Corso di

Architettura degli Elaboratori – A

a.a. 2022/2023

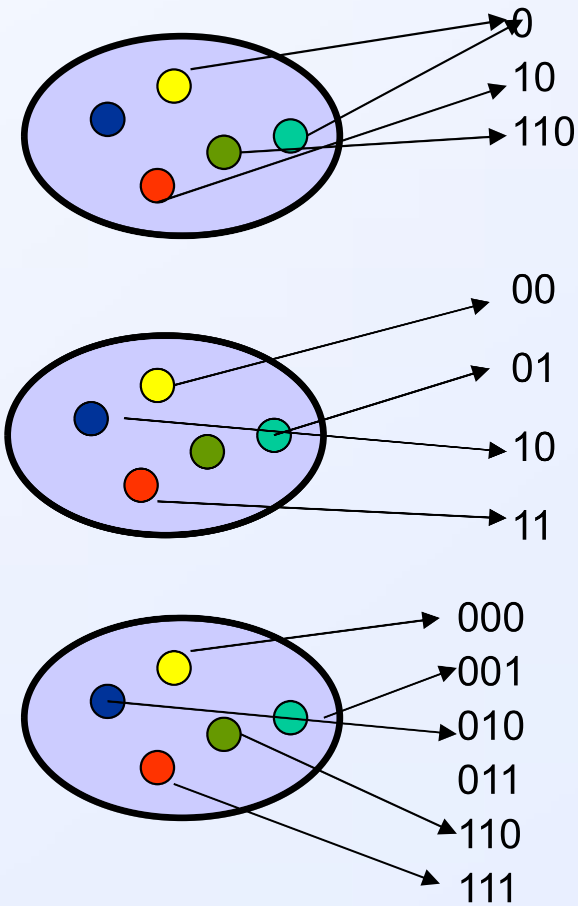
Codifica dell'informazione: Numeri Binari

“Esistono 10 tipi di persone: quelle che utilizzano la codifica binaria e quelle che non la utilizzano”

Codifica dell’informazione

- **Codifica**: rappresentazione degli *elementi di un insieme* (anche infinito) mediante un *numero limitato di simboli* (cifre, numeri, segni grafici,…) seguendo una opportuna regola;

- **Proprietà** di una codifica:
  - Non-ridondanza
  - Lunghezza-costante
  - Completezza e unicità



Codifica dell'informazione

- L’entità minima di informazione all’interno di un elaboratore prende il nome di **bit** (**b**inary dig**it** - cifra binaria). Mediante un bit possiamo distinguere due informazioni.
- Tutte le informazioni, anche le più complesse, sono rappresentate mediante sequenze di due soli simboli (**0** e **1**), ossia in forma **binaria** (o **digitale**).
- Si ha perciò bisogno di associare biunivocamente ad ogni informazione “elementare”: caratteri, numeri, immagini, ... una sequenza binaria che la rappresenti

Byte

- Con 1 bit si possono distinguere due diverse informazioni;
- Per distinguere più informazioni bisogna usare sequenze di bit.
- Le diverse configurazioni di n bit permettono di individuare 2^n informazioni diverse.
- **una sequenza di 8 bit viene chiamata "*byte*"**

Potenze di 2

2^{0}	1
2^{1}	2
2^{2}	4
2^{3}	8
2^{4}	16
2^{5}	32
2^{6}	64
2^{7}	128
2^{8}	256
2^{9}	512
2^{10}	1,024
2^{11}	2,048
2^{12}	4,096
2^{13}	8,192
2^{14}	16,384
2^{15}	32,768

2^{16}	65,536
2^{17}	131,072
2^{18}	262,144
2^{19}	524,288
2^{20}	1,048,576
2^{21}	2,097,152
2^{22}	4,194,304
2^{23}	8,388,608
2^{24}	16,777,216
2^{25}	33,554,432
2^{26}	67,108,864
2^{27}	134,217,728
2^{28}	268,435,456
2^{29}	536,870,912
2^{30}	1,073,741,824
2^{31}	2,147,483,648

Misure per capacità memorie

Byte	$8 = 2^3$bit
Kilobit (Kibibit, Kbit o Kb)	2^{10}(1024) bit
Megabit (Mebibit, Mbit o Mb)	2^{20}(1048576) bit
Gigabit (Gibibit, Gbit o Gb)	2^{30}(1073741824) bit
Terabit (Tebibit, Tbit o Tb)	2^{40}(1099511627776) bit
Kilobyte (Kibibyte, Kbyte o KB)	2^{10} byte
Megabyte (Mebibyte, Mbyte o MB)	2^{20} byte
Gigabyte (Gibibyte, Gbyte o GB)	2^{30} byte
Terabyte (Tebibyte, Tbyte o TB)	2^{40} byte

Misure per capacità canali

Byte	$8 = 2^3$bit
Kilobit/s (Kbit/s o Kb/s)	1000 bit/s
Megabit/s (Mbit/s o Mb/s)	1000000 bit/s
Gigabit/s (Gbit/s o Gb/s)	1000000000 bit/s

Misure per frequenze clock

MHz (Mega Hertz)	1000000 cicli/s
GHz (Giga Hertz)	1000000000 cicli/s

Codifica dei numeri

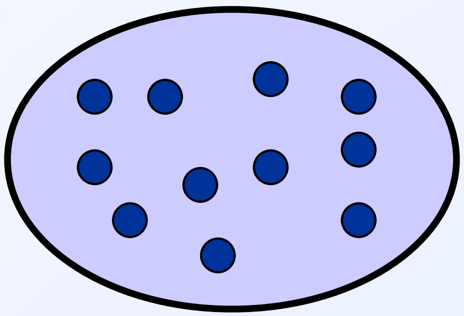
- Esigenza di rappresentare l'insieme infinito dei numeri mediante un numero limitato di segni grafici (cifre)
- Avendo un insieme finito di simboli, per denotare gli infiniti numeri li combino secondo una codifica

$\Downarrow$

- **Sistemi di numerazione**:
  - ***Cifre***: un insieme finito di simboli distinti
  - ***Codifica***: insieme di regole che permette di associare ad una sequenza di cifre uno ed un solo numero
  - ***Algoritmi***: per l'esecuzione delle operazioni fondamentali

Numero vs Numerale

- Numero è entità astratta (fuori da spazio e tempo): proprietà degli insiemi che hanno stessa quantità di elementi. **NON PUO' STARE IN MEMORIA!!!**
- Numerale: configurazione di simboli che denota (= identifica) un numero – non è astratta
- *Diversi* tipi di numerali rispondenti a codifiche diverse identificano lo *stesso* numero:
- 11 in decimale, B in esadecimale, 13 in ottale, 1011 in binario denotano lo stesso numero



RIPASSINO DI MATEMATICA

Proprietà delle potenze:

- $x^0 = 1$
- $x^{-i} = 1 / x^i$
- $x^i * x^j = x^{i+j}$
- $(x^i)^j = x^{i*j}$
- $(x*y)^i = x^i * y^i$
- $x^i / x^j = x^{i-j}$
- $a* x^i + b* x^j = (a* x^{i-1} + b* x^{j-1})*x$

Sistemi di numerazione

- Cifre ordinate in modo che ognuna sia maggiore della precedente di un'unità, a partire da zero:

  & (zero), **%** (uno), **#** (due), ***** (tre)

- Il numero di cifre fornisce la base (quattro nell'esempio)
- Le cifre **hanno un valore posizionale**:
  - ✓ **La sequenza di cifre % * & % #** in notazione decimale sarebbe: $1 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 454$
- se la somma di due cifre è maggiore del numero di cifre si crea un riporto

# +	2 +
***** =	3 =
%%	5

Notazione posizionale

Forma generale di un numero decimale

		Centinaia	Decine	Unita'		decimi	centesimi		
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$		
$\mathbf{d_n}$	**…**	$\mathbf{d_2}$	$\mathbf{d_1}$	$\mathbf{d_0}$	**.**	$\mathbf{d_{-1}}$	$\mathbf{d_{-2}}$	**…**	$\mathbf{d_{-k}}$

$$\text{numero} = \sum_{i=-k}^{n} d_i \times 10^i$$

Forma generale di un numero in base b

$$\mathbf{c_n} \quad \ldots \quad \mathbf{c_2} \quad \mathbf{c_1} \quad \mathbf{c_0} \quad . \quad \mathbf{c_{-1}} \quad \mathbf{c_{-2}} \quad \ldots \quad \mathbf{c_{-k}}$$

$$\text{numero} = \sum_{i=-k}^{n} c_i \times b^i$$

Esempi

Base 2

cifre usate 0 e 1 (bit)

1 1 0 1 0.1 $= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$

$= 16 + 8 + 2 + 0.5 = 26.5$

Base 8

cifre usate 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

1 2 1 2 0.5 $= 1 \times 8^4 + 2 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 0 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1}$

$= 4096 + 1024 + 64 + 16 + 0.625 = 5200.625$

Base 16

cifre usate 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

2 E 0 A.3 $= 2 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 10 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1}$

$= 8192 + 3584 + 10 + 0.1875 = 11786.1875$

Il numero “mille” in

Binario:

1 1 1 1 1 0 1 0 0 0

$1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 0$

Ottale: 1 7 5 0

$1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 0 \times 8^0$

$512 + 448 + 40 + 0$

Decimale: 1 0 0 0

$1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

$1000 + 0 + 0 + 0$

Esadecimale: 3 E 8

$3 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 8 \times 16^0$

$768 + 224 + 8$

Conversione tra basi: dec → bin

$$
\begin{array}{lrl}
 & 171.25 & \\
 & \underline{128} & = 2^7 \text{ Massima potenza di 2 <= 171.25} \\
\text{resto} & 43.25 & \\
 & \underline{32} & = 2^5 \text{ Massima potenza di 2 <= 43.25} \\
\text{resto} & 11.25 & \\
 & \underline{8} & = 2^3 \text{ Massima potenza di 2 <= 11.25} \\
\text{resto} & 3.25 & \\
 & \underline{2} & = 2^1 \text{ Massima potenza di 2 <= 3.25} \\
\text{resto} & 1.25 & \\
\text{resto} & \underline{1} & = 2^0 \text{ Massima potenza di 2 <= 1.25} \\
 & 0.25 & \\
 & \underline{0.25} & = 2^{-2} \text{ Massima potenza di 2 <= 0.25} \\
 & 0.00 &
\end{array}
$$

$$
\mathbf{171.25|_{10} = \underset{7}{1}\ \underset{6}{0}\ \underset{5}{1}\ \underset{4}{0}\ \underset{3}{1}\ \underset{2}{0}\ \underset{1}{1}\ \underset{0}{1}\ .\ \underset{-1}{0}\ \underset{-2}{1}|_2}
$$

Conversione tra basi: dec → base r

Parte intera

1. Inizio;
2. Dividere il numero decimale per la base di arrivo r;
3. Il resto della divisione è una cifra nella nuova base a partire dalla cifra meno significativa ;
4. Il quoziente della divisione intera è il nuovo dividendo;
5. Se quoziente $\neq 0$ torna a 2);
6. Fine.

