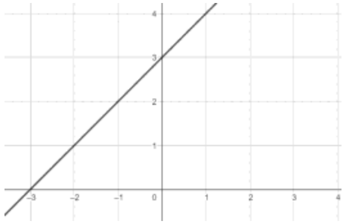
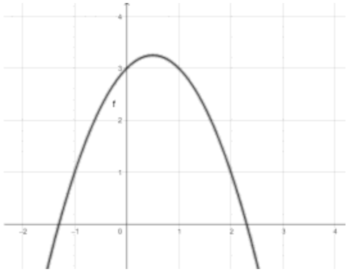
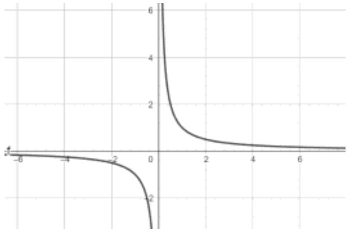
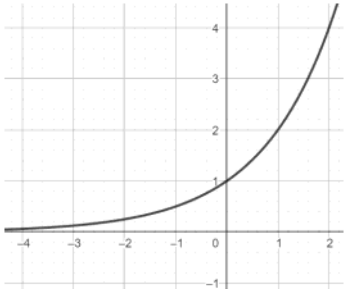
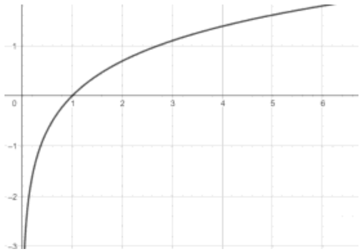
Funzione	**Equazione**	**Grafico**	**Punti fondamentali e considerazioni**
Retta	$\boldsymbol{y = mx + q}$		- Int. asse y: $(0, q)$ - Più è grande m → più la retta è inclinata
Parabola	$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$		- Int. Asse y: $(0, c)$ - Int. Asse x: $(soluzioni\ eq.\ ax^2 + bx + c\ = 0, 0)$ - Vertice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ - Se a > 0 → è rivolta verso il basso - Se a < 0 → è rivolta verso l'alto
Iperbole equilatera riferita agli asintoti	$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}\ \mathrm{con}\ x\ \neq 0}$		- $V_1\,(1,1)$ - $V_2\,(-1,-1)$ - Il grafico dell'iperbole non tocca mai gli assi cartesiani poiché gli assi sono gli asintoti del grafico
Esponenziale	$\boldsymbol{y = a^x\ con\ a\ \neq 0}$		- Int. Asse y: $(0, 1)$ - L'asse x è il suo asintoto orizzontale per $x \to -\infty$
Logaritmica	$\boldsymbol{y = \log x\ con\ x \geq 0}$		- Int. Asse x: $(1, 0)$ - L'asse y è il suo asintoto verticale - Si può ottenere il grafico ribaltando il grafico della funzione esponenziale rispetto alla retta $y = x$

Funzione	Formula di derivazione
$f(x) = k, \quad con\ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$
$f(x) = mx + q$	$f'(x) = m, \quad \forall q, m \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}, \quad con\ \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $se\ a = e \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ ln\, a$ $se\ a = e \rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = sin\, x$	$f'(x) = cos\, x$
$f(x) = cos\, x$	$f'(x) = -sin\, x$
Se f e g sono funzioni derivabili e β ∈ ℝ	• $(f \pm g)' = f' \pm g'$ • $(\beta f)' = \beta f'$ • $(fg)' = f'g + fg'$ • $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ • $(g \circ f) = g'(f) \cdot f'$

Funzione	Primitiva*
$f(x) = k, con\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx + c\, , con\ k \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}, con\ \alpha \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, con\ \alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x+k}, con\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = \log(x+k) + \mathrm{c}\, , con\ k \in \mathbb{R}$
$f(x) = sin\, x$	$F(x) = -cos\, x + c$
$f(x) = cos\, x$	$F(x) = sin\, x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$

Funzione composta	Primitiva*
$f^n(x) \cdot f'(x)$	$\dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\big(f(x)\big) + c$
$f'(x) \cdot cos\, f(x)$	$sin\, f(x) + c$
$f'(x) \cdot sin\, f(x)$	$-\, cos\, f(x) + c$
$f'(x) \cdot e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$

