Homework 8:

Perform a factor analysis on the variables X3–X9 in the U.S. crime data set (Sec. B.8). Would it make sense to use all of the variables for the analysis?

變數資料: (p=7, n=50)

X_3: murder (murd)謀殺

X_4: rape 強姦

X_5: robbery (robb)搶劫

X_6: assault (assa)襲擊

X_7: burglary (burg)入室竊盜

X_8: larcery (larc)竊盜

X_9: autothieft (auto)汽車竊盜

Sol.

相關係數矩陣：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5199 & 0.3411 & \mathbf{0.8126} & 0.2767 & 0.0648 & 0.1098 \\ & 1 & 0.5514 & 0.6959 & 0.6802 & 0.6006 & 0.4407 \\ & & 1 & 0.5632 & 0.6222 & 0.4362 & 0.6171 \\ & & & 1 & 0.5207 & 0.3167 & 0.3304 \\ & & & & 1 & \mathbf{0.8011} & \mathbf{0.7001} \\ & & & & & 1 & 0.5548 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

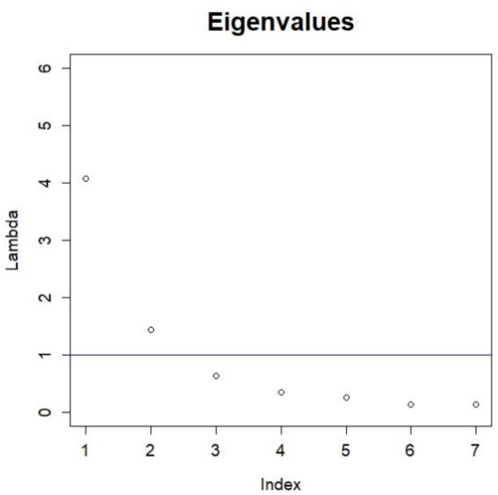
從相關係數矩陣可以看出襲擊跟謀殺具有高度相關，搶劫跟竊盜及搶劫跟汽車竊盜也有一定程度上的相關，三種相關性皆為邏輯上可以合理解釋。

Eigenvalue:

$\widehat{\lambda_3} = 4.077 \quad \widehat{\lambda_4} = 1.432 \quad \widehat{\lambda_5} = 0.631 \quad \widehat{\lambda_6} = 0.340$

$\widehat{\lambda_7} = 0.248 \quad \widehat{\lambda_8} = 0.140 \quad \widehat{\lambda_9} = 0.132$

$$\left(\frac{\widehat{\lambda_3} + \widehat{\lambda_4}}{p}\right) 100\% = \left(\frac{4.077 + 1.432}{7}\right) 100\% = 78.7\%$$



