Homework 9:
Use the following clustering methods to analyze the U.S. crime data set (Sec.22.8) with the $L2-norm$ on standardized variables (use only the crime variables$X3$~$X9$).
1. K-means clustering algorithm
2. Ward algorithm
Make a complete conclusion from these analysis.
Hint: 1. Set the number of cluster$K$=4.

Variable	Description
X_3	murder (murd)謀殺
X_4	rape 強姦
X_5	robbery (robb)搶劫
X_6	assault (assa)襲擊
X_7	burglary (burg)入室竊盜
X_8	larcery (larc)竊盜
X_9	autothieft (auto)汽車竊盜

Sol.

執行兩種分析方法前，首先標準化變數，接著可以透過 Euclidean norm 找到距離矩陣 D，由距離矩陣可得知其值越小，代表組內距離、變異越小，這是我們所期望的，以下簡略列出該資料標準化後的距離矩陣：

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0.0041 & 0.0018 & 0.2296 & 0.1420 & 0.0339 & \cdots & 0.0093 \\ & 0 & 0.0113 & 0.1724 & 0.0979 & 0.0144 & \cdots & 0.0011 \\ & & 0 & 0.2721 & 0.1758 & 0.0513 & \cdots & 0.0193 \\ & & & 0 & 0.0105 & 0.0871 & \cdots & 0.1464 \\ & & & & 0 & 0.0372 & \cdots & 0.0786 \\ & & & & & 0 & \cdots & 0.0077 \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

1. K-means clustering algorithm

進行 K-means 分群方法時，預期將資料及分為四大類，接著重複分發 25 次，將最接近平均(中心)的目標分在一群中，最後可以得到四群類別裡分別有 14, 9, 13, 14 組資料，群內的組內平方和為 65%，其中各地區資料南部地區以第一群分布最多，其他地區較為分散。從圖一與圖二中也可以看出類似的趨勢。

根據前次 PCA 分析方法分析同筆資料時得知，若變數僅保留犯罪類型時，表一顯示第一組主成分可以解釋 58.24%的變異；前兩組主成分可以解釋 78.69%的變異。另外，可重複驗證僅前兩組特徵值位於 1 之上，因此該組資料

可以取前兩組主成分進行分析即可。本篇介紹之三維以上的資料，將以二維主成分為視覺化基礎。

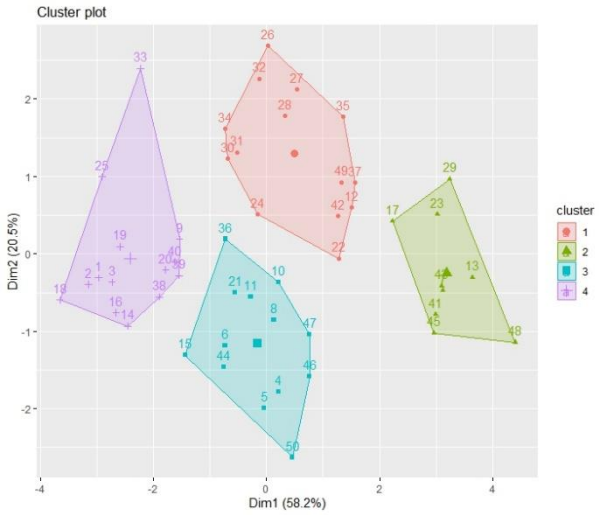
表一：特徵值及其解釋變異的百分比(X_3~X_9)

Eigenvalue	Cumulated percentages
4.077	**0.5824**
1.432	**0.7869**
0.631	0.8771
0.340	0.9257
0.248	0.9612
0.140	0.9811
0.132	**1**

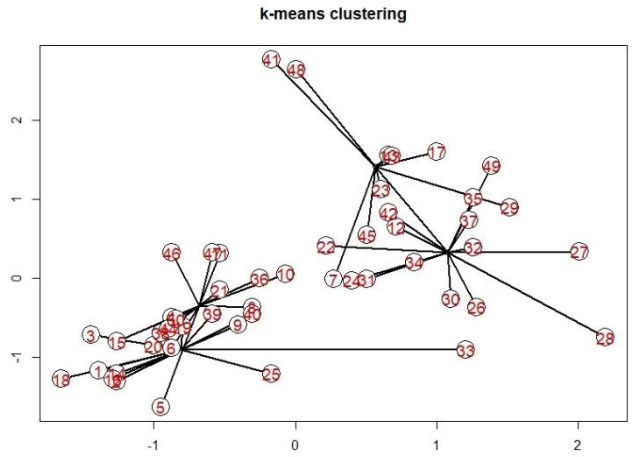
表二、前二組主成分與原始變數關係(X_3~X_9)

