

# 钢管的订购和运输

丁 勇, 薛 斐, 张 振

指导老师: 涂永明 陈恩水

(东南大学, 南京 210096)

**编者按:** 该文针对问题的特点, 提出了最小面积模型, 创造性较强, 求解比较简便. 该文对灵敏度的分析也较为准确, 近似根据线性规划进行分析有一定新意. 该文的几个结果均较为准确, 故部分予以发表.

**摘要:** 本文先利用问题一中铺设线路无分岔的特点, 建立了基于图解法的最小面积模型, 将规划问题转化为使若干折线段下方面积和最小的问题, 通过简单的判别准则, 手工求得最小总费用为 1278631.6 万元, 并对该结果最优性进行了说明. 对问题三参考网络流思想建立了适用于一般铺设路线的非线性规划模型, 用 SAS 得到一个最优方案和最小费用 1406631.4 万元, 并用此模型对问题一的灵敏度进行了准确的定量分析.

## 1 问题的分析

注意到原图中待铺设管道的路线  $A_1 \sim A_{15}$  具有线性结构(无分岔), 这样就可以把生产并铺设单位管道的费用作为纵坐标, 铺设位置作为横坐标表示在一张图中. 该图由七条折线组成, 表示了七个钢厂生产并向管道路线上任意一点铺设单位钢管费用(见图). 购运计划是将  $A_1 \sim A_{15}$  分成若干段, 每一段指定一个厂家生产并铺设钢管. 某一段的相应费用为该厂家对应的折线在这一段上与横坐标轴之间的面积, 而总费用是各段费用之和. 这样就将复杂的规划问题转化成求图形面积最小的问题. 我们完全可以手工求解这个最小面积模型.

考虑到运向  $A_i$  的钢管量等于运离  $A_i$  的钢管量, 再综合产量的约束, 对问题三可以借用网络流的思想建立一个通用的非线性规划模型. 该模型的形式十分便于计算机求解并进行各参数的灵敏度分析.

## 2 模型建立和求解

### 模型一、最小面积模型

首先以铺设管道的长度为横坐标  $x$ , 单位钢管从工厂运输到  $x$  的费用(包括成本和运输费)为纵坐标  $y$ , 做出折线图如下, 考虑到作图的方便, 这里考虑费用连续的情况.

可以看出, 任意一种铺设管道的方案就是选择一条首尾相接的折线(这里相接是指相邻的两部分折线端点的横坐标相等), 它在  $x$  轴上的投影为  $[0, 5171]$  整个区间.

首先要说明的是  $S_4$  厂和  $S_7$  厂不会参与整体的购运计划中, 这是因为对应  $S_4$  的折线高于其他折线(实质就是费用较高), 因而应予以剔除, 而  $S_7$  只可能对  $A_{14}A_{15}$  的供应钢管, 但这样它的供应量却不足 500 单位的下限, 如果强行供应, 将造成成本费用的很大增长; 可以算得若改用  $S_6$  供应, 虽然运费将增加一些, 但是节约的成本更多, 所以改用  $S_6$  代替  $S_7$  为  $A_{14}A_{15}$  提供钢管是经济的.

易知任意一种方案就是它所对应的折线下面的面积. 如果没有产量上界的限制, 最小的费用就是该折线族的下包络线, 对应的费用约在 113 亿元左右. 产量上限约束使得这种



理想的情况无法实现 下面先说明如何在有产量限制的情况下, 合理选取一条首尾相接的折线, 使得折线下面的面积(同时也是这种方案的费用)达到最小 选取方法如下:

先定义  $\Delta_{ij}(x)$  为在地点  $X$  选用工厂  $S_i$  的钢管与选用  $S_j$  工厂的单位钢管的费用差; 定义路线  $L$  为一段或几段路段组成,  $|L|$  表示  $L$  的长度

如图, 在  $A_1C_2$  上考虑  $S_1$ , 因为在  $A_1C_2$  上使用  $S_1$  厂生产的钢管费用最小, 假设它的铺设路线为  $L_1$ , 那么选取  $L_1$  的原则是使  $\int_{L_1} \Delta_{12}(x) dx$  为最大且  $|L_1| = 800$ , 因为  $\Delta_{12}(x)$  是分段线性

函数的差, 所以它也是分段线性函数, 由此不难计算得出  $L_1 = B_3B_4$ , 其中  $B_3 = 1436$ ,  $B_4 = 2236$ ,  $\Delta_{12} = \Delta_{12}(B_4) = 68$ , 易知在  $L_1$  路线以外的  $\Delta_{12}(x)$  值均不大于 68; 实际上, 我们可以进一步得到, 在  $L_1$  上有  $\int_{L_1} \Delta_{1j}(x) dx, j = 2, 3, 5, 6$  都为最大;

