Programación Dynamica (DP)

Por Ariel Parra.

[Γα=Ω5]

Definición

La programación dinámica es una técnica que combina la exactitud de la búsqueda completa y la eficiencia de los algoritmos voraces (**Greedy**). La programación dinámica puede aplicarse si el problema se puede dividir en subproblemas superpuestos que pueden resolverse de forma independiente (**Divide & Conquer**).

La programación dinámica tiene dos usos principales:

- **Sub-estructura óptima**. Un problema tiene sub-estructura óptima cuando la solución óptima a un problema se puede componer a partir de soluciones óptimas de sus sub-problemas.
- **Superposición de Problemas**. El cálculo de la solución óptima implica resolver muchas veces un mismo sub-problema. La cantidad de sub-problemas es "pequeña".

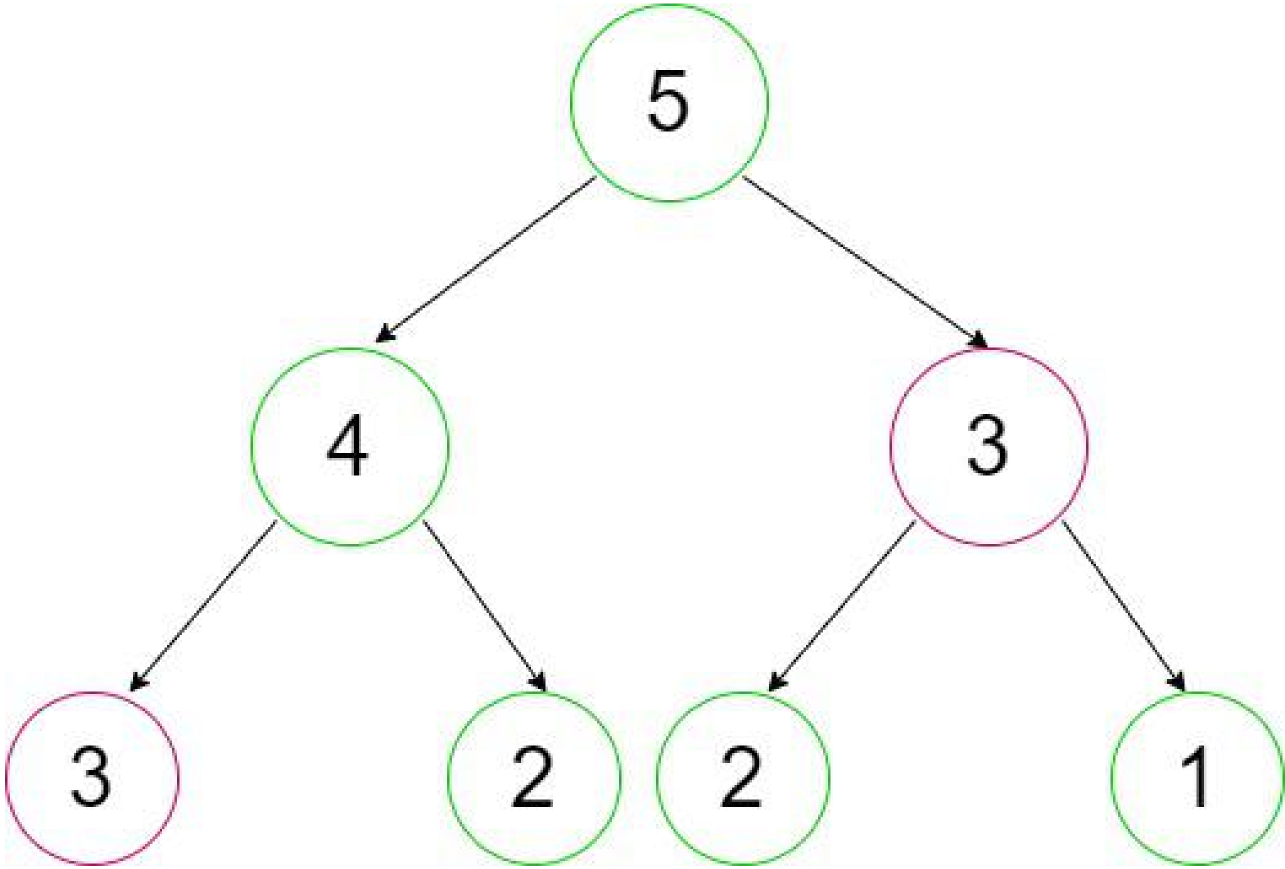
> Al usar programación dinámica, la complejidad del algoritmo se reduce en el **tiempo** pero crece en el **espacio** debido al uso de estructuras como vectores o tablas. Estas estructuras almacenan las soluciones de los subproblemas, evitando el recalculo innecesario.

