



西北农林科技大学

# 2018第八届MathorCup高校数学建模挑战赛 特等奖答辩——C题

答辩人：黄文哲

指导教师：解小莉

团队成员：黄文哲 任明阳 朱玉华



# 答辩主要内容



**第一部分**  
问题分析



**第二部分**  
条件分析



**第三部分**  
模型假设



**第四部分**  
模型方法



**第五部分**  
模型评价





## 问题分析



## 问题的性质

### 开放性的轨道设计求解问题

本问题并没有规定具体的导弹飞行轨道，尤其是中段轨道十分灵活，可以存在不同的轨道设计思路。

### 最优路径分析问题

虽然每一段的轨道设计都较为灵活，但相比之下会有优劣之分。比较好的设计思路应该从导弹打击成本的高低、导弹被拦截的难易、设计的轨道是否易于实现等多个角度进行考虑。

### 曲线方程求解问题

从数学的角度来看，本问题是一个曲线方程求解的问题。在设计好优良的飞行轨道之后，利用各种数学方法及软件工具对所设计轨道的曲线进行求解。



## 条件分析



## 条件分析

01

给出了导弹发射车和航母的初始位置以及航母的运动状态。

02

导弹的飞行过程分为三段：发射段、中段和末段。

03

发射段的轨道曲线通常为抛物线，并给出了发射的初始速度。

04

中段通常以发射段的抛物线顶点为起始点，此时速度方向水平。

05

末段由导弹自主攻击航母目标，也即该阶段不受控制中心操控。

06

末段飞行时间不超过20秒，期待给出难以拦截的攻击曲线。



## 条件隐含的信息

### 发射段轨迹通常抛物线

从物理学角度来看，要做抛物线运动，导弹在发射段所受合力必须恒定且合力方向与初速度方向不共线。

### 期待给出难以拦截的攻击曲线

拦截的最佳时期是中段，因为发射段往往还不曾察觉，而末段速度极高，导弹的动能很大，无法拦截。因此，中段飞行的弹道越高，拦截的难度就越大。具体到本题目，导弹末段飞行时间一般不超过20秒，那么取20秒最好。



