Linguaggi Formali e Traduttori

3.7 Proprietà di chiusura dei linguaggi liberi

Sommario

Proprietà di chiusura

Dati due linguaggi liberi L ed L', i seguenti linguaggi sono liberi?

- $L \cup L'$
- $L \cap L'$
- LL'
- $\overline{L}$
- $L - L'$
- L^R

Unione e concatenazione

Teorema

I linguaggi liberi sono chiusi per unione e concatenazione.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi liberi. Dunque esistono due grammatiche libere $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$ tali che $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$.

Senza perdere in generalità, possiamo assumere che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e che $S \notin V_1 \cup V_2$. Infatti, è sempre possibile scegliere nuovi nomi e rinominare (in maniera consistente) le variabili di una grammatica senza modificarne il linguaggio generato.

Ora, la grammatica

$$(V_1 \cup V_2, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S)$$

genera $L_1 \cup L_2$ mentre la grammatica

$$(V_1 \cup V_2, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

genera $L_1 L_2$. Concludiamo che $L_1 \cup L_2$ e $L_1 L_2$ sono liberi.

Intersezione

Osservazione

I linguaggi liberi **non** sono chiusi per intersezione.

Dimostrazione

I linguaggi

- $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$
- $L_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$

sono liberi. Se i linguaggi liberi fossero chiusi per intersezione, allora anche il linguaggio

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

sarebbe libero, mentre abbiamo dimostrato che non lo è.

Intersezione con un linguaggio regolare

Teorema

Se L è un linguaggio libero ed R è un linguaggio regolare, allora $L \cap R$ è un linguaggio libero.

Dimostrazione (intuizione)

Se L è un linguaggio libero allora esiste un PDA P che accetta L per stato finale.

Se R è un linguaggio regolare allora esiste un DFA M che accetta R.

Si può costruire un PDA che accetta $L \cap R$ per stato finale costruendo il "prodotto" di P ed M, in maniera analoga a quanto già visto nella costruzione diretta del DFA che riconosce l'intersezione di due linguaggi regolari.

Dettagli nella Sezione 7.3.4 del libro (facoltativa).

Osservazione

L'intersezione di un linguaggio libero e uno regolare non è un linguaggio regolare in generale. Si prendano ad esempio $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ed $R = L(a^* b^*)$. Siccome $L \subseteq R$ abbiamo $L \cap R = L$, il quale non è regolare.

Complemento e differenza

Osservazione

I linguaggi liberi **non** sono chiusi per complemento e differenza.

Dimostrazione

Sappiamo che i linguaggi liberi sono chiusi per unione. Se fossero chiusi anche per complemento, allora avremmo che

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

sarebbe sempre un linguaggio libero, contrariamente a quanto dimostrato in precedenza.

Dato un linguaggio libero L su un alfabeto Σ, il linguaggio Σ^* è a sua volta libero (dimostrare per esercizio). Se i linguaggi liberi fossero chiusi per differenza, allora $\Sigma^* - L$ sarebbe sempre libero, ma questo è il complemento di L che, come visto sopra, non è libero in generale.

Inversione

Teorema

Se L è un linguaggio libero, allora anche L^R è un linguaggio libero.

Dimostrazione (parziale)

Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG che genera L.

Definiamo $G^R = (V, T, P^R, S)$ dove

$$P^R = \{A \to \alpha^R \mid A \to \alpha \in P\}$$

Si può dimostrare che $L(G^R) = L(G)^R$ (Sezione 7.3.3 del libro).

Esercizi e quesiti

1. Se L è un linguaggio libero, cosa si può dire di L^* e di L^+? Sono liberi?
2. Se L_i con $i \in \mathbb{N}$ è una famiglia **infinita** di linguaggi liberi, cosa si può dire di $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$? È sempre un linguaggio libero?
3. Se L è un linguaggio libero ed R è un linguaggio regolare, cosa si può dire di $L - R$? È libero?