

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра программного обеспечения  
информационных технологий

**Алексеев Игорь Геннадиевич**  
**Бранцевич Петр Юльянович**  
**Костюк Елена Сергеевна**

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по курсу

**“Цифровая обработка сигналов”**

для студентов специальности  
«Программное обеспечение информационных технологий»

Минск 2010

УДК 004.4(075.8)  
ББК 32.973-018.2я73  
А47

А 47        **Лабораторный практикум** по курсу “Цифровая обработка сигналов ”  
для студентов специальности «Программное обеспечение информационных  
технологий»/И.Г. Алексеев, П.Ю. Бранцевич, Е.С. Костюк – Мн.: БГУИР, 2006.  
– 26 с.  
ISBN 985-444-387-6

В лабораторном практикуме рассмотрены некоторые вопросы цифровой  
обработки сигналов. Предложены задания для выполнения лабораторных ра-  
бот.

УДК 004.4(075.8)  
ББК 32.973-018.2я73  
А47

**ISBN 985-444-387-6**

© И.Г. Алексеев, П.Ю. Бранцевич, Е.С. Костюк, 2010  
© БГУИР, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

### 1. Лабораторные работы

Лабораторная работа №1. Моделирование цифровых сигналов различных типов .....	4
Лабораторная работа №2. Исследование влияния длительности временного интервала анализа на точность определения параметров периодических сигналов .....	10
Лабораторная работа №3. Исследование сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье .....	16
Лабораторная работа №4. Исследование алгоритмов сглаживания цифровых сигналов.....	23
Литература.....	27

# 1. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

## *Лабораторная работа №1*

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Цель работы – разработка программных функции для формирование гармонического и полигармонического сигналов.

#### **Теоретическая часть**

Сигнал - это условный знак для передачи на расстояние каких-нибудь сведений, сообщений. Процесс - это ход какого-нибудь явления, последовательная смена состояний.

Аналоговый процесс описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией  $x_a(t)$ , причем, и аргумент, и сама функция могут принимать любые значения из некоторых интервалов  $t_n < t < t_k$ ,  $x_n < x < x_k$ . К данным процессам относятся, например, речевые в телефонии и радиовещании, телевизионные сигналы (Рис. 1а).

Дискретный процесс описывается функцией в виде временного ряда  $x(nt_d)$ , которая может принимать любые значения в некотором интервале  $x_n \leq x \leq x_k$ , в то время как независимая переменная  $n$  - лишь дискретные значения, причем,  $n = 0, 1, \dots$ ;  $t_d$  - интервал дискретизации;  $f_d = 1/t_d$  - частота дискретизации. Используются и иные способы обозначения дискретной функции:  $x(n)$ ,  $x_n$ , когда интервал дискретизации нормирован и остается постоянным, или  $\{x(nt_d)\}$ -, когда необходимо подчеркнуть, что речь идет о функции в целом, а не об отдельном её значении при  $t = nt_d$  (Рис. 1б).

Дискретный процесс может быть вещественным или комплексным, В первом случае отсчеты принимают лишь вещественные значения, во втором - комплексные.

Цифровой процесс описывается квантованной дискретной функцией  $x(nt_d)$ , т.е. дискретной, принимающей лишь ряд дискретных значений - уровней квантования  $h_1, h_2, \dots, h_k$ , в то время как независимая переменная  $n$  принимает значения  $0, 1, \dots$ .

Каждый из уровней квантования кодируется кодом, состоящим из двоичных цифр, так что передача или обработка отчета цифрового кодированного процесса сводится к операциям над безразмерным двоичным кодом. Число  $K$  уровней квантования и число  $s$  разрядов соответствующих кодов связаны зависимостью  $s \geq \text{int}(\log_2 K)$ .

Операция дискретизации состоит в том, что по заданному аналоговому процессу  $x_a(t)$  строится дискретный  $x(nt_d)$ , причем,  $x(nt_d) = x_a(nt_d)$ .

Операция восстановления состоит в том, что по заданному дискретному процессу  $x(nt_d)$  строится аналоговый  $x_a(t)$ ,  $x(nt_d) \rightarrow x_a(t)$ .

Согласно теореме Котельникова, аналоговый процесс с ограниченным спектром может быть точно (без потери информации) преобразован в дискретный и затем точно восстановлен по отсчетам последнего процесса. Практически любой аналоговый процесс имеет ограниченный спектр, и поэтому может быть заменен при правильно выбранной частоте дискретизации соответствующим дискретным.

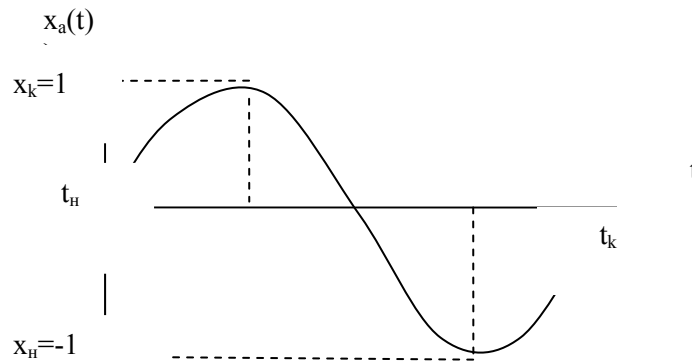


Рис. 1а - Аналоговый процесс

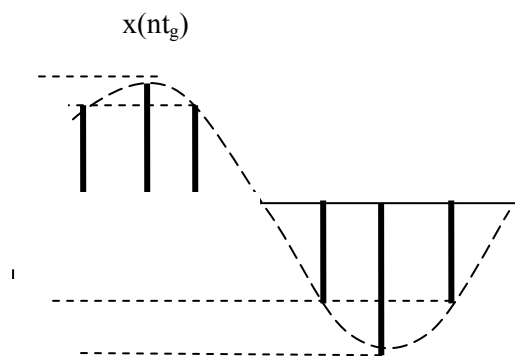


Рис. 1б - Дискретный процесс

Операция квантования и кодирования (аналого-цифрового преобразователя) состоит в том, что по замкнутому дискретному  $x(nt_d)$  строится цифровой кодированный процесс  $x_u(nt_d)$ ,  $x(nt_d) \rightarrow x_u(nt_d)$  так, что  $x_u(nt_d) = x(nt_d)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Операция цифро-аналогового преобразования состоит в том, что по заданному цифровому кодированному процессу  $x_u(nt_d)$  строят дискретный  $x(nt_d)$ ,  $x_u(nt_d) \rightarrow x(nt_d)$ , так что  $x(nt_d) = x_u(nt_d)$ .

