



2016 年深圳杯数学建模竞赛 A 题

深圳市污水处理方案模型计算和经济环境分析

姓名	学校及专业	email	电话
童世祁	清华大学物理系	tongsql4@mails.tsinghua.edu.cn	17801097099
王大涛	清华大学物理系	wdt14@mails.tsinghua.edu.cn	15201510741
林铭杰	清华大学土木工程系	linmj13@mails.tsinghua.edu.cn	13120180221
潘胜杰	清华大学土木工程系	psjl3@mails.tsinghua.edu.cn	13051899757

2016 年 8 月 15 日

摘要：

本文以深圳河流域特区为例，模拟了“分流清源”与“混流截排”收集机制的雨水管道与污水管道网络，对两种系统对各种参数的灵敏性和稳定性进行了分析，并对经济效果进行了估算和判断。本文设计了一种建设方案，得到在五年内建造污水管道网络的最佳策略，使得建设完成前排入环境的污水量最少，同时满足政府治污的“一、三、五年目标”，且最节约经济成本。

求解第一问“分流清源”建设方案：我们根据资料中污水处理厂、污水产生源的位置通过“最小生成树”算法规划出“分流清源”模型中建设的管道主干，通过计算深圳水管网络的分形维数，得到整个系统长度共 142 公里，并根据资料估算工程费用约 7.7 亿元。

题目指出“后续管理困难而很难保证不会再出现污水管错接问题”，所以需要对该系统进行了稳定性评估。在已知各污水厂容纳量和污水源产生量和管道连接状况的情况下，通过规划得到了在部分管道错接或损坏的情况下，分别会导致多少污水溢出。结论是在一条管道损毁或错接的情况下，平均溢出增量百分比为 6.6%，因此对于该最小生成树管道系统，除了一些关键路径需要额外措施保护之外，其他边稳定性良好。

对于“混流截排”方案：题目提到“政府已有较大的投入到截排”，我们模拟设定雨水管道（连接污水源和初期雨水池）为三角形网格且已经建好，初期雨水池以及雨污管道已经建好，雨污管道仍然采用“最小生成树”。我们分析了无雨、中小雨、暴雨三种情况下初期雨水池接收雨水和污水的比例。通过“最小溢出固定流”的规划算法，得出各雨水池溢出混水量的最低值。我们通过改变降雨强度、个别雨池容量、排污比例、排污点的参数，来研究这些参数对溢出混水量最低值的影响。

因为环境污染和经济投入量纲不一致，我们用隶属函数和稀释理论两种不同的角度去评估清源和截排的优劣。根据文献中溢出混水的化学需氧量（COD）就可以估算溢出污水的环境代价，它与污水处理费在五年内共 14.1 亿元，而清源方案的总代价是 18.6 亿元。另一方面，我们采取 $\omega(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$ 的隶属函数来评价污染和花费，把两个拐点分别设置为政府预算 20 亿和现有污染排放量 467 万吨这两个位置。实施清源建造期间五年的污染及经济评价分别是 0.045、0.35，然而截排则是 0.39 和 0.11，这个评价指标越低越好，通过比较可以看出，清源虽然花费多，但是综合来看还是更占优势的。

求解污水治理的方案。由于建设改造“分流清源”水管系统需要五年的进程，在这五年中，清源与截排共存。我们提出方案：为保证居民秩序不受大规模影响，改造过程必须循序渐进，体现在总体上每年会有完成总长度一定百分比的要求（见第四章），同时对于局部地区也不能把一个节点两条及以上管道在一年内修建。在这种限制条件下，修建进程还必须满足政府治污的“一、三、五年目标”。我们采取搜索剪枝的做法有效解出了每年的修建方案，五年内分别修建水管道长。同时我们算出了在没有修建完成时，每年的污水排放情况并保证五年内它的总数是最低的。由此我们估算出在工程五年期间内环保和经济的总代价为 17.1 亿元。

我们这个模型还有一些可以后续改进的地方，首先是地形，可以通过成千上万个点的经纬度和海拔，通过插值方法，做出三维地形图，根据地势高低确定驱动污水的电费以及污水的流向。我们可以根据污染物在自然中降解和扩散的情况来列出相应的偏微分方程。通过时间序列模型，白化方程来预测污染停止之后几年后的水质，另外就是如果拿到更多的水文数据，污染指标应该采取更加科学的内梅罗指数法。还有一个问题是，我们在建立动态模型时，直接采取静态模型最优的结果来，没有考虑优化目标变化导致建造边的变化。最后，如果因为某种原因，建造顺序受到了影响，需要调整，改变程序也很容易求解出新的顺序以及新情况中的总污染和花费。

关键词：清源 截排 最小生成树 最小费用最大流 整数规划 遗传算法

目 录

摘要	1
第一章 背景介绍	4
1.1 深圳市河水污染严重	4
1.2 雨污水管分流系统	4
1.3 名词定义、符号和变量声明	5
第二章 “分流清源”与“混流截排”建设比较	6
2.1 “清源”基本假设	6
2.2 “清源”管道数学模型	6
2.3 “清源”管道图与费用	8
2.4 “截排”基本假设	12
2.5 “截排”流量数学模型	13
2.6 两种方案环境效益与经济成本比较——河流污染物稀释理论	15
2.7 两种方案环境效益与经济成本比较——隶属函数法	16
第三章 两种建设方案稳定性分析	17
3.1 “清源”有管道断开的流量计算	17
3.2 关键雨水池扩容后的“截排”溢出量计算	20
3.3 降雨强度波动的“截排”溢出量计算	21
3.4 其他因素变化对“截排”溢出量的影响	22
3.5 提升管道系统稳定性的途径	22
第四章 建造“清源”管道顺序的分析	23
4.1 改造思路与基本假设	23
4.2 建造顺序的数学模型	23
4.3 结果与分析	24
总结	28
参考文献	29
附录	30
污水源、初期雨水池、污水处理厂 每日污水量与位置坐标	30

第一章 背景介绍

1.1 深圳市河水污染严重

河水浑然天成，原本美好而洁净，但是却被现代化进程中的人们有意或无意地糟蹋着。以茅洲河为例，它在五六十年代是深圳的饮用水源，七八十年代，孩子们还能到河里抓鱼、游泳。一位深圳市老市民回忆着，“我静静站在河里，河水没过我膝盖，我能清楚看到可爱的小鱼在脚边穿梭。”他说河底还有柔软的沙子和漂亮的小石头，放学后的下午，村里的伙伴便到茅洲河打水仗、游泳^[1]。

然而现在，茅洲河由于生活污水的排放，先变泛黄，然后泛绿，最终汇聚成墨黑色。家住在河边附近的都不敢开窗，尤其是夏天，气温又高，河流的腥臭在热浪的蒸腾下异常刺鼻。像茅洲河这种情况，只是深圳众多被污染的河流之一，广东省环保厅监测显示，茅洲河干流和 15 条主要支流水质均劣于 V 类(最差级别)，氨氮、总磷等指标严重超标，相比干流，茅洲河的支流水质差得更甚，在深圳境内的 10 条支流中，老虎坑水污染的氨氮指标数竟然超标 23.2 倍^[1]，堪称“珠三角污染最严重的河流”。

工业污水非法排放属于点源污染，过去深圳将电子信息产业作为传统支柱产业，而茅洲河流域内的部分街道则聚集了一批电镀线路板等配套生产企业。近年来随着环保部门执法力度的提升，工业点源污染逐步得到控制和解决。在点源污染被逐步得到控制之后，河道的另一个主要污染源就是初期雨水造成的面源污染^[2]。

1.2 雨污水管分流系统

导致深圳建成区水体黑臭的原因是污水直排入河、海。具体表现是，原本按“雨污分流”设计的城市污水收集、处理系统，由于建设及管理上的问题，相当面积的建成区排水管网实际处于“雨污混流”状态^[3]。

所谓“截排”措施，是于治理区域的排水管网末端建设拦截管道或箱涵，将雨、污混合水收集起来送至污水厂处理。如小范围的城中村“截排”工程可以是围绕城中村修建“截污箱涵”，拦截雨污混流水；“大截排”工程则是直接在河岸两侧修建“截污箱涵”，把大区域内原本通向河道的排洪管口接入箱涵，将污水和雨水全部收集到箱涵里送入污水工厂处理。当然，“截排”措施除了拦截雨污混流水的功能之外，对于拦截前七分钟降雨形成的面源污染污水也有良好的效果。

所谓“清源”措施，则是力图从源头起建立“雨污分流”排污机制，在治理区域内以两套管网分别收集污水和雨水，让污水经污水管进入污水厂处理，让雨水经排洪口直接进入河道，使城市处于一种理想的污水治理状态^[4]。

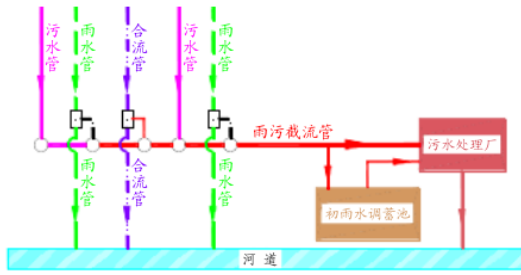


Figure 2 混流截排^[5]

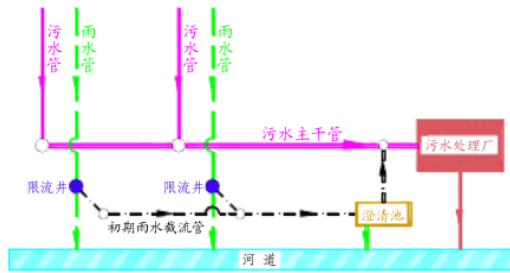


Figure 1 分流清源^[5]

