2022 第二届天府杯全国大学生数学建模竞赛论文

题　　目　　基于单目标规划的选址与调度模型

摘　要：

本文针对军事补给站选址与运输飞机调度问题，通过建立数学模型，研究了不同情况下，军事补给点的选址与运输飞机的调运方案，最后给出了军事补给点的最佳选址与最优的飞机调运方案。

对于问题一，本问题考虑能最大程度给各部队提供支援下求解最优补给点。本文在一轮物资调度中设置物资的满足率和运输时间。将所求的补给点坐标设为决策变量，各点满足率与运输时间乘积之和为目标函数，两架飞机运输的货物总量为约束条件，建立非线性规划模型。为了便于求解，我们省去调度问题，将两架飞机视作运货基地，建立了简化的非线性规划模型。利用 MATLAB 中的非线性规划求解器和遗传算法分别求解简化模型，最终得到最优的补给点为(9.0002,4.9999)。

对于问题二，首先对所有飞机的最大载重量之和与四支部队的总需求量进行了比较，发现无法通过一次调运就完成补给任务，因此本题需要考虑多架次，多型号飞机的动态调度问题。本文通过两轮决策完成调运任务，在第一轮的调运决策模型中，以各架飞机的飞行路径为决策变量，以消耗吨千米数最小为目标函数，以所有飞机全部出发、每架飞机只能飞往一支部队、各支部队的配送货物不超过需求量的 150%、配送时间不超过最晚需求时间为约束条件；在第二轮调运决策模型中，将目标函数更改为总体耗时最短，约束条件更新为：补给站仅能调用当前时刻已飞回的飞机每架飞机只能飞往一支部队、各支部队的两轮配送量之和应大于等于需求量且不超过需求量的 150%、最终用时不超过最晚需求时间。根据 0-1 规划的思想，构建两轮的单目标规划模型。并利用 MATLAB 进行求解，最终得到最佳的飞机调运方案，具体结果见图 6。

对于问题三，是在问题二的基础上更新了部队所能接受的最大需求量，并引入了运送损耗率这一因素，但是从模型的角度看，模型并未产生结构的变化。基于实际运送过程损耗率的随机性，本文先根据题设数值将损耗率设置为了服从均匀分布的随机变量，并引入至问题二的模型中；然后更新了部队所能接受最大补给量的约束条件。并编写 MATLAB 程序进行求解，由于损耗率的随机性，所以本问通过多次运行代码后找到了最佳的具有普适性的调运方案，具体结果见图 9。

最后，本文进行了模型检验，首先分析第一问中所求补给点对各部队物资满足度和距离的合理性，然后分析第三问中的调运方案能否满足损耗率取极端值时的情况，证明了该方案能够高效地完成配送任务。同时，我们也对模型的优缺点进行了评价。

关 键 词： 0-1 规划模型、非线性规划模型、遗传算法、均匀分布

一、问题重述

回顾近些年以来的地区冲突，尽管坦克、步战车、自行榴弹炮等装备在战局中有很大的影响力，但我们不难发现在现代的战争中依然是以人为主的战争。古人有云：“兵马未动，粮草先行”，在战争中，是否拥有一个强有力的后勤补给依然是能否打赢一场战争的关键一环。作战任务中，士兵携带的口粮和弹药量有限，如果陷入了持久战中，便需要后勤部队及时调配补给物质来进行支援。

补给站有 A、B 两种型号的飞机，A 类飞机有 6 架，最大载重 13 吨，飞行速度 260km/h；B 类飞机有 10 架，最大载重 20 吨，飞行速度 50km/h。现因军情需要，补给站需要调度飞机进行以下任务：

1、在仅仅考虑能最大程度给各个部队提供支援的前提下，根据各个部队的坐标点，建立合适的数学模型以确定新补给站的修建地点。

2、新的补给站修建的坐标为(10,30)，需要建立一个数学模型来完成飞机的调配工作。

3、接上级要求，部队在前往下一个任务点时不能携带超过所需数量 110%的物资，且在搬运过程中会有一定的物资损耗，A 类飞机会损耗 5%-10%，B 类飞机会损耗 3%-7%。需要请建立数学模型确定转运方案。

二、问题分析

（一）问题 1 的分析

在问题一中，题目要求根据各个部队的坐标点来确定新的补给站修建地点，且仅考虑最大程度上给各个部队提供支援。所以我们为了简化问题，在这里仅考虑一轮 A、B 飞机运输物资对各部队的满足率，而不考虑多轮飞机的调度。在简化后，我们依据满足率和时间构建了一个优化模型，在 MATLAB 中调用 fmincon 函数、遗传算法等算法求解出最佳位置。

（二）问题 2 的分析

问题二要求在已知补给站点为(10,30) 的前提下，建立一个数学模型来完成飞机的补给调配工作。由题中所给的信息可知，4 支部队的所有所需补给为 330 吨，而所有飞机一次所能运输的补给量为 273 吨，由此可知，在进行补给时，部分飞机需要出动不止一轮。并且第 2 次运输补给物资的飞机调配情况受第 1 次补给时飞机调配影响。因此，可以建立起基于 01 规划的多次决策模型来对问题进行求解。

（三）问题 3 的分析

问题三在问题二的基础上，结合了现实的情况，增加了部队携带的物资限制要求以及两种飞机在运输补给过程中补给的损耗情况，要求在此情况下建立数学模型确定飞机转运补给的方案。由此我们可以在第二问模型的基础上进行改进，引入物资损耗率，利用 MATLAB 中 optimproblem 函数进行求解。

三、模型假设

1. 假设在进行补给的任务中，所有飞机性能良好，在飞行任务途中没有发生意外，没有飞机被击落或因各类故障无法起飞。
2. 假设在执行任务时，天气状况良好，所有飞机均能起飞且起飞后均以题中给定的速度匀速飞行。
3. 假设飞机的起降用时已经计入物资装卸时间内。
4. 假设物资投放结束后飞机立即返航。
5. 假设补给点物资充足，能满足所有部队的物资需求。
6. 补给站不限制一次性起飞数量，所有飞机均可同时起飞。

