1. **问题的重述**

一个人在一个水容器中洗澡，但是随着温度的降低，会使人感觉到不舒服，由于浴缸不是一个具有二次加热系统和循环射流的水疗浴缸（温泉式的桶），所以浴缸中的人增加了一个连续不断提供热流的水龙头，并且当浴缸快要达到它的额定容积时，多余的水通过溢漏流出。要使人体在浴缸中达到满意的舒适度，需要控制热水龙头的温度、出水的流速以及出水的流速。

（1）建立一个最基本的数学模型，得到温度在人不运动时的分布模型。

（2）如果人运动，必将影响水在浴缸中的蒸发速度，得到更优的温度分布模型。

（3）在问题（1）的情况下，如果考虑热水龙头在浴缸中各向热传导系数不同，得到另一个温度分布模型。

（4）如果浴缸的形状、体积改变以及人的形状、体积、温度改变，最终影响的也是热传导系数，所以不建立模型，只作说明。

2．模型的假设与符号说明

2.1 模型的假设与说明

（1）浴缸中的初始水温已经达到恒温，在各位置的温度都是相同的。

（2）浴缸中的水的温度在空间和时间上分布是连续的。

（3）忽略浴缸中的水与器壁的热量交换

（4）假设人在水中的运动是有规律的，并且头部始终保持在水面上方。

说明：（1）对于假设（2），由于热水进入时热量不能骤变，并且单位时间内传递的热量很多，故视其为连续函数是合理的，从而可以把优化问题归结为热传导、热扩散问题。

（2）对于假设（3），为了避免在浴缸中洗澡丧失更多的热量，浴缸的器壁可以看成一个恒温物体，与浴缸中 的水温相同，不进行热量交换，或者交换的热量忽略不计。

* 1. 符号的使用和说明

1. 符号的说明：

 表示水的比热容

 表示水的密度

 表示热水龙的的截面面积

 表示从水龙头进入浴缸的水的初始温度

 表示浴缸内水温关于空间和时间的函数

 表示浴缸内（x,y,z）处水的热流密度的影响系数

 表示溢漏水管的截面面积

 表示溢出水的温度

**3.模型前的准备**

3.1建模前的公式运用准则

解决这一问题的关键之一是认识到水分子的扩散运动，以及热传导的两个方程、一个定理，以及运用能量守恒定律。由此可以得到下列的准则和定理。

准则1：孤立系统的能量永远守恒。

定理1：净吸收的热量=散发出的热量

显然，净吸热为热源出提供的热量减去流出的热量，散发出的热量为水蒸发和传递给人的热量，能量总体平衡。

准则2：在整个以浴缸、人、热源、空气为整个系统中，满足热传导方程。

定理2：傅里叶定律：热流向量与温度梯度成正比，方向相反。，其中 称为材料的导热系数。

说明：傅里叶定律适用于稳态和非稳态的、无热源和有热源的温度场，也适用于常物性和物性随温度改变的情况。

3.2浴缸初始温度的选取及数据处理

根据大量资料显示，不同的人群适应浴缸水温不同，舒适度也不同，如图所示：

**4. 问题的分析**

对于任何一个问题，需要解决的问题就是建立一个在空间和时间上的分布模型，并且各处的温度接近初始温度。并且针对每一个问题我都可以用热传导方程和能量守恒定律进行求解。

**4.1 对没有人运动的模型分析**

定义4.1.1 定义浴缸中的人为一个方形物体，长为，宽为高为，此时传递给人的能量主要通过上下、左右、前后表面的截面面积，定义人是各向同性的物体，满足傅里叶定律的热传导方程，由此

