

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
по дисциплине «Моделирование систем» на тему:
«Регрессионный анализ: парный и множественный»

Цель лабораторной работы – изучить основные понятия корреляционно-регрессионного анализа. По результатам экспериментов в химической технологии научиться строить математические модели, позволяющие адекватно описывать исследуемые процессы.

I. Теоретическая часть

Линейная регрессия

Пусть задана система случайных величин X и Y , при этом указанные случайные величины зависимы.

Представим одну из случайных величин Y как линейную функцию другой случайной величины X :

$$Y = g(x) = ax + b, \quad (1)$$

где a и b – параметры (коэффициенты модели), которые необходимо определить (рис. 1).

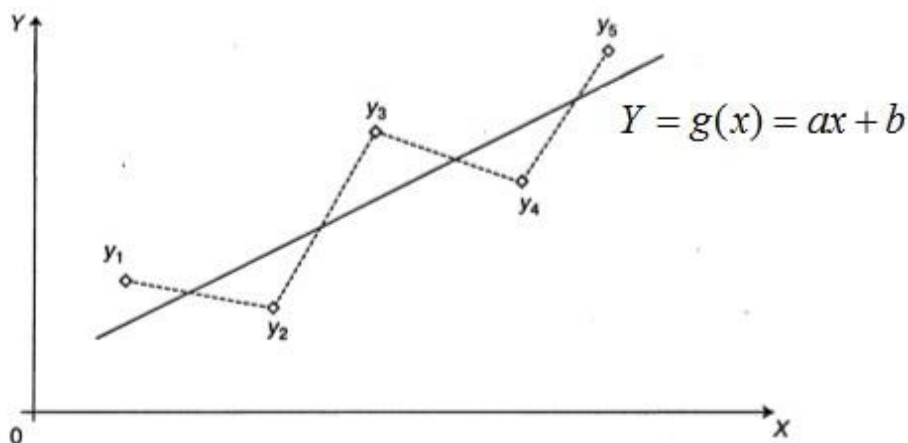


Рис. 1 – Динамика изменения признака Y

В общем случае эти параметры могут быть определены различными способами, наиболее распространённым из них является метод наименьших квадратов (МНК).

МНК применяется и для нахождения параметров множественной регрессии. В этом случае существенно возрастает объём вычислений, поэтому, как правило используются ЭВМ.

Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа

1. Среднее значение переменной определяется по следующей формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

где x_i - эмпирическое значение переменной x ;
 n - число наблюдений.

2. Дисперсия:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

3. Ковариация:

$$Cov_{xy} = \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})].$$

4. Коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту, или силу связи между переменными y и x . Значения, принимаемые r_{xy} , заключены в пределах от -1 до +1. При положительном значении r_{xy} имеет место положительная корреляция, т. е. с увеличением (уменьшением) значений одной переменной (x) значение другой (y) соответственно увеличивается (уменьшается). При отрицательном значении r_{xy} имеет место отрицательная корреляция, т.е. с увеличением (уменьшением) значений x значения y соответственно уменьшаются (увеличиваются). При изучении экономического явления, зависящего от многих факторов, строится множественная регрессионная зависимость. В этом случае для характеристики тесноты связи используется коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2}},$$

где $\sigma_{ост}^2$ - остаточная дисперсия зависимой переменной;

$\sigma_{общ}^2$ - общая дисперсия зависимой переменной.

5. Общая дисперсия определяется по формуле:

$$\sigma_{общ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}.$$

6. Остаточная дисперсия определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{iT})^2}{n - 1},$$

где y_{iT} - теоретические значения переменной y , полученные по уравнению регрессии (1) при подстановке в него наблюдаемых фактических значений x_i .

Остаточная дисперсия характеризует ту часть рассеяния переменной y , которая возникает из-за всякого рода случайностей влияния неучтенных факторов.

7. Коэффициент детерминации служит для оценки точности регрессии, т.е. соответствия полученного уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным, и вычисляется по формуле:

$$D = 1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2}.$$

Изменяется D в пределах от 0 до 1.

Построение линейной многофакторной регрессионной модели

При расчёте статистических зависимостей технологических объектов чаще всего возникает необходимость найти линейную форму связей n переменных:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \quad (2)$$

Построение многофакторной модели содержит не только этапы вычислений регрессионных коэффициентов, но и оценку правомерности ее использования по различным критериям.

Построение модели выполняется по следующим этапам:

- априорное исследование системы;

- формирование перечня факторов и их логический анализ;
- сбор исходных данных и их первичная обработка;
- спецификация функции регрессии;
- оценка функции регрессии;
- отбор главных факторов;
- проверка адекватности модели;
- интерпретация модели;
- прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Последний этап может не выполняться, если только требуется оценить влияние выбранных факторов на отклик системы.

Проверка значимости коэффициентов

Как отмечалось выше, коэффициенты регрессии находятся по МНК. Используемая нормальная система линейных уравнений, может быть записана через коэффициенты корреляции. Выборочные коэффициенты корреляции должны быть статистически значимыми. В математической статистике доказано, что условием значимости коэффициентов корреляции является:

$$\frac{|r_{yx}| \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{yx}^2}} > t_{T(f=N-2)},$$

где N – число опытов;

t_T – значения t -критерия, которое следует находить по таблицам Стьюдента для выбранного уровня значимости q (например, $q=5\%$) и числа степеней свободы $f=N-2$. Если в результате проверки этого условия какой-либо коэффициент корреляции окажется статистически незначимым, то его исключают из системы уравнений.

Оценить значимость коэффициентов регрессии позволяет метод регрессионного анализа, одна из предпосылок которого предполагает отсутствие корреляции между факторами. При этом для проверки значