

案例 16 停车场的优化设计

随着城市车辆的增加,停车位的需求量也越来越大,停车困难已逐渐成为市民们头疼的问题。要解决停车难问题,除了尽可能的增加停车场以外,对停车场进行优化设计也能在一定程度上缓解这一供需矛盾。停车场的优化设计就是在停车场大小确定的情况下,对停车区域进行优化设计,以便容纳更多的车辆。本文的目的就是希望分析一下这一情况,找出缓解停车困难的有效办法。

假设某公共场所附近有一块空地,如果不考虑建设地下或多层结构,我们该如何有效的设计停车位置呢?一般来说,想尽可能的把车塞进停车场,最好的办法就是以垂直停靠的方式将车一辆挤一辆地排成行,但是这样停放的后果就是车辆不能自由出入,只有后进入的车辆全部先出去了,先进入的车才可以离开停车场,显然不符合实际的需求。因而,为了使汽车能够自由地出入停车场,必须设立一定数量具有足够宽度的通道,并且每个通道都应该有足够大的“转弯半径”,而通道越宽越多,就会使得容纳的车辆数越少。所以我们的问题就是要确定在满足车辆能够自由进出的实际需求下,如何进行停车位置和车行通道的设计,才能够停放更多的车辆,从而做到既方便停车又能获得最大的经济效益。

我们先来看看生活中非货运车辆大小的种类。根据实际调查和经验数据,这类车辆一般可分为小轿车,中型客车和大型客车三类。其中小轿车约占九成,大型客车约占一成,而中型客车一般不多于 1%。根据这样的情况,我们可以免去对中型客车的车位设计,即便有中型客车停车的需要,可以使用大型车的车位,这也符合现实生活中绝大多数停车场的车位设计情况。我们设小轿车所占的比例为 $\alpha = 0.9$,大型客车所占的比例为 $1 - \alpha = 0.1$,当然现实中也有不少全为小轿车设计的停车场,例如小区的地下车库。

再来看看车位的大小。根据实际的调查,城市内比较普通的小轿车长度一般不超过 4.7 米,宽度一般不超过 1.7 米,而一般大型客车长度不超过 12 米,宽度不超过 2.2 米。另外,经实际考察可知,停车场中标志线的宽度大约为 0.1 米,所以我们可以假设停车场中停放轿车需要的车位长 $C_L = 5$ 米,宽 $C_W = 2.5$ 米,这其中包括了 0.1 米的标志线宽度和至少 0.3 米的汽车间的横向间距。设停放大客车需要长 $B_L = 12.5$ 米,宽 $B_W = 3$ 米,其中包括 0.1 米的标志线宽度和必要的汽

车之间的横向间距。

考虑到汽车从通道驶入车位一般得转弯，所以车辆的最小转弯半径也是停车场设计所要考虑的重要参数。所谓最小转弯半径，就是汽车转弯时转向中心到汽车外侧转向车轮轨迹间的最小距离。根据实际调查，可设小轿车的最小转弯半径为 $C_1 = 5.5$ 米，与此同时，汽车转弯时转向中心到汽车内侧转向车轮轨迹间的最小距离为 $C_2 = C_1 - 1.7 = 3.8$ 米，如图 1 所示。

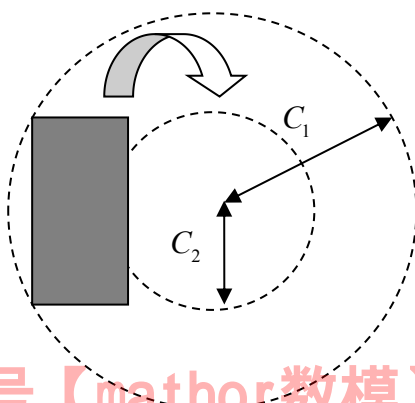


图 1

对于大客车，我们设其最小转弯半径为 $B_1 = 10$ 米，与此同时，大型车转弯时转向中心到内侧转向车轮轨迹间的最小距离为 $B_2 = B_1 - 2.2 = 7.8$ 米。

