

基于广义乘子法的月球软着陆轨道快速优化设计

赵吉松,谷良贤

西北工业大学航天学院, 西安 710072

摘要 从探月器质心运动方程组出发,以探月器环绕月心的旋转角速度为中间变量,通过积分变换,将其对时间变量的积分转化为对状态变量的积分,使得原问题转化为终端积分变量固定型最优控制问题。在此基础上,通过优化变量的直接离散化和四阶 Admas 预测-校正数值积分方法,将软着陆轨道优化问题转化为有约束非线性规划问题。采用广义乘子法处理约束条件,采用拟牛顿法求解处理后的无约束最优化问题。仿真结果表明,此方法收敛速度快(耗时小于 1 s),优化精度高(接近理论最优解),对初始控制量不敏感、鲁棒性好,可用于探月器机载计算机实时生成软着陆轨道。

关键词 月球软着陆: 快速优化: 积分变换: 广义乘子法: 拟牛顿法

中图分类号 V412. 4

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2008)20-0050-05

Rapid Optimization of Lunar Soft Landing Trajectory Based on Generalized Lagrange Multiplier

ZHAO Jisong, GU Liangxian

College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

Soft landing is an important prerequisite of lunar exploration. Without air on the lunar surface, the velocity of lander must be reduced with thrust. The reduction of fuel consumption is a main consideration in increasing payload. So the fuel optimal lunar soft landing is an optimal control problem with variable final time. This paper develops a rapid optimization method for lunar soft landing trajectory based on integral transformation, Generalized Lagrange Multiplier (GLM) and quasi - Newton method. Through integral transformation, the negative angle velocity of lander corresponding to the lunar center is first introduced to replace the time in the motion equations, and the original optimal lunar soft landing problem is transformed into a fixed final integral variable optimal control problem. Then, by direct discretization of the control variable, the fixed final integral variable optimal control problem is converted into a Nonlinear Programming (NLP) with 4th Admas predict-modification scheme for integration. Finally, GLM is used to deal with constraints in the NLP, and the obtained unconstrained NLP is solved with quasi - Newton method. The solutions are compared with that obtained from Pontryagin's Maximal Principle (PMP). The effect of initial penalty factor on the robustness of this approach is analyzed. Simulation results show good accuracy, rapid convergence (time consumption of less than 1 s), and robustness with initial values of this approach, which means that it can used to generate an optimal soft landing trajectory through the onboard computer of the lander.

Keywords Iunar soft landing; rapid optimization; integral transformation; generalized Lagrange multiplier; quasi-Newton method

0 引言

在月球表面实现软着陆是月球勘探的重要前提。由于月球表面没有大气,着陆器的速度必须完全由制动发动机抵消,所以,减少燃料消耗是增加有效载荷的关键所在。月球最优软着陆问题是一类终端时间自由型最优控制问题,其求解方法分间接法和直接法门。间接法研究的比较少点,主要借助于Pontryagin 最大值原理(Pontryagin 's Maximal Principle, PMP),把泛函优化问题转化为两点边值问题(Two Point Boundary Value Problem, TPBVP),其主要问题是初值难以猜测,稳定性差;直接法研究的比较多,文献[3-5]将控制量和终端时间均作为优化变量,然后借助于智能算法优化,取得较好结果,其

收稿日期: 2008-08-28

作者简介: 赵吉松, 西安市友谊西路 127 号西北工业大学航天学院, 博士研究生, E- mail: zhaojisongjinling@163.com; 谷良贤(通信作者), 西安市友谊西路 127 号西北工业大学航天学院, 教授, E- mail: gulx@nwpu.edu.cn



主要问题是计算量较大,优化精度偏低。文献[6]通过引入中 间积分变量能量代替原状态方程中的时间变量,将原问题转 化为一个终端积分变量固定的最优控制问题,然后采用伪光 谱法求解, 计算量较小, 但优化效果偏差, 优化出的最优轨道 和文献[2~5]相差较大。

