2 PROBABILITES

1. Approche intuitive de la notion de probabilité

Il existe principalement trois approches de la notion de probabilité : intuitive, empirique et mathématique. La définition mathématique formalise et unifie le tout. La définition intuitive constitue un point de départ très naturel. Elle date de quelques centaines d'années et était basée sur l'étude des jeux de hasard.

Deux résultats sont **équiprobables** s'ils ont la même probabilité de se réaliser. Si on lance un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, l'univers est constitué de 6 résultats équiprobables $\{1;2;3;4;5;6\}$ On obtient un nombre pair dans 3 cas équiprobables $\{2;4;6\}$. La probabilité de cet événement est donc égale à 50% puisqu'il y a 3 résultats favorables parmi les 6 résultats possibles.

Si on tire une carte d'un jeu de 52 cartes bien brassé et si le tirage se fait au hasard, sans tricher, tous les tirages sont équiprobables. L'univers est constitué de 52 résultats équiprobables. On tire un coeur dans 13 cas équiprobables. La probabilité de cet événement est donc de 25% puisqu'il y a 13 résultats favorables parmi les 52 résultats possibles.

Cette approche intuitive conduit à la définition intuitive de la probabilité d'un événement :

Définition 2.1 Soit U l'univers d'une expérience aléatoire formé de résultats mutuellement exclusifs et équiprobables, A un événement. Les éléments de l'événement A sont **les résultats favorables** et les éléments de l'univers U **les résultats possibles**. La probabilité de l'événement A, notée $P(A)$, est définie par le rapport :

$$P(A)=\frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Remarques

1) Cette définition intuitive ne s'applique que si l'univers U est constitué d'un nombre fini de résultats équiprobables. Les calculs sont généralement basés sur l'analyse combinatoire.
2) La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Elle peut être donnée sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.
3) La probabilité de l'événement impossible est égale à 0 et celle de l'événement certain à 1.
4) Dans la réalité, il est relativement rare qu'il soit possible de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. Par exemple, les meilleurs météorologues ne savent pas chiffrer avec certitude la probabilité de l'événement "il fera beau demain"; il est bien difficile de donner la probabilité d'un comportement humain ou de l'évolution d'une maladie.

Exemples

1) Il y a 5 calculatrices défectueuses dans un lot de 25 calculatrices. On en choisit 4 au hasard. Quelle est la probabilité que toutes les calculatrices choisies fonctionnent ?

L'expérience aléatoire consiste à choisir 4 des 25 calculatrices. La probabilité de choisir 4 des 20 calculatrices non défectueuses est donnée par le rapport :

$$\frac{C_4^{20}}{C_4^{25}} = \frac{4845}{12650} = 0,3830$$

2) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot à la loterie à numéros (6 nombres sur 45) ?

On veut calculer la probabilité d'avoir coché les 6 numéros tirés :

$$\frac{C_6^{6}}{C_6^{45}} = \frac{1}{8145060} = 0,000000123$$

3) On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de 52 cartes. Déterminons la probabilité des événements :

A = "on tire deux coeurs"
B = "on tire deux rois"
C = "on tire le dix de trèfle et l'as de pique"

L'univers U est constitué de toutes les mains de 2 cartes tirées d'un jeu 52 cartes.

A	2 cartes parmi les 13 coeurs	$P(A) = \frac{C_2^{13}}{C_2^{52}} = \frac{78}{1326} = 0,0586$
B	2 cartes parmi les 4 rois	$P(B) = \frac{C_2^{4}}{C_2^{52}} = \frac{6}{1326} = 0,45\%$
C	le dix de trèfle et l'as de pique	$P(C) = \frac{C_2^{2}}{C_2^{52}} = \frac{1}{1326}$

2. Exercices

2.1 Un sac contient 12 objets différents, 3 rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On tire simultanément 3 objets. Calculer la probabilité des événements :

1) A = "les 3 objets sont jaunes";
2) B = "il y a un objet de chaque couleur";
3) C = "aucun objet n'est rouge";
4) D = "il y a au moins un objet rouge";
5) E = "il y a au moins un objet bleu";
6) F = "il y a au plus un objet bleu".

2.2 On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons. Calculer la probabilité d'obtenir :

1) un mot de 3 consonnes;
2) un mot de 3 voyelles;
3) le mot BAC;
4) le mot BAC ou l'une de ses anagrammes.

2.3 On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 32 cartes (jeu de 36 cartes et on enlève les six). Calculer la probabilité des événements :

1) A = "la main contient l'as de coeur";
2) B = "la main ne contient aucun as";
3) C = "la main contient au moins un as".

