第21卷 第7期
2004年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 21 No. 7
Dec. 2004

文章编号:1005-3085(2004)07-0155-04

酒精代谢的数学分析

方信兵, 苏 丽, 张善东
指导教师: 刘智秉, 唐静波
(九江学院，理学院 332005)

编者按: 本文条理清晰，简明扼要；摘要写得不好，也缺少关键数据，模型假设显得空泛。

摘 要: 本文从生物学角度出发，根据微分方程理论，结合给定的数据，经过合理的假设，建立了血液中酒精的浓度随时间变化的基础模型。并针对不同的饮酒方式和饮酒量，分别建立了相应的模型。用拟合的方法确定参数，准确地模拟出酒精浓度变化趋势的曲线，拟合结果与原始数据吻合程度较高。同时，对一些实际问题也给出了合理的解释。

关键词: 数学模型；微分方程；拟合；叠加

分类号: AMS(2000) 65L80　　**中图分类号**: O241.81　　**文献标识码**: A

1 问题的提出

针对严重的交通情况，新的酒精含量标准规定：车辆驾驶人员血液中的酒精含量$>=20mg/dl$且<80为饮酒驾车，血液中的酒精含量$>=80mg/dl$为醉酒驾车。大李在中午12点喝一瓶啤酒，下午6点检查时符合标准，紧接着晚饭时又喝了一瓶，凌晨2点检查时被定为饮酒驾车，两次喝同样多的酒，检查结果却不一样。建立饮酒后血液中酒精含量的数学模型。

1. 对大李碰到的情况做出解释。
2. 在喝3瓶啤酒或半斤低度白酒后多长时间内驾车就违反上述标准：
1) 短时间内喝酒；2) 较长时间内（比如2小时）喝酒。
3. 怎样估计血液中的酒精含量在什么时间最高。
4. 根据你的模型论证：如果天天喝酒，是否还能开车？
5. 根据模型结合新的国家标准写一篇短文，给想喝一点酒的司机如何驾车提出忠告。

2 模型的假设

a) 不考虑酒精进入体内随呼吸或汗液排出的量，及肠道细菌产生的酒精，只考虑饮入的酒全进入肠胃，再由肝脏等分解的过程。

b) 设人体血液和体液中酒精浓度相等。酒精进入血液后瞬间混合均匀。

c) 肠胃酒精进入血液的速率与肠胃中酒精含量成正比，血液中酒精被分解的速率与血液中酒精含量成正比。

3 符号说明

p_0：所饮酒中含的酒精量；V：体液的体积；$x(t)$：t时刻肠胃中的酒精含量；$p(t)$：t时刻血液中的酒精浓度；

$r_0(t)$：饮入酒精的速率；$r_1(t)$肠胃内酒精进入血液的速率；$r_2(t)$：血液中酒精被分解的速率。

4 模型的建立与求解

根据假设可建立以下基本模型：I_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_0(t) - r_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = r_1(t) - r_2(t) \\ r_1(t) = k_1x(t) \\ r_2(t) = k_2y(t) \end{cases}$$

从生物学可知，酒类进入人体后，胃及血液中酒精随注入酒精速率、浓度、时间等不同产生不同的代谢速率。下面根据饮酒速率及方式的不同建立三种实用模型。

1) 模型I_1：短时间内快速饮酒模型

在基本模型的基础上，由短时间快速饮酒的特点可得出初始值：$r_0(t) = 0, x(0) = p_0, y(0) = 0$，将其代入基本模型可得模型$I_1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x(t) \\ \frac{dy}{dt} = k_1x(t) - k_2y(t) \end{cases}$$

上述微分方程的解为

$$\begin{cases} x(t) = p_0e^{-k_1t} \\ y(t) = \frac{k_1p_0}{k_1-k_2}(e^{-k_2t-e^{-k_1t}}) \end{cases}$$

此时血液中的酒精浓度$p(t) = \frac{k_1p_0}{V(k_1-k_2)}(e^{-k_2t-e^{-k_1t}})$

2) 模型I_2：一定时间（T小时）内慢速饮酒设饮酒速度恒定为r_0，由模型I_0可得I_2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_0 - k_1x(t) \\ \frac{dy}{dt} = k_1x(t) - k_2y(t) \end{cases}$$

解得：当$0 \leq t \leq T$时

$$\begin{cases} x(t) = \frac{r_0}{k_1}(1 - e^{-k_1t}) \\ y(t) = \frac{k_1r_0}{k_1-k_2}\left(\frac{1-e^{-k_2t}}{k_2} - \frac{1-e^{-k_1t}}{k_1}\right) \end{cases}$$

