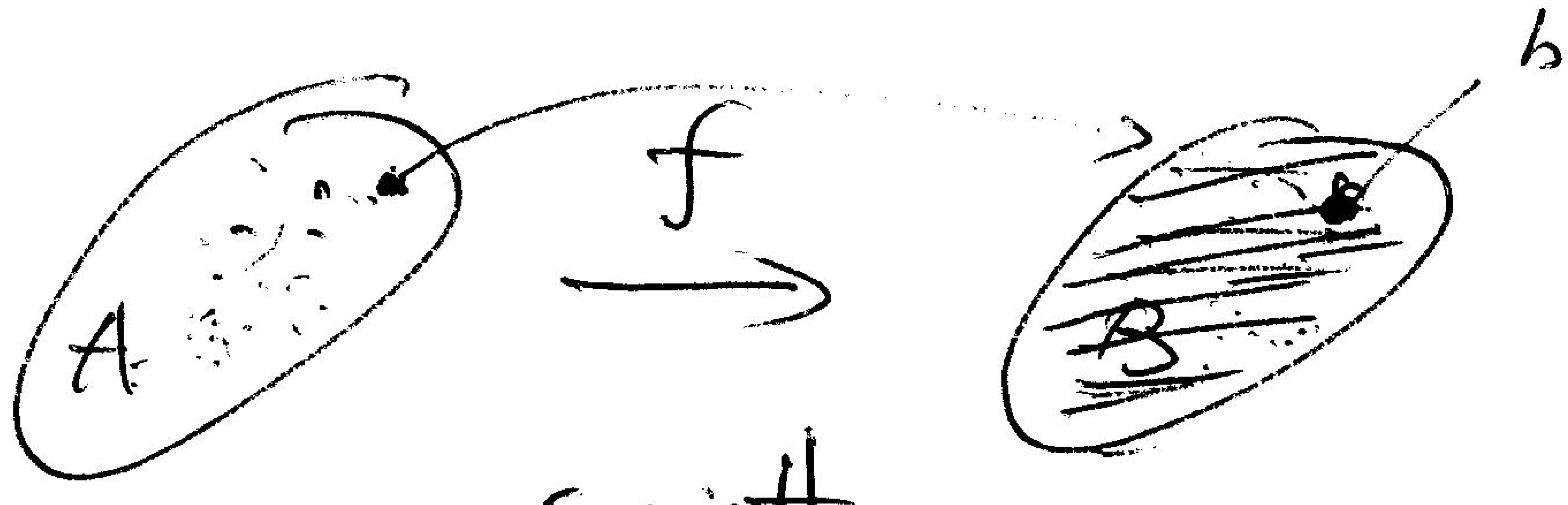
Funzioni Suriettive. iniettive

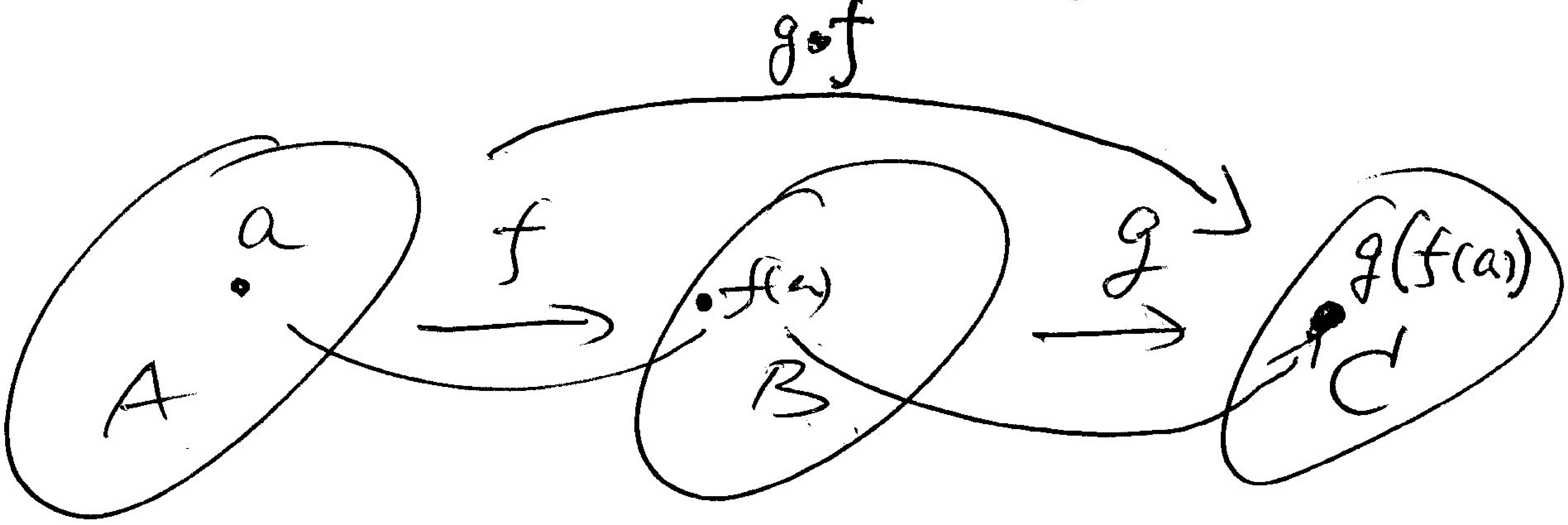
$f: A \longrightarrow B$.