## 模型假设



# 模型假设

## ASSUMPTIONS

### 质量

假设导弹从发射到击中目标期间质量不发生改变

### 阻力

假设导弹飞行过程中受到的阻力可以忽略不计

### 动力

假设导弹推进期间提供的动力大小恒定，方向可以调整

### 控制

假设导弹控制系统为理想控制系统，导弹运动状态的改变是瞬时的，作用在导弹上的外力随控制系统的调节而瞬时变化

### 受力情况

将作用在导弹上的力简化为牵引力和重力

### 地球自转

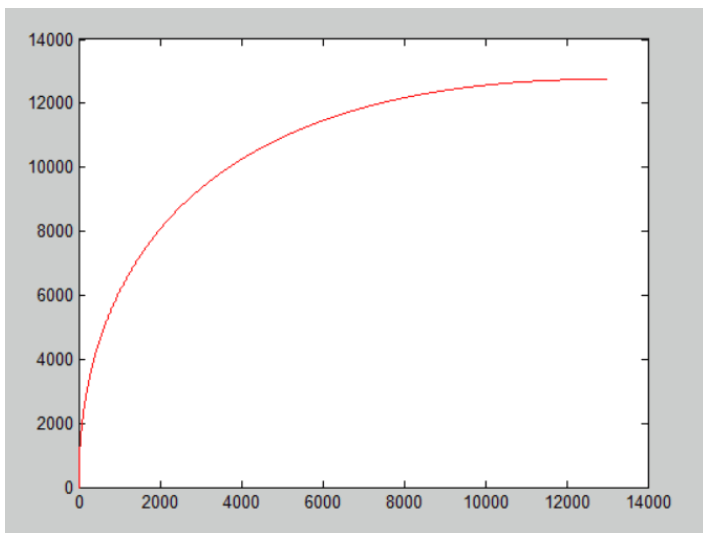
忽略地球自转对导弹打击航母的影响



## 模型方法



## 问题1



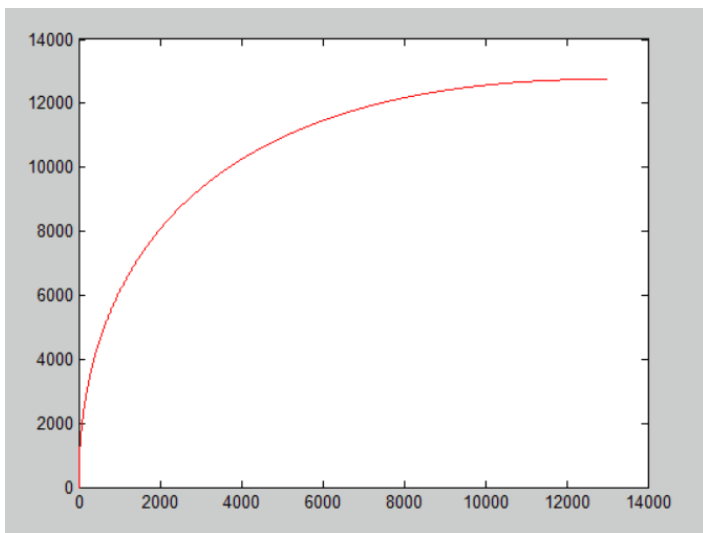
发射段

导弹只受到水平方向的动力 $F$ 和竖直向下的重力 $G$ ，以竖直向上的初速度发射后做如图所示的抛物线运动。

由于竖直方向只受重力，初速度已知，可求出发射段的时间和上升最大高度。因水平方向动力暂时未知，可暂时保留，先进行后面的计算。



## 问题1



## 发射段

### • (1) 竖直方向：

- $G = mg = ma_{1v}$
- $0 = v_0 - a_{1v}t_1$
- $t_1 = 51.02s$
- $y_1 = v_0t - \frac{1}{2}a_{1v}t^2$
- $h_1 = v_0t_1 - \frac{1}{2}a_{1v}t_1^2 = 12755 \text{ m}$

### • (2) 水平方向：

- $F = ma_{1h}$
- $v_{1h} = a_{1h}t_1$
- $x_1 = \frac{1}{2}a_{1h}t_1^2$
- $L_1 = \frac{1}{2}a_{1h}t_1^2$
- $L_1 = 1305.52a_{1h}$

### • (3) 任意时刻轨道方程：

$$y = v_0 \sqrt{\frac{2x}{a_{1h}}} - \frac{a_{1v}}{a_{1h}} x$$

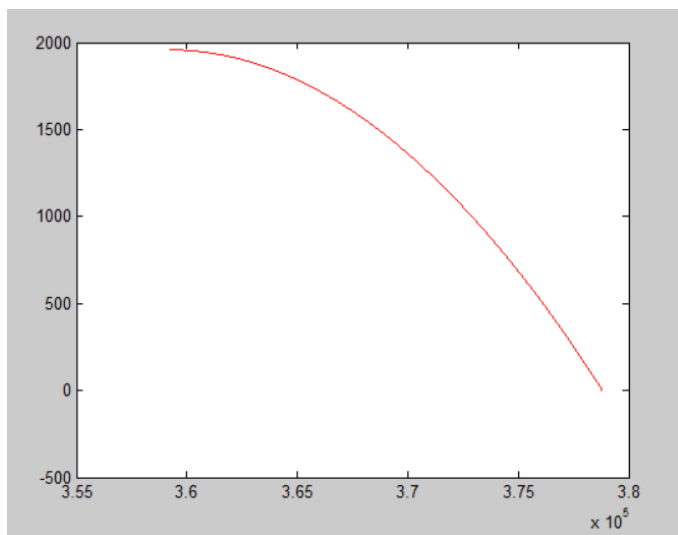
- 其中： $a_{1v} = g$

$$a_{1h} = \frac{F}{m} \text{ ( } a_{1h} \text{ 的具体值可通过在后续中段的过程中计算得出 )}$$

$$v_0 = 500 \text{ m/s}$$



## 问题1

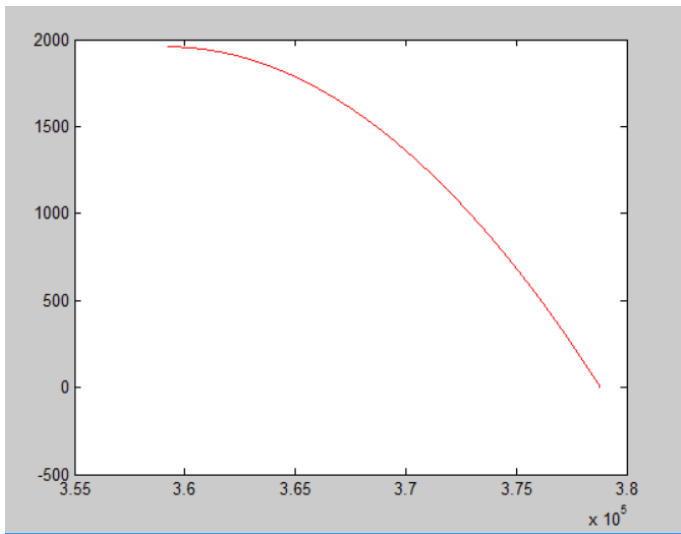


末段

末段的飞行时间最好设计为20秒，可以设计末段为不受控制中心操控的平抛运动，平抛运动的时间已知，末速度已知，可求出竖直方向的下降高度、进入末段飞行时刻的速度以及末段飞行的水平位移。