	PC1	PC2
謀殺	0.557	**-0.771**
強姦	**0.851**	-0.139
搶劫	**0.782**	0.055
襲擊	**0.784**	-0.546
入室竊盜	**0.881**	0.308
竊盜	0.728	0.480
汽車竊盜	0.714	0.438

圖一、分群散佈圖(K-means)



圖二、分群中心距離圖



接著使用 fivz_cluster() 函數在散佈圖上視覺化各個分群，如圖一，其中兩軸分別是前兩個主成分，可以看到各群之間存在一定差距（距離），各群內每筆資料又多為集中，表示透過 k-means 可成功將資料分為的 4 個互不干擾的群體。除此之外，由表二可以看出 PC1 以強姦、搶劫、襲擊、入室竊盜為主要解釋變數；PC2 以謀殺為主要解釋變數，再對照圖一便可以得到第一群的犯罪類型以謀殺占比最高，第一群中又以南部的 22~37 號資料點為多數，因此可以間

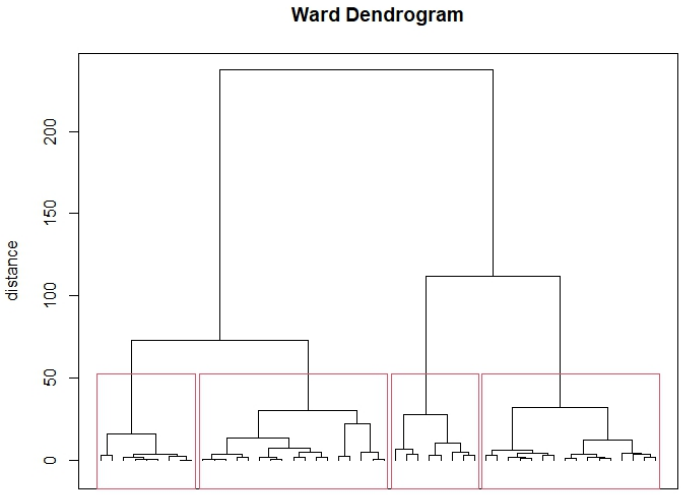
接說明南部地區的犯罪類型以謀殺占多數。另外，由圖二可以比圖一更清楚看到每筆資料與到四群中心（平均）的距離。

根據表三的數據資料，可看到各群內的平均數與標準誤，透過平均數與標準誤可以得到各群之間最受影響的變數分別為何者、影響程度如何等等。像是我們能明顯看出第一群內最受到謀殺與襲擊的影響，第二群則是根據強姦、搶劫、入室竊盜而有所變動，第三群中雖然有些犯罪類型有正想影響、有些是反向影響，但數值幾乎都不大，可以說第三群對所有犯罪類型呈現平均表現，第四群則以入室竊盜有最大影響。

表三、標準化後變數四個群內的平均數與標準誤(K-means)

	Mean C1	SE C1	Mean C2	SE C2	Mean C3	SE C3	Mean C4	SE C4
謀殺	**1.076**	0.153	0.565	0.169	**-0.681**	0.093	-0.808	0.197
強姦	0.326	0.157	**1.410**	0.303	-0.346	0.159	-0.912	0.087
搶劫	-0.078	0.158	**1.519**	0.403	-0.099	0.104	-0.806	0.076
襲擊	**0.783**	0.165	1.120	0.174	-0.595	0.112	-0.950	0.124
入室竊盜	-0.115	0.109	**1.445**	0.206	0.320	0.172	**-1.111**	0.092
竊盜	-0.321	0.181	1.219	0.254	0.337	0.213	-0.775	0.191
汽車竊盜	-0.126	0.182	0.978	0.169	**0.537**	0.281	-1.001	0.104

