力，人力成本是农业发展成本的主导因素。因此，在搜集数据时，我们着重关注了对人力成本相关数据的分析。通过 CSMAR 数据库，我们获取到了不同农产品不同年份每亩的人工成本、家庭用工折价与每亩净利润的数据。

我们人工成本和家庭用工折价进行了协方差检验，经计算得到的协方差为 0.059，故可以避免多重共线性的问题，因此建立多元线性回归模型，多元线性回归模型的建立如下：

目标函数：

$$z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e$$

约束条件：

$$s.t. \begin{cases} e = z - z' \\ E(e) = 0 \\ D(e) = \sigma^2 \\ \min e^2 \\ Cov(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

通过 MATLAB 软件，利用 Regress()函数进行计算，我们最终得到了黑龙江大米、重庆土豆、陕西苹果苹果的收入与成本的线性回归方程式，分别为：

$$\begin{cases} z_{(大米)} = 1.4608 - 1.3834x_1 - 0.4371x_2 \\ z_{(土豆)} = 0.5778 - 1.0530x_1 + 0.4601x_2 \\ z_{(苹果)} = 3.7427 - 1.2518x_1 - 0.3901x_2 \end{cases}$$

Step2 结果分析：通过对回归方程的系数分析，人工成本对农产品收入的影响程度（即方程系数），远大于家庭用工折价。在显著性等于 0.05 水平下，人工成本对净利润的影响程度也超过了 1。除此之外，由回归方程，我们还可以得知薯类作物土豆的净利润最小，大米居中，水果类作物苹果的净利润最大。通过查阅相关文献和网络资料，我们也可得知三种农产品中人工成本与收入的大小关系，与回归方程不谋而合[1]。

5.3 基于问题 2 的求解

5.3.1 问题 2 模型的建立

Step1 如何循环利用土地资源：问题二需要为土地资源充足的农民们提供合理的兼顾稳定收入和土地资源的循环利用大规模农产品种植计划。对此，我们主要考虑了三种土地利用方式：分块种植不轮耕、轮耕不分块种植、分块种植+轮耕。

鉴于同一时间内有且仅有一种农产品收益最大，我们选择轮耕不分块种植的土地利用方式实现农民收益的最大化。通过查阅相关文献，我们了解到了“东莴笋——春莴笋——春玉米”的循环高效种植模式，玉米莴笋均属于高产作物，便于获得较高的产量，同时莴笋一年四季均适宜种植，适合与玉米间套轮作；玉米与莴笋轮作，上下季茬口衔接较松，劳动力不密集，便于操作。具体时间为春玉米收获后，于 8 月中下旬净作一季冬莴笋；12 月上中旬于冬莴笋行间套种春莴笋，冬莴笋收获后及时加强春莴笋田间管理，促进春莴笋生长；春莴笋 4 月份收获后种植春玉米，该模式具有较大的经济效益和可循环、可持续性发展性，特别适宜于城郊商品蔬菜基地及粮、经争地的地方实施^[3]。

Step2 最大利润分析：农户的某种农产品生产函数可以表示为 $Y = f(G, K, T, W \dots)$ ，其中 Y 为农作物产量(Yield)， G, K, T, W 分别表示土地(Ground)、资本(经济学中资本简称 K)、技术(Technology)、劳动力(Work)。由于农产品的种植技术条件在一定时期内是相对恒定的，因此假定 T 为常数，劳动力和资本要素可以统一考虑，用 M 表示 则 $Y = f(C, L, T, W \dots)$ 可以简化为： $Y = f(M, G)$ 。

假设资本的花费为 r，劳动力的花费为 s，土地的花费为 t，则生产 Y 产量的农产品的成本(Cost)约束条件为：

$$C = rK + sW + tG$$

$$\text{设 } C_m = rK + sW$$

$$\text{则 } C = C_m + tG$$

(1)最优生产量的实现。图 5-6 中纵轴是劳动力 W 和资本 K 要素 M 的投入量；横轴是土地要素 G 投入量；C1、C2、C3 分别表示由低到高不同成本的约束线，Y1、Y2、Y3 分别表示是由低到高的不同产量的等量曲线；E1、E2、E3 分别表示成本约束线与等产量曲线的切点，切点所在的等产量曲线位置代表不同成本约束条件下的最优生产量。