## 问题1



末段

### • ( 1 ) 竖直方向 :

- $y = \frac{1}{2}gt^2$
- $h_3 = \frac{1}{2}gt_3^2 = 1960 \text{ m}$
- $mgh_3 = \frac{1}{2}m(v_{\text{末}}^2 - v_{3h}^2)$
- $v_{3h} = 980.60 \text{ m/s}$

### • ( 2 ) 水平方向 :

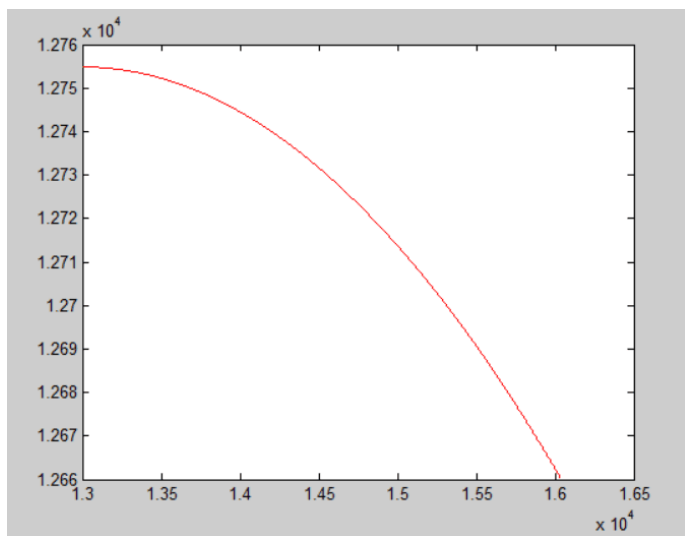
- $x = v_{3h}t$
- $L_3 = v_{3h}t_3 = 19612 \text{ m}$

### • ( 3 ) 任意时刻轨道方程 :

- $x = v_{3h}t$
- $y = \frac{1}{2}gt^2$
- $y = \frac{g}{2v_{3h}^2}x^2$



## 问题1



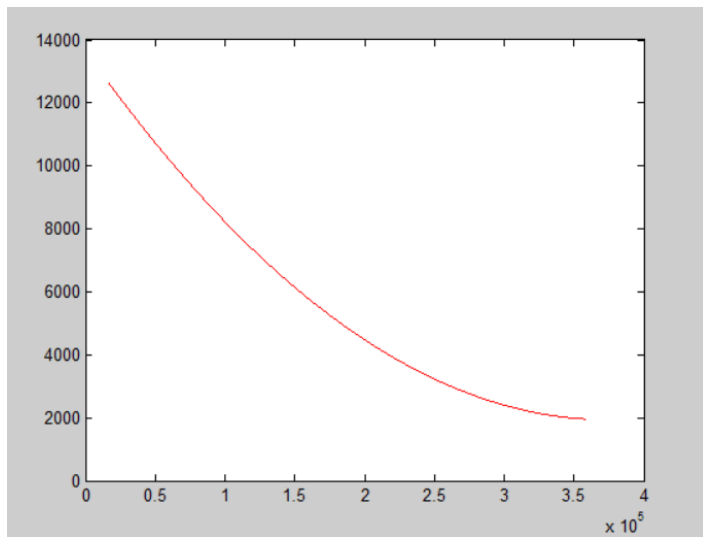
## 中段的第一过程

“中段通常以发射段的抛物线顶点为起始点”。结合题目给出的导弹打击航母建模示意图，为了将问题进行合理的简化，在中段开始时刻和中段结束时刻导弹的速度方向最好水平。因此，比较合理的方案是将中段设计为以下**两个过程**。

