XXXXXX(XXXXX) 第52卷 第4期 2016年7月

Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)

doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.076

**Lagrange**方程应用于连续介质力学

XXX1 XXX2,†

1. 常州XXXXXXXXX学院, 常州213164; 2. 哈尔XXXXXXXXXXXX学院, 哈尔滨 150001;   
† 通信作者, E-mail: lianglifu@hrbeu.edu.cn

摘要如何将XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX。结果表明, 借鉴变积分学来解决将Lagrange方程应用于连续介质力学的问题是可行的。

关键词XXXXX; XXX; XX; XXXXXXX; XXXXXXXX

中图分类号O313

Lagrange Equation Applied to Continuum Mechanics

XXX1, XXX2,†

1. School XXXXXX, XXX, Changzhou 213164; 2. XXXXXX, XXX, Harbin 150001; † Corresponding author, E-mail: XXX@hrbeu.edu.cn

**Abstract** How to apply the Lagrange equation to the continuous medium mechanics has been a theoretical issue of academic circles. XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX**X**XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX. The result shows that it is a feasible way to solve the problem of the application of Lagrange equation to the mechanics of continuous media by using the variational integral calculus.

**Key words** cXX; XX; XX; XXX; XXXs

1755年Lagrange的著作《Mecanique Analytique》(分析力学)问世[1](1788 年首次正式出版), XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX[XX](http://baike.baidu.com/view/14394.htm)X[X](http://baike.baidu.com/view/14447.htm)XXXXXX[X](http://baike.baidu.com/view/5767.htm)X[XX](http://baike.baidu.com/view/36869.htm)XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX, 从而形成Lagrange体系和Hamilton体系。

如何XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX的研究课题。

我国 1958 年出版的第一部分析力学专著《分析动力学》[4], XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX状态空间 Lagrange函数和运动方程[19–20]以及关于 Birkhoff 方程和Lagrange方程分析力学问题[21]。

在一定的意义上, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX微分和导数在变分学中有了对应的概念——变积、变分和变导, 初步地将变分学扩充为变积分学。

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX, 并且给出相关的算例, 对理论研究进行验证。

1 Lagrange方程中的导数的性质

首先, 明确XX的概念。设有XXX形式的泛函为

, (1)

边XXXX为

, (2)

其中, XXXXXXX, XXXX。

对式(1)进行XXXX可得

。 (3)

应用XXXX:

。 (4)

将式(4)代入式(3), 考虑到XXXX(式(2)), 整理得

。 (5)

由于的XXX, 式(5)可以XX为

。 (6)

在微分学中, XXXXX表示为, XXXXXX表示为, 微商表示为, 又称导数。在变分学中, 泛函的变分表示为, XXXX的变分表示为, 变商表示为, 又称变导。

经典XXXXX中的Lagrange方程表示为

, (7)

其中, 为XXXX, 一般XXXXX中均将其处理为XXXXX阵:

 (8)

在变分学中, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX, 对可变函数的求导则为变积分中的变导。

在 Lagrange 方程中, 有XXXXXX : , , 和。XXXX, XXXXXXXXX, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX的导数。

严格地说, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX到目前分析力学界的习惯, 可仍然沿用原来的符号: 变分符号用, 变导符号用。

Lagrange XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX例如, 在文献[1]中, Lagrange 方程表示为

。 (9)

需要说明,XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX, 而没有应用求导符号。

如果将表示为, 将表示为, 则式(9)可以表示为

。 (10)

按照目前的习惯, 将变导表示为, 则式(10)就变换为式(7)。

变积分学XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX出来。

**2 Lagrange**方程应用于线性弹性动力学

**2.1** 一类变量 **Lagrange**方程应用于线性弹性动力学

线性弹性动力学的动能表示为

。 (11)

线性弹性动力学的XXXX为





 (12)

其中, ***X***XXXXXXXXX***X***XXXXXXX***X***XXXXXXX***X***XXXXXXX***X***XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX**XXXXXXX*X*XXXXXX, *XX*XXXXXXXX*X*XXXXXXXXXXXXXXXXXXX*X*XXX为外力势能。

位移边界条件为

。 (13)

LagrangeXXXX为

。 (14)

推导计算LagrangeXXXXXX:

=0, (15)

。 (16)

势XXXXXXXXXX杂:



 (17)



。 (18)

由于



, (19)

应用X定理:

 (20)

将式(19)和(20)代入式(18), 则得



。 (21)

将XXXXXX方程, 可得

 (22)

去掉XXXXXXXXXXXX方程:

, (23)

, (24)

