# Corso di Logica
# 2.3 – Funzioni

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino



## Funzioni

### Definizione

Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice **funzione da $A$ in $B$** se

1. per ogni $a \in A$ c'è un $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ (ovvero $\mathrm{dom}(f) = A$), e
2. se $(a, b_1) \in f$ e $(a, b_2) \in f$, allora $b_1 = b_2$.

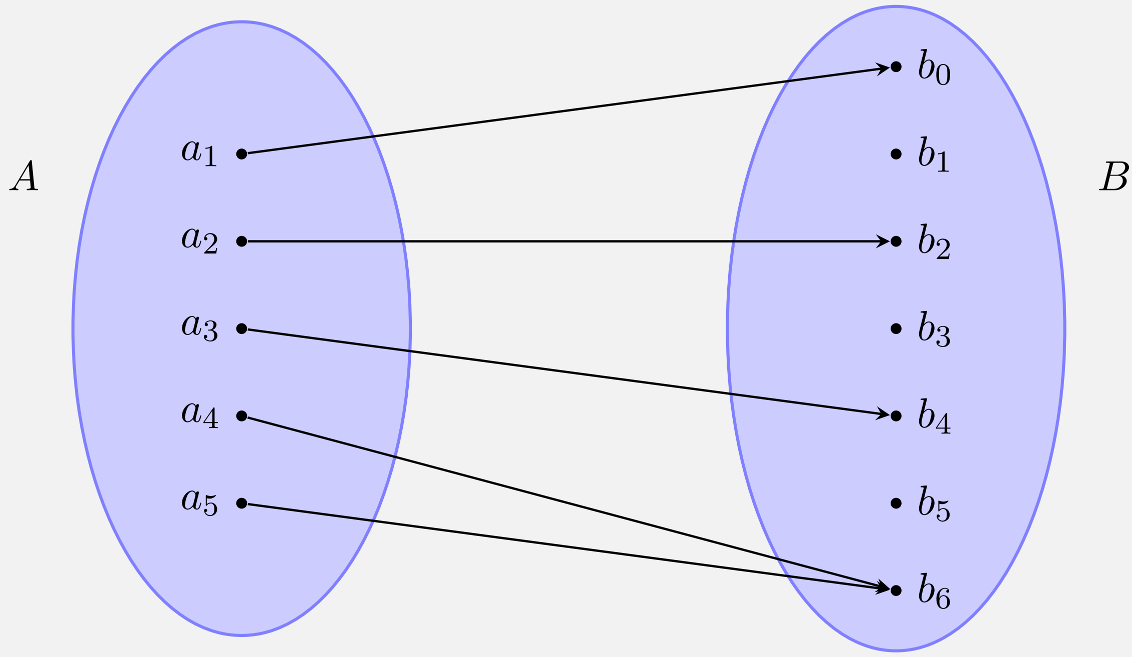
In questo caso scriveremo $f \colon A \to B$ e l'unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ si indica con $f(a)$.

Se $f \colon A \to B$ è una funzione

- $A = \mathrm{dom}(f)$ si dice **dominio** della funzione $f$;
- $B$ si dice **codominio** (da non confondersi con l'*immagine* o *range* di $f$).

## Rappresentazione grafica di funzioni: diagrammi di Venn

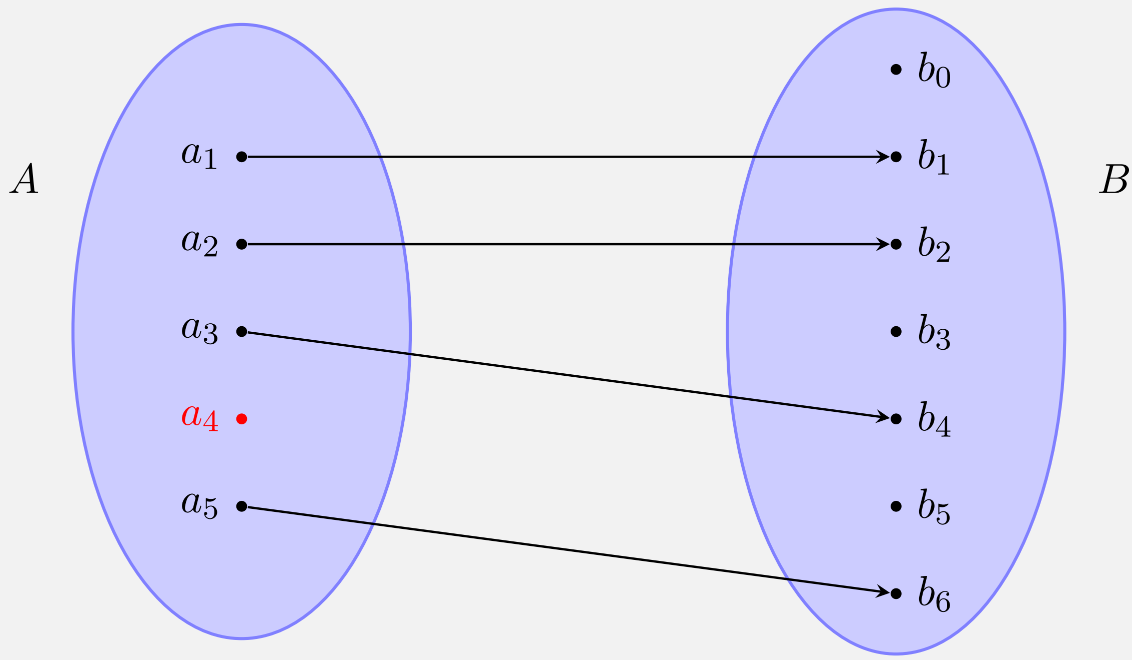
Rappresentazione grafica di una funzione come insieme di frecce tra diagrammi di Venn.





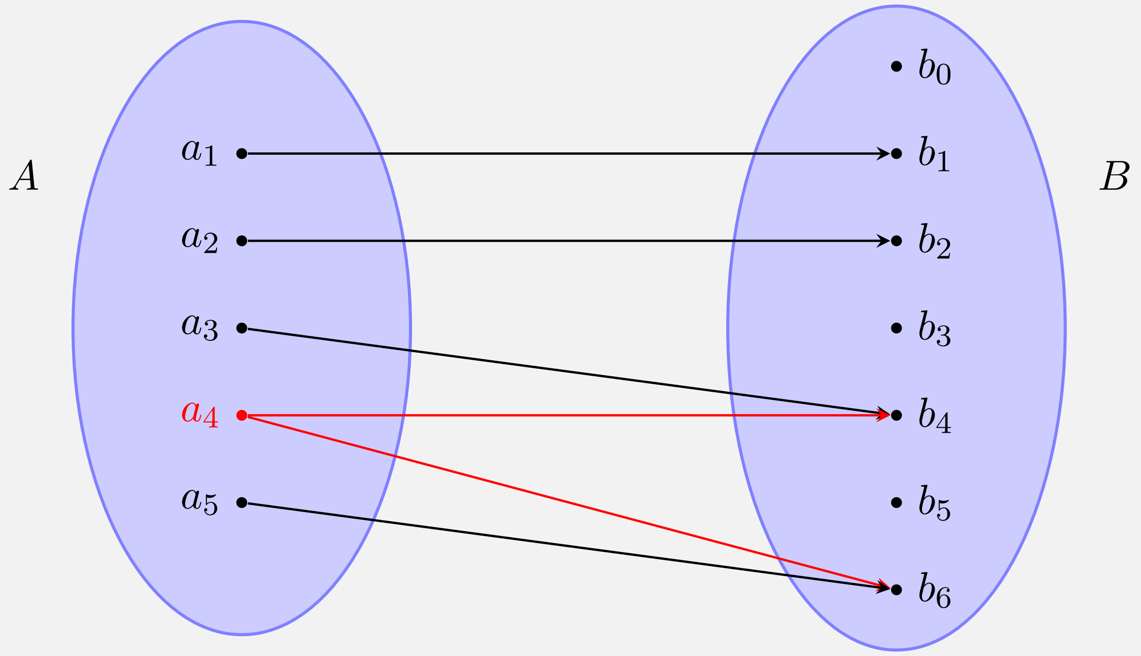

## Rappresentazione grafica di funzioni: diagrammi di Venn

Rappresentazione grafica come insieme di frecce tra diagrammi di Venn di una relazione che non è una funzione (perché non è definita su tutto $A$).



## Rappresentazione grafica di funzioni: diagrammi di Venn

Rappresentazione grafica come insieme di frecce tra diagrammi di Venn di una relazione che non è una funzione (perché c'è almeno un punto di $A$ da cui parte più di una freccia).






## Immagine

Sia $f\colon A \to B$ una funzione.

- L'elemento $f(a)$ si dice **valore** di $f$ su $a$, oppure **immagine** di $a$ mediante $f$.
- L'insieme

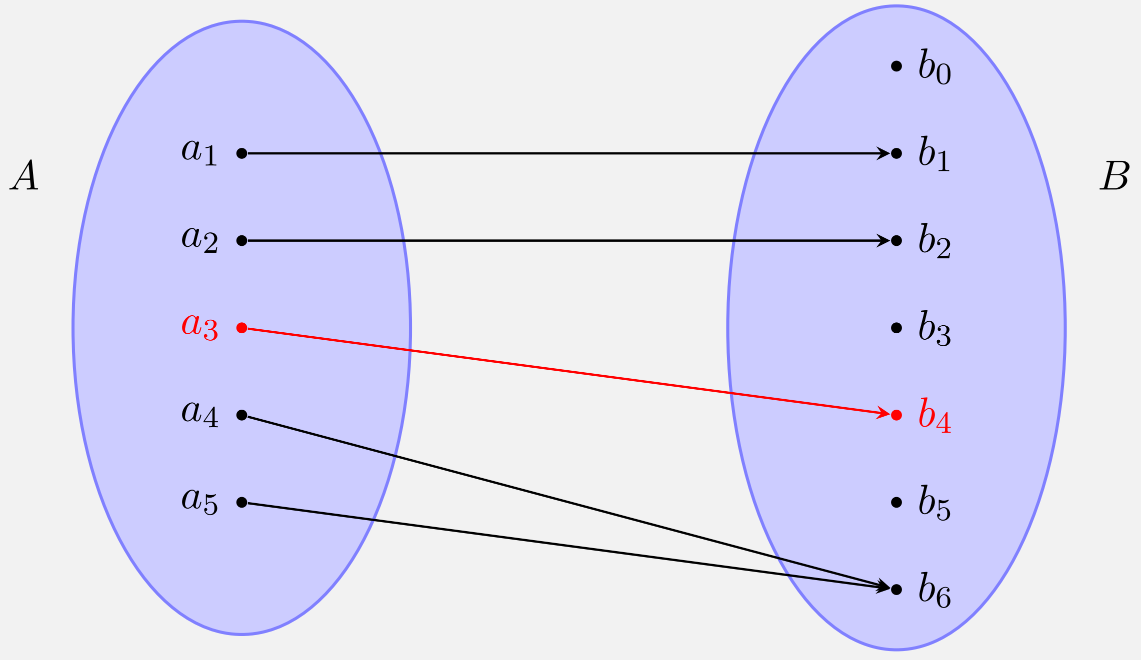
$$\begin{aligned}\operatorname{rng}(f) &= \{f(a) \mid a \in A\}\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A\,(f(a) = b)\}\end{aligned}$$

  è il **range** o **immagine** della funzione $f$.
- Dato $C \subseteq A$, l'insieme

$$\begin{aligned}f[C] &= \{f(a) \mid a \in C\}\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in C\,(f(a) = b)\}\end{aligned}$$

  si dice **immagine** di $C$. In particolare, $f[A] = \operatorname{rng}(f)$.

