Def.: 1) Sia A un ins. finito e $k \geq 1$ $|A| \geq k$. Una disposizione con ripetizione di ord. k in A è una sequenza di k - elementi di A non neccessariamente a due a due distinti.

2) Una sequenza di k elementi di A a due a due distinti si chiama disposizione semplice.

Prop.: 1) Sia $1 \leq k \leq |A| = n$, allora il numero delle dispozioni con ripetizione di ord. k in A è n^k.

② Il numero delle disposizioni semplice di ord. k in A

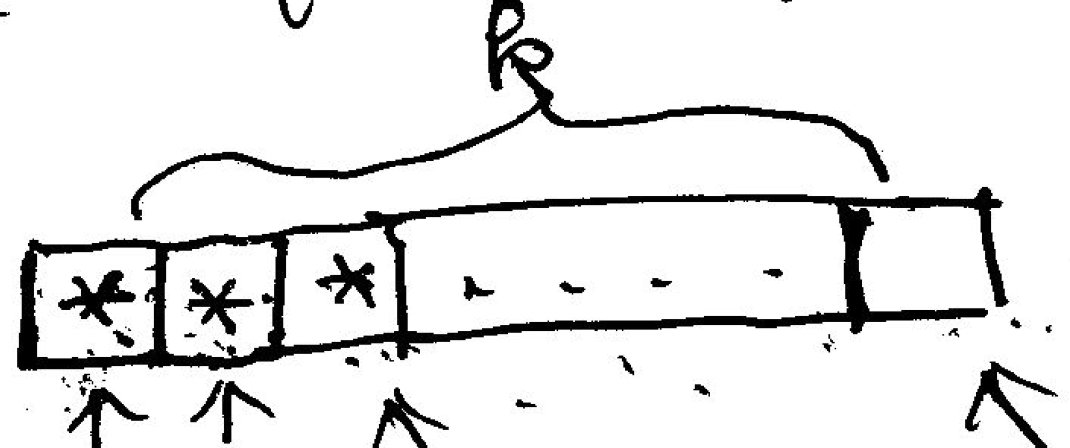
è

$$D_{n,k} = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)[(n-k)!]}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Dim</u>: Per il principio di scelte successivi



Scelte: n $n-1$ $n-2$ $\cdots$ $n-(k-1)$

tot. scelte: $n(n-1)\cdots(n-(k-1))$

$\square$

$*$: $D_{n,n} = n!$

<u>ES</u>. Una Password d'accesso per un sito internet si forma da # 8 simboli senza ripetizione di $\begin{cases} \text{lettere } (\# 26) \\ \text{numeri } \{0,1,\ldots,9\} \end{cases}$

? Quante sono le password possibile ?

Soluz.: $A = \{\text{lettere}\} \uplus \{0,1,\ldots,9\}$

$|A| = \# 26 + 10 = 36$

$D_{36,8} = 36\cdot 35\cdot 34 \cdots 29 = 1220096908800$

Def: Sia A un ins. con $|A| = n$

Sia $0 \leq k \leq n$. Una Combinazione (semplice) di ord. k in A è una scelta di un ~~sotto~~insieme C di A con $|C| = k$.

i.e. una scelta di k elem. tra n elementi in A.

il numero di tali scelte:

$$C_{n,k}.$$

Prop: $C_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot D_{n,k}$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dim: (1) $C_{n,k} = |\{\text{~~sotto~~ins. } B \subset A \mid |B| = k\}|$

(2) Per ogni $B \subset A$ con $|B| = k$, si ha il numero delle disposizioni semplici di ord k in B è

$$D_{k,k} = k!$$

Allora, il numero delle disposizioni semplici di ord. k in A è

(1) + (2) $$D_{n,k} = C_{n,k} \cdot D_{k,k}.$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{D_{k,k}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$\blacksquare$

Os. $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$.

Es: Nel SuperEnalotto:

6 numeri sottratti su un totale 90 numeri.

Quante sono le estrazioni possibili?

Soluz. il num. delle estrazioni è

$$C_{90,6} = \frac{\overbrace{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}^{6}}{6!}$$

$$= 622614630.$$

Prop: $C_{n,k} = C_{n,n-k}$

Dim: $$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_{n,n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(\underbrace{n-(n-k)}_{k})!}$$

Def: Dati $n \in \mathbb{N}$, e $0 \leq k \leq n$

definiamo "Coefficiente binomiale"

il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad (= C_{n,k}).$$

Prop: 1): $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2): $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) (Formula di Stiefel): Per $1 \leq k \leq n$.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

$\ast$ Calcolo ricorsivo per $\binom{n}{k}$.

Teo (Formula del Binomio di Newton).

Per $n \geq 1$, si ha

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + y^n$$

Dim: $(x+y)^n = (x+y)\cdot\underbrace{(x+y)\cdot \ldots (x+y)}_{n}$

$$= \gamma_0 x^n + \gamma_1 x^{n-1} y + \cdots + \gamma_{n-1} x y^{n-1} + \gamma_n y^n$$

γ_k = il numero del monomio $x^{n-k} y^k$

= il numero delle scelte di k-fattori da n fattori.

$= C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Prop.: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$
$$=2^n$$

Dim. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^{k}$$
$$=(1+1)^n=2^n$$

$\blacksquare$

ES: Sia A ins. con $|A|=n$.

$P(A)=\{\text{~~sotto~~ins. di } A\}$

Allora $|P(A)|=2^n$.

Soluz. Per $0\leq k\leq n$,

Sia $P_k(A)=\{\text{~~sotto~~ins. } B\subset A \mid |B|=k\}$
$\subseteq P(A)$.

$|P_k(A)|=C_{n,k}=\binom{n}{k}$

$P(A)=\bigcup_{k=0}^{n}P_k(A)$ una unione disgiunta.

$$\Rightarrow |P(A)|=\sum_{k=0}^{n}|P_k(A)|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$ $\blacksquare$