通过曲线可知当土地要素投入量为 G1 时，在 C1 的约束下，其产量水平为 Y1。若假设资本投入量 K 及其花费 r、劳动力投入量 W 及其花费 s、土地花费 t 都不变，那么只有将土地投入量增加到 G2 和 G3 才能提高相应产量到 Y2 和 Y3。这意味着在技术和市场条件相对稳定的情况下，增加土地的投入量是农户提高农产品产量的首要途径。

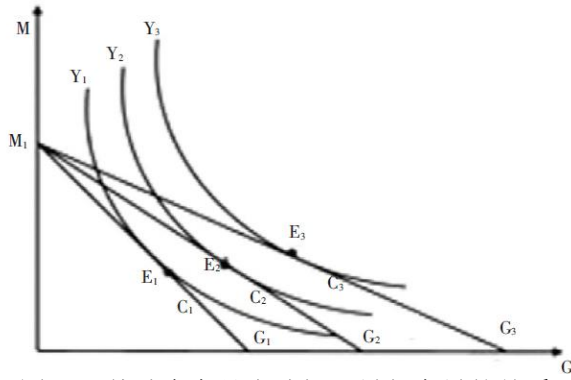


图 5-6 某种农产品土地投入量与产量的关系

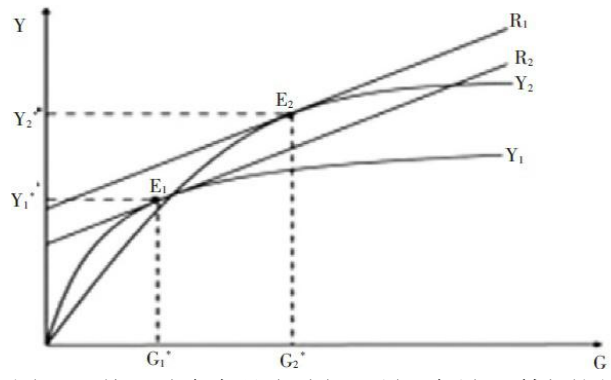


图 5-7 某一种农产品土地投入量、产量及利润的关系图

(2)利润最大化的实现。假设该种农产品的市场收购价格为 p , 则农户收益为 $p \cdot Y = p \cdot f(M, G)$, 这样农户的最大利润可以表示为:

$$\max pf(M, G) - C_m - tG = \max pY - C_m - tG$$

$$\text{令 } Y = \frac{\pi}{p} + \frac{C_m}{p} + \frac{tG}{p}$$

该式表示产生一定利润水平 π 的土地要素投入量和水稻产量的所有组合, 即为土地在某一投入量下的等利润线表达式, 其斜率 t/p 是不变的。结合 $Y = f(M, G)$, 在图 5-7 中, 纵轴代表农产品产量 Y ; 横轴代表土地 G 的投入量; Y_1 、 Y_2 为分别表示不同产量水平的两条产量曲线; R_1 、 R_2 分别为表示由低到高不同利润水平的等利润线; E_1 、 E_2 则分别为产量曲线和等利润线的切点, 切点表示在此种土地投入和产量的组合条件下利润最大。在等利润线 R_1 上, 农户的利润最大时的某种农产品的土地投入量和产量组合为 (Y_1, G_1) , 同理, 在 R_2 上, 这一组合为 (Y_2, G_2) 。不难得出, 农户若想将利润从 R_1 提高到 R_2 , 该作物产量就必须从 Y_1 提高到 Y_2 , 其伴随条件是土地投入量从 G_1 增加到 G_2 。由于拟采取“东莴笋——春莴笋——春玉米”的循环高效种植模式, 针对三个不同时期, 我们扩展最大利润约束模型如下, 该模型非线性规划模型, 其中 $i=1, 2, 3$; e^2 为扰动项。

目标函数:

$$\max \sum_{i=1}^3 (p_i f_i(M, G) - C_{mi} - tG) = \max \sum_{i=1}^3 p_i Y_i - C_{mi} - tG + e^2$$