因为  $S_1$  的产量已经达到上限, 所以除去  $S_1$ , 在  $A_1B_3 - B_4B_5$  上考虑  $S_2$ , 此段上使用  $S_2$  厂家的钢管将使费用最小, 假设它的铺设路线为  $L_2$ , 那么选取  $L_2$  使  $\int_{L_2} \Delta_{23}(x) dx$  为最大且  $|L_2| = 800$ , 如上所述, 可求得  $L_2 = A_1B_2 - B_4B_5$ , 其中  $B_1 = 500$ ,  $B_4 = 2236$ ,  $B_5 = 2536$ ,  $\Delta_{23}(B_1) = \Delta_{23}(B_5) = 10$ , 易知在  $L_1, L_2$  以外的  $\Delta_{23}(x)$  值均不大于 10, 进一步得到, 在  $L_2$  上有  $\int_{L_2} \Delta_{2j}(x) dx, j = 3, 5, 6$  都为最大;

除去  $S_1, S_2$ , 在  $B_1B_3 - B_5C_4$  上考虑  $S_3$ , 此段上使用  $S_3$  厂家的钢管将使费用最小, 假设它的铺设路线为  $L_3$ , 那么选取  $L_3$  使  $\int_{L_3} \Delta_{3j}(x) dx$  最大且  $|L_3| = 1000$ ,  $L_3 = B_1B_2 - B_5B_6$ , 其中  $B_1 = 500$ ,  $B_2 = 836$ ,  $B_5 = 2536$ ,  $B_6 = 3200$  和  $\Delta_{35}(B_2) = \Delta_{35}(B_6) = 25$ ; 进一步在  $L_3$  上有  $\int_{L_3} \Delta_{3j}(x) dx, j = 5, 6$  都为最大;

除去  $S_1, S_2, S_3$ , 在  $B_2B_3 - B_6C_5$  上考虑  $S_5$ , 此段上使用  $S_5$  厂家的钢管将使费用最小, 且此时产量上限不起约束, 得  $L_5 = B_2B_3 - B_6C_5$ ;

最后, 在  $B_7A_{15}$  上考虑  $S_6$ , 此段上使用  $S_6$  厂家的钢管将使费用最小, 且此时产量上限不起约束, 得  $L_6 = B_7A_{15}$ ;

由以上数据算得该方案的总费用为 1278631.6 万元 (若铺设费用当作公路运输里程的连续函数则为 1278373 万元 下面简称这种情况为连续费用, 按题中的要求为离散费用)

需要补充说明的是, 上述方案为简单起见, 用的是连续费用, 对于离散费用来说如上所示图中的直线段将变为阶梯形的折线, 最小总费用可能会有微小变化, 而实际上由于最优的分配方案中各厂到各点的运输量均为整数或半整数的形式, 使得离散地考虑运费将得到同上一样的分配方案

对于问题二, 我们首先可以利用这张图来清楚地考察哪个钢厂钢管的销价变化对购运计划和总费用的影响最大 直观上讲, 厂家销价的变化使得图中对应于该厂家的那条折线整体向上(销价上涨)或向下(销价下跌)平移, 那么最优解中包含此厂家的费用也将随之变化, 同时, 当在某一段它的销价已经超过另外一个厂家时, 最优的购运计划也将改变; 因此, 要分析哪个厂家的销价对整体购运计划和总费用的影响最大, 只要看在当前的最优解中, 哪

个厂家供应的路线最长,它就是对整体影响最大的。在上述的最优解中, $S_6$  厂供应的路线最长,为 1205 (虽然表面上  $S_5$  提供的钢管数量更多,但是在  $B_6C_2$  之间应视为  $S_5$  与  $S_6$  共同的部分,不应考虑),它就是总费用对其销价最敏感的厂家。另外也可以看出,如果  $S_6$  的销价上涨,在  $A_{11}A_{15}$  之间  $S_6$  将逐步替代厂为此段提供钢管,直至达到产量上限。

要考察哪个厂家  $S_i$  的产量上限变化对整体购运计划和费用的影响最大,应该有  $S_i$  使得  $\Delta_{ij}(x)_{j>i}$  最大,图中明显可以确定是  $S_1$ 。在  $A_1C_2$  上它都位于整个折线族的最下方且可以明确看出它与选用  $S_2$  的费用差别最大,提高  $S_1$  的产量将使  $A_1C_2$  段的费用逐渐降至最小值;同时可以看出在很大范围内,提高  $S_1$  产量将使总费用下降  $\max_{x \in L_1} \Delta_{12} + \max_{x \in L_1, L_2} \Delta_{23} + \max_{x \in L_1, L_2, L_3} \Delta_{35} = 68 + 25 + 10 = 103$ ,即在扩大  $S_1$  产量上限的初期,整体的费用将呈线性下降;同时,新的购运计划中,的比重将会越来越大。其他参数的灵敏度分析可以类似进行。

