

Linguaggi Formali e Traduttori

2.5 Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

- Sommario
- Unione e concatenazione
- Complemento
- Intersezione
- Intersezione (costruzione diretta)
- Differenza
- Inversione
- Esercizi

È proibito condividere e divulgare in qualsiasi forma i materiali didattici caricati sulla piattaforma e le lezioni svolte in videoconferenza: ogni azione che viola questa norma sarà denunciata agli organi di Ateneo e perseguita a termini di legge.

Sommario

In questa lezione studiamo le più importanti proprietà di chiusura dei linguaggi regolari ponendoci la seguente domanda: dati due linguaggi regolari L ed L' , i seguenti linguaggi sono regolari?

- $L \cup L'$
- $L \cap L'$
- LL'
- \overline{L}
- $L - L'$
- L^R

In tutti i casi possiamo rispondere affermativamente.

Unione e concatenazione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per unione e concatenazione.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari.

Dunque esistono due espressioni regolari E_1 ed E_2 tali che $L_1 = L(E_1)$ e $L_2 = L(E_2)$.

Ora $E_1 + E_2$ e $E_1 E_2$ sono espressioni regolari che generano, rispettivamente, $L_1 \cup L_2$ e $L_1 L_2$.

Concludiamo che $L_1 \cup L_2$ e $L_1 L_2$ sono regolari.

Complemento

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per complemento.

Dimostrazione

Sia L un linguaggio regolare.

Dunque esiste un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L = L(A)$.

Definiamo $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ e osserviamo che

$$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow w \notin L(B)$$

Concludiamo che $\overline{L} = L(B)$ e che \overline{L} è regolare.

Intersezione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per intersezione.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ .

Usando le **leggi di De Morgan**, osserviamo che

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = \overline{\overline{L_1}} \cap \overline{\overline{L_2}}$$

Siccome i linguaggi regolari sono chiusi per unione e complemento, concludiamo che $L_1 \cap L_2$ è regolare.

Intersezione (costruzione diretta)

Dimostrazione alternativa

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ .

Dunque esistono due DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tali che $L_1 = L(A_1)$ e $L_2 = L(A_2)$.

Definiamo $B = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$ dove

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

per ogni $p \in Q_1, q \in Q_2$ e $a \in \Sigma$. Concludiamo osservando che

$$\begin{aligned} w \in L(B) &\Leftrightarrow \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F_1 \times F_2 \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_1) \wedge w \in L(A_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L_1 \cap L_2 \end{aligned}$$

Differenza

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per differenza.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ .

Per concludere basta osservare che $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ e ricordare che i linguaggi regolari sono chiusi per intersezione e complemento.

Inversione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per inversione.

Dimostrazione

Se L è un linguaggio regolare deve esistere un'espressione regolare E tale che $L = L(E)$.

Definiamo l'espressione regolare E^R per induzione sulla struttura di E e per casi sulla sua forma, usando le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\emptyset^R &= \emptyset \\ \varepsilon^R &= \varepsilon \\ a^R &= a \\ (E_1 + E_2)^R &= E_1^R + E_2^R \\ (E_1 E_2)^R &= E_2^R E_1^R \\ (E^*)^R &= (E^R)^*\end{aligned}$$

È facile dimostrare che $L(E^R) = L(E)^R$, dunque L^R è regolare.

Esercizi

Aiutandosi con le tecniche illustrate in questa lezione, risolvere i seguenti esercizi.

1. Se L è un linguaggio regolare, cosa si può dire di L^* e di L^+ ? Sono regolari?
2. Definire un DFA che riconosca il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ in cui non c'è uno 0 seguito da due 1.
3. Definire un DFA che riconosca il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ di lunghezza pari e che contengono almeno un 1.
4. Definire un'espressione regolare per il linguaggio $L(E)^R$, dove $E = (ab)^*(b + a^*)^*$.