Assignment #02

알고리즘 2021 과제2

과　　목 : 알고리즘(나)
담당교수 : 최재영교수님
제 출 일 : 2021.09.15.
출석번호 : 201
학　　번 : 20163340
이　　름 : 강원경

15. Show directly that $f(n) = n^2 + 3n^3 \in \Theta(n^3)$. That is, use the definitions of O and Ω to show that $f(n)$ is in both $O(n^3)$ and $\Omega(n^3)$.

$n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2 + 3n^3 \leq n^3 + 3n^3 = 4n^3$이 성립한다.
따라서 $c = 4$와 $N = 1$을 선택하면, Big-O 의 정의에 따라 $n^2 + 3n^3 \in O(n^3)$이라고 할 수 있다.

16. Using the definitions of O and Ω, show that

$$6n^2 + 20n \in O\left(n^3\right) \qquad \text{but} \qquad 6n^2 + 20n \notin \Omega\left(n^3\right).$$

$n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서 $6n^2 + 20n \leq 6n^3 + 20n^3 = 26n^3$이다.
따라서 $c = 26$과 $N = 1$을 선택하면, Big-O의 정의에 따라 $6n^2 + 20n \in O(n^3)$이라고 할 수 있다.

다음으로, $6n^2 + 20n \in \Omega(n^3)$에 속한다고 가정하자.
위의 가정에 따라 $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $6n^2 + 20n \geq c \times n^3$이 성립하는 실수 $c > 0$,
그리고 음이 아닌 정수 N이 존재한다.
앞서 제시한 부등식의 양변을 $c \bullet n^2$으로 나누면, $\frac{6}{c} + \frac{20}{c \bullet n} \geq n$ 이라는 부등식을 얻게 된다.
하지만, 이 부등식을 만족하는 정수 n은 없으므로 모순이 발생한다.
따라서 위의 가정은 성립할 수 없는 명제이다.

24. Show the correctness of the following statements.

(a) $\lg n \in O(n)$

(b) $n \in O(n \lg n)$

(c) $n \lg n \in O\left(n^2\right)$

(d) $2^n \in \Omega\left(5^{\ln n}\right)$

(e) $\lg^3 n \in o\left(n^{0.5}\right)$

(a) $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해 $\log(n) \leq n$이 성립하므로, $c = 1, N = 1$을 선택하면 성립하는 명제이다.
(b) $n \geq 10$인 모든 정수 n에 대해 $n \leq n \log n$이 성립하므로, $c = 1, N = 10$을 선택하면 성립하는 명제이다.
(c) $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해 $n \log n \leq n^2$이 성립하므로, $c = 1, N = 1$을 선택하면 성립하는 명제이다.
(d) 어떠한 경우에도 만족하는 c, n값을 찾을 수 없으므로 성립할 수 없는 명제이다.
(e) $\lim_{n \to \infty} \frac{\lg^3 n}{n^{0.5}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{0.5} \bullet \lg^3 n}{n} = 0$ 이므로 성립하는 명제이다.