四、定义与符号说明

序号	符号	符号含义
1.	W_{i1}	设在一轮中第i个部队接受到的物资量
2.	α_i	第i个部队对于一轮物资的满足率
3.	$T_{B,i}^{one-way}$	B 型飞机单程飞行时间
4.	$T_{A,i}^{one-way}$	A 型飞机单程飞行时间
5.	DEM_i	第 i 支部队的所需物资量
6.	T_i^{round}	往返总共的所需时间
7.	T^{load}	飞机的装货时间
8.	T^{unload}	飞机的卸货时间
9.	T^{fly}	飞机的飞行时间
10.	$W_{\mathrm{i}}^{(k)}$	表示第 k 批次飞往 i 地携带的物资量
11.	$T_{fact,i}$	完成一次补给的实际消耗时间
12.	$SR_j^{(K)}$	第 j 架飞机第 K 次出行时的装运损耗率

五、模型的建立与求解

5.1 模型的准备

相关指标的计算：

a. 补给站与部队的距离

$$d_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

其中，d_i代表第 i 支部队与补给站的距离，(x,y)表示补给站的位置坐标，(x_i,y_i)表示第 i 支部队的位置坐标。

b. 飞行时间

单程飞行时间：

$$T_{A,i}^{one-way}=T_A^{load}+T_{A,\ i}^{fly}+T_A^{unload}$$
$$T_{B,i}^{one-way}=T_B^{load}+T_{B,i}^{fly}+T_B^{unload}$$

往返飞行时间：

$$T_{A,i}^{round}=T_A^{load}+2T_A^{fly}+T_A^{unload}$$
$$T_{B,i}^{round}=T_B^{load}+2T_B^{fly}+T_B^{unload}$$

其中，$T_{A,i}^{one-way}$，$T_{B,i}^{one-way}$ 为 A, B 两型飞机的单程飞行时间 $T_{A,i}^{round}$，$T_{B,i}^{round}$ 为 A, B 两型飞机的往返飞行时间，T_A^{load}，T_B^{load} 为 A, B 两型飞机的装货时间 T_A^{unload}，T_B^{unload} 为 A, B 两性飞机的卸货时间，T_A^{fly}，T_B^{fly} 为 A, B 两型飞机的飞行时间。

c. 飞机运行状态

设 i=1, 2, 3, 4 分别为 A102, A122, A121, A404 四支部队，A_{ij}，B_{ij} 分别表示 A, B 两型飞机的第 j 架飞机是否飞往 i 地点。引入 0-1 变量。

$$A_{ij}=\begin{cases}0 & ,\text{第j架A飞机不飞往i 部队}\\ 1 & ,\text{第j架A飞机飞往i 部队}\end{cases}$$

$$B_{ij}=\begin{cases}0 & ,\text{第j架B飞机不飞往i 部队}\\ 1 & ,\text{第j架B飞机飞往i 部队}\end{cases}$$

d．部队收到的货物量：

$$W_{\mathrm{i}}^{(k)}=\sum_{\mathrm{j=1}}^{6}\left(A_{\mathrm{ij}}\cdot w_A\right)+\sum_{\mathrm{j=1}}^{10}\left(B_{\mathrm{ij}}\cdot w_B\right)$$

其中，$W_{\mathrm{i}}^{(k)}$ 表示第 k 批次飞往 i 地携带的物资量，w_A，w_B 表示 A,B 两型飞机的最大载重量。

e. 需求量的满足

定义符号变量 sign，当第 i 支部队收到的货物量满足需求量时为 1，否则为 0

$$sign=\begin{cases}1 & ,w_i>DEM_i\\ 0 & ,w_i<DEM_i\end{cases}$$

5.2 问题一的建模与求解

5.2.1 模型建立

模型 I（考虑调度的非线性规划模型）：

在第一问中仅考虑一轮 A、B 飞机运输物资对各部队的满足率和时间。

设寻找的补给点为(x,y)。

设在一轮中第i个部队接受到的物资：

$$W_{i1}:\ W_{i1}=\sum_{j=1}^{2}A_{ij}\bullet w_A+\sum_{j=1}^{2}B_{ij}\bullet w_B$$

第i个部队对于一轮物资的满足率：

$$\alpha_i=\frac{W_{i1}}{DEM_i}$$

由于对于第i个部队来说，由于$v_A>v_B$，所耗费的时间$T_{B,i}^{one-way}>T_{A,i}^{one-way}$。因为仅仅考虑一轮调度，为了简化问题，如果对于第$i$个部队有 B 类飞机调度，将一轮飞机到第$i$个部队耗费的时间设为$T_{B,i}^{one-way}$，如果只有 A 类飞机调度，将一轮飞机到第$i$个部队耗费的时间设为$T_{A,i}^{one-way}$。

一轮飞机到第i个部队耗费的时间为：

$$T_i=\begin{cases}T_{B,i}^{one-way},\text{若 }B_{ij}>0\\ T_{A,i}^{one-way},\text{若}B_{ij}=0\text{且}A_{ij}>0\end{cases}$$

依据满足率和耗费时间建立有约束的非线性规划模型如下：

建立模型的目标函数：

$$\min\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i T_i$$

建立约束条件如下：

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{4}A_{ij}<=1\\ \sum_{i=1}^{4}B_{ij}<=1\\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}A_{ij}=6\\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}B_{ij}=10\\ x,y\ge 0\end{cases}$$

要求得补给站的位置使得$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i T_i$最小，但是所建立模型是一个优化+非线性规划模型，变量维数较多，要求解是极为复杂的，为了便于求解我们将模型 I 继续简化。

