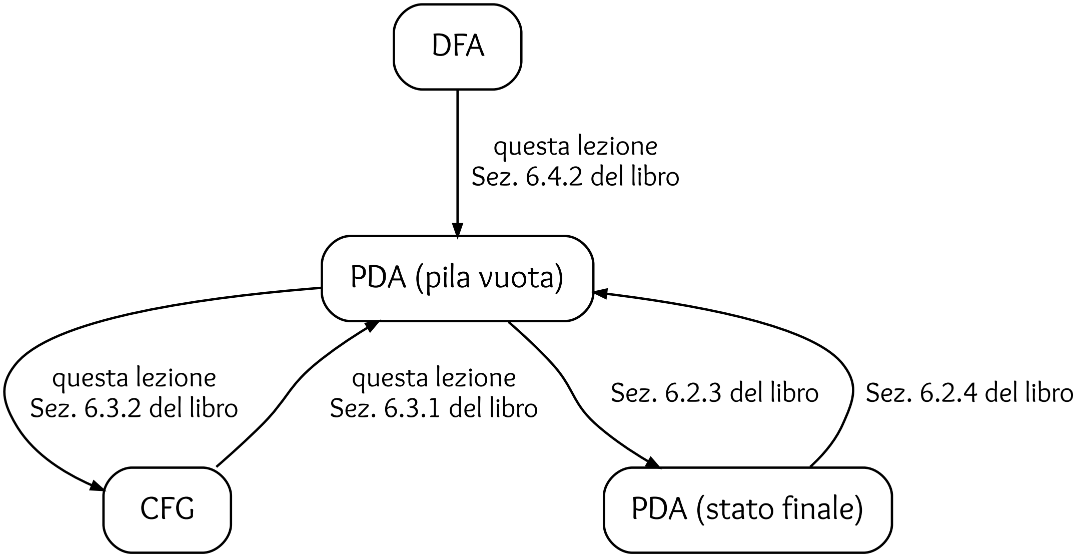
Linguaggi Formali e Traduttori

3.5 Relazione tra automi a pila e grammatiche libere

Sommario

- Studiamo la relazione tra CFG e PDA.
- Definiamo una variante **deterministica** dei PDA.
- Mostriamo che i PDA deterministici sono in grado di riconoscere tutti i linguaggi regolari e un sottoinsieme dei linguaggi liberi non inerentemente ambigui.



Relazione tra CFG e PDA

Teorema

1. Per ogni CFG G, esiste un PDA P tale che $N(P) = L(G)$.
2. Per ogni PDA P, esiste una CFG G tale che $L(G) = N(P)$.

Intuizione per 1

Data $G = (V, T, Q, S)$, definiamo un PDA che simuli le derivazioni a sinistra di G. Sia P il PDA $(\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$ dove δ è definita come segue:

$$\begin{array}{rcll} \delta(q, \varepsilon, A) & = & \{(q, \beta) \mid A \to \beta \in Q\} & \textbf{per ogni } A \in V \\ \delta(q, a, a) & = & \{(q, \varepsilon)\} & \textbf{per ogni } a \in T \end{array}$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente mostrare che

$$\alpha \Rightarrow^*_{lm} w \Leftrightarrow (q, w, \alpha) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

in quanto, come caso particolare, avremo

$$G \textbf{ genera } w \Leftrightarrow S \Rightarrow^* w \Leftrightarrow (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow P \textbf{ accetta } w \textbf{ per pila vuota}$$

I dettagli della dimostrazione si trovano nel libro di testo.

Osservazione

Richiamando la funzione di transizione definita nella slide precedente:

$$\begin{array}{rcll} \delta(q,\varepsilon,A) & = & \{(q,\beta) \mid A \to \beta \in Q\} & \textbf{per ogni } A \in V \\ \delta(q,a,a) & = & \{(q,\varepsilon)\} & \textbf{per ogni } a \in T \end{array}$$

- Il PDA che riconosce il linguaggio generato da una CFG fa uso chiave del **non determinismo** per “indovinare” la produzione giusta da usare per riscrivere una variabile A
- I risultati di equivalenza tra PDA e CFG hanno una valenza principalmente teorica, ma non aiutano molto a ottenere riconoscitori efficienti per linguaggi liberi
- Consideriamo PDA **deterministici**

Automi a pila deterministici

Intuizione

Non devono esserci “scelte” possibili a partire dalla stessa D.I.