* Le primitive di una funzione differiscono di una costante c ∈ ℝ perché secondo la definizione $F'(x) = f(x)$ e la derivata di una costante è uguale a 0

Primitiva	$F'(x) = f(x)$	La primitiva F(x) è la funzione per cui la sua derivata è uguale alla funzione di partenza. Tutte le primitive di una funzione differiscono per una costante c.
Integrale indefinito	$\int f(x)dx = F(x) + c$	Serve per trovare la primitiva di una funzione
Integrale definito	$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\ (Torricelli - Barrow)$	Serve per calcolare l'area sottesa (l'area sotto il grafico) del grafico di f(x) tra l'intervallo [a, b] con a e b appartenenti al dominio della funzione
Integrale improprio	$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$	È l'integrale che ha come uno degli estremi $\pm\infty$

Simbolo di Landau	**Formula**	**Osservazioni**
$a_n = o(b_n)$	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$	- a_n **cresce più lentamente** di b_n
$a_n = O(b_n)$	$\left\lvert\frac{a_n}{b_n}\right\rvert \leq C$	- a_n **non cresce più velocemente** di b_n $a_n = o(b_n) \rightarrow a_n = O(b_n)$ - Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ esiste e $a_n = O(b_n)$ allora il valore di questo limite si trova in questo intervallo $[0, +\infty)$
$a_n = \theta(b_n)$	$0 < c \leq \left\lvert\frac{a_n}{b_n}\right\rvert \leq C$	- Il rapporto non può avvicinarsi allo zero - a_n **non cresce più velocemente** di b_n e non **più lentamente** $a_n = \theta(b_n) \rightarrow \begin{cases} a_n = O(b_n) \\ a_n \neq o(b_n) \end{cases}$ - Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ esiste e $a_n = O(b_n)$ allora il valore di questo limite si trova in questo intervallo $(0, +\infty)$
$a_n \sim b_n$	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$	- $a_n = \theta(b_n) \rightarrow \begin{cases} a_n = O(b_n) \\ b_n = O(a_n) \\ a_n = \theta(b_n) \\ b_n = \theta(a_n) \end{cases}$ - Un polinomio è asintotico al suo termine di grado massimo

Dimostrazioni

Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla su un intervallo
(Primo corollario del Teorema di Lagrange)

Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile allora : $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b) \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = k,\ \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione:

1) f è derivabile su (a,b) è continua su (a,b)
   Se prendiamo $x_1\ e\ x_2\ (a,b)$ con $x_1 < x_2$ allora f soddisfa le ipotesi del Teorema di Langrange su x1 e x2
2) Per ipotesi abbiamo che $f(x) = k,\ \forall x \in (a,b)$, allora, secondo la definizione di derivata:
   $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0 = f'(x), \forall x \in (a,b)$

Osservazione:

$f(x) = k$ è una retta con m = 0 e visto che per le rette $f'(x) = m \to f'(x) = 0$

Caratterizzazione delle primitive della stessa funzione
(Secondo corollario del Teorema di Lagrange)

Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

1) Se F è una sua primitiva allora $F + costante$ è una sua primitiva
2) Se F_1 e F_2 sono primitiva di f allora: $F_1(x) - F_2(x) = costante$

Dimostrazione 1):

$F'(x) = f(x)$ primitiva per ipotesi. Consideriamo $(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f'(x)$

Dimostrazione 2):

F_1 e F_2 sono primitiva di f:

$F_1'(x) = f(x),\ F_2'(x) = f(x) \to F_1'(x) = F_2'(x) \to F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \to \left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = 0$

Consideriamo adesso il Primo corollario del Teorema di Lagrange e il punto 1) che abbiamo appena dimostrato:

$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1(x) - F_2(x) = c$

Test di monotonia

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, allora:

1) f è monotona crescente su $(a,b) \leftrightarrow f'(x) \geq 0$
2) f è monotona decrescente su $(a,b) \leftrightarrow f'(x) \leq 0$

Questo teorema serve per capire in quali intervalli la funzione è monotona crescente o decrescente partendo dalla sua derivata

Dimostrazione 1):

$\to$) Per ipotesi f è monotona crescente su (a,b), ovvero:

$$\forall x, z \in (a,b), \qquad x \neq z \begin{cases} x < z, & f(x) \leq f(z) \\ x > z, & f(x) \geq f(z) \end{cases}$$

Inoltre per ipotesi, è derivabile perciò: $\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x)$ però questo limite è positivo o negativo?