Immagine di un elemento del dominio (nell'esempio: il punto $a_3$) di $f\colon A \to B$.




$$f(a_3) = b_4$$



Immagine (o range) di una funzione $f\colon A \to B$:

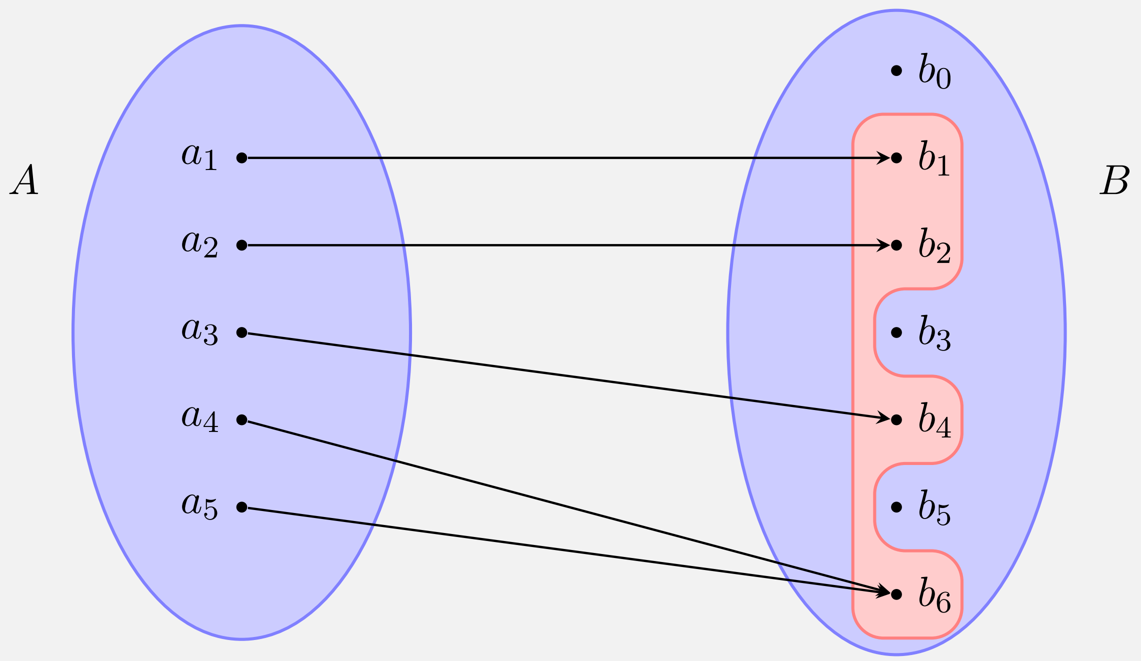
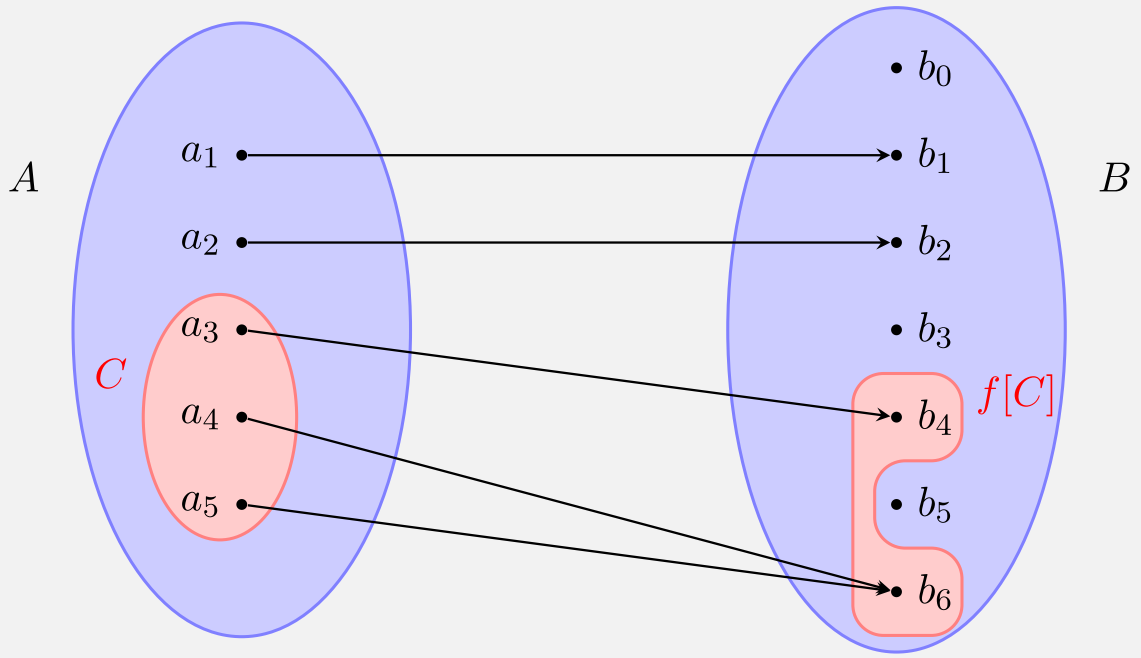


Immagine di un insieme $C \subseteq A$ mediante una funzione $f \colon A \to B$:



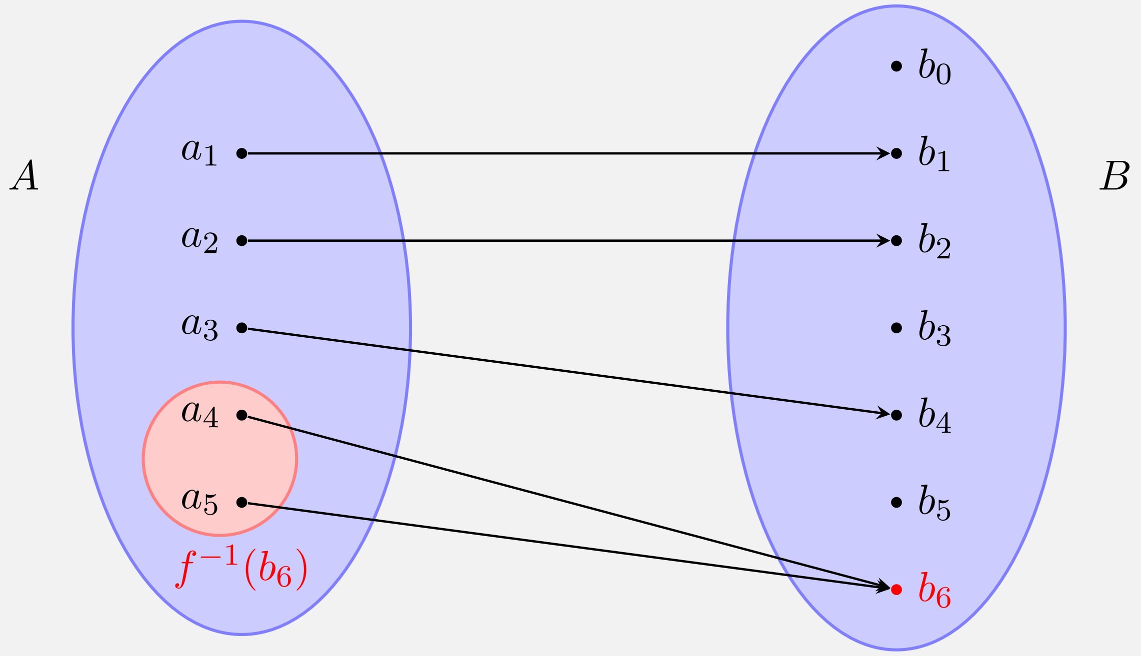



# Preimmagine

Sia $f \colon A \to B$ una funzione.

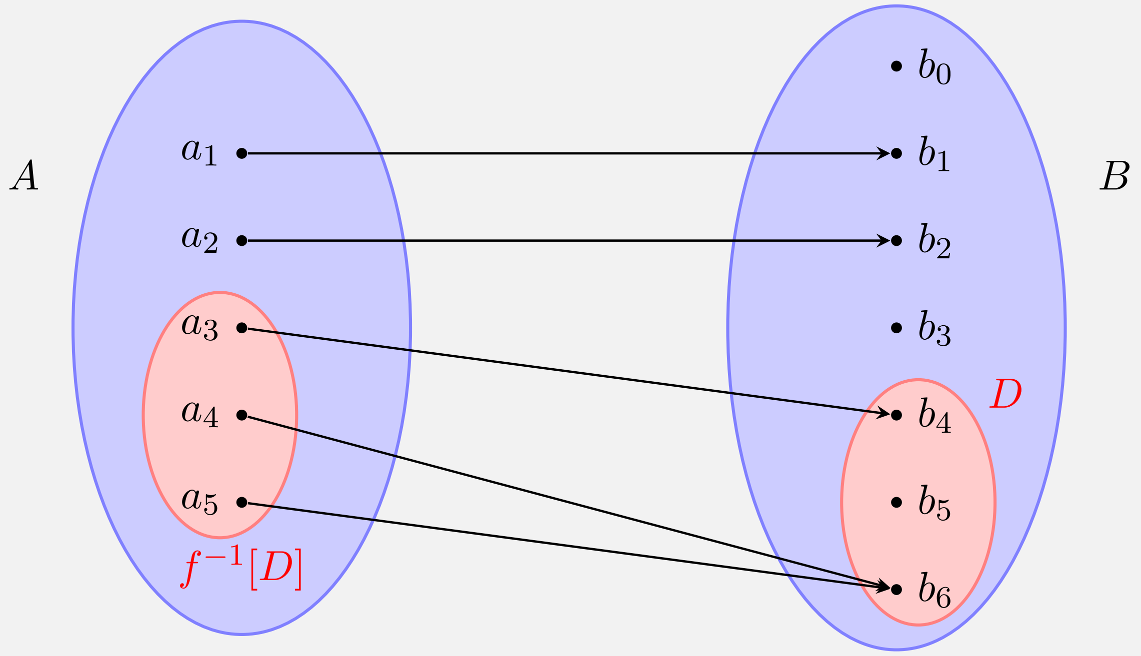
- La **preimmagine** o **controimmagine** di un elemento $b \in B$ è l'insieme
$$f^{-1}[\{b\}] = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$
Con un leggero abuso di notazione, scriveremo spesso $f^{-1}(b)$ invece di $f^{-1}[\{b\}]$.
- Più in generale, se $D \subseteq B$ l'insieme
$$\begin{aligned} f^{-1}[D] &= \{a \in A \mid f(a) \in D\} \\ &= \bigcup_{b \in D} f^{-1}(b) \end{aligned}$$
è la **preimmagine** o **controimmagine** di $D$.