1.3 名词定义、符号和变量声明

污水源：假定所有生活污水、工业污水的都通过管道汇聚到污水源点，再由这些点向其他地方运输

污水处理厂：可以有效处理污水，并回收再利用。只接收污水或雨污混水，不向外输运。

初期雨水池：接收下雨时前 45 分钟的雨水^[4]。在“混流截排”措施里，可以接收错排的污水。它与污水处理厂通过管道相连。不下雨时，只接收污水；下小雨中雨时，2/7 容积接收雨水，5/7 容积接收污水，具体论述见第三章；暴雨时只接收雨水，不接收污水。

雨水管道：将雨水汇集到初期雨水池。在“混流截排”措施里，将错接的污水输运到初期雨水池。

污水管道：直接将污水源的污水输运到污水处理厂，属于“分流清源”措施。

符号	名称与意义	备注
i, j	代表节点，可以是污水源，也可以是初期雨水池或者是污水处理厂	
$link_{ij}$	节点连通状态。0 表示 i, j 无连通；1 表示 i, j 无连通	
w	各边长度， $\sum w$ 表示管网各边长度总和	
s_i	各源点产生污染量	给定常量
u_i	各源点排入汇的实际污染量	
α	错排入雨水管道的污水比例。	
x_i	各节点净流入（流入为正，流出为负）	源或汇均可
c_k	各汇点容量（汇点可以是污水处理厂或初期雨水池）	
$overflow(k)$	第 k 个初期雨水池溢出的污水量	

第二章 “分流清源”与“混流截排”建设比较

2.1 “清源”基本假设

A、本章假设管道系统从零开始建造，不考虑已有建设的水管网系统，也不考虑错接现象。

B、假设管道系统连接的两点位置都是走直线距离，不考虑因为地下地质原因或地铁建造导致管道绕路、或走折线的情况

C、重力流污水管以管径划分从 300mm 口径到 2000mm 以上口径不等，建造水管网络费用主要包括挖掘费用、管道费用，施工人工费以及封路施工造成的间接叫用损失等。由于施工费用占主导，不考虑由于管径变化导致的费用变化，即假设所有管道都一样粗，都可以容纳污水流通过。

D、把所有污水源简化为 31 个点，假定所有生活污水、工业污水的都通过管道汇聚到这 31 个点，再向其他地点输运。只考虑主干线，不考虑分支线。

E、本模型是静态模型，考虑所有线路都能快速建设好，不考虑因为关键路径缺失带来的损失

F、考虑污水处理厂已经建好，位置确定，不再新增污水厂。

2.2 “清源”管道数学模型

为了建设我们的清源管网，我们决定把建设分为两步，第一步是根据点源设计出主干管道，第二步是运用数学里的分形方法估算出分支管道和整套清源系统的管道总长。



Figure 3

本章用到了深圳河流域特区内规划预测 2020 年污水量^[2]，得到 31 个污染源每天共产生污水 56.97 万吨。我们通过百度地图查找了相应经度(x_1, x_2)纬度(y_1, y_2)，然后计算球面距离可以得到不同污水点的距离。污水源每日产生污水量与污水源位置见附表 1。三个已经建立的污水处理厂每日处理污水量上限及其位置坐标数据见附表 2，同理通过球面距离得到污水处理厂和污水点的距离。

$$\text{Distance}(P_1, P_2) = R \times \arccos(\sin x_1 \times \sin x_2 + \cos(y_1 - y_2) \times \cos x_1 \times \cos x_2)$$



Figure 4

算法: Kruskal 最小生成树

假设: 不同粗细管道价格差异可以忽略, 铺设管道费用仅与管道路程长度有关
三个污水厂距离都比较远, 不会在算法中直接相连

目标: $\min \sum w$ 建设管道总长度最小

$\forall i, j \quad x_{ij}=1$ 所有点连通

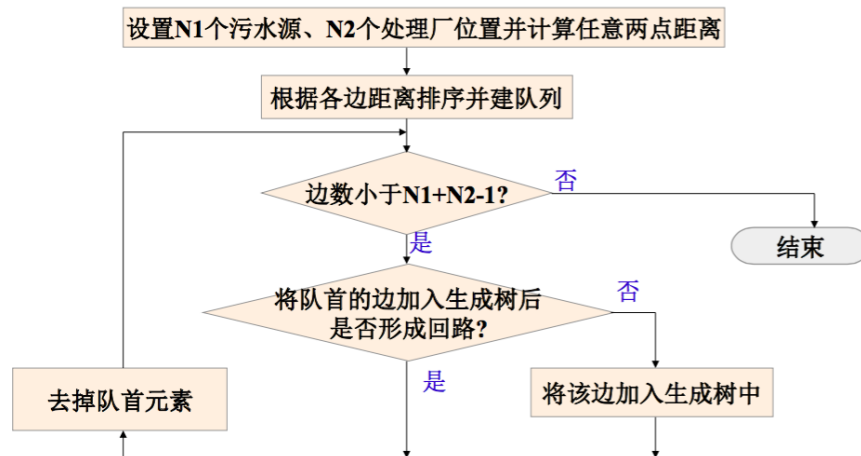
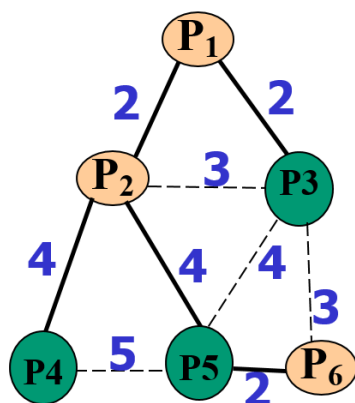


Figure 5



P1、P2、P6: 污水源
P3、P4、P5: 污水处理厂
线上数字代表距离
实线为最小生成树管道线路
虚线无管道

Figure 6

2.3 分形法估算“清源”管道图总长

我们通过最小生成树建立了一套网络，最终算出从开始到建立一套污水管道网络最少需要管道长为 70.15 千米（只是计算了主干线路）。

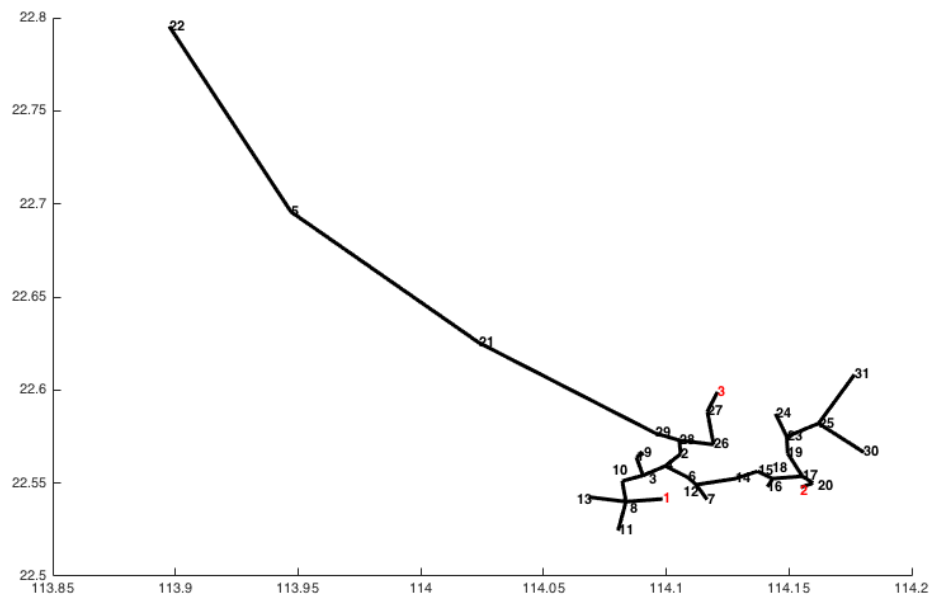


Figure 7

主干管道设计完成，怎么去估算分支管道和整个系统的长度呢？我们引入分形这个数学方法来解决。英国海岸线长度有多长？我们可能觉得海岸线并不长，但是把某个局部放大以后，发现这个局部的海岸线弯曲形貌像整体一样复杂。于是有个著名结论：我们想象一个人沿着一段海岸线拣尽可能短的道路步行，并规定每步长度不超过 s ，设这样测得的海岸线长度为 $u(s)$ 。随着步长 s 越来越短，我们测量出来的海岸线长度越来越长。要用分形来解决水管网的问题，就先要证明深圳水管网是满足分形的自相似条件，结果拟合得到了分形维数 $D=1.9$ ，相关系数 $R=0.97$ 的曲线。于是可以对该问题使用分形做法。

