

ES. Since  $A = \{a, b, c, d, e\}$ .

? Quante sono le scelte di 3 elementi in  $A$  in cui ciascuno elemento può essere scelto più volte.

e.g.:  $(a, a, a)$ ,  $(a, b, b)$ ,  $(a, b, c)$ , ...  
 $(b, a, b)$

Soluz. 1.

$$(b, b, a)$$

Ogni scelta di 3 elementi può essere:

① 3 elem. distinti (senza ripetizione).

② 2 elem. distinti (1 ripetizione).

(3) ripetizioni 3 volte.

il ~~numero~~ delle scelte è

$$\#(1) + \#(2) + \#(3)$$



$$\# \textcircled{1} = C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

$$\# \textcircled{2} = \# \left\{ \text{scelte di 2 elem. distin. da 5 elem.} \right\} \times 2$$

$$\left( \times (a, a, b), (a, b, b) \right)$$

$$= C_{5,2} \times 2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times 2 = 20$$

$$\# \textcircled{3} = \# \left\{ \text{scelte di 1 elem. da 5 elem.} \right\}$$

$$= C_{5,1} = 5.$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Di conseguenza:

il num di scelte è

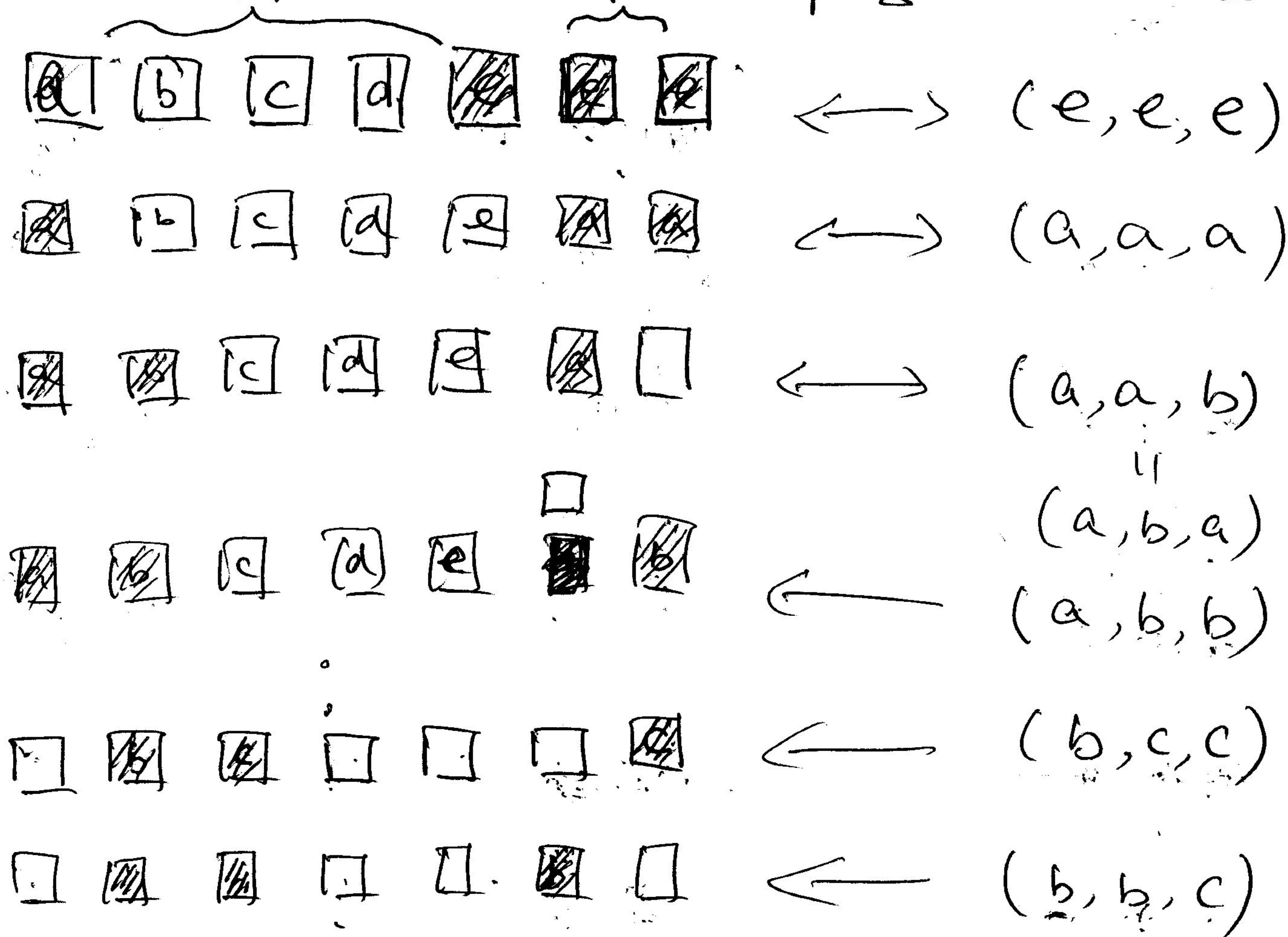
$$10 + 20 + 5 = 35$$





Soluz. 2

disposti di ripetizioni  $= 3 - 1 = 2$



$\{ \text{Scelte di 3 quadri} \}$   $\xleftrightarrow{1-1}$   $\{ \text{Scelte di 3 elem. da tra} \}$   
 tra 7 quadri 5 elem. con ripet.

$\# \{ \text{Scelte} \dots \} = \# \{ \text{scelte} \dots \}$

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$7 = 5 + (3 - 1)$





Def. Sia  $A$  un ins. con  $|A| = n$ .

Sia  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Una

Combinazione con ripetizione di

ordine  $k$  in  $A$  è una

scelta di  $k$  elementi in  $A$

in cui ciascun elemento può essere ~~per~~ scelto più volte.

