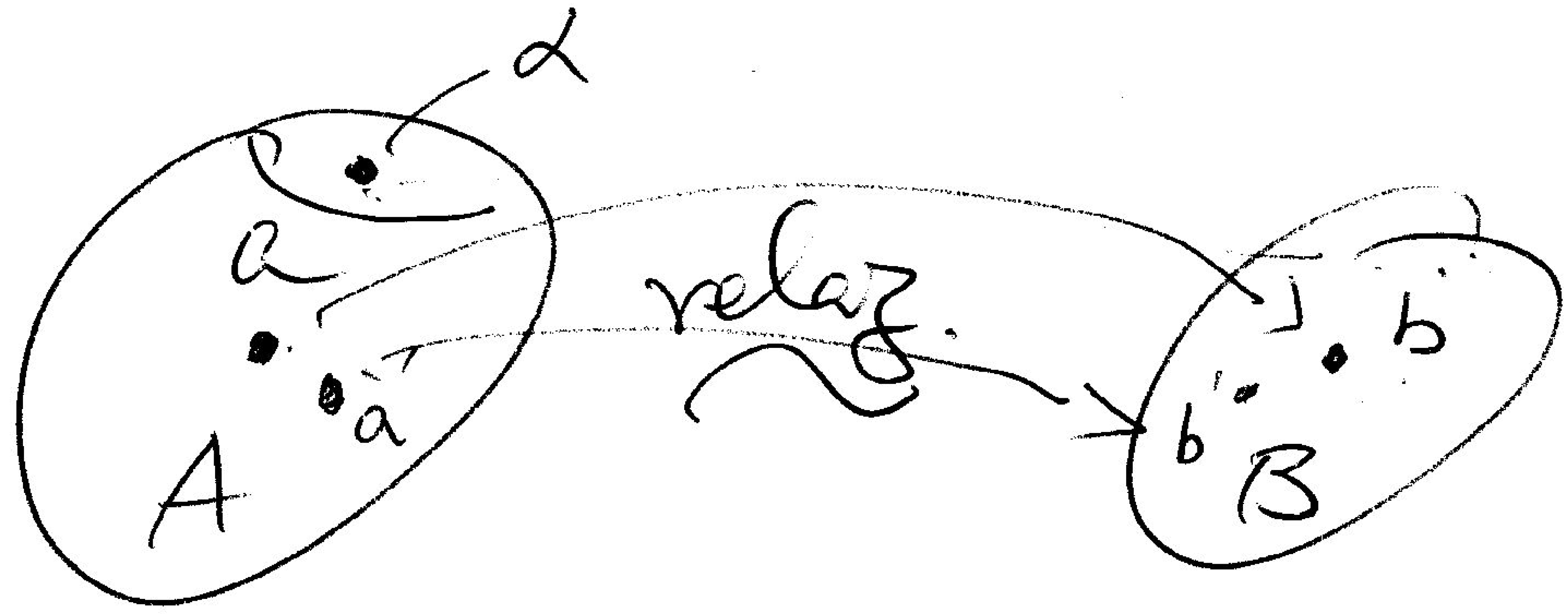
- Funzioni

Una Corrispondenza tra due ins. A e B.



Def. Siano A e B due insiemi non vuoti. Una funzione f con dominio A e codominio B è il dato di sottoins.

$\Gamma \subseteq A \times B$ tale che

$\forall a \in A$, esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in \Gamma$.

Equivalente: $f : A \to B$ definita da

$f(a) = b$, se $(a, b) \in \Gamma$

* Per verificare una corrisp. $f : A \to B$ sia funzione:

1. ogni elem. di A ha una immagine
2. ogni elem. di A ha una <u>sola</u> immagine.

<u>Es</u>. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 1/x$.

"0" non ha alc. immagine.

f Non è una funz.

<u>Def</u>: Due funzioni $f : A \to B$ e $g : A \to B$ sono uguale se

$f \equiv \Gamma_f \subseteq A \times B$, $\Gamma_g \subseteq A \times B$

$\Gamma_f = \Gamma_g$. i.e $f = g$.