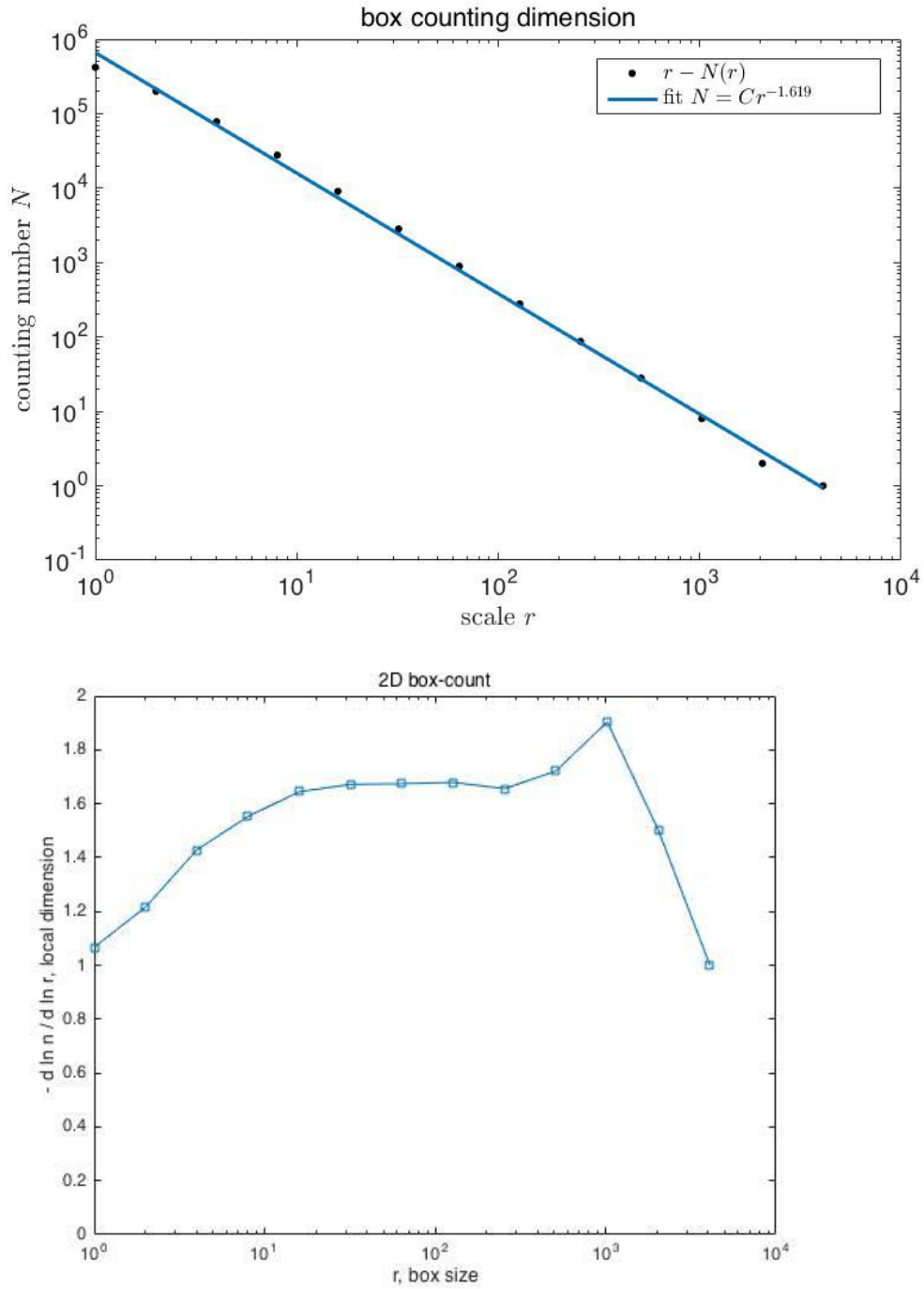


Figure 8

从分形步长 s 和总长 u 的幂函数关系 $u \propto \frac{1}{s^d}$ ，我们了解到只要求出 d ，就能得到小步长下的总长 u 。

下面使用使用 Box-counting 法处理深圳管网可以得到维数 D ，进而通过 $D=d+1$ 得到幂指数 d 。



Figure 9

盒子边长 ε_i ，覆盖图像盒子数 $N(\varepsilon_i)$ ，盒子数与边长成近似关系 $N(\varepsilon_i) \propto \varepsilon_i^{-D}$ 。

由于东西两边管道平均长度差异很大，所以采用两个二级管道的长度指标， $s_w = 5km, s_e = 0.5km$ 分别处理后得到总长为 142 公里的管网。

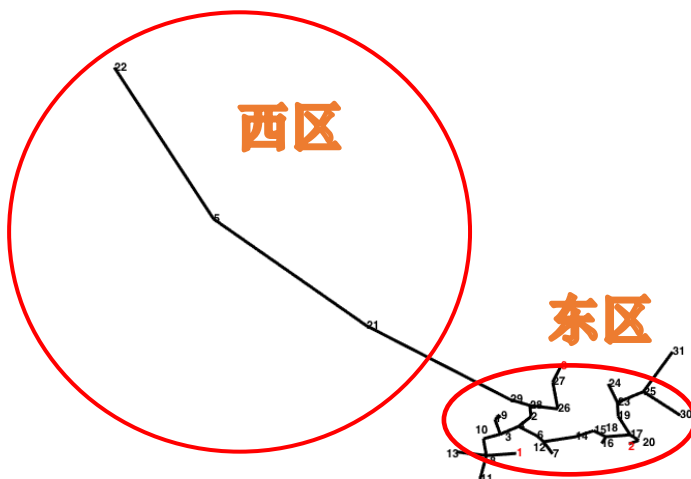


Figure 10

查阅大量资料，发现污水、雨水管道的单位造价相同，将附件 2 中的各种管道造价进行总结分类，发现造价和管道长度的关系如下：

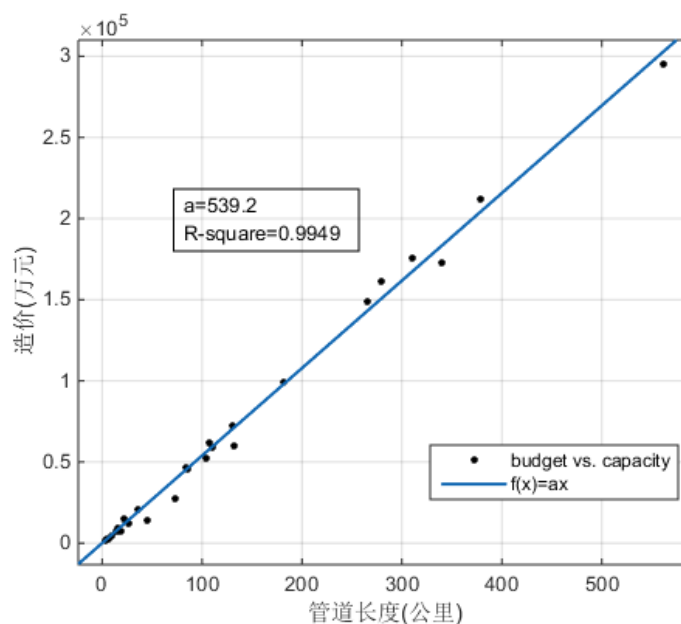


Figure 11 管道长度与造价关系最小二乘拟合^[*]

*数据来源：附件 2：30-36

即单位管道长度造价约 539.2 万元/公里。由于总长为 142 公里，得到总建设花费 7.7 亿元。

2.4 “截排”基本假设

A、假设初期雨水池、污水处理厂已经建好。雨水管道系统也已经建好，且为三角形网格。

B、初期雨水贮存池储存污水雨水比例随下雨状况的变化：

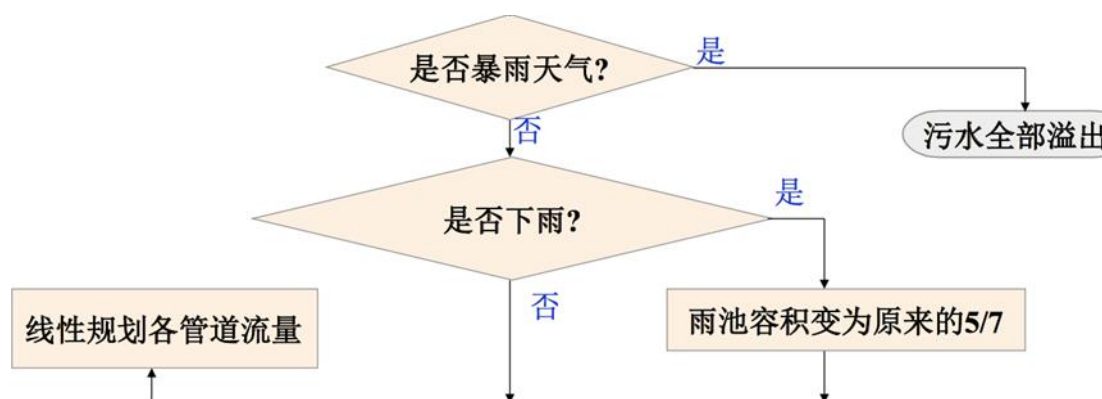


Figure 12

该假设理由如下：

初期雨水池将初期雨水进行截流贮存，进行适当的处理后在排入水体，避免对水体造成污染。由于深圳市初期雨水池是按照 7mm 标准规划的，接收初期雨水往往需要 15-45 分钟，剩下的时间都可以用来接收并处理污水。

根据深圳 2015 年年鉴^[7]，2014 年深圳年累计降水量 1725.5mm，比同期气候平均值（1935.8mm）偏少 11%，根据这个数据，我们认为深圳年降雨量在 1800mm 左右。全年降雨日数（不含雨量 0.0mm 天数）为 129 天，不降雨天数则为 237 天。2014 年一共有 9 场暴雨，分布在 9 天内。在 5 月份降雨时“3 小时雨量 235.9mm，6 小时雨量 319.8mm，12 小时雨量...”假设 5 月份降雨雨强具有代表性，而且降雨前三小时雨强近似平均，那么可以用 3 小时雨量来估算前 45 分钟的雨量，约 2mm / 45mins。由于雨水在前 45 分钟进入雨水管道的速度远远快于污水，那么假定污水进入雨水管道前，初期雨水池已经收集满了前 45 分钟的初期雨水，即 2mm，剩下的 5mm 用来储存当天的污水（假设初期雨水池处理雨污的周期为一天以内），暴雨指每小时降雨量达到 16mm，所以这时初期雨水池完全不能接收污水。