约束条件:

$$s.t. \begin{cases} Y_i = \frac{\pi}{p_i} + \frac{C_{mi}}{p_i} + \frac{tG}{p_i} \\ C_{mi} = r_i K + s_i W + tG \\ G_{(0)} = 0 \\ \min e^2 \\ E(e) = 0 \\ D(e) = \sigma^2 \end{cases}$$

5.3.2 结果分析

通过查阅 CSMAR 数据库，我们给出了春玉米和东莴笋的亩产量 Y_i 的数据据值：春玉米 4500 株/667m²、平均产量 Y_1 : 850kg/m²; 东莴笋 5000 株/667m²、平均产量 Y_2 : 2500kg/m²，对于市场收购价格 p_i ，我们以 2019 年为准：玉米 p_1 : 3.08 元/公斤；莴笋 p_2 : 2 元/公斤。假设农户位于四川省，选取四川省 2018 年农林牧渔业劳动人口平均工资即 65412/12 作为劳动力成本的计量。我们同样利用从数据库得到的数据来计算资本花费 r ，表示为玉米和莴笋的每亩资本成本/每亩成本，经计算 $r=0.667$ 。将数值代入模型，得到结果是，在“东莴笋——春莴笋——春玉米”的循环高效种植模式下，由于农民有充足土地资源，所以全年该种植模式产值为：17842 元/亩。

5.4 基于问题 3 的求解

5.4.1 问题 3 模型的建立与求解

Step1 水资源、土地限制的引入：问题 3 需要我们兼顾小规模农户的生产及随资源保护问题。因此，基于问题 2 的模型，我们引入了水资源、土地资源的限制。据 2018 年水利部发布的中国水资源公报显示，农业用地亩均灌溉用水量为 365m³。假设农民灌溉用水量最大值为全国平均水平的 1.25 倍，且农民拥有的土地面积为 2018 年全国农村人均土地面积，即上限限制，为 1.35 亩^[4]。

Step2 基于问题 2 模型的修改：设入地每亩用水量为 A_i ，水费为 h 引入限制条件后，我们对问题 2 的模型作出如下修改：

目标函数：

$$\max \sum_{i=1}^n p_i f_i(M, G) - C_{mi} - tG - hA_i$$

约束条件：

$$\begin{cases} Y_i = \frac{\pi}{p_i} + \frac{C_{mi}}{p_i} + \frac{tG}{p_i} + \frac{hA_i}{p_i} \\ \max G \leq 1.35 \\ \sum_{i=1}^n A_i \leq 365 \times 1.25 \\ C_{mi} = rK_i + s_i W + tG \end{cases}$$

Step3 模型的求解：为了在水资源、土地资源受限的条件下取得最大收益，我们需要选取对水资源需求不大的农作物进行种植。通过查阅网络资料和相关文献，我们发现春马铃薯/春玉米 - 秋玉米 - 冬青菜”是一种高效的节水种植方式，其中，只有青菜是喜水农作物，但在冬天，其灌溉需求也会降低[3]。对于 2018 年，部分数据为马铃薯为 60000 株/667m² 平均价格 3.07 元/公斤；青菜为 4200 株/667m²、平均价格 2.67 元/公斤。其余参数均与第 2 问保持一致。

5.4.2 结果分析

最终得到模型结果为：在限制农民灌溉用水量最大值为全国平均水平的 1.25 倍，且农民拥有的土地面积上限为 1.35 亩的条件下，农户每年能得到的最大收益为 10347.5 元。

5.5 基于问题 4 的求解

5.5.1 问题 4 模型的建立与求解

Step1 “稻—鱼—牧”共养模式的提出：问题 4 我们需要兼顾农业、牧业和渔业的经营，根据生态循环的特点，牧业、渔业和农业三者可以相互促进，提高资源的循环利用率。事实上牧业和渔业可视为具有不同周期的农产品。基于此，我们对问题 2 的模型进行了如下调整：同时经营农业、牧业和渔业即表示在同一块地上同时生产进行两种及以上农产品，可促进资源的互补利用。那么，若和原来投入的土地量相同，现在可以实现多倍的农产品产出。为方便计算，我们只选取少量的畜牧业动物和渔业鱼类。我们在稻渔共养的基础上创新性的提出“稻—鱼—牧”共养模式^[5]。