Preimmagine di un elemento del codominio (nell'esempio: il punto $b_6$) mediante una funzione $f\colon A \to B$:






Preimmagine di un insieme $D \subseteq B$ mediante una funzione $f\colon A \to B$:



## Come si definisce una funzione?

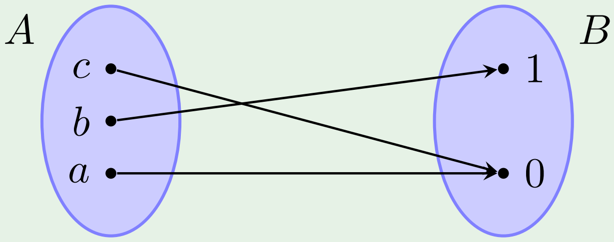
Una funzione $f\colon A \to B$ può essere descritta in vari modi:

- fornendo un elenco di tutte le coppie $(a, b) \in A \times B$ tali che $(a, b) \in f$, ovvero tali che $b = f(a)$;

### Esempio

Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$.
Allora la lista

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ f(b) &= 1 \\ f(c) &= 0 \end{aligned}$$




descrive in maniera univoca una funzione $f\colon A \to B$.



- fornendo una "regola" che permette di determinare i valori di $f$ su ciascun $a \in A$;

### Esempio

Sia $A = B = \mathbb{R}$. Allora la scrittura

$$f(x) = x^2 + 3$$

descrive in maniera univoca una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero la funzione che manda un generico numero reale $r \in \mathbb{R}$ nel numero reale $r^2 + 3$.

- un mix delle due.

### Esempio

Sia $A = B = \mathbb{R}$. Allora la scrittura

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

descrive in maniera univoca una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fornendo in alcuni casi il valore esplicito della funzione e in altri casi una "regola" per calcolarne il valore.

Spesso useremo la notazione

$$f\colon A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$

per dire che $f$ è una funzione da $A$ in $B$ che manda un generico elemento $a \in A$ nel valore corrispondente $f(a) \in B$.

**Esempio**

La scrittura

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2n$$

indica che $f$ è la funzione da $\mathbb{N}$ in sé stesso che manda ogni numero naturale nel suo doppio.



# Restrizione

Data una funzione $f\colon A \to B$ e un insieme $C \subseteq A$, la funzione

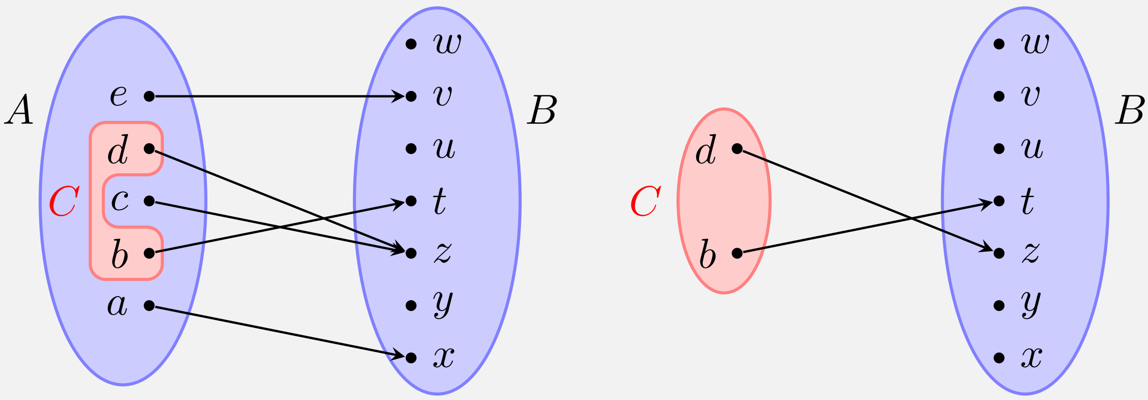
$$f \restriction C\colon C \to B, \qquad c \mapsto f(c)$$

si dice **restrizione** di $f$ a $C$.

Si osservi che

$$\operatorname{dom}(f \restriction C) = C \qquad \text{e} \qquad \operatorname{rng}(f \restriction C) = f[C].$$

Rappresentazione grafica con diagrammi di Venn della restrizione di una funzione.



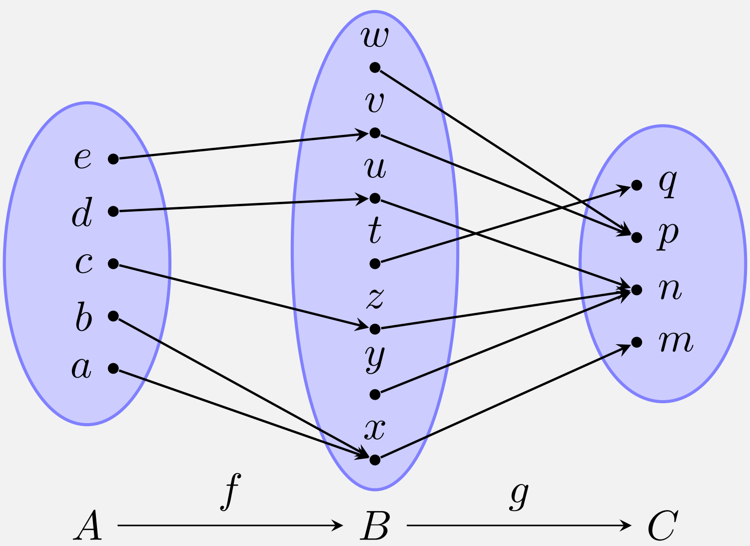

$f\colon A \to B$ $\qquad\qquad$ $f \restriction C\colon C \to B$



# Composizione di funzioni

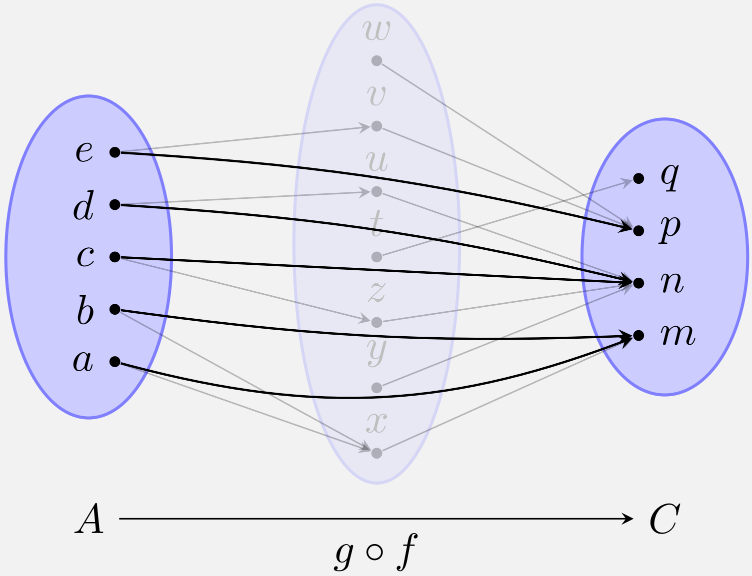
Date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la **composizione di $f$ e $g$** è la funzione

$$g \circ f\colon A \to C, \qquad a \mapsto g(f(a)).$$



# Composizione di funzioni

Date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la **composizione di $f$ e $g$** è la funzione
$$g \circ f\colon A \to C, \qquad a \mapsto g(f(a)).$$






Ad esempio, siano
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$
e
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x+3.$$
Allora $g \circ f$ è anch'essa una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per calcolarne i valori si procede come segue:
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11.$$
Più in generale, per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 3.$$

## Operazioni

### Definizione

Le funzioni della forma $f\colon A^n \to A$ vengono a volte dette **operazioni** $n$**-arie** su $A$.

### Esempio

La somma $+$ tra numeri interi è una funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, ovvero un'operazione binaria su $\mathbb{N}$. Lo stesso vale per il prodotto, o quando si considerano queste operazioni su altri insiemi numerici.

Se $*\colon A \times A \to A$ è un'operazione binaria su $A$ spesso scriveremo $a * b$ invece di $*(a, b)$ (ad esempio, $a + b$ al posto di $+(a, b)$).

### Attenzione!

La differenza non è un'operazione binaria su $\mathbb{N}$, in quanto non è definita per tutti le coppie in $\mathbb{N}^2$. È invece un'operazione binaria su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.