C、超出初期雨水池容积的污水就要排入环境中，从而造成环境的污染。我们目标就是让各个雨水池溢出总量最少。

D、把所有污水源和初期雨水池都简化为点。所有管道都足够粗可以容纳足够的污水在里面流淌。

E、本模型假定污水流量能够自发地选择污水池，且污水在管道中流淌靠重力没有额外开销，采取线性规划的办法解决“最小溢出固定流”的问题

2.5 “截排”流量数学模型

按照第一章的方法，仍然可以列出初期雨水池的位置。由于雨水池采用 7mm 的降雨作为初期雨水贮存池的贮水量，假定污水密度为 1kg/L,我们可以求得各个初期雨水池的贮存量上限(单位：万吨)，超过上限的按照图 1 排入环境当中。

在加入雨水池后，由于雨水池与污水点的管道线路分布图未知，于是采取三角形网格法，把表 2 所示中的污水点与初期雨水池连接起来。

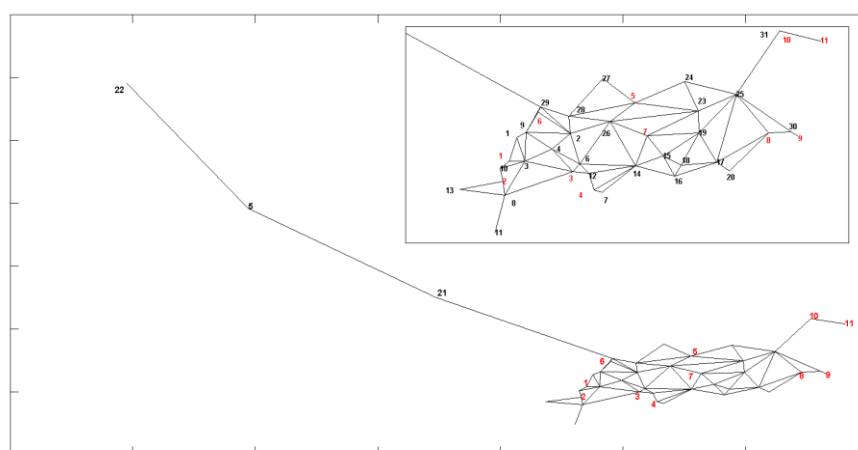


Figure 13

新变量: l_{ij} = 流量 (从 i 流向 j , 指向节点为正, 离开为负)

约束: $\sum_l \pm l_{ij} + x_i = 0$ 满足节点流量守恒, 节点编号 $i < j$ 时, l_{ij} 系数为正

$\sum_i l_{ik} > 0$ 所有流向“汇”的边 l_{ik} 流量都为正

目标: $\min \sum_k \text{overflow}(k), \text{overflow}(k) = \begin{cases} 0, & x_k < c_k \\ x_k - c_k \end{cases}$

在“混流截排”模型中, 并不是所有的污水全都排入雨水管道中, 混排入雨水管道的污水比例 α 是未知的: 若 $\alpha=0$, 意味着没有错接管道, 不会有污水排入雨水管道; 若 $\alpha=1$, 即所有污水都错接到雨水管道, 得到每天排入自然的污水为 49.38 万吨, 改变 α , 我们得到溢出污水环境代价与混入比例 α 的函数关系图, 如下:

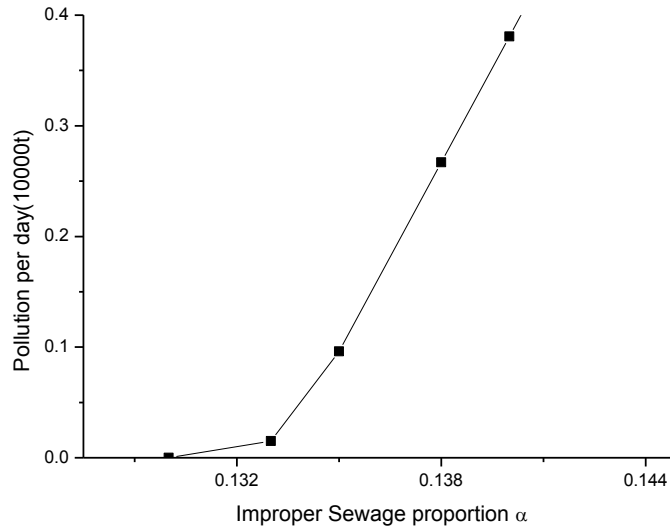


Figure 14

可以看到, 从 $\alpha=0.13$ 开始, 溢出污水代价一直随着 α 增加, 而在 $\alpha=0.14$ 时, 费用曲线出现拐点。因此, 在 α 比较大时, 污水处理已经超出了初期雨水池的承受范围。为了充分利用初期雨水池承载污水的能力, 我们取 $\alpha=0.14$, 意思是所有污水的 14% 混入了雨水管道, 并流向初期雨水池。

按照前面的分析, 取 $\alpha=0.14$, 假设以后每年气候与 2014 年情况类似。

每年中暴雨天气为 9 天, 暴雨时设置初期雨水池接收污水能力为零, 污水全部溢出, 得到每天排污 7.98 万吨, 年内共 71.8 万吨; 中小雨天 120 天, 每天产

生污染代价为 2.55 万吨，年内共 306.0 万吨；无雨天数为 236 天，每天产生污染代价为 0.38 万吨，年内共 89.9 万吨。总计每年排入污水为 467.70 万吨。

题目中写明“截排在过去几年已有较大投入”，假设初期雨水池和它们与污水处理厂的管道已经建设好，并且仍然为最小生成树，总计长为 33.28 千米。



Figure 15

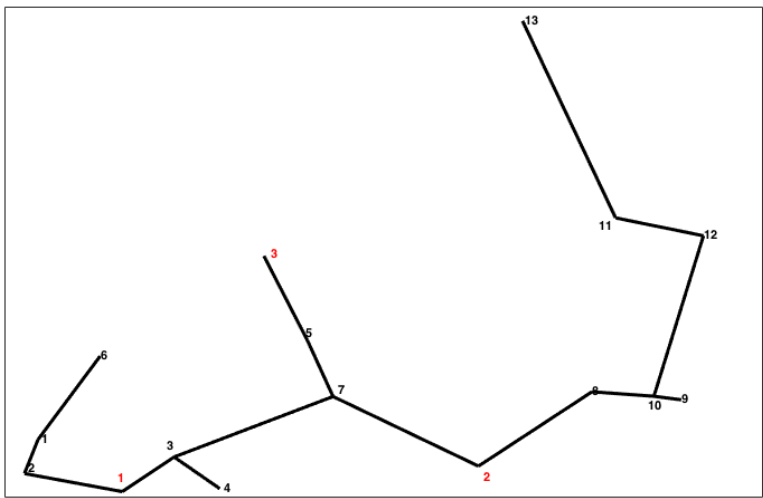


Figure 16

2.6 两种方案环境效益与经济成本比较——河流污染物稀释理论

为了对初期雨水池溢出排放水进行环境效益分析，我们采用河流污染物稀释理论进行评估： $C = (C1*Q1+C2*Q2) / (Q1+Q2)$ 。衡量污染物浓度有很多方法，如重金属离子、悬浮物、磷含量等。本文采用化学需氧量 COD（Chemical Oxygen Demand）来表示，该值越大，说明有机污染物越多，水质越差。初期雨水与生活污水中 COD 含量约 300mg/L，而深圳河水中 COD 含量约 45mg/L^[8]，自来水中 COD 含量约 3mg/L，用河水稀释污染物所需成本不易估算，我们假定污水进入大自然

被稀释之后，相当于间接增加了制作同等体积自来水的难度，在这种情况下，计算同等体积自来水价格就可以作为“环境代价”的替代品，由深圳水务网查询到2016年工业用水价格为每吨3.35元，污水处理费1.05元。每稀释1吨污水，根据公式和杠杆计算，约需要6吨自来水才能稀释到深圳河流的平均值，环境代价花费20.1元，而如果把污水交给污水处理厂，只需要1.05元^[9]。

由2.3节中的论述可知，我们假定截排方案已经建好且后期不再有建设费用，那么它的费用主要来自于全部污水的 α 错排部分造成的污染代价 $Y(\alpha)$ 和 $1-\alpha$ 部分的污水处理费。每年全部污水量为56.97万吨，取每年为365天。

方案	每年溢出污水造成的环境损失和污水处理费(万)	管道建设费(万)
截排	$Y(\alpha) \times 20.1 + (1-\alpha) \times 56.97 \times 365 \times 1.05$	0
清源	$56.97 \times 365 \times 1.05$	21045

取错排比例 $\alpha=0.14$ ，规划期限为5年。得到截排方案费用为14.1亿元，清源方案费用为18.6亿元(包括初期管道建设费7.7亿元)。当 α 增大时，清源花费将比截排节约环保得更多。

2.7 两种方案环境效益与经济成本比较——隶属函数法

费用与环境代价和更大，是不是意味着清源方案占劣势呢？深圳居民对环境污染和建设花费的偏好程度是不一样的，深圳市政府有钱，不差钱，而且已经拨出专项款来治污。我们没有必要为了环境经济总和代价小来给深圳市政府省下这笔治污的预算。

于是我们决定利用模糊数学的隶属函数定量描述。这个隶属函数替代了简单的算术求和办法来比较两种方案的优劣。我们需要一个描述我们心目中污染或者花费给我们带来影响的指标隶属函数，这个函数具有哪些特征呢？

首先，在花费或者污染比较小的时候，变化是缓慢的，比如我们预算是20亿，那么项目总花费是一个亿还是两个亿其实是无所谓的，但是当费用上升到预算附近时，它是否超出预算对于国家的项目财政审计而言就相当重要了，因此在预算附近函数值应该是最敏感的。同理，对于河水而言，清澈到“水至清则无鱼”的地步也是没必要的，河水的敏感位置应该定在现有排放量附近，因为情况比现在更糟还是有所改善对老百姓的心理预期影响是最大的。于是我们决定选取 $\omega(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}$ 作为隶属函数。其中 x 为花费或污染量， $\omega(x)$ 为效用函数， λ 取值与拐点位置有关。

