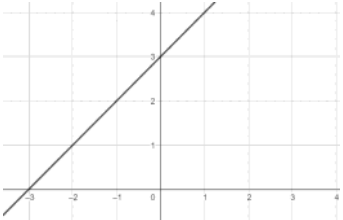
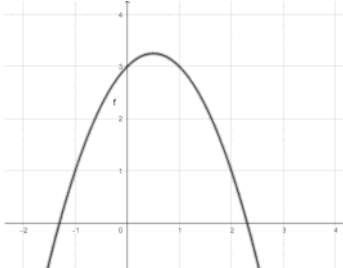
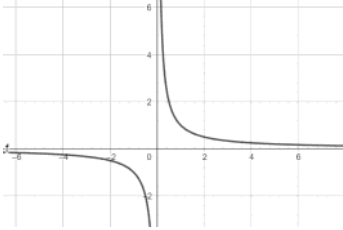
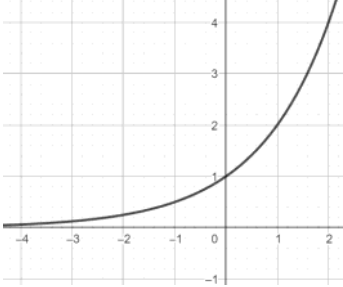
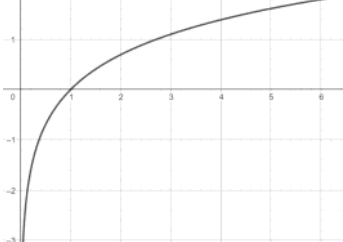


Funzione	Equazione	Grafico	Punti fondamentali e considerazioni
Retta	$y = mx + q$		<ul style="list-style-type: none"> - Int. asse y: $(0, q)$ - Più è grande $m \rightarrow$ più la retta è inclinata
Parabola	$y = ax^2 + bx + c$		<ul style="list-style-type: none"> - Int. Asse y: $(0, c)$ - Int. Asse x: (soluzioni eq. $ax^2 + bx + c = 0, 0$) - Vertice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ - Se $a > 0 \rightarrow$ è rivolta verso il basso - Se $a < 0 \rightarrow$ è rivolta verso l'alto
Iperbole equilatera riferita agli asintoti	$y = \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$		<ul style="list-style-type: none"> - $V_1(1, 1)$ - $V_2(-1, -1)$ - Il grafico dell'iperbole non tocca mai gli assi cartesiani poiché gli assi sono gli asintoti del grafico
Esponenziale	$y = a^x$ con $a \neq 0$		<ul style="list-style-type: none"> - Int. Asse y: $(0, 1)$ - L'asse x è il suo asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$
Logaritmica	$y = \log x$ con $x \geq 0$		<ul style="list-style-type: none"> - Int. Asse x: $(1, 0)$ - L'asse y è il suo asintoto verticale - Si può ottenere il grafico ribaltando il grafico della funzione esponenziale rispetto alla retta $y = x$

Funzione	Formula di derivazione
$f(x) = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$
$f(x) = mx + q$	$f'(x) = m, \quad \forall q, m \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
	se $a = e \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
	se $a = e \rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Se f e g sono funzioni derivabili e $\beta \in \mathbb{R}$	<ul style="list-style-type: none"> $(f \pm g)' = f' \pm g'$ $(\beta f)' = \beta f'$ $(fg)' = f'g + fg'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \circ f) = g'(f) \cdot f'$

Funzione	Primitiva*
$f(x) = k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx + c, \text{ con } k \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x+k}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$	$F(x) = \log(x+k) + c, \text{ con } k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$

Funzione composta	Primitiva*
$f^n(x) \cdot f'(x)$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log(f(x)) + c$
$f'(x) \cdot \cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$f'(x) \cdot \sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$f'(x) \cdot e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$

* Le primitive di una funzione differiscono di una costante $c \in \mathbb{R}$ perché secondo la definizione $F'(x) = f(x)$ e la derivata di una costante è uguale a 0

Primitiva	$F'(x) = f(x)$	La primitiva F(x) è la funzione per cui la sua derivata è uguale alla funzione di partenza. Tutte le primitive di una funzione differiscono per una costante c.
Integrale indefinito	$\int f(x) dx = F(x) + c$	Serve per trovare la primitiva di una funzione
Integrale definito	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ (Torricelli - Barrow)}$	Serve per calcolare l'area sottesa (l'area sotto il grafico) del grafico di f(x) tra l'intervallo [a, b] con a e b appartenenti al dominio della funzione
Integrale improprio	$\int_a^{+\infty} f(x) dx$	È l'integrale che ha come uno degli estremi $\pm\infty$