Conversione tra basi: dec → bin

Divisioni successive per 2

171	1
85	1
42	0
21	1
10	0
5	1
2	0
1	1

1	0	1	0	1	0	1	1
7	6	5	4	3	2	1	0

Per la parte intera di un numero

Conversione tra basi: dec -> base r

Parte frazionaria

1. Inizio;
2. Moltiplicare la parte frazionaria del numero decimale per la base di arrivo;
3. Separare parte intera e parte frazionaria;
4. La parte intera dà una cifra nella nuova base a partire dalla cifra più significativa ;
5. Se non ottengo 0 o non raggiungo la precisione richiesta torna a 2);
6. Fine.

Conversione tra basi: dec → bin

0.25	***0***.50
0.50	***1***.00

Per la parte decimale di un numero

Moltiplicazioni successive per 2

1	0	1	0	1	0	1	1	.	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0		-1	-2

Esempio 35,59375

Per la parte intera

35	1
17	1
8	0
4	0
2	0
1	1

0.59375	***1***.1875
0.1875	***0***.375
0.375	***0***.75
0.75	***1***.5
0.5	***1***.0

1	0	0	0	1	1	.	1	0	0	1	1
5	4	3	2	1	0		-1	-2	-3	-4	-5

Un altro esempio 35,9

35	1	Per la parte intera	0.9	***1***.8
17	1		0.8	***1***.6
8	0		0.6	***1***.2
4	0		0.2	***0***.4
2	0		0.4	***0***.8
1	1		0.8	***1***.6

1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**.**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1 ...**
5	4	3	2	1	0		-1	-2	-3	-4	-5	-6 ...

Parte intera: perché?

$$35 = a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$

$$17 \times 2 + 1 = a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$

$$17 \times 2 + 1 = (a_5 \times 2^4 + a_4 \times 2^3 + a_3 \times 2^2 + a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0) \times 2 + a_0 \qquad 1 = a_0$$

$$17 = a_5 \times 2^4 + a_4 \times 2^3 + a_3 \times 2^2 + a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0$$

$$8 \times 2 + 1 = (a_5 \times 2^3 + a_4 \times 2^2 + a_3 \times 2^1 + a_2 \times 2^0) \times 2 + a_1 \qquad 1 = a_1$$

$$8 = a_5 \times 2^3 + a_4 \times 2^2 + a_3 \times 2^1 + a_2 \times 2^0$$

$$4 \times 2 + 0 = (a_5 \times 2^2 + a_4 \times 2^1 + a_3 \times 2^0) \times 2 + a_2 \qquad 0 = a_2$$

...

Parte decimale: perché?

$$0.59375 = a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + a_3 \times 2^{-3} + a_4 \times 2^{-4} + a_5 \times 2^{-5} + \ldots$$

$$0.59375 \times 2 = (a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + a_3 \times 2^{-3} + a_4 \times 2^{-4} + a_5 \times 2^{-5} + \ldots) \times 2$$

$$1.1875 = a_1 + a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + a_5 \times 2^{-4} + \ldots$$

$$1 + 0.1875 = a_1 + a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + a_5 \times 2^{-4} + \ldots \quad 1 = a_1$$

$$0.1875 = a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + a_5 \times 2^{-4} + \ldots$$

$$0.1875 \times 2 = (a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + a_5 \times 2^{-4} + \ldots) \times 2$$

$$0 + 0.375 = a_2 + a_3 \times 2^{-1} + a_4 \times 2^{-2} + a_5 \times 2^{-3} + \ldots \qquad 0 = a_2$$

$$0.375 = a_3 \times 2^{-1} + a_4 \times 2^{-2} + a_5 \times 2^{-3} + \ldots$$

...

Conversione tra basi: bin -> dec

$1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \;.\; 1$ (26.5)

$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$ (26.5)

Conversione tra basi: bin -> dec

- Ricordare che:

- $(a*r^3 + b*r^2 + c*r) = ((a*r + b)*r + c)*r$

- Posso calcolare una sommatoria di potenze senza usare l'elevamento a potenza (* ha costo fisso ^ no)
  $(a*r^3 + b*r^2 + c*r) = (a*r*r*r + b*r*r + c*r)$

Conversione tra basi: bin -> dec

$$I_r = d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}r^{n-2} + \ldots + d_2r^2 + d_1r^1 + d_0r^0$$

$$= ((\cdots((d_{n-1}r + d_{n-2})r + d_{n-3})r + \ldots + d_1)r + d_0$$

per gli interi: 11010

1	1
1	1 + 2 x 1 = 3
0	0 + 2 x 3 = 6
1	1 + 2 x 6 = 13
0	0 + 2 x 13 = 26

Conversione tra basi: bin -> dec

1. Inizio;
2. Partire dalla cifra più significativa;
3. Se raggiunta la cifra meno significativa andare a 7);
4. Moltiplicare per la base;
5. Sommare la cifra successiva;
6. Andare a 3);
7. Fine.

Conversione tra basi: bin ↔ ott

Binario → Ottale

$$\underbrace{0\quad 1\quad 1}_{3}\quad \underbrace{0\quad 1\quad 0}_{2}\quad .\quad \underbrace{1\quad 0\quad 0}_{4}$$ (26.5)

(26.5)

Ottale → Binario

$$\overbrace{0\quad 1\quad 0}^{2}\quad \overbrace{1\quad 0\quad 1}^{5}\quad \overbrace{0\quad 1\quad 1}^{3}\quad .\quad \overbrace{0\quad 1\quad 0}^{2}$$ (171.25)

(171.25)

Conversione tra basi: bin ↔ esa

Binario → Esadecimale

$$\underbrace{\mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad 1}_{1}\quad \underbrace{1\quad 0\quad 1\quad 0}_{A}\ .\ \underbrace{1\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}}_{8} \qquad (26.5)$$

(26.5)

Esadecimale → Binario

$$\overbrace{1\quad 0\quad 1\quad 0}^{A}\quad \overbrace{1\quad 0\quad 1\quad 1}^{B}\ .\ 0\ \overbrace{1\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}}^{4} \qquad (171.25)$$

(171.25)

Conversione tra basi: bin ↔ ott

$$N = \cdots d_8 r^8 + d_7 r^7 + d_6 r^6 + d_5 r^5 + d_4 r^4 + d_3 r^3 + d_2 r^2 + d_1 r^1 + d_0 r^0$$

$$N = \cdots (d_8 r^2 + d_7 r + d_6) r^6 + (d_5 r^2 + d_4 r + d_3) r^3 + (d_2 r^2 + d_1 r + d_0)$$

Si operi un cambiamento di base: $R = r^3$

Ne consegue che: $D = d'' r^2 + d' r + d$
è una cifra nella nuova base R, poichè vale la relazione:

$$0 \leq D \leq R - 1$$

Conversione tra basi: ott ↔ esa

Conviene passare attraverso la *rappresentazione binaria*, es. 32.4 ->

- Conversione da ottale a binario -> 011 010 . 100
- Espansione in quaterne 0001 1010 . 1000
- Conversione da binario in esadecimale -> 1A.8
- Viceversa, conversione in binario -> 0001 1010 . 1000
- Raggruppamento in terne -> 011 010 . 100
- Conversione da binario in ottale -> 32.4

Addizione binaria

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

$$0+0=0$$
$$1+0=1$$
$$0+1=1$$
$$1+1=0 \text{ con riporto di } 1 \text{ ovvero } 10$$

- 1+1 in decimale è uguale a 2 ma siamo nella notazione binaria che ha solo due cifre, 0 e 1

Addizione binaria

x_i	y_i	c_{i-1}	s_i	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Addizione binaria

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & & & \\
 & 1 & 0 & + \\
 & 1 & 0 & = \\
1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Addizione binaria

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

1			
	1	1	+
	1	0	=
1	0	1	

Addizione binaria

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

1	1		
	1	1	+
	1	1	=
1	1	0	

Addizione binaria

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

		riporti			
1	1	1			
	1	1	1	+	
		1	1	=	
1	0	1	0		

Addizione binaria

ESEMPIO:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Moltiplicazione e Divisione per 2^m

- Moltiplicare un numero binario *positivo* per $X=2^m$ corrisponde a spostare verso *sinistra di m posizioni* le cifre corrispondenti alla sua rappresentazione aggiungendo zeri nelle m posizioni meno significative.
  - Esempio

    7x8=56 → 00000111 ($7|_{10}$)

    $8=2^3$: shift sinistra di 3 bit

    00000111000 ($56|_{10}$)

- Dividere un numero binario *positivo* per $X=2^m$ (o moltiplicare per 2^{-m}) corrisponde a spostare verso *destra di m posizioni* le cifre corrispondenti alla sua rappresentazione aggiungendo zeri nelle m posizioni più significative.
  - Esempio:

    7/4= 1.75 → 00000111 ($7|_{10}$)

    $4=2^2$: shift destra di 2 bit

    00000001.11 ($1.75|_{10}$)

- Facciamo lo stesso in base 10!!!!!!

Memoria finita, numeri infiniti

- Non tutti i numeri si possono rappresentare in un computer.
- In più non è conveniente gestire numeri anche se finiti di dimensioni arbitrarie o diverse fra loro.
- Velocità deriva da hardware dedicato a calcoli: dimensione fissa degli operandi (lo vedremo).
- Ad esempio, in C (ma anche in Java abbiamo cose simili): char 8 bit, short 16 bit, int 32 bit, long 64 bit, float 32 bit, double 64 bit

Numeri a precisione finita

- Per i calcolatori la quantità di memoria per memorizzare un numero è fissata. Si possono rappresentare numeri con una quantità fissa di cifre: **numeri a precisione finita**
- **conseguenza: non chiusura rispetto alle operazioni elementari**

Esempio: numeri interi con tre cifre decimali:

- **Si possono rappresentare i numeri compresi tra 000 e 999; il** numero successivo (1000) richiede una quarta cifra.
- Non si può rappresentare il risultato della somma 600 + 700 perchè il numero di cifre destinato alla rappresentazione è insufficiente: si ha un **overflow**.