本文以探月器环绕月心的旋转角速度为中间变量,通过 积分变换,将月球最优软着陆问题转化为终端积分变量固定 型最优控制问题。在此基础上,通过优化变量的离散化,并采 用四阶 Admas 预测-校正数值积分方法,将软着陆轨道优化 问题转化为有约束非线性规划问题 (Nonlinear Programming, NLP), 采用广义乘子法 (Generalized Lagrange Multiplier, GLM) 和拟牛顿法求解非线性规划问题, 得出最优软着陆轨 道。仿真结果表明,该方法收敛速度快、优化精度高,对初始 控制量不敏感、鲁棒性好,可以用于探月器机载计算机实时 生成软着陆轨道。

1 月球最优软着陆问题描述

月球软着陆方案¹⁴是,首先将探月器射入一个约 100 km 高度的环月停泊圆轨道;满足一定条件后,向飞行器施加一 制动脉冲, 使飞行器讲入 100 km xl5 km 的椭圆轨道: 当下降 到约 15 km 高度的近月点时, 制动发动机点火, 开始软着陆。 探月器质心运动方程组在许多文献中都有介绍[26], 为便于比 较,这里采用文献[2]的模型。忽略月球自转、月球引力非球 项、日月引力摄动等影响,探月器的质心方程组为

$$\dot{r} = v$$

$$\dot{v} = \frac{F}{m} \sin \left(-\frac{\mu}{r^2} + r^2 \right)$$

$$= \frac{F}{r} = \frac{(F/m)\cos \left(+\frac{2v}{r} \right)}{r}$$

$$\dot{m} = -\frac{F}{\ln r}$$
(1)

式中, r 为着陆器距月心矢径; v 为着陆器在 r 方向上的速度; 为着陆器环绕月球表面的航程角; 是航程角的角速度; m 为着陆器质量: µ为月球引力常数: F为制动推力器的推力, 0<F<F_{max}; I_{so} 为制动推力器的比冲; 为推力方向角, 即推力方 向与当地水平面的夹角, 取锐角, 向上为正, 向下为负。

最优软着陆轨道设计的目的是寻找最优控制 F'(t)=F(t). *(t)= (t), 使性能指标

$$J=-\int_{t_i}^{t_i} \dot{m} dt = m(0)-m(t_i) \tag{2}$$

取最小值,并且满足软着陆条件

$$\begin{cases} r(t_i) - R_{ri} = 0 \\ v(t_i) - 0 = 0 \\ (t_i) - 0 = 0 \end{cases}$$
 (3)

式中, t。为软着陆的初始时刻, 定义 t。=0, 该时刻的状态参数 由椭圆轨道的近月点确定; t, 为着陆时刻, t, 未知; Rm 为月球 半径, R,=1738 km。

根据 Pontryagin 最大值原理[7], 无奇异情况下, 推力应为 开关控制:或者以最大推力工作,或者为零。理论上,需分析 切换点,但为了简化问题,采用常值推力假设[3-5],即认为制动 发动机一直以最大推力工作。这样一方面有利干优化,另一 方面可以降低发动机复杂性。另外,部分间接法的算例也验 证了该假设的合理性[28]。因此,本文采用常值推力假设,即取 $F(t) = F_{maxo}$

2 月球最优软着陆轨道的快速求解

2.1 运动方程的积分变换

月球最优软着陆问题是一类终端时间自由型且受终端 约束的最优控制问题。对于这类问题,一种方法是将终端时 间作为设计变量进行优化[3-5],但这样做会加大计算量,甚至 难以收敛,不利干快速优化;另一种方法是通过引入能量变 量替换积分变量,将其转化为终端积分变量固定型最优控制 问题[6.9]。但在月球最优软着陆时,能量并不是均匀变化的, 在着陆点附近,能量变化率趋于零,以能量为积分变量的数 值误差较大,而微小的能量误差将会带来很大的状态误差。 并且,优化迭代过程是未知的,当沿着非最优轨迹时,能量 不一定是单调变化的, 这将会导致基于能量的积分无法进 行[10]。

本文选择状态量 作为积分变量。这样只要推力方向角 在(-90°90°)范围内, 的单调性就有保证,且其变化较为均 匀。为了使得积分变量单调递增,引入变量 =- ,则

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = \frac{(F/m)\cos +2v}{r}$$
 (4)

将方程组(1)两边同时除以 d /dt,则转换为对 积分, 转化后的方程组为

$$\frac{dr}{d} = \frac{V}{f}$$

$$\frac{dV}{d} = \frac{(F/m)\sin - (\mu r^2) + r^{-2}}{f}$$

$$\frac{d}{d} = \frac{F}{f}$$

$$\frac{d}{d} = -1$$

$$\frac{dm}{d} = -\frac{F}{I_{so}} \cdot \frac{1}{f}$$
(5)

式中, $f = d /dt = ((F/m)\cos +2v)/r$ 。

为了得到各状态量随时间的变化、需增加微分方程如 下:

$$\frac{dt}{d} = \frac{1}{d/dt} = \frac{1}{((F/m)\cos +2v)/r}$$
 (6)

式(5)和式(6)组成新的状态方程,因 =-,所以实际计算时 方程(5)中第4式可以删去。变换后的目标函数为

变换后的约束条件为



$$\begin{cases}
r(_{f}) - R_{n} = 0 \\
v(_{f}) - 0 = 0
\end{cases}$$
(8)

式中, $_{0}$ =- $_{0}$, $_{f}$ =- $_{f}$; 下标 '0'和 'f'分别表示初值和终端值, 下同。

至此,原终端积分变量不确定型最优控制问题转化为终端积分变量固定型最优控制问题。转化后的问题一方面更适合于优化数值算法求解;另一方面终端约束条件减少了一个,终端约束更容易满足,收敛速度更快。并且,转换过程也较为简单。

2.2 最优软着陆问题转化为非线性规划问题

对于上述终端积分变量固定型最优控制问题,本文将其转化为非线性规划问题求解。对于由最优控制问题转化成的非线性规划问题,从优化变量得出目标函数和约束条件时,需要借助于数值积分。常用的经典四阶 Runge-Kutta 积分方法计算量偏大,不利于快速优化;四步四阶 Admas 外推方法计算量小,但其截断误差系数过大,精度偏低;四阶 Admas 预测-校正方法,其精度与四阶 Runge-Kutta 方法不相上下,但计算量只有后者的一半,可用于本文的快速优化^[11]。为保证优化精度,转化方法采用精度较高的直接离散化方法。

直接离散化方法将整个最优控制过程根据积分变量分成若干个段,段的端点称为节点;选择节点处的控制变量作为优化参数,通过插值得到整个最优控制过程的控制变量;根据这些控制变量积分状态方程形成目标函数和约束条件,得到数学规划问题,具体如下^[12]。

- 1) 将整个飞行过程分为 N 段,形成 N+1 个节点 $_{i}$ (i=0,1,2,...,N),取 $_{i}$ 时刻的控制量 $_{i}$ 为优化变量,共有 N+1 个变量:
- 2) 整个飞行过程的控制量可以通过在各个节点处线性插值得到,即

$$_{i}()=_{i}+\frac{_{i+1}^{-}}{_{i+1}^{-}}(_{i}-_{i})$$
 $_{i}$ $<_{i+1}, i=0, 1, 2, ..., N-1$ (9)

3) 采用四阶 Admas 预测-校正方法,从 ₀到 ₁积分状态方程(5)和(6),得到目标函数(式(7))和约束条件(式(8))。

经过上述处理, 月球最优软着陆问题转化为非线性规划问题。

2.3 有约束非线性规划问题的快速求解

求解有约束非线性规划问题时,罚函数法是一种比较常用的方法。但从几何直观上看,罚因子越大,目标函数在约束集外部的几何形状也就越陡,这会给无约束最优化带来困难。另一种理论上较好的方法是古典 Lagrange 乘子法。该方法通过引入乘子项处理约束条件,然后求解无约束最优化问题。但是对于稍复杂的实际问题,确定出合适的乘子比较困难。广义乘子法则是把罚函数外点法与古典的 Lagrange 乘子法有机地结合起来,试图在罚因子适当大的情况下,借助于调节乘子逐次逼近原非线性规划问题的最优解,这样就避免了单纯使用外点法或古典 Lagrange 乘子法的缺点。优化算法

中,通常基于梯度信息的优化方法比非梯度法的计算量小^[13]。 因此,近年来比较流行的智能算法(如遗传算法、蚁群算法、神经网络算法等),均因计算量大而不适于快速优化。

基于上述分析,本文采用广义乘子法和拟牛顿法求解有约束非线性规划问题。

2.3.1 广义乘子法

具有等式约束的非线性规划问题的标准形式为

min
$$f(x)$$

st $h_i(x)=0, j=1, 2, ..., I$ (10)

式中, f, $h_j(j = 0, 1, 2, ..., I)$ 为二次连续可微函数, x 为 n 维待优化参数向量。

定义增广 Lagrange 函数

$$(x, ,)=f(x)- {}^{T}h(x)+ - {}^{T}h^{T}(x)h(x)$$
 (11)

式中, =[1, 2, ..., 1]^T, h=[h₁(x), h₂(x), ..., h₁(x)]^T。

采用广义乘子法求解式(10)的计算步骤如下[13]。

- 1) 给定初始点 x⁽⁰⁾, 乘子向量初始估计 ⁽¹⁾, 初始罚因子 , 允许误差 >0, 参数 >1, (0, 1), 置 k=1。
 - 2) 以 x^(k-1)为初始点, 解无约束最优化问题

min
$$(x, ,)$$
 (12)

得到解 x^(k)。

3) 若||h(x^(k))||<,停止计算,得到点 x^(k);否则,继续执行下面步骤。

4) 若

$$\frac{h(x^{(k)})}{h(x^{(k-1)})}$$

置 = ,转步骤 5); 否则,直接进行步骤 5)。

5) 采用下式修正乘子

$$_{j}^{(k+1)} = _{j}^{(k)} - h_{j}(x^{(k)}) \qquad j=1, 2, ..., I$$
 (13)

置 k=k+1, 转步骤 2)。

对于步骤 2) 中的无约束最优化问题(式(12)), 本文采用拟牛顿法求解。

2.3.2 拟牛顿法

拟牛顿法是无约束最优化方法中最有效的一类算法^[13]。 以 DFP 算法和 BFGS 算法最著名,后者比前者计算量稍大, 但不易出现病态问题。本文采用 BFGS 算法。下面以无约束参 数优化问题 min f(x)(x 为待优化参数向量) 为例,简要介绍 BFGS 算法^[13]。

BFGS 算法的基本思想是, 在 x_{k+1} 处按以下方法产生一个对称正定矩阵 H_{k+1}^{BFGS} ,

$$H_{k+1}^{BFGS} = H_k + \left(\frac{1 + q^{(k)T} H_k q^{(k)}}{p^{(k)T} q^{(k)}}\right) \frac{p^{(k)} p^{(k)T}}{p^{(k)T} q^{(k)}} - \frac{p^{(k)} q^{(k)T} H_k + H_k q^{(k)} p^{(k)T}}{p^{(k)T} q^{(k)}} \quad (14)$$

式中, $p^{(k)}=x^{(k+1)}-x^{(k)}$; $q^{(k)}=g_{k+1}-g_k$; $g_{k+1}=f(x^{(k+1)})$, 可以通过有限差分得出; $x^{(k+1)}$ 和 $x^{(k)}$ 为两个迭代点。以 $d^{(k+1)}=-H_{k+1}^{\text{BFGS}}g_{k+1}$ 为 $x^{(k+1)}$ 处的搜索方向。

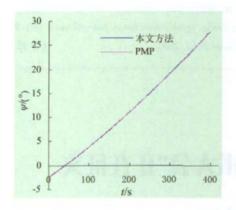


3 仿直计算和结果分析

假设月球软着陆初始条件为: $r_0=1753$ km, $v_0=0$, $_0=0$, t₀=0, m₀=600 kg, ₀=-9.65 x10⁻⁴ rad/s; 月球引力常数 μ= 4902.75 km³/s², 月球半径 R_m=1738 km, 制动发动机推力 F= 2000 N, 比冲 I_s=300 x9.8 N·s/kg; 飞行过程分为 N=30 段, 控 制量初值 i=0(i=0, 1, 2, ..., N); 积分步长 step=3.86 x10⁻⁶ s; 其他参数取值分别为: $(1)=[10,10]^T$, =20, =2, =0.5。优化结 果为