**第一过程：**导弹受到竖直向下的重力和动力，水平方向不受力，导弹做类平抛运动。



## 问题1



## 中段的第二过程

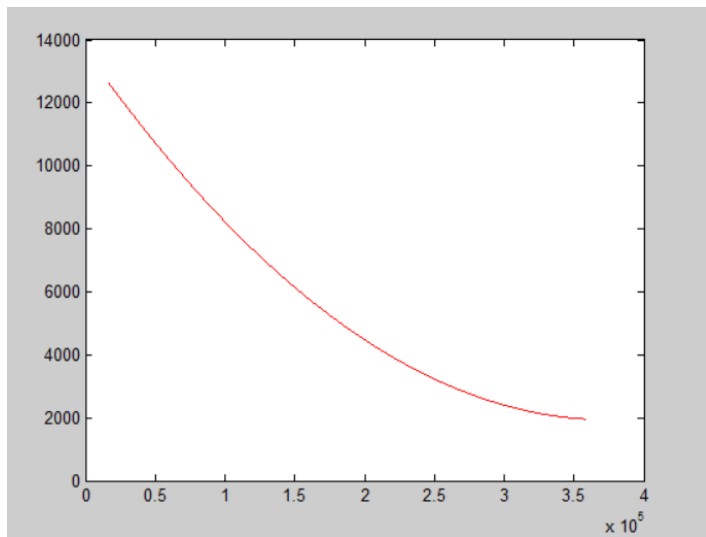
**第二过程：**导弹受到竖直向下的重力和竖直向上的动力，水平方向不受力，导弹做抛物线运动。

由于设计的中段两个过程水平方向都不受力，所以水平方向可以看作匀速运动，也即中段的起始时刻和结束时刻的水平方向速度大小、方向完全相同。根据末段过程的求解，可以求出中段结束时刻的速度（也就是中段整个过程中任意时刻的水平速度，同时也是末段开始时刻的速度）。





## 问题1



## 中段的第二过程

### • (1) 水平方向：

- $L_2 = L - L_1 - L_3$
- $L_2 = 359206 - 1305.52a_{1h}$
- $t_2 = \frac{L_2}{v_{2h}}$
- $v_{2h} = v_{3h}$

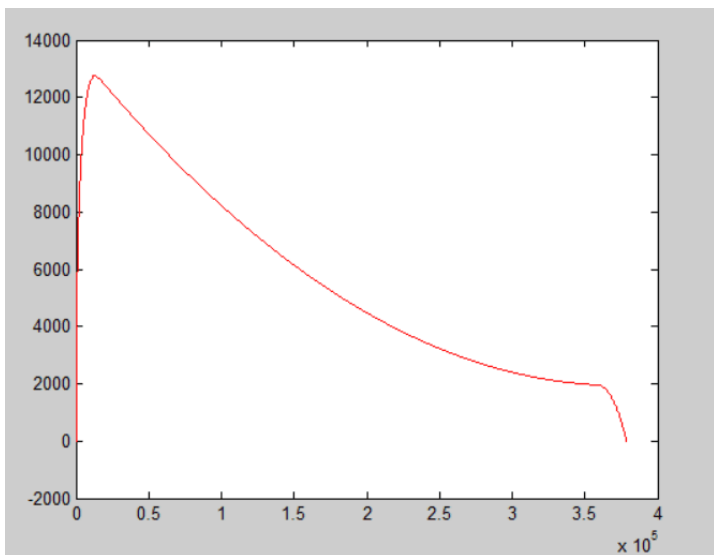
### • (2) 竖直方向：

- $v_{\text{中}}^2 = 2(a_{1h} + g)h_{\text{上}}$
- $0 - v_{\text{中}}^2 = -2(a_{1h} + g)h_{\text{下}}$
- $h_{\text{上}} + h_{\text{下}} = h_1 - h_3 = 10795m$
- $v_{\text{中}} = (a_{1h} + g)t_{\text{前}}$
- $0 = v_{\text{中}} - (a_{1h} - g)t_{\text{后}}$
- $t_{\text{前}} + t_{\text{后}} = t_2$

- $a_{1h} = 9.96m/s^2$
- $v_{\text{中}} = 61.1524m/s$
- $x = v_{3h}t$
- $y = \frac{1}{2}(a_{1h} + g)t^2$
- $y = \frac{(a_{1h} + g)}{2v_{3h}^2}x^2$
- $x = v_3t$
- $y = v_{\text{中}}t - \frac{1}{2}(a_{1h} - g)t^2$
- $y = \frac{v_{\text{中}}}{v_{3h}}x - \frac{a_{1h} - g}{2v_{3h}^2}x^2$