Proprietà non valgono più

- Associativa:
  $(a + b) - c = a + (b - c)$
  (100 + 999) - 980 = 100 + (999 – 980)
- Distributiva
  $(a*c - b*c) = (a - b)*c$
  (**100 * 10** – 50* 10) = (100 – 50) * 10

Numeri a precisione finita

- Osservazione: il numero 999 può essere scritto come 10^3-1 (1000-1)
- ***Con N cifre decimali si possono rappresentare i numeri interi da 0 a 10^N-1***
- ***I calcolatori usano basi o radici diverse da 10, di solito 2, 8 e 16.***
- ***I sistemi di numerazione basati su queste radici si chiamano rispettivamente: binari, ottali, esadecimali.***

Esempi:

- con N cifre binarie si possono rappresentare i numeri interi da 0 a 2^N-1
- con N cifre ottali si possono rappresentare i numeri interi da 0 a 8^N-1
- con N cifre esadecimali si possono rappresentare i numeri interi da 0 a 16^N-1

Numeri a precisione finita

- ***Numeri naturali***
- Consideriamo la base due: con **3** cifre binarie si possono rappresentare i numeri compresi tra **0** (limite inferiore) e **2^3-1** (limite superiore).

numero	rappresentazione
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Notazione posizionale

Il numero massimo rappresentabile con n cifre in base r risulta:

$$
\begin{aligned}
N_{max} &= (r-1)\,r^{n-1} + (r-1)\,r^{n-2} + \cdots \\
&\quad + (r-1)\,r + (r-1)\,r^{0} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (r-1) \cdot r^{i} \\
&= r^{n} - 1
\end{aligned}
$$

Numeri a precisione finita

- ***Numeri relativi***
- Se si passa ai numeri relativi la scelta del limite inferiore della rappresentazione diventa meno ovvia
- Criterio ragionevole: “centrare” (nel migliore modo possibile) l'intervallo dei numeri rappresentabili intorno al valore zero, in modo da poter rappresentare tutti i numeri di valore assoluto minore o uguale ad un certo valore massimo

Sintassi vs semantica

- L'operazione tra due numeri deve essere realizzata applicando un algoritmo sulla rappresentazione dei numeri che dia come risultato la rappresentazione del numero risultante dall'operazione tra due numeri.
  - n+m: f(n)+f(m)=f(n+m)
- Cercheremo una codifica dei numeri relativi (con segno) che ci consenta di raggiungere questo obiettivo. Perché?
  - Perché vogliamo sfruttare l'operazione di somma binaria dei moduli (valori assoluti) che è semplice e naturale (può essere realizzata in maniera ottimale in hardware) e può essere l'unica operazione da usare sia per somme sia per sottrazioni

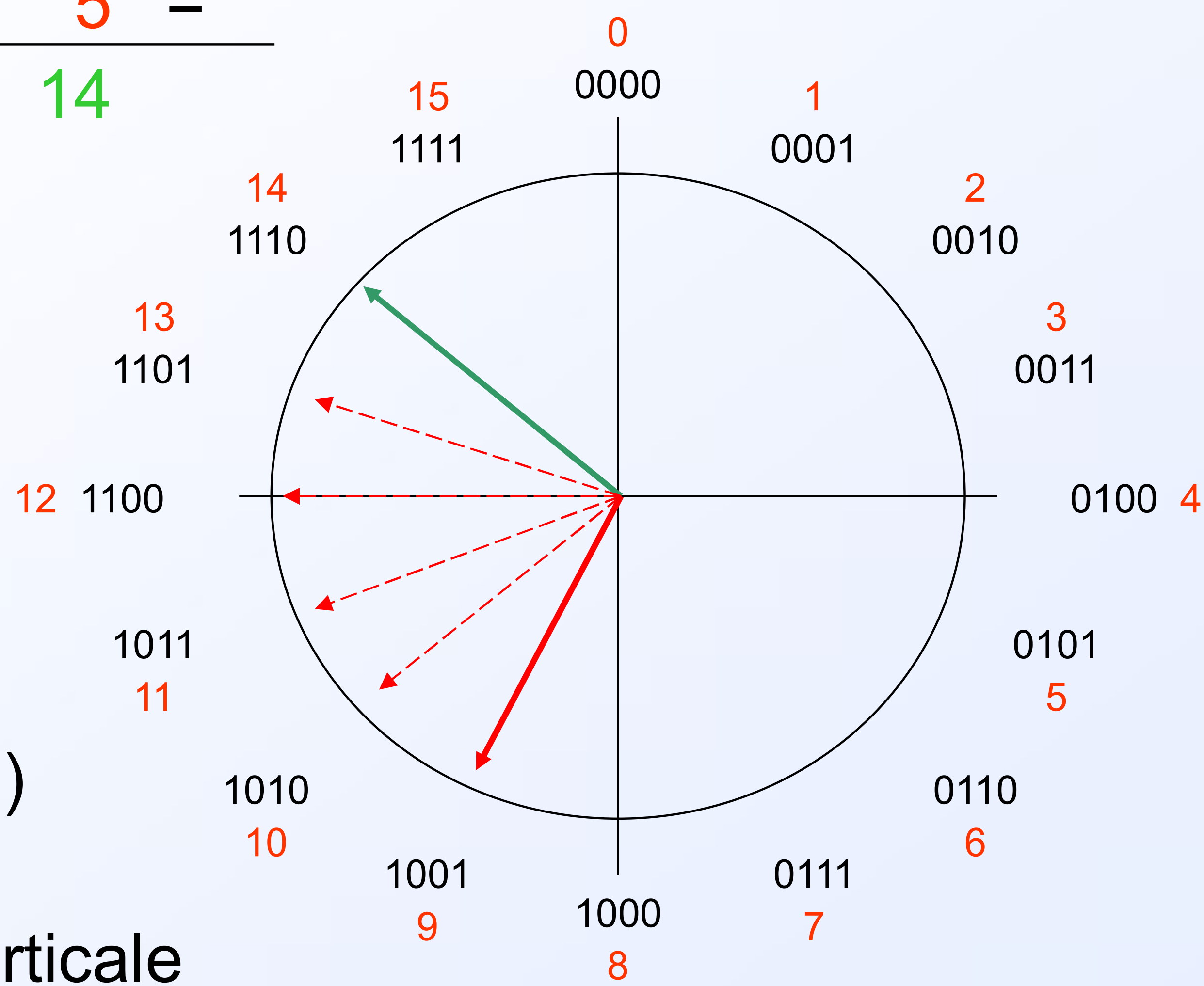
Numeri a precisione finita

- ***Numeri naturali***
- Consideriamo la base due: con tre cifre binarie si possono rappresentare i numeri compresi tra 0 (limite inferiore) e 2^3-1 (limite superiore).

numero	rappresentazione
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Somma tra moduli (solo 4 cifre)!

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & 0 & 1 & + \\ 0 & 1 & 0 & 1 & = \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 9 & + \\ 5 & = \\ \hline 14 & \end{array}$$



n+m: f(n)+f(m)=f(n+m)

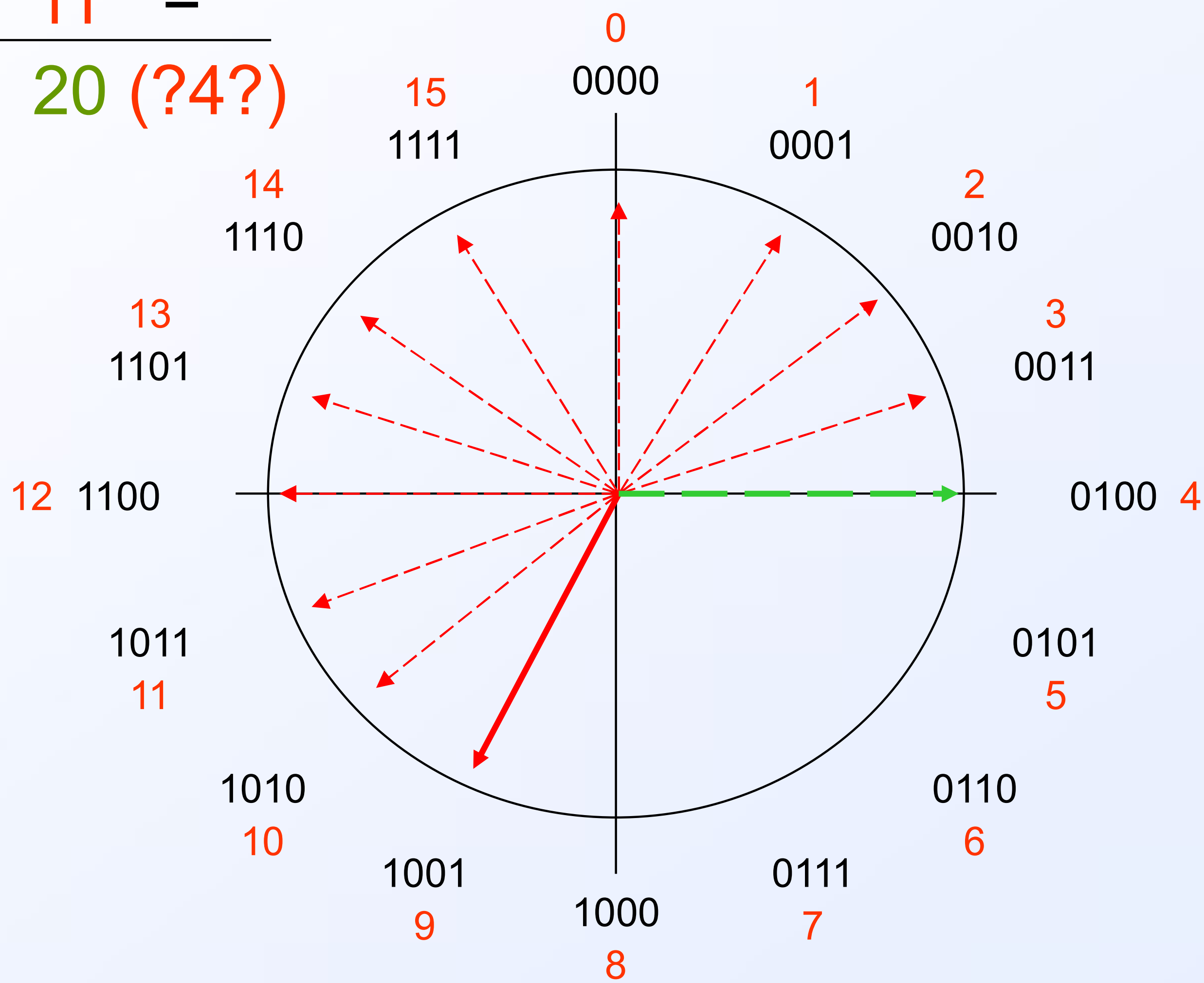
angolo orario sulla verticale

somma tra numeri come somma di angoli (in senso orario)

Somma tra moduli (solo 4 cifre)!

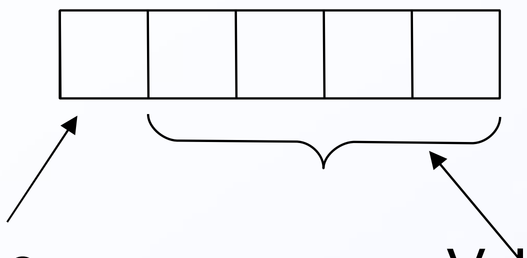
1 0 0 1 +	9 +
1 0 1 1 =	11 =
1 0 1 0 0	20 (?4?)