Sucesión de Fibonacci

> “ sucesión de Fibonacci es una sucesión infinita de números naturales. La sucesión comienza con dos números naturales (dependiendo de la referencia, con 0 y 1 en ciertos casos, otras inician con 1 y 1) y a partir de estos, **«cada término es la suma de los dos anteriores»**, es la relación de recurrencia que la define.

Fibonacci con recursión

```
ull fib(ull n) {
    if (n <= 1) return n;
    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
    // O(2^ n) tiempo
}//  O(n) en memoria (profundidad de
//llamadas recursivas al stack)
```



Primera implementación con Top-Down

```
ull fibo(ull n, vector<ull>& ans) {
    if (n <= 1)
        return n;
    if (ans[n] != -1)
        return ans[n];
    // tabulizando resultados
    ans[n] = fibo(n - 1, ans) + fibo(n - 2, ans);
    return ans[n];
}
int main() {
    ull n; cin >> n;
    vector<ull> ans(n + 1, -1);
    cout << fibo(n, ans) << endl;
    return 0;
}
```

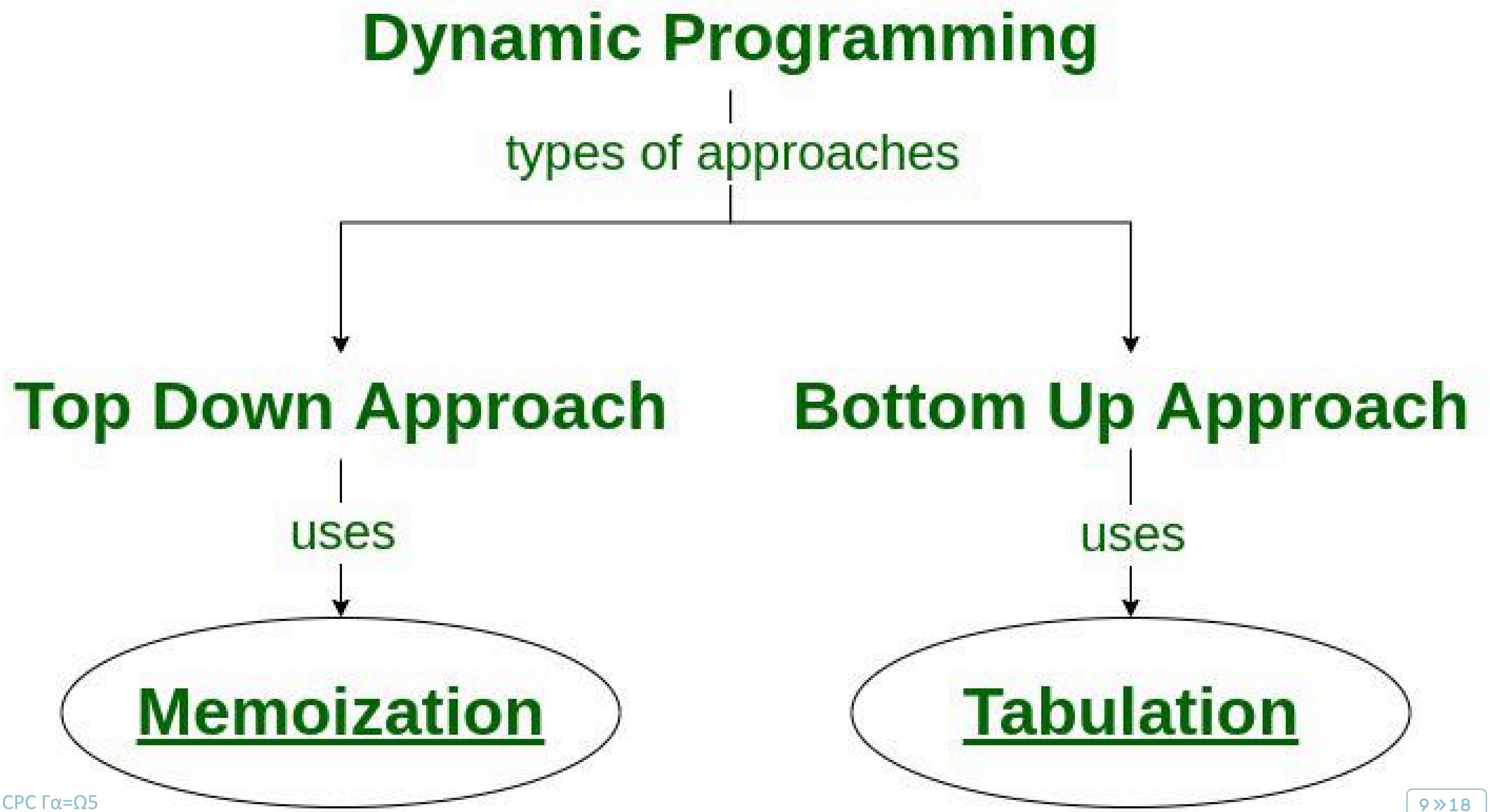
Implementación con bottom-up

```
ull fibo(ull n,vector<ull>& ans) {
    ans[0] = 0; ans[1] = 1;

    // fib iterativo
    for (ull i = 2; i <= n; ++i) {
        ans[i] = ans[i - 1] + ans[i - 2];
    }

    return ans[n];
}
int main() {
    ull n; cin >> n;
    vector <ull> ans(n+1);
    cout << fibo(n,ans);// O(n) en tiempo y espacio
    return 0;
}
```