## 问题1



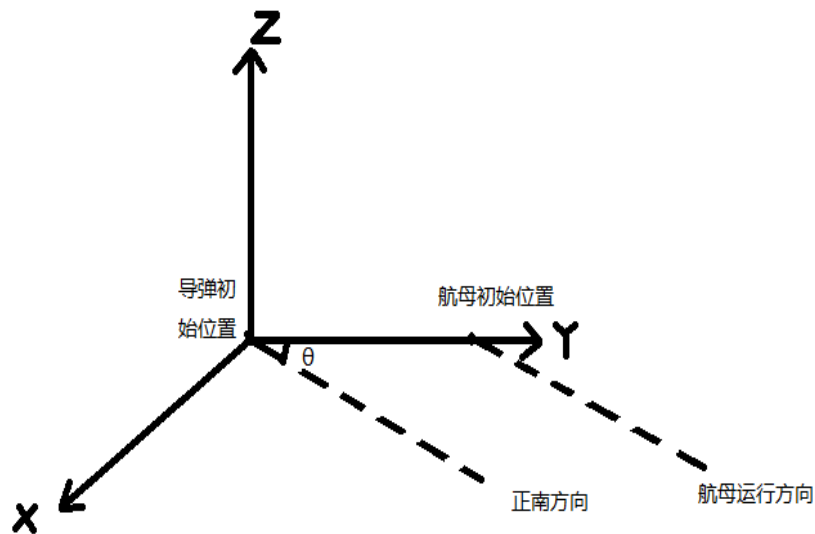
全过程

问题一模型数学公式：

$$f(x) = \begin{cases} 224.06\sqrt{x} - 0.9839x, & (0 \leq x < 13003) \\ -1.0275 \times 10^{-5}x^2 + 0.2672x + 11017.7235, & (13003 \leq x < 16038) \\ 8.334 \times 10^{-8}x^2 - 6.25175 \times 10^{-2}x + 13661.9198, & (16038 \leq x < 359206) \\ -5.0958 \times 10^{-6}x^2 + 3.66088x - 655546, & (359206 \leq x \leq 378818) \end{cases}$$



## 问题2



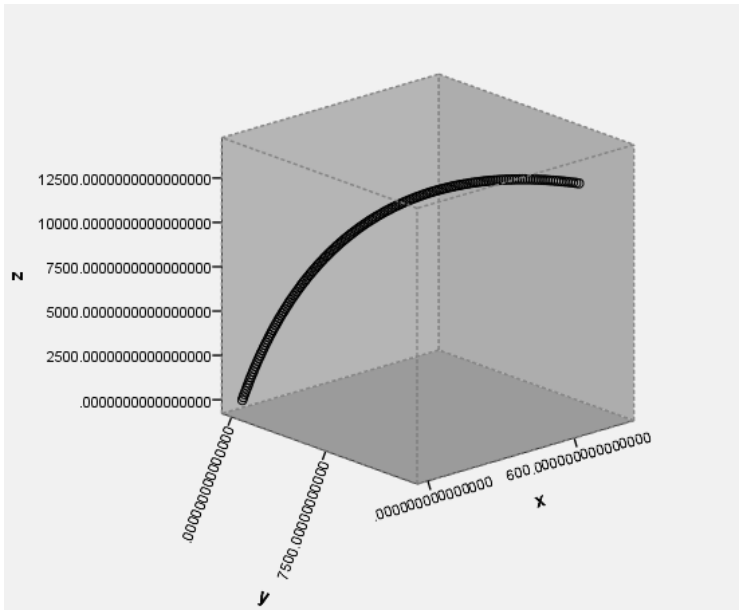
坐标系

问题2模型的中心思想是在问题1模型的基础上给予导弹一个正南方向的水平速度，使得导弹与航母在正南方向上保持相对静止。

如左图坐标系所示，导弹发射时的初速度在Z轴和正南方向所成平面内，在正南方向的分速度设为 $v$ 。则在X轴上的分速度为 $v\sin\theta$ ，在Y轴上的分速度为 $v\cos\theta$ 。