## 模型二、网络流模型

与问题一不同,问题三中所铺设的管道线路构成树状,而不再是问题一中的线性结构,这增加了问题的复杂程度。我们将提出的网络流模型有较强的通用性,在解决此类复杂问题时更显示出其优越性。

设  $x_{ik}$  表示由  $S_1$  运输至  $A_k$  的,  $M_k$  表示提供给  $A_k$  的钢管总量,  $\overline{A_i A_j}$  表示相邻两点  $A_i$  与  $A_j$  之间的钢管长度。

取  $A_1$  为构成待铺设管道的树的根节点,设任意一个节点  $A_k$  的父节点为  $A_{K_0}$  (或无父节点),其后继节点为  $A_{K_1} A_{K_2} \dots A_{K_N(k)}$ , 共  $N(k)$  个后继节点 (或无后继节点),  $A_k$  向其父节点方向铺设管道量为  $y_k$  (若无父节点则为 0),  $A_k$  的后继节点向  $A_k$  方向铺设的管道量为  $y_{k1} \sim y_{kN(k)}$ 。该问题可化为线性约束的规划问题:

$$\begin{aligned} & \text{Min } F = f_1 + f_2 + f_3 \\ & \text{s.t. } \begin{cases} 0 \leq y_k \leq \overline{A_{j_0} A_k} & K = 3 \sim 21 \\ y_2 = \overline{A_1 A_2} \\ x_{ik} \geq 0 & i = 1 \sim 7, k = 2 \sim 21 \\ M_k = y_k + \sum_{p=1}^{N(k)} [A_{kA_{kp}} - y_{kp}] = \sum_{i=1}^7 x_{ik} & k = 2 \sim 21 \\ 500 \leq \sum_{k=2}^{21} x_k \leq S_i \quad \text{or} \quad \sum_{k=2}^{21} x_{ik} = 0 & i = 1 \sim 7 \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $f_1$  为购买钢管的总成本,  $f_2$  为钢管运输到各站点  $A_k$  ( $k = 2 \sim 21$ ) 的总运输费用,  $f_3$  为以各站点为起点铺设钢管所耗费的总费用。

对模型二,利用 SAS 求解,得到问题三的最小费用  $F^* = 1406631.4$ 。

## 3 通用模型的灵敏性分析

利用前面的通用非线性规划模型中相应参数的小量变化,我们求得以下结果 (各表达式都是在其他参数不变时成立):

$$F = F^* - 103 \times (s_1 - 800) \quad (700 \leq s_1 \leq 900) \quad F = F^* - 35 \times (s_2 - 800) \quad (700 \leq s_2 \leq 900)$$

$$F = F^* - 25 \times (s_2 - 1000) \quad (900 \leq s_3 \leq 1100) \quad F = F^* + 800 \times (p_2 - 160) \quad (145 \leq p_1 \leq 170)$$

$$F = F^* + 800 \times (p_2 - 155) \quad (145 \leq p_2 \leq 165) \quad F = F^* + 1000 \times (p_3 - 155) \quad (145 \leq p_3 \leq 165)$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{\Delta p_5 \rightarrow 0^-} \frac{F - F^*}{\Delta p_5} & 1367 \\ \lim_{\Delta p_5 \rightarrow 0^+} \frac{F - F^*}{\Delta p_5} & 1011 \\ \lim_{\Delta p_6 \rightarrow 0^-} \frac{F - F^*}{\Delta p_6} & 1560 \\ \lim_{\Delta p_6 \rightarrow 0^+} \frac{F - F^*}{\Delta p_6} & 1204 \end{array}$$

(其中  $\Delta p_5$  和  $\Delta p_6$  分别为  $S_5$  与  $S_6$  钢管单价的增量  $F^*$  为问题一的总费用 1.2786 亿元, 六个取值范围只是对应等式成立范围的子集)

由于  $S_4$  与  $S_7$  没有参与生产, 估计它们的钢管单价在一定范围内变小仍不足以使其加入生产行列(经过计算的确如此), 产量上界对规划结果没有影响; 而  $S_5$  与  $S_6$  的产量均未达到上界, 其产量上界变大或一定程度地变小(只要不小于原最优解中的产量)不会对总费用产生影响 这样就列出所有在小范围内变化对总费用有影响的价格和产量上界