Операция квантования и кодирования и цифро-аналогового преобразования не являются точно взаимнообратными, поскольку квантование в общем случае выполняется с неустранимой погрешностью. Считается, что аналого-цифровые преобразователи (АЦП) выполняют операции дискретизации, квантования и кодирования, а

цифро-аналоговые (ЦАП) - операции цифро-аналогового преобразования и восстановления.

Единичный импульс определяется как функция, которая принимает единичное значение, когда аргумент ее равен нулю, и нулевое значение, когда ее аргумент отличен от нуля.

Единичная ступенчатая последовательность представляет собой функцию, которая принимает единичные значения, когда ее аргумент принимает значения большие или равные нулю.

Связь между единичными импульсами и единичной ступенчатой последовательностью представляется следующими выражениями:

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^n \delta(i) \quad (1.1)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.2)$$

Дискретная последовательность называется периодической с периодом  $N$ , если выполняется для всех  $n$  условие  $x(n) = x(n+N)$ .

Говорят, что последовательность  $y$  является задержанной или сдвинутой последовательностью  $x$ , если  $y(n) = x(n-n_0)$ , где  $n$  - целое число.

Произвольная последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k), \quad (1.3)$$

В зависимости от рассматриваемой задачи процессы можно классифицировать по-разному. Наиболее общим является разделение процессов на детерминированные (регулярные) и случайные.

Детерминированными являются процессы, заданные аналитически или другим эквивалентным способом (например, графически).

Случайные процессы принимают значения, которые определенно предсказать невозможно.

Одним из наиболее важных классов процессов являются периодические, удовлетворяющие при  $-\infty < t < \infty$  условию:

$$x(t) = x(t+mT), \quad (1.4)$$

где  $m$  - любое целое число;  $T$  - период колебаний.

Простейшим из периодических колебаний является гармоническое:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.5)$$

где  $A, \omega_0, \varphi_0$  - постоянные величины,  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

## Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть лабораторной работы, разделы 1,2 учебного пособия по предмету.
2. Написать программную функцию формирования гармонического сигнала вида:

$$x(n) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot n}{N} + \varphi\right), \text{ где} \quad (1.6)$$

$A$  - амплитуда;

$N = 512, 1024, 2048 \dots$ ;

$n = 0 \div N-1$ ;

$\varphi$  - начальная фаза в радианах;

$f$  - частота.

а) при постоянных  $A$  и  $f$  задать 5 значений фазы  $\varphi$ . Вывести 5 реализаций сигнала, отследить изменение графиков. Значения  $A$ ,  $\varphi$ ,  $f$  выбираются в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 1.а).

б) при постоянных  $A$  и  $\varphi$  задать 5 значений частоты  $f$ . Вывести 5 реализаций сигнала, отследить изменение графиков. Значения  $A$ ,  $\varphi$ ,  $f$  выбираются в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 1.б).

в) при постоянных  $\varphi$  и  $f$  задать 5 значений амплитуды  $A$ . Вывести 5 реализаций сигнала, отследить изменение графиков. Значения  $A$ ,  $\varphi$ ,  $f$  выбираются в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 1.в).

3. Написать программу формирования полигармонического сигнала вида:

$$x(n) = \sum_{j=1}^k A_j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f_j \cdot n}{N} + \varphi_j\right), \text{ где} \quad (1.7)$$

$A_j$  - амплитуда  $j$ -ой гармоники

$N = 512, 1024, 2048 \dots$

$n = 0 \div N-1$

$\varphi_j$  - начальная фаза  $j$ -ой гармоники в радианах

$f_j$  - частота  $j$ -ой гармоники

$k$  - количество гармоник

Значения  $A$ ,  $\varphi$ ,  $f$  задаются из таблицы в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 1.г). При постоянных  $A_j, f_j$  изменять  $\varphi_j$ , исследовать влияние фазы на максимум сигнала.

4. Написать программу формирования полигармонического сигнала, у которого амплитуды, частоты, начальные фазы изменяются по линейному закону в сторону возрастания или убывания, при этом на одном периоде полигамонического сигнала параметр не должен изменяться более чем на 20%.

5. Разработать программный модуль для отображения графиков.