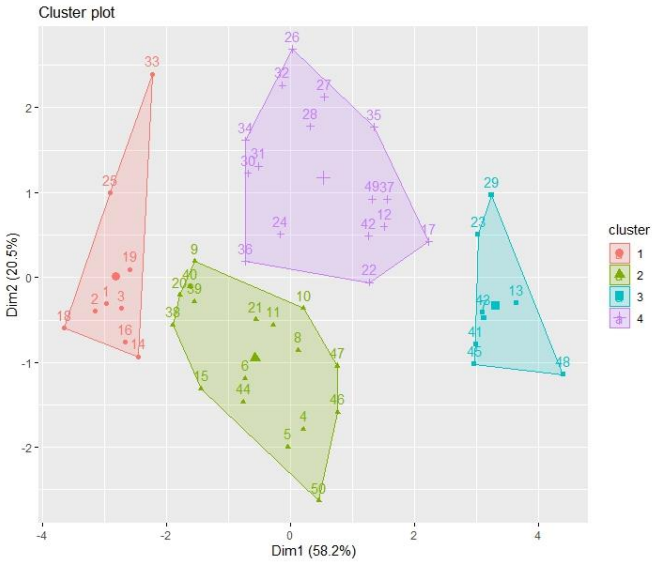
2. Ward algorithm



圖三、分群樹狀圖

由圖三的樹狀圖可以看到從 k=2 到最底部的 50 筆資料可以分群的概況，分為 4 群的情況為圖中紅色框線框起來的部分，基本上各有 9, 17, 8, 16 筆資料在各個分群內。

圖四、分群散佈圖(Ward' s method)



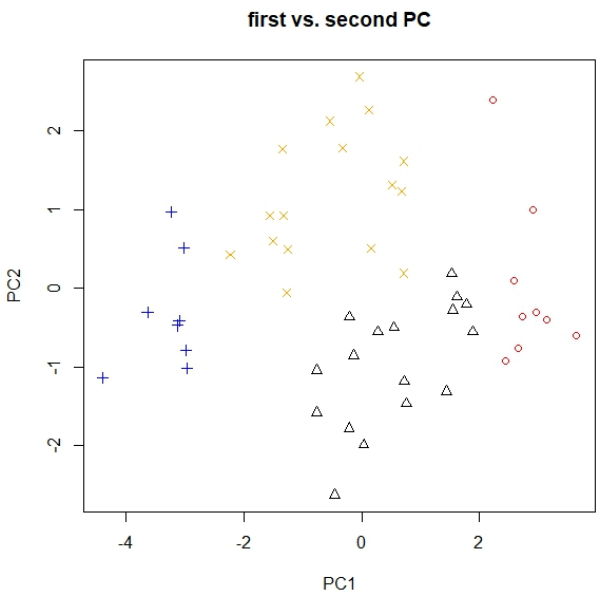
由圖四一樣能看出四群互不相交，表示群間有變異，可以更直接看到四群中分別有哪些資料在裡面，其中可以看到 PC2 較高的紫色十字圖例第四群中數字為 22~37 的南部地區占了多數，說明第四群以南部地區的犯罪類型為主，且其犯罪類型為 PC2 的主要解釋變數：謀殺。

根據表四也可再次驗證第四群多為謀殺及襲擊兩種犯罪類型。此外，也可清楚看到第三群與搶劫的相關，而在圖四中第三權在 PC1 表現最高，可以驗證 PC1 為一強姦、搶劫、襲擊、入室竊盜為主的主成分。

表四、標準化後變數四個群內的平均數與標準誤(Ward' s method)

	Mean C1	SE C1	Mean C2	SE C2	Mean C3	SE C3	Mean C4	SE C4
謀殺	-0.90	0.300	**-0.70**	0.076	0.51	0.182	**0.99**	0.156
強姦	-1.08	0.087	-0.44	0.123	1.39	0.343	0.39	0.160
搶劫	-0.91	0.035	-0.23	0.109	**1.57**	0.453	-0.03	0.159
襲擊	-1.09	0.168	-0.65	0.085	1.20	0.174	**0.71**	0.155
入室竊盜	**-1.22**	0.124	-0.01	0.193	1.54	0.209	-0.07	0.109
竊盜	-1.06	0.194	0.20	0.191	1.35	0.247	**-0.29**	0.161
汽車竊盜	-1.18	0.081	0.24	0.257	0.99	0.191	-0.08	0.172