圖一：陡坡圖

由上式可以發現取前兩組主成分可以解釋 78.7%的變異，從陡坡圖也可以驗證取 m=2 足夠解釋大部分資訊。

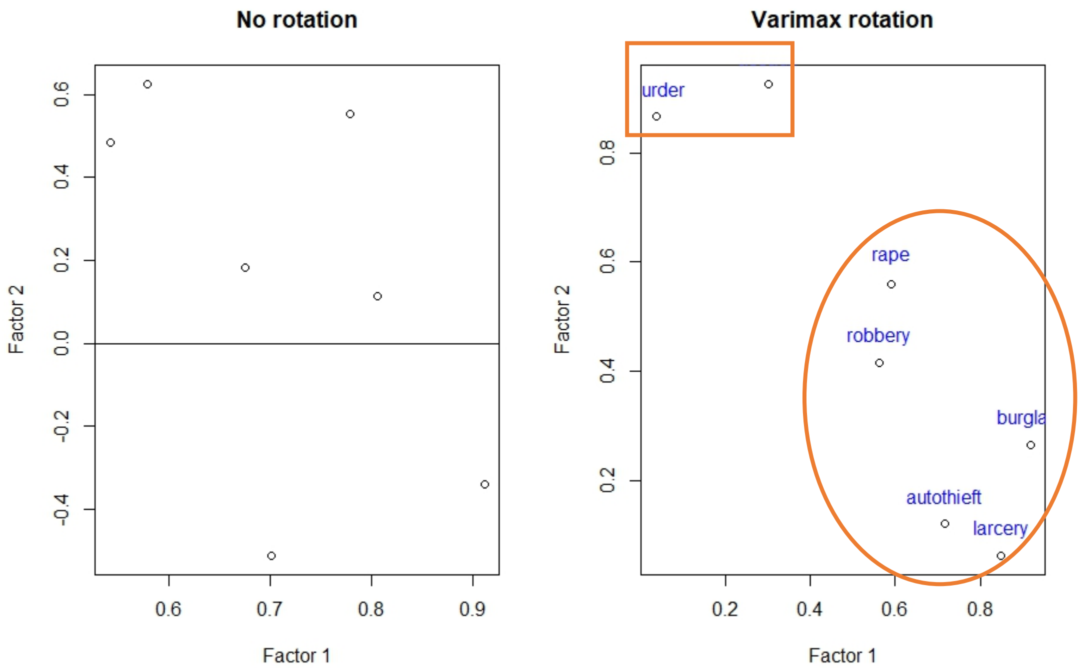
表一：因子旋轉前後表

Variable	Estimated factor loadings		Specific variances	Estimated rotated factor loadings		Communalities
	$\widehat{F_1}$	$\widehat{F_2}$	$\widehat{\psi_i} = 1 - \widehat{h_i^2}$	$\widehat{F_1^*}$	$\widehat{F_2^*}$	$\widehat{h_i^{*2}} = \widehat{h_i^2}$
Murder(X_3)	0.7014	-0.5109	0.247	0.0375	0.8670	0.753
Rape(X_4)	0.8057	0.1128	0.338	0.5903	0.5599	0.661
Robbery(X_5)	0.6761	0.1820	0.510	0.5637	0.4154	0.490
Assault(X_6)	0.9116	-0.3404	0.053	0.3018	0.9251	0.947
Burglary(X_7)	0.7792	0.5526	0.087	0.9177	0.2651	0.913
Larcery(X_8)	0.5788	0.6245	0.275	0.8490	0.0636	0.725
Autothieft(X_9)	0.5424	0.4851	0.471	0.7172	0.1220	0.529
Cumulative proportion of total (standardize) sample variance explained	0.524	0.717		0.405	0.717	

首先觀察表一整體狀況，總樣本方差累積比例顯示兩個因子解釋了整個數據集 71.7%的方差。由程式可以驗證經過因子轉換並不會影響共同因子及特殊因子的值。其中，X_6以及X_7的特殊因子值很小，表示對襲擊與入室竊盜造成影響的多來自共同因子；相反地，X_5以及X_9的特殊因子值相對高於其他變數，表示搶劫跟汽車竊盜造成影響可能來自於共同因子之外的其他因素。

另外，比較左半邊未旋轉過與右半邊旋轉過後的估計因子載荷量，可以看出旋轉後有較明顯的分群，因子變得更好解釋，大致可歸類為兩區，X_3 、X_6在第二個因子上載荷較大；$X_4, X_5, X_7 \sim X_9$在第一個因子上載荷較大。

圖二：因子旋轉前後圖



由圖二可更直覺看出表一因子旋轉後的結果，原本每種變數四散各處，使用正交旋轉後，形成較明顯的兩塊區域，其中一塊較靠近第一個因子，另一塊靠近第二個因子，中間兩種變數較靠近於中間位置但仍稍微偏向第二個因子，因此我將它們歸類在第二個因子。

綜合表一與圖二可以將各變數分別歸類於兩個因子，第一個因子有強姦、搶劫、入室竊盜、竊盜、汽車竊盜，我認為這類相較第二類屬於較不致命的犯罪行為，而第二個因子包含謀殺、襲擊，則屬於較致命的犯罪行為。

Factor 1=較不致命的因子(強姦、搶劫、入室竊盜、竊盜、汽車竊盜)

Factor 2=較致命的因子(謀殺、襲擊)