本文的目的就是讨论应当整体设计车位的排布。对于给定的停车场，我们的目标就是尽可能多地增加车位数，或者说，使每辆车占据的停车场地面积尽可能小。

一 仅有一种车型的局部车位位置

大型客车和小轿车在停车时占地面积相差很大，一般都是分区停泊的。现在，让我们先来看看只限于停放小轿车的简单情况，并且先不考虑停车场的实际大小，只是来研究一下应当如何给出局部设计，才能使每辆车占据的停车场地面积最小。

对于每一个车位，为了便于该车位上的小轿车自由进出，必须有一条边是靠通道的，设该矩形停车位的长边与通道的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 便是车辆垂直从通道驶入车位， $\theta = 0$ 就是车辆从通道平行驶入车位，即平时所说的平行泊车。为了留出通道空间和减少停车面积，显然，我们可以假设该通道中的所

有车位都保持着和该车位相同的角度平行排列，如图 2 所示。

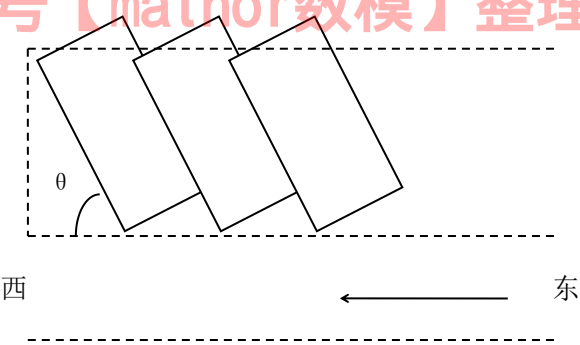


图 2

上图中，小轿车是自东向西行驶顺时针转弯 θ 角度驶入车位的。我们来具体研究一下小轿车驶入车位的情况，见图 3，其中 C_1 为最小转弯半径， R 为通道的最小宽度。我们假定小轿车的最外端在半径为 C_1 的圆周上行驶，且此时轿车的最内端在半径为 C_2 的圆周上随之移动，然后以 θ 角度进入停车位，所以通道的最小宽度 $R = C_1 - C_2 \cos \theta$ 。