ES. $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}^{\geq 0}=\{\text{numeri reali posit.}\}$.

$$\Gamma=\{(a,a^2+1)\in A\times B \mid \forall a\in\mathbb{R}\}$$

i.e. $f: A \longrightarrow B$

$$x \longmapsto f(x)=x^2+1, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

ES $A=\mathbb{Z}$, $B=\{0,1\}$, $\mathbb{Z}=\underbrace{2\mathbb{Z}}\cup\underbrace{2\mathbb{Z}+1}$

$$\Gamma=\{(a,0)\in A\times B \mid \forall a\in 2\mathbb{Z}\}\cup$$
$$\{(a',1)\in A\times B \mid \forall a'\in 2\mathbb{Z}+1\}.$$
$$\subseteq A\times B$$

i.e. $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\{0,1\}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in 2\mathbb{Z}\\ 1 & \text{se } x\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}.$$

Def: Sia $f: A\to B$, Per $a\in A$

$b=f(a)$ è immagine di a tramite f.

a è una controimmagine di b.

- Funzione <u>identità</u> su un insieme A.

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

ossia: $T_{id_A} = \{ (a,a) \mid \forall a \in A \}$
$\cap$
$A \times A$

- Funz. Costante: $f : A \to B$, $\exists b \in B$
t.c. $f(a) = b, \ \forall a \in A$.

- Proiezione: Siano A e B ins,

$p_A : A \times B \to A$; $p_B : A \times B \to B$

$p_A(a,b) = a$ $\qquad$ $p_B(a,b) = b$

$a \in A, b \in B$

- $s : \mathbb{N} \to B$ è una funzione

$$T_s = \{ (0, s(0)), (1, s(1)), (2, s(2)), \ldots, (i, s(i)) , \ldots \} \subseteq \mathbb{N} \times B$$

$$\{ \underset{\overset{\parallel}{b_0}}{s(0)}, \underset{\overset{\parallel}{b_1}}{s(1)}, \underset{\overset{\parallel}{b_2}}{s(2)}, \ldots, \underset{b_i}{s(i)}, \ldots \}$$

- Funzione quoziente:

X insieme, $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ una partiz.

quoziente $Q = \{A_i \mid \forall i \in I\}$.

$q: X \longrightarrow Q$

$\forall x \in X$, $q(x) = A_i$ se $x \in A_i$.

<u>ES</u>. $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}+1$

$Q = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\}$

$q: \mathbb{Z} \longrightarrow Q$

$$q(a) = \begin{cases} 2\mathbb{Z}, & \text{se } a \in 2\mathbb{Z}. \\ 2\mathbb{Z}+1, & \text{se } a \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

Def. Sia $f: A \to B$ funz. $S \subseteq A$,

l'immagine di S tramite f è

$f(S) = \{f(a) \mid \forall a \in S\}$.

Def. Una funz. $f: A \to B$ è

Suriettiva se

$$f(A) = B.$$

ossia: ogni elemento di A ha una controimmagine.

<u>ES</u>. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

$$f(a) = a+1$$

è suriettiva: per $x \in \mathbb{Z}$, ha una controimmagine $x-1$, perché

$$f(x-1) = (x-1)+1 = x.$$

Def. Sia $f: A \to B$ una funzione. Per $b \in B$, controimmagine di b tramite f è

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$$

e.g. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$,

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f^{-1}(2) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2\} :$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 2\}$$

$$= \{\pm 1\}.$$

Def: $f: A \to B$, sia $T \subseteq B$,

controimmagine di T è

$$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Def: Una funz. $f: A \to B$ è iniettiva se per $\forall$ ~~a b~~ $a_1, a_2 \in A$

$a_1 \neq a_2$ allora

$$f(a_1) \neq f(a_2).$$

Prop. Sia $f: A \to B$.

1) f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ per ogni $b \in B$.

2) f è iniett. se e solo se $|f^{-1}(b)| \leq 1$ per ogni $b \in B$.

Def. $f: A \to B$ è biiettiva se f è suriett. e iniett.

Cor: $f: A \to B$ è biiettiva se e solo se $|f^{-1}(b)| = 1$ per $\forall b \in B$.

Eser. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = a+1$ è biiettiva.