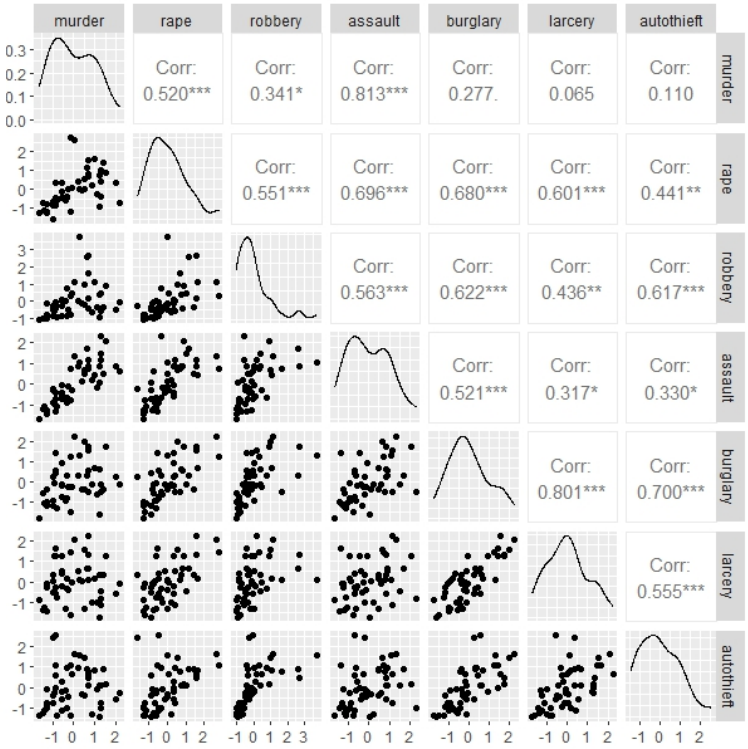
圖五、主成分分群散佈圖



O : cluster 1 △ : cluster 2

+ : cluster 3 x : cluster 4

圖六、相關係數矩陣



Conclusion:

表五、地區與分群對照(k-means/ward)

	Cluster 1		Cluster 2		Cluster 3		Cluster 4	
	k-means	ward	k-means	ward	k-means	ward	k-means	ward
東北部	0	3	1	5	4	1	4	0
中西部	1	4	2	5	4	1	5	2
南部	**11**	2	2	0	1	2	2	**12**
西部	2	0	4	7	4	4	3	2

透過圖一與圖四對表二 PC1 及 PC2 的比較，可以得到類似的結論：南部地區犯罪類型以謀殺占多數，表示在兩種分群方式下雖然略有不同，但關鍵性資訊仍在兩這間達成共識。最後用圖五與圖六整理該資料，圖六顯示竊盜一類普遍呈現高度相關，謀殺與扣除襲擊之外的犯罪類型普遍出現較低的關聯性，可以明確地切分出 PC1 與 PC2。圖五則看出第一群與 PC1 類型(強姦、搶劫、襲擊、入室竊盜)相像，第二群與 PC2(謀殺、襲擊)相反，第三群與 PC1 相反，第四群與 PC2 犯罪類型相似。