5.2.2 模型的改进

模型 II（简化的非线性规划模型）：

在模型 I 的基础上，不妨将 A、B 两种飞机运输的总量看作两个坐标相同的定量补给站，接下来我们就不用考虑飞机调度问题，仅仅考虑向各部队分配的物资量与时间的关系即可。由于时间和距离是正相关的，直接将问题简化为定点分配物资量和距离的关

系即可。

由于一轮运输量$\sum_{i=1}^{4} W_{i1}$小于所有基地的需求量$\sum_{i=1}^{4} DEM_i$，所以这里必须 A、B 的总运输量要分配完毕。并且为了满足各个部队的需求，把有限的资源发挥最大的利用率，我们的满足率应该α_i小于等于 1。

在简化模型中，第i个部队的接收量为$W_{i1}=W_{iA}+W_{iB}$，其中W_{iA}为 A 补给站向第i个部队补给量，其中W_{iB}为 B 补给站向第i个部队补给量。

据以上分析，可以建立简化的有约束的非线性规划模型：

建立目标函数如下：

$$\min \sum_{i=1}^{4} \alpha_i d_i$$

建立约束条件如下：

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} W_{iA} = 13\times 6 = 78 \\ \sum_{i=1}^{4} W_{iB} = 10\times 20 = 200 \\ 0 \le \alpha_i \le 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

5.2.3 模型的求解

(i) 基于求解器的求解方法

该方法是基于 MATLAB 中的 fmincon 函数，主要步骤为：

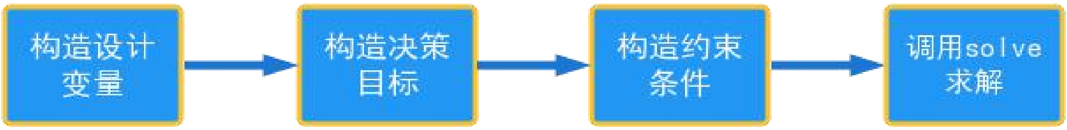

图 1：模型求解的主要步骤

将构造的模型利用此方法可算得，补给站的坐标为：$(9.0002, 4.9999)$。但是在 MATLBA 中，fmincon 函数求解非线性规划问题时容易陷入局部最优解，下面我们将继续用遗传算法进行全局寻优。

(ii) 基于遗传算法的全局寻优求解方法[1]

