Def. 1) Due insiemi A e B si dicono <u>equipolenti</u>

se $\exists$ una funz. biiett. $f: A \to B$

ossia A e B hanno la stessa <u>Cardinalità</u> i.e.

$$|A| = |B|.$$

2). Se $\exists$ una funz. $f: A \to B$ iniettiva, si dice

$$|A| \leq |B|$$

* $f(A) \subseteq B$, $|A| = |f(A)|$

2)' Se $\exists$ $f: A \to B$ suriettiva, si dice

$$|A| \geq |B|$$

Prop Dati A e B ins.

$$|A| = |B| \iff |A| \leq |B|, \ |B| \leq |A| .$$

ES: $f: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \longmapsto 2a$ } biiettiva, $f^{-1}: 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{N}$, $2a \mapsto a$

$$\Rightarrow \quad |\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$$

$$\mathbb{N} \supsetneq 2\mathbb{N} .$$

ES. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (0,0), \underbrace{(0,1), (1,0)}_{a+b=1}, \underbrace{(0,2), (1,1), (2,0)}_{a+b=2}, \underbrace{(0,3)}_{a+b=3}, \dots \}$

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (0,2) & (1,1) & (2,0) & (0,3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \dots$$

Def: "$\leq$". $(a,b) \leq (a',b') \overset{def}{\iff} \begin{cases} a+b \leq a'+b' \\ a \leq a' \text{ e se } a = a' \text{ allora } b \leq b' \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (0,0) \longmapsto 0 \\ (0,1) \longmapsto 1 \\ (1,0) \longmapsto 2 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{iniett. e suriett.} \Rightarrow \text{biiett.}$$

$$\Rightarrow |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| .$$

Def: Un ins. A è infinito se è equipolente ad uno dei suoi sottoins. proprio.

ossia: $\exists$ funz. iniettiva
Ma Non Suriettiva
$f : A \to A$.

Altrimenti, A è finito.

ossia ogni funz. iniettiva $f : A \to A$
si risulta suriettiva.

Dato $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Teo: 1): $\forall n \geq 1$, I_n è finito.

2) Per $m, n \in \mathbb{N}$, se $m \neq n$ allora I_m e I_n non sono equipolenti. ~~i.e.~~

3) Se $m \leq n$, allora $|I_m| \leq |I_n|$.

4). Ogni insieme non vuoto finito è equipolente ad un I_n.

5). Per ogni ins. infinito X si ha

$$|\mathbb{N}| \leq |X|$$

Dim 4). A ins. finito non vuoto,

$\exists x_1 \in A$, $A_1 = A \setminus \{x_1\}$, se non vuoto, $\exists x_2 \in A_1$

$A_2 = A_1 \setminus \{x_2\}$ se A_2 non vuoto $\exists x_3 \in A_2$.

$A_3 \doteq A_2 \setminus \{x_3\}$

$\vdots$

$A_n \doteq A_{n-1} \setminus \{x_n\}$

$\vdots$

Se per qualche $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$

$\Rightarrow A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$

$\Rightarrow \exists f : A \longrightarrow I_{n-1}$

$x_i \longmapsto i$, $1 \leq i \leq n-1$

$\Rightarrow |A| = |I_{n-1}|$.

Se per $\forall n$, $A_n \neq \emptyset \Rightarrow$

$f : A' = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \to \mathbb{N}$ biettiva,

$\forall i \in \mathbb{N}$, $x_i \longmapsto i$

$\Rightarrow \underline{A} = \underline{A'} \cup A \setminus A'$

$\Rightarrow |A| \geq |A'| = |\mathbb{N}| \Rightarrow A$ è infinito

(!!)