- overflow a causa del riporto
- il risultato ha superato il massimo valore rappresentabile su 4 bit
- si “ricomincia il giro” e si genera un riporto



Rappres. modulo e segno

1. ***Modulo e segno***



Segno   Valore assoluto

(0 rappresenta + mentre 1 rappresenta -)

Decimale	binario
11 =	0 1011
-11 =	1 1011

Rappresentazione su N cifre binarie:

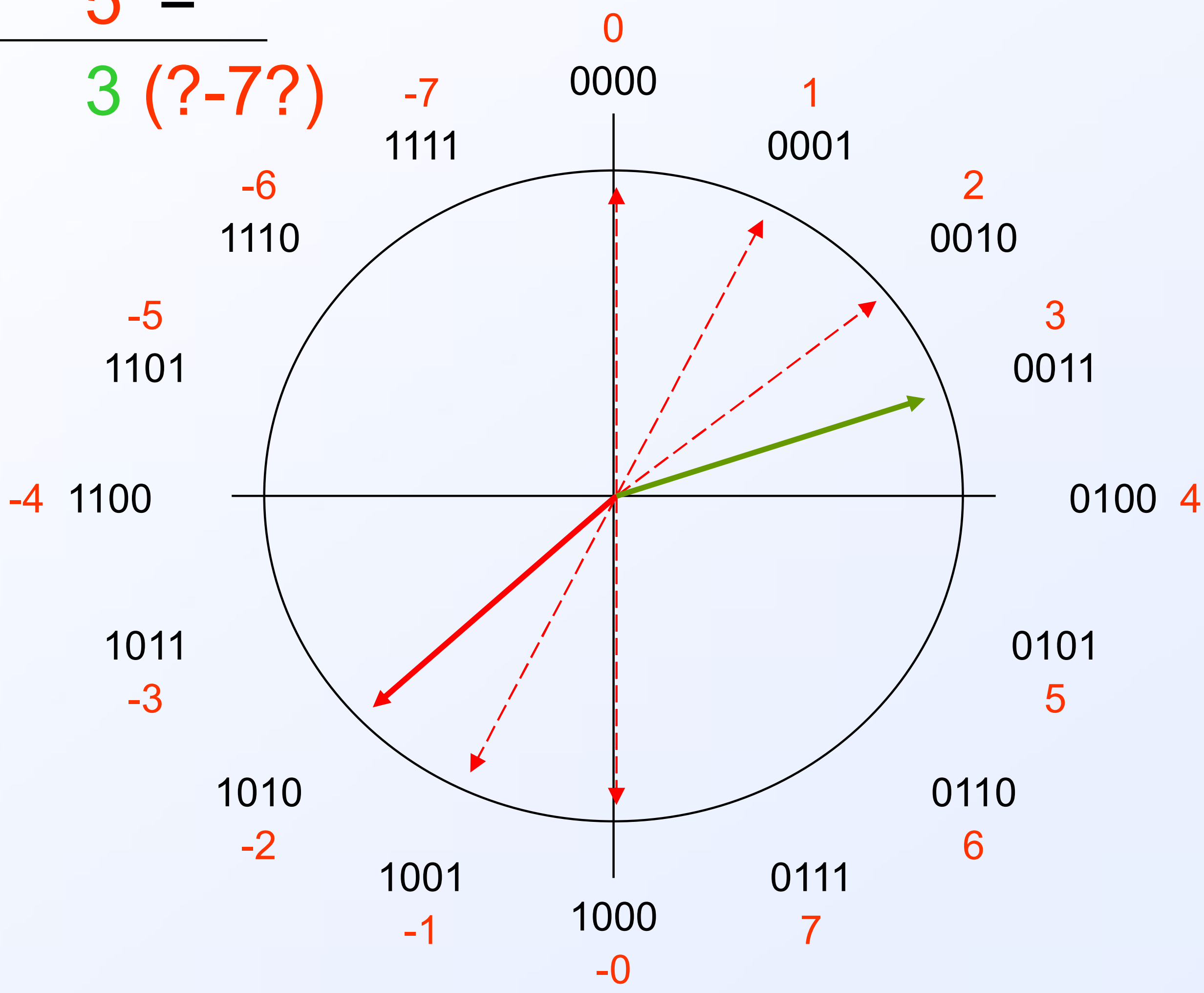
- una cifra binaria (per convenzione quella più a sinistra) per codificare il segno
- le rimanenti N-1 cifre rappresentano la codifica in forma binaria fissa del valore assoluto del numero (che per definizione è un numero naturale)

Rappres. modulo e segno

- ***Intervallo dei numeri rappresentabile su N bit***
  $[-(2^{N-1} - 1), 2^{N-1} - 1]$
- ***Svantaggi***:
  - Lo zero può essere rappresentato in due modi diversi (00..00, ossia +0, e 10..00, ossia –0)
  - L'operazione di somma tra due numeri non può essere realizzata applicando l'algoritmo di somma sulla rappresentazione dei moduli. Occorre tener conto della concordanza o discordanza dei segni: nel caso di numeri con segni discordi occorre identificare il numero di valor assoluto maggiore ed applicare l'algoritmo di sottrazione tra il modulo di questo ed il modulo dell'altro addendo; il segno del risultato sarà uguale al segno dell'addendo di valor assoluto maggiore
  - Provate, con questa rappresentazione, a fare X+(-X) con la somma sui moduli come fossero numeri naturali!!

Somma in modulo e segno

1	0	1	0	+	-2	+
0	1	0	1	=	5	=
1	1	1	1		3 (?-7?)	



Il complemento

- Per un attimo **dimentichiamo il problema del segno** e definiamo una nuova operazione su un numero X a precisione finita su K cifre binarie (si può generalizzare ad una base qualunque).
- Complemento a 1:
  - negare tutte le cifre di X (ossia sostituire 0 con 1 e viceversa 1 con 0)
- Complemento a 2:
  - Metodo 1: Calcolare il complemento a 1 di X e sommargli 1. Tralasciare l'eventuale cifra di riporto a sinistra di quella più significativa (overflow)
  - Metodo 2: Partire dalla cifra meno significativa di X e ricopiare tutte le cifre fino al primo 1 incluso. Invertire le cifre a sinistra di questo.

Esempi di complemento a 1

X=12	1	1	0	0
3	0	0	1	1
15	1	1	1	1

X=4	0	1	0	0
11	1	0	1	1
15	1	1	1	1

X=15	1	1	1	1
0	0	0	0	0
15	1	1	1	1

- Dato X il suo complemento a 1 è il numero che, se sommato a X, restituisce sempre 2^K-1
- Oppure, equivalentemente, dato X il suo complemento a 1 è il numero 2^K-1-X

Esempi di complemento a 2

$$\begin{array}{rrrrrr} X=12 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(oppure 0)

$$\begin{array}{rrrrrr} X=4 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(oppure 0)

$$\begin{array}{rrrrrr} X=15 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(oppure 0)

- Dato X il suo complemento a 2 è il numero che, se sommato a X, restituisce sempre 2^K (oppure zero dato che le cifre sono solo K)
- Oppure, equivalentemente, dato X il suo complemento a 2 è il numero 2^K-X (oppure, 0-X=-X dato che le cifre sono solo K).

Numeri relativi in complemento a 1

Rappresentazione in complemento a 1 su N cifre binarie di un numero con segno X:

- la cifra binaria più a sinistra rappresenta il segno di X (0 = +, 1 = –)
- nel caso di segno positivo, X è rappresentato in forma binaria su N -1 cifre come nel caso dei numeri naturali. Il numero X deve essere inferiore a $2^{(N-1)}$
- nel caso di segno negativo, X si rappresenta come il complemento a 1 di –X (ricordatevi di negare tutte le cifre della rappresentazione binaria del valore assoluto di X, segno incluso). Il numero -X deve essere inferiore a $2^{(N-1)}$