遗传算法是模拟达尔文生物进化论的自然选择和遗传学机理的生物进化过程计算机模型，是一种通过模拟自然进化过程搜索最优解的方法。其基本过程如下：

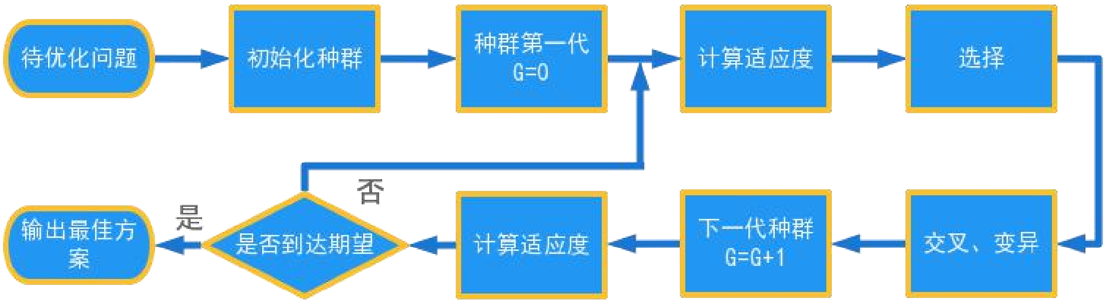

图 2：遗传算法的求解流程图

将 x, y 作为两个基因点位，使用遗传算法，得到的迭代过程如下图所示：

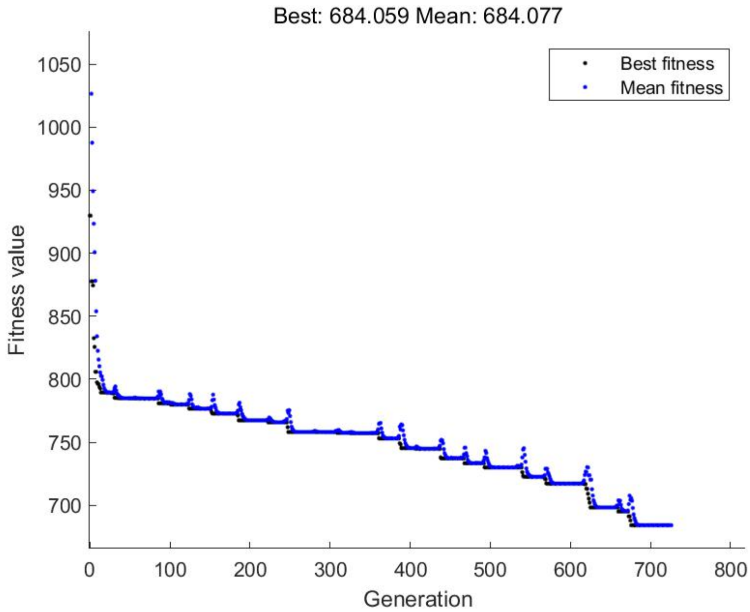

图 3：求解遗传算法的迭代情况

由分析可知在迭代到 723 代时结果达到收敛。此时得到的补给点坐标为 $(9.0002, 4.9999)$。

（3）模型的结果

对以上两种方法分析，所得到的两个补给点坐标基本相同。下面为补给点和各部队的平面坐标可视化：

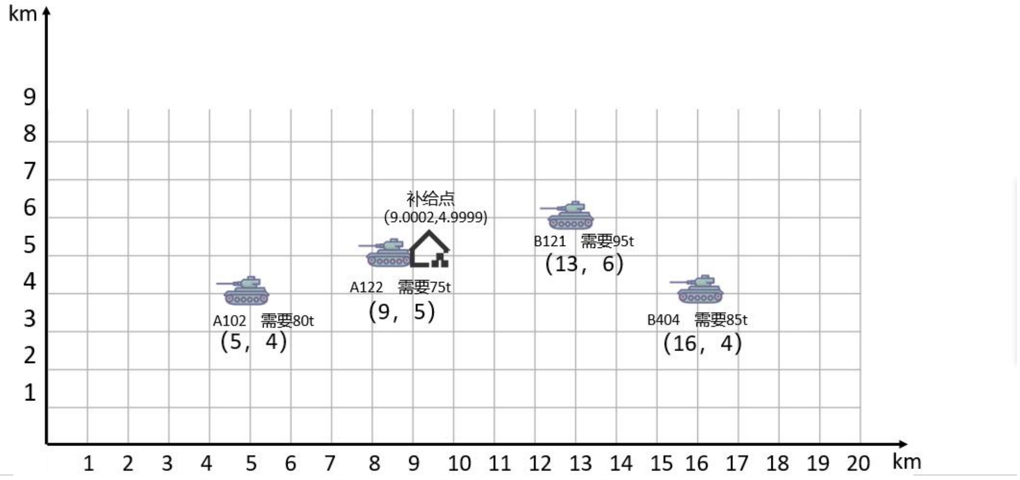

图 4：补给点坐标和各部队的平面坐标示意图

5.3 问题二的建模与求解

本问主要是基于新补给站被修建的位置(10,30)，建立模型来确定飞机的调度方案。补给站在进行飞机调度时，需要综合考虑补给站当前时刻现有 A, B 两种型号飞机的数量，飞机的运行速度，飞机的最大载重重量，以及各个部队的物资需求量及最短需求时间。

通过参考文献，军事补给站的调度方案应遵循快速性，可行性，高效性，系统性，科学性。因此，飞机调度方案应该遵循在最短时间内满足部队需求的原则。在建立模型前，我们同样先将四支部队以及补给站的大致坐标放入坐标系中，以及在坐标系中标明各支部队所需要的物资数量[2]。

在本问题中，本文首先粗略地计算了机场所有飞机同时满载起飞时的最大运输重量为 278 吨，四支部队的总需求量为 330 吨，二者之差为 52 吨。初步分析可知，补给站只进行一轮飞机调度是无法满足四支部队的所有需求的。因此，需要进行多轮调度。基于分析，我们建立了多轮决策的 0-1 规划模型，计算得出飞机调度方案。

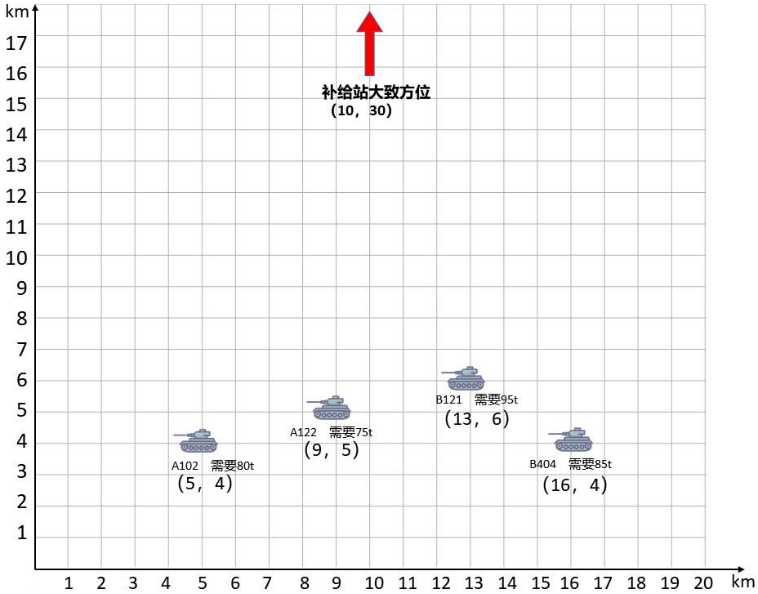

图 5：补给点与各部队坐标的大致示意图

5. 3. 1 问题二模型的建立

（1）第一轮调配的决策模型：

上文已经分析，即使飞机“满载倾巢出动”也无法一次性满足四支部队的所有需求，因此需要进行多架次的飞行。为了最大限度的发挥补给站的飞机运载能力，基于补给站可以同时起降多架次飞机的假设，在第一轮飞机调配时我们要求所有飞机同时满载起飞，飞往不同的部队。

通过查阅相关文献[3]，吨千米数时衡量运输效率的重要指标。当运输重量确定时，通过合理规划，使吨千米数最小化可以使整个运输过程的损耗型变量降到最低。

在第一轮决策中，由于运输总重量已经确定，所以吨千米数只取决于所有飞机的飞行距离，而飞机的飞行距离直接受调度方案的影响，因此飞机的调度方案会间接地影响吨千米数。而飞行时间可以被看作成一个损耗型变量，在我们实现吨千米数最小化的同时，也将间接地降低整体的运输时间，使各架次飞机在最短时间内完成第一轮配送任务并返回至补给点，以供补给站进行下一轮调运，从而实现运送效率的最大化。

通过以上分析，我们以吨千米数最小化为目标：

$$\min \sum_{i=1}^{4} W_i^{(1)} \cdot d_i$$

由于每架飞机只能飞往一支部队，设置等式约束：

$$\sum_{i=1}^{4} A_{ij} = 1, (j = 1 \ldots 6)$$

$$\sum_{i=1}^{4} B_{ij} = 1, (j = 1 \ldots 10)$$

所有飞机“倾巢出动”，设置等式约束条件：

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} A_{ij} \le 6$$

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{10} B_{ij} \le 10$$

由题设所知，每支部队最大接受 1. 5 倍的需求量，设置不等式约束：

$$0 < w_i < 1.5DEM_i$$

由题设可知，每支部队都有最晚需求时间，设置不等式约束：

$$T_{fact,i} < t_i$$

进一步将第一轮规划模型进行汇总，目标函数为：

$$\min \sum_{i=1}^{4} W_i^{(1)} \cdot d_i$$

约束条件为：

$$
s.t.\begin{cases}
\sum_{i=1}^{4} A_{ij} = 1 \quad, j = 1.......6 \\
\sum_{i=1}^{4} B_{ij} = 1 \quad, j = 1......6 \\
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} A_{ij} \le 6 \\
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} B_{ij} \le 10 \\
0 < w_i < 1.5DEM_i \\
T_{fact,i} < t_i
\end{cases}
$$