### Варианты заданий

Таблица 1.а)

№ вар.	$A$	$f$
1	10	2
2	5	1
3	8	4
4	6	3
5	7	5
6	9	4

№ вар.	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
1	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi$
2	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	0	$\pi$
3	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/4$	0
4	$2\pi$	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$3\pi/4$
5	$\pi$	0	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/2$
6	$\pi/3$	$3\pi/4$	$2\pi$	$\pi$	$\pi/6$

Таблица 1.б)

№ вар.	$A$	$\varphi$
1	3	$\pi/2$
2	1	$\pi$
3	4	0
4	8	$\pi/4$
5	5	$3\pi/4$
6	7	$\pi/6$

№ вар.	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
1	5	4	2	6	3
2	1	3	2	4	10
3	8	1	5	4	9
4	2	4	3	7	5
5	1	5	11	6	3
6	4	8	2	1	9

Таблица 1.в)

№ вар.	$f$	$\varphi$
1	1	$\pi/2$
2	4	$\pi$
3	2	0
4	5	$\pi/4$
5	3	$3\pi/4$
6	7	$\pi/6$

№ вар.	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	2	3	6	5	1
2	3	5	10	4	8
3	8	3	2	1	4
4	2	2	8	3	1
5	1	2	11	4	2
6	4	5	3	1	7



Таблица 1.г)

Вариант 1

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	1	1	0
2	1	2	$\pi/4$
3	1	3	$\pi/6$
4	1	4	$2\pi$
5	1	5	$\pi$

Вариант 2

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	5	1	$\pi/9$
2	5	2	$\pi/4$
3	5	3	$\pi/3$
4	5	4	$\pi/6$
5	5	5	0

Вариант 3

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	3	1	$\pi/4$
2	3	2	$3\pi/4$
3	3	3	$2\pi/3$
4	3	4	$\pi/2$
5	3	5	$\pi/3$

Вариант 4

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	6	1	$\pi/6$
2	6	2	$\pi/2$
3	6	3	$\pi/3$
4	6	4	$\pi/9$
5	6	5	0

Вариант 5

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	9	1	$\pi/2$
2	9	2	0
3	9	3	$\pi/4$
4	9	4	$\pi/3$
5	9	5	$\pi/6$

Вариант 6

$j$	$A_j$	$f_j$	$\varphi_j$
1	7	1	$\pi$
2	7	2	$\pi/4$
3	7	3	0
4	7	4	$3\pi/4$
5	7	5	$\pi/2$

## *Лабораторная работа №2*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА АНАЛИЗА НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА**

Цель работы – исследовать влияние длительности временного интервала анализа на точность определения параметров периодического сигнала.

#### **Теоретическая часть**

Обработка цифровых сигналов сводится к определению их параметров и (или) характеристик, или к их преобразованию в соответствии с заданным алгоритмом. Конкретные наименования параметров, характеристик, алгоритмов обработки определяются поставленной задачей и типом обрабатываемых сигналов и данных. Так, например, для детерминированных и случайных сигналов, как правило, определяются различные характеристики, хотя такие параметры, как мощность, спектр, амплитуда, среднее значение, могут рассчитываться и для того и для другого типа сигналов. Причем, алгоритмы при этом могут использоваться отличные для каждого типа сигналов. Обработку экспериментальных данных можно подразделить на два этапа: предварительную (первичную) и окончательную.

Когда экспериментальные данные получены, они во многих случаях не могут быть непосредственно использованы для определения требуемых характеристик.

Данные могут иметь различные недостатки:

1. Высокочастотные возмущения выше частот, представляющих интерес в отношении динамических свойств объекта.
2. Редкие выбросы и зашкаливания.
3. Дрейф и сдвиги, низкочастотные возмущения.

Наличие высокочастотных возмущений (помех) в некоторых случаях говорит о том, что интервал дискретизации выбран недостаточно успешно. Если оказывается, что интервал дискретизации слишком мал, можно проредить последовательность данных путем удаления отсчетов из исходной последовательности.

Единичные значительные отклонения в полученных данных могут существенно повлиять на определяемый параметр. Необходимо делать защиту от плохих данных. Обнаружить их обычно можно с помощью робастных оценок (оценок устойчивости). Выбросы легче всего обнаружить на графиках или гистограммах. Алгоритмы обработки выбросов могут быть достаточно разнообразными: удаление их из обрабатываемых данных (конечно, если такое допустимо); ручная корректировка; тщательное изучение (такие данные могут нести в себе самую полезную информацию).

Низкочастотные возмущения, сдвиги, тренды, дрейф и периодические изменения не являются редкостью. Обычно они возникают вследствие влияния внешних источников помех. Существуют в основном два различных подхода к этой проблеме:

1. Удаление возмущений посредством специальной предварительной обработки данных.

2. Введение модели шума для учета возмущений.

Первый подход включает удаление трендов путем непосредственного вычитания (например, вычитание среднего значения). Второй основывается на выборе модели шума, которую используют при проведении расчетов.

Окончательная обработка экспериментальных данных определяется постановкой решаемой задачи.

Наиболее часто определяемыми параметрами и характеристиками являются следующие, (выражения приводятся для непрерывных и дискретных данных):

Среднее значение:

Средним значением  $x$  функция  $x(t)$  называется величина, получаемая при усреднении по времени  $t$  значений  $x(t)$  на некотором интервале усреднения  $T = N\Delta t$ ;

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt ; \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n), \quad (2.1)$$

Средний квадрат или средняя мощность:

Средним квадратом (мощностью)  $\bar{x}^2$  функции  $x(t)$  называется величина, получаемая усреднением по времени  $t$  значений квадрата  $x^2(t)$  на некотором интервале усреднения  $T$ :

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt ; \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n), \quad (2.2)$$

Дисперсия:

Дисперсией  $D_x$  функции  $x(t)$  называется средний квадрат отклонения значений  $x(t)$  от среднего значения  $\bar{x}$  за интервал времени  $T$ .

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt ; \quad D_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) - \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \right)^2. \quad (2.3)$$

Среднее квадратическое значение (СКЗ):

СКЗ значение есть положительный квадратный корень из среднего квадрата. Если среднее значение равно нулю, то среднеквадратическое значение совпадает со среднеквадратичным отклонением.

Среднеквадратичное отклонение есть положительный квадратный корень из дисперсии.

Ковариационная функция:

Ковариационной функцией  $R_{xx}(\tau)$  функции  $x(t)$  называется среднее за интервал времени  $T$  значение произведения величин, принимаемых последовательностью в момент времени  $t$  и  $t + \tau$ :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) d\tau \quad ; \quad R_{xx}(K) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)x(i+K), \quad (2.4)$$

Иногда в литературе эту функцию называют автокорреляционной.