先决条件为式(13)。

**2.2** 两类变量**Lagrange**方程应用于线性弹性动力学

两类变量XXX 表示为

, (25)

弹性XXXXXXXX为

, (26)

弹性动力学的势能表示为

 (27)

其中, *******X*XXXXXXX***XX***XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX。先决条件为

, (28)

, (29)

。 (30)

推导计算XXX中的各项:

=0, (31)

。 (32)

势能变XXXXXXXX杂:

, (33)



, (34)

考虑到

, (35)

(在上), (36)

利用XXXXXXXXX性, 则有

。 (37)

应用XXXXXXX, 并考虑到式(36), 可得



(38)

将式(38)代入式(37), 则得

 (39)

将相关各式代入Lagrange方程, 可得



, (40)

去掉积分号, XXXXXXXX程:

, (41)

, (42)

先决条件为式(28), (29)和(30)。

2.3 算例

弹性平板XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX。这里讨论线性弹性平板的动力学问题。

弹性平板的动能表示为

。 (43)

弹性平板的势能包括两部分。第一部分为板的应变能:



; (44)

第二部分为横向分布载荷的势能:

=。 (45)

总势能为





。 (46)

设为四边简支矩形板, 位移边界条件为

, , , , (47)

力学边界条件为

 (48)

其中, *w*为板的挠度, *D*为板的抗弯刚度, *h*为板的厚度, ** 为泊松比, **为质量密度, *q* 为分布载荷。

Lagrange方程表示为

。 (49)

推导计算Lagrange方程中的各项:

, (50)

。 (51)

势能的变导项的推导比较复杂:

 (52)

 (53)

由于





 (54)

应用Green定理:

, (55)

, (56)

, (57)

 (58)



(59)

将式(54)～(59)代入式(53), 考虑到式(47)和(48), 则

。 (60)

将相关各式代入Lagrange方程, 可得

。 (61)

去掉积分号, 可得弹性动力学方程：

。 (62)

位移边界条件为式(47), XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX变导运算获得。

**3 Lagrange**方程应用于非线性弹性动力学

**3.1** 一类变量**Lagrange**方程应用于非线性弹性动力学

非线性弹性动力学的动能表示为

, (63)

非线性弹性动力学的势能表示为

 (64)

其中, 为弹性体的应变能; 为外力势能。

位移边界条件为

。 (65)

Lagrange方程表示为

。 (66)

推导计算Lagrange方程中的各项:

=0 , (67)

。 (68)

势能变导项的推导比较复杂:

 (69)

 (70)

由于

, (71)

应用Green定理, 并考虑到式(65), 可得

 (72)

将式(71)和(72)代入式(70), 则得

 (73)

将相关各式代入Lagrange方程, 可得

 (74)

去掉积分号, 可得弹性动力学方程:

(75)

 (76)

先决条件为式(65)。

**3.2** 两类变量**Lagrange**方程应用于非线性弹性动力学

非线性弹性动力学的动能表示为

。 (77)

非线性弹性动力学的势能表示为

, (78)

其中, 为弹性体的应变能, 为外力势能。先决条件为

 (79)

 (80)

 (81)

其中, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX******XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*X*XXXXXXX*XX*XXXXXX, *V*

为空间体积域。

Lagrange方程表示为

。 (82)

推导计算Lagrange方程中的各项:

=0, (83)

。 (84)

势能变导项的推导较为复杂:

, (85)



。 (86)

考虑到

, (87)

则有



。 (88)

应用Green定理, 并且考虑到

 (在上), (89)

可得

 (90)

将式(88)和(90)代入式(86), 则得



。 (91)

将相关各式代入Lagrange方程, 可得

 (92)

去掉积分号, 可得XXXXXX方程:

 (93)

 (94)

3.3 算例

非线性XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX性Bernoulli直梁的动力学问题。

非线性弹性直梁的动能表示为

。 (95)

非线性弹性直梁的势能包括三部分。第一部分为梁的应变能:

。 (96)

第二部分是轴向拉力的势能, 包括拉伸应变能和拉弯耦合势能:

, (97)

。 (98)

第三部分为XXXXXX的势能:

。 (99)

总势能为

 (100)

其中, *X*XXXXXXX*X*XXXXXXXXX*X*XXXXXXXXX*X*XXXXXXXXX*X*XXXXXXXXXXX**XXXXXXX *q* 为分布载荷。

设为悬臂梁, 位移边界条件为

, (101)

Lagrange方程表示为

, (102)

, (103)

推导计算Lagrange方程中的各项:

, (104)

, (105)

, (106)

。 (107)

势能的变导项的推导比较复杂:



, (108)



。 (109)