可以得到以下结论：

结论1 人接受的能量是均匀的，

结论2 人在浴缸中能量主要通过呼吸、各器官消耗。

结论3 人体的皮肤表面温度肯定升高

4.2 对人运动过后的模型分析

在人运动过后的阶段，随着水表面波动较大以及人的位置发生变化，促使浴缸中的水的热传导系数改变，引起浴缸中的人采取措施的原因主要有两方面：

1. 人体在浴缸中的舒适度明显降低，
2. 热量散发的太快。水的温度骤降加快

以后两个方面又都受人体运动的影响，关系如图所示：

水与空气热量交换加快

提高入水速度

改变

温度接近初始温度

人运动

降低出水速度

传递给人的热量降低

提高入水温度

在实际中，影响了多个方向的导热系数，温度分布影响肯定受到很大影响，因此，需处理出水温度、出水流速、入水流速，更大程度地弥补热量的流失。所以，在做定量分析计算时，可以先用定性分析方法确定各因素间的函数关系，在求解过程中利用参数辨识方法确定其中的参数。

4.3传导过程中热导系数不同模型的分析

对于各向同异性物体，对人而言，在严格意义上讲是不均匀的，水中的成分不同，这些对热导系数也有影响。可以利用傅里叶的推广对各向同异性物体进行求解分析。

题目要求即使人运动过后也尽可能地接近初始温度，而且并不改变人体的舒适度，因此，需要处理这个物体运动的模型，根据查阅大量资料文献，人体的运动可以看做一个质点，模拟质点的运动

情形一 当人体上下摆动时，导致浴缸中的水对人和空气的导热系数改变，增大了与空气的交换次数。温度下降更快。

情形二 当人体左右摆动时，导致浴缸中的水对人和空气的导热系数改变，增大了与空气的交换次数。温度下降更快。

情形三 当人体前后摆动时，导致浴缸中的水对人和空气的导热系数改变，增大了与空气的交换次数。温度下降更快

**5．模型的建立与求解**

**5.1 问题（1）的解决方案及模型**

**5.1.1参数的确定：**

温度定为初始，人体表面温度，浴缸长度1.8m，宽度0.8 m，高度0.5米，热水龙头出水恒定温度为，热水龙头的恒定流速为，溢漏出水的温度为, 溢漏出水的恒定流速，浴缸的水的温度在空间和时间的函数关系：，人的为人的身高为1.8米，人的下半身在水中（认为头部在水上），人为一个长方形物体，人的运动看成一个长方体来回翻转运动，长1.5米，宽0.45米，高0.5米，建立第一个模型

**5.1.2 确定能量守恒定律的**

根据能量的守恒，综合上述讨论，可以得到在人不运动前的热量传播（温度扩散）模型

热水龙头流入的热量 =洗澡水在浴室中蒸发的热量+浴缸中人交换的热量+溢漏水的热量

x

z

y

1.8

0.5

O

0.8

一：求解问题：

浴缸的设计标准：

1. 当浴缸里达到容积,多余的水通过一个排水管中流走。。
2. 浴缸中的水尽量与初始温度一致。
3. 额外：如果一个人使用一个泡泡浴添加剂虽然一开始填满浴缸协助清理,这将如何影响您的模型的结果吗?

二：影响因素：

1. 单个水龙头的流速
2. 排水管的流速
3. 浴缸形状、体积的影响，体积大，水温冷却快，所需热水增多，形状分为圆形、三角形、心型，长方形。形状不同，高度不同，长度不同，宽度不同，对浴缸中的水温也有影响。
4. 人的重量(体积)影响浴缸的容积，人的形状分高低、胖瘦影响水浴缸的容积。
5. 浴缸形采取方形，符合人体结构设计。
6. 温度定为初始，人体表面温度，浴缸长度1.8m，宽度0.8 m，高度0.5米，热水龙头出水恒定温度为，热水龙头的恒定流速为，溢漏出水的温度为, 溢漏出水的恒定流速，浴缸的水的温度在空间和时间的函数关系：，人的为人的身高为1.8米，人的下半身在水中（认为头部在水上），人为一个长方形物体，人的运动看成一个长方体来回翻转运动，长1.5米，宽0.45米，高。。米，建立第一个模型

参数确定：

**通过曲面 （人的上表面）进入 （人的体积）内的热量**











**由热量守恒定律得：**

 