Гистограмма:

Гистограммой называется график, на котором по оси ординат отложено число значений функции  $x(t)$ , попадающих в заданные амплитудные интервалы, а по оси абсцисс - границы этих интервалов, называемых интервалами группировки.

Функция распределения:

Функцией распределения  $P(x)$  называется вероятность того, что в любой момент времени  $t$  значение  $x(t)$  удовлетворяет условию  $x(t) \geq x$ . Функция распределения связана с плотностью вероятности соотношением:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du, \quad (2.5)$$

Плотность вероятности:

Плотность вероятности  $p(x)$  величины  $x(t)$  задается отношением

$$p(x) = \frac{P(x, w)}{w}, \quad (2.6)$$

где  $P(x, w)$  - вероятность попадания значения  $x(t)$  в интервал шириной  $w$  с центром в точке  $x$ .

Спектр:

Спектром любой величины называется ее описание как функции частоты. Он может быть линейчатым, непрерывным или кусочно-непрерывным.

Преобразование Фурье  $X(f)$  функции  $x(t)$ , называемое также спектром Фурье, есть комплексная функция частоты  $f$ , определяемая в виде:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (2.7)$$

Предполагается, что функция  $x(t)$  такова, что  $X(f)$  существует. Функция времени  $x(t)$  определяется из  $X(f)$  в виде:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (2.8)$$

Функция  $X(f)$  и  $x(t)$  называется соответственно прямым и обратным преобразованием Фурье. Функция  $X(f)$  выражается через свои действительную и мнимую части в виде:

$$X(f) = \operatorname{Re}(X(f)) - i \operatorname{Im}(X(f)), \quad (2.9)$$

$$\operatorname{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \quad ; \quad \operatorname{Im}(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt, \quad (2.10)$$

где  $i$  - мнимая единица  $i^2 = -1$ .

На практике  $x(t)$  задается на интервале конечной длины  $T$ , так что  $X(f)$  оценивается по финитному (конечному) преобразованию Фурье.

$$X_t(f) = X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (2.11)$$

Такие финитные интегралы существуют всегда.

Ряд Фурье:

Ряд Фурье представляет периодическую функцию  $x(t)$  как сумма индивидуальных гармоник.

Функция  $x(t)$ , удовлетворяющая на интервале  $(0, T)$ , где  $T$  - период, условиям Дирихле:

а) всюду однозначна, конечна и кусочно-непрерывная;

б) имеет ограниченное число максимумов и минимумов; может быть представлена в виде ряда:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f t) \quad (2.12)$$

Частота  $f = 1/T$  называется фундаментальной (первой гармоникой). Коэффициенты Фурье равны:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f t) \cdot dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f t) \cdot dt, \quad (2.13)$$

Если косинус и синус представить в виде суммы экспонент в соответствии с формулами Эйлера, то можно перейти к представлению ряда (2.12) в комплексном, виде.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{i2\pi n f t} + e^{-i2\pi n f t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{i2\pi n f t} - e^{-i2\pi n f t}}{2i} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\omega t} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-i\omega t} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi nft} dt, \quad (2.15)$$

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i2\pi nft} dt, \quad (2.16)$$

и далее обозначив  $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  ;  $C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$  получится ряд

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{Re}(C_n) = \frac{1}{2} a_n \quad ; \quad \operatorname{Re}(C_{-n}) = \frac{1}{2} a_n, \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Im}(C_n) = -\frac{1}{2} b_n \quad ; \quad \operatorname{Im}(C_{-n}) = \frac{1}{2} b_n, \quad (2.19)$$

В литературе большинство рассуждений осуществляется применительно к рядам, представленным в комплексном виде.

### Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть лабораторной работы.
2. Написать программу формирования гармонического сигнала вида:

$$x(n) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N}\right), \text{ где} \quad (2.20)$$

$N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 \dots$ ;

$n = 0 \div M$ .

$M$  принимает значения от  $K < N$  до  $2N$  с таким шагом, чтобы обеспечить на каждой четверти периода не менее 8 значений  $M$  и обязательно присутствовало значение  $M = N - 1$ . Значение  $K$  задается в соответствии с вариантом задания.

Для каждой реализации сигнала  $x(n)$  вычислить среднее квадратическое значение (СКЗ) по формулам:

а)

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M [x(i)]^2}, \quad (2.21)$$

б)

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M [x(i)]^2 - \left( \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M [x(i)] \right)^2}. \quad (2.22)$$

Для каждой реализации сигнала  $x(n)$  с помощью дискретного преобразования Фурье вычислить амплитуду сигнала. Считать, что  $M$  точек соответствуют одному периоду исследуемого сигнала.

Для каждого вычисления СКЗ определить погрешность вычисления СКЗ и амплитуды:

$$\Delta_{\text{выч}, \text{СКЗ}} = 0,707 - X_{СКЗ}, \quad (2.23)$$

$$\Delta_{\text{выч}, A} = 1 - A_{\text{выч}}. \quad (2.24)$$

Построить график зависимости погрешности от значения  $M$ .

3. Повторить пункт 2 для случая, когда

$$x(n) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N} + \varphi\right), \text{ где} \quad (2.25)$$

$\varphi$  - фаза, задается в соответствии с вариантом задания.

### Варианты заданий

Таблица 2

№ вар.	$K$	$\varphi$
1	$\frac{3N}{4}$	$\frac{\pi}{32}$
2	$\frac{N}{4}$	$\frac{\pi}{16}$
3	$\frac{3N}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
4	$\frac{N}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
5	$\frac{3N}{4}$	$\frac{\pi}{8}$
6	$\frac{N}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

**Лабораторная работа №3**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО**  
**ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

Цель работы – получить практические навыки применения дискретного преобразования Фурье для исследования спектральных характеристик сигналов.