（2）第二轮目标函数的确定

分析飞机运输能力和部队需求量的关系，第一轮调度完成后，已完成大部分的物资运输，第二轮只需要运送少量物资来补足尚满足需求的部队，这显然不需要所有飞机同时出动[4]。

在第二轮的调配中以整体消耗时间最小为目标函数：

$$\min \max_i \{T_i\}$$

由于经过第一轮运输之后，部分部队已经满足需求量，因此无需继续配送，设置等式约束为：

$$\sum_{j}^{6} A_{ij} + \sum_{j}^{10} B_{ij} = 0 \quad (sign_i = 1)$$

由于每架飞机最多去一支部队，设置不等式约束：

$$\sum_{i=1}^{4} A_{ij} \le 1, (j = 1...6)$$

$$\sum_{i=1}^{4} B_{ij} \le 1, (j = 1...10)$$

由于补给站飞机数量有限，设置不等式约束：

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} A_{ij} \le 6$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} B_{ij} \le 10$$

第二次调配后所有部队等应满足需求，设置不等式约束：

$$DEM_i < W_i^{(1)} + W_i^{(2)} < 1.5DEM_i$$

设置时间约束：

$$T_{Total,i} < t_i$$

进一步将第二轮规划模型进行汇总，第二轮飞机调配规划的目标函数为：

$$\min \max_i \{T_i\}$$

约束条件如下：

$$s.t\begin{cases}\sum_{j}^{6} A_{ij} + \sum_{j}^{10} B_{ij} = 0, (sign_i = 1) \\ \sum_{i=1}^{4} A_{ij} \le 1, (j = 1...6) \\ \sum_{i=1}^{4} B_{ij} \le 1, (j = 1...10) \\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} A_{ij} \le 6 \\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} B_{ij} \le 10 \\ DEM_i < W_i^{(1)} + W_i^{(2)} < 1.5DEM_i \\ T_{Total,i} < t_i \end{cases}$$

5.3.3 模型的求解

飞机的调用方案模型实际上是由两轮的飞机调用模型组成，每一轮的调用方案受到上一轮调用方案的影响，因此在模型求解时，先求出第一轮的飞机调用方案，在基于第一轮的结果，更新四支部队的需求量，作为第二轮模型求解的基础。

