北京大学学报(自然科学版) 第52卷 第4期 2016年7月

Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)

doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.073

弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟

XX1,† XX2

1. XXXXXXXXXX, XX XXXXXX; 2. XXXXXXXXXXXX, XX XXXXXX;   
† E-mail: XXXXXXXX

摘要研究弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟。X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X。Schrödinger 粒子波动比拟建立了波函数的量子态与弹性细杆的几何构型的对应关系, 给予波函数的量子态直观的几何图像, 为弹性细杆方程的求解提供了新的途径。

关键词弹性细杆平衡微分方程; 动力学比拟; 薛定谔方程

中图分类号O316

Dynamics Analogy of Thin Elastic Rod and   
Schrödinger Particle Wave

X X1,†, X X2

1. XXXXXX, XXX, XX XXXXXX;   
2. xxxx, xxxx, xx xxxxxx;   
† E-mail: xxxxxx

**错误！未定义书签。**

国家自然科学基金(11262019, 11372195)资助

收稿日期: 20151012; 修回日期: 20160203; 网络出版日期: 20160714

**Abstract** The Schrödinger analogy of thin elatic rod is studied. Compared with the Kirchhoff dynamics analogy, the Schrödinger analogy is proposed. X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X . Schrödinger analogy reveals the relations between the quantum state of wave function and the geometry configuration of elastic rod, and gives a new way to solve the Kirchhoff equation.

**Key words** stationary differential equation of thin elastic rod; dynamics analogy; Schrödinger equation

Kirchhoff 动力学X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X重新引起重视。

由于X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 带来困难。

大部分的研究利用数值计算求其数值解[56]。X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X XX 。Wang 等[10]利用对称性得出弹性细杆的一些守恒量。

关于非线性薛定谔方程的精确解的讨论已有许多卓越的工作[11]。X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X。我们将这种等同条件称为 Schrödinger粒子波动比拟。

本文利用X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 提供新的途径。

1 弹性细杆平衡微分方程

研究X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 矢径为

,

*s*表示X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X , 满足

。

弹性细杆X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X, 定义[5]为

, (1)

其中,

, (2)

和分别为X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X表示[5]为

 (3)

其中, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 线弹性本构方程:

 (4)

其中, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 为原始弯扭度。

2 Kirchhoff弹性细杆的曲率方程

假设X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 复曲率形式[9]:

 (5)

其中,

,

,



为积分常量, 为泊松比,

。

**10, **20, **30表示常扭率。

虽然文献[8‒9]给出弹性细杆方程一类非线性薛定谔方程, 但未做进一步讨论, 而是给出用曲率表示的 Euler-Lagrange 方程。X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 。现在将表示为如下复指数形式:

, (6)

代入方程(5)中, 得到

, (7)

其中,

。

由式(6)得到

,

代入X X X X X X X X X 得到挠率:

, (8)

即方程(7)表示X X X X X X X 弹性杆。

3 Kirchhoff 弹性细杆曲率方程与薛定谔方程的比拟

3.1 一维非线性薛定谔方程的 Jacobi 椭圆函数解

一维非线性薛定谔方程X X X X X X X为

, (9)

其中, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 。假设方程的解有形式

, (10)

其中, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X, 得到

, (11)

其中,

。

式(11)称为X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X Jacobi 椭圆函数解[11]:

, (12)

其中, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 椭圆函数的模。

3.2 Kirchhoff 弹性细杆曲率方程的Schrö-dinger粒子波动比拟与精确解

忽略X X X, 方程(7)变为

。 (13)

在满足条件

 (14)