2.4 Une urne contient 70 boules numérotées avec les 70 premiers nombres entiers non nuls. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité que parmi ces trois nombres :

1) figurent deux multiples de 5;
2) ne figure aucun carré parfait;
3) figure au moins un carré parfait.

2.5 Un paquet de 12 cartes est composé des 4 rois, 4 dames et 4 valets. On tire 5 cartes simultanément. Calculer la probabilité de tirer :

1) 2 rois, 2 dames et 1 valet;
2) les 4 rois.

2.6 On lance une pièce dix fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir quatre fois pile et six fois face.

2.7 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :

1) 5 carreaux ?
2) 2 carreaux et 3 coeurs ?
3) 5 carreaux ou 5 coeurs ?
4) 5 cartes de la même famille ?
5) les 4 rois ?
6) 3 rois et 2 dames ?
7) aucun roi ?
8) au moins un roi ?
9) au plus un roi ?
10) 2 cœurs et 3 carreaux ?
11) 2 cartes d'une famille et 3 d'une autre famille ?

2.8 On lance 2 dés de couleurs différentes. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit :

1) strictement supérieur à 8 ?
2) un multiple de 3 ?
3) strictement supérieur à 8 et un multiple de 3 ?
4) supérieur à 8 ou un multiple de 3 ?

2.9 On lance 3 dés de couleurs différentes. Quelle est la probabilité d'obtenir un total :

1) de 15 points ?
2) d'au moins 15 points ?
3) de strictement moins de 15 points ?

2.10 On lance deux fois un dé à six faces bien équilibré. Les deux résultats sont désignés par X et Y. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) $X = Y$
2) $X + Y \geq 11$
3) $|X - Y| \leq 2$
4) XY est un nombre pair
5) X est un multiple de Y
6) $\max(X;Y) \geq 5$

2.11 Calculer la probabilité de gagner quelque chose à la loterie suisse à numéros (il faut entre 3 et 6 numéros gagnants). Rappel : il faut choisir 6 nombres entre 1 et 45.

2.12 Calculer la probabilité qu'une main de 9 cartes tirées parmi 36 cartes :

1) contienne les 4 as;
2) ne contienne aucun coeur.

3. Approche empirique de la notion de probabilité

Si un dé n'est pas parfaitement équilibré (forme irrégulière, dé truqué, …) l'univers n'est plus formé de résultats équiprobables. Dans ce cas la définition intuitive ne peut pas être utilisée pour trouver la probabilité d'un événement. Comment déterminer la probabilité d'apparition des faces de ce dé ? Pour estimer ces probabilités, on lance le dé un grand nombre de fois. Si en répétant 1000 fois l'expérience, on obtient par exemple 452 fois la face 5, la fréquence d'apparition de cette face est de 45,2% soit le rapport entre le nombre de fois où l'événement s'est réalisé et le nombre de fois où l'expérience a été effectuée. La probabilité de cet événement est sans doute proche de cette fréquence.

On a observé depuis longtemps une stabilisation de la fréquence d'un événement quand on répète, dans des conditions identiques, un grand nombre de fois l'expérience ou l'observation. Cette constatation nous amène à formuler une version naïve du théorème de Bernoulli ou **loi des grands nombres** : si dans les mêmes conditions, on répète une expérience aléatoire indéfiniment, la fréquence d'un événement associé à cette expérience tend vers une valeur limite. Ce principe a été formulé et démontré au début du $18^{\text{ème}}$ siècle par Jacob Bernoulli. La valeur limite prévue par le théorème de Bernoulli est définie comme la probabilité de l'événement considéré.

Définition 2.2 Soit A un événement associé à une expérience aléatoire. Si l'expérience aléatoire est répétée N fois dans les mêmes conditions et si l'événement A se réalise n fois, on définit la probabilité de l'événement A comme étant la limite de la fréquence :

$$P(A)=\lim_{N\to+\infty}\frac{n}{N}$$

Remarques

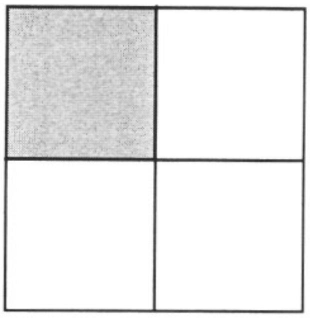
1) D'un point de vue pratique, il est impossible de répéter une expérience aléatoire indéfiniment. Le mieux que l'on puisse faire pour évaluer la probabilité d'un événement est de répéter l'expérience un grand nombre de fois.
2) Si l'univers d'une expérience aléatoire est continu, il n'est pas possible d'utiliser les définitions intuitives et empiriques où les probabilités attribuées aux résultats élémentaires servent à calculer les probabilités des événements. On attribue dans ce cas à chaque événement une probabilité basée sur le rapport des mesures (longueur, aire, volume, ...).

