

## 风险投资组合的线性规划模型

邓刚毅 许剑勇 周 斌

指导教师: 胡良剑

(中国纺织大学, 上海 200051)

**编者按** 本文通过风险函数转化为不等约束, 建立为线性规划模型, 直接采用现成程序进行计算, 得出优化决策方案, 并且给出有效投资曲线, 根据投资者主观偏好, 选择投资方向.

**摘 要** 对市场上的多种风险资产和一种无风险资产(存银行)进行组合投资策略的设计需要考虑两个目标: 总体收益尽可能大和总体风险尽可能小, 而这两个目标在一定意义上是对立的.

本文给出组合投资方案设计的一个线性规划模型, 主要思路是通过线性加权综合两个设计目标; 假设在投资规模相当大的基础上, 将交易费函数近似线性化, 通过决策变量的选取化解风险函数的非线性.

模型的最大优点是: 计算过程稳定性好, 速度快. 我们对各种加权因子, 求得了最优化决策方案, 从而得到问题的有效投资曲线. 根据有效投资曲线, 投资者可以由自己的主观偏好, 直观地选择自己的投资方向.

### 一、问题的提出 (略)

### 二、符号说明

$S_i$ : 第  $i$  种资产 ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ ), 其中  $S_{n+1}$  表示存入银行;  
 $r_i$ :  $S_i$  的平均收益率;  $q_i$ :  $S_i$  的风险损失率;  
 $p_i$ :  $S_i$  的交易费率;  $u_i$ :  $S_i$  购买额阈值;  $M$ : 资金总额;  
 $X_i$ : 投资  $S_i$  占总额的比重 (不含交易费), 以下简称投资;  
 $Y_i$ : 投资  $S_i$  的交易费占总额的比重, 以下简称交易费;  
 $f_1$ : 净收益;  $f_2$ : 总体风险;  $\lambda$ : 权因子.

### 三、模型的建立

#### (一) 基本模型

我们的目标是对各种资产投资以后, 不仅收益尽可能大, 同时总体风险还要尽可能小, 所以我们的目标函数应为收益和风险两个函数. 由于在一段时间内的各种资产的平均收益率和风险损失率均已由财务人员分析了出来, 因此我们可以建立以下数学模型:

$$\begin{aligned} \text{目标1} \quad & \max f_1 = \sum_{i=1}^{n+1} (r_i X_i - Y_i) \\ \text{目标2} \quad & \min f_2 = \max_{1 \leq i \leq n} (q_i X_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n+1} (X_i + Y_i) = 1, \end{aligned}$$

其中

$$Y_i = \begin{cases} 0, & X_i = 0, \\ \frac{u_i}{M} p_i, & 0 < X_i < \frac{u_i}{M}, \\ X_i p_i, & X_i \geq \frac{u_i}{M}. \end{cases}$$

这是一个多目标非线性数学规划模型, 且  $f_1$  不是  $x_i$  的连续函数, 优化求解困难. 下面我们将它转化为一个线性规划模型.

## (二) 线性规划模型

### 1. 目标函数的确定

多目标规划有多种方法化为单目标问题解决. 我们使用线性加权法.

$$\text{总目标函数 } \min f = \lambda f_2 + (1 - \lambda)(-f_1)$$

$\lambda$  反映了风险投资中投资者的主观因素,  $\lambda$  越小表示投资越冒险. 特别地  $\lambda = 0$  表示只顾收益不顾风险, 这样的人有可能取得最大收益;  $\lambda = 1$  表示只顾风险而不顾收益, 这样的人会将所有资金存入银行.

### 2. 交易费函数的线性化近似

本题难点之一是  $Y_i$  不是  $X_i$  的连续函数. 现将  $Y_i$  近似为  $X_i$  的线性函数.

$$Y_i = p_i X_i$$

对阈值以下有一定误差 (图 (略)). 但当投资规模充分大时, 对优化结果不会有明显影响. 一方面, 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 若  $S_i$  的投资很小, 会白白浪费交易费, 对优化不利, 最优解一般不会出现小  $X_i$ ; 另一方面当投资总额很大时, 不足购买费阈值的追加费用对目标函数影响不大.

### 3. 风险函数的转化

令  $X_{n+2} = f_2$ , 那么必有  $q_i X_i \leq X_{n+2}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 由于目标函数优化  $f$ , 从而最优解必可使  $\max_{1 \leq i \leq n} (q_i X_i)$  达到  $X_{n+2}$ . 这样得到线性规划模型

$$\begin{aligned} \min f &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n+1} (p_i - r_i) X_i + \lambda X_{n+2} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} (1 + p_i) X_i = 1, \\ q_i X_i - X_{n+2} \leq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ X_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n+2. \end{cases} \end{aligned}$$

## 四、模型的求解

### (一) 求解方法

本文采用 MATLAB 优化工具箱中的线性规划函数  $lp$  求解. 它优化下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min C^T X, \\ \text{s.t. } AX \leq b \end{aligned}$$

使用格式为

$$X = lp(C, A, b, vlb, vub, X_0, N)$$

其中  $v_{lb}, v_{ub}$  分别是上下界,  $X_0$  为初始值,  $N$  表示约束条件中前  $N$  个约束为等式约束.