Prop. Sia  $A$  un ins. con  $|A| = n$

e  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Allora il numero

delle combinazioni con ripetizione di

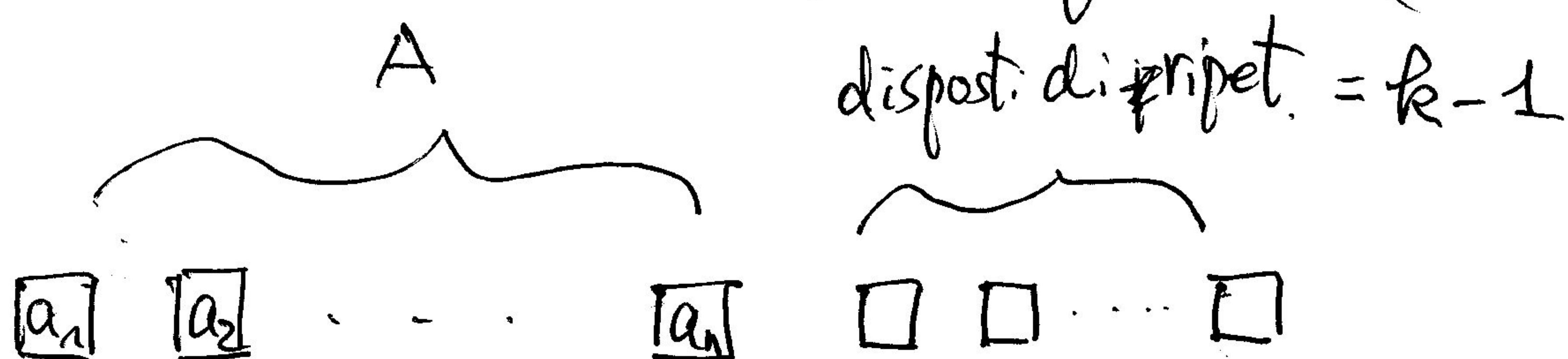
ord.  $k$  in  $A$  è

$$C_{n+k-1, k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

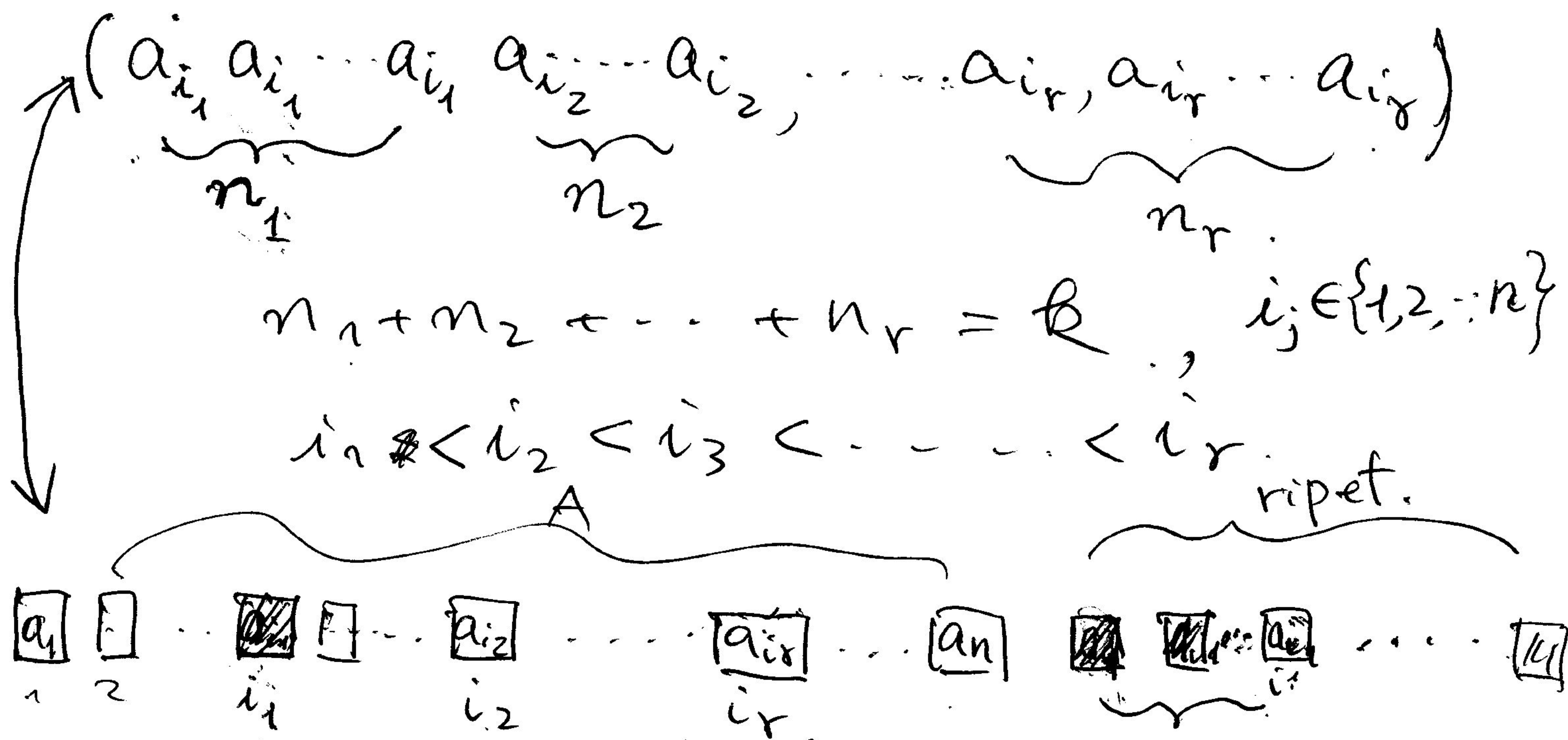


Dim.  $|A| = n$ ,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Consideriamo  $n+k-1$  quadri (ordinati)



per una combinez. di ord.  $k$  con ripet.



$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Scelte di } k \text{ quadri} \\ \text{tra } n+k-1 \text{ quadri} \\ \text{senza ripet.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Combin. di } k \\ \text{in } A \text{ con ripet.} \end{array} \right\}$

$\# \{ \text{---} \} = \# \{ \text{---} \}$



$$\Rightarrow C_{n+k-1, k} = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{combinaz. di ord. } k \\ \text{in } A \text{ con ripet.} \end{array} \right\}$$

ES. Quanti sono gli esiti possibili, 1/4 a  
a prescindere dell'ordine, del lancio  
ripetuto 10 volte di una moneta?