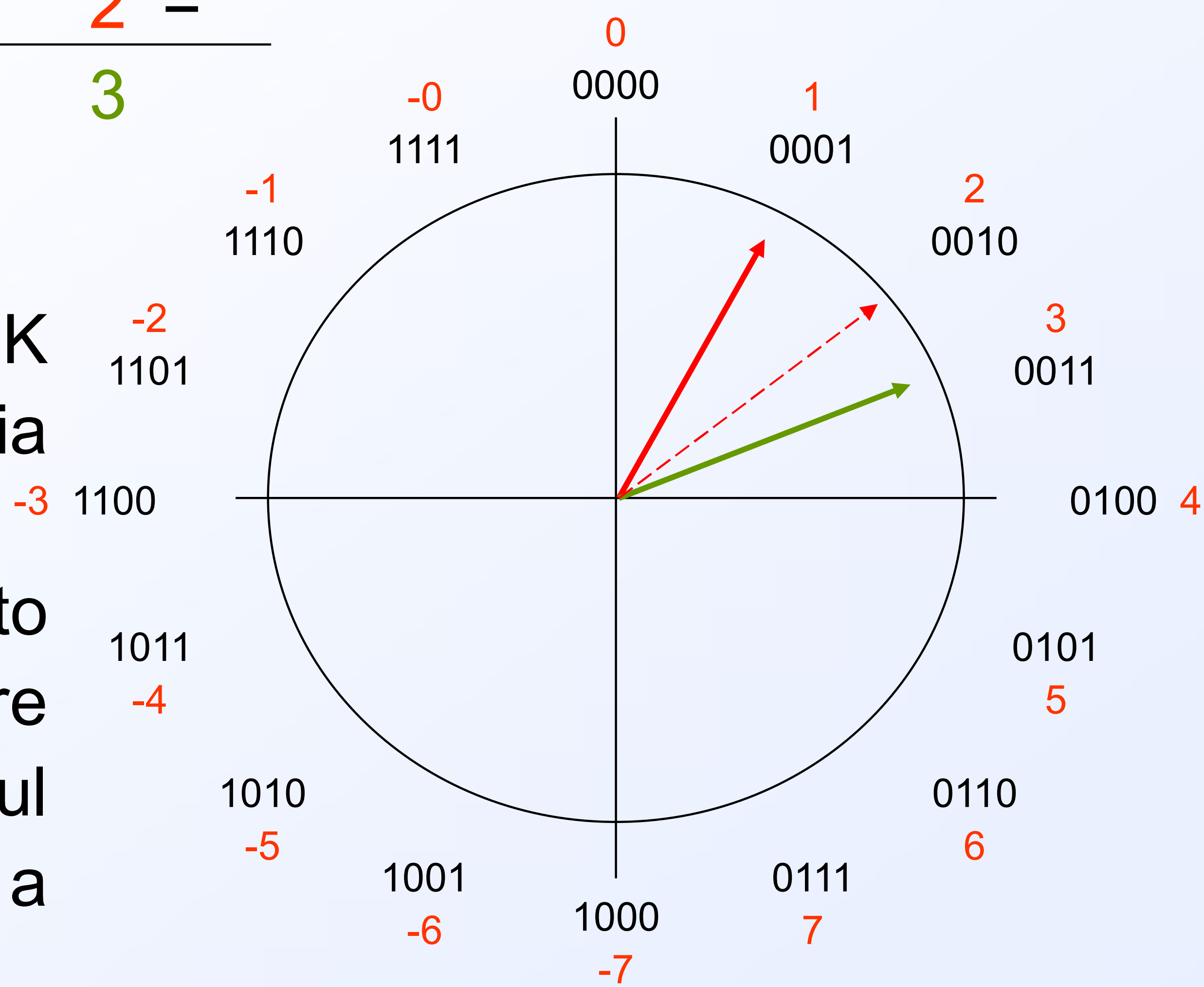
Decimale	binario
12 =	01100
-12 =	10011

Numeri relativi in complemento a 1

- Caratteristiche molto simili alla rappresentazione modulo e segno, ossia:
  - ***Semplicità della rappresentazione***
  - ***Stesso intervallo dei numeri rappresentabili [$-(2^{N-1}-1)$, $2^{N-1}-1$]***
  - ***Due rappresentazioni possibili per lo zero (in questo caso "000...0" per +0 e "111...1" per –0)***
- ***Si riesce a sfruttare la somma binaria per eseguire la somma di numeri relativi in complemento a 1?***

Numeri relativi in complemento a 1

0	0	0	1	+	1	+
0	0	1	0	=	2	=
0	0	1	1		3	

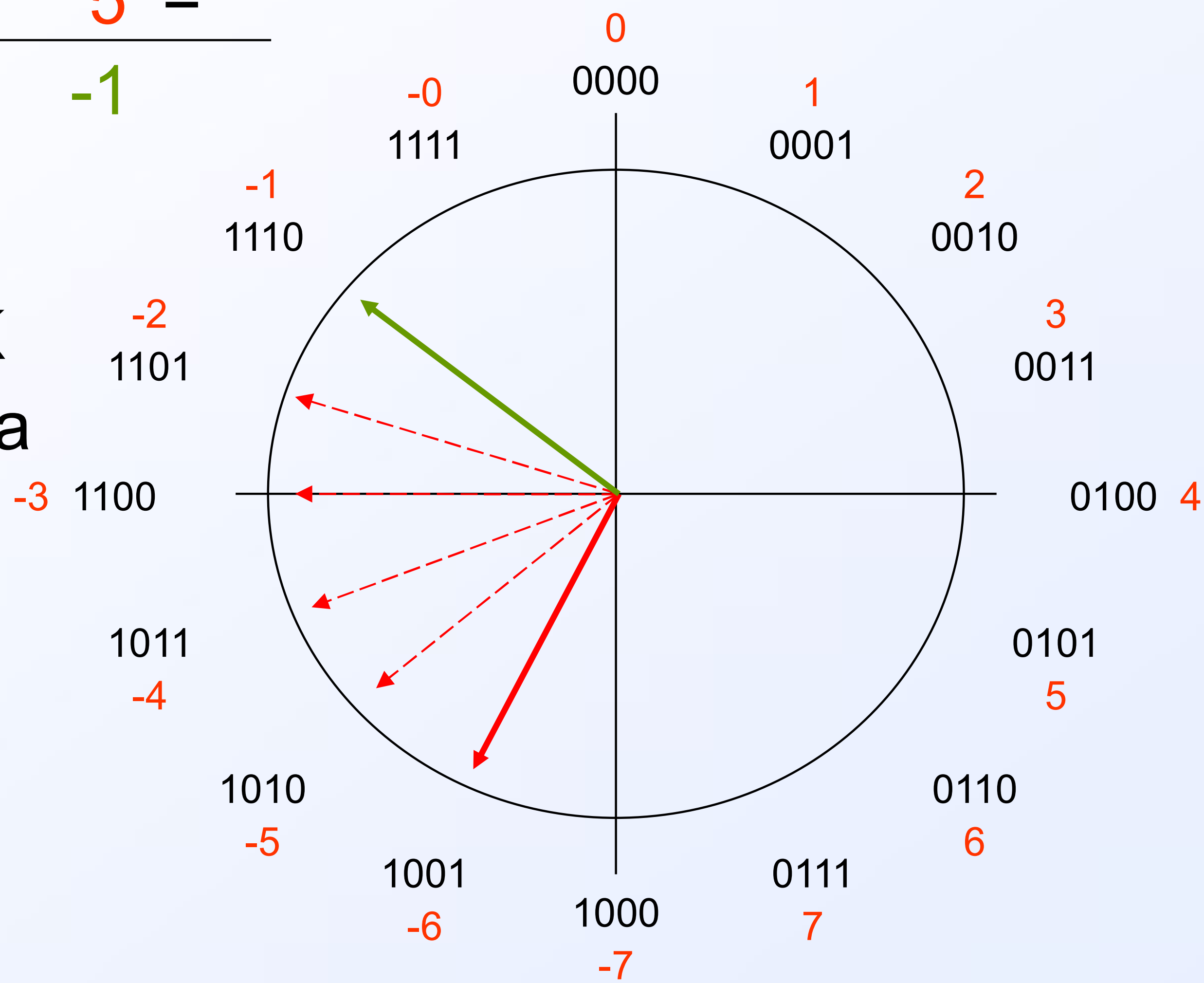


- Addendi positivi: OK sempre che non ci sia un overflow
- In tal caso il risultato non può essere rappresentato sul numero di cifre a disposizione

Numeri relativi in complemento a 1

1 0 0 1	+		-6	+
0 1 0 1	=		5	=
1 1 1 0			-1	

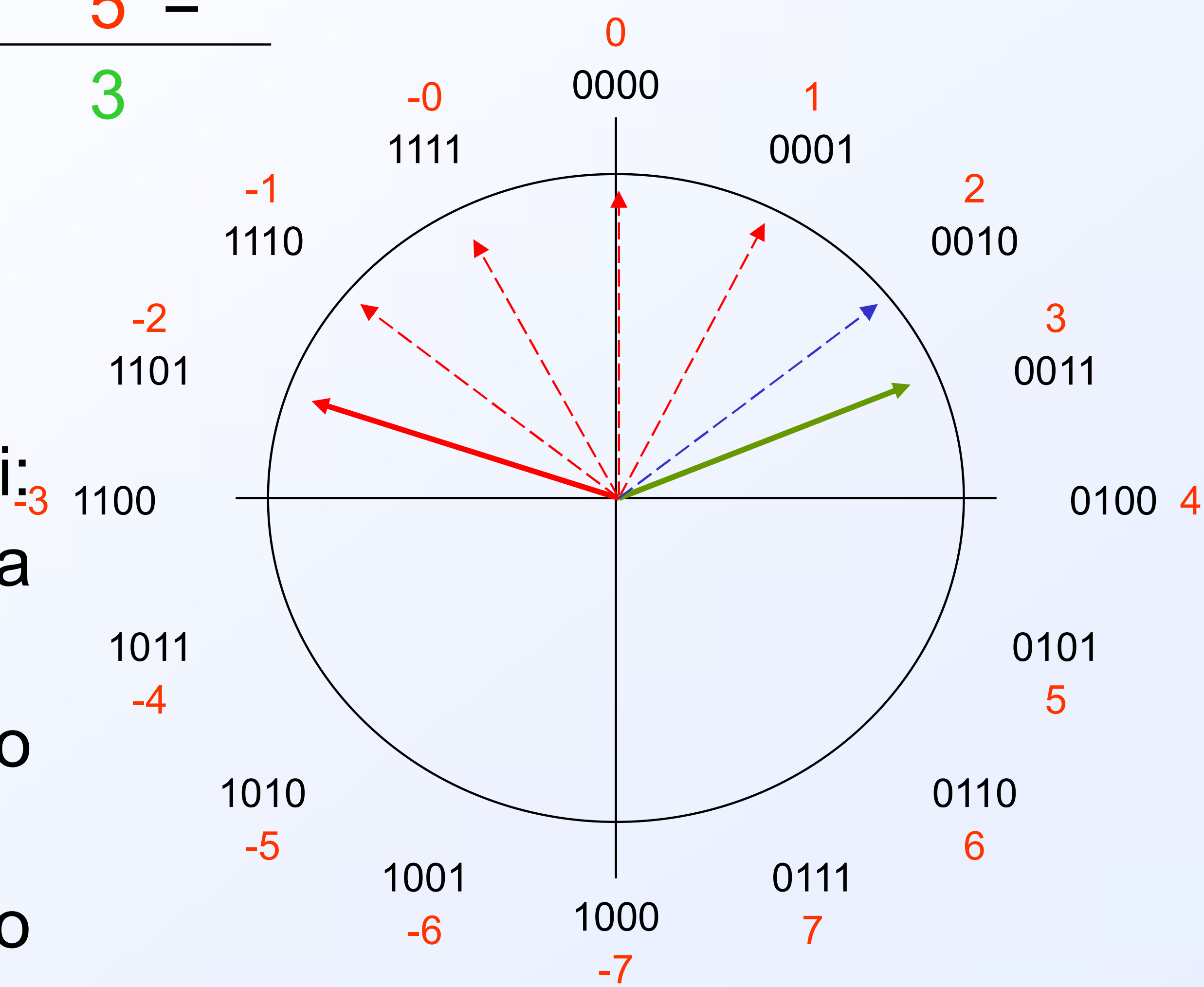
Addendi discordi: OK se il risultato ha segno negativo