## Iniezioni, suriezioni, biezioni

### Definizione

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice

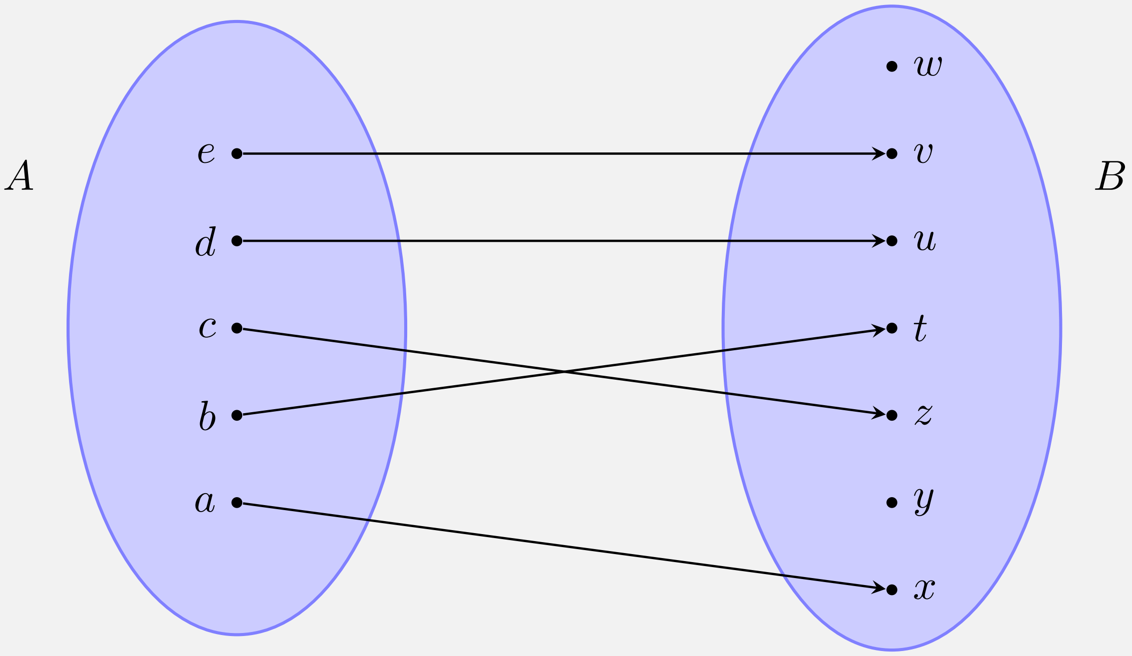
- **iniettiva** se da $a_1 \neq a_2$ segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$, o, equivalentemente, se da $f(a_1) = f(a_2)$ segue che $a_1 = a_2$;
- **suriettiva** se ogni $b \in B$ è della forma $f(a)$ per qualche $a \in A$ (equivalentemente, $\operatorname{rng}(f) = B$);
- **biettiva** se è iniettiva e suriettiva.

Per brevità diremo che $f$ è una

- **iniezione** se è una funzione iniettiva;
- **suriezione** se è una funzione suriettiva;
- **biezione** se è una funzione biettiva.

La rappresentazione mediante diagrammi di Venn di una funzione *iniettiva* $f\colon A \to B$ è tale che *ogni punto di $B$ è raggiunto* **al più** *da una freccia*.

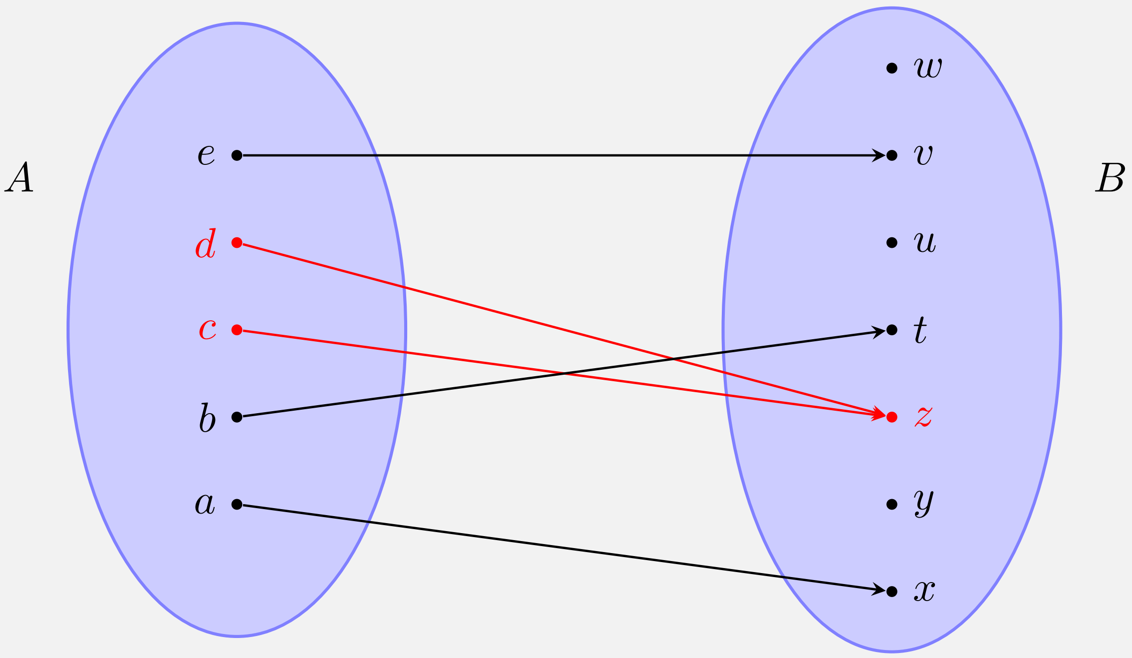
Quindi la $f\colon A \to B$ seguente è **iniettiva**:





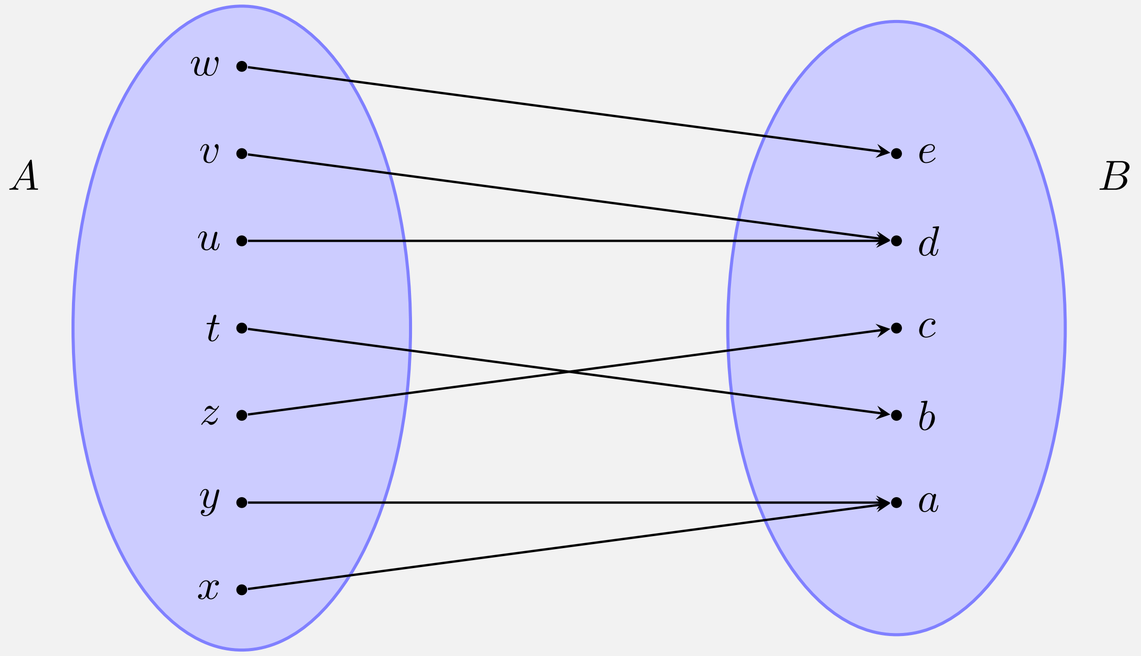

La rappresentazione mediante diagrammi di Venn di una funzione *iniettiva* $f\colon A \to B$ è tale che *ogni punto di $B$ è raggiunto* **al più** *da una freccia*.

Quindi la $f\colon A \to B$ seguente **non** è **iniettiva**:



La rappresentazione mediante diagrammi di Venn di una funzione *suriettiva* $f \colon A \to B$ è tale che *ogni punto di $B$ è raggiunto* **almeno** *da una freccia*.

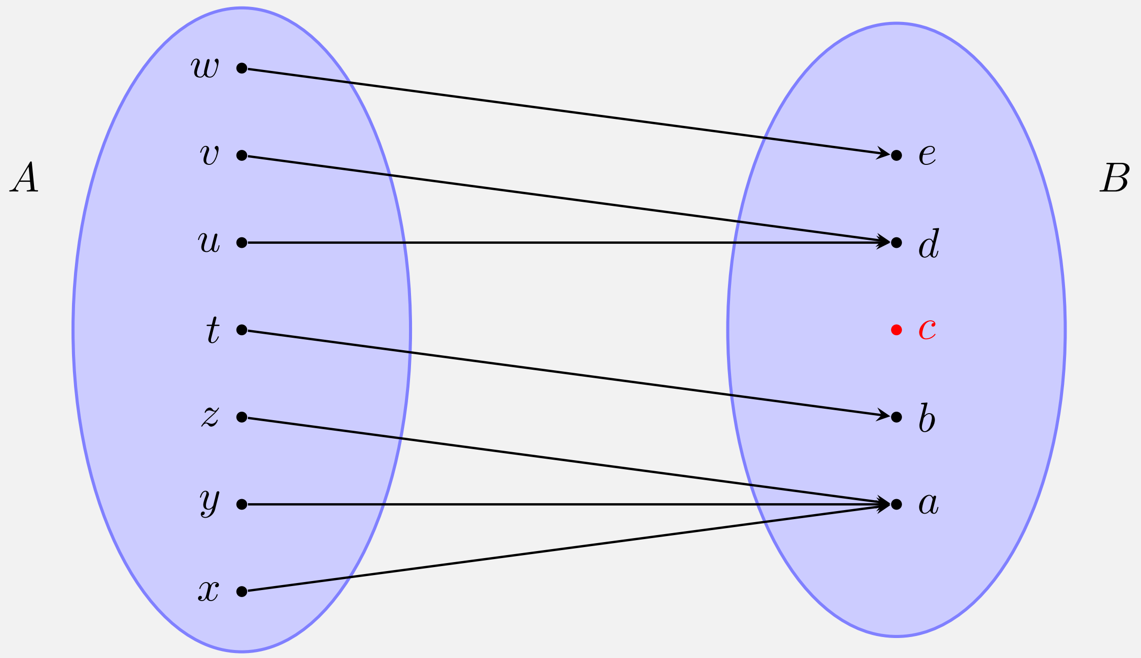
Quindi la $f \colon A \to B$ seguente è **suriettiva**:





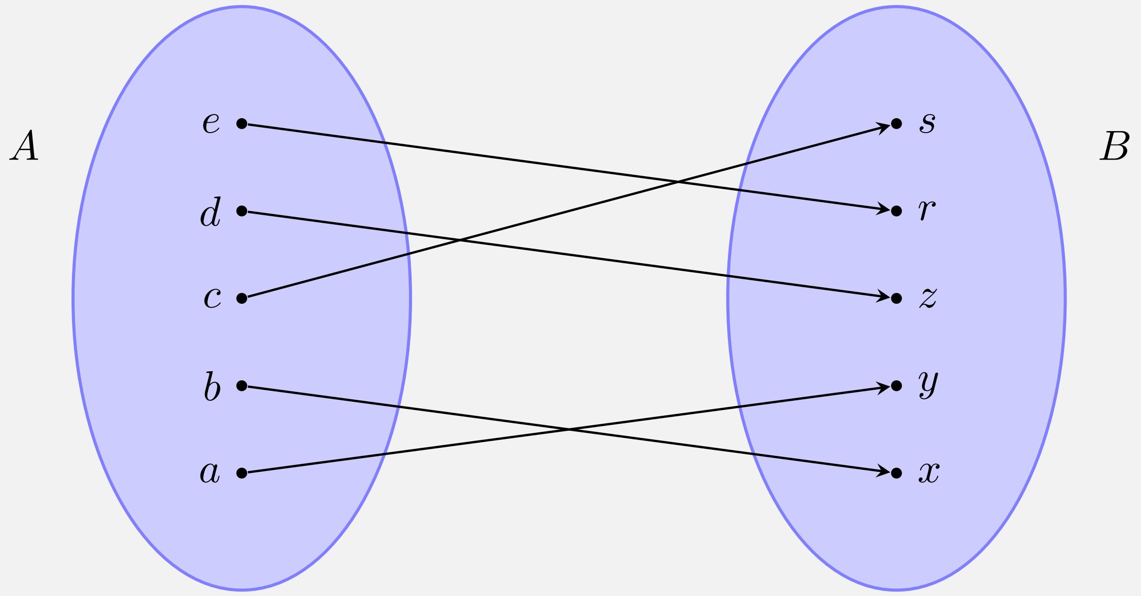

La rappresentazione mediante diagrammi di Venn di una funzione *suriettiva* $f \colon A \to B$ è tale che *ogni punto di $B$ è raggiunto* **almeno** *da una freccia*.

Quindi la $f \colon A \to B$ seguente **non** è **suriettiva**:



La rappresentazione mediante diagrammi di Venn di una funzione *biettiva* $f\colon A \to B$ è tale che *ogni punto di* $B$ *è raggiunto* **esattamente** *da una freccia*.

Quindi la $f\colon A \to B$ seguente è **biettiva**:






# Osservazioni

1. Se $f\colon A \to A$ con $A$ *finito* si ha che $f$ è una biezione se e solo se $f$ è una iniezione se e solo se $f$ è una suriezione. Lo stesso vale per le funzioni $f\colon A \to B$ in cui $A$ e $B$ sono insiemi finiti con lo stesso numero di elementi.
2. Se $f\colon A \to B$ è iniettiva allora $f\colon A \to \operatorname{rng}(f)$ (ovvero la stessa $f$, ma vista come funzione da $A$ nella sua immagine) è una biezione.
3. Date $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, si ha che se sia $f$ che $g$ sono iniettive anche $g \circ f$ lo è, e se $f$ e $g$ sono entrambe suriezioni anche $g \circ f$ lo è. In particolare, la composizione di due biezioni è una biezione.
4. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. Allora $f$ è un'iniezione se e solo se $f^{-1}(b)$ *contiene al più un elemento per ogni* $b \in B$, ed è una suriezione se e solo se $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ *per ogni* $b \in B$.

# Funzione inversa

Poiché una funzione $f\colon A \to B$ è, per definizione, una relazione $f \subseteq A \times B$, possiamo formare la sua relazione inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$, dove $(b, a) \in f^{-1}$ se e solo se $(a, b) \in f$, ovvero se e solo se $f(a) = b$. Tuttavia non è detto che $f^{-1}$ sia anch'essa una funzione da $B$ in $A$:

- se $f$ *non è iniettiva*, allora ci sono $a, a' \in A$ distinti tali che $f(a) = f(a') = b$ per qualche $b \in B$: quindi sia $(b, a)$ che $(b, a')$ appartengono a $f^{-1}$, perciò $f^{-1}$ *non è una funzione* (ci sarebbero almeno due valori di $f^{-1}$ su $b$);
- se $f$ *non è suriettiva*, allora esiste $b \in B \setminus \operatorname{rng}(f)$: quindi non esiste alcun $a \in A$ tale che $(b, a) \in f^{-1}$, ovvero $f^{-1}$ non può essere una funzione *con dominio* $B$.

Dunque una funzione $f\colon A \to B$ si può **invertire** (ovvero è tale che la sua relazione inversa $f^{-1}$ è ancora una funzione) solo se è iniettiva e anche in questo caso il dominio di $f^{-1}$ è $\operatorname{rng}(f)$ e non necessariamente tutto $B$.



### Definizione

Se $f\colon A \to B$ è una funzione *iniettiva*, allora la sua **inversa** è la funzione

$$f^{-1}\colon \operatorname{rng}(f) \to A$$

che manda ciascun $b \in \operatorname{rng}(f)$ nell'unico elemento in $f^{-1}(b)$.

Si osservi che $f^{-1}$ è sempre iniettiva (poiché $f$ era una funzione) e suriettiva (poiché $\operatorname{dom}(f) = A$), ovvero $f^{-1}$ è una biezione tra $\operatorname{rng}(f)$ e $A$.

### Osservazione

Quando $f$ è anche *suriettiva* (ovvero una *biezione*) si ha che $\operatorname{rng}(f) = B$: quindi in questo caso $\operatorname{dom}(f^{-1}) = B$. Perciò l'inversa di una biezione $f\colon A \to B$ è a sua volta una biezione $f^{-1}\colon B \to A$.

### Osservazione

Tecnicamente, quando $f\colon A \to B$ è una funzione iniettiva e $b \in \mathrm{rng}(f)$ la notazione $f^{-1}(b)$ è lievemente ambigua. Può infatti indicare

- la **preimmagine** dell'elemento $b$ mediante $f$, ovvero l'*insieme* $\{a\} = f^{-1}[\{b\}] \subseteq A$ con $a \in A$ unico tale che $f(a) = b$ (l'unicità di $a$ deriva dal fatto che $f$ è iniettiva): in accordo con la notazione introdotta in precedenza, infatti, la preimmagine $f^{-1}[\{b\}]$ di $b$ si denota anche con $f^{-1}(b)$;
- l'**immagine** di $b$ mediante la funzione inversa $f^{-1}$, ovvero l'*elemento* $a \in A$ tale che $f^{-1}(b) = a$: per definizione, $a$ è l'unico elemento tale che $f(a) = b$.

Sarà il contesto a chiarire quale dei due significati dare a tale espressione.



## Prodotto di funzioni

### Proposizione

*Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ sono entrambe iniezioni (suriezioni, biezioni) allora lo è anche la* **funzione prodotto**

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W, \qquad (x,z) \mapsto (f(x), g(z)).$$

### Dimostrazione.

Sia $h$ la funzione prodotto $f \times g$, cosicché $h(x,z) = (f(x), g(z))$.

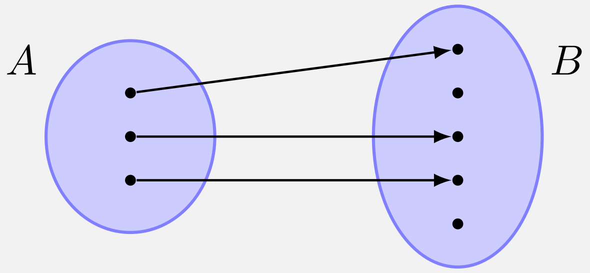
Caso delle iniezioni: Fissiamo $(x,z), (x',z') \in X \times Z$. Se $h(x,z) = h(x',z')$, allora $(f(x), g(z)) = (f(x'), g(z'))$, da cui $f(x) = f(x')$ e $g(z) = g(z')$. Poiché $f$ e $g$ sono entrambe iniettive, si ha $x = x'$ e $z = z'$, perciò $(x,z) = (x',z')$.

Caso delle suriezioni: Consideriamo un generico $(y,w) \in Y \times W$. Poiché $f$ e $g$ sono suriezioni, esistono $x \in X$ e $z \in Z$ tali che $f(x) = y$ e $g(z) = w$. Allora $h(x,z) = (y,w)$. $\square$

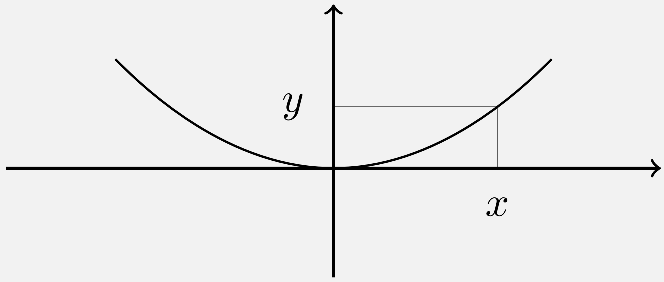
# Come si rappresenta graficamente una funzione?

Di solito una funzione $f\colon A \to B$ si rappresenta graficamente in uno dei due modi seguenti:

- utilizzando i diagrammi di Venn (come abbiamo già visto)




- rappresentandone il grafico sul piano cartesiano (specialmente per funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$)

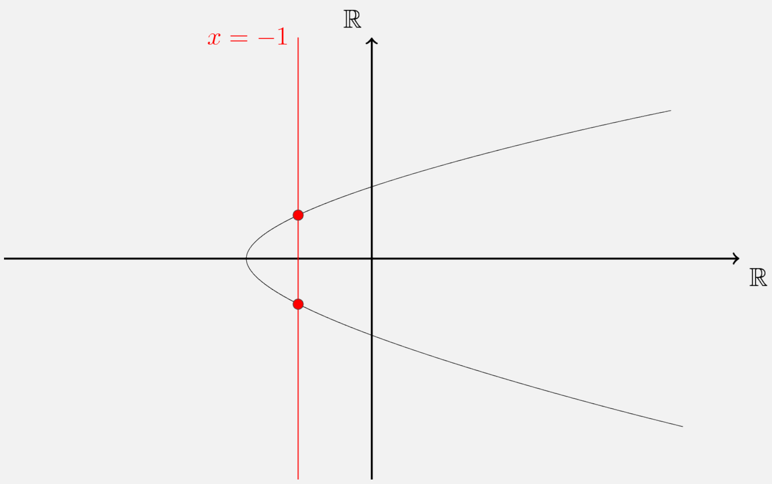





# Grafici che rappresentano funzioni

Un **grafico** tracciato sul piano cartesiano può essere una **funzione** con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se *ogni retta verticale incrocia il grafico in al più un punto*.