问题2

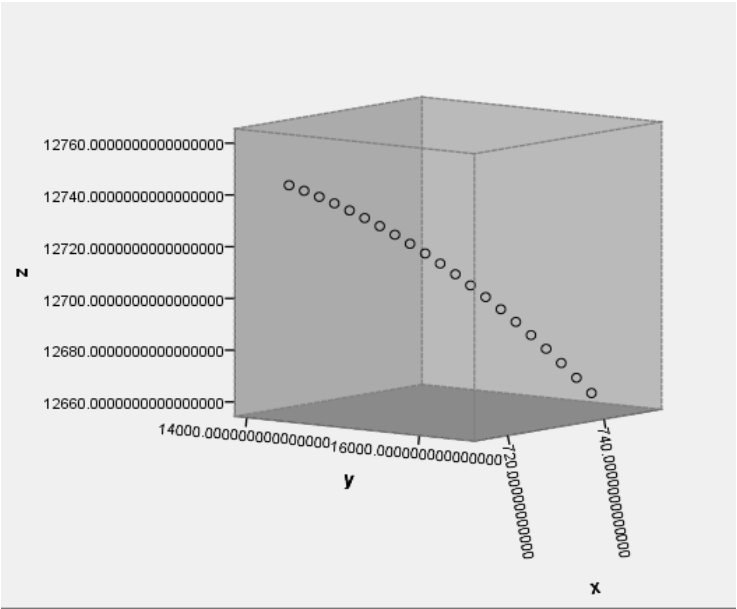


发射段

- $x = v \sin \theta t$  .....X方向匀速运动
- $F = ma_{1h}$
- $y = v \cos \theta t + \frac{1}{2} a_{1h} t^2$  .....Y方向加速运动
- $z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$  .....Z方向减速运动
- $t = t_1 = 51.02 \text{ s}$  .....发射段经历时间
- $$\begin{cases} x = 13.7745t \\ y = 4.98t^2 + 4.06158t \text{ ( } 0 \leq t \leq 51.02 \text{ )} \\ z = -4.9t^2 + 500t \end{cases}$$
- 将 $t_1$ 代入可得发射段终点坐标为  
( 702.775 , 13170.363 , 12755.102 ) ( 单位 : 米 )



问题2

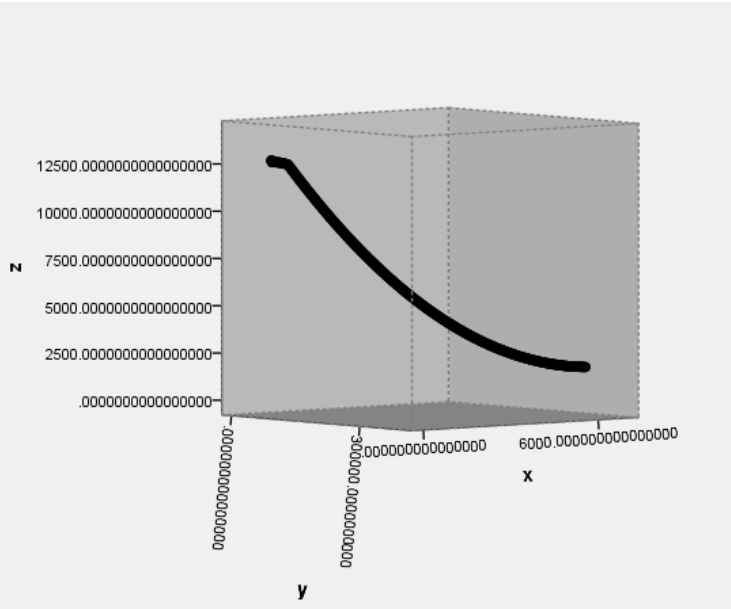


中段第一过程

- $x = v \sin \theta t$  .....X方向匀速运动
- $y = (v_3 + v \cos \theta)t$  .....Y方向匀速运动
- $z = -\frac{1}{2} (a_{2v} + g) t^2$  .....Z方向加速运动
- $$\begin{cases} x = v \sin \theta (t - 51.02) + 702.775 \\ y = (v_3 + v \cos \theta)(t - 51.02) + 13170.363 \\ z = -\frac{1}{2} (a_{2v} + g) (t - 51.02)^2 + 12755.102 \end{cases}$$
- $t = 54.11476 \text{ s} ;$
- $$\begin{cases} x = 13.7745t \\ y = 984.66158t - 37067.071 \\ z = -9.88t^2 + 1008.1552t - 12962.9372 \end{cases} \quad (51.02 < t \leq 54.11476)$$
- 将t代入可得中段第一过程终点坐标为  
( 745.404 , 16217.654 , 12660.476 ) ( 单位 : 米 )