t_f=398.03868 s h=- 0.00007 m v=- 0.00004 m/s ∈0.00000 rad/s J=270.77461 kg

优化过程中, 对状态方程 (5),(6) 共积分 3 643 次,在 Visual C++ 6.0 平台下, 工作站 HP XW9300 (CPU AMD 2.59 GHz) 耗时 0.641 s。图 1~图 4 为部分最优参数的变化曲线, h 为高度,其他参数含义同前述。为了方便对比,图中给出了由 Pontryagin 最大值原理得出的理论最优解, 相应的目标函数值 J=270.77465 kg, 着陆时间 t_f=398.03873 s。可见, 本文的优化 结果与理论最优解非常接近,广义乘子法具有相当高的优化 精度。



着陆器制动推力方向角变化曲线 Fig. 1 Time history of thrust angle

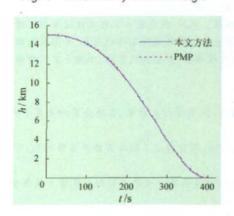


图 2 着陆器高度变化曲线

Fig. 2 Time history of attitude

为了研究本文方法的稳定性,在(-20°,40°)范围内随机 选取初值, 结果都能收敛。其中, 初值在(-10°30) 范围内时, 计算量变化不大, 耗时都小于 1 s。由此说明, 广义乘子法具

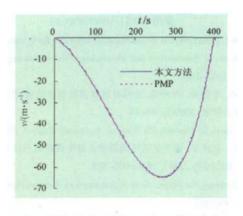


图 3 着陆器径向速度变化曲线图

Fig. 3 Time history of radial velocity

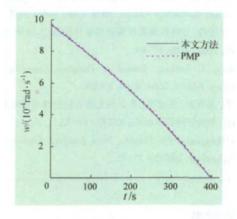


图 4 着陆器角速度变化曲线

Fig. 4 Time history of anglar velocity

有较强的鲁棒性和快速收敛性。此外,仿真结果表明,减小罚 因子 的初值,能够增大收敛区间。如 初值取 0.2 时,收敛 区间可扩展至约(-30°75 %) 初值减小为 0.02 时, 收敛区间 可扩展至约(-50°,80°)。但是,减小罚因子,会使收敛速度变 慢,计算量增加。

4 结论

- 1) 通过积分变换,可以将对时间的积分转化为对状态变 量的积分,使得终端积分变量得以确定。转化后的问题更利 于优化求解,且转化过程较为简单。
- 2) 广义乘子法作为一种直接法,可以对最优控制问题进 行快速求解,其得到的数值结果具有较高的精度。同间接法 相比,不需要猜测协态变量的初值,对初始控制量不敏感、鲁 棒性好; 同遗传算法等其他直接法相比, 可以节省大量的计 算时间,可用于快速优化。
- 3) 采用广义乘子法求解最优控制问题时,减小罚因子的 初值,可以增大收敛区间,但会使收敛速度变慢,计算量增 加。
- 4) 采用积分变换法和广义乘子法,可求解其他终端时间 不确定型的轨道优化问题。



参考文献(References)

- Biegler L T. An overview of simultaneous strategies for dynamic optimization
 Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 2007, 46(11): 1043-1053.
- [2] 王大轶, 李铁寿, 马兴瑞. 月球最优软着陆两点边值问题的数值解法 [J]. 航天控制, 2000(3): 44-49.
 - Wang Dayi, Li Tieshou, Ma Xingrui. Aerospace Control, 2000(3): 44-49.
- [3] 朱建丰, 徐世杰. 基于自适应模拟退火遗传算法的月球软着陆轨道优化[J]. 航空学报, 2007, 28(4): 806-812.
 - Zhu Jianfeng, Xu Shijie. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(4): 806-812.
- [4] 王劼, 李俊峰, 崔乃刚, 等. 登月飞行器软着陆轨道的遗传算法优化[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2003, 43(8): 1056-1059.
 - Wang Jie, Li Junfeng, Cui Naigang, et al. Journal of Tsinghua University: Science and Technology Edition, 2003, 43(8): 1056-1059.
- [5] 徐敏, 李俊峰. 月球探测器软着陆的最优控制[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2001, 41(8): 87-89.
 - Xu Ming, Li Junfeng. Journal of Tsinghua University: Science and Technology Edition, 2001, 41(8): 87-89.
- [6] 王明光, 裴听国, 袁建平. 基于伪光谱方法月球软着陆轨道快速优化设计[J]. 中国空间科学技术, 2007(5): 27-32.
 - Wang Mingguang, Pei Tingguo, Yuan Jianping. Chinese Space Science and Technology, 2007(5): 27-32.