Simbolo di Landau	Formula	Osservazioni
$a_n = o(b_n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = 0$	- a_n cresce più lentamente di b_n
$a_n = O(b_n)$	$\left \frac{a_n}{b_n} \right \leq C$	- a_n non cresce più velocemente di b_n $a_n = o(b_n) \rightarrow a_n = O(b_n)$ - Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ esiste e $a_n = O(b_n)$ allora il valore di questo limite si trova in questo intervallo $[0, +\infty)$
$a_n = \theta(b_n)$	$0 < c \leq \left \frac{a_n}{b_n} \right \leq C$	- Il rapporto non può avvicinarsi allo zero - a_n non cresce più velocemente di b_n e non più lentamente $a_n = \theta(b_n) \rightarrow \begin{cases} a_n = O(b_n) \\ a_n \neq o(b_n) \end{cases}$ - Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ esiste e $a_n = O(b_n)$ allora il valore di questo limite si trova in questo intervallo $(0, +\infty)$
$a_n \sim b_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = 1$	- $a_n = \theta(b_n) \rightarrow \begin{cases} a_n = O(b_n) \\ b_n = O(a_n) \\ a_n = \theta(b_n) \\ b_n = \theta(a_n) \end{cases}$ - Un polinomio è asintotico al suo termine di grado massimo

Dimostrazioni

Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla su un intervallo

(Primo corollario del Teorema di Lagrange)

Data $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile allora: $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = k, \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione:

- 1) f è derivabile su (a, b) è continua su (a, b)

Se prendiamo x_1 e x_2 in (a, b) con $x_1 < x_2$ allora f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange su x_1 e x_2

- 2) Per ipotesi abbiamo che $f'(x) = k, \forall x \in (a, b)$, allora, secondo la definizione di derivata:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k-h}{h} = 0 = f'(x), \forall x \in (a, b)$$

Osservazione:

$f(x) = k$ è una retta con $m = 0$ e visto che per le rette $f'(x) = m \rightarrow f'(x) = 0$

Caratterizzazione delle primitive della stessa funzione

(Secondo corollario del Teorema di Lagrange)

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

- 1) Se F è una sua primitiva allora $F + \text{costante}$ è una sua primitiva
2) Se F_1 e F_2 sono primitiva di f allora: $F_1(x) - F_2(x) = \text{costante}$

Dimostrazione 1):

$F'(x) = f(x)$ primitiva per ipotesi. Consideriamo $(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f'(x)$

Dimostrazione 2):

F_1 e F_2 sono primitiva di f :

$$F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x) \rightarrow F_1'(x) = F_2'(x) \rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \rightarrow (F_1(x) - F_2(x))' = 0$$

Consideriamo adesso il Primo corollario del Teorema di Lagrange e il punto 1) che abbiamo appena dimostrato:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

Test di monotonia

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, allora:

- 1) f è monotona crescente su $(a, b) \leftrightarrow f'(x) \geq 0$
2) f è monotona decrescente su $(a, b) \leftrightarrow f'(x) \leq 0$

Questo teorema serve per capire in quali intervalli la funzione è monotona crescente o decrescente partendo dalla sua derivata

Dimostrazione 1):

→ Per ipotesi f è monotona crescente su (a, b) , ovvero:

$$\forall x, z \in (a, b), \quad x \neq z \begin{cases} x < z, & f(x) \leq f(z) \\ x > z, & f(x) \geq f(z) \end{cases}$$

Inoltre per ipotesi, è derivabile perciò: $\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(x)$ però questo limite è positivo o negativo?

Se $x < z$: $f(x) \leq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \geq 0$ e $x < z \rightarrow z - x > 0$ perciò visto che numeratore e denominatore hanno lo stesso segno → il rapporto è positivo → $f'(x) \geq 0$

Se $x > z$: $f(x) \geq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \leq 0$ e $x > z \rightarrow z - x < 0$ perciò visto che numeratore e denominatore hanno lo stesso segno → il rapporto è positivo → $f'(x) \geq 0$

Quindi in entrambi i casi $f'(x) \geq 0$

← Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \geq 0, \forall x, z \in (a, b)$.

Per dimostrare che f è monotona bisogna prendere in modo arbitrario x_1 e x_2 in (a, b) e dire che:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$x_1, x_2 \in (a, b) \rightarrow f$ soddisfa il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$ allora:

$\exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ma $f'(c) \geq 0$ per ipotesi perciò $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \rightarrow$ numeratore e denominatore hanno lo stesso segno → $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Dimostrazione 2):

→) Per ipotesi f è monotona crescente su (a,b) , ovvero:

$$\forall x, z \in (a, b), \quad x \neq z \begin{cases} x < z, & f(x) \geq f(z) \\ x > z, & f(x) \leq f(z) \end{cases} \quad v$$

Inoltre per ipotesi, è derivabile perciò: $\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x)$ però questo limite è positivo o negativo?