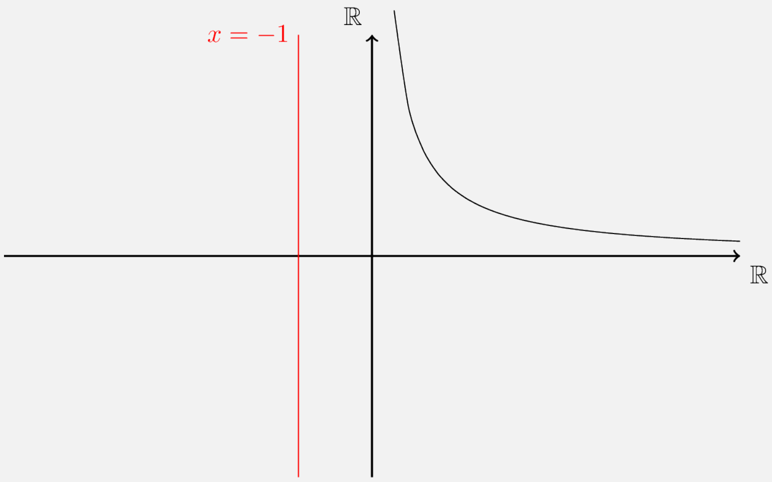
Quindi il grafico seguente **non** è il grafico di una funzione:



## Riconoscere il dominio di una funzione dal suo grafico

Il **dominio** $A \subseteq \mathbb{R}$ di una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è dato dai punti $x$ dell'ascissa tali che *la retta verticale passante per $x$ incrocia il grafico di $f$*.

Quindi il seguente grafico rappresenta una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ con dominio $A = (0; +\infty)$:

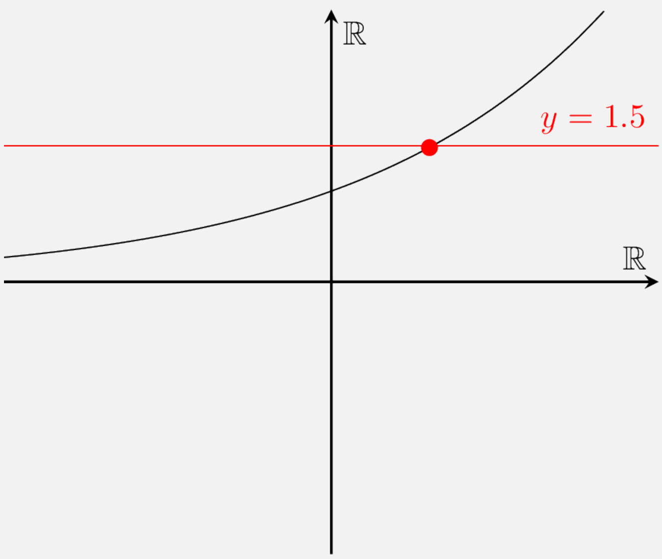





## Riconoscere una funzione iniettiva dal suo grafico

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è **iniettiva** se e solo se *ogni retta orizzontale incrocia il grafico di $f$* **al più** *una volta*.

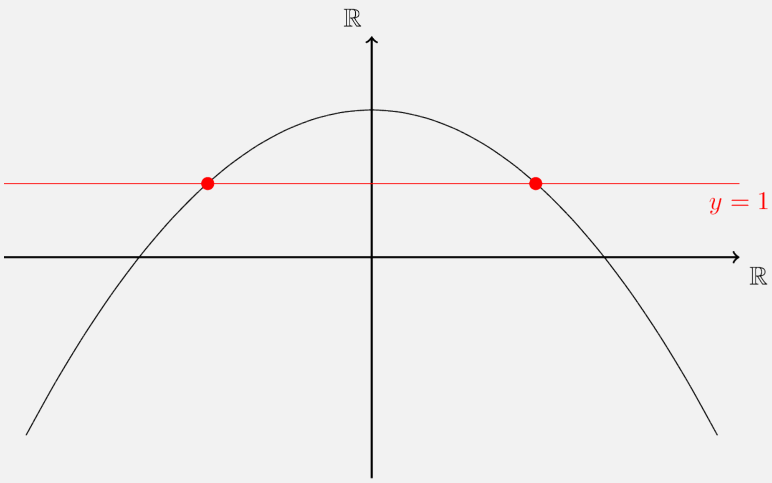
Quindi la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con il grafico seguente è **iniettiva**. . .



# Riconoscere una funzione iniettiva dal suo grafico

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è **iniettiva** se e solo se *ogni retta orizzontale incrocia il grafico di* $f$ **al più** *una volta.*

... mentre la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con il grafico seguente **non** è **iniettiva**.

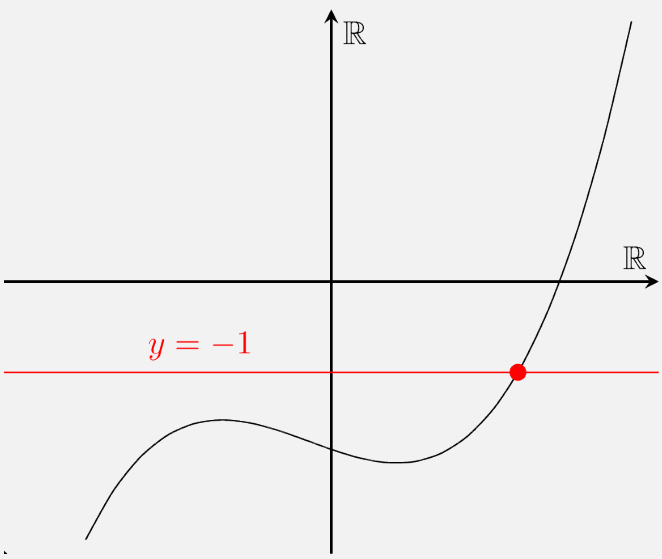





# Riconoscere una funzione suriettiva dal suo grafico

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è **suriettiva** se e solo se *ogni retta orizzontale incrocia il grafico di* $f$ **almeno** *una volta.*

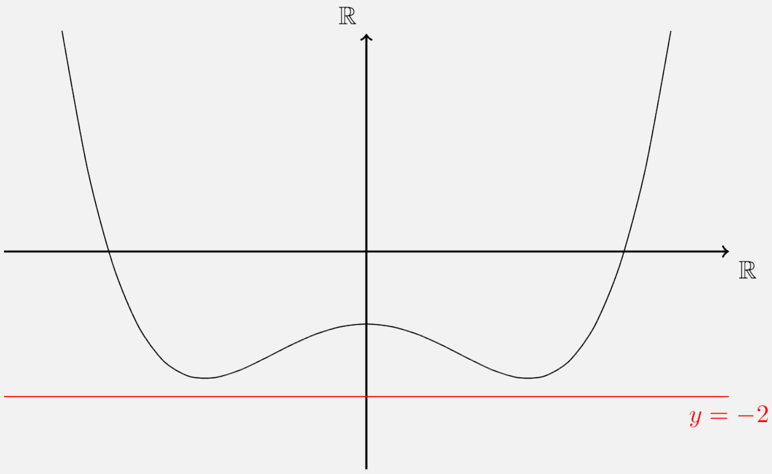
Quindi la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con il grafico seguente è **suriettiva** ...



# Riconoscere una funzione suriettiva dal suo grafico

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è **suriettiva** se e solo se *ogni retta orizzontale incrocia il grafico di* $f$ **almeno** *una volta*

... mentre la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con il grafico seguente **non** è **suriettiva**:

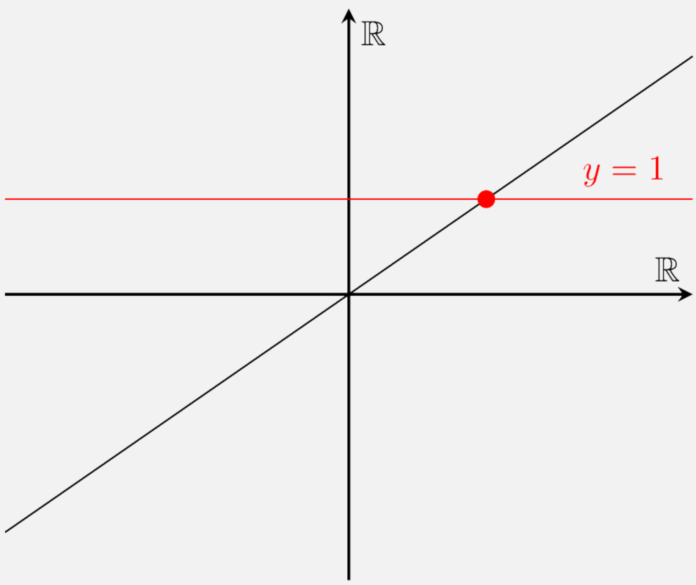





# Riconoscere una funzione biettiva dal suo grafico

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è **biettiva** se e solo se *ogni retta orizzontale incrocia il grafico di* $f$ **esattamente** *una volta*.

Quindi la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con il grafico seguente è **biettiva**:



# Alcuni esempi ed esercizi

## Esempio

L'operazione di somma tra numeri naturali è una funzione binaria

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n,m) \mapsto n+m.$$

È una funzione suriettiva perché ogni $n \in \mathbb{N}$ è immagine, ad esempio, della coppia $(n,0)$, ma non è iniettiva (quindi neanche biettiva) perché, ad esempio, $(1,1) \neq (0,2)$ ma $f(1,1) = 1+1 = 0+2 = f(0,2)$.

## Esempio

La funzione (unaria)

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2n$$

è iniettiva poiché se $2n = 2m$ allora $n = m$, ma non è suriettiva (quindi neanche biettiva) perché i numeri dispari non sono immagine mediante $f$ di alcun numero naturale.