- [7] 刘培玉. 应用最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1991. Liu Peiyu. Application of optimal control[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1991.
- [8] 周净扬, 周荻. 月球探测器软着陆精确建模及最优轨道设计 [J]. 宇航学报, 2007, 28(6): 1462-1466, 1471.
 - Zhou Jingyang, Zhou Di. Journal of Astronautics, 2007, 28 (6): 1462-1466, 1471.
- [9] 彭伟斌, 吴德隆. 用广义乘子法求解航天器最优平面再入轨迹 [J]. 飞行力学, 2004, 22(2): 49-52.
 - Peng Weibin, Wu Delong. Flight Dynamics, 2004, 22(2): 49-52.
- [10] Manolescu S. A proper choice of starting conditions to minimize the computational time of TPBVPs [C]//Fluid Mechanics and Flight Dynamics. Bucharest, Romania. AIAA, 1994.
- [11] 杨大地, 王开荣. 数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2006. Yang Dadi, Wang Kairong. Numerical analysis [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [12] Kang B N, Tang S, Starkey R P. Optimal trajectories of hypersonic vehicle for global reach [C]//Proceeding of 15th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Dayton: AIAA, 2008: 1-14.
- [13] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版, 2000.

 Chen Baolin. Optimization theory and arithmetic [M]. Beijing: Tsinghua
 University Press, 2000.

 (责任编辑 赵佳)

·学术动态:

"第三届全国岩土与工程学术大会"正在征文

2009年6月11-18日,"第三届全国岩土与工程学术大会"将在四川成都举行。

以西部地区大型水电工程建设为主体的 '西电东送 "工程,以 '南水北调 "为代表的跨流域调水工程,以 "青藏铁路 "为代表的极端环境下铁路建设工程和 "国家高速铁路网建设工程"、'国家高速公路网建设工程"以及以缩小城乡差距为目标的 "小城镇建设工程"等的相继实施,为我国岩土与工程理论的提升与技术的进步提供了很多机遇。同时,这些重大工程实施过程中已遇到或将要遇到的一系列问题也向岩土与工程从业者提出严峻挑战。为了充分交流我国岩土与工程领域所取得的成就,共同面对西部的机遇与挑战,全面推动岩土与工程领域的科技进步,中国地质学会、中国岩石力学与工程学会、中国建筑学会、中国土木工程学会联合组织了 2009 年 "第三届全国岩土与工程学术大会"。

会议正在面向相关工作者征文,具体议题如下。

- 1) 西部大型工程建设的岩土与工程问题:岩石高边坡工程,深埋长隧道工程,高坝与大水库,复杂介质的交通干线建设,复杂场地的大型民用机场。
- 2) 西部特殊岩土环境问题:人类工程活动与环境问题,气候变化与环境灾害,环境岩土工程与资源可循环利用,西部特殊地区环境条件与工程建设。
- 3) 理论探索与新技术: 岩石与土力学理论, 岩土工程风险评价与管理, 西部地区重大地质灾害形成机理与治理技术, 岩土勘探、测试、监测与施工新技术, 岩土工程信息技术, 岩土工程机械与仪器设备。
 - 4) 其他: 大型岩土工程实录, 发展战略与联合应对挑战, 岩土工程与可持续发展, 境外岩土工程。
 - 全文截稿时间为 2008 年 12 月 31 日。

会议网站: www.gec2009.com

联系方式: 四川省成都市二仙桥东三路 1 号成都理工大学环境与土木工程学院(610059) 汤明高

电 话: 13458605650

电子信箱: tangminggao07@cdut.cn