在求解调用方案时，基于题目信息设定初始条件。编写程序，利用 MATLAB 中 optimproblem 函数进行求解。

求解结果如下：

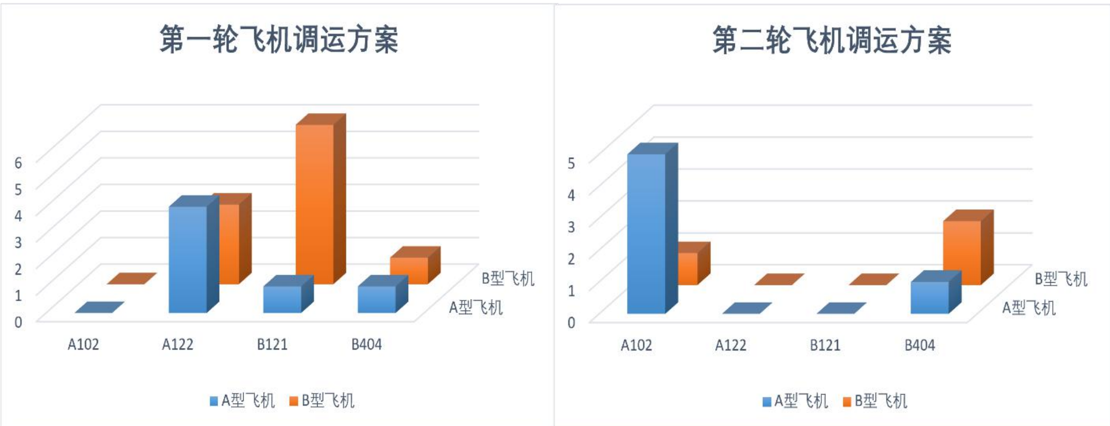

图 6：求解得出的飞机调度方案可视化图

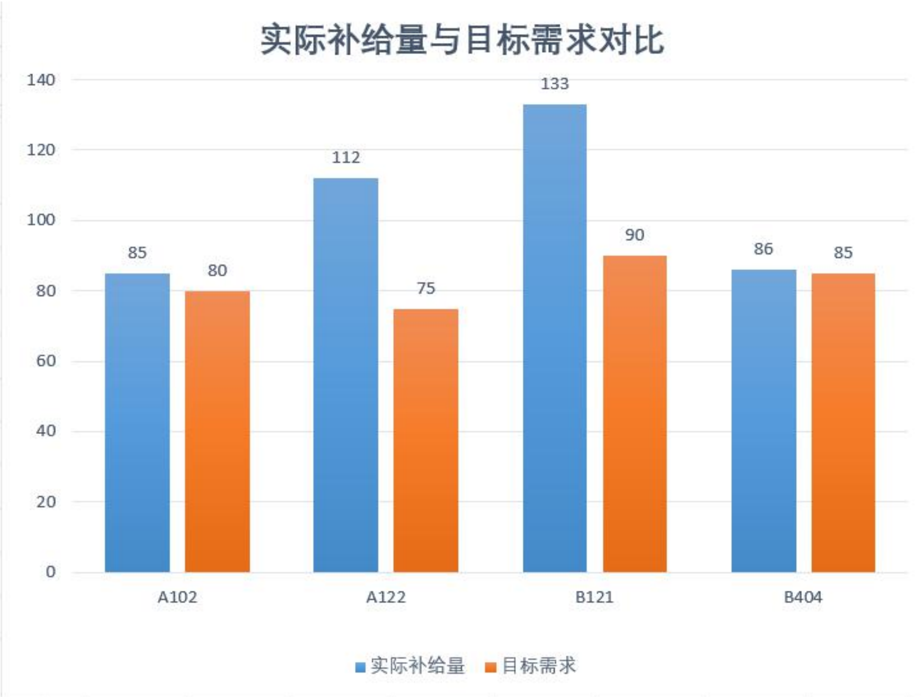

图 7：求解得出的部队接收物资与所需物资可视化对比图

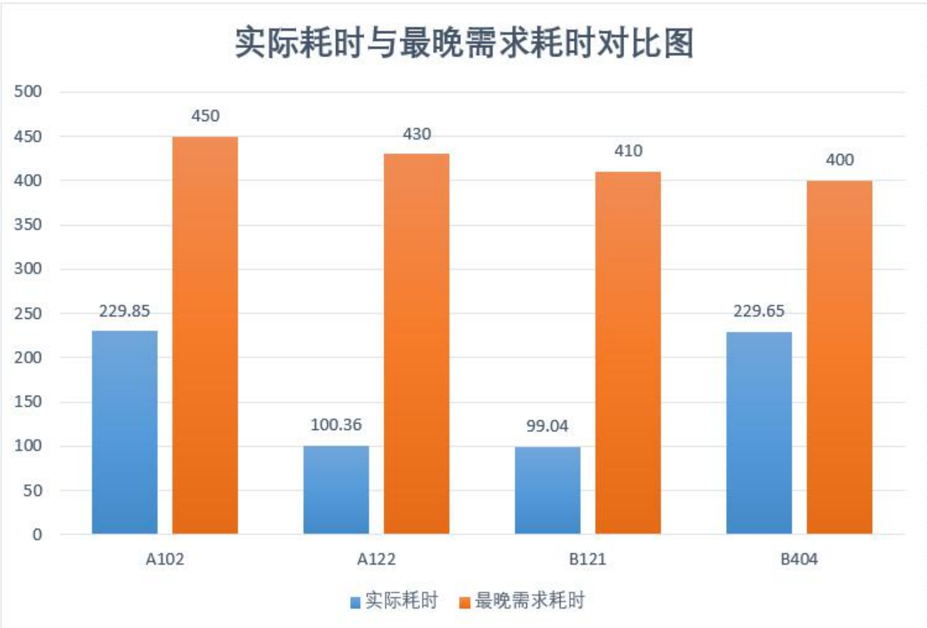

图 8：求解得出的部队接收物资实际用时和最晚需求用时可视化对比图

结果显示，第一轮飞机调运中，飞往 A102, A122, B121, B404 的 A 类飞机分别为 0，4，1，1 架，B 类飞机分别为 0，3，6，1 架。计算可知，飞往 A122 和 B121 的飞机最对，均为 7 架，这是因为 A122, B121 距离补给点在这四支部队中时最近的，在第一轮决策中，决策模型会尽可能多的向这两支部队调运飞机，以实现吨千米数的最小化。这与我们的期望一致，因为尽可能多的优先向距离近的部队调运飞机不仅可以完成部队的

供应需求外，这些飞机还可以尽快的返回至补给点供第二轮飞机调运模型使用，以实现效率的最大化。

第二轮飞机调运中，飞往 A102, A122, B121, B404 的 A 类飞机分别为 5，0，0，1 架，B 类飞机分别为 1，0，0，2 架我们发现飞机并未全部出动，这是因为在第一轮飞机调运中，部分部队已经提前完成了补给任务；同时，我们发现，第二轮中模型尽可能多的使用了 A 型飞机，这是因为我们第二问将时间最短作为目标函数，而 A 型飞机飞行速度快，因此，第二轮决策中优先使用了 A 型飞机。

从部队实际获得的补给量上看，所有部队均得到了期望内的补给量。

从完成补给所消耗时间上看，四支部队均在规定时间内完成了补给，且实际完成时间远低于规定时间。

综上所述，证明了问题二所建立模型的合理性。

5. 4 问题三模型的建立与求解

问题三是在第二问的基础上，进一步减少了部队所能接收的物资量上限，即将原本不能携带超过所需数量 150%的物资改为不能携带超过所需数量 110%的物资；同时，又结合运输实际情况，引入了损耗率。因此，问题三的飞机调用方案模型可以在问题二模型的基础上进行进一步改进[5]。

5. 4. 1 模型的更新

a. 部队接收量的更新

在第二问中，由于装运是以“理想化”的方式进行，即运输过程中不会出现损失。基于所有飞机均满载的假设，部队接受到每架的货物量均为定值：w_A, w_B。但是在本问中，运输过程中出现了损耗，且每班飞机的装运损耗率是随机的。