当$t \geq T$时

$$\begin{cases} x(t) = \frac{r_0}{k_1}(1 - e^{-k_1T})e^{-k_1(t-T)} \\ y(t) = \frac{k_1r_0}{k_1-k_2}\left(\frac{1-e^{-k_2T}}{k_2}e^{-k_2(t-T)} - \frac{1-e^{-k_1T}}{k_1}e^{-k_1(t-T)}\right) \end{cases}$$

3) 模型I_3：一定时间快速饮等量的酒

(1) 当$t = 0$时，$r_0(t) = 0, x(0) = p_0, y(0) = 0$（设$p_0$为最初酒精量），由模型

$$\begin{cases} x(t) = p_0e^{-k_1t} \\ y(t) = \frac{k_1p_0}{k_1-k_2}(e^{-k_2t-e^{-k_1t}}) \end{cases}$$

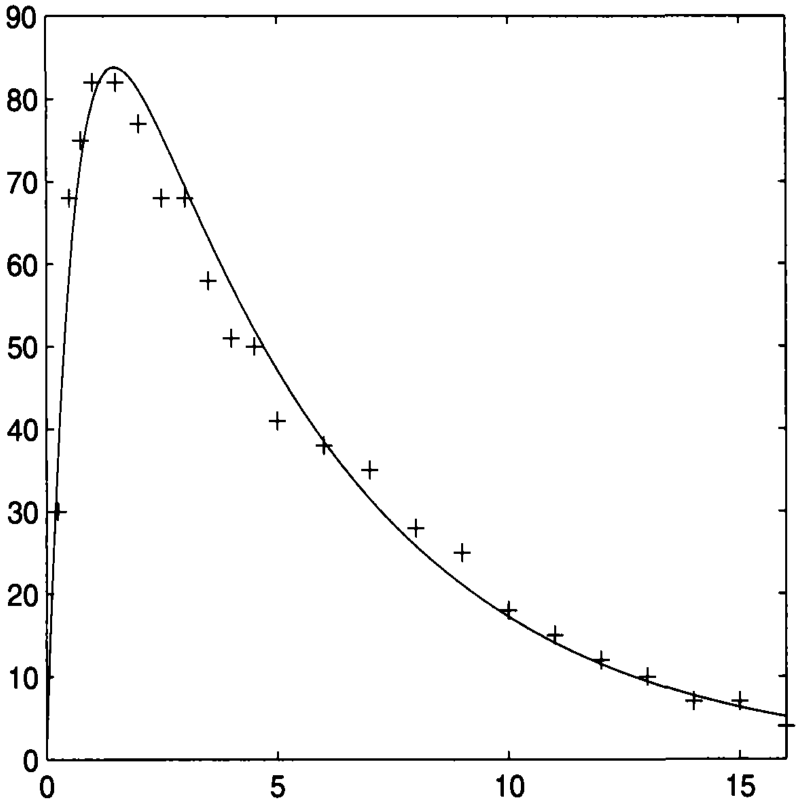
(2) 当$t = T$时，再饮入p_0，此时$x(T)$由$p_0e^{-k_1T}$突变为$p_0(1 + e^{-k_1T})$，依此类推当$t = nT$时再饮入p_0，最终可解得

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p_0(1-e^{-(n+1)k_1T})}{1-e^{-k_1T}}e^{-k_1(t-nT)} \\ y(t) = \frac{k_1p_0}{k_1-k_2}\left[\frac{1-e^{-(n+1)k_2T}}{1-e^{-k_2T}}e^{-k_2(t-nT)} - \frac{1-e^{-(n+1)k_1T}}{1-e^{-k_1T}}e^{-k_1(t-nT)}\right] \end{cases}$$

4) 参数的确定

对模型I_1中的$p(t) = \frac{k_1p_0}{k_1-k_2}(e^{-k_2t-e^{-k_1t}})$，令$A = \frac{k_1p_0}{k_1-k_2}$，则$p(t) = A(e^{-k_2t-e^{-k_1t}})$。由前面模型的分析可知$k_2 << k_1$，故$t$当充分大时，$e^{-k_1t} \approx 0$，但不能忽略其作用。此时$p(t) \approx Ae^{-k_2t}$，两边取对数得$lnp(t) = lnA - k_2t$用最小二乘拟合法，可求出$lnA = u$（常数$A = e^u$）和$k_2$的值；令$p^*(t) = Ae^{-k_2t}$，则$p^*(t) - p(t) = Ae^{-k_1t} = p_1(t)$，再两边取对数用最小二乘拟合法确定$k_1$。用$t \geq 4$时的数据拟合出$A = 128.8695, k_2 = 0.2012$，用$0.25 \leq t \leq 1.5$时