Residual matrix 殘差矩陣：

$$R-\hat{L}\hat{L}'-\hat{\psi}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0.5199 & 0.3411 & 0.8126 & 0.2767 & 0.0648 & 0.1098 \\ & 1 & 0.5514 & 0.6959 & 0.6802 & 0.6006 & 0.4407 \\ & & 1 & 0.5632 & 0.6222 & 0.4362 & 0.6171 \\ & & & 1 & 0.5207 & 0.3167 & 0.3304 \\ & & & & 1 & 0.8011 & 0.7001 \\ & & & & & 1 & 0.5548 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0.7014 & -0.5109 \\ 0.8057 & 0.1128 \\ 0.6761 & 0.1820 \\ 0.9116 & -0.3404 \\ 0.7792 & 0.5526 \\ 0.5788 & 0.6245 \\ 0.5424 & 0.4851 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7014 & 0.8057 & 0.6761 & 0.9116 & 0.7792 & 0.5788 & 0.5424 \\ -0.5109 & 0.1128 & 0.1820 & -0.3404 & 0.5526 & 0.6245 & 0.4851 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0.247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.087 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.275 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.471 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0.0123 & -0.0402 & -0.0008 & 0.0125 & -0.0222 & -0.0228 \\ & 0 & -0.0138 & -0.0002 & -0.0100 & 0.0639 & -0.0510 \\ & & 0 & 0.0088 & -0.0052 & -0.0688 & -0.1621 \\ & & & 0 & -0.0015 & 0.0017 & 0.0010 \\ & & & & 0 & 0.0051 & 0.0094 \\ & & & & & 0 & -0.0620 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

透過殘差矩陣可檢測當殘差值越接近 0，表示因子模型足夠解釋該資料。因此根據上述算式得到的殘差矩陣，可以觀察出多數殘差值都非常接近 0，表示 m 取 2 是足夠代表該資料的基本概況。另外，我們也可以透過概似比檢定再

次檢驗 m 取 2 是否足夠解釋資料集：

$$H_0: \Sigma = LL' + \psi, with\ m = 2, at\ level\ \alpha = 0.05$$
$$H_1: \Sigma\ any\ other\ positive\ definite\ matrix$$

Likelihood ratio statistic:

$$-2ln\Gamma = nln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|S_n|}\right) \sim \chi^2_{df}$$

Where $df = \frac{1}{2}[(p-m)^2 - (p+m)] = \frac{1}{2}[(7-2)^2 - (7+2)] = 8$

根據 Bartlett correction，當$\left(n - 1 - \frac{2p+4m+5}{6}\right) ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|S_n|}\right) > \chi^2_{df}$，可以拒絕$H_0$。

$$\Rightarrow \left(n - 1 - \frac{2p+4m+5}{6}\right) ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|S_n|}\right) = \left(49 - \frac{14+8+5}{6}\right) \ln(1.313) = 12.11$$
$$\Rightarrow 12.11 < \chi^2_8 = 15.507$$
$$\Rightarrow \text{不拒絕}H_0\text{: 無法證明 2 個因子模型不適合}$$

以上兩種方法都可以證明 m=2 有足夠證據解釋該變數資料。

Factor score 因子分數：

用迴歸方法估計因子分數，將變數中有高(大於.40)載荷量組成一組，其因子分數則是根據載荷的組合對組中變量的觀察值加總。第二個因子分數則是加總第二個因子中載荷量較高的變數。藉由簡化的因子分數我們可以達成數據降維。