## (二) 计算步骤

1. 输入数据, 选取权因子  $\lambda$ ;

2. 生成矩阵  $(C, A, b)$ ;

3. 根据需要取  $v_{lb}, v_{ub}, X_0, N$  (本问题  $v_{lb}$  取零向量,  $N$  取 1,  $v_{ub}$  和  $X_0$  无特殊要求, 置为空集);

4. 使用 MATLAB 函数  $lp$  求解;

## (三) 计算结果及分析

### 1. 投资问题一 (略)

使用上述方法分别求解当  $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  时的最优决策及风险和收益如下:

$S_i$	$\lambda=0\sim 0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1$
$S_1$	0.9901	0.3690	0.2376	0.0000
$S_2$	0.0000	0.6150	0.3960	0.0000
$S_3$	0.0000	0.0000	0.1080	0
$S_4$	0	0	0.2281	0.0000
存银行	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
净收益	0.2673	0.2195	0.2016	0.0500
风险	0.0248	0.0092	0.0050	0.0000

### 2 投资问题二 (略)

使用上述方法分别求解  $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  的最优决策及风险和收益如下

$S_i$	$\lambda=0\sim 0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4\sim 0.5$	$\lambda=0.6\sim 0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9\sim 1$
$S_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0874	0.0000
$S_2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0680	0.0000
$S_3$	0.9434	0.2051	0.1658	0.1269	0.1071	0.0612	0.0000
$S_4$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1531	0.0874	0.0000
$S_5$	0.0000	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_6$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0942	0.0000
$S_7$	0.0000	0.1810	0.1463	0.1119	0.0945	0.0540	0.0000
$S_8$	0.0000	0.0000	0.0000	0.2279	0.1925	0.1100	0.0000
$S_9$	0.0000	0	0.1867	0.1428	0.1206	0.0689	0.0000
$S_{10}$	0.0000	0.3077	0.2487	0.1903	0.1607	0.0918	0.0000
$S_{11}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
$S_{12}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_{13}$	0.0000	0.2676	0.2163	0.1655	0.1398	0.0798	0.0000
$S_{14}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_{15}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1597	0.0000
存银行	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
净收益	0.1094	0.3433	0.3352	0.3205	0.3050	0.2130	0.0500
风险	0.5660	0.1231	0.0995	0.0761	0.0643	0.0367	0.0000

### 3 投资方案分析

(1) 从上面结果得到问题一的四个典型最优组合, 问题二有 7 个典型最优组合. 对于不同风险承受能力, 选择该风险水平下的最优投资组合. 例如: 对问题一, 若风险承受水平是 0.02, 那么取  $\lambda = 0.2$  时的决策方案.

(2) 净收益和风险都是  $\lambda$  的单调下降函数 (图 (略)). 说明谨慎程度越强, 风险越小但受益也越小. 具有明确的实际意义.

(3) 更详细的计算结果见下图. 我们用  $\lambda = 0 \sim 1$  内 300 等分点, 求得最优投资组合集及它们形成的有效投资曲线. 这条曲线上的任一点都表示该风险水平的最大可能收益和该收益要求的最小风险. 实际上我们发现其有效投资曲线是离散的, 问题一只有 5 个最优方案, 问题二只有 13 个最优方案. 其中问题一风险 0.0059 (即  $\lambda = 0.9$ ) 的决策 (0.2376, 0.3960, 0.1080, 0.2284, 0) 和问题二风险 0.0995 (即  $\lambda = 0.3$ ) 的决策 (0, 0, 0.1658, 0, 0, 0, 0.1463, 0, 0.1867, 0.2487, 0, 0, 0.2163, 0, 0, 0) 具有特别重要的意义, 因为它们对应在风险增长较慢情形下最大的收益, 可认为是一般意义上的最优解.

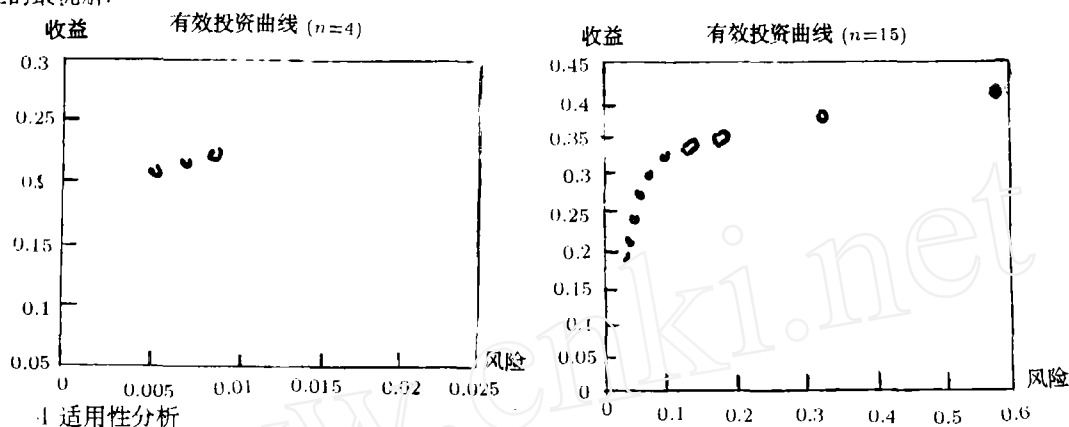


图 1 适用性分析

当  $0 < X_i < \frac{M}{N}$ , 线性规划模型可能不是最优解. 也就是说结果的正确性与  $M$  有关,  $M > (\frac{M}{X_i})$  时必最优, 但  $M < (\frac{M}{X_i})$  时结果不一定可靠. 比如对问题二, 当  $\lambda = 0.3$  时, 这个临界值为 2581; 对问题一,  $\lambda = 0.9$  时, 这个临界值为 500.

## 五、模型的验证 (略)

## 参 考 文 献

- [1] 运筹学, 清华大学出版社, 北京, 1990.
- [2] 赵锡军等, 金融投资学, 中国人民大学出版社, 北京, 1996.
- [3] 施阳, MATLAB 语言工具箱, 西北工业大学出版社, 西安, 1998.