$S_1 \sim S_3$  的钢管单价和生产上界在上述范围内变化时均与总费用呈线性关系, 且它们仍都是满负荷生产 一次项系数的大小说明了总费用对参数的敏感程度, 所以  $S_1$  的产量上界的变化对总费用影响最大

$S_5$  与  $S_6$  的钢管单价与总费用之间是非线性关系, 四个取绝对值的差商相应于包含  $p_1 \sim p_3$  的三个式子中的一次项 我们的模型计算表明: 当  $\Delta p_5$  与  $\Delta p_6$  为负且继续减小时, 相应的差商会增大; 当它们为正且继续增大时, 相应差商会减小 综合看来, 应该是  $S_6$  的钢管单价对总费用的影响最大

有趣的是每一组中向前差商与向后差商截然不同, 对此可以给一些粗略的解释:  $S_5$  与  $S_6$  具有使总费用尽可能小的“互助”作用 当其中任何一个厂的钢管单价减小时, 另一个产量减少使前者产量增加, 这样可以使总费用的减少量大于选择原购运计划的总费用的减少量; 一个厂的钢管单价增加时, 另一个产量增加使前者产量减少, 因而使总费用的增加量小于选择原购运计划的总费用的增加量 所以  $\Delta p_5$  与  $\Delta p_6$  为负时的差商大于它们为正时的差商

## 4 近似分析

考虑到模型的目标函数由三部分( $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ )组成, 而  $f_3$  在总费用中所占的比例很小, 购运计划的制定及总费用主要取决于  $f_1$  与  $f_2$ , 而该规划问题中唯一的非线性项在  $f_3$  中, 由此我们可以作一些近似分析, 省略目标函数中的  $f_3$ , 从而成为一个线性规划问题, 而线性规划的灵敏度分析是比较容易的

对于  $P_i$ (单位钢管成本)的灵敏度分析可化为对该线性规划问题的价值系数的灵敏度分析 对于每一个  $P_i$ , SAS 的 LP 过程能求出一个区间  $[\Delta \min, \Delta \max]$ , 使得当在  $P_i$  上作  $P_i$  的浮动且其它  $P$  值保持不变时(其中  $P_i \in [\min, \max]$ ), 最优的分配方案不变 对应区间范围最小的  $P_m$  对最优分配方案的影响最大

### 参考文献:

- [1] 倪 勤 SAS 最优化软件速成. 科学出版社, 1998.
- [2] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材. 湖南教育出版社, 1993
- [3] 钱颂迪 运筹学 清华大学出版社, 1990

# The Order and Transportation of Pipelines

D N G Yong, XU E Fei, ZHANG Zhen

(Southeast University, Nanjing 210096)

**Abstract** We succeeded in drawing up an optimal plan for the order and transportation of pipelines by establishing two models. A diagrammatic model is set up for the first problem in which there is no branch in the track of pipelines. Solution of the problem is then equivalent to the plan that minimizes some area of a special diagram. The idea of flow in network helps to set up a non-linear programming model for the last problem where the track is a tree diagram. The regular form of the model makes it convenient to find the solution by The SAS System. The model is also used to give an accurate sensitivity analysis for the first problem.

## 一类运输问题的建模

费浦生, 赵社峰, 李健

(武汉大学, 武汉 430072)

**摘要:** 本文介绍了 2000 年全国大学生数学建模竞赛 B 题的命题思路, 两种主要的建模与求解方法

### 1 命题的思路

2000 年全国大学生数学建模竞赛的 B 题, 本质上是一类运输问题

运输问题是社会经济生活中经常出现的优化问题。由于实际问题的多样性, 运输问题的模型也是各种各样的。往往涉及到优化领域中的网络优化、线性规划、二次规划、0—1 规划等分支。有些运输问题还涉及非线性规划、随机优化、排队论、时间表问题、库存问题等运筹学的诸多领域。

最简单的运输问题模型就是线性规划中的标准运输问题, 用单纯形法求解此类特殊问题的具体实现就是表上作业法<sup>[1]</sup>。它的存储规模小、求解步骤简单, 是实际中常常遇到的一类模型和方法。

B 题命题的主要动机是结合当前西气东输工程的背景, 让参赛学生综合运用网络优化、线性规划或二次规划和整数规划等方面的知识, 在建模与求解过程中灵活地发挥自身的能力。因此, 题目具有一定的综合性。但是考虑到竞赛只有三天, 题目叙述不宜过长, 数据不宜过多, 竞赛题目对现实的问题作了简化, 主要体现在以下方面

1. 输气管网简化为一条主管道(题目第一小题)。这一简化使问题看起来更明朗, 便于