Definizione

Un **automa a pila deterministico** (**DPDA**, da **D**eterministic **P**ush**D**own **A**utomaton) è un PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ in cui, per ogni $q \in Q$, $a \in \Sigma$ e $X \in \Gamma$, l'insieme $\delta(q, a, X) \cup \delta(q, \varepsilon, X)$ contiene <u>al massimo un elemento</u>.

Note

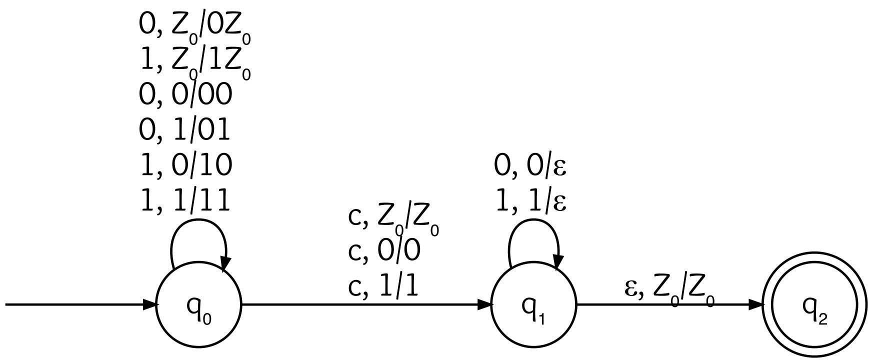
- A parità di stato, simbolo letto e simbolo sulla pila, un DPDA può fare al massimo una mossa.
- L'insieme $\delta(q, a, X) \cup \delta(q, \varepsilon, X)$ può essere vuoto, nel qual caso il DPDA rifiuta definitivamente la stringa, senza che vi siano altre possibilità di riconoscerla.

Esempio: riconoscitore di stringhe wcw^R

- È possibile dimostrare che non esiste un DPDA in grado di riconoscere il linguaggio delle stringhe della forma ww^R. Intuizione: il PDA deve "scommettere" sul punto in cui finisce il prefisso w e inizia il suffisso w^R.

- Separando con una "sentinella" c il prefisso w dal suffisso w^R, il linguaggio delle stringhe della forma wcw^R diventa riconoscibile dal DPDA seguente

$$(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



- Notare che il comportamento è deterministico anche nello stato q_1, in quanto la transizione ε è possibile solo se in cima alla pila c'è Z_0.

DPDA e linguaggi regolari

Teorema

Ogni linguaggio regolare è riconosciuto da un DPDA.

Dimostrazione

Sia $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ un DFA che riconosce un certo linguaggio regolare L. Definiamo un PDA strutturalmente identico ad A che <u>non usa la pila</u>. Sia

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

dove

$$\begin{array}{rcll} \delta_P(q, a, Z_0) & = & \{(\delta_A(q, a), Z_0)\} & \text{per ogni } q \in Q \text{ e } a \in \Sigma \\ \delta_P(q, \varepsilon, Z_0) & = & \emptyset & \text{per ogni } q \in Q \end{array}$$

È facile mostrare che $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (\hat{\delta}_A(q_0, w), \varepsilon, Z_0)$ da cui segue il risultato.

DPDA e grammatiche ambigue

Teorema

Per ogni DPDA P, esiste una grammatica libera non ambigua G tale che $L(G) = N(P)$.

Osservazione

Il viceversa del risultato qui sopra **non vale.** In particolare, esistono grammatiche non ambigue il cui linguaggio non è riconosciuto da alcun DPDA. Ad esempio

$$S \to \varepsilon \mid 0S0 \mid 1S1$$

è non ambigua e genera il linguaggio $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ che non è riconoscibile da un DPDA.

Conclusione

La famiglia dei linguaggi riconoscibili da DPDA è inclusa in – ma non coincide con – quella dei linguaggi generabili da grammatiche libere non ambigue.

Potere espressivo dei formalismi visti fino ad ora

- DFA $=$ NFA $=$ ε-NFA $=$ RE
- DFA $\subsetneq$ DPDA $\subsetneq$ CFG non ambigue $\subsetneq$ CFG $=$ PDA
- Non abbiamo ancora un algoritmo per ottenere il DPDA quando esiste