**Теоретическая часть**

Когда дискретная последовательность имеет конечную длительность, т.е. имеет конечное число ненулевых значений, для исследования ее характеристик и обработки применяют дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

ДПФ есть преобразование Фурье конечной длительности, являющееся само по себе также последовательностью, а не непрерывной функцией, и соответствующее равноудаленным по частоте выборкам Фурье преобразования сигнала.

Пусть задана периодическая последовательность  $x(n)$  с периодом  $N$ , т.е.  $x(n) = x(n + mN)$  для всех целых  $m$ . Тогда можно представить  $x(n)$  рядом Фурье, т.е. суммой синусоидальных и косинусоидальных последовательностей или суммой комплексных экспоненциальных последовательностей с частотами, кратными основной частоте  $2\pi/N$  периодической последовательности. В противоположность рядам Фурье непрерывных периодических функций имеется  $N$  различных комплексных экспонент с периодом, равным целой части основного периода  $N$ .

Так как  $e^{\frac{i\pi 2nk}{N}}$  периодически по  $k$  с периодом  $N$ , и так как

$$e^{\frac{i2\pi 0}{N}} = e^{\frac{i2\pi N}{N}}, e^{\frac{i2\pi k}{N}} = e^{\frac{i2\pi(N+k)}{N}}, \quad (3.1)$$

и т.д., следовательно, множество  $N$  комплексных экспонент с  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  определяет все различные комплексные экспоненты с частотами, кратными  $2\pi/N$ . Поэтому представление периодической последовательности  $x(n)$  в виде ряда Фурье содержит только  $N$  этих комплексных экспонент:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2\pi i k n / N} \quad (3.2)$$

Обозначив  $W_N = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$ , получают выражения для прямого и обратного ДПФ.

$$X(R) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{Rn} \quad (3.7)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{R=0}^{N-1} X(R) W_N^{-Rn} \quad (3.8)$$



Выражения (3.7) и (3.8) показывают, что  $N$  комплексным отсчетам во временной области соответствует  $N$  комплексных отсчетов в частотной области.

Коэффициенты ряда Фурье  $X(R)$  можно рассматривать, как последовательность конечной длины, определяемую (3.7) для  $R = 0, \dots, N-1$ , и равную нулю при других  $R$ . Или как периодическую последовательность, определяемую для всех  $R$  выражением (3.7). Оба определения эквивалентны. Обычно рассматривают коэффициенты ряда Фурье  $X(R)$  как периодическую последовательность. В этом отношении существует дуальность между временной и частотной областями представления.

На практике в задачах анализа последовательностей обрабатываются не комплексные, а действительные величины. Поэтому ДПФ можно записать в специальном виде:

$$\operatorname{Re}(X(R)) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi nR}{N}\right), \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Im}(X(R)) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi nR}{N}\right), \text{ где} \quad (3.10)$$

$R = 0, 1, 2, \dots, M$ , тогда

$$x(n) = \sum_{R=0}^M \operatorname{Re}(X(R)) \cos\left(\frac{2\pi nR}{N}\right) + \operatorname{Im}(X(R)) \sin\left(\frac{2\pi nR}{N}\right), \quad (3.11)$$

где  $M = N/2$ , если  $N$  - четное и  $M = (N-1)/2$ , если  $N$  - нечетное. При этом:

$$\operatorname{Re}(X(R)) = \operatorname{Re}(X(-R)) \quad ; \quad \operatorname{Im}(X(R)) = -\operatorname{Im}(X(-R)). \quad (3.12)$$

Из приведенных выражений видно, что общее число составляющих действительной и мнимой частей частотной функции равно числу исходных данных временной функции.

При разработке алгоритма ДПФ стремятся максимально уменьшить время его реализации. Для этого зачастую используют табличный способ определения значений тригонометрических функций и выбирают значение  $N$  кратным степени двойки. При табличном способе вычисления значений тригонометрических функций предварительно рассчитывается массив значений синуса в соответствии с выражением

$$TSIN[I] = A \sin 2\pi \cdot I / N, \text{ где} \quad (3.13)$$

$I = 0, \dots, N-1$ ;

$TSIN$  - массив размерностью  $N$ ;

$A$  - амплитуда, в простейшем случае  $A=1$  или кратна степени 2.

Тогда вычисление значения  $\sin(2\pi nR/N)$  сводится к выбору из массива значения элемента с индексом равным  $nR$ . Значение косинуса для такого же аргумента находится в элементе массива с индексом, равным  $(nR + N/4) \bmod N$ .

Алгоритм ДПФ приведен на рис. 2. Входными данными в нем является номер анализируемой гармоники  $R$  и массив значений сигнала размерностью  $N$ . Выходным результатом является амплитуда действительной (Re) и мнимой (Im) частей  $R$ -ой гармоники. Если значение  $N$  кратно степени двойки, то операцию взятия модуля можно заменить операцией поразрядного "и" значения индекса с маской вида  $00000111...n$ , где число двоичных единиц равно  $l = \log_2 N$ , а операция деления может быть заменена операцией сдвига на  $l$  разрядов вправо.

Для ускорения выполнения алгоритма зачастую используют при выполнении операций целочисленную арифметику. Однако при накоплении сумм могут возникать переполнения, поэтому для их хранения приходится использовать длинные слова. Оценить число двоичных разрядов, необходимое для накопления сумм, можно с помощью выражения:

$$l_{\Sigma} = l_g + l_i + l_n + 1, \text{ где} \quad (3.14)$$

$l_{\Sigma}$  - необходимое число двоичных разрядов;

$l_g$  - число двоичных разрядов для представления исходных данных без учета знакового разряда;

$l_i$  - число двоичных разрядов для хранения данных в таблице синуса без учета знакового разряда.

$$l_i = \begin{cases} \log_2 A & , \text{если } A \text{ кратно степени двойки} \\ \text{int}(\log_2 A + 0,5) & , \text{если } A \text{ не кратно степени двойки} \end{cases}, \quad (3.15)$$

$l_n = \log_2 N$ , где  $N$  - число поступивших для обработки данных.