在保证车辆能够自由进出的前提下，本着要求通道宽度尽量小的原则，我们来看一下一排车位之间的各个数据，见图 4。

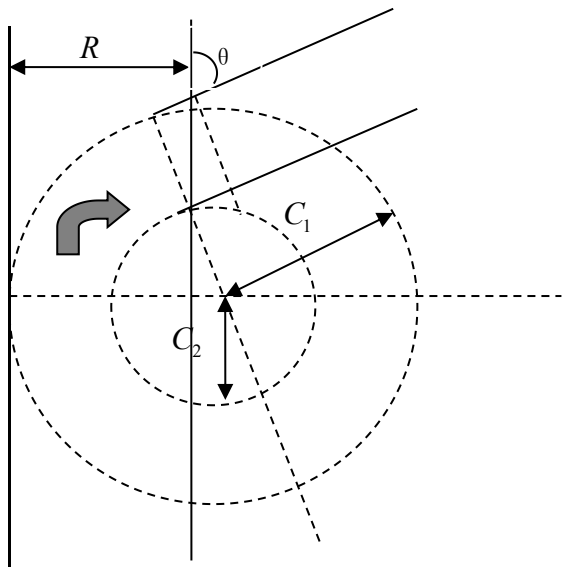


图 3

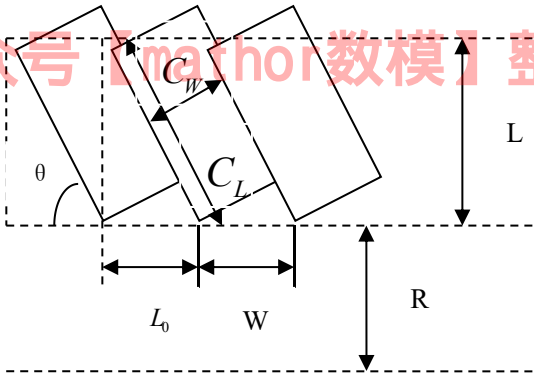


图 4

每辆车均以角度 θ 停放，用 W 表示小轿车停车位宽度， L 表示小轿车停车位长度（这里 L 的最上方并没有取到最上端是考虑到车身以外的小三角形区域可以留给对面停车位使用）， L_0 表示停车位末端的距离，易见他们分别是停车角 θ 的函数，且有

$$\begin{aligned} W &= \frac{C_W}{\sin \theta} \\ L &= C_L \sin \theta + \frac{1}{2} C_W \cos \theta \\ L_0 &= (C_L + \frac{1}{2} C_W \cot \theta) \cos \theta \\ L_1 &= \frac{1}{2} C_W \cos \theta \end{aligned}$$

现在按照图 4 所示，计算一下每辆车占据的停车场面积 $S(\theta)$ 。考虑最佳排列的极限情况，假设该停车位是无限长的，可以忽略该停车位两端停车位浪费掉的面积 $\frac{1}{2} L_0 \cdot L$ ，因为它们被平均到每个车位上去的公摊面积很小，可以不计。从车辆所占的停车位来看，它占据的面积为 $W \cdot L$ ，另外，它所占的通道的面积为 $W \cdot R$ 。考虑到通道对面（也就是图 4 的下部）也可以有类似的一排车位可以相互借用此通道，所以可以对占用的通道面积减半，于是我们得到：

$$S(\theta) = WL + \frac{1}{2} WR = C_W C_L + \frac{C_W^2 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{C_1 C_W}{2 \sin \theta} - \frac{C_W C_2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad (1)$$

我们的目标就是求出 $S(\theta)$ 的最小值。

将 $C_1 = 5.5$ 米， $C_2 = 3.8$ 米， $C_L = 5$ 米， $C_W = 2.5$ 米代人（1）式，可得

$$S(\theta)=12.5+\frac{6.875}{\sin \theta}-\frac{1.625 \cos \theta}{\sin \theta}, \quad S'(\theta)=\frac{1.625-6.875 \cos \theta}{\sin ^2 \theta},$$
所以当 $\cos \theta=\frac{1.625}{6.875}=\frac{13}{55}$, 即 $\theta \approx 76.33^{\circ}$ 时, $S(\theta)$ 达到最小, 且 $\min \{S(\theta)\}=19.18$ 平方米。

需要说明的是, 当 $\theta=0$ 时车位与车道平行, 此时每辆车都得采用平行泊车的方式进入车位, 这是现实生活中马路边的停车位常见的情况, 在一般的停车场中几乎很少看到。平行泊车对驾驶员的技术要求较高, 所以我们不考虑这样的情况。事实上, 即便要计算在这种情况下每单位车辆所占据的停车场面积 $S(\theta)$ 也不困难, 只不过对于平行泊车, 所要求的每个车位的长和宽不应再是上面所说的 C_L 和 C_W , 特别是停车位的长度 C_L 将变得更长 (否则, 停泊的车辆将无法进出), 其所要求的行车道的最小宽度也得足够大, 以便能让泊车车辆通过, 车位图形需按小轿车路线重新绘制, 读者可以自行计算并得到这些数据, 计算结果表明, 平行泊车是每辆车所占的平均面积明显地大于 19.18 平方米。

上述对车位的局部分析表明, 当停车位与通道夹角 $\theta \approx 76.33^{\circ}$ 时, 可以使每单位车辆占据停车场的面积达到最小。

二 仅有一种车型的全局车位排列

上面的局部分析告诉我们, 如果保持一排车位方向一致, 且与单向通道的夹角为 $\theta \approx 76.33^{\circ}$, 可使单位车辆占据的面积最小, 此时宽度为 R 的单向通道分别提供给它两边的停车位使用。在通道两边都各安排一排小轿车车位时, 考虑到路线的单行性质, 通道两边的停车位角度 θ 应该相对, 如图 5 所示。