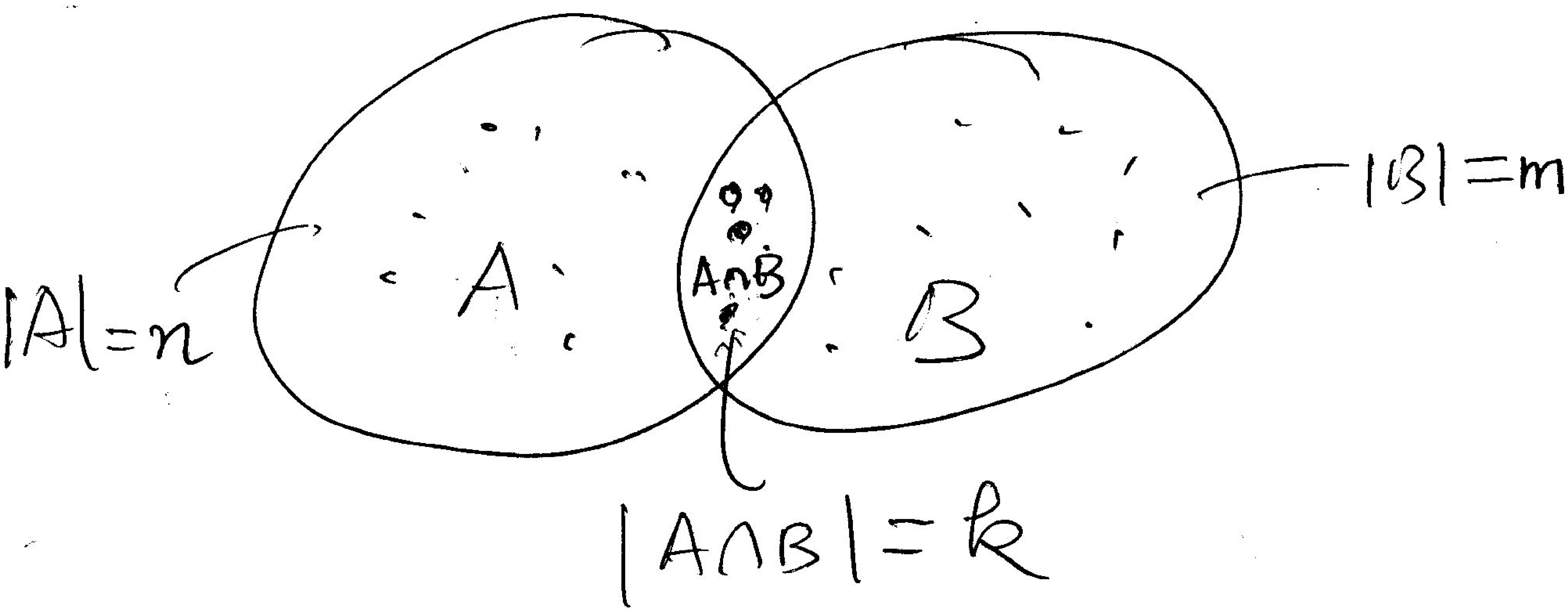
Poniamo

$$|I_n| = n = \#\{1, 2, \dots, n\}.$$

i.e. $|A| = |I_n| \iff \#\{\text{elem. di } A\} = n$.