Следует отметить, что в силу симметрии синуса таблица для его хранения может быть ограничена половиной и даже четвертью периода. Однако при этом несколько усложняется алгоритм выбора нужного значения из таблицы.

Если в формуле (3.7) произвести перестановку членов и ввести масштабный коэффициент, ее можно применить для вычисления обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ). Это позволяет использовать один алгоритм для вычисления обоих преобразований.

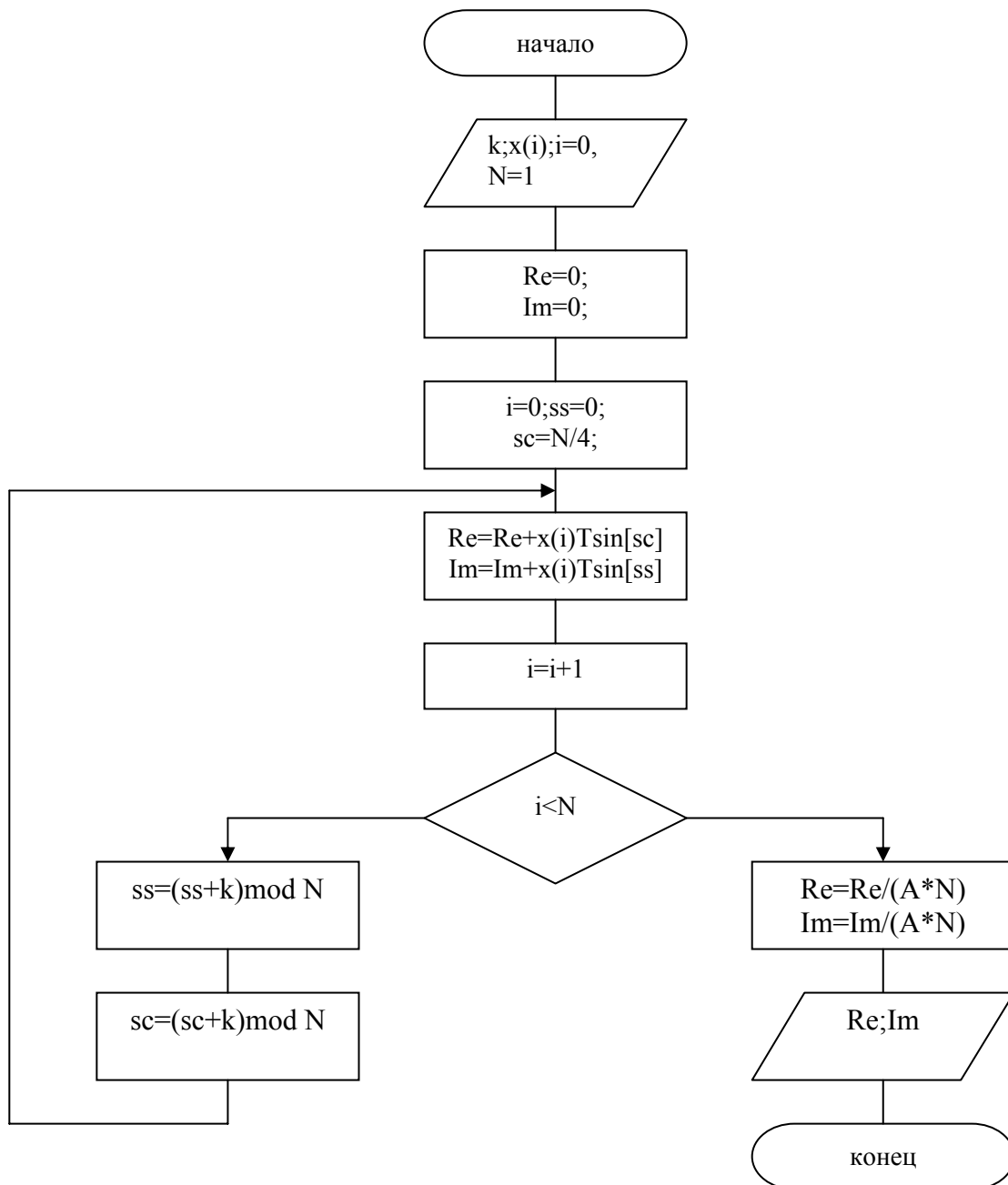


Рис. 2 - Алгоритм ДПФ

### Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть работы и разделы 3,4,5 учебного пособия по курсу
2. Обработка гармонических сигналов
  - а) Разработать функцию для вычисления дискретного преобразования Фурье, реализующую следующие вычисления:

$$A_{cj} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cos\left(\frac{2\pi j i}{N}\right); \quad (3.16)$$

$$A_{sj} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \sin\left(\frac{2\pi j i}{N}\right); \quad (3.17)$$

$$A_j = \sqrt{A_{cj}^2 + A_{sj}^2}; \quad (3.18)$$

$$\varphi_j = \arctg\left(\frac{A_{sj}}{A_{cj}}\right), \quad (3.19)$$

Входные данные:

- массив данных  $x(i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ;
- размерность массива данных  $N$ ;
- номер гармоники  $j$ , для которой производятся вычисления.

Выходные параметры для функции:

- амплитуда косинусной составляющей  $A_{cj}$ ;
- амплитуда синусной составляющей  $A_{sj}$ ;
- амплитуда гармоники  $A_j$ ;
- начальная фаза гармоники  $\varphi_j$ ;

Для вычисления  $\sin$  и  $\cos$  использовать таблицу.