Top-Down VS Bottom-Up

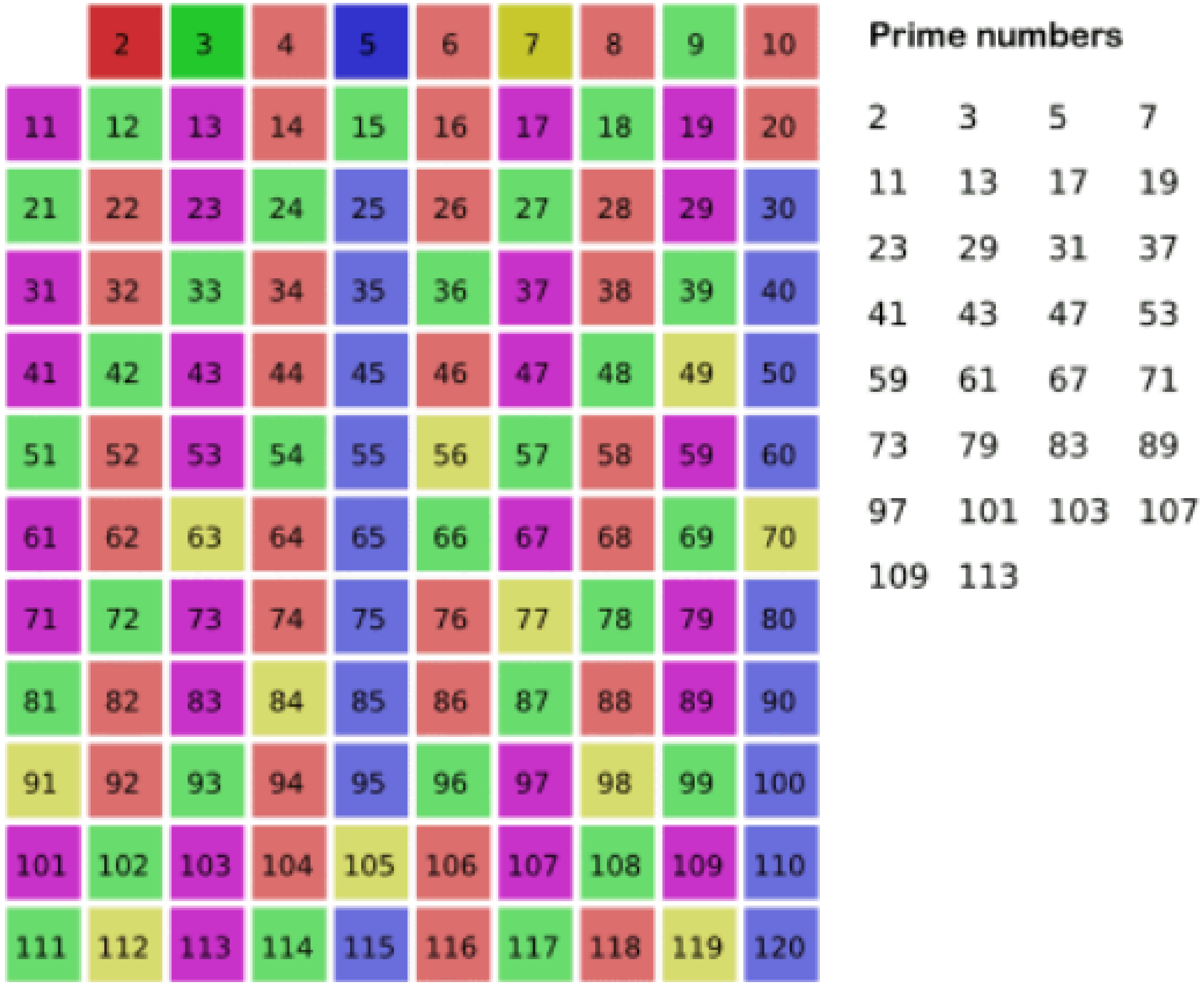
Top-Down	Bottom-Up
Pros:	**Pros:**
Transformación natural de la recursión de búsqueda completa.	**Más rápido** si se revisitan muchos subproblemas, ya que no hay sobrecarga por llamadas recursivas.
Calcula los subproblemas **solo cuando es necesario** (a veces es más rápido).	Computa subproblemas **solo cuando es necesario**, lo que puede ahorrar **memoria** con la técnica de DP "on-the-fly".

Top-Down	Bottom-Up
Contras:	**Contras:**
Más lento si se revisitan muchos subproblemas debido a la sobrecarga de llamadas recursivas (aunque esto no es penalizado en concursos de programación).	Para algunos programadores que prefieren la recursión, **puede no ser intuitivo**.
Si hay **M estados**, puede usar una tabla de tamaño **O(M)**, lo que puede llevar a un **MLE** en algunos problemas difíciles.	El DP de abajo hacia arriba **visita y llena** todos los M estados, lo que puede ser costoso en tiempo.


Dynamic Programming
types of approaches
Top Down Approach
Bottom Up Approach
uses
uses
Memoization
Tabulation

Criba de eratóstenes (Sieve of eratosthenes)

> “La criba de Eratóstenes es un algoritmo que permite hallar muchos números primos menores que un número natural dado. Se forma una tabla con todos los números naturales comprendidos entre 2 y n, y se van tachando los números que no son primos de la siguiente manera