Se $x < z$: $f(x) \leq f(z) \to f(z) - f(x) \geq 0$ e $x < z \to z - x > 0$ perciò visto che numeratore e denominatore hanno lo stesso segno → il rapporto è positivo → $f'(x) \geq 0$

Se $x > z$: $f(x) \geq f(z) \to f(z) - f(x) \leq 0$ e $x > z \to z - x < 0$ perciò visto che numeratore e denominatore hanno lo stesso segno → il rapporto è positivo → $f'(x) \geq 0$

Quindi in entrami casi $f'(x) \geq 0$

$\leftarrow$) Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \geq 0, \forall x, z \in (a,b)$.

Per dimostrare che f è monotona bisogna prendere in modo arbitrario $x_1\ e\ x_2\ in\ (a,b)$ e dire che:

$x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$

$x_1, x_2 \in (a,b) \to f$ soddisfa il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$ allora:

$\exists c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ma $f'(c) \geq 0$ per ipotesi perciò $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \to$ numeratore e denominatore hanno lo stesso segno $\to f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \to f(x_2) \geq f(x_1)$

Dimostrazione 2):

$\rightarrow$) Per ipotesi f è monotona crescente su (a,b), ovvero:

$$\forall x, z \in (a,b), \qquad x \neq z \begin{cases} x < z, & f(x) \geq f(z) \\ x > z, & f(x) \leq f(z) \end{cases} v$$

Inoltre per ipotesi, è derivabile perciò: $\lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x)$ però questo limite è positivo o negativo?

Se $x < z$: $f(x) \geq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \leq 0$ e $x < z \rightarrow z - x > 0$ perciò visto che numeratore e denominatore segno discorde $\rightarrow$ il rapporto è negativo $\rightarrow f'(x) \leq 0$

Se $x > z$: $f(x) \leq f(z) \rightarrow f(z) - f(x) \geq 0$ e $x > z \rightarrow z - x < 0$ perciò visto che numeratore e denominatore segno discorde$\rightarrow$ il rapporto è negativo $\rightarrow f'(x) \leq 0$

Quindi in entrami casi $f'(x) \leq 0$

$\leftarrow$) Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \leq 0, \forall x, z \in (a,b)$.

Per dimostrare che f è monotona bisogna prendere in modo arbitrario x_1 *e* x_2 *in* (a,b) e dire che:

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$x_1, x_2 \in (a,b) \rightarrow f$ soddisfa il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$ allora:

$\exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ma $f'(c) \leq 0$ per ipotesi perciò $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0 \rightarrow$ numeratore e denominatore segno discorde $\rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Test di concavità

Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, allora:

1) f è convessa su $(a,b) \leftrightarrow f'$ è monotona crescente su (a,b)
2) f è concava su $(a,b) \leftrightarrow f'$ è monotona decrescente su (a,b)

Dimostrazione 1):

Prendiamo $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ (arbitrari), $x \in [x_1, x_2]$.

Sia $c(x)$ il segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e g(x) la funzione che rappresenta la differenza tra $f(x)$ e $c(x)$: $g(x) = f(x) - c(x)$.

Quali caratteristiche ha $g(x)$?:

- È derivabile in $[x_1, x_2]$
- $g'(x) = f'(x) - c'(x) = f'(x) - costante$
- In particolare $g(x_1) = g(x_2) = 0$

f è convessa $\rightarrow g \leq 0$

f' è monotona crescente $\rightarrow g'$ è monotona crescente perché $g'(x) = f'(x) - costante$

Quindi $g \leq 0 \leftrightarrow g'$ è monotona crescente

Adesso che abbiamo capito come si comporta $g(x)$ possiamo iniziare la dimostrazione

$\rightarrow$) Per ipotesi $g \leq 0$ su $[x_1, x_2]$ con $x_1 < x_2$ arbitrari

$\frac{g(x)- g(x_1)}{x - x1} \rightarrow g(x) \leq 0$ e $g(x_1) = 0$ perciò il numeratore è ≤ 0 mentre $x - x_1 > 0$ quindi la frazione è < 0

Se si fa il limite di questa frazione otteniamo la derivata di $g(x_1)$ e quindi $g'(x_1) < 0$.