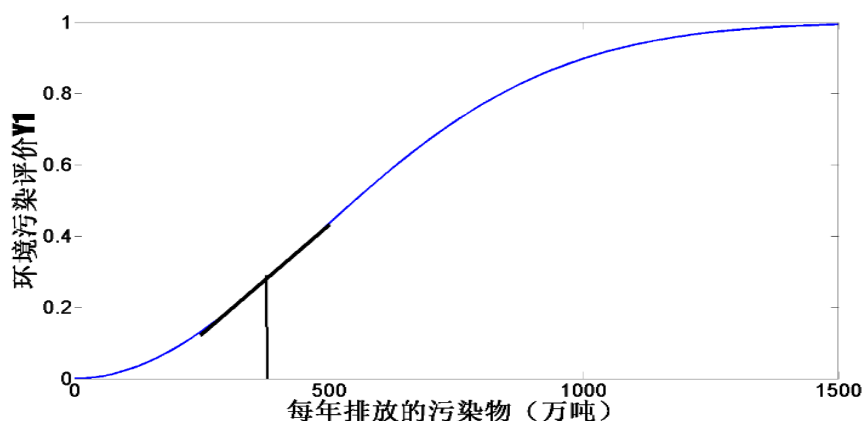


Figure 17

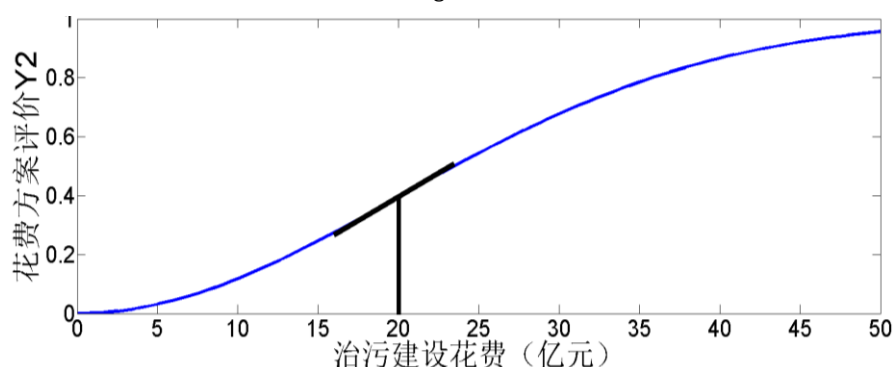


Figure 18

对于污染和花费的评价函数，存在一个拐点，拐点处二阶导数为零，拐点附近几乎成线性变化，偏离拐点较远的地方变化则趋缓。我们把两个拐点分别设置为政府预算 20 亿和现有污染排放量 467 万吨这两个位置。实施清源建造期间五年的污染及经济评价分别是 0.045、0.35，然而截排则是 0.39 和 0.11，这个评价指标越低越好，通过比较可以看出，清源虽然花费多，但是综合来看还是更占优势的。

第三章 两种建设方案稳定性分析

3.1 “清源”有管道断开的流量计算

题目中提到在建立了“分流清源”网络之后，仍然会有“后续管理困难而很难保证不会再出现污水管错接问题”。那么问题来了，我们的这一套“最小生成树”污水管道体系中如果某一条污水管出现错接或者损坏，对整个系统污水承载能力的影响有多大。

回到第三小节的 Fig.3 图，假设我们断开 P1 与 P2 相连的管道，然后用并查集算法查找各个污水源点的情况，发现 P1、P2、P6 仍然分别与各个污水厂相连，

这是不是意味着存在多余的管道呢？（换句话说，是不是意味着最小生成树并不是最节约管道的办法呢）

仔细研究发现，虽然每个污水源仍然与污水处理厂相连，但是整个图的流通性严重降低了。一天内每个源产生的污水和污水处理厂处理的上限都是定值，在给各个点赋值以后，我们发现断开 P1、P2 后，整个图溢出的污水总量为 3。

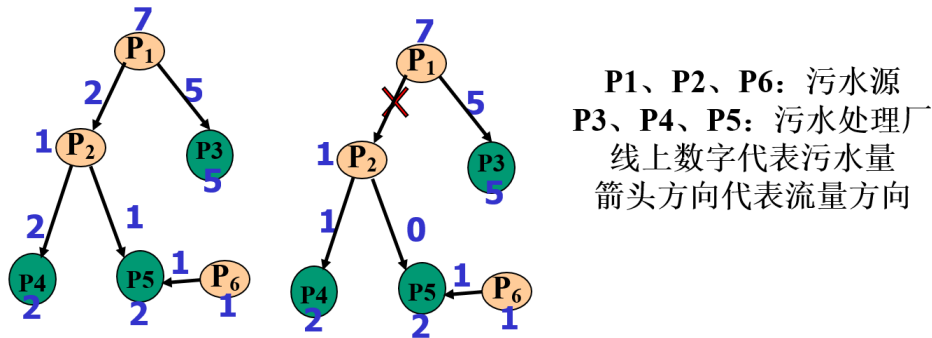


Figure 19

新变量: l_{ij} = 流量（从 i 流向 j, 指向节点为正，离开为负）

断开 i、j 时, $l_{ij} = 0$

判断: 用并查集算法判断源点 i 是否与汇相连, 若无连接, 直接将 s_i 加入溢出流量中; 若 i 不与汇相连, 把它代入约束方程。

约束: $\sum_l \pm l_{ij} + x_i = 0$ 满足节点流量守恒, 节点编号 $i < j$ 时, l_{ij} 系数为正

$\sum_i l_{ik} > 0$ 所有流向“汇”的边 l_{ik} 流量都为正

我们将连接最小生成树的 33 条边依次去掉, 当去掉边 w 时, 其他边处于连通状态时, 重新计算溢出流量, 得到下列表格, 去掉每条边平均溢出增量百分比为 6.6%。

去掉的边	溢出增量 (%)	去掉的边	溢出增量 (%)	去掉的边	溢出增量
1-9	0.1	14-15	22.17	17-19	1.97
16-18	0.8	28-29	0	8-32	7.17
6-12	27.97	3-4	0	23-25	2.8
20-33	6.97	1-3	1.3	8-13	24.97
17-20	6.97	4-6	28.57	12-14	2
15-18	18.87	8-10	0	8-11	2

2-28	0	17-18	15.67	26-27	5.9
3-10	0	27-34	0	25-30	1.17
2-4	0	23-24	4.1	25-31	0
7-12	1.8	26-28	5.6	21-29	0

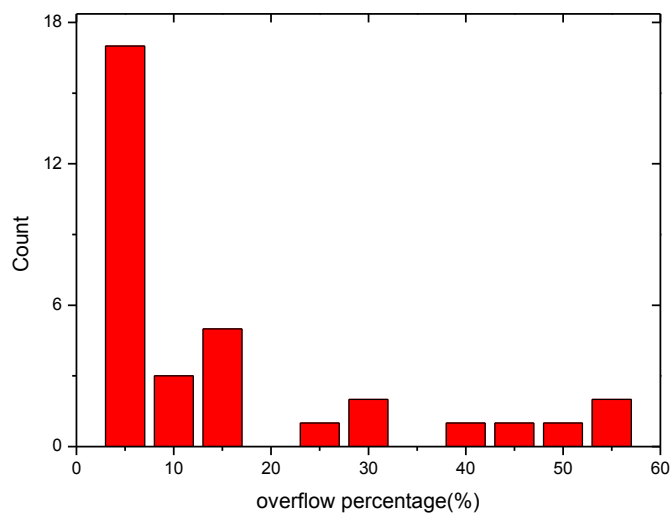


Figure 20

如果去掉的边正好是污水厂与污水源相连的边,会导致该污水厂不能被接入最小生成树中,将导致大量污水不能得到处理,污水溢出量急剧增加。除此之外,去掉其他管道边使得溢出量都比较低,说明对于该最小生成树管道系统,除了一些关键路径需要额外措施保护之外,其他边稳定性良好。

考虑两条管道同时错接或者损坏的情况,我们仍然可以做出统计直方图。

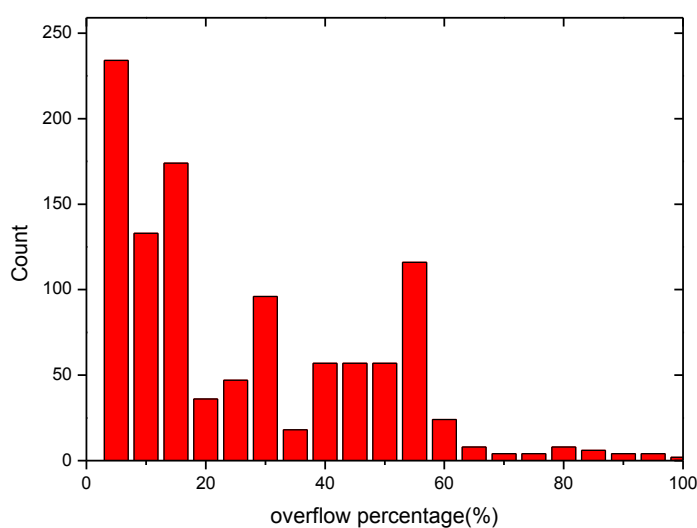


Figure 21

发现两条管道同时错接或者损坏时，该最小生成树的连通能力急剧下降，考虑到两根管道同时损坏的概率不高，但建设者也必须对这一情况做好应急预案。

3.2 关键雨水池扩容后的溢出量计算

由上节的结果，我们发现暴雨虽然溢出污水多，但是天数少；无雨天数虽然多，但是溢出污水少；关键溢出部分来自 120 天的中小雨天（占总共的 64%）。因此重点是想办法减少中小雨时，初期雨水池溢出污水量。