问题2

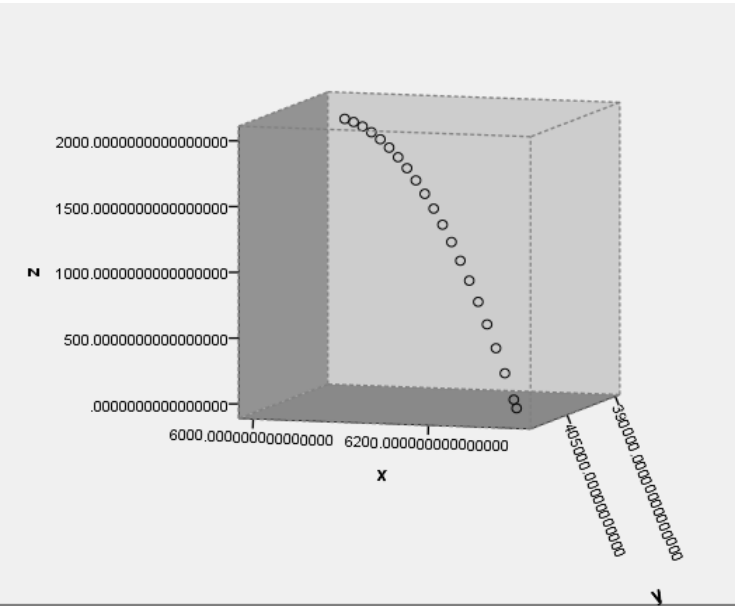


中段第二过程

- $x = v \sin \theta t$  .....X方向匀速运动
- $y = (v_3 + v \cos \theta)t$  .....Y方向匀速运动
- $z = -v_{\text{中}}t + \frac{1}{2} (a_{2v} - g) t^2$  .....Z方向减速运动
- $$\begin{cases} x = v \sin \theta (t - 54.11476) + 745.404 \\ y = (v_3 + v \cos \theta)(t - 54.11476) + 16217.654 \\ z = \frac{1}{2}(a_{2v} + g) (t - 54.11476)^2 - v_{\text{中}}(t - 54.11476) + 12660.476 \end{cases}$$
- 在第二部分终点处  $t = 436.31726 \text{ s}$  ;
- $$\begin{cases} x = 13.7745t \\ y = 984.66158t - 37067.071 \quad (54.11476 < t \leq 436.31726) \\ z = 0.08t^2 - 69.81076t + 17189.819 \end{cases}$$
- 计算得到中段第二过程终点坐标为  
( 6010.0521 , 392557.772 , 1960 ) ( 单位 : 米 )



问题2

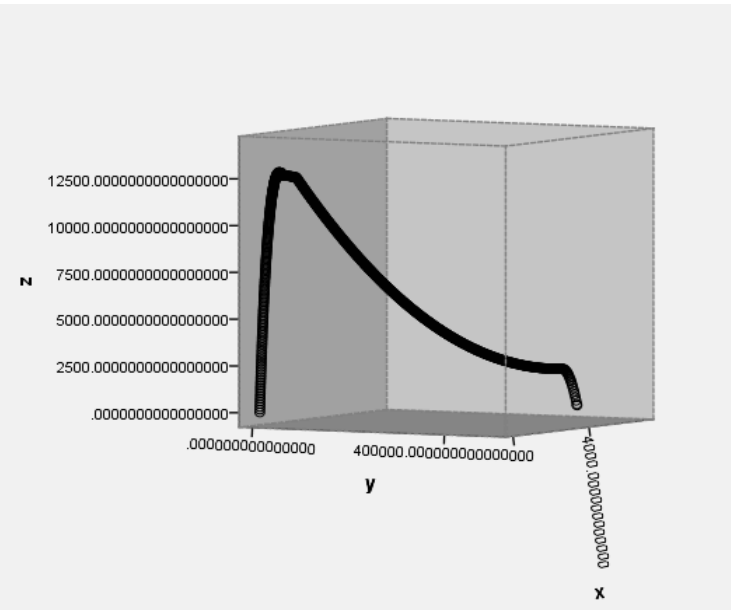


末段

- $x = v \sin \theta t$  .....X方向匀速运动
- $y = (v_3 + v \cos \theta)t$  .....Y方向匀速运动
- $z = \frac{1}{2}gt^2$  .....Z方向加速运动
- $$\begin{cases} x = v \sin \theta (t - 436.31726) + 745.404 \\ y = (v_3 + v \cos \theta)(t - 436.31726) + 16217.654 \\ z = \frac{1}{2}(a_{2v} + g) (t - 54.11476)^2 - v_{\text{中}}(t - 436.31726) + 12660.476 \end{cases}$$
- 代入数值并化简可得：
- $$\begin{cases} x = 13.7745t \\ y = 984.66158t - 37067.071 & (436.31726 < t \leq 456.31726) \\ z = -4.9t^2 + 4275.90915t - 930866.48 \end{cases}$$