Step2 问题 4 模型的建立：

(1)基于问题 2 的产量 Y_i 函数：若用 G_{CA} 表示共养模式下土地投入量， λ_i 为第 i 种农产品的土地占比，则： $G_{CA} = \sum_{i=1}^n \lambda_i G$ ，其中，若 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 、 M_{CA} 表示共养模式下资本和劳动力要素的投入量、 ΔY 表示相应农畜产产量的变化量，则可得到一组关于各种农产品产量 Y_i 的函数：

$$Y' = f'(M'_{CA}, G'_{CA}) = Y - \Delta Y$$

$$Y_1 = f(M_{CA1}, G_{CA1})$$

$$Y_2 = f(M_{CA2}, G_{CA2})$$

$$\vdots$$

$$Y_n = f(M_{CAN}, G_{CAN})$$

(1)农牧渔共养模式下的成本分析：由于在同一块土地上，生产模发生了改变，所需投入的成本(包括劳动力和资本)均会随之变化，若成本变化量用 ΔC_{mn} ($n=1,2,3,\dots,n$) 表示 (ΔC_{mn} 可能为负)，则在某一土地上的生产成本可用一组函数表示：

$$C_1 = C_m + \lambda_1 tG + \Delta C_m$$

$$C_2 = \Delta C_{m1} + \lambda_2 tG$$

$$C_3 = \Delta C_{m2} + \lambda_3 tG$$

$$\vdots$$

$$C_n = \Delta C_{mn} + \lambda_n tG$$

农户的总成本 C_{CA} 包括了该土地上的所有种植与养殖，可表示为：

$$C_{CA} = \sum_{i=1}^n C_i = C_m + \sum_{i=1}^n \Delta C_{mi} + tG + \Delta C_m$$

用上式减去 $C = C_m + tG$ 可得

$$\Delta C_{CA} = \sum_1^n \Delta C_{mn} + \Delta C_m$$

可见，针对同一块土地，与单一种植相比，种植+养殖共养的产业模式下，所花成本会随着劳动力及资本投入的增加而增加，相同面积的土地上农产品产出也会更多。

(2) **土地要素投入量与利润分析**: 同样基于问题 2 的相关函数，假设在共养模式下，包括种植、养殖的农产品的市场价格分别为 p 、 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_n ，则农户的总利润 π_{CA} 可以表示为：

$$\pi_{CA} = \sum_1^i \pi_i = pY + \sum_1^n p_n Y_n + \Delta pY - C_m - \sum_1^n \Delta C_{mn} - tG - \Delta C_m$$

整理可得：

$$\Delta \pi_{CA} = (\sum_1^n p_n Y_n - \sum_1^n \Delta C_{mn}) + (\Delta pY - \Delta C_m)$$

(4) **最终建立优化模型如下**： $\max \pi_{CA}$ 表示在共养模式下，农户的最大利润，则：

目标函数：

$$\max \pi_{CA} = \sum_1^i \pi_i = pY + \sum_1^n p_n Y_n + \Delta pY - C_m - \sum_1^n \Delta C_{mn} - tG - \Delta C_m$$

约束条件：

$$s.t. \begin{cases} Y' = f'(M'_{CA}, G'_{CA}) = Y - \Delta Y \\ Y_1 = f(M_{CA1}, G_{CA1}) \\ \vdots \\ Y_n = f(M_{CA n}, G_{CA n}) \\ G_{CA} = \sum_{i=1}^n \lambda_i G = G \\ C_{CA} = \sum_1^i C_i = C_m + \sum_1^n \Delta C_{mn} + tG + \Delta C_m \end{cases}$$

Step3 模型的求解：为简便计算，我们在种植基础上选取少量的养殖动物。在现有的稻渔共养的基础上创新性的提出“稻—鱼—牧”共养模式^[6]。

我们通过 MATLAB 编写了 SUTM 外点罚函数对该模型进行求解，所有等式的约束用 $h_j(x)$ 表示，求解步骤如下：

$$\text{设 } T' = -\pi_{CA} + \eta \sum_{j=1}^l [h_j]^2$$

首先，将问题转化为无约束问题 $\min T'$ ，其中 T' 为罚函数，只对不满足约束条件的点进行惩罚， η 为罚因子，带 η 的项为罚项；然后，给定任意初始点，取 $\eta > 1$ ，给定允许误差 $\varepsilon > 0$ ；再则，求无约束问题的最优解 $\min T'$ ；最后，反复迭代求出最优解。