Numeri relativi in complemento a 1

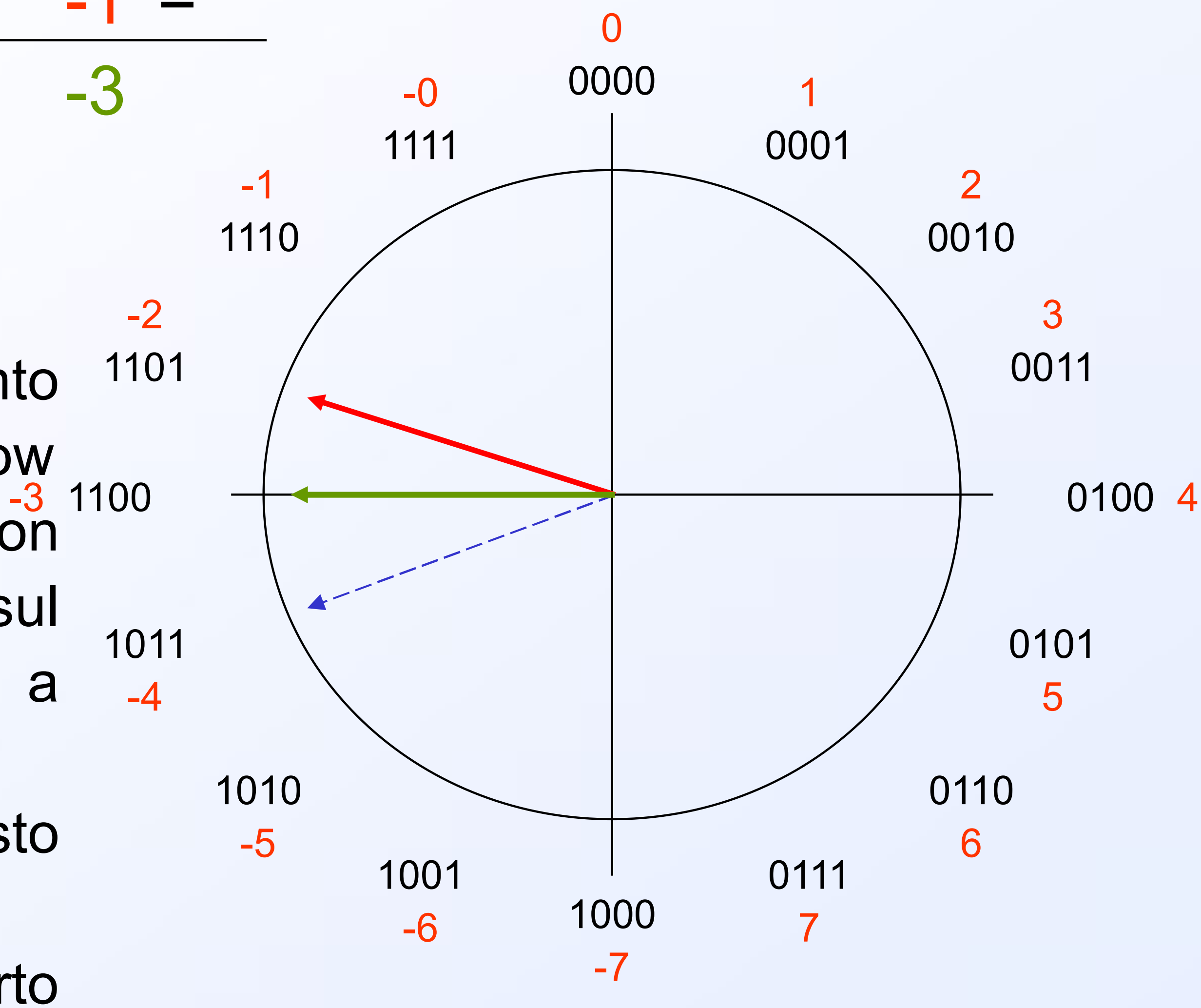
	1	1	0	1	+		-2 +
	0	1	0	1	=		5 =
1	0	0	1	0			3
				1			
	0	0	1	1			

- Addendi discordi: ma il risultato ha segno positivo
- Risultato è quello giusto diminuito di 1
- Si aggiunge il riporto generato



Numeri relativi in complemento a 1

	1	1	0	1	+	-2	+
	1	1	1	0	=	-1	=
1	1	0	1	1		-3	
				1			
	1	1	0	0			



- Addendi negativi: intanto non deve esserci un overflow
- In tal caso il risultato non può essere rappresentato sul numero di cifre a disposizione
- Risultato è quello giusto diminuito di 1
- Si aggiunge il riporto generato

Numeri relativi in complemento a 2

Rappresentazione in complemento a 2 su N cifre binarie di un numero con segno X:

- la cifra binaria più a sinistra rappresenta il segno (0 = +, 1 = -)
- nel caso di segno positivo il numero è rappresentato in forma binaria su N-1 cifre come nel caso dei numeri naturali
- nel caso di segno negativo X si rappresenta come il complemento a 2 di –X

Decimale binario

12 = 01100

-12 = 10100

-4	**100**
-3	**101**
-2	**110**
-1	**111**
0	**000**
1	**001**
2	**010**
3	**011**

Numeri relativi in complemento a 2

Alcune proprietà interessanti

- 0 si rappresenta con 000...00
- -1 si rappresenta con 111...11
- Il massimo numero positivo è 011..11
- Il minimo numero negativo è 100...00

Dato un numero negativo, scambiando 0 e 1 (operazione di complemento a 1) si ottiene il suo modulo diminuito di 1.

Es. su 4 bit: $-5|_{10}=1011|_2$

$0100|_2= 4|_{10}$

Numeri relativi in complemento a 2

Caratteristiche:

- ***Intervallo dei numeri rappresentabili su N bit: $[-2^{N-1}, 2^{N-1}-1]$***
- ***Unica rappresentazione per lo zero***
- ***L'operazione di somma effettuata operando sulla rappresentazione del numero indipendentemente dal segno produce, a meno di overflow, sempre il risultato corretto.***
- ***Data una sequenza di N bit $b_{N-1}b_{N-2}\ldots b_1 b_0$ il numero rappresentato è dato da***

$$-b_{N-1}*2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} b_i*2^i$$

Ricordatevi che

- Se ho a disposizione una sequenza di N bit in complemento a 2 allora, se il bit di segno è uguale a 0, NON si deve operare alcuna trasformazione per sapere quale intero positivo la sequenza rappresenta!!!

Numeri relativi in complemento a 2

Addendi Positivi ☺ OK

```
00111+    (+  7)
00101=    (+  5)
01100     (+12)
```

Addendi Negativi ☺ OK

```
 11001+    (-  7)
 11011=    (-  5)
~~1~~10100     (- 12)
```

Addendi Segno opposto ☺ OK

```
00111 +    (+   7)
10110 =    (-  10)
11101      (-   3)
```

```
 11001+    (-   7)
 01010=    (+ 10)
~~1~~00011     (+   3)
```

```
10100+      (-  12)
11011=      (-   5)
1 01111     (+ 15)  ?!
```

overflow

Numeri relativi in complemento a 2

1 1 1 1 1 0 1 0	riporti		
0 0 0 0 1 0 1 0 +		10 +	*riporto*
1 1 1 1 1 0 1 0		- 6	*concorde*
1 0 0 0 0 0 1 0 0		4	*bit scartato*

scartato

1 0 1 1 1 0 1 0	riporti		
1 0 1 0 1 0 1 0 +		- 86 +	*riporto*
1 0 1 1 1 0 1 1		- 69	*discorde*
1 0 1 1 0 0 1 0 1		101	*overflow*

scartato

Errore: il risultato è - 155

overflow

la somma di due numeri di segno uguale non può dare risultato di segno diverso

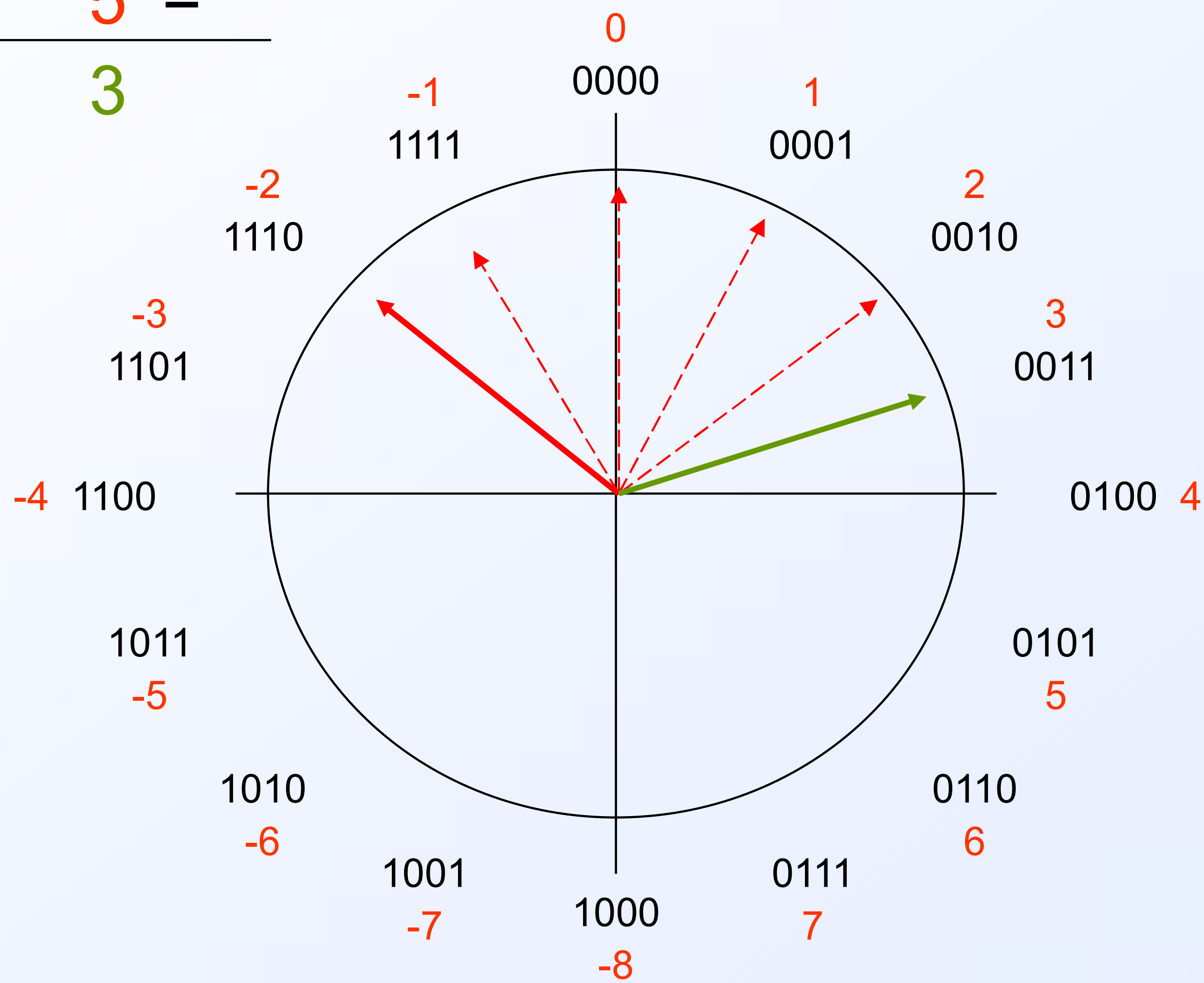
Overflow in complemento a 2

- Nella somma di due numeri relativi codificati nella rappresentazione del complemento a 2 su n cifre si ha overflow quando:
  - Criterio 1: ci sono addendi dello stesso segno e il segno del risultato è diverso dal segno degli addendi
- oppure
  - Criterio 2: il riporto dalla colonna n-2 alla colonna n-1 ed il riporto dalla colonna n-1 a quella oltre la cifra più significativa sono discordi (uno dei due è 0 e l'altro è 1)
- I due criteri sono equivalenti. Sfrutto quello che conviene