```cpp
void sieve_of_eratosthenes(int n,vector<bool>& is_prime) {
    is_prime[0] = is_prime[1] = false;

    for (int p = 2; p * p <= n; ++p) {
        if (is_prime[p]) {
            for (int i = p * p; i <= n; i += p) {
                is_prime[i] = false;
            }
        }
    }
}

int main() {
    int n = 50; // Example: Find primes up to 50
    std::cout << "Primes up to " << n << " are: ";
    vector<bool> is_prime(n + 1, true);
    sieve_of_eratosthenes(n,is_prime);
    return 0;
}
```

Classical DP Examples

1. **Coin Change (CC)**: Encontrar el mínimo número de monedas o el número total de formas para hacer un cambio con un conjunto dado de denominaciones.
2. **Maximum Sum**: Hallar la subsecuencia o submatriz contigua con la suma máxima en una lista o matriz de números.
3. **Matrix Chain Multiplication**: Determinar el orden óptimo de multiplicación de una secuencia de matrices para minimizar el número de operaciones.
4. **Optimal Binary Search Tree**: Construir un árbol de búsqueda binario que minimice el costo promedio de búsqueda, dado un conjunto de claves y probabilidades.
5. **Paths in a Grid**: Contar o encontrar el camino óptimo desde una esquina de una cuadrícula a otra, con movimientos permitidos (como derecha y abajo).