式(108)和(109)可以进一步表示为



, (110)



(111)

应用Green定理:



 (112)



 (113)



 (114)

 (115)



 (116)

将式(112)~(116)代入式(110)和(111), 根据边界条件(式(101)), 并且考虑到在处,  和取定值, 可得

  (117)



。 (118)

将相关各式代入Lagrange方程, 可得



 (119)



 (120)

去掉积分号, 可得弹性直梁的动力学方程和自然边界条件:



(121)

 (122)

 (123)

 (124)

。 (125)

式(121)和(122)是域中的控制方程, 式(123)~(125)是力的边界条件。

参考文献

1. Lagrange J L. Mécanique analytique. Paris: Ve Courcier, 1811
2. Hamilton W R. On a general method in dynamics: PartⅠ. Philosophical Transaction of the Royal Society, 1834: 247–308
3. Hamilton W R. On a general method in dynamics: Part Ⅱ. Philosophical Transaction of the Royal Society, 1835: 95–144
4. 汪家訸. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1958
5. Goldstein H. Classical mechanics. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 1980
6. 赵俊伟, 李雪锋, 陈国强. 基于Lagrange方法的3-PRS 并联机构动力学分析. 机械设计与研究, 2015, 31(2): 1–5
7. 林良明, 吴俊. 用 Lagrange 方程描述假手机构动力学的研究. 中国生物医学工程学报, 1989, 8(1): 1–8
8. 王启明, 汪劲松, 刘辛军, 等. 二移动自由度并联操作臂的动力学建模. [清华大学学报: 自然科学版](http://libvip.hrbeu.edu.cn/QK/93884X/index.asp?CSID=%7b6513C23C-94C0-41D8-8A17-8DC92C55BE46%7d), 2002, 42(11): 1469–1472
9. 孙伟, 汪博, 鲁明, 等. 基于拉格朗日方程的直线滚动导轨系统解析建模. [计算机集成制造系统](http://libvip.hrbeu.edu.cn/QK/97749X/index.asp?CSID=%7b6513C23C-94C0-41D8-8A17-8DC92C55BE46%7d), 2012, 18(4): 781–786
10. 卢长福, 傅鹏, 黄诚, 等. Lagrange方程在振动系统中的应用. 江西科学, 2013, 3(2): 148–150
11. 赵晓兵, 方秦. Lagrange 方程在防护工程中的应用及其相关的力学问题. 防护工程, 2000(2): 28–32
12. 靳希, 鲁炜. Lagrange 方程应用于电系统和机电系统运动分析. 上海电力学院学报, 2003, 19(4): 1–4
13. 颜振珏. 非惯性参照系中的 Lagrange 方程. 黔南民族师范学院学报, 2004, 24(6): 8–11
14. 廖旭. 非惯性系中的 Lagrange 方程及其应用. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(B07): 122–124
15. 和兴锁, 宋明, 邓峰岩. 非惯性系下考虑剪切变形的柔性梁的动力学建模. 物理学报, 2011, 60(4): 323–328
16. 沈惠川. 弹性力学的 Lagrange 形式: 用Routh方法建立弹性有限变形问题的基本方程. 数学物理学报, 1998, 18(1): 78–88
17. 方刚, 张斌. 弹性介质的 Lagrange 动力学与地震波方程. [物理学报](http://libvip.hrbeu.edu.cn/QK/94684X/index.asp?CSID=%7b6513C23C-94C0-41D8-8A17-8DC92C55BE46%7d), 2013, 62(15): 248–253
18. 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 精确Cosserat弹性杆动力学的分析力学方法. [物理学报](http://libvip.hrbeu.edu.cn/QK/94684X/index.asp?CSID=%7b6513C23C-94C0-41D8-8A17-8DC92C55BE46%7d), 2013, (4): 312–318
19. 马善钧, 徐学翔, 黄沛天, 等. 完整系统三阶Lagrange 方程的一种推导与讨论. 物理学报, 2004, 53(11): 3648–3651
20. 丁光涛. 状态空间Lagrange函数和运动方程. 中国科学: G辑, 2009, 39(6): 813–820
21. 梅凤翔. 分析力学(下卷). 北京: 北京理工大学出版社, 2013
22. Liang Lifu, Shi Zhifei. On the inverse problem in calculus of variations. Applied Mathematics and Mechanics, 1994, 15(9): 815–830
23. Liang Lifu, Hu Haichang. Generalized variational principle of three kinds of variables in general mechanics. Science in China: Series A, 2001, 44(6): 770–776
24. 梁立孚. 变分原理及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2005
25. 陈滨. 分析动力学. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2010