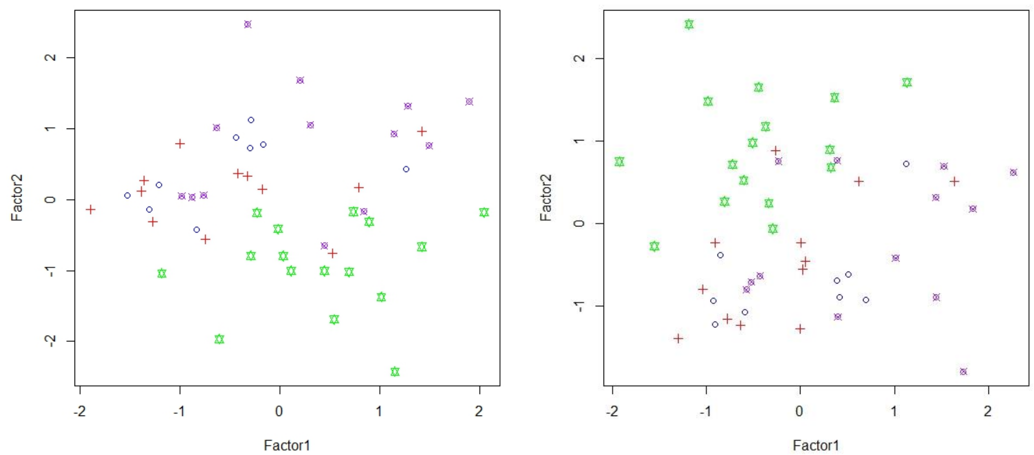
圖二：旋轉因子前後因子分數分佈圖

○ ：東北部

＋ ：中西部

✡ ：南部

⊗ ：西部



圖二顯示所有因子分數的散布情況，左邊是因子旋轉前的散佈圖，右邊是因子旋轉後的散佈圖。兩軸的旋轉並不影響因子分數彼此的距離與相對位置，

只影響他們的實際位置。由右圖來看，南部地區多靠近第二個因子，也就是謀殺、襲擊等較致命的因子，而東北部、中西部、西部則平均散佈在較靠近第一個因子，表示這些地區的犯罪類型多為較不致命的強姦、搶劫、竊盜等等。

R Code:
```
# clear variables and close windows
rm(list = ls(all = TRUE))
graphics.off()

# load data
data <- read.table("C:/Users/user/Desktop/多變量 11101/uscrime.dat")
x <- data[,(3:9)]
# define variable names
colnames(x) = c("murder", "rape", "robbery", "assault", "burglary", "larcery",
"autothieft")

# correlation matrix
r = cor(x)

# determine the nb of factors
n1 <- nrow(x)
n2 <- ncol(x)
xm <- (x - matrix(mean(as.matrix(x)), n1, n2, byrow = T))/matrix(sqrt((n1 - 1) *

apply(x, 2, var)/n1), n1, n2, byrow = T)
eig <- eigen((n1 - 1) * cov(xm)/n1)
e <- eig$values
plot(e, ylim = c(0, 6), xlab = "Index", ylab = "Lambda", main = "Eigenvalues",
        cex.lab = 1.2, cex.axis = 1.2, cex.main = 1.8)
abline(h=1, col="blue")

# factor analysis
# without rotate
x.fac <- factanal(x, factors = 2, rotation = "none", scores = "regression")
x.fac$loadings[,1]
x.fac$loadings[,2]
x.fac$scores
# rotated
x.fac.r <- factanal(x, factors = 2, rotation="varimax", scores = "regression")
x.fac.r$loadings[,1]
x.fac.r$loadings[,2]
x.fac.r$scores
com <- 1 - x.fac.r$uniquenesses

# residual matrix
Lambda <- x.fac$loadings
Psi <- diag(x.fac$uniquenesses)
```

```
S <- x.fac$correlation
Sigma <- Lambda %*% t(Lambda) + Psi
round(S - Sigma, 4) # round the result to 4 digits
det(Sigma)/det(S)

# scatter plot
plot(x.fac$scores, pch = c(rep(1, 9), rep(3, 12), rep(11, 16), rep(13, 13)), col =
c(rep("blue", 9),

rep("red", 12), rep("green1", 16), rep("purple", 13)))

plot(x.fac.r$scores, pch = c(rep(1, 9), rep(3, 12), rep(11, 16), rep(13, 13)), col
= c(rep("blue", 9),

rep("red", 12), rep("green1", 16), rep("purple", 13)))
par(mfrow = c(1,2))
plot(x.fac$loadings[,1],
        x.fac$loadings[,2],
        xlab = "Factor 1",
        ylab = "Factor 2",
        main = "No rotation")
abline(h = 0, v = 0)

plot(x.fac.r$loadings[,1],
        x.fac.r$loadings[,2],
        xlab = "Factor 1",
        ylab = "Factor 2",
        main = "Varimax rotation")

text(x.fac.r$loadings[,1],
        x.fac.r$loadings[,2]+0.05,
        colnames(x),
        col="blue")
abline(h = 0, v = 0)

# 法二
library(psych)
fa <- fa(r, nfactors = 2, rotate = "none", fm = "ml", scores = "regression") # ml:
最大似然法;pa:主軸迭代法;wls:加權最小二乘法
fa.varimax <- fa(r, nfactors = 2, rotate = "varimax", fm = "ml", scores =
"regression")
factor.plot(fa.varimax, labels = rownames(fa.varimax$loadings), pch =
fa.varimax$loadings)
fa.diagram(fa.varimax, digits = 3)
# digits = 3 表示保留為小數
```