5.5.2 结果分析

综上所述，兼顾农业、牧业和渔业的经营，可以牢牢把握生态循环的特点，提高资

源的循环利用率，实现可持续发展。同时，我们不难得出，在土地面积不变的前提和农牧渔共养模式下：①农户的利润增量包括种植+养殖在内的利润增量的总和。②利润变化量取决于所有农产品的市场价格及劳动力和资本的投入量及其花费。因此，若农户要在既有的土地下提高生产利润，需要保证养殖品产生的利润量高于农产品产生利润的变化量。

针对种植和养殖的不同农产品，为简便计算，我们选择了具有代表性的稻、牛、鱼进行分析。分别考虑牛奶和牛肉；鲫鱼进行利润计算。部分数据为：牛奶价格 11.65 元/公升，牛肉价格 60 元/公斤、成年牛大约重 700kg, 鲫鱼 16 元/公斤，大米 6.58 元/公斤。其余数据和符号与问题 2 保持一致，将数据代入模型。利用 SUTM 外点罚函数，得出：

若农户采用“稻—鱼—牧”的共养模式进行种植与养殖，若水稻与放牧所占的面积为 9:1，则可实现资源的循环利用和收益的最大化，此时每年每亩地净折合收益约为 18217 元。

5.6 基于问题 5 的求解

5.6.1 问题 5 模型的建立与求解

Step1 人力成本及家庭限制的引入：问题 5 我们需要考虑到一个家庭经营多种农畜产品，人力成本会存在消耗过多的问题，也需兼顾几个家庭合作的利润问题。

(1) **对于几个家庭合作的考虑。**基于问题 4 所提出的“农牧渔”共养模式，我们对问题 4 提出的模型进行进一步优化。事实上， n 个家庭收入的目标函数为一个家庭收入目标函数的总和，即：

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \pi_{ji} = \sum_{j=1}^n (p_{j1}Y_{j1} + \sum_{i=1}^n p_{ji}Y_{ji} + \Delta p_{j1} - Y_{j1} - C_{jm} - \sum_{i=1}^n C_{jmi} - tG - \Delta C_{jm})$$

式中符号意义均与第 4 问模型均保持一致。

(2) **劳动力约束的表述。**假设一个标准的三口之家能提供 1.5 个单位的劳动力， n 个家庭提供的劳动力总量不超过 $1.5n$ ，若用 L 表示一个家庭提供的劳动力数量，则劳动力约束可表示为 $\sum_{j=1}^n L_j \leq 1.5n$ 。引入了劳动力和家庭数量限制的农牧渔复合非线性规划模型如下：

目标函数：

$$\max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \pi_{ji} = \sum_{j=1}^n (p_{j1}Y_{j1} + \sum_{i=1}^n p_{ji}Y_{ji} + \Delta p_{j1} - Y_{j1} - C_{jm} - \sum_{i=1}^n C_{jmi} - hG - \Delta C_{jm})$$

$$Y' = f'(M'_{CA}, G'_{CA}) = Y - \Delta Y$$
$$Y_1 = f(M_{CA1}, G_{CA1})$$
$$\vdots$$
$$s.t. Y_n = f(M_{CA n}, G_{CA n})$$
$$\sum_{j=1}^n L_j \leq 1.5n$$
$$G_{CA} = \sum_{i=1}^n \lambda_i G = G$$
$$C_{CA} = \sum_1^i C_i = C_m + \sum_1^n \Delta C_{mn} + tG + \Delta C_m$$