Soluz. C = faccia della moneta "croce"

T = ..... "Testa"

un'esito:  $(\underbrace{C, C, T, T, T, C, \dots}_{10}) = (\underbrace{T, T, T, \dots}_{10})$

$A = \{C, T\}$   $(\underbrace{T, C, T, \dots}_{10})$

$\{ \text{esiti del lancio 10 volte} \}$

$= \{ \text{Combinazioni di ord. 10 con ripet. in } \{C, T\} \}$



$\Rightarrow$  il numero degli esiti è  $\begin{cases} n=2 \\ k=10 \end{cases}$

$$C_{2+10-1, 10} = 11. \quad \boxed{11}$$

ES . Quanti sono i monomi di grado

9 nelle variabili  $w, x, y$  e  $z$ ?

e.g.  $x^9, y^7z^2, w^2x^2y^5$  . . .

Soluz.  $A = \{w, x, y, z\}$

$\{\text{monomi di gd. } 9\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Combinaz. di ord } 9 \\ \text{con ripet. in } A \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow |\{\text{monomi di gd. } 9\}| = \left| \left\{ \begin{array}{l} \text{Combinaz. di ord } 9 \\ \text{con ripet. in } A \end{array} \right\} \right|$$

$$n=4$$

$$k=9$$

$$= C_{4+9-1, 9}$$

$$= \binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3}$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220. \quad \boxed{220}$$