## Esempio

La funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$

non è né iniettiva (ad esempio, $-1 \neq 1$ ma $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$), né suriettiva (i numeri reali negativi non sono immagine mediante $f$ di alcun numero reale: $x^2$ è sempre $\geq 0$).

## Esempio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo la funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ax+b.$$

È una iniezione poiché se $ax+b = ay+b$ allora $x = y$, ed è una suriezione poiché per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha che $y = f(x)$ con $x = \frac{y-b}{a}$. Quindi $f$ è una biezione.

Dimostrare che la funzione "moltiplicazione"

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n,m) \mapsto n \cdot m$$

è suriettiva ma non iniettiva.

La funzione è suriettiva perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(1,n) = 1 \cdot n = n$.

Non è iniettiva perché, ad esempio, $f(3,4) = 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 6 = f(2,6)$.

(Per mostrare che $f$ non è iniettiva si può anche semplicemente osservare che $f(n,0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, oppure che $f(n,m) = f(m,n)$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.)



Dimostrare che la funzione

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2^n$$

è iniettiva ma non suriettiva.

L'iniettività è ovvia: se $n \neq m$ allora $2^n \neq 2^m$ (se $n < m$ allora $2^m = 2^n \cdot 2^{m-n} \geq 2^n \cdot 2 > 2^n$).

La funzione $f$ non è suriettiva perché, ad esempio, $3 \notin \operatorname{rng}(f)$.

Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ è pari$\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ è dispari$\}$. Dimostrare che

$$f \colon \mathbb{P} \to \mathbb{D}, \qquad n \mapsto n+1$$

è una biezione.

*Iniettività:* Ovvia, se $f(n) = f(m)$ (ovvero $n+1 = m+1$) allora $n = m$.

*Suriettività:* Se $k \in \mathbb{D}$ allora $k \neq 0$: segue che $n = k-1 \in \mathbb{P}$ e $f(n) = k$.

Essendo $f$ sia iniettiva che suriettiva, è una biezione.



Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ è pari$\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ è dispari$\}$. Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{P}, \qquad n \mapsto n+1$$

è iniettiva ma non suriettiva.

Il fatto che la funzione sia iniettiva è ovvio (vedi slide precedente).

La funzione non è invece suriettiva perché

$$\operatorname{rng}(f) = \{n+1 \mid n \in \mathbb{D}\} = \mathbb{P} \setminus \{0\},$$

perciò $0 \in \mathbb{P}$ ma $0 \notin \operatorname{rng}(f)$.

Dimostrare che

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n,m) \mapsto 2^n(2m+1)-1$$

è una biezione.

Fatto. Ogni $k>0$ si scrive *in maniera unica* come $2^n(2m+1)$. Infatti, se $n \in \mathbb{N}$ è massimo tale che $2^n \mid k$, allora $k = 2^n \cdot l$ con $l$ dispari, per cui $l = 2m+1$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.

- *Iniettività.* Siano $(n,m),(n',m') \in \mathbb{N}^2$ tali che $f(n,m) = f(n',m')$, ovvero $2^n(2m+1)-1 = 2^{n'}(2m'+1)-1$. Allora $k = 2^n(2m+1)$ e $k' = 2^{n'}(2m'+1)$ sono $>0$, e $k = k'$ (per l'uguaglianza precedente). Per l'unicità della scrittura osservata nel Fatto precedente, necessariamente $n = n'$ e $m = m'$, ovvero $(n,m) = (n',m')$.
- *Suriettività.* Per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che $k = j+1 > 0$. Per il Fatto precedente, ci sono $n,m \in \mathbb{N}$ tali che $k = 2^n(2m+1)$. Segue che

$$f(n,m) = 2^n(2m+1)-1 = k-1 = (j+1)-1 = j,$$

perciò $j \in \operatorname{rng}(f)$.



Data una funzione $f\colon X \to Y$, sia $R_f \subseteq X \times X$ la relazione definita da

$$x_1 \; R_f \; x_2 \text{ se e solo se } f(x_1) = f(x_2).$$

- Che tipo di relazione è $R_f$? (Ordine? Equivalenza?)
  È una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza.
- Se ogni classe di equivalenza rispetto ad $R_f$ contiene un unico elemento, che tipo di funzione è $f$? (Iniettiva? Suriettiva? Biettiva?)
  Iniettiva (ma non necessariamente suriettiva).
- Se $X = Y = \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$, come sono fatte le classi di equivalenza di $R_f$?
  Sono del tipo $[r]_{R_f} = \{r, -r\}$ per $r \geq 0$ (si osservi che $R_f$ è la relazione di equivalenza della slide 18 del file sulle relazioni).

Data una funzione $f\colon X \to Y$, sia $R_f \subseteq X \times X$ la relazione definita da

$$x_1 \; R_f \; x_2 \text{ se e solo se } f(x_1) = f(x_2).$$

- Fissiamo $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Sia $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$ e definiamo $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ponendo

  $$f(z) = \text{il resto della divisione intera per } n \text{ di } z.$$

  Che relazione $R_f$ otteniamo?

  Si ha che $f(z) = f(z')$ se e solo se $z \equiv z' \pmod n$. Quindi $R_f$ è la relazione di congruenza modulo $n$.
- Sia $X = \mathbb{N}$. Trovare un opportuno insieme $Y$ e una funzione $f\colon X \to Y$ tale che la relazione risultante $R_f$ sia la relazione considerata nella slide 20 del file sulle relazioni.

  Basta porre $Y = \mathbb{N}$ e definire $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

  $$f(n) = \text{il numero di cifre di } n \text{ (in notazione decimale).}$$



Più in generale, si può dimostrare che *ogni* relazione d'equivalenza $E$ su un insieme $A$ è della forma $R_f$ per un'opportuna scelta di $X$, $Y$ ed $f\colon X \to Y$.

Basta infatti prendere $X = A$, $Y = A/E$ e

$$f\colon X \to Y, \qquad a \mapsto [a]_E$$

e ricordare che dati $a, b \in A$ si ha che

$$a \; E \; b \text{ se e solo se } [a]_E = [b]_E.$$

## Stringhe (o sequenze) finite

Una **stringa finita (su $A$)** è una sequenza finita di simboli provenienti da un dato insieme non vuoto $A$, che in questo caso viene detto **alfabeto**. L'insieme di tutte le stringhe finite su $A$ si indica con $A^*$.

### Esempio

Sia $A$ l'insieme di tutti i caratteri presenti su una normale tastiera di computer. Allora i seguenti sono esempi di stringhe su $A$:

$$abcaaa \qquad 102035 \qquad a1BnWms() * 8x$$

Altri esempi di stringhe su $A$ sono ad esempio le password che inseriamo per accedere ad un account, il codice PIN della Sim di un cellulare, le parole italiane (scritte) e così via.

**Attenzione!** A differenza di ciò che accade con gli insiemi, in una stringa è essenziale tenere conto sia delle (eventuali) ripetizioni che dell'ordine con cui i vari elementi di $A$ compaiono.



La stringa

$$abcaaa$$

sarà anche scritta con una notazione che spesso viene usata in matematica per rappresentare le sequenze, ovvero

$$\langle a, b, c, a, a, a \rangle$$

In alcuni casi, questo cambio di notazione è necessario! Se ad esempio $A = \mathbb{N}$ non è chiaro se la stringa $703$ rappresenti:

- una stringa con tre elementi, ovvero i numeri $7$, $0$ e $3$;
- una stringa con due elementi, ovvero i numeri $70$ e $3$;
- una stringa con un unico elemento, ovvero il numero $703$.

Questo accade perché anche i numeri naturali sono a loro volta scritti come stringhe sull'alfabeto $A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq \mathbb{N}$.

Scrivendo invece $\langle 70, 3 \rangle$ non vi è più alcuna ambiguità!

La **lunghezza** di una stringa $s$, denotata con $\mathrm{lh}(s)$, è il numero di simboli che vi compaiono. Ad esempio, se $A$ è l'alfabeto italiano formato da $21$ lettere, la seguente stringa su $A$

$$hdilcga$$

ha lunghezza $7$.

### Notazione e terminologia

I termini **stringa** (di lunghezza $n$), **sequenza** (di lunghezza $n$) e $n$-**upla** saranno per noi sinonimi, ma graficamente adotteremo la convenzione che le stringhe vengono scritte nella forma $abcade$ (quando questo non porta ad ambiguità!), mentre le corrispondenti sequenze/$n$-uple vengono scritte nella forma $\langle a, b, c, a, d, e \rangle$.

C'è un'unica stringa/sequenza di lunghezza $0$, ovvero quella che non contiene alcun simbolo, detta **stringa** o **sequenza vuota**. Se usiamo la notazione per le sequenze la possiamo indicare con $\langle\rangle$. La notazione per le stringhe non dà alcun modo per rappresentare la stringa vuota: perciò si è stabilito (specialmente in ambito informatico) di denotarla con $\varepsilon$.



C'è una naturale biezione tra gli elementi di $A$ e le stringhe su $A$ di lunghezza $1$, ovvero la funzione che associa a ciascun $a \in A$ la sequenza $\langle a \rangle$. Per questa ragione, l'insieme delle sequenze su $A$ di lunghezza $1$ viene identificato con $A$ stesso.

Le stringhe su $A$ di lunghezza $2$ sono invece identificabili con le coppie ordinate di elementi di $A$, ovvero con gli elementi dell'insieme $A^2 = A \times A$.

Le stringhe su $A$ di lunghezza $3$ si possono identificare con le triple ordinate di elementi di $A$, ovvero con gli elementi dell'insieme $A^3 = A \times A \times A$.

Più in generale, le stringhe su $A$ di lunghezza $n$ si possono identificare con le $n$-uple di elementi di $A$, ovvero con gli elementi dell'insieme $A^n$.

Questo giustifica l'uso della notazione seguente.

## Notazione

L'insieme delle sequenze su $A$ di lunghezza $n$ si denota con $A^n$. L'insieme di *tutte* le sequenze finite su $A$ (di qualunque lunghezza) si denota con $A^{<\mathbb{N}}$, ovvero

$$A^{<\mathbb{N}} = \{\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i < n\, (a_i \in A)\}\,.$$

Dunque

$$A^* = A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.$$

Per quanto osservato prima, $A^0 = \{\langle\rangle\} = \{\varepsilon\}$. Inoltre $A^1$ viene identificato con $A$ stesso.

## Esempio

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali.