仍然采用第四问中对于非线性最优化问题的 SUTM 外点罚函数法利用 MATLAB 对问题进行求解。

5.6.2 结果分析

MATLAB 的 SUTM 外点罚函数求解结果如下：

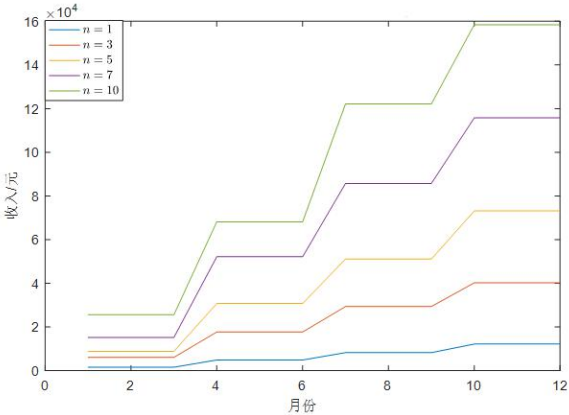


图 5-8 “冬茼蒿-春茼蒿-春玉米”模式下不同数量合作家庭的收入走向

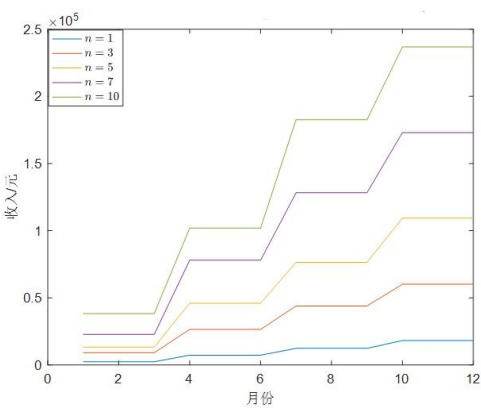


图 5-9 “稻-牧-鱼”模式下不同数量合作家庭的收入走向

显然，在大规模的种植与养殖模式下，相较于“东茼蒿——春茼蒿——春玉米”的循环高效种植模式，以“稻-牧-鱼”为代表的共养模式所带来的收益更大。因此我们建议多家庭合作的大规模农畜产应选择种植与养殖有机结合的“农牧渔”共养模式。

六、模型的评价及优化

6.1 误差分析

(1) 在显著性等于 0.05 水平下，人工成本对净利润的影响程度也超过了 1。除此之外，由回归方程，我们还可以得知薯类作物土豆的净利润最小，大米居中，水果类作物苹果的净利润最大。通过查阅相关文献和网络资料，我们也可得知三种农产品中人工成本与收入的大小关系，与回归方程不谋而合。

(2) 针对于问题 2 的误差分析：将我们的模型结果与 CSMAR 数据库中给出的农产品每亩收益作出对比，发现与实际情况在一个数量级内，同时又比单独种植一种农作物大约高出 0.27%。因此我们认为，所提出的种植方法对能够有效提高农户获的种植收益。