Prop.: A e B ins. finiti. allora

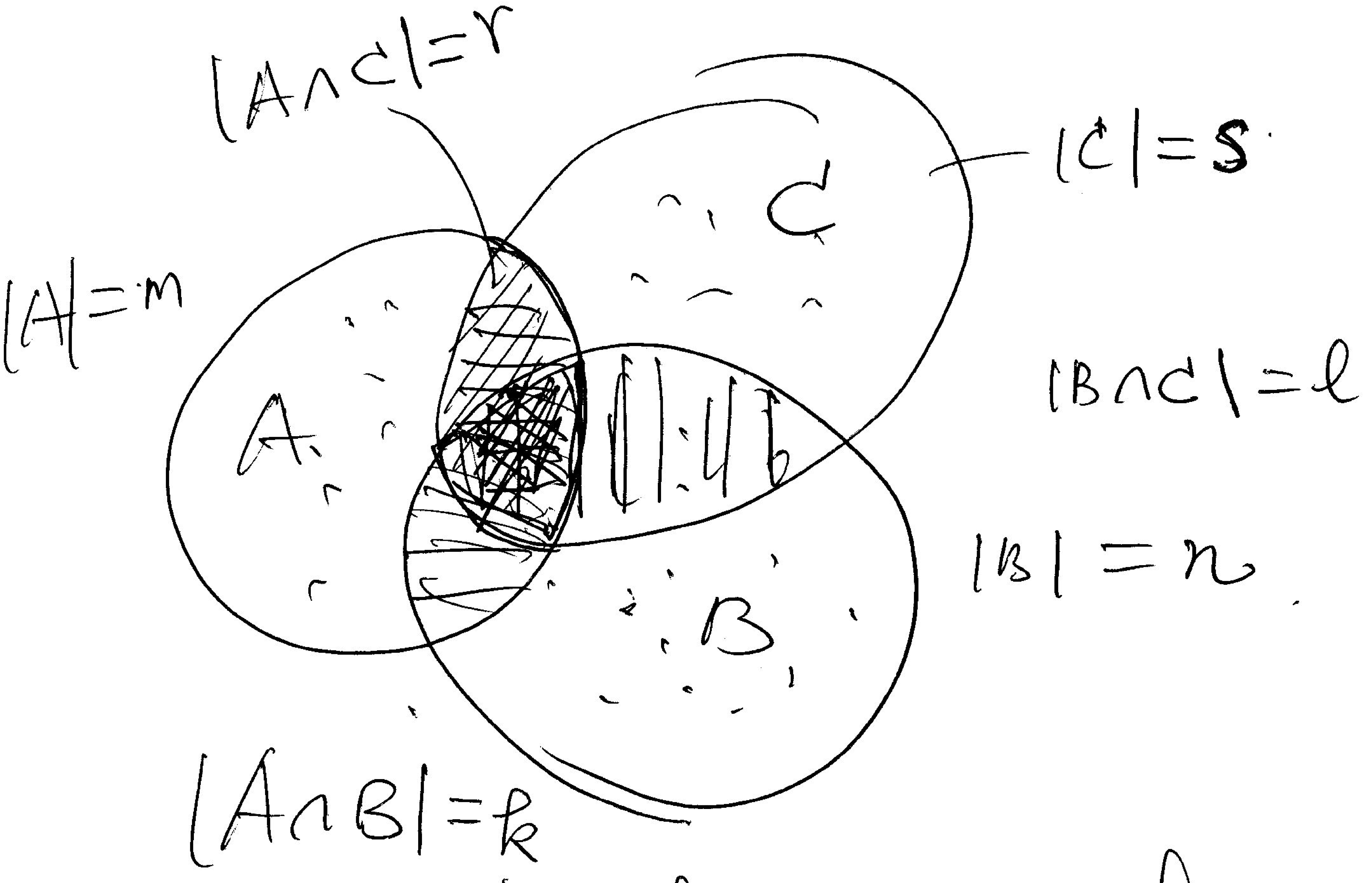
$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}.$$



$$\underline{n + m - k} = |A \cup B|$$

Prop' A, B e C ins. finiti allora

$$\boxed{|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C| -|B\cap C| + |A\cap B\cap C|}$$



Eser: verificate la formula.

e.g. Ci sono gli studenti di informatica,

M — # 152 matricole hanno superato l'esam. di M.D.

L — # 144 - - - - - - - - Logica

$M \cap L$ — # 89 - - - - - - - - - - sia M.D che Logica

$M \cup L$? Quante - - - - - - - almeno uno dei due esami?

$$|M \cup L| = |M| + |L| - |M \cap L|$$

$$= 152 + 144 - 89$$

$$= 207.$$