Numeri relativi in complemento a 2

	1	1	1	0	+	-2	+
	0	1	0	1	=	5	=
1	0	0	1	1		3	

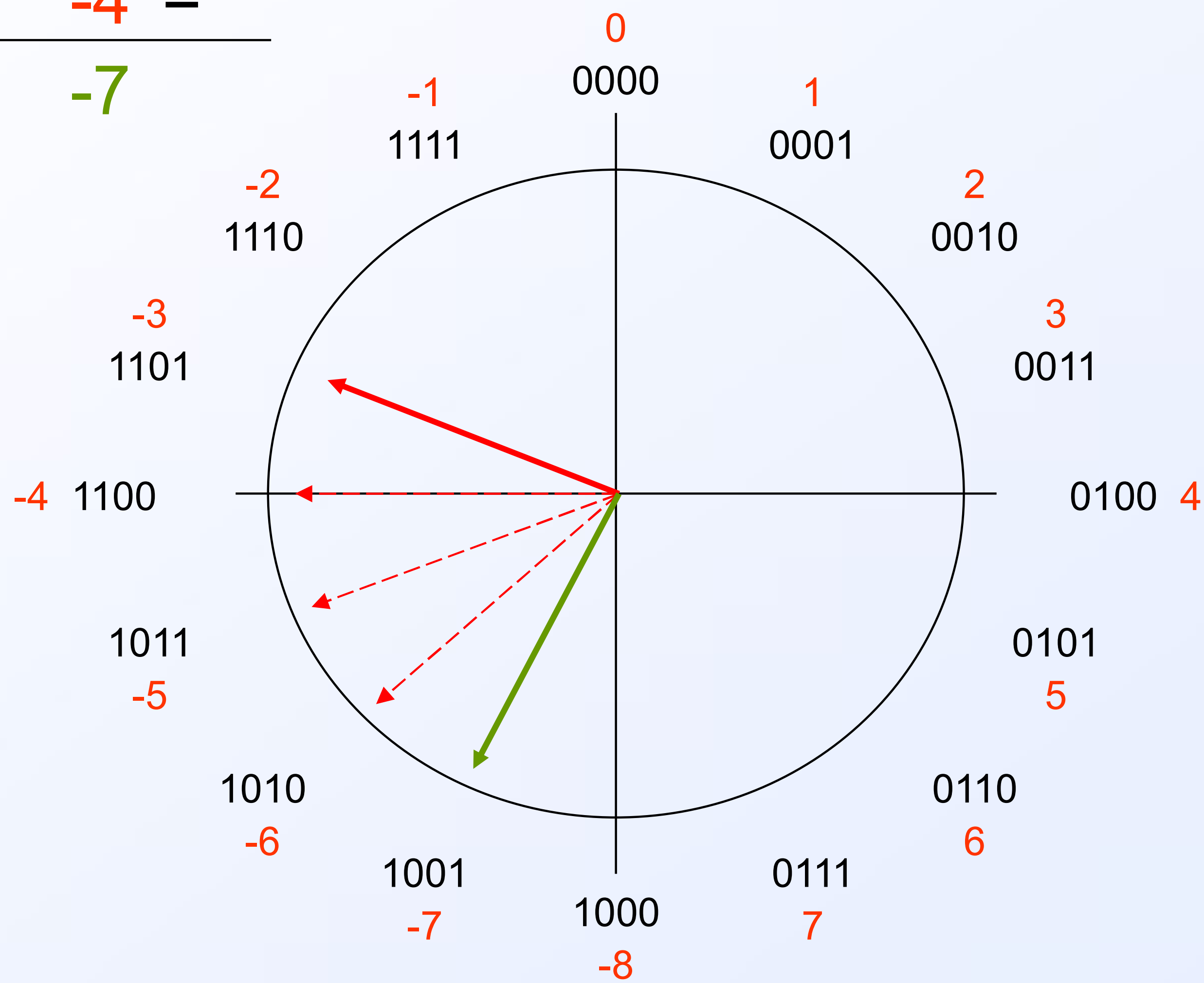
scartato



Numeri relativi in complemento a 2

	1	1	0	1	+	-3	+
	1	1	0	0	=	-4	=
1	1	0	0	1		-7	

scartato

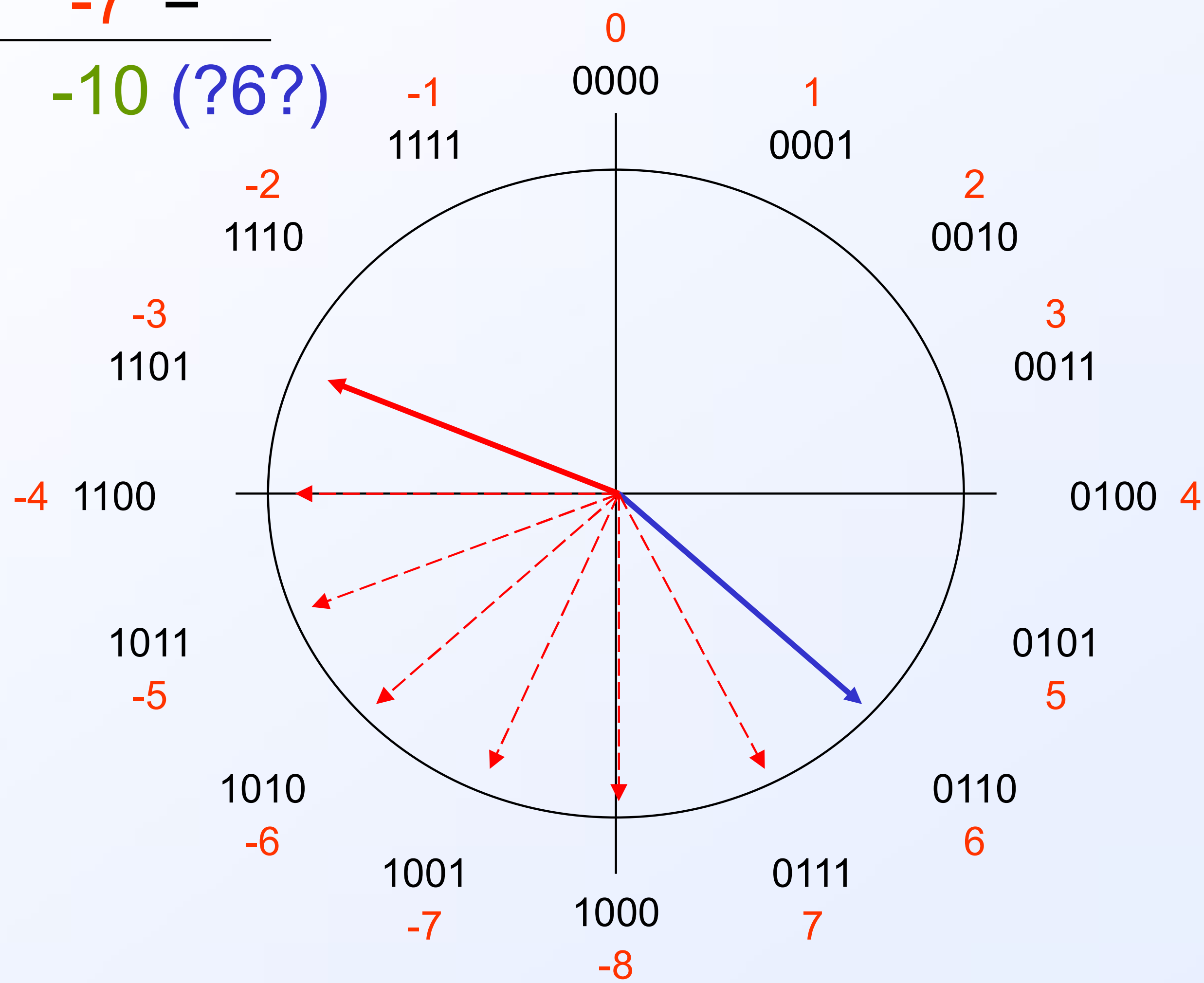


Numeri relativi in complemento a 2

```
    1 1 0 1 +
    1 0 0 1 =
  -----------
  1 0 1 1 0
```

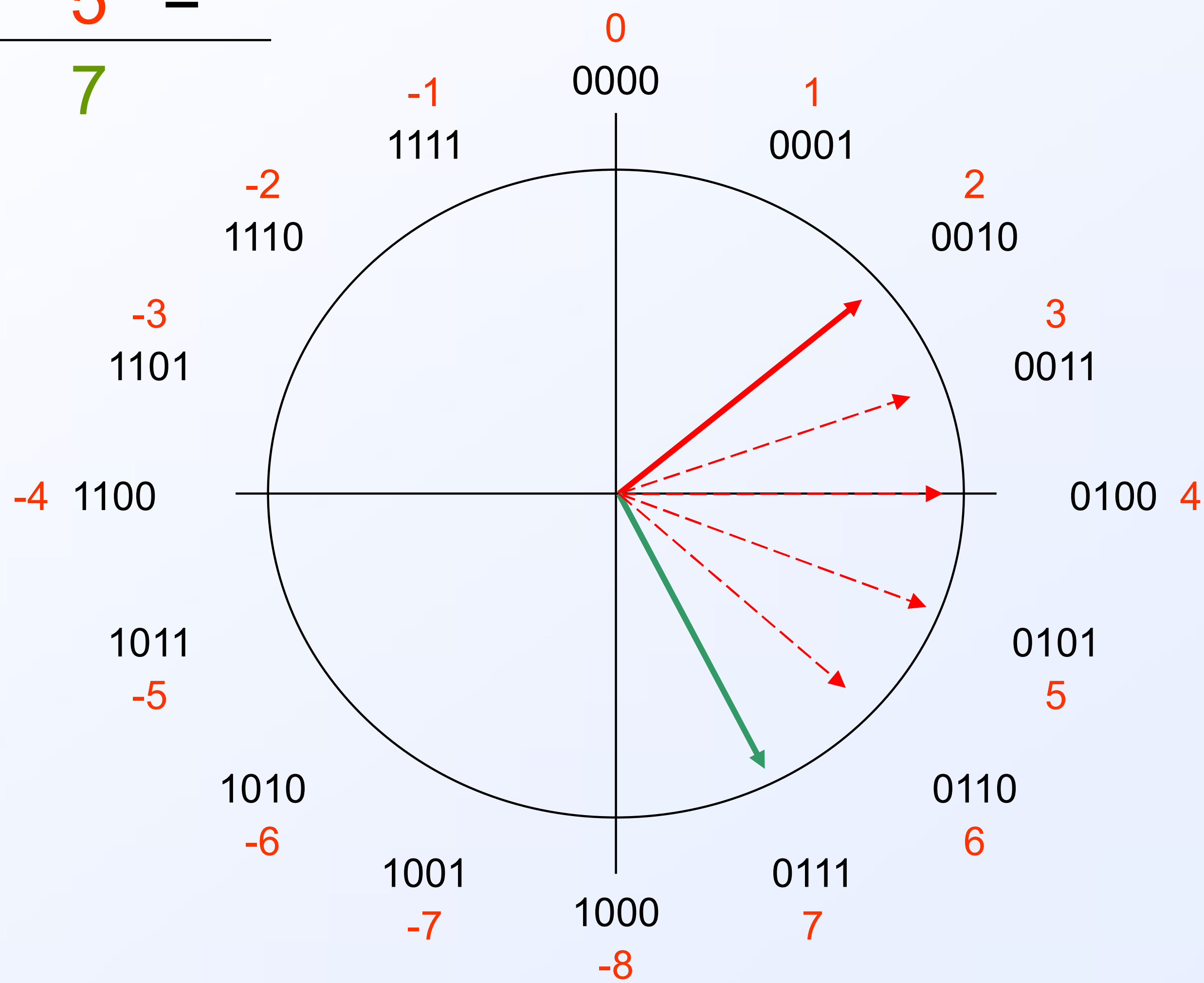
-3 +
-7 =
-10 (?6?)