## Esempio

Sia $A = \{0, 1\}$. Utilizzando sia la notazione per le sequenze che quella per le stringhe si ottiene:

$$\begin{aligned} A^1 &= \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} \\ &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \{\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle\} \\ &= \{00, 01, 10, 11\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= \{\langle 0,0,0 \rangle, \langle 0,0,1 \rangle, \langle 0,1,0 \rangle, \langle 0,1,1 \rangle, \langle 1,0,0 \rangle, \langle 1,0,1 \rangle, \langle 1,1,0 \rangle, \langle 1,1,1 \rangle\} \\ &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \end{aligned}$$

e così via.

## Esercizio 1

- *Quante sono le stringhe in* $\{0,1\}^4$*? Più in generale, dato un numero naturale* $n \in \mathbb{N}$ *quante sono le stringhe in* $\{0,1\}^n$*?*
- *Se* $A$ *è un insieme finito con* $k$ *elementi e* $n \in \mathbb{N}$*, quante sono le stringhe in* $A^n$*? E se* $A$ *è infinito?*



# Rappresentazione di stringhe come funzioni

Una sequenza finita $s$ su $A$ può anche essere rappresentata come una funzione dall'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(s)\}$ in $A$. Più precisamente, la sequenza $s$ su $A$ di lunghezza $n$

$$\langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$$

si identifica con la funzione

$$s \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \to A, \qquad k \mapsto s_k.$$

L'idea è che la funzione $s \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \to A$ *enumera* i simboli della stringa: $s(0)$ è il primo elemento della stringa, $s(1)$ è il secondo elemento della stringa, e così via.

## Attenzione!

I numeri naturali partono da $0$ e non da $1$. Quindi il "primo elemento" di $\langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ è $s_0$ e NON $s_1$, il "secondo elemento" è $s_1$ NON $s_2$ e così via.

### Esempio

Sia $A = \{a, b\}$ e $s \in A^4$ la stringa $aaba$ (che si può scrivere anche $\langle a, a, b, a\rangle$). Allora $s$ si può vedere come la funzione $s\colon \{0, 1, 2, 3\} \to A$ definita da

$$s(0) = a \qquad s(1) = a \qquad s(2) = b \qquad s(3) = a$$

Invece la funzione

$$s\colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < 10\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad k \mapsto 9 - k$$

rappresenta la stringa

$$9876543210$$



### Esercizio 2

- *Trovare le funzioni che rappresentano le seguenti stringhe sull'alfabeto* $A = \{0, 1\}$.

$$010 \qquad 00 \qquad 0010 \qquad 100010100$$

- *Trovare la funzione che rappresenta la sequenza* $\langle 0, 1, 2, 3, 4, 5\rangle$.
- *Qual'è la funzione che rappresenta la stringa vuota?*
- *Scrivere come funzioni le seguenti stringhe sul normale alfabeto per la lingua italiana* ($21$ *lettere).*

*casa* *pomodoro* *via* *telefono*

## Concatenazione

Date due stringhe $s, t \in A^*$, la **concatenazione** di $s$ e $t$, denotata con

$$st,$$

è la stringa su $A$ di lunghezza $\mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$ ottenuta facendo seguire i simboli elencati in $s$ dai simboli elencati in $t$.

### Esempio

Se $s$ è la stringa $acbbca$ e $t$ è la stringa $bacac$, allora $st$ è la stringa

$$acbbcabacac.$$

Si noti che concatenando una qualunque stringa $s \in A^*$ con la sequenza vuota si ottiene la sequenza $s$ di partenza, ovvero

$$s\varepsilon = \varepsilon s = s.$$



Utilizzando la notazione per le sequenze, se $s = \langle 5, 17, 23 \rangle$ e $t = \langle 0, 73, 162 \rangle$ si ha che

$$st = \langle 5, 17, 23 \rangle \langle 0, 73, 162 \rangle = \langle 5, 17, 23, 0, 73, 162 \rangle.$$

Infine, utilizzando la rappresentazione come funzioni, se

$$s \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(s)\} \to A$$

e

$$t \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(t)\} \to A$$

allora $st$ è la sequenza di lunghezza $\mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$ definita ponendo per ogni $k < \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$

$$st(k) = \begin{cases} s(k) & \text{se } k < \mathrm{lh}(s) \\ t(k - \mathrm{lh}(s)) & \text{se } k \geq \mathrm{lh}(s). \end{cases}$$

# Stringhe/sequenze infinite

Qualche volta è necessario considerare anche stringhe infinite del tipo

$$0011001010100001000001100001000\dots$$

Usando la notazione per le sequenze, tali stringhe si possono rappresentare come

$$\langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \rangle$$

oppure, in maniera più concisa, come

$$\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Esempio**

La sequenza $\langle 2n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ è la stringa infinita di tutti i numeri pari (in ordine crescente), ovvero

$$\langle 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots, 2n, \dots \rangle$$



Anche una stringa infinita $s = \langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ su un alfabeto $A$ si può identificare con la sua funzione "enumerante"

$$s \colon \mathbb{N} \to A, \qquad k \mapsto s_k.$$

Questa identificazione ci permette di dare una definizione rigorosa di che cosa è una stringa infinita su un alfabeto $A$: ad esempio, una stringa infinita binaria è semplicemente una funzione $f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

**Definizione**

Dato un insieme $A$, indichiamo con $A^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $A$, ovvero

$$A^{\mathbb{N}} = \{f \mid f \colon \mathbb{N} \to A\}.$$

Dunque $A^{\mathbb{N}}$ può anche essere visto come l'insieme di tutte le stringhe infinite su $A$.

Le sequenze infinite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ vengono anche chiamate **successioni** e denotate con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

### Esempio

La stringa

$$010101\dots$$

che alterna $0$ ed $1$ senza mai ripeterne due consecutivamente è la funzione $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tale che

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 0 \quad \dots \quad f(2k) = 0 \quad f(2k+1) = 1 \quad \dots$$

che può essere definita esplicitamente come

$$f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}, \qquad n \mapsto [n]_2.$$



### Esempio

La funzione

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto n^2$$

è la successione

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$$

che può anche essere scritta come

$$\langle n^2 \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

## Esercizio 3

- Scrivere la stringa

$$\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots \rangle$$

  sia come funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sia con la notazione per le sequenze infinite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.
- Qual'è la successione definita dalla seguente funzione?

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto \frac{1}{2}n(n+1)$$

  Scriverne esplicitamente i primi $10$ termini.



# Funzioni non numeriche

In matematica capita spesso di lavorare con funzioni di tipo "numerico", ad esempio con funzioni del tipo $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Tuttavia ha perfettamente senso lavorare con funzioni definite tra insiemi arbitrari. Ad esempio:

- la codifica dei caratteri ASCII è una funzione (iniettiva!) del tipo $f\colon A \to \{0,1\}^7$, dove $A$ è l'insieme dei caratteri da codificare;
- più in generale, la codifica di un testo scritto in una sequenza di bit (mediante la codifica ASCII) è una funzione (iniettiva!) del tipo $f\colon A^{<\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$;
- ...

## Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$f\colon A^{<\mathbb{N}} \to A^{<\mathbb{N}}, \qquad \langle k_0, k_1, \dots, k_{n-1}\rangle \mapsto \langle k_0, k_0, k_1, k_1, \dots, k_{n-1}, k_{n-1}\rangle$$

è iniettiva ma non suriettiva.

[Se ad esempio $A = \{a, b, c\}$ e $s = \langle b, c, a, b\rangle$ allora $f(s) = \langle b, b, c, c, a, a, b, b\rangle$.]

Notiamo che $\operatorname{lh}(f(s)) = 2\operatorname{lh}(s)$ per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$. Se $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1}\rangle$ e $s' = \langle k'_0, \dots, k'_{m-1}\rangle$ sono sequenze distinte si possono avere due casi:

- $\operatorname{lh}(s) \neq \operatorname{lh}(s')$: allora $\operatorname{lh}(f(s)) = 2\operatorname{lh}(s) \neq 2\operatorname{lh}(s') = \operatorname{lh}(f(s'))$, quindi $f(s) \neq f(s')$.
- $\operatorname{lh}(s) = \operatorname{lh}(s')$ ma $k_i \neq k'_i$ per qualche $0 \leq i < n = \operatorname{lh}(s)$: allora $f(s) \neq f(s')$ poiché posto $f(s) = \langle \ell_0, \dots, \ell_{2n-1}\rangle$ e $f(s') = \langle \ell'_0, \dots, \ell'_{2n-1}\rangle$ si ha $\ell_{2i} \neq \ell'_{2i}$ e $\ell_{2i+1} \neq \ell'_{2i+1}$.

Questo dimostra che $f$ è iniettiva. Inoltre $f$ non è suriettiva perché ogni sequenza in $\operatorname{rng}(f)$ ha lunghezza pari: ad esempio se $s \in A^3$ allora certamente $s \notin \operatorname{rng}(f)$.



Sia $X$ un insieme non vuoto. Per ogni $A \subseteq X$ la **funzione caratteristica** di $A$ è la funzione $\chi_A\colon X \to \{0, 1\}$ definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Sia $2^X$ l'insieme di tutte le funzioni da $X$ in $\{0, 1\}$. In particolare, $\chi_A \in 2^X$ per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$.

Dimostrare che la funzione $F\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ che manda ogni $A \subseteq X$ nella sua funzione caratteristica $F(A) = \chi_A$ è una biezione.

*Iniettività:* Dati $A, B \in \mathcal{P}(X)$ distinti, o esiste $x \in A \setminus B$ oppure esiste $x \in B \setminus A$. Nel primo caso si avrà $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$, nel secondo caso $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 1$. In ogni caso $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$, per cui $\chi_A \neq \chi_B$, cioè $F(A) \neq F(B)$.

*Suriettività:* Data $f\colon X \to \{0, 1\}$ sia $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Allora per definizione di funzione caratteristica si ha $\chi_A = f$, ovvero $F(A) = f$.

Abbiamo visto che dato un qualunque insieme non vuoto $X$, c'è una biezione tra $\mathcal{P}(X)$ e l'insieme $2^X$ di tutte le funzioni da $X$ in $\{0,1\}$.

Se $X$ è finito e ha $n \in \mathbb{N}$ elementi, allora ci sono esattamente $2^n$ elementi in $2^X$. Quindi

> *se $X$ è un insieme non vuoto finito con $n$ elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha $2^n$ elementi.*

In particolare, si ha che $X$ ha meno elementi di $\mathcal{P}(X)$: questo fatto verrà generalizzato ad insiemi $X$ infiniti quando parleremo di cardinalità (Sezione 2.4).