(3) 对于问题 3 的误差分析，由于存在着水资源、土地资源的限制，我们分别对两种限制条件下，农户收入进行了参数用水量和农户用地分别进行了敏感性分析。

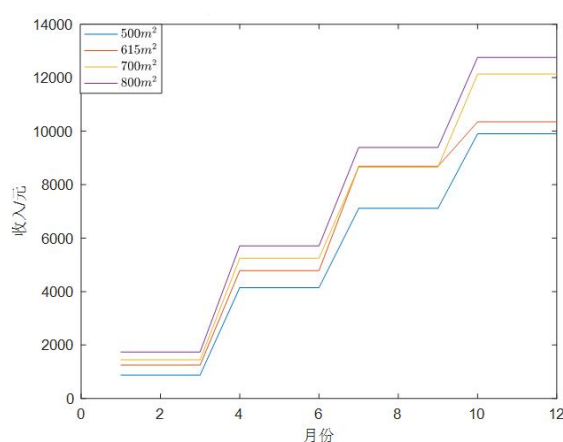


图 6-1 不同数用水限制下农户的收入走向

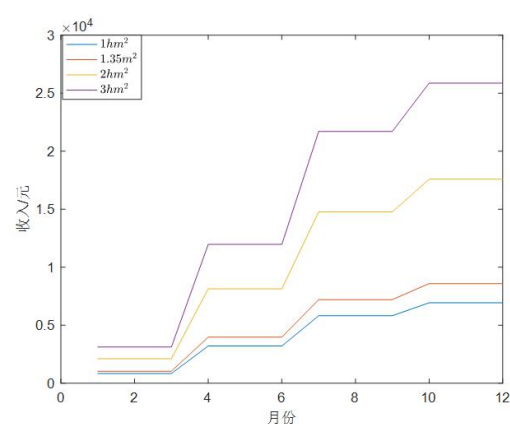


图 6-2 不同土地限制下农户的收入走向

为了准确的衡量敏感性我们引入了公式

$$C_{\beta, \theta} = \frac{\alpha \beta / \beta}{\alpha \theta / \theta}$$

该式表达了 $\Delta\theta$ 变动对 $\Delta\beta$ 的影响，即 β 关于 θ 的敏感性，通过各参数对 R 的影响，对 R 进行控制。通过计算，我们得到了得到了敏感性指数：水量为+0.5886、土地面积为+0.8598。可以看出土地面积和水量的增多会显著增加农户的收入，土地面积的影响更强于灌溉水量。

6.2 模型的优点

(1) 在对数据的预处理中，我们采用三次指数平滑预测的方法对 2018-2020 的农产品产量进行了拟合预测，提高了数据的完整性。

(2) 在问题 1 中，我们采用灰色关联分析法，利用 SPSS 软件得出了不同农作物产量和价格的定量关联度，并以图像的方式加以展示，更清晰直观；基于问题 1，我们建立了多元线性回归模型，可以较好的反应人工成本、每亩家庭用工折价对收入的影响程度，同时直观反映出不同农产品净利润的大小关系。

(3) 问题 2~5 分别为考虑了随资源、劳动力、资源循环利用等不同限制条件的最优解问题，于是我们建立了引入不同限制条件的非线性规划模型。问题 3~5，实则是对问题 2 的拓广和延申，相应模型的建立也是对问题 2 模型的进一步优化。推而广之，该模型可以用于其他更多限制条件下，种植养殖的规划和决策，具有普遍适用性。

(4) 本题所求解到的所有问题的结果，与实际情况相符，具有准确性和合理性，这也说明了所建模型的可行性。同时我们在正确、清楚地分析了题意的基础上，建立了合理、科学的可变成本计算模型，在实现利益最大化的同时，兼顾了资源的循环利用和环境保护问题。

(5) 主要利用了 SPSS、MATLAB 进行数据处理和计算，降低了运算量，且所得数据比较合理可靠。

6.3 模型的缺点

(1) 在模型建立过程中，由于所搜集的数据不够全面，对限制条件的考虑有一定的局限性，得到的结果可能与实际情况有所出入。

(2) 模型在建立的过程中所做的一些假设主观性较强，在实际种植中，所得结果和最优解有一定的偏差。

6.4 模型的推广

(1) 基于问题 1，我们建立了多元线性回归模型，可以较好的反应人工成本、每亩家庭用工折价对收入的影响程度，同时直观反映出不同农产品净利润的大小关系。可以将此模型用于农作物种植的初步决策中。以选择人工成本较小，净利润相对较高的种植方式。

(2) 问题 2~5 分别为考虑了随资源、劳动力、资源循环利用等不同限制条件的最优解问题，于是我们建立了引入不同限制条件的非线性规划模型。问题 3~5，实则是对问题 2 的拓广和延申，相应模型的建立也是对问题 2 模型的进一步优化。推而广之，该模型可以用于其他更多限制条件下，种植养殖的规划和决策，具有普遍适用性。

(3) 所建立的模型考虑到的因素比较全面，在实现利益最大化的同时，也可兼顾到资源的循环利用和环境保护问题，同时，我们给出了详细的规划策略，可以应用到实际中。

参考文献

- [1] 辜胜阻, 李睿, 杨艺贤,等. 推进"十三五"脱贫攻坚的对策思考[J]. 财政研究, 2016, 000(002):7-16.
- [2] 罗庆成, 徐国新. 灰色关联分析与应用[M]. 江苏科学技术出版社, 1989.
- [3] 任建国,陈义. “冬茼笋—春茼笋—春玉米”循环高效种植模式[J].四川农业科技,2018(04):21-22.
- [4] 中华人民共和国水利部. 中国水资源公报. 2009[M]. 中国水利水电出版社, 2010.
- [5] 钟树福. 试论江西稻区农—牧—渔业系统[J]. 江西农业大学学报, 1986(3).
- [6] 吴涛, 黄斌, 刘中明,等. "稻—渔—牧"综合种养模式发展初探——以衡山县绍祥农场为例[J]. 作物研究, 2017(06):63-68.