В соответствии с вариантом задания сформировать тестовые сигналы (см. Таблицу 3). Для каждого из тестовых сигналов построить амплитудный и фазовый спектры.

б) Восстановить исходный сигнал по спектру:

$$y(i) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} A_j \cos\left(\frac{2\pi j i}{N} - \varphi_j\right), \quad (3.20)$$

где  $i = 0, \dots, N-1$ .

Сравнить сигналы  $x(i)$  и  $y(i)$ .

### 3. Обработка полигармонических сигналов

а) Сформировать полигармонический сигнал

$$x(i) = \sum_{j=1}^{30} B_j \cos\left(\frac{2\pi j i}{N} - \varphi_j\right), \quad (3.21)$$

где  $N = 128, 256, 512, 1024, \dots$ ;

$B_j$  - амплитуда  $j$ -ой гармоники выбирается случайным образом из множества значений в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 3);

$\varphi_j$  - начальная фаза  $j$ -ой гармоники выбирается случайным образом из множества значений в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 3).

Для сформированного сигнала вычислить амплитудный и фазовый спектр сигнала  $A_j, \varphi_j, j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$  ;

б) Восстановить исходный сигнал по спектру

$$y(i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} A_j \cos\left(\frac{2\pi j i}{N} - \varphi_j\right), \quad (3.22)$$

Сравнить исходный и восстановленный сигналы.

в) Восстановить исследуемый сигнал по спектру без учета начальных фаз.

$$y(i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} A_j \cos\left(\frac{2\pi j i}{N}\right), \quad (3.23)$$

Сравнить исходный и восстановленный сигналы.

4. Разработать программную функцию для реализации быстрого преобразования Фурье. Проверить ее работоспособность при обработке полигармонических сигналов.

5. Реализовать цифровую фильтрацию сигналов (НЧ-фильтр, ВЧ-фильтр, полосовой фильтр) на основе применения прямого и обратного преобразования Фурье и удаления ненужных спектральных составляющих. Исследовать модельные и реальные сигналы с помощью разработанных функций.

## Варианты заданий

Таблица 3.

№ вар.	Тестовый сигнал	Значения для выбо- ра амплитуд	Значения для выбо- ра нач. фаз
1	$x(i) = 10 \cos\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$	$\{1,3,5,8,10,12,16\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
2	$x(i) = 10 \cos\left(\frac{2\pi i}{N} - \frac{\pi}{2}\right)$	$\{1,2,5,7,9,13,18\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
3	$x(i) = 20 \cos\left(\frac{2\pi 10i}{N}\right)$	$\{1,3,4,10,11,14,17\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
4	$x(i) = 100 \cos\left(\frac{2\pi 20i}{N} - \frac{\pi}{4}\right)$	$\{2,3,5,9,10,12,15\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
5	$x(i) = 30 \cos\left(\frac{2\pi i}{N} - \frac{3\pi}{4}\right)$	$\{3,5,6,8,10,13,16\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
6	$x(i) = 50 \cos\left(\frac{2\pi i}{N} - \frac{\pi}{3}\right)$	$\{1,5,7,8,9,10,17\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$

## Лабораторная работа №4

### ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ СГЛАЖИВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Цель работы – исследовать применение алгоритмов скользящего усреднения, сглаживания параболой четвертой степени, медианной фильтрации для обработки

#### Теоретическая часть

При разработке способов определения параметров физических процессов, медленно изменяющихся во времени, важной задачей является устранение влияния шумовых эффектов или случайных помех, которые накладываются на обрабатываемый сигнал, получаемый на выходе первичного преобразователя.

Для устранения такого эффекта можно применить сглаживание данных. Одним из наиболее простых способов такого сглаживания является арифметическое усреднение. При его применении каждое  $i$ -ое значение дискретной функции (обрабатываемого массива данных) вычисляется в соответствии с выражением:

$$x_i = \frac{1}{K} \sum_{j=i-m}^{j=i+m} x_j, \quad (4.1)$$

где  $K$  - количество точек (отсчетов) для арифметического усреднения (нечетное целое число);

$x_j$  -  $j$ -ое значение функции до обработки;

$$m = \frac{K - 1}{2}.$$

Известны и другие, достаточно эффективные способы сглаживания, например, параболой второй степени по пяти, семи, девяти и одиннадцати точкам в соответствии с выражениями:

$$x_i = \frac{1}{35} (-3x_{i-2} + 12x_{i-1} + 17x_i + 12x_{i+1} - 3x_{i+2}); \quad (4.2)$$

$$x_i = \frac{1}{21} (-2x_{i-3} + 3x_{i-2} + 6x_{i-1} + 7x_i + 6x_{i+1} + 3x_{i+2} - 2x_{i+3}); \quad (4.3)$$

$$x_i = \frac{1}{231} (-21x_{i-4} + 14x_{i-3} + 39x_{i-2} + 54x_{i-1} + 59x_i + 54x_{i+1} + 39x_{i+2} + 14x_{i+3} - 21x_{i+4}); \quad (4.4)$$

$$x_i = \frac{1}{429}(-36x_{i-5} + 9x_{i-4} + 44x_{i-3} + 69x_{i-2} + 84x_{i-1} + 89x_i + \\ + 84x_{i+1} + 69x_{i+2} + 44x_{i+3} + 9x_{i+4} - 36x_{i+5}) ; \quad (4.5)$$