Exemples

1) On interroge 800 personnes choisies au hasard à Lausanne. 256 d'entre elles disent préférer les pistaches aux cacahuètes. On ne peut connaître avec certitude la probabilité qu'une personne choisie au hasard à Lausanne préfère les pistaches aux cacahuètes. Cependant, on peut l'estimer grâce à la fréquence donnée par cette enquête :

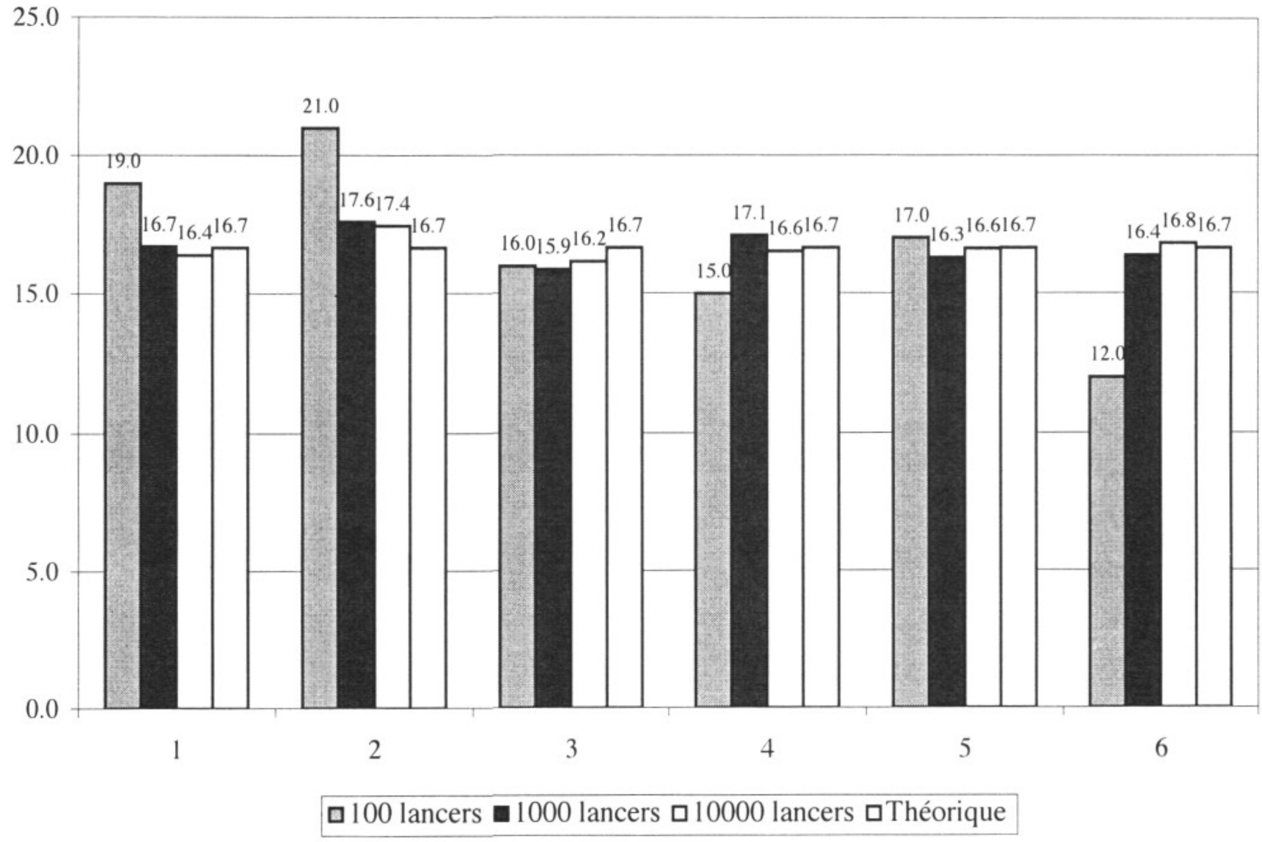
$$\frac{n}{N}=\frac{256}{800}=0,32$$

2) On lance au hasard une pièce de monnaie sur une surface carrée divisée en quatre parties égales. La probabilité que la pièce de monnaie tombe dans le carré supérieur gauche est de 25%