基于 A, B 两型飞机每次运输的损耗率是在题设范围内连续随机均匀分布，即：

$$SR_{A,j}^{(K)} \sim U(5\%,10\%)$$

$$SR_{B,J}^{(K)} \sim U(3\%,7\%)$$

$SR_{A,j}^{(K)}, SR_{B,j}^{(K)}$ 为第 j 架 A, B 机型第 K 次出行时的装运损耗率。

所以，部队收到的货物量更新为：

$$W_{\mathrm{i}}^{(k)} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{6}\left(A_{\mathrm{ij}} \cdot w_A \cdot (1 - SR_{A,j}^{(K)})\right) + \sum_{\mathrm{j=1}}^{10}\left(B_{\mathrm{ij}} \cdot w_B \cdot (1 - SR_{A,j}^{(K)})\right)$$

b. 最大接收上限度的更新

由于题设将原本不能携带超过所需数量 150%的物资改为不能携带超过所需数量 110%的物资，因此约束条件需更新为：

$$DEM_i < W_i^{(1)} + W_i^{(2)} < 1.1DEM_i$$

5. 4. 2 模型的求解

飞机调运方案模型虽然存在一定更新，但是从模型的角度看，模型并为产生结构的变化，因此同样可以考虑使用 MATLAB 中的 optimproblem 函数进行求解。

由于此模型中损耗率具有随机性，因此每次运行程序可能会出行不同的结果，但经过多次运行程序后发现，虽然每次部队实际接收到的物资量发生变化，但 A, B 两型飞

机的调配方案是一样的。因此，此调配方案仍具有普适应。

求解结果如下：

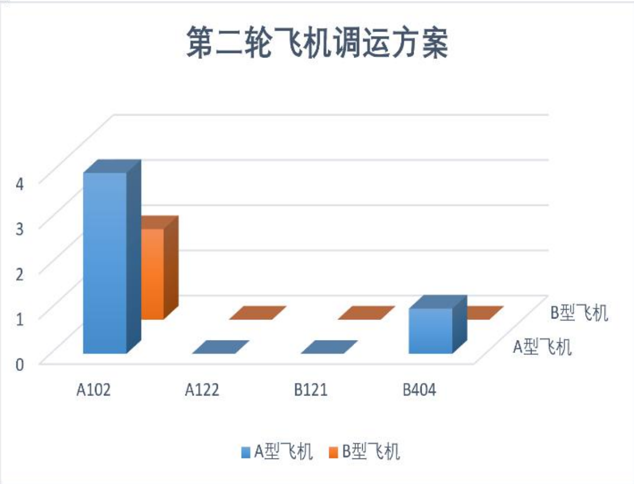

图 9：两轮飞机的调配方案可视化图

图 10：求解得出的有损耗后部队接收物资与所需物资可视化对比图

图 11：求解得出的有损耗后部队接收物资实际用时和最晚需求用时可视化对比图

结果显示：第一轮飞机调运中，飞往 A102, A122, B121, B404 的 A 类飞机分别为 0, 2, 2, 2 架, B 类飞机分别为 0, 3, 4, 3 架。第二轮飞机调运中，飞往 A102, A122, B121, B404 的 A 类飞机分别为 4， 0， 0， 1 架， B 类飞机分别为 2， 0， 0， 0 架。

从部队实际获得的补给量上看，所有部队仍均得到了期望内的补给量。

从完成补给所消耗时间上看，四支部队均在规定时间内完成了补给，且实际完成时间仍远低于规定时间。

虽然对问题三模型进行了一定程度上的更新，但最终依然得到令人满意的结果，这也一定程度上说明了我们所建立模型的合理性以及普适性。

由于第三问的损耗率是在题设值域内均匀分布的随机数内进行取值，虽然很好的表现了显示场景运输的不确定型，但第三问得出的结果很有可能具有一定的偶然性，因此在下文的模型检验中对第三问的模型做了进一步分析。

六、模型检验

6. 1 补给站选址的模型检验

在解决问题一的过程中，解出坐标的同时解决了一轮的分配方案、满意度和距离，下面将对这两个方面进行分析。

6. 1. 1 分配方案、满意度的合理性

由于 fmincon 函数对于初始解的不同，解出的分配方案和满意度也不同。取 10 组不同的初始坐标，将所得到的分配方案和满意度取均值，数据如下（经过保留小数处理，详细数据见附件）：

表 1：各部队的分配方案和满意度

	W_{iA} 均值	W_{iB} 均值	W_{i1} 均值	α_i 的均值
A102	19.98	51.33	71.32	89.15%
A122	16.04	45.07	61.11	81.49%
B121	23.64	50.02	73.66	81.85%
B404	18.32	53.56	71.89	84.57%

通过分析表格数据，我们发现四个部队的满足率 α_i 均大于 81%，所以可以尽可能的满足各个部队的需求量。这就验证了所求补给站坐标的满意度合理性。

6.1.2 距离的合理性

费马点为到平面 n 个点距离最小值的点。Matlab 中的 fminsearch 函数使用无导数法来计算无约束的多变量函数的最小值[6]。利用 fminsearch 函数来寻找对于部队 A102、A122、B121、B404 的费马点。结果如下：

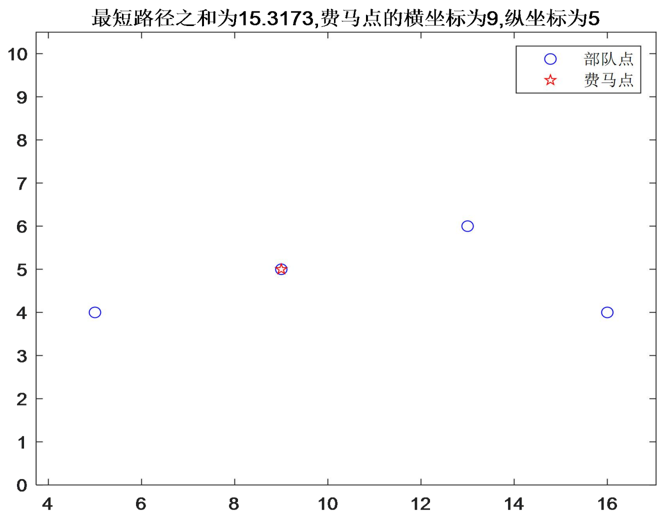

图 12：费马点示意图

由程序、图形可知，四个部队点的费马点为 $(9,5)$。这与我们求出的补给站的坐标 $(9.0002,4.9999)$ 误差极小，也就是可以近似认为求出补给站坐标为费马点。这说明所求出补给站的位置到四个部队点是平面中到四个部队距离最小的点，这就验证了补给站位置的距离和理性。