的情况下, X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X, 见表1。

表1 Schrödinger粒子波动比拟:XXXXXXXXXXXXXX

Tabel 1 Schrödinger partical fluctuation anology: Schrödinger equation and curvature equation of thin elatic rod

|  |  |
| --- | --- |
| 薛定谔方程 | 弹性细杆方程 |
| 薛定谔方程的坐标算符*x* | 弹性细杆方程的弧坐标*s* |
| 定态波函数 | 弹性细杆的曲率**(*s*)代表弹性细杆中心线的弯曲程度随弧坐标的变化规律,  *M*1和表示杆截面作用力的主矩, 其中*A*和*B*为  绕*x*轴和*y*轴的抗弯刚度 |
| 薛定谔方程波函数的系数 | 弹性细杆方程曲率的系数*c* |
| 薛定谔方程非线性项系数 | 弹性细杆方程非线性项系数 |
| 波函数的相位 | 弹性细杆截面相对Frenet坐标系的扭角**(*s*)或 |

在Schrödinger 粒子波动X X X X X X X X X Jacobi椭圆函数解:

。 (15)

根据 Jacobi 椭圆正弦函数X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X弹性杆的曲率:

。(16)

4 弹性细杆的三维几何图像

4.1 精确解对应的几何图像

给出弹性细杆的弯扭度解之后, 就可确定挠性线的位形和截面的姿态。X X X X X X X X X X X X X X X X X, 令

162w067.tif

图1 初始曲率******(0)=0.83, 挠率****** =0.13时X X X X X X X X X X X X

Fig. 1 Space configuration of thin elastic rod corres-ponding to solution (16) with initial curverture **(0)=0.83 and torsion **=0.13

,

可以得到

。

X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X。由Schrödinger粒子波动比拟, 图1与粒子波函数初值为** (*x*)|*x*=0=0.83的波动状态对应。

4.2 弹性细杆数值模拟

引入X X X X X X X X X X :

,

,



以及无量纲参数

,

可得到X X X X X X X X X X X X X X X X X令

,

方程曲率X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X波动状态。

162w068.tif

图2 初始曲率X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X

Fig. 2 Space configuration of thin elastic rod with the initial curvature **(0)=0.20, **′(0)=0.20 and torsion **(0)=0.21

5 结论

本文通过X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X 比拟关系。

通过 Schrödinger 粒子波动比拟关系, 给出 Kir-chhoff 弹性细杆的曲率随弧坐标变化的 Jacobi 椭圆函数形式, 从而实现将非线性薛定谔方程解移植到弹性细杆力学中。X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X ; 同时, 如何将弹性细杆解引入薛定谔方程也值得进一步研究。

本文画出X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X几何位形。

Schrödinger 粒子波动比拟X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X提供了新的途径。

参考文献

1. Benham C J, Mielke S P. DNA mechamics. Annu Rev Biomed Eng, 2005, 7(1): 21‒53
2. 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础. 北京: 清华大学出版社, Springer 出版社, 2006
3. Liu Y Z, Sheng L W. Stability and vibration of a helical rod with circular cross section in a viscous medium. Chin Phys, 2007, 16(4): 891‒896
4. 薛纭, 刘延柱. Kirchhoff 弹性直杆在力螺旋作用下的稳定性. 物理学报, 2009, 58(10): 6737‒6742
5. Klapper I. Biological applications of dynamics of twisted elastic rods. J Computational Phys, 1996, 125:325‒337
6. 黄磊, 包光伟, 刘延柱. 弹性细杆弯曲的 Kirchhoff方程的违约校正求解. 物理学报, 2005, 54(6): 2457‒2462
7. Shi Y M, Hearst J E. The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrodinger equation, and DNA supercoi-ling. J Chem Phys, 1994, 101: 5186‒5200
8. Shi Y M, Borovik A E, Hearst J E. Elastic rod model incorporation shear and extension, generalized nonlinear Schrodinger equations, and novel closed-form solutions for supercoiled DNA. J Chem Phys, 1995, 103: 3166‒3183
9. Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q. The Schrödinger equation for a Kirchhoff elastic rod with noncircular cross section. Chin Phys, 2004, 13(10): 794‒797
10. Wang P, Xue Y, Liu Y L. Mei symmetry and conserved quantities in Kirchhoff thin elastic rod statics. Chin Phys B, 2012, 21: 070203‒070206
11. 刘适式, 刘适达. 物理学中的非线性方程. 北京: 北京大学出版社, 2000