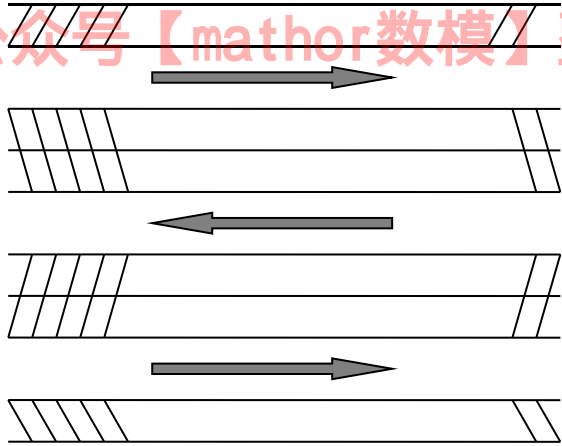


图 5

对每一排停车位，其一边为通道，另一边则可以是另一排停车位或者是停车场的边缘。所以停车排数 P_C 最多只能是通道数 P_I 的两倍，即：

$$P_C \leq 2P_I \quad (2)$$

另一方面，如果按照一排停车位，一条通道，一排停车位这样三排一组的形式加以组合，依次排列，确实也可以达到 $P_C = 2P_I$ 。即（2）式中的等号是可以成立的。此时，车位数可以达到停车位位置的最大值，排列情况同样可以见图 5。

图 5 显示，在每排车位数相当大或者说，在不考虑整个停车场四角浪费的那些面积时，我们可以使每单位车辆占用的停车场面积最小，并且对于小轿车来说，此最小值在车位角度 $\theta \approx 76.33^\circ$ 时达到。

我们再来计算一下停泊车辆均为大型客车时的最佳角度，将模型（1）修改为：

$$S(\theta) = B_w B_L + \frac{B_w^2 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{B_l B_w}{2 \sin \theta} - \frac{B_w B_2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad (3)$$

并且将相应数据代人（3）得到：

$$S(\theta) = 37.5 + \frac{15}{\sin \theta} - \frac{7.2 \cos \theta}{\sin \theta}, \quad S'(\theta) = \frac{7.2 - 15 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

取 θ 使 $S'(\theta) = 0$ ，即 $\cos \theta = \frac{7.2}{15} = 0.48$ ，求得当 $\theta \approx 61.31^\circ$ ，此时每单位大型客车占据的停车场面积最小，每辆车占据的面积为 $S(\theta) = 50.66$ （平方米）。

综上所述，对于只有一种车型的足够大的停车场，按照现有的车辆尺寸大小

计算，我们将采用图 5 的排列方式设计停车位。对于小轿车，设计车位角度为 76.33° ，单位车辆占据的停车场面积为 19.18 平方米。对于大型客车，设计的车位角度为 61.31° ，单位车辆占据的停车场面积为 50.66 平方米。

三 两种车型的停车场设计的理想情况

对于两种车型，即小轿车和大型客车同时存在的情况，如果对于足够大的停车场地，我们可以根据 $\alpha:(1-\alpha)=9:1$ 的比例要求，计算出所需的小轿车车位排数和大型客车车位排数，以及每排的停车数目。根据第二部分的讨论，我们可以按一排停车位，一行通车道，一排停车位这样三排为一组的方式组合出停车场的结构，设小轿车有 C_g 组，大型客车有 B_g 组，每组的一排长度为 G 米。