取错排污比例 $\alpha=0.14$ ，考虑中小雨时，每个初期雨水池溢出错排污水量由程序运行得到，如下表

雨池编号	1	2	3	4	5	6
溢出污水（万吨）	0.051	0.473	0.297	0.019	0.750	0.000
雨池编号	7	8	9	10	11	
溢出污水（万吨）	0.146	0.659	0.001	0.092	0.063	

由此可见，第五个初期雨水池“洪湖公园北端”和第八个初期雨水池“仙湖路雨水箱涵”的储水能力成为整个“混流截排”方案的瓶颈。

假如第五个初期雨水池容积能够在一定程度上扩大(扩大方法可以是扩建水池，也可以是安装截污箱涵或对污水进行一定预处理)，在排污比例 $\alpha=0.14$ 且下中小雨的情况下，溢出污水量（万吨）随扩建比例变化图如下所示：

方法：灵敏度分析

新变量： c_k' = 各汇点实际接收污水容量

分析： $c_k' = c_k (k \neq 5)$ 除了 5 号雨水池，其他容量不变

$c_5' = 1.00c_5 \sim 4.00c_5$ 5 号雨水池逐渐增大容量直至原来的四倍

目标： $\min \sum_k \text{overflow}(k) = \text{overflow}(c_5')$

研究总溢出与 5 号雨水池容量关系

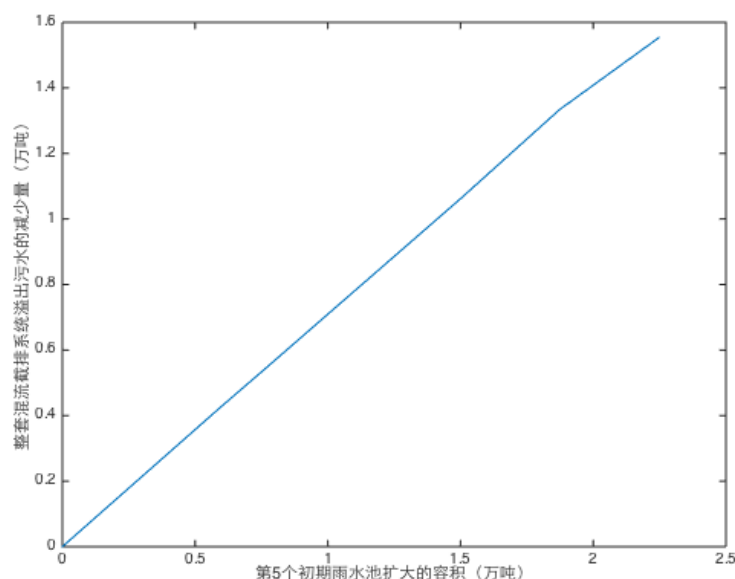


Figure 22

可见按照我们的雨水管网设计，整套“混流截排”系统的容纳能力与第五个雨池的容积的扩建面积成线性关系。如果要改进截排方案，就可以从提升关键雨水池容纳能力并安装截污箱涵这个办法入手。

譬如，当第五个雨水池容纳能力扩大为原来的四倍时，此时溢出的污水也从 2.5508 万吨变为 0.9975 万吨。

3.3 降雨强度波动的“截排”溢出量计算

我国气象部门一般采用的降雨强度标准为：

小雨：12 小时内雨量小于 5 毫米，或 24 小时内雨量小于 10 毫米；

中雨：12 小时内雨量为 5-14.9 毫米，或 24 小时内雨量为 10-24.9 毫米；

大雨：12 小时内雨量为 15-29.9 毫米，或 24 小时内雨量为 25-49.9 毫米；

暴雨：12 小时雨量等于和大于 30 毫米，或 24 小时雨量等于和大于 50 毫米。

我们很难根据上述雨强定义估算前 45 分钟降雨强度，在假设中我们利用全年降雨量和 5 月份前三小时降雨估算的初期雨水量也不一定准确，而且每次下雨量存在较大差异。降雨量不同直接影响的是初期雨水池能有多大比例的容量来接收污水。

算法：灵敏度分析

变量： c'_k = 各汇点实际接收污水的容量 $c'_k = \beta c_k, 0 < \beta < 1$

目标： $\min \sum_k \text{overflow}(k) = \text{overflow}(\beta)$

研究总溢出与所有雨水池接收污水容量比例（即当天降雨量）的关系

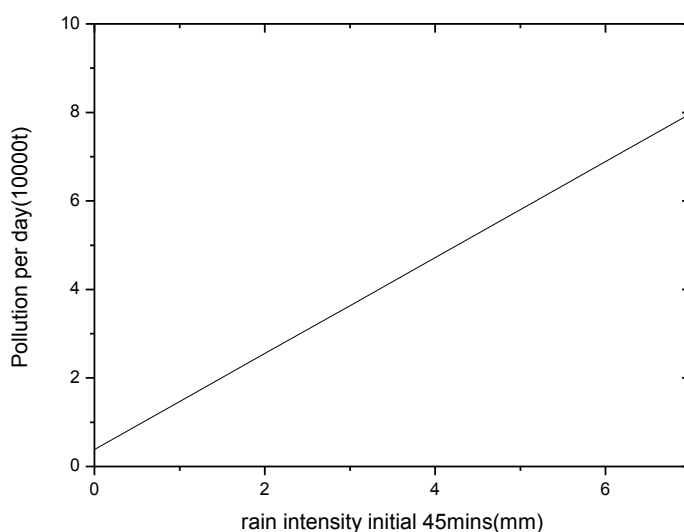


Figure 23

3.4 其他因素变化对“截排”溢出量的影响

污水源产生污水量一旦发生变化(比如每天生活污水和工业污水量会有轻微波动)，对溢出流量产生影响与改变排污比例类似，见 2.6 节。

一旦某几个污水源建立了与污水厂的连接，它们排放到初期雨水池的污染总量也会发生变化。

3.5 提升管道系统稳定性的途径

我们注意到，截排系统对于各种可变参数的溢出量影响几乎是线性的，然而清源管道系统的输运能力却对关键路径的连通性比较敏感。可见最小生成树的清源管道虽然满足了管道长度费用最少，稳定性却极大依赖于关键路径，要改善它的稳定性只能从两个方面入手，一是修建更多的管道使得污水处理厂与更多临近的污水源点相连，二是在关键路径修建备用管道，使得第一管道损坏或错接时，备用管道能及时派上用场，保证整个系统的稳定运行。

第四章 建造“清源”管道顺序的分析

4.1 改造思路与基本假设

由于建设改造“分流清源”水管系统需要几年的进程，在这几年中，清源与截排共存。为了保证居民秩序不受大规模影响，改造过程必须循序渐进，体现在总体上每年会有完成总长度一定百分比的要求，同时对于局部地区也不能把一个节点地址周围的很多管道同时修建。在这种限制条件下，修建进程还必须满足相应的环保进度要求。

A、假设初期雨水池、污水处理厂、雨水管道系统已经建好。污水源与污水处理厂有一定连接使得“ $1-\alpha$ ”的污水量能够得到处理，剩下 α 部分错排到雨水管道系统中。需要改造好的就是污水源到污水处理厂的管道。取 $\alpha=0.14$ 。

B、治污成效解读

“1年：完成沿湾排污口整治，漏排污水全收集全处理”其中“漏排全收集”表明在干旱时，错排污水都能排入初期雨水池，没有溢出

“3年：重点河段主要水质指标基本达V类”表明即便在下中小雨时，错排污水都能排入初期雨水池，全年350天以上没污水，达到“基本”要求。

“5年：深圳河达地表水V类，深圳湾近岸海域达四类海水”表明即便在下暴雨时，仍然没有溢出，对应着“分流清源”系统全部建成。

C、“全面实施这些工程会影响居民生活秩序”，说明工程不能都在第一年完成。假定第一年修建管道总长的20%~25%，以后每年的规划上下限增加20%，比如第二年完成修建管道总长的40%~45%…以此类推，保证第五年能完成要求

D、一个节点每年只能修建一条与它相连的管道

E、最终目标为计算五年内的溢出污水总量最小

4.2 建造顺序的数学模型

方法：搜索剪枝，先确定初始解，搜索时，如果当前解 step 没有到 5，然而总污染量已经超过最优解，则减掉该枝；如果当前解 step 到 5，且总污染量小于最优解，则用当前解替换掉最优解。

常量： $\alpha=0.14$ 错排污水比例恒定

V 与污水处理厂建立通路的污水源点集合

y 表示某一个固定的年份

新变量： $link(w) = \begin{cases} 0, & \text{边 } w \text{ 断路} \\ 1, & \text{边 } w \text{ 连通} \end{cases}$

y' 表示第几年

约束条件：

工程进度 $y=1$ $0.2 \sum w < \sum link(w) * w < 0.25 \sum w$

$y=2$ $0.4 \sum w < \sum link(w) * w < 0.45 \sum w$

$y=3$ $0.6 \sum w < \sum link(w) * w < 0.65 \sum w$

$y=4$ $0.8 \sum w < \sum link(w) * w < 0.85 \sum w$

$y=5$ $\sum w = \sum link(w) * w$

居民秩序： $\sum_{y'=y,j}^i link(w_{ij}) \leq 1$ ，任意节点 i ，相连所有边，每年最多建一条

政府要求： $y=1$ ： $\beta = 1$ $\min \sum_k overflow(k) = 0$

$y=3$ ： $\beta = 5/7$ $\min \sum_k overflow(k) = 0$

$y=5$ ： $\beta = 0$ $\min \sum_k overflow(k) = 0$

环保目标： $\min \sum_{y=1}^5 overflow(y)$

$y' = y$, $overflow = 236 \times overflow(\beta = 1)$

$+120 \times overflow\left(\beta = \frac{5}{7}\right)$

$+9 \times overflow(\beta = 0)$

为了形象地表明我们的模型，我们设计了一个小例子，如图所示。设 P_1, P_2 是污水点源，在不考虑“源”和“汇”的距离，考虑五年内的溢出污水总量最小的情况下的建造顺序如图 6 所示。如果考虑污水厂与污水源的距离，而不考虑容量，建造顺序往往与污水源远近有关。当每年很多边同时修建，并要求满足上述所有点的所有苛刻条件时，计算量非人力所能为。