suriett.

iniett.

Dati ins. A, B, C.
e funz. $f: A \to B$, $g: B \to C$.



Def: Siano $f: A \to B$, $g: B \to C$ due funzioni, la <u>Composizione</u> di f e g è una funz:

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

Prop: Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, allora

<u>Associativa</u> $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$\Rightarrow$ <u>$h \circ g \circ f$</u> ha senso.

<u>Atten</u>. Se $f: A \longrightarrow A$, $g: A \longrightarrow A$

In genere $f \circ g \neq g \circ f$.

e.g. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto 2x$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = x + 1$.
$\quad x \longmapsto x + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x+1)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 1$

Prop: Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, allora

1) se f e g sono suriett., allora $g \circ f$ è suriett.

2) se f e g sono iniett. allora $g \circ f$ è iniett.

3) se $g \circ f$ è suriett. allora g è suriett.

4) se $g \circ f$ è iniett. allora f è iniettiva.

Dim: 3) $g \circ f$ è suriett. allora

$$C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C$$

$$\boxed{\Rightarrow g \circ f(A) = C}$$

$$\Rightarrow g(B) = C \Rightarrow \text{suriett. di } g$$

4) $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$

$$\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Cor. Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, se $g \circ f$ è biettiva allora f ~~e g sono~~ ~~..~~ è iniettiva e g è suriett.

Def: Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice f è invertibile se esiste $\exists$ una funz. $g : B \to A$, tale che

$$g \circ f = id_A, \quad e \quad f \circ g = id_B$$

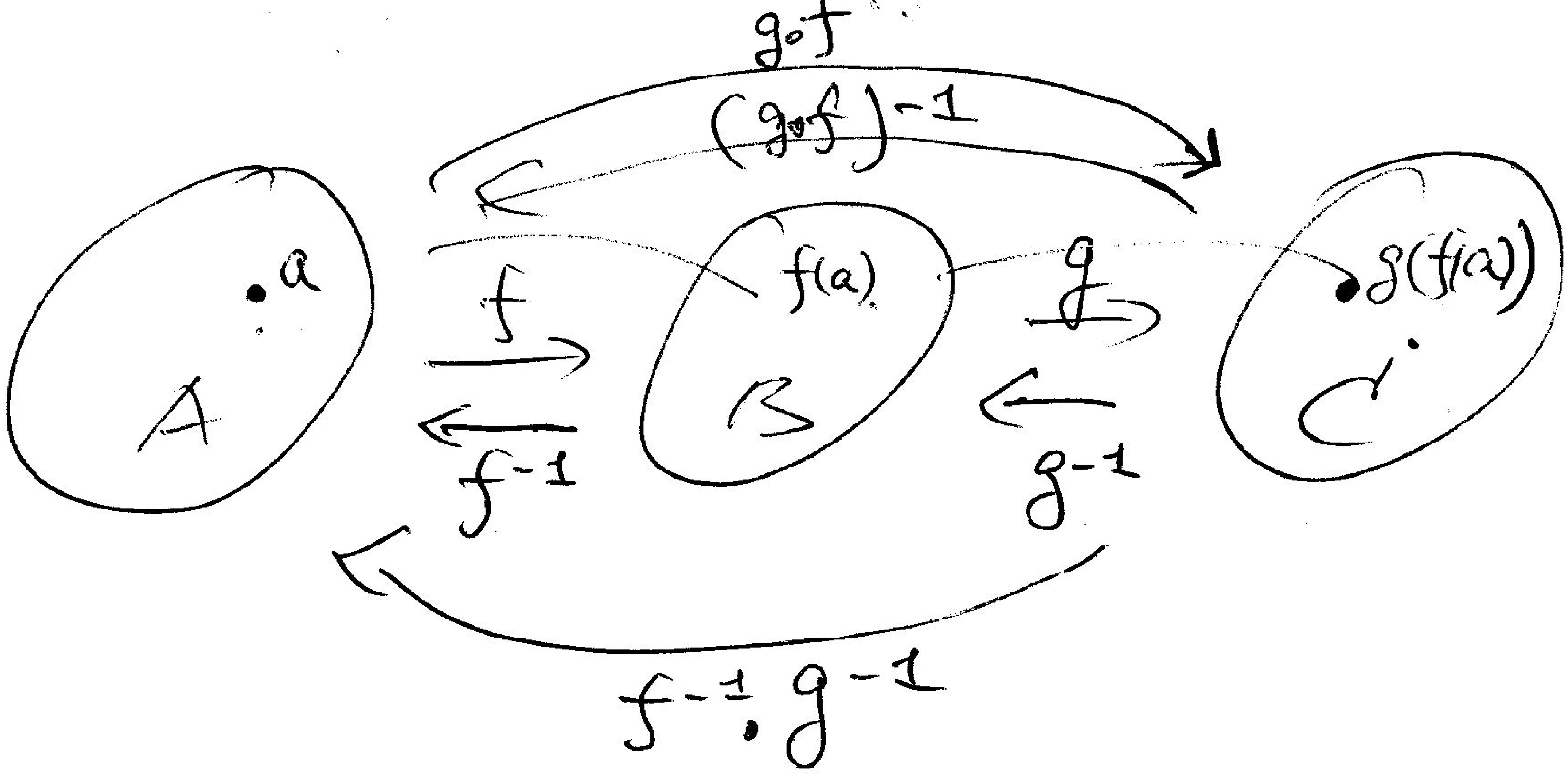
In questo caso, g è la funzione inversa di f, $f^{-1} := g$.