根据第一部分，对于小轿车的停车位置宽度 $W = \frac{C_w}{\sin \theta} = \frac{2.5}{\sin 76.33^\circ} = 2.573$ （米），而对于大型客车，其停车位置的宽度 $W = \frac{B_w}{\sin \theta} = \frac{3}{\sin 61.31^\circ} = 3.420$ （米）。所以，对于小轿车，每一组可以停放的车辆数目为 $\frac{2 \cdot G}{2.537}$ ，该停车场中总共可以

停放 $\frac{2 \cdot C_g \cdot G}{2.537}$ 辆小轿车，而对于大型客车，同样可以得总车位数为 $\frac{2 \cdot B_g \cdot G}{3.420}$ 。根

据 $\frac{2 \cdot C_g \cdot G}{2.537} : \frac{2 \cdot B_g \cdot G}{3.420} = 9:1$ 的比例要求，我们可以得到 $C_g : B_g = 6.77:1$ 。

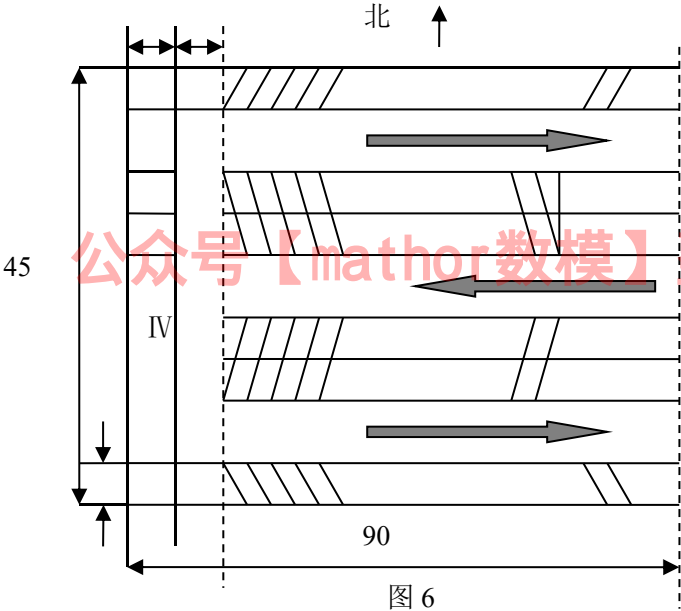
综上所述，对于足够大的停车场地，我们可以用一排停车位，一条通车道，一排停车位为一组的形式来平行设计车位，大体结构可参见图 5。至于小轿车组和大型客车组的比例，可以按照近似于 6.77:1 的形式，例如，取近似值 7:1，13:2，20:3，27:4，34:5 等比例建造。

四 具体停车场车位设计

上面我们讨论的都是理想情况，现实中很多停车场的占地面积并不一定很大，而且从图 5 的设计安排来看，理想情况下的每一组车位都必须为车辆能够自由进出而设置一个入口和一个出口，这样的设计既不经济也不安全。特别是对于某些收费的停车场或者要重点考虑安全设施的停车场，将不得不在众多的出入口设置收费点或关卡而增加成本，这显然不是最好的安排，那么对于一个具体形状

和面积给定的停车场，我们将根据前面理想情况的讨论做出改进，以得到更合理的设计规划。

图 6 为某公共场所附设的停车场，它是一个长 90 米，宽 45 米的矩形区域，该矩形区域的四个角落有照明灯设置，其占据矩形角上的形状为边长 2.5 米正方形，见图 6 的星号区域。区域南边，西边，北边是围墙，东边是马路，这是可以作为停车场出入口的唯一的一条边。根据对当地实际情况的调查，该停车场位设计应考虑 5 至 6 个大型客车车位，其余都作为小轿车车位设计。现在我们就按照上述要求来对这块停车场进行车位的具体安排。



90 米的停车场长边可以当作足够长的边来看待，我们将 90 米为一排来设计小轿车的花位，即每排车位与矩形的长边平行。在理想情况下，根据第一部分讨论可知，最佳设计下的车位长度为：

$$L = C_L \sin \theta + \frac{1}{2} C_w \cos \theta = 5 \sin 76.33^\circ + 1.25 \cos 76.33^\circ = 5.154 \text{ (米)}$$