6. **Knapsack Problems**: Seleccionar ítems con el mayor valor posible sin exceder un peso máximo.
7. **Edit Distance**: Calcular el número mínimo de operaciones (inserción, eliminación, sustitución) para transformar una cadena en otra.
8. **Counting Tilings**: Contar de cuántas formas se puede cubrir una región usando piezas específicas.
9. **Longest Increasing Subsequence (LIS)**: Encontrar la subsecuencia más larga que sea estrictamente creciente en una secuencia de números.
10. **Longest Common Subsequence (LCS)**: Hallar la subsecuencia más larga que sea común a dos secuencias, manteniendo el orden pero no la contigüidad.

Problema en clase: "Dice Combinations" (Knapsack)

Tu tarea consiste en contar la cantidad de formas de construir la suma `n` lanzando un dado una o más veces. Cada lanzamiento produce un resultado entre 1 y 6.

Por ejemplo, si n=3, hay 4 formas:

```
1+1+1
1+2
2+1
3
```

> Recuerda que un problema Knapsack puede modelarse como el llenado de un contenedor de tamaño limitado con elementos (solución DP).

Para seguir con la analogía de Knapsack, significa que tenemos una cantidad infinita de elementos con pesos de 1 a 6 y queremos contar cuántas **secuencias** de elementos existen de manera que, si colocamos elementos en el contenedor mientras seguimos la secuencia, el contenedor se llena por completo. El orden de los elementos si importa en este problema.

Por conveniencia, sea `dp[x]` el número de secuencias de tiradas de dados que suman `x`. Para contar cuántas secuencias suman `N`, o en otras palabras, para encontrar `dp[n]`, observemos la última tirada de dados que nos lleva a una suma total de `N`.

Si la última tirada fue 1, entonces sabemos que hay `dp[n-1]` maneras de lograr la suma `N` cuando la última tirada es `1`. Si la última tirada fue `2`, entonces sabemos que hay `dp[n-2]` maneras de lograr la suma `N` cuando la última tirada es `2`. Continúe esta lógica para todos los números de dados hasta `6`. Considerando todos esos casos juntos, demostrando que

```
dp[N] = dp[N-1]+dp[N-2]+dp[N-3]+dp[N-4]+dp[N-5]+dp[N-6].
```

O formulando de manera matemática:

$$\mathrm{dp}[x] = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{dp}[x-i]$$

```
vector<ull> dp(1e6+1);// tambien suelen llamar a este vector como "memo"
    int n; cin >> n;
    dp[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 1; j <= 6; ++j) {
            if (i - j >= 0)  dp[i] += dp[i - j];
        }
        dp[i] %= 1e9+7; // el problema pide imprimir con modulo 10^9+7
    }
    cout << dp[n];
```

Problemas

- **Meta Hacker Cup 2024 R1 Problem B** Prime Subtractorization ↥
- **687C** The Values You Can Make ↥

Referencias

- *Dynamic Programming (DP) Tutorial with Problems*. Recuperado de https://www.geeksforgeeks.org/introduction-to-dynamic-programming-data-structures-and-algorithm-tutorials/ ⮥
- http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-11.pdf ⮥
- Cao, M. et al. (s.f.). *Introduction to DP*. Recuperado de https://usaco.guide/gold/intro-dp ⮥
- Chen, N. et al. (s.f.). *Knapsack DP*. Recuperado de https://usaco.guide/gold/knapsack?lang=cpp ⮥
- kapoor, K. (2016). *Everything About Dynamic Programming*. Recuperado de https://codeforces.com/blog/entry/43256 ⮥