Se $x < z$: $f(x) \geq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \leq 0$ e $x < z \rightarrow z - x > 0$ perciò visto che numeratore e denominatore segno discorde \rightarrow il rapporto è negativo $\rightarrow f'(x) \leq 0$

Se $x > z$: $f(x) \leq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \geq 0$ e $x > z \rightarrow z - x < 0$ perciò visto che numeratore e denominatore segno discorde \rightarrow il rapporto è negativo $\rightarrow f'(x) \leq 0$

Quindi in entrambi i casi $f'(x) \leq 0$

←) Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \leq 0, \forall x, z \in (a, b)$.

Per dimostrare che f è monotona bisogna prendere in modo arbitrario x_1 e x_2 in (a, b) e dire che:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$x_1, x_2 \in (a, b) \rightarrow f$ soddisfa il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$ allora:

$\exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ma $f'(c) \leq 0$ per ipotesi perciò $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0 \rightarrow$ numeratore e denominatore segno discorde $\rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Test di concavità

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, allora:

- 1) f è convessa su $(a, b) \leftrightarrow f'$ è monotona crescente su (a, b)
- 2) f è concava su $(a, b) \leftrightarrow f'$ è monotona decrescente su (a, b)

Dimostrazione 1):

Prendiamo $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ (arbitrari), $x \in [x_1, x_2]$.

Sia $c(x)$ il segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e $g(x)$ la funzione che rappresenta la differenza tra $f(x)$ e $c(x)$: $g(x) = f(x) - c(x)$.

Quali caratteristiche ha $g(x)$?:

- È derivabile in $[x_1, x_2]$
- $g'(x) = f'(x) - c'(x) = f'(x) - \text{costante}$
- In particolare $g(x_1) = g(x_2) = 0$

f è convessa $\rightarrow g \leq 0$

f' è monotona crescente $\rightarrow g'$ è monotona crescente perché $g'(x) = f'(x) - \text{costante}$

Quindi $g \leq 0 \leftrightarrow g'$ è monotona crescente

Adesso che abbiamo capito come si comporta $g(x)$ possiamo iniziare la dimostrazione

→) Per ipotesi $g \leq 0$ su $[x_1, x_2]$ con $x_1 < x_2$ arbitrari

$$\frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \rightarrow g(x) \leq 0 \text{ e } g(x_1) = 0 \text{ perciò il numeratore è } \leq 0 \text{ mentre } x - x_1 > 0 \text{ quindi la frazione è } < 0$$

Se si fa il limite di questa frazione otteniamo la derivata di $g(x_1)$ e quindi $g'(x_1) < 0$.

$$\frac{g(x)-g(x_2)}{x-x_2} \rightarrow g(x) \leq 0 \text{ e } g(x_2) = 0 \text{ perciò il numeratore è } \leq 0 \text{ mentre } x - x_2 < 0 \text{ quindi la frazione è } > 0$$

Se si fa il limite di questa frazione otteniamo la derivata di $g(x_2)$ e quindi $g'(x_2) > 0$.

Perciò $\forall x_1, x_2$ arbitrari abbiamo che $g'(x_1) \leq g'(x_2) \rightarrow g'$ monotona crescente

←) Supponiamo g' monotona crescente. Applichiamo il Teorema di Lagrange in $[x_1, x_2]$ alla funzione g tenendo presente che $g(x_1) = g(x_2) = 0$ e otteniamo che :

$\exists c \in (x_1, x_2) : g'(c) = 0$ però g' è monotona crescente su $[x_1, x_2]$ quindi:

- $g'(x) \leq 0$ $[x_1, c] \rightarrow g$ è monotona decrescente
- $g'(x) \geq 0$ $[c, x_2] \rightarrow g$ è monotona crescente

Perciò $g(x) < 0$ su (x_1, x_2)

Polinomio di Taylor

Data $f: I(c) \rightarrow R$ derivabile n volte in $x = c$ allora esiste un unico polinomio di grado n , $T_{n,c}(x)$ tale che: $T_{n,c}^{(k)} = f^{(k)}(c) \forall k = 0, \dots, n$ (con $T_{n,c}^{(0)} = T(c)$, $f^{(0)}(c) = f(c)$)

Questo polinomio si chiama POLINOMIO DI TAYLOR di ordine n per f in $x = c$ ed è:

$$T_{n,c} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$