停车场通道宽度为：

$$R = C_1 - C_2 \cos \theta = 5.5 - 3.8 \cos 76.33^\circ = 4.602 \text{ (米)},$$

所以，理想情况下的一组（即两排车位中间加一条行通车道）的宽度约为：

$$2L + R = 14.91 \text{ (米)}$$

于是，45 米宽可以考虑安置三组这样的车位，如图 6 的 I，II 和 III。

在小轿车的总体布局确定下来后，我们再来具体确定大型客车的车位。考虑到大型车的转弯半径比较大，借用专门为小轿车车位设计的通道是肯定不行的。相对来说，大型客车停车位只占总停车位的很小一部分，在设计停车场的位置市，为了节省面积以增加车位数，应该将所有大客车位置放在一块，同样以矩形并排的形式放置。大客车在停车场中的停放方式也可以采用直角停放的停车方式，并按照其特殊的位置设置特殊宽度的通道。另外考虑到其进出上的困难情况，一般可安置在停车场的出口部分，例如，将其安排在东边靠马路处（注：东边临街，没有围墙），且垂直东边的马路横向占用小轿车的车位设置 6 个大型客车车位，大客车可直接由马路开进停车位，见图 6 的右边 6 个横向车位。

剩下的事情就是得解决出入口问题了，由于只能在东边设置出入口，并且 I，II，III 三组区域为相互能借助对方区域的车位排列位置设置，通道形式方向应该间隔，即 I 向东，II 向西，III 向东，或者 I 向西，II 向东，III 向西。为此，必须在停车场的最西边设置南北走向的一排通道，以便让 I，II，III 区车位的车辆都能够换向出入，具体可以参照图 6 的设置。

最后，考虑到既然在最西边已经设置了南北走向的一排通道，我们可以在该通道的西边设置一停车位，此时该车位设计的车辆出入可以占用南北通道，所以这排车位的设计是最合理的，如图 6 中的区域 IV。

根据如上的分析，我们对该停车场的车位大致设计成图 6. 东边的中部为入口，北部和南部为出口，这样，即使在车辆较多的时候不至于难以驶出，通道方向也如图 6 所示。大型客车的位置已经确定为 6 个，小轿车车位的个数我们将根据 I，II，III 的车位角度 θ 进行变化。

由于东西走向的通道和南北走向通道已经是垂直拐弯，所以毫无疑问，区域 IV 的车位将垂直排列，去掉两边照明灯设置后西边宽度为 40 米，正好可以设置 16 个车位（2.5 米宽和 5 米长），垂直于西边。我们可以计算出西边通道的宽度为 $R = C_1 - C_2 \cos \frac{\pi}{2} = 5.5$ （米）。考虑到对称性质，我们设横向的 6 排的小轿车车位个数分别是 $X_1, X_2, X_2, X_2, X_2, X_1$ 个，并建立如下的小轿车车位个数模型：

$$\max X = 2X_1 + 4X_2 + 16$$

$$s.t. \begin{cases} 3B_w \leq 2L \\ 5 + X_1W + L_0 + 2.5 \leq 90 \\ 5 + 5.5 + X_2W + 2L_0 + B_L \leq 90 \\ 6L + 3R + C_w \cos \theta \leq 45 \\ X_i > 0, i = 1, 2 \text{ 且为整数} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4)$$

将公式 $W = \frac{C_w}{\sin \theta}$, $L = C_L \sin \theta + \frac{1}{2}C_w \cos \theta$, $L_0 = (C_L + \frac{1}{2}C_w \cot \theta) \cos \theta$,