设置一个长度为 33 的一维数组 $u[]$ ，这个一维数组储存 33 条边是否处于连通状态，那么就有 $2^{33} = 8.59 \times 10^9$ ，而每种状态都会对应一个最小溢出污水量。最后的结果取决于演化的过程，即便是同一末态，如果初态不同，算出的结果也不同，可见本算法除了回溯和搜索剪枝以外，很难用动态规划等算法得到最优解。

4.3 结果与分析

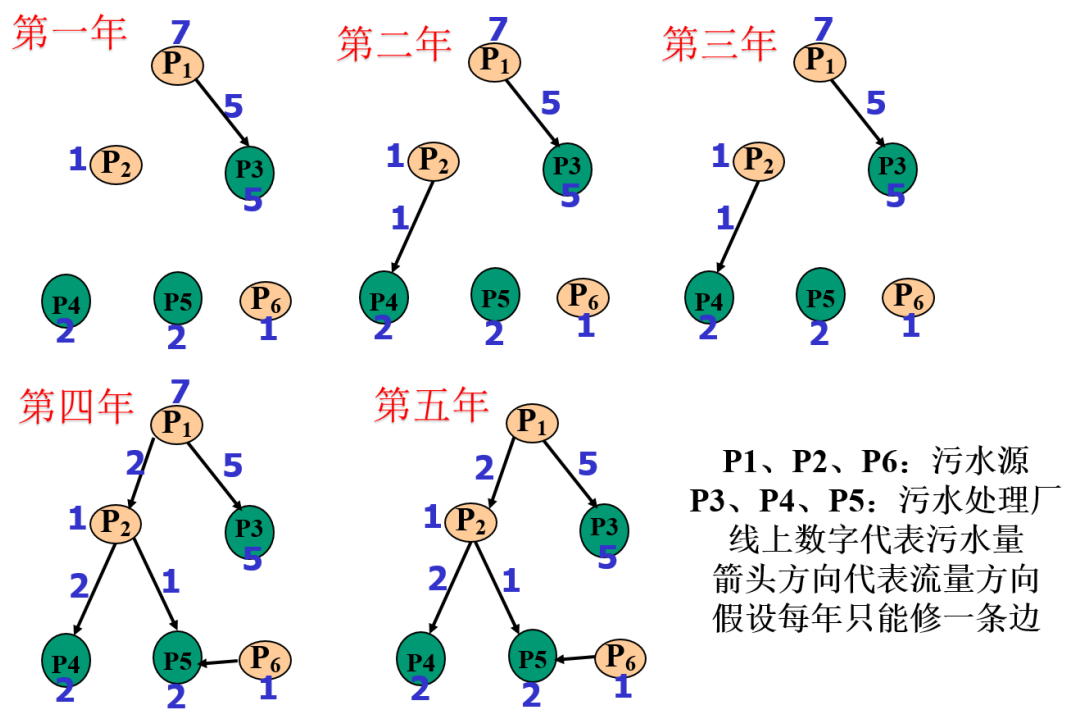


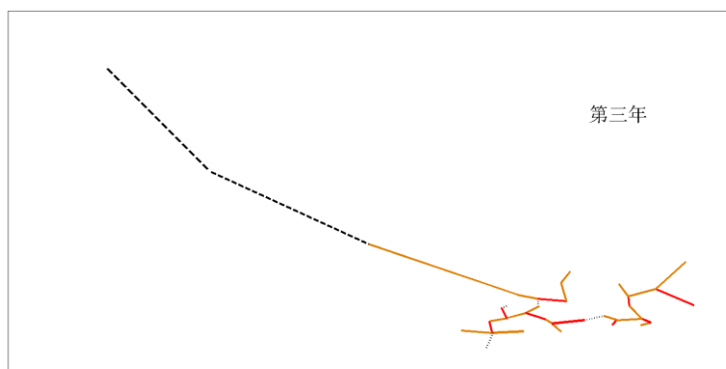
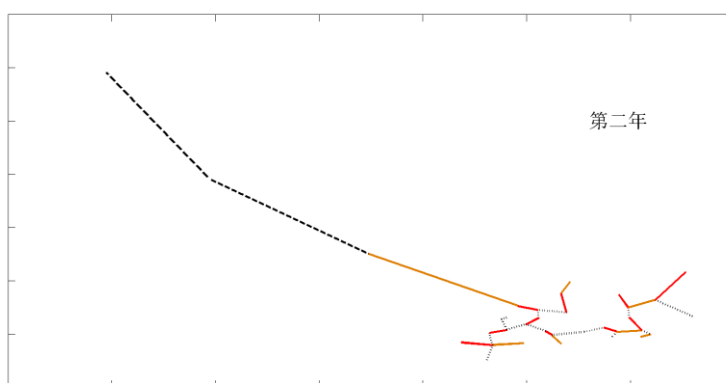
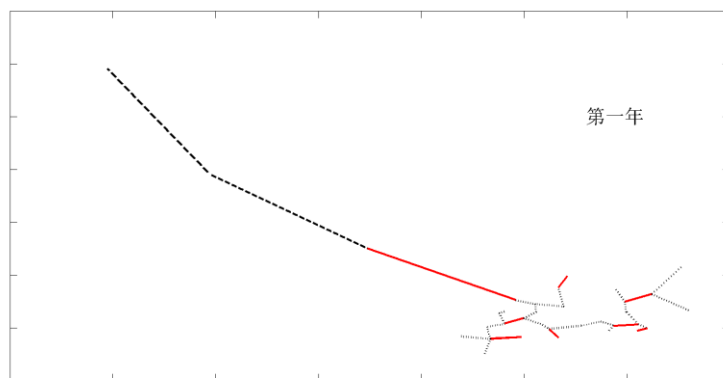
Figure 24

经过计算，我们得到的建造顺序如下表所示

边	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
1-9				0.395	
16-18			0.542		
6-12		0.545			
20-33	0.564				
17-20			0.603		
15-18		0.767			
2-28				0.819	
3-10		0.931			
2-4		0.966			
7-12	0.997				
19-23			1.003		
14-15				1.051	
28-29		1.069			
3-4	1.090				

1-3			1.129		
4-6			1.177		
8-10			1.241		
17-18	1.250				
27-34	1.262				
23-24		1.444			
26-28			1.462		
17-19		1.495			
8-32	1.541				
23-25	1.551				
8-13		1.571			
12-14			1.655		
8-11				1.760	
26-27		1.985			
25-30			2.563		
25-31		3.282			
21-29	9.165				
5-21				11.086	
5-22					12.189
当年占总 长度百分 比(%)	24. 83%	20. 03%	16. 22%	21. 54%	17. 38%

节点 1-31 属于污染源, 32-34 属于污水处理厂。可以看到程序运行的结果, 第一年修建了与污水厂相连的污水点源, 以及所有三叉点的某一条边和一条长边。后面每一年修建过程在此不多赘述。修建过程如下图所示:



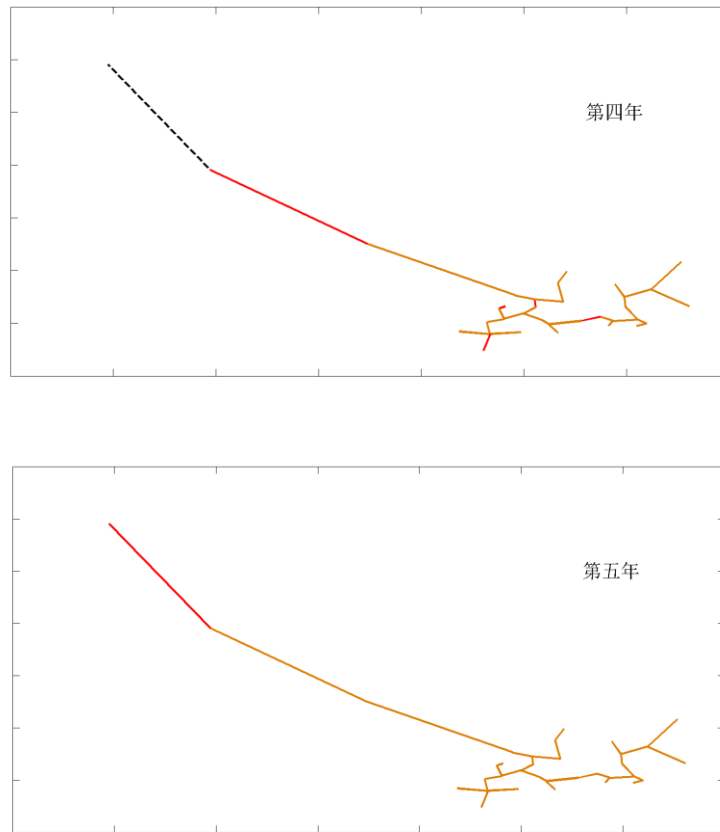


Figure 25

黑线代表过去修建的部分；红线代表当年修建的部分；虚线代表没有完成的部分。

由此得到的每日溢出流量如下表所示：

年份	无雨溢出(万吨)	中小雨溢出(万吨)	暴雨溢出(万吨)
第 0 年	0.38	2.55	7.98
第 1 年	0	1.86	7.23
第 2 年	0	0.97	6.40
第 3 年	0	0	0.85
第 4 年	0	0	0.45
第 5 年	0	0	0