的数据拟合出$k_1 = 1.6109$。至此完全求出参数k_2, k_2, A，从而可求出模型I_1的$p(t)$，拟合情况见下图，其他模型可类似求解。



5 基于建立的模型来解决实际问题

1) 问题1的解答

大李的问题可用模型I_1和I_3来解释。大李中午喝一瓶啤酒后体内酒精代谢过程符合模型I_1。血液中酒精和时间的关系为$p(t) = A(e^{-k_2 t - e^{-k_1 t}})$，其中$A = \frac{k_1 p_0}{V(k_1 - k_2)}$，设大李体重为70kg，由前知，若短时间喝两瓶，有$A = 128.8695, k_1 = 1.6109, k_2 = 0.2012$，从而得到短时间喝一瓶时，$A = 64.43457$，此时有$p(t) = 64.43457(e^{-0.2012t} - e^{-1.6109})$。当$t = 8$时，再喝一瓶，此时符合模型$I_3$：$p(t) = A[(1 + e^{-8k_2})e^{-k_2(t-8)} - (1 + e^{-8k_1})e^{-k_1(t-8)}]$，代入$A, k_1, k_2$，求出$p(14) \approx 23.12$。通过上述分析，大李下午6点血液中的酒精约为19毫克/百毫升，故检查没问题；而在晚上8点吃晚饭时又喝了一瓶，其血液中酒精浓度初值已不为0，通过叠加，经计算知，同样经6个小时凌晨2点，血液中酒精浓度约为23毫克/百毫升，超过标准，被定位饮酒驾车。

2) 问题2的解答

(1) 第一种情况：短时间内喝酒，符合模型I_1，由于喝下三瓶，故$p(t) = \frac{3}{2}[128.8695(e^{-0.2012t} - e^{-1.6109})]$，根据问题要求建立不等式$\frac{3}{2}[128.8695(e^{-0.2012t} - e^{-1.6109})] \le 20$，解得结果为$t \ge 11.3$

(2) 第二种情况：较长一段时间内喝酒，符合模型I_2，故当$0 \le t \le 2$时，$p(t)$是一个递增函数，因此不考虑这种情况；只考虑$t \ge 2$时$p(t)$的变化情况，此时

$$p(t) = \frac{k_1 p_0}{V(k_1 - k_2)}\left[\frac{1 - e^{-2k_2}}{k_2} e^{-k_2(t-2)} - \frac{1 - e - 2k_1}{k_1} e^{-k_1(t-2)}\right]$$

令$p(t \le 20)$，解得结果为$t \ge 15.8$，因为喝酒用了2小时，所以司机若在2小时内喝的酒，应该过13.8小时才能驾车。

3) 问题3的求解

仅考虑模型I_1和I_2

对模型I_1（快速饮酒）：此时$p(t)=\frac{k_1p_0}{V(k_1-k_2)}(e^{-k_2t-e^{-k_1t}})$，对$p(t)$关于$t$求导，得极值点$t_0=\frac{1}{k_1-k_2}ln\frac{k_1}{k_2}$，将$k_1=1.6109,k_2=0.2012$代入得$t_0=1.4795$，从图1可看出，$p(t)$是先升后降的，故$p(t_0)$为最大值，对模型$I_1$来说，当$t=1.4795$时，血液中酒精含量最高。

对模型I_2（快速饮酒）：当$t\geq T$时

$$p'(t)=\frac{k_1r_0}{V(k_1-k_2)}[(1-e^{-k_1t})e^{-k_1(t-T)}-(1-e^{-k_2t})e^{-k_2(t-T)}]=0$$

所以$t=T+\frac{1}{k_1-k_2}ln\frac{1-e^{-k_1T}}{1-e^{-k_2T}}$（当$T=2,k_2=0.2012,k_1=1.6109$时，$t=2.75482$）

4) 问题4的解答

提出的问题符合模型I_3，由模型I_3，

$$p(t)=A(p_0)\Big[\frac{1-e^{-(n+1)k_2T}}{1-e^{-k_2T}}e^{-k_2(t-nT)}-\frac{1-e^{-(n+1)k_1T}}{1-e^{-k_1T}}e^{-k_1(t-nT)}\Big]$$