$R = C_1 - C_2 \cos \theta$ 和数据 $C_L = 5, C_w = 2.5, C_1 = 5.5, C_2 = 3.8, B_L = 12.5, B_w = 3$ 分别代入 (4) 式, 化简后可得:

$$\max X = 2X_1 + 4X_2 + 16$$

$$s.t. \begin{cases} 18 \leq 20 \sin \theta + 5 \cos \theta \\ X_1 \leq 33 \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 0.5 \cos^2 \theta \\ X_2 \leq 26.8 \sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \\ 300 \sin \theta - 14 \cos \theta \leq 285 \\ X_i > 0, i = 1, 2 \text{ 且为整数} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5)$$

对于模型 (5), 如直接利用计算机编程求解会遇到一些麻烦, 先是涉及 θ 的变化, 然后又涉及 X_1 和 X_2 。为此, 我们先用微积分知识来讨论一下。

对于第一个限制条件 $18 \leq 20 \sin \theta + 5 \cos \theta$, 设 $f_1(\theta) = 20 \sin \theta + 5 \cos \theta$, 易求得

$$f_1'(\theta) = 20 \cos \theta - 5 \sin \theta$$

当 $\tan \theta = \frac{1}{4}$ 时, 函数有唯一的驻点, 所以 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 内的最大值为

$$\max \left\{ f_1(0), f_1\left(\arctan \frac{1}{4}\right), f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \geq 18$$

于是, θ 的取值范围应限制在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, 容易发现当 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,

$$20 \sin \theta + 5 \cos \theta, \quad 33 \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 0.5 \cos^2 \theta$$

$26.8\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$, $300\sin\theta - 14\cos\theta$
都为严格单调递增函数，这是求上面模型解的关键所在。只要求出

$$18 \leq 20\sin\theta + 5\cos\theta \text{ 和 } 300\sin\theta - 14\cos\theta \leq 285$$

的解集的交集，然后选取该交集中最大的 θ 即可，记此最大的 θ 为 θ_0 ，取

$$X_1 = \left\lceil 33\sin\theta_0 - 2\sin\theta_0\cos\theta_0 - 0.5\cos^2\theta_0 \right\rceil = 31$$

$$\text{和 } X_2 = \left\lceil 26.8\sin\theta_0 - 4\sin\theta_0\cos\theta_0 - \cos^2\theta_0 \right\rceil = 23$$

模型的解就得到了（式中 $\lceil \dots \rceil$ 表示取整运算）。

利用数值计算或者计算机编程容易求出 $18 \leq 20\sin\theta + 5\cos\theta$ 的解集为 $46.788^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $300\sin\theta - 14\cos\theta \leq 285$ 的解集为 $45^\circ \leq \theta \leq 74.288^\circ$, 于是 $45.788^\circ \leq \theta \leq 74.288^\circ$, 取

$$\theta = 74.288^\circ$$
$$X_1 = \left\lceil 33\sin\theta_0 - 2\sin\theta_0\cos\theta_0 - 0.5\cos^2\theta_0 \right\rceil = 31$$

$$X_2 = \left\lceil 26.8\sin\theta_0 - 4\sin\theta_0\cos\theta_0 - \cos^2\theta_0 \right\rceil = 23$$

所以最后得到小轿车车位数目应该为 170 个，I，II，III区域的停车位方位角可取 74° 左右。

五 结束语

停车场的优化设计实际上是一个比较复杂的非线性整数规划问题。我们从最理想的情况出发，建立了一个一般停车场大致可以参考的布局 and 模型，然后又给出了一个具体的案例分析来加以说明。现实生活中，对于给定范围的停车场设计，可以根据特定的需要，结合理想情况下的基本布局，并加以调整，进行局部修改而得出较好的设计方案。

参考文献：

- [1] 何文章，宋作忠，数学建模与实验[M]. 哈尔滨工程大学出版社，2002
- [2] 周明，孙树栋，遗传算法原理及应用[M]。北京：国防工业出版社，1999

[3] Williams H P. Model Building in Mathematical Programming. John Wiley & Sons, 1978

[4] 宋作忠, 何文章, 基于遗传算法的交易中心停车场优化设计[J]. 数学的实践与认识, 2004, 1