其中称为非齐次项（自由项）

列出导热偏微分方程

由于有热源，

 2.如果在温度在水中分布不同，温度靠近热源的较高，远离热源的较低，导致导热在各方向传播不一致，导热系数也不一致，建立模型二

— x 方向的温度变化率对x 方向热流密度的影响系数； — y 方向的温度变化率对x 方向热流密度的影响系数； — y 方向的温度变化率对x 方向热流密度的影响系数； — x 方向的温度变化率对y 方向热流密度的影响系数； — y 方向的温度变化率对y 方向热流密度的影响系数； — z 方向的温度变化率对y 方向热流密度的影响系数； — x 方向的温度变化率对z 方向热流密度的影响系数； — y 方向的温度变化率对z 方向热流密度的影响系数； — z 方向的温度变化率对z 方向热流密度的影响系数；



将将上式展开

****

****

****

各方向导热系数不同建立热传导方程



各向异性介质的热传导方程：



 三、人运动后的温度分布模型

**流出的热量**

**Q4**

分析:

**水蒸发的热量**

**Q2**

**流入的热量**

**Q1**

**人吸收的热量Q3**

人运动产生的影响：

1. 浴缸中的水蒸发的速率变快，释放到空气中的热量**Q2**增大，
2. 溢漏出的热量Q4减少，
3. 人吸收的热量Q3减少，
4. 浴缸中的水的温度降低，

热水龙头流入的热量 =洗澡水在浴室中蒸发的热量 +浴缸中人交换的热量 +溢漏水的热量

由于

即使热量相互传递，但是人明显感觉变凉了，所以必须想办法提高浴室的温度，并且尽可能地接近初始温度，即使采取措施，也会对温度的均衡分布造成很大影响，为了更好的接近初始温度与使人感到舒服。建立一个方案，建立一个模型。

方案由来：找到入水流速、出水流速、入水温度对温度分布扩散的影响，通过发现三者间的联系，找出一个最佳方案，此时入水流速为 ，出水流速为，入水温度为，

建立人运动后的模型三











由热量守恒定律得：







其中 称为非齐次项（自由项）

列出导热偏微分方程

由于有热源，

要画出:浴缸的水的温度与流入的水的温度的图形；浴缸内水的温度与流入的水的流速之间的图形。浴缸内水的温度与流出水的温度之间的图形，

模型的求解：

 ，，

浴缸体积为720L，人的体积大约为60L，初始状态浴缸中水的体积为516L，假设留出0.1m高度的水。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 水 | 温度  （℃） | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| 导热系数(w/m.k) | 0.50 | 0.58 | 0.60 | 0.62 | 0.64 | 0.65 | 0.66 | 0.67 | 0.68 |

水的比热容的物理意义是：1kg水温度升高（或降低）1℃所吸收（或放出）的热量是4.2×103J．(C=4.2×103J）

水的密度ρ=1.0×103 kg/m3（忽略水在不同温度下的微小影响）

水龙头的出水截面积为0.003 m2,出水时的速度为5L/min。

溢漏出水的截面积为为0.003m2,出水时的速度为4L/min。

控制单一变量，发现浴缸中水的温度与流水温度、入水的流速、出水流速。

设入水速度为、出水速度为 、入水温度 、浴缸水的初始温度为 入水质量为 、出水质量 、浴缸中水的质量为 浴缸516L，盛水516KG。

假设初始各状态均在人不运动前取值

即取=16.7m/s、=13.3 m/s、=

当、不变时，变化与的关系

c ( )=c（-）（）

 ( )=（）（-）

 ( ) =(516-)（）

 \*5\*( )=（516- \*4）（）

5\* ( )=514（）

5-5 =514（）

则 =

当、不变时，与的关系

c ( )=c（-）（）

5(50-)=(516- )（）

250-5=516-516\*40-+40

(521-0.3)=250+516\*40-40

=

当、不变时，与的关系

c ( )=c（-）（）

(516-4)(-40)=0.3(50-)

516-516\*40-4+160=15-0.3

=