3) On peut simuler le lancement d'un dé avec un ordinateur. Si le générateur de nombres aléatoires est fiable, les résultats doivent montrer la convergence des fréquences empiriques vers la probabilité théorique :

Simulation du lancement d'un dé



4. Exercices

2.13 Le service informatique d'une entreprise a relevé sur une période de plusieurs mois, le temps d'occupation, par les employés de divers secteurs de l'entreprise des terminaux qui sont mis à leur disposition. Les temps d'occupation sont résumés dans le tableau:

Temps d'occupation en minutes	**Nombre d'usagers**
$0 \leq X < 30$	30
$30 \leq X < 60$	45
$60 \leq X < 120$	125
$120 \leq X < 240$	75
$240 \leq X < 480$	25

Calculer la probabilité qu'un usager ait un temps d'occupation :

1) supérieur ou égal à 30 minutes mais inférieur à 60 minutes;
2) supérieur ou égal à 120 minutes mais inférieur à 480 minutes;
3) dépassant 8 heures.

2.14 Le magasin VANTOUX a observé que 257 de ses 480 ventes de la semaine dernière sont d'un montant de moins de Fr 20.- Quelle est la probabilité qu'un client choisi au hasard ait effectué un achat de Fr 20.- ou plus ?

2.15 On lance une fléchette au hasard sur une cible circulaire de 60 cm de diamètre. Quelle est la probabilité que la fléchette soit à moins de 10 cm du centre ?

2.16 On choisit un point au hasard sur une règle de 30 cm de long. Quelle est la probabilité que ce point soit situé à moins de 5 cm du centre de la règle ?

2.17 Deux personnes se donnent rendez-vous en un endroit déterminé entre midi et 13 heures. Elles conviennent que la première arrivée s'en ira après une attente de 20 minutes au maximum. Quelle est la probabilité que le rendez-vous ait lieu ?

2.18 La résistance de rupture d'un certain type de pilier varie uniformément entre 145 et 165 kN. De plus, on admet que la charge appliquée à un pilier peut varier uniformément entre 120 et 150 kN. Calculer la probabilité qu'il y ait rupture ?

2.19 Les durées de vie de deux équipements A et B sont réparties uniformément entre 10 et 16 h, respectivement 13 et 17 h. Les équipements sont mis en marche simultanément. Quelle est la probabilité que :

1) A tombe en panne avant B ?
2) la somme des deux durées de vie soit au moins égale à 30 h ?

5. Approche mathématique de la notion de probabilité

Définition 2.3 **Une expérience aléatoire** doit satisfaire aux deux propriétés :

- on ne peut pas prédire avec certitude le résultat de l'expérience;
- on peut énumérer, **avant** l'expérience, tous les résultats possibles.

Exemples

1) Lancer une pièce de monnaie.
2) Jeter un dé.
3) Choisir une carte au hasard dans un jeu de cartes.

Définition 2.4 **L'univers d'une expérience aléatoire** est l'ensemble U de tous les résultats de cette expérience aléatoire.

Exemples

1) Jeu de pile ou face : $U = \{P ; F\}$ 2 résultats
2) Jeter une fois un dé : $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ 6 résultats
3) Jeter deux fois de suite le même dé : $U = \{(1;1) ; (1;2) ; (1;3) ; \cdots ; (6;6)\}$ 36 résultats

Définition 2.5 Soit U l'univers d'une expérience aléatoire. **Un événement** est un sous ensemble de l'univers. On note les événements par des lettres majuscules. Le sous-ensemble vide $\varnothing$ est **l'événement impossible** et l'univers U **l'événement certain**.

Exemples

1) On lance une pièce de monnaie. L'univers de cette expérience aléatoire est $U = \{ P ; F \}$
   Les événements sont : $A = \varnothing$, $B = \{P\}$, $C = \{F\}$, $D = \{P ; F\}$
2) On lance un dé à 6 faces. L'univers de cette expérience aléatoire est $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
   $A = \{4 ; 5 ; 6\}$ représente l'événement "obtenir un nombre > 3" et $B = \{2 ; 4 ; 6\}$ l'événement "obtenir un nombre pair".
3) On lance deux dés. L'événement "on obtient un total de 1 point" est impossible et l'événement "on obtient un total de moins de 15 points" certain.

Remarques

1) Si l'univers n'est pas dénombrable, il faut introduire la notion de σ–algèbre pour définir les événements.
2) Rappel de théorie des ensembles : si l'ensemble U est constitué de n éléments, il existe 2^n sous-ensembles de U
3) L'événement impossible n'est jamais réalisé et l'événement certain est toujours réalisé.