R code:

```
rm(list = ls(all = TRUE))
graphics.off()

# load data
data <- read.table("C:/Users/user/Desktop/多變量 11101/uscrime.dat")
x <- data[,(3:9)]
# x <- cbind(x, rep("en"=x[1:9,], "mw"=x[10:21,], "sou"=x[22:37,],
"wes"=x[38:50,]))
x1 <- scale(x)    # standardize variable
# define variable names
colnames(x1) = c("murder", "rape", "robbery", "assault", "burglary", "larcery",
"autothieft")

row.s       = apply(x, 1, sum)              # row sums
column.s = apply(x, 2, sum)              # column sums
mat.s       = sum(x)                            # matrix sum
D             = matrix(0, nrow = 50, ncol = 50)
# distance for rows
for (i in 1:(dim(x)[1] - 1)) {
   for (j in (i + 1):dim(x)[1]) {
      for (z in 1:dim(x)[2]) {
         D[i, j] = 1/(column.s[z]/mat.s) * ((x[i, z]/row.s[i]) - (x[j, z]/row.s[j]))^2
      }
   }
}
D

# k-means clustering algorithm
# install.packages("ClusterR")
library(ClusterR)
library(cluster)
library(factoextra)
set.seed(1221)
k.means <- kmeans(x1, 4, nstart = 25)
#plot results of final k-means model
fviz_cluster(k.means, data = x1)
#find means of each cluster
mc.km <- cbind(colMeans(subset(x1, k.means$cluster == "1")),
colMeans(subset(x1, k.means$cluster == "2")),
                  colMeans(subset(x1, k.means$cluster == "3")),
colMeans(subset(x1, k.means$cluster == "4")))
library(matrixStats)
sc.km <- cbind(colSds(subset(x1, k.means$cluster == "1")[, 1:ncol(x1)]),
                       colSds(subset(x1, k.means$cluster == "2")[, 1:ncol(x1)]),
                       colSds(subset(x1, k.means$cluster == "3")[, 1:ncol(x1)]),
                       colSds(subset(x1, k.means$cluster == "4")[, 1:ncol(x1)]))
tbl.km <- cbind(mc.km[, 1], sc.km[, 1]/sqrt(nrow(subset(x1, k.means$cluster
== "1"))),
```

```
                mc.km[, 2], sc.km[, 2]/sqrt(nrow(subset(x1, k.means$cluster ==
"2"))),
                mc.km[, 3], sc.km[, 3]/sqrt(nrow(subset(x1, k.means$cluster ==
"3"))),
                mc.km[, 4], sc.km[, 4]/sqrt(nrow(subset(x1, k.means$cluster ==
"4"))))
# 蜘蛛圖
dev.new()
plot(x1,type="n", xlab="",ylab="", main="k-means clustering")
points(k.means$centers[1,1],k.means$centers[1,2], col = "black")
points(k.means$centers[2,1],k.means$centers[2,2], col = "black")
# Plot Lines
k.means$cluster
for (i in 1:50){
   segments(x1[i,1], x1[i,2],
            k.means$centers[k.means$cluster[i],
1],k.means$centers[k.means$cluster[i], 2],lwd=2)
}

segments(k.means$centers[1,1],k.means$centers[1,2],k.means$centers[2,1],
k.means$centers[2,2],lwd=2)

points(x1, pch=21, cex=3, bg="white")
text(x1, as.character(1:50),col="red3",cex=1.2)

# Ward algorithm
d <- dist(x1, "euclidean", p = 2)     # euclidean distance matrix(p=power of
Minkowski distance)
dd <- d^2
w <- hclust(dd, method = "ward.D")    # cluster analysis with ward algorithm
tree.wd = cutree(w, 4)
# plot results of ward algorithm
fviz_cluster(list(data = x1, cluster = tree.wd))

t1     = subset(x1, tree.wd == 1)
t2     = subset(x1, tree.wd == 2)
t3     = subset(x1, tree.wd == 3)
t4     = subset(x1, tree.wd == 4)

# Plot 1: Dendrogram for the standardized data after Ward
plot(w, hang = -0.1, labels = FALSE, frame.plot = TRUE, ann = FALSE)
title(main = "Ward Dendrogram", ylab = "distance")
rect.hclust(w,k=4) # k=4 的分類線

# means for 4 Clusters
mc.wd <- cbind(colMeans(subset(x1, tree.wd == "1")), colMeans(subset(x1,
tree.wd == "2")),
                    colMeans(subset(x1, tree.wd == "3")), colMeans(subset(x1,
tree.wd == "4")))
```

```
# standard deviations for 4 Clusters
sc.wd <- cbind(colSds(t1[, 1:ncol(x1)]), colSds(t2[, 1:ncol(x1)]),
                    colSds(t3[, 1:ncol(x1)]), colSds(t4[, 1:ncol(x1)]))
# means and standard deviations of the standardized variables for 4 Clusters
tbl.wd = cbind(mc.wd[, 1], sc.wd[, 1]/sqrt(nrow(t1)), mc.wd[, 2], sc.wd[,
2]/sqrt(nrow(t2)),
                  mc.wd[, 3], sc.wd[, 3]/sqrt(nrow(t3)), mc.wd[, 4], sc.wd[,
4]/sqrt(nrow(t4)))

# spectral decomposition
eig = eigen(cov(x1))
e = eig$values
v = eig$vectors[, 1:2]
dav = x1 %*% v
# PC 選取
cum    = cumsum(e)/sum(e)
corr = cor(x1, -dav)[, 1:2]
plot(e, ylim = c(0, 6), xlab = "Index", ylab = "Lambda", main = "Eigenvalues",
       cex.lab = 1.2, cex.axis = 1.2, cex.main = 1.8)
abline(h=1, col="blue")

#  自定義點的形狀&顏色
tree.wd[tree.wd == 1] = 1
tree.wd[tree.wd == 2] = 2
tree.wd[tree.wd == 3] = 3
tree.wd[tree.wd == 4] = 4
tr = tree.wd
tr[tr == 1] = "red"
tr[tr == 2] = "black"
tr[tr == 3] = "blue"
tr[tr == 4] = "orange"

# Scatterplot for the first two PCs displaying the 4 clusters
dev.new()
plot(dav[, 1], dav[, 2], pch = tree.wd, col = tr, xlab = "PC1", ylab = "PC2", main
= "first vs. second PC")

# c.f.
table <- cbind(x1, tree.wd, k.means$cluster)
colnames(table) <- c("murder", "rape", "robbery", "assault", "burglary",
                              "larcery", "autothieft", "ward", "kmeans")
# correlation coefficient
r <- round(cor(x1), digits = 3)
library(ggplot2)
library(GGally)
# Scatterplot matrix for variables X1 to X7
ggpairs(data = as.data.frame(x1), alpha = 0.5)
# dev.new()
# ggpairs(data = x, mapping = aes(color = tr), alpha = 0.5)
```