scartato   overflow



Numeri relativi in complemento a 2

0	0	1	0	+		2	+
0	1	0	1	=		5	=
0	1	1	1			7	

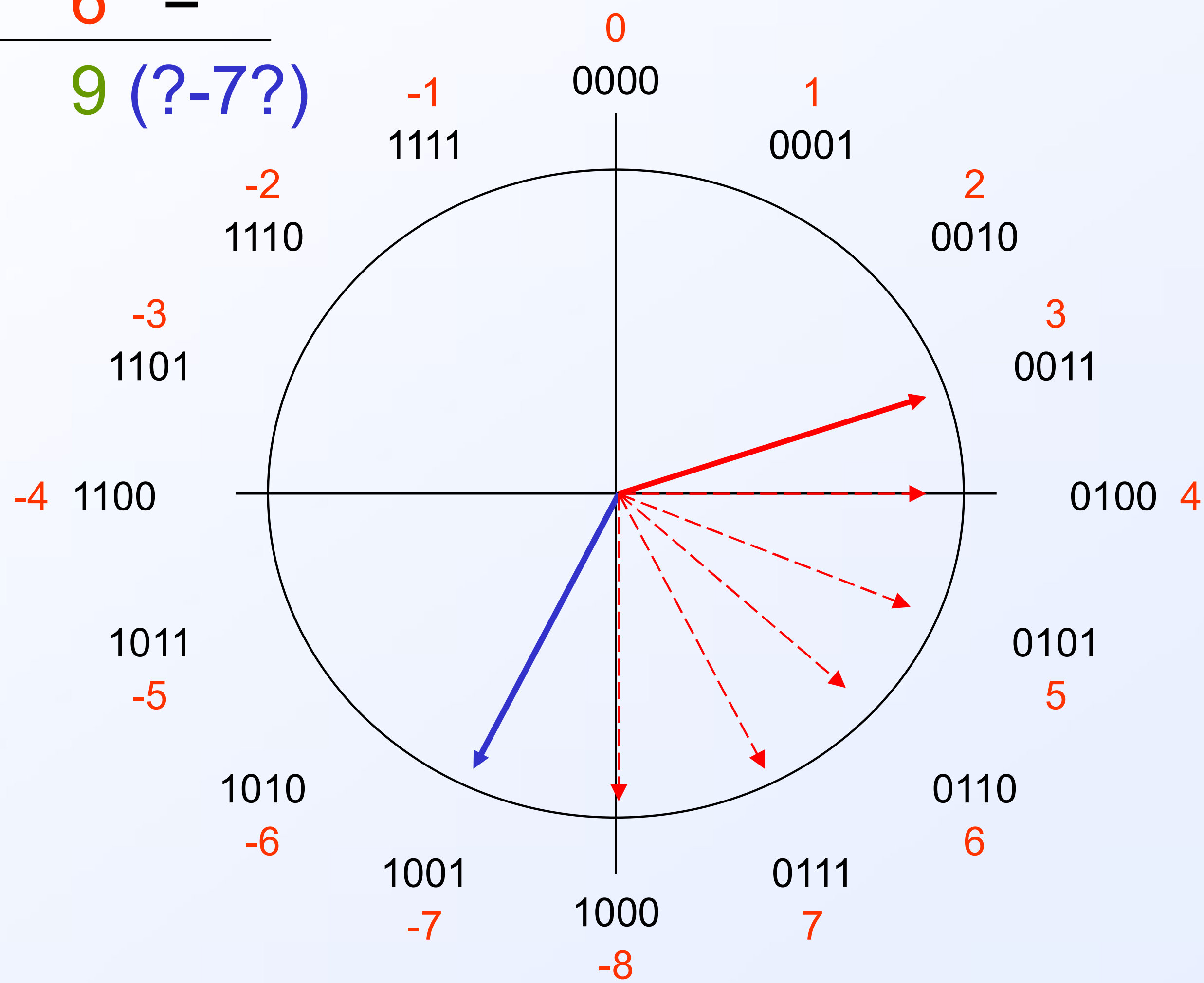


Numeri relativi in complemento a 2

0	0	1	1	+
0	1	1	0	=
1	0	0	1	

3	+
6	=
9 (?-7?)	

overflow



Estensione del segno

- Data la rappresentazione in complemento a 2 su N bit del numero X qual è la sua rappresentazione su M (M > N) bit?
- Basta copiare il bit di segno negli M – N bit più significativi
- Ad esempio:
  - X = 72 su N = 8 bit: **01001000**
    X = 72 su M = 32 bit: **00000000 00000000 00000000 01001000**
  - X = -102 su N = 8 bit: **10011010**
    X = -102 su M = 32 bit: **11111111 11111111 11111111 10011010**

Rappres. eccesso 2^{N-1}

4. ***Eccesso 2^{N-1} (per numeri rappresentati con N bit)***

Ad esempio, usando otto cifre binarie, si ha la rappresentazione **eccesso 128**:

-128	00000000	(-128 + 128 = 0)
-127	00000001	(-127 + 128 = 1)
:		
-2	01111110	(-2 + 128 = 126)
:		
25	10011001	(25 + 128 = 153)
:		
127	11111111	(127 +128 = 255)

Rappres. eccesso 2^{N-1}

La rappresentazione su N cifre binarie di un numero è ottenuta sommando 2^{N-1} al numero stesso e codificando il numero ottenuto (che è positivo) in binario puro.

- ***Intervallo di rappresentazione dei numeri:***
  $[-2^{N-1}, 2^{N-1}-1]$
- ***Vantaggio: l'ordinamento viene mantenuto nella codifica***

- Questa codifica servirà per la rappresentazione dei numeri in virgola mobile

Rappres. eccesso X

4. ***Eccesso X***

Ad esempio, usando otto cifre binarie, si ha la rappresentazione **eccesso 15**:

-15	00000000	(-15 + 15 = 0)
-14	00000001	(-14 + 15 = 1)
. .		
0	00001111	(0 + 15 = 15)
. . .		
25	00101000	(25 + 15 = 40)
. . .		
240	11111111	(240 +15 = 255)

Riassumendo

- Un informatico deve saper:
  - Che si possono denotare le quantità in basi (sistemi di numerazione) diversi da quella naturale (la base 10)
  - Scrivere un numero in base 10 (anche con la parte frazionaria) in qualunque altra base (sapendo spiegare perché)
  - Scrivere un numero in qualunque base (anche con la parte frazionaria) in base 10 (sapendo spiegare perché)
  - Conoscere la potenze di 2 (almeno fino a 2^{16})
  - Passare con immediatezza dalla base 2 a basi che sono potenze di 2 (le basi 8 e 16) e viceversa (sapendo spiegare perché)

Riassumendo

- Un informatico deve saper:
  - Effettuare la somma naturale di numeri in qualunque base e in particolare in base 2 (sapendo spiegare perché)
  - Effettuare il prodotto e la divisione per potenze della base (sapendo spiegare perché)
  - Conoscere le problematiche derivanti dall’aritmetica finita
  - Rappresentare un numero intero con segno usando N cifre in:
    - Modulo e segno
    - Complemento a 1
    - Complemento a 2
    - Eccesso 2^N

  sapendo spiegare perché la rappresentazione in complemento a 2 è soddisfacente rispetto alle altre

Riassumendo

- Un informatico deve saper:
  - ✓ Saper decodificare una sequenza di N cifre nel corrispondente numero intero con segno data la codifica usata
  - ✓ Spiegare il concetto di overflow e quali sono i criteri per segnalarlo nella somma di numeri relativi in complemento a 2

Qualche problema

- **Per tutti gli esercizi, lo svolgimento DEVE contenere tutti i calcoli ed i passaggi. Il solo risultato non sarà considerato sufficiente all'esame.**
  - **Esercizio 1**: Scrivere il numero 187 in base 2, 8, 16, 7, 5 e 9.
  - **Esercizio 2:** Considerate il numero 12. Quanto sarebbe in base 10 se fosse espresso in base 3, 4, 8, 16 e 2?
  - **Esercizio 3:** Considerate la sequenza 1001.1 in base 2. Convertitela in base 8 e 16
  - **Esercizio 4:** Considerate la sequenza 1001.1 in base 16. Convertitela in base 2 e 8
  - **Esercizio 5:** Considerate la sequenza 1001.1 in base 2 e moltiplicatela per 4 e 16. Dividetela per 2 e per 32. Inoltre, consideratela in base 5 e moltiplicatela per 125 e dividetela per 5. Verificate la correttezza di quanto avete fatto convertendo ogni risultato dalla base di lavoro alla base 10.

Qualche problema

- **Per tutti gli esercizi, lo svolgimento DEVE contenere tutti i calcoli ed i passaggi. Il solo risultato non sarà considerato sufficiente all'esame.**
  - **Esercizio 1**: Si consideri la sequenza 10001001. Dire quali numeri in base 10 sono rappresentati nelle diverse codifiche per i numeri relativi.
  - **Esercizio 2:** Considerate i numeri 12 e -21.
    - a) codificarli su 8 bit in complemento a 2:
    - b) sommarli in complemento a 2
    - c) decodificare il risultato
  - **Esercizio 3:** Codificare su N=8 bit:
    - -123 in complemento a 2
    - -14 in complemento a 1
    - -6 in modulo e segno
    - -110 in eccesso 2^{N-1}