## 问题2



全过程

问题2模型的中心思想是在问题1模型的基础上使导弹和航母在航母的运行方向上始终保持相对静止：

- ✓ 在航母躲避的方向上，使导弹同航母时刻保持相对静止
- ✓ 在导弹和航母的连线方向上，使导弹逐渐靠近航母





## 使用的软件

### MATLAB

主要用到了MATLAB的绘图功能和方程求解功能。问题1的二维曲线图像使用了MATLAB的绘图功能；而对于问题1中部分复杂的方程也是使用MATLAB进行求解。

### Excel

Excel主要在问题2中使用较多，尤其是在绘制三维参数方程的图像方面，为了使用更为直观的散点图表示参数方程的图像，可以在Excel中按照参数方程生成一系列离散点。

### SPSS

问题2在Excel中生成足够数量的离散点之后在SPSS中绘制出相应的三维散点图，从而得到问题2的模型轨道图像。



## 模型评价



## 命中率分析

在问题2中，由于并不存在理想的控制系统，所以中段的第一过程向第二过程转变的指令从发出到调整之间必然会有一定延迟，假设为 $\Delta t_0$ ， $\Delta t_0$ 越小，误差越小。

由于按照设计的模型，中段前后的速度要保持水平，中段第一过程向第二过程转变有了一个延迟 $\Delta t_0$ ，第一过程时间增加 $\Delta t_0$ ，从而第一过程结束时竖直速度变大，导致第二过程时间也要增加才能使末速度水平，假设第二过程时间增加 $\Delta t_1$ 。中段的时间增加，中段下降的高度增大，中段水平位移增加（假设为 $\Delta x_1$ ），则末段下降的高度就要减少，末段的时间就要减少，末段的水平位移就要减少（假设为 $\Delta x_2$ ）。

由于延迟 $\Delta t_0$ 产生的水平位移误差为 $\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2$ 。



## 命中率分析

### •中段的第一过程：

$$\bullet L_1 = v_{3h} (t_{\text{前}} + \Delta t_0)$$

$$\bullet h_{\text{上}} = \frac{1}{2}(a_{1h} + g)(t_{\text{前}} + \Delta t_0)^2$$

$$\bullet v_{\text{中}} = (a_{1h} + g)(t_{\text{前}} + \Delta t_0)$$

### •中段的第二过程：

$$\bullet L_2 = v_{3h} (t_{\text{后}} + \Delta t_1)$$

$$\bullet 0 - v_{\text{中}}^2 = -2(a_{1h} + g)h_{\text{下}}$$

$$\bullet 0 = v_{\text{中}} - (a_{1h} - g)(t_{\text{后}} + \Delta t_1)$$

$$\bullet \text{由上式可得：} \Delta t_1 = 123.5 \Delta t_0 ;$$

•由于 $\Delta t_0$ 、 $\Delta t_1$ 的影响，中段水平方向相比“改进模型”多移动的距离：

$$\bullet \Delta x_1 = v_{3h} \Delta t_0 + v_{3h} \Delta t_1$$

•中段竖直方向相比“改进模型”多下降的距离：

$$\bullet \Delta y = h_{\text{上}} + h_{\text{下}}$$

•末段在竖直方向上少下降 $\Delta y$ ，从而使末段水平方向少运动 $\Delta x_2$ ：

$$\bullet \Delta x_2 = v_{3h} \Delta t$$

$$\bullet \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}}$$

•则因为 $\Delta t_0$ 、 $\Delta t_1$ 的影响使得水平方向总位移多了 $\Delta x$ ：

$$\bullet \Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

$$\bullet \text{代入相应数值得：} \Delta x = 122084.7 \Delta t_0 - 23052.412 \sqrt{\Delta t_0}。$$



## 命中率分析

- 航母的舰长为335m，半舰长为167.5m
- 取一个 $\Delta t_0$ ，通过前面的公式计算出距离范围 $\Delta x$
- 如果 $|\Delta x| \leq 167.5\text{m}$ ，则导弹会击中航母；如果 $|\Delta x| > 167.5\text{m}$ ，则导弹不会击中航母
- 假设 $0.033\text{s} \leq \Delta t_0 \leq 0.039\text{s}$ ，在Excel中生成1000个位于0.033到0.039间的随机测试数
- 利用公式 $\Delta x = 122084.7\Delta t_0 - 23052.412\sqrt{\Delta t_0}$ 计算出相应的 $\Delta x$
- 统计 $|\Delta x| \leq 167.5\text{m}$ 和 $|\Delta x| > 167.5\text{m}$ 的个数
- 前者个数为907，后者个数为93，从而得出测试实验的命中率为90.7%



## 优点

方法简便  
切合实际  
假设合理  
计算简洁

## 缺点

参数较多  
缺乏普适  
代码略少  
误差易变



西北农林科技大学

请各位评委批评指正！