Prop: 1) Un funz. $f : A \to B$ è invertibile $\underset{\text{se e solo se}}{\Longleftrightarrow}$ f è ~~...~~ biiettiva.

2). la funzione inversa di $f : A \to B$, se esisite, è unica.

3) Siano $f: A \to B$, $g: B \to C$ due funz. biiettive, allora $g \circ f$ è biett.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$



Dim:

$\cancel{\forall \varphi \; (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)}$

$$\underbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})} \circ \underbrace{(g \circ f)} = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{= id_B} \circ f$$

$$= f^{-1} \circ id_B \circ f$$

$$= f^{-1} \circ f = id_A.$$

Simile $\Rightarrow (g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = id_B$.

$$\Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4). Siano $f: A \to B$ biiett.

$g_1: B \to C$

$g_2: B \to C$

Se $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$

-

Siano. $h_1: C \to A$

$h_2: C \to A$

t.c. $f \circ h_1 = f \circ h_2$

allora $h_1 = h_2$

Def: Sia A un ins. non-vuoto. Una operazione (binaria) ~~se~~ è una funzione

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

$$\forall a, a' \in A \quad (a, a') \longmapsto *((a, a')) =: a * a'$$

$$(A, *)$$

e.g. $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. $\quad (\mathbb{Z}, +)$

$$(a, b) \longmapsto a+b \quad , \quad (\mathbb{Z}, \times)$$

e.g. A ins, $P(A) = \{$ sottoins. di $A \}$

"$\cap$" è una operaz. su $P(A)$:

$$\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$

$$\forall X, Y \subseteq A \quad (X, Y) \longmapsto X \cap Y \in P(A).$$

Sottoins.

Simile. $(P(A), \cup)$

e.g. A ins. $F_A = \{$funzioni $f: A \to A\}$.

$$\circ : F_A \times F_A \longrightarrow F_A$$

$$\forall f, g \in F_A \quad (f, g) \longmapsto f \circ g.$$

Composizione delle funz.

Def: Una operaz. "$*$" su un ins. A è

1) associativa se
$\forall a_1, a_2, a_3 \in A$,
$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$$

2) Commutativa se
$\forall a_1, a_2 \in A$
$$a_1 * a_2 = a_2 * a_1.$$

3) dotato un elem. neutro se esiste un $e \in A$, tale che
$\forall a \in A, \quad e * a = a * e = a.$

e.g. $F_{\mathbb{Z}} = \{$ funz. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$

$(F_{\mathbb{Z}}, \circ)$ ins. con operaz. di composiz. di funzioni.

l'<u>elem. neutro</u> rispetto a "$\circ$" è $id_{\mathbb{Z}}$.

$$F_{\mathbb{Z}} \ni f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$a \longmapsto 2a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

$$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$a \longmapsto \begin{cases} a, & \text{se } a \text{ è dispari}, \\ \frac{a}{2}, & \text{" " pari}. \end{cases}$$

$$g \circ f: \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$$
$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \longmapsto 2a \overset{g}{\longmapsto} \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = a$$

i.e. $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.

Verificate: $f \circ g \neq id_{\mathbb{Z}}$.