6.2 问题三模型检验

对于问题三，本文是将损耗率定义成为了服从均匀分布的随机变量，多次运行模型寻找出具有普适性的飞机调运方案。但是由于时间原因，我们的试验次数并不多，无法保证最终得出的飞机调运方案具有较高的可信度，为了避免我们得出的调运方案具有偶然性，我们分别取题设所给损耗率范围的最大值与最小值进行研究，将结果可视化后进

行对比：

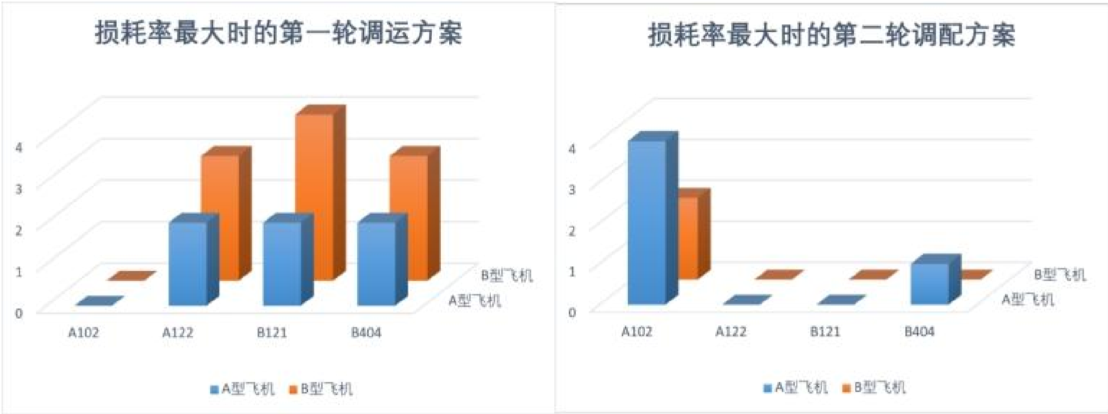

图 13： 损耗最大时的飞机调配方案

图 14： 损耗最大时的飞机调配方案

分析发现：当损耗率取最大值时：飞机的调运方案与问题三所得结果相同。这虽无法证明问题三所得方案是效率最高得方案，但可以证明问题三所得方案可以满足损失率最大得情况，即问题三所得方案一定可以保证在规定时间内满足四支部队得物资需求。

下面我们又分析了损耗率最小得情况：结果表明，当损耗率取最小值时，模型运行地结果与问题三并不一样，区别主要体现在第二轮调运时，B404 已经在第一轮运输中提前满足了物资需求，即第二轮不用在向此部队派送飞机而问题三所求得得方案在第二轮时将派一架 A 型飞机飞往 B404 部队。

综上所述，问题三求解得模型可以在规定时间内满足所有部队得物资需求，但并不是最佳的运输策略。

七、模型评价与推广

7.1 模型的优点

1、求解补给站选址问题时利用了多种算法，结果可靠性强。
2、每轮调配飞机时采用了不同的决策模型，增强了调运的效率。
3、问题三中将损失率设置为了服从均匀分布的随机变量，更贴近现实情况。

7.2 模型的缺点

1、本文中所建立的模型在建模时对条件做了一定的理想化假设，未能合理考虑现实中的各类不确定因素，使得模型的后续实际推广有了一定的困难。
2、问题一中建立的模型一较为复杂，求解困难。
3、问题二的求解过程中飞机的起飞重量均设置为了满载，忽略了实际情况下可能造成的资源浪费,经济性弱。

7.3 模型的推广

从实践意义上来说，本文建立的解决物资补给问题模型具有一定的推广价值。本文所建立的模型不仅能够适用于军事运输领域的物资补给调配，也适用于生产生活领域。本文中所建立的模型能够高效的解决企业的工厂/物流存放点等选址运输问题；也可以解决企业在生产运输中运输物资的运力调配问题，帮助企业减少在物流中所耗费的成本。我国是一个自然灾害频发的国家，本文中的模型也可以适用于救灾赈灾方面，以帮助政府合理调配物资和运力，让灾区百姓尽早恢复正常生活。

八、参考文献

[1]韦凌云,柴跃廷,赵玫.不等式约束的非线性规划混合遗传算法[J].计算机工程与应用,2006(22):46-49+65.
[2]曹冠平,王跃利,丁茜.战时物资配送模型及算法研究[J].计算机与数字工程,2020,48(01):25-28+82.
[3]谢雪梅,杨家其.带时间窗的整车多式联运路径优化模型研究[J].武汉理工大学学报(交通科学与工程版),2017,41(06):1061-1065.
[4]李树学,楚振云.汽车运输中往返重载方案的提出[J].露天采煤技术,2001(02):21-23.
[5]张泉先,曾斌,李厚朴.海况影响下的分布式海战补给路径规划方法[J].系统工程与电子技术,2020,42(10):2312-2319.
[6]Toblerone_Wind. Matlab 实现搜索费马点-求到多个点距离之和最小的点[EB/OL]. [2022.3.20].https://blog.csdn.net/qq_42276781/article/details/11835603

九、附录

文件：B190fj.zip
包含文件夹：
1. 问题一代码：
求解器：包含问题一第一种方法 MATLAB 求解代码。
遗传算法：包含问题一第二种方法 MATLAB 求解代码。
费马点寻找：包含问题一结果分析的费马点寻找 MATLAB 代码。
结果：包含补给点坐标的 EXCEL 文件、结果分析运输方案和满足率均值 EXCEL 文件。
2. 问题二代码：
T2S1：问题二第一轮运输的 MATLAB 求解代码。
TSS2：问题二第二轮运输的 MATLAB 求解代码。
3. 问题三代码：
T2S1：问题三第一轮运输的 MATLAB 求解代码。
TSS2：问题三第二轮运输的 MATLAB 求解代码。