按照每日溢出流量与天数的乘积，我们得到排污水污染量（万吨）与年份的关系表：（其中第 0 年表示尚未修建时污水量，取错排比例 $\alpha=0.14$ ）

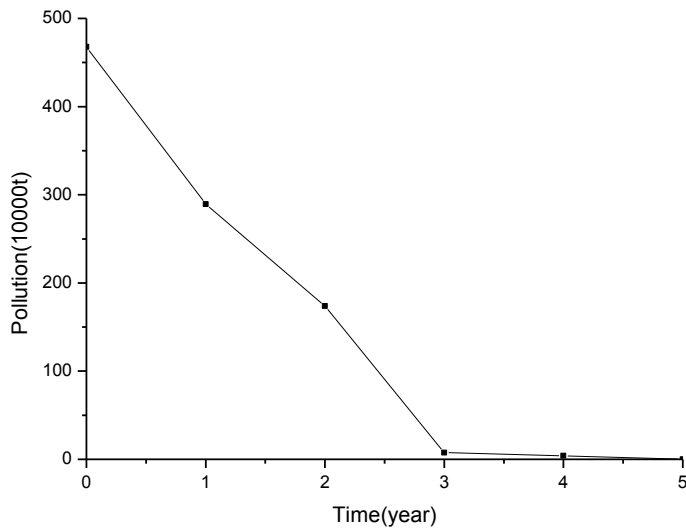


Figure 26

我们看到上述结果满足政府排污目标,但是前两年建设主要是为了满足第三年中小雨无溢出的硬性约束,而第四、五年则是为了在进行计算中,我们进行了三个近似,一个是考虑下雨溢出时,不考虑雨水管道网的流量的重新分布;二是当某一个污染源与污水处理厂建立完备连接时,不考虑雨水管道网的流量的重新分布(见第三章第8节);三是为了使得85亿种状态快速求解,将目标函数简化为暴雨时的溢出量,从而成为线性函数,便于计算。

通过上述模型与2.6节的模型,该方案费用来自于5年内 $1-\alpha$ 部分的污水处理费共93885万元,加上建设费用76753万元,得到总费用为17.1亿元。

总结

我们分析了清源截排区别,然后用最小生成树构建清源,用分形估算实际管道长度,用费用流分析截排污染下限。我们用隶属函数和稀释理论两种不同的角度去评估清源和截排的优劣。我们改变参数,断掉边,分析清源和截排稳定性,寻找一种建造管道策略,使得费用与污染和最小。我们这个模型还有一些可以后续改进的地方,首先是可以地形,可以通过成千上万个点的经纬度和海波,通过插值方法,做出三维地形图,根据地势高低确定驱动污水的电费以及污水的流向。我们可以根据污染物在自然中降解和扩散的情况来列出相应的偏微分方程。通过时间序列模型,白化方程来预测污染停止之后几年后的水质,另外就是如果拿到更多的水文数据,污染指标应该采取更加科学的内梅罗指数法。还有一个问题是,我们在建立动态模型时,直接采取静态模型最优的结果来,没有考虑优化目标变化导致建造边的变化,不过考虑虽然不是最优解,这个较优解也可以接受。最后,如果因为某种原因,建造顺序受到了影响,需要调整,改变程序也很容易求解出新的顺序以及新情况中的总污染和花费。

深圳市一方面水资源贫乏,另一方面河流普遍收到污染。从自然条件上来看,目前深圳市水污染难以治理的原因,属于热带季风性气候,虽然降雨量丰富,年降水量不均匀,但丰水季节水量集中,枯水季节水量极少,导致河床干涸。深圳市路面硬化率高,地表径流滞留时间短,水库,坑塘众多,但没有蓄水量超亿立方米的湖库,造成深圳境内存不了雨水,70%的雨水资源白白流入了大海。针对深圳水体污染问题,深圳政府下了很大的决心,对市民提出的承诺:“一年初见成效,三年消除黑涝,五年基本达标,八年让碧水和蓝天共同成为深圳亮丽的城市名片”,其中的规划建设的项目主要是:1. 对污水、污泥处理厂扩建升级 2. 新建污水管网和配套管网改造 3. 重点河流的水环境综合整治及生态修复。从本文建立的模型出发,综合经济和环境因素考量,我们可以认识到:1. 单一处理后的污水集中排放并不合理,而是要集中处理和分散处理相结合,分散处理可以利用天然河道运输采用就近排放的原则。 2. 可以对现有水库的扩容增蓄以及新增水库的方式,用来解决外来水源污染和应急供水。

所以,从本文建立的模型出发,得出的结果与政府目前的规划工作基本相同。我们看到污水染治理工作也不能一蹴而就,随着水务基础设施建设,加大河道排污管理,加快污水处理设施和配套管网建设等举措,城市污水处理率的提高,最终环境治理目标是可以达成的。政府规划中没有本文中提到的对现有水库的扩容增蓄或新增水库,这一点也有助于水资源问题 and 环境问题。

参考文献

- [1] 何文文, 孙妍. 哭泣的茅洲河我们也不想叫你“黑河” [N]. 深圳新闻网, http://jb.sznews.com/html/2013-10/15/content_2649827.html, 2013-10-15
- [2] 深圳市规划局等. 深圳市排水管网规划[C]. 深圳: 深圳市规划局, 2007
- [3] 深圳市治水提质工作计划(2015—2020年)
- [4] 汪明明. 雨水池设计理论研究[D]. 北京: 北京林业大学, 2008
- [5] 容义平. 初期雨水处理措施在排水管网规划中的运用[R]. 深圳市新城市规划建筑设计有限公司
- [6] 徐文征. 城市污水处理厂接纳初期雨水的可行性分析[J]. Water Purification Technology, 2012
- [7] 深圳市 2015 年年鉴
- [8] 刘勇. 深圳市深圳河等 5 个流域污水截流倍数与河流水质关系研究[D]. 广西: 桂林理工大学, 2010
- [9] 米志立. 深圳市污水处理效果和经济性分析[D]. 湖南: 湖南大学, 2006
- [10] 分形几何学

附录

附表 1：深圳河流域特区内规划预测 2020 年污水量

序号	地点	预测污水量 (万 m ³ /d)	经度	纬度
1	黄木岗	1.2	114.087818	22.563951
2	八卦岭	1.8	114.105848	22.565681
3	上步工业区	2.8	114.090522	22.554107
4	白沙岭	1.4	114.099611	22.559175
5	园岭	0.8	113.947097	22.695765
6	荔枝公园	0.6	114.108917	22.552996
7	滨河大道	1.8	114.116632	22.541175
8	福田南	1.6	114.083571	22.540033
9	笔架山公园	0.1	114.09084	22.56615
10	中心公园	0.2	114.082063	22.551106
11	皇岗口岸 114	2.0	114.080374	22.524487
12	蔡屋围	1.2	114.112199	22.54915
13	广场北	2.8	114.068513	22.542495
14	东门	2.8	114.127939	22.552365
15	中兴路	3.3	114.137223	22.556347
16	北斗	0.8	114.141236	22.547961
17	新秀	0.7	114.155465	22.553694
18	黄贝岭	2.4	114.143367	22.552417
19	碧波花园	1.6	114.149465	22.565943
20	罗芳村	1.3	114.159798	22.550038
21	大头岭	2.1	114.023668	22.625433
22	水贝	3.2	113.897512	22.795394
23	太安路	0.8	114.149093	22.574961
24	布心	4.1	114.144521	22.587239
25	深圳水库	0.1	114.162085	22.582075
26	笋岗	3.6	114.119315	22.570712
27	清水河	2.0	114.116726	22.588402
28	泥岗	1.5	114.105302	22.573028
29	银湖	1.3	114.095687	22.576718
30	莲塘	5.9	114.180515	22.566535
31	大望	1.17	114.176694	22.608326

附表 2：深圳河流域特区内污水处理厂的规模与位置

序号	名称	近期规模 (万 m ³ /d)	经度	纬度
1	滨河污水处理厂	30	114.098488	22.541494
2	罗芳污水处理厂	35	114.154912	22.547718
3	布吉污水处理厂	20	114.120937	22.599062

附表 3：深圳河流域特区内初期雨水池规模与位置

序号	贮水池地点	汇水面积 (ha)	容纳污水量 (万吨)	经度	纬度
1	红荔路与福田河东北角	122	0.8540	114.085152	22.55423
2	深南大道与福田河东北角	38	0.2660	114.082997	22.545914
3	同心路与荔香街西北角	164	1.1480	114.106701	22.549952
4	鹿丹村绿化带	200	1.4000	114.11394	22.542218
5	洪湖公园北端	107	0.7490	114.127823	22.578434
6	笋岗路与公园路东南角	30	0.2100	114.094991	22.574614
7	文锦路雨水箱涵出口东侧绿化带	200	1.4000	114.13188	22.564729
8	仙湖路雨水箱涵排入莲塘河出口处	70	0.4900	114.172895	22.565889
9	港连路雨水箱涵排入莲塘河出口处	80	0.5600	114.187036	22.563927
10	畔山路雨水箱涵排入莲塘河出口处	60	0.4200	114.182705	22.564794
11	大望村	14	0.0980	114.176632	22.608383
12	梧桐山河	28	0.1960	114.190554	22.604012
13	原白泥坑人工湿地	200	1.4000	114.161901	22.656496