附 录

一、黑龙江农产品产量数据预处理

```
x=[2001;2002;2003;2004;2005;2006;2007;2008;2009;2010;2011;2012;2013;2014;2015;2016;2017;2018];
y1=[7.587;7.807;9.699;10.214;0;11.209;11;18.3;16.9;16;17.743;15.976;15.053;13.933;14.067;11.702;11.19
8;15.066];
y2=[81.5;98.6;80.9;66.5;75.7;81.8;125.1;135;104.2;105;87.3;82.2;48.78;56.5;98.25;126.2;134.65;134.3];
y3=[2552.1;3046.6;3104.5;3008.5;3074.6;2545.5;2651.7;2941.2;2512.3;3001;3092;3346.4;3462.94;4225;4
353.01;5012.8;5570.6;5761.49];
y=[y1,y2,y3];
bar(x,y)
xlabel("年份");
ylabel("产量（万吨）");
title("黑龙江大米，土豆，苹果产量图");
legend("苹果","土豆","大米");
```

二、陕西农产品产量数据预处理

```
x=[2001;2002;2003;2004;2005;2006;2007;2008;2009;2010;2011;2012;2013;2014;2015;2016;2017;2018];
y1=[233.763;295.888;263.654;347.351;0;388.57;391.3;392.2;461.8;555.205;560.117;649.976;701.568;745.
505;805.173;856.013;902.932;965.089];
y2=[68.9;110.1;63.3;99;80.1;96.1;82;87.5;80.5;83.2;42;80.14;73.201;82.04;71.96;77.79;80.32;82.53];
y3=[913.4;1217.3;1044.4;1303.1;1081.6;1089.1;976.6;1005.6;968.4;1040;1043;1087;1067.91;1111;1131.4;
1164.9;1194.7;1245.1];
y=[y1,y2,y3];
bar(x,y)
xlabel("年份");
ylabel("产量（万吨）");
title("陕西大米，土豆，苹果产量图");
legend("苹果","土豆","大米");
```

三、重庆农产品产量数据预处理

```
x=[2003;2004;2005;2006;2007;2008;2009;2010;2011;2012;2013;2014;2015;2016;2017;2018];
y1=[0.427;0.617;0;0.702;0.6;0.6;0.6;0.685;0.609;0.633;0.669;0.583;0.689;0.529;0.571;0.496];
y2=[242.2;249.8;247.2;239.3;241.2;264.1;255.7;278.2;280.26;202.21;262.2;276.32;284.4;292.102;284.248;
```

```
294.392];
y3=[1157.7;1122.5;1111.6;1106.9;1023.5;1082.4;1087.1;1144.5;1168.21;910.5;1088;1153.2;1137.2;1156.1;
1126.903;1138.545];
y=[y1,y2,y3];
bar(x,y)
xlabel("年份");
ylabel("产量（万吨）");
title("重庆大米，土豆，苹果产量图");
legend("苹果","土豆","大米");
```

四、对于多元线性回归模型的求解

通过 **MATLAB** 软件，利用自带函数 `Regress()`函数进行计算

五、时间序列-移动平均法

```
function [floaver3,floaver5]= floataver(Y)
%Y:原时间序列
%floaver3,floaver5: 三点/五点移动平均值
n=length(Y);
%计算三点移动平均值
floaver3(1)=0;
floaver3(2)=0;
floaver3(3)=0;
for i=4:n
    floaver3(i)=(Y(i-1)+Y(i-2)+Y(i-3))/3;
end
%计算五点移动平均值
floaver5(1)=0;
floaver5(2)=0;
floaver5(3)=0;
floaver5(4)=0;
floaver5(5)=0;
for i=6:n
    floaver5(i)=(Y(i-1)+Y(i-2)+Y(i-3)+Y(i-4)+Y(i-5))/5;
end
```

end

平均值

for i= 2004:2020

 g(i-2003)=mean(tudoushuju(tudoushuju(:,2)==i,1));

end

for i= 2006:2020

 p(i-2005)=mean(pgsj(pgsj(:,2)==i,1));

End