или параболами четвертой степени по семи, девяти, одиннадцати и тринадцати точкам:

$$x_i = \frac{1}{231}(5x_{i-3} - 30x_{i-2} + 75x_{i-1} + 131x_i + 75x_{i+1} - 30x_{i+2} + 5x_{i+3}) ; \quad (4.6)$$

$$x_i = \frac{1}{429}(15x_{i-4} - 55x_{i-3} + 30x_{i-2} + 135x_{i-1} + 179x_i + \\ + 135x_{i+1} + 30x_{i+2} - 55x_{i+3} + 15x_{i+4}) \quad (4.7)$$

$$x_i = \frac{1}{429}(18x_{i-5} - 45x_{i-4} - 10x_{i-3} + 60x_{i-2} + 120x_{i-1} + 143x_i + \\ + 120x_{i+1} + 60x_{i+2} - 10x_{i+3} - 45x_{i+4} + 18x_{i+5}) \quad (4.8)$$

$$x_i = \frac{1}{2431}(110x_{i-6} - 198x_{i-5} - 135x_{i-4} + 110x_{i-3} + 390x_{i-2} + 600x_{i-1} + 677x_i + \\ + 600x_{i+1} + 390x_{i+2} + 110x_{i+3} - 135x_{i+4} - 198x_{i+5} + 110x_{i+6}) \quad (4.9)$$

В практических применениях дают хорошие результаты другие эффективные способы, например, 15-точечное сглаживание Спенсера:

$$x_i = \frac{1}{320}(-3x_{i-7} - 6x_{i-6} - 5x_{i-5} + 3x_{i-4} + 21x_{i-3} + 46x_{i-2} + 67x_{i-1} + 74x_i + \\ - 3x_{i+7} - 6x_{i+6} - 5x_{i+5} + 3x_{i+4} + 21x_{i+3} + 46x_{i+2} + 67x_{i+1}) . \quad (4.10)$$

Также достаточно эффективно для сглаживания данных применение, так называемых, эвристических алгоритмов.

Одним из них является медианная фильтрация. В ходе ее реализации в скользящем временном окне размерностью  $N$ , где  $N$  - целое нечетное число, центральный элемент заменяется средним элементом последовательности, представляющей собой упорядоченные, в порядке возрастания значений, элементы массива данных сглаживаемого сигнала, попавшие во временное окно. Достоинством медианной фильтрации является способность удалять импульсные помехи, длительность которых не превышает  $N/2$ , практически без искажения плавно изменяющихся сигналов. Данный способ подавления шумов не имеет строгого математического обоснования, однако простота вычислений и эффективность получаемых результатов обусловили широкое его распространение.

Другим интересным алгоритмом сглаживания является медианное усреднение. Его сущность состоит в следующем. В скользящем временном окне, размерности  $N$



( $N$  - целое нечетное число), элементы массива данных упорядочиваются в порядке возрастания, а затем из упорядоченной последовательности удаляется по  $K$  первых и последних элементов ( $K < N$ ). Центральный элемент временного окна из последовательности сглаживаемых данных заменяется значением, вычисляемым как:

$$x_i = \frac{1}{N - 2K} \sum_{m=i-\frac{N-1}{2}+K}^{i+\frac{N-1}{2}-K} x_m, \quad (4.11)$$

Этот способ позволяет подавить импульсные и радиочастотные помехи, а также достигнуть хорошего сглаживания сигналов.

### Порядок выполнения работы

1. Сформировать сигнал для исследований:

$$x(i) = B_1 \sin\left(\frac{2\pi i}{N}\right) + \sum_{j=50}^{70} (-1)^{\xi_j} B_2 \sin\left(\frac{2\pi i j}{N}\right), \quad (4.12)$$

где  $B_1 \gg B_2$ ;

$\xi_j$  - случайное число, принимающее значения 0 или 1;

$N = 512; 1024; 2048$ ;

Построить график сформированного сигнала.

2. Вычислить спектр сформированного сигнала.

3. Провести сглаживание сигнала  $x(i)$  следующими способами:

- скользящим усреднением с окном сглаживания в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 4);
- параболой четвертой степени;
- медианной фильтрацией с размером окна в соответствии с вариантом задания (см. Таблицу 4).

Для каждого случая, после выполнения сглаживания, выводить в виде графика форму сигнала.

4. Вычислить спектр сглаженного сигнала.

## Варианты заданий

Таблица 4

№ вар.	Размер окна скользящего усреднения	Размер окна ме- дианной фильт- рации
1	3	5
2	5	7
3	7	9
4	9	5
5	3	7
6	5	9

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2005. - 604 с.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. - М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. - 656 с.
3. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева. СПб.: БХВ-Петербург, 2005, - 768 с.
4. Васильев В.П., Муро Э.Л., Смольский С.М. Основы теории и расчета цифровых фильтров: учеб. пособие для высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 272 с.
5. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. – 992 с.
6. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. - М.: Радио и связь, 1985. - 312 с.
7. Оппенгейм А.В. Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. - М.: Связь, 1979. -416 с.
8. Каппелини В. И др. Цифровые фильтры и их применение/ В. Каппелини, А.Дж. Константи́нидис, П. Эмилиани. - М.: Энергоатомиздат, 1983 - 360 с.
9. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. Ч.2. -М.: Мир, 1988. - 360 с.
10. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. - 540 с.
11. Рабинер Л.Р., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. -М.: Мир, 1978
12. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры.-М.: Сов. Радио, 1980. -224 с.
13. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. - М.: СОЛОН-Р,-2002. 448 с.
14. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты.- М.: Мир, 2001. - 412 с.
15. Леусенко А.Е., Бранцевич П.Ю. Учебно-методическое пособие по курсу «Обработка экспериментальных данных на ЭВМ». - Мн.: МРТИ, 1992. -120 с.

Св. план , поз.

Учебное издание

**Алексеев Игорь Геннадиевич**  
**Бранцевич Петр Юльянович**  
**Костюк Елена Сергеевна**

## ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Лабораторный практикум  
для студентов специальности  
«Программное обеспечение информационных технологий»  
дневной формы обучения