设$t-nT=s$

$$p(t)=A(p_0)\Big[\frac{1-e^{-(n+1)k_2T}}{1-e^{-k_2T}}e^{-k_2s}-\frac{1-e^{-(n+1)k_1T}}{1-e^{-k_1T}}e^{-k_1s}\Big]$$

当$n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}P(s+nT)=A(p_0)[\frac{1}{1-e^{-k_2T}}e^{-k_2s}-\frac{1}{1-e^{-k_1T}}e^{-k_1s}](0\leq s\leq 24)$$

设体重为$70kg$的人，天天喝酒，即n很大，此时，

$$P(s+nT)\approx 64.43475a(1.00806e^{-0.2012s}-e^{-1.6109s})$$

要使$P(s+nT)\leq 20$，只需$a(1.00806e^{-0.2012s}-e^{-1.6109s})\leq 0.31039$

(1) 若要求司机酒后2小时开车，只能喝$a\leq 0.48940$瓶啤酒

(2) 若要求司机酒后3小时开车。只能喝$a\leq 0.57132$瓶啤酒

(3) 若司机每天喝一瓶啤酒，此时s较大，$e^{-1.6109s}$则由$1.00806e^{-0.2012s}\leq 0.3109$可得$s\leq 5.85464$

综上所述：若要求司机酒后2－3小时开车，只能喝约半瓶啤酒；若司机每天要喝一瓶啤酒，则必须约6个小时后开车。

5) 忠告

亲爱的司机朋友，你们好，过多饮酒对身体不好，而你们就更应谨慎，这关系你们和他人生命财产安全。因此对于那些爱好喝酒的司机而言，喝多少酒才算适量一定要注意，在此我想给你们一些忠告。

(1) 不要以为第一次喝酒没事就认为每次喝同样的酒隔相同时间仍没事，由于前次喝的酒未必代谢干净，再喝同样多的酒也可能醉。

(2) 有人认为喝慢酒不易醉，这是一种误导。由模型知，快速喝酒和慢速相比，代谢更快，司机朋友不要因此而贪杯，导致车祸的发生。

(3) 根据模型可得出以下结论：对想喝点酒的司机朋友，若要酒后2－3小时开车，只能喝约半瓶啤酒；若想喝一瓶，则必须在约6小时以后驾车，否则易出车祸，将被定为饮酒驾车。为了自己和他人的安全，饮酒要适量。

6 模型的评价

1) 本文的数学模型基于微分方程，可用常数变易法求出解析解。

2) 用拟合的办法确定未知参数，准确地模拟出酒精浓度与时间的关系，与所给数据吻合程度较高。

3) 用数学软件描绘出关系图，便于比较。

(下转154页)

编号，再用上述的方法求解，确定录用分配方案。如果剩下的人数仍然很多，则可以做类似的进一步择优。

对于问题(2)处理的方法类似，只是根据应聘人员的综合分数(3)式和双方综合满意度(7)式来选优。

参考文献：

[1] 杨纶标. 模糊数学原理及应用[M]. 武汉：华南理工大学出版社，1998
[2] 钱颂迪等. 运筹学（修订版）[M]. 北京：清华大学出版社，1999

The Optimal Model of the Problem of Recruiting Government Officers and Its Comments

HAN Zhong-geng

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, PLA, zhengzhou 450002)

Abstract: In this paper, according to the grading process of problem D of 2004 HIGHER EDUCATION PRESS cup CUMCM, the background of the problem of recruiting government officers, the outline of grading, the solution methods and the existing problems are introduced. Finally, a concrete optimal model and its solution is given.

Keywords: recruiting government officers; qualified to matriculate; distribution according to need; subjection function; satisfaction degree; optimal model

---

(上接158页)

参考文献：

[1] 王高雄等. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，1983
[2] 姜启源. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，1993
[3] 徐萃微. 计算方法引论[M]. 北京：高等教育出版社，2003

Mathematical Anasysis of Alcoholic Metabolism

FANG Xin-bing, SU Li, ZHANG Shan-dong
Teacher: LIU Zhi-bing, TANG Jing-bo

(College of science, Jiujiang University, Jiujiang 332005)

Abstract: According to the theory of differential equation, A basic mathematical model about the relation of alcohol in body and time is presented; Some models about practical problems are also given by using the basic model. What we find is fit for the given data perfectly, and some practical problems are answered finally.

Keywords: mathematical model; differential equation; fitting; superposition