$\frac{g(x)- g(x_2)}{x - x2} \rightarrow g(x) \leq 0$ e $g(x_1) = 0$ perciò il numeratore è ≤ 0 mentre $x - x_2 < 0$ quindi la frazione è > 0

Se si fa il limite di questa frazione otteniamo la derivata di $g(x_2)$ e quindi $g'(x_2) > 0$.

Perciò $\forall x_1, x_2$ arbitrari abbiamo che $g'(x_1) \leq g'(x_2) \rightarrow g'$ monotona crescente

$\leftarrow$) Supponiamo g' monotona crescente. Applichiamo il Teorema di Lagrange in $[x_1, x_2]$ alla funzione g tenendo presente che $g(x_1) = g(x_2) = 0$ e otteniamo che :

$\exists c \in (x_1, x_2) : g'(c) = 0$ però g' è monotona crescente su $[x_1, x_2]$ quindi:

- $g'(x) \leq 0$ $[x_1, c]$ $\rightarrow g$ è monotona decrescente
- $g'(x) \geq 0$ $[c, x_2]$ $\rightarrow g$ è monotona crescente

Perciò $g(x) < 0$ su (x_1, x_2)

Polinomio di Taylor

Data $f\colon I(c) \to R$ derivabile n volte in x = c allora esiste un unico polinomio di grado n, $T_{n,c}(x)$ tale che: $T_{n,c}^{(k)} = f^{(k)}(c)\ \forall k = 0, \dots, n$ (con $T_{n,c}^{(0)} = T(c)$, $f^{(0)}(c) = f(c)$)

Questo polinomio si chiama POLINOMIO DI TAYLOR di ordine n per f in x = c ed è:

$T_{n,c} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$

Teorema della media integrale

Sia $f\colon [a,b] \to R$ continua, allora esiste $c \in [a,b]\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Significato geometrico

$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

Dimostrazione:

F continua su [a,b] quindi $\int_a^b f(x)\,dx$ è ben definita.

Per il Teorema di Weiestrass: $\exists x_m, x_M \in [a,b]\colon\ f(x_m) = m \le f(x) \le f(x_M) = M$

Abbiamo quindi che: $\forall x \in [a,b],\ m \le f(x) \le M$

Integriamo su [a,b] e usiamo la proprietà della monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx \to m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Divido tutto per $(b-a)$: $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

Il teorema degli zeri applicato alla funzione $g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ garantisce che $g(x)$ ha uno zero in $[a,b]$:

$$\exists c \in [a,b]\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema Fondamentale del calcolo integrale

Sia $f\colon [a,b] \to R$ continua e sia $x_0 \in [a,b]$, la funzione

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad x \in [a,b]$ è derivabile su $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$

F(x) può avere diversi valori: 0 (se x = x_0), positivo (se x > x_0), negativo (se x < x_0)

Se cambio x_0 , cambio primitiva.

Questo teorema afferma che se f è continua allora esiste una sua primitiva ed è in questa forma: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Dimostrazione:

Vogliamo dimostrare che prendendo $x^* \in [a,b]$ in modo arbitrario, si ha che:

$F'(x^*) = f(x^*)$ ovvero $\lim_{h\to 0}\frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h} = f(x^*)$

Prendiamo $x^* \in (a,b)$ (se prendiamo gli estremi dobbiamo vedere se negli estremi la funzione si continua, non possiamo calcolare i limiti destri o sinistri)

Se $h > 0 \to F(x^*+h) - F(x^*) = \int_{x^*}^{x^*+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt + + \int_{x_0}^{x^*+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x^*+h} f(t)\,dt$ (MEDIA INTEGRALE di f su [x*, x*+h])

Il Teorema della media integrale dice che: $\exists c \in [x^*, x^*+h]\colon f(c) = \frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h}$

$\lim_{h\to 0} c = x^* \to \lim_{h\to 0} f(c) = f(x^*)$ (visto che la funzione è continua)

Quindi il rapporto $\frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h}$ ammette limite finito e vale $f(x^*)$ perciò:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h} = f(x^*)$$

Prendendo h < 0 -> si ottiene $\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h} = f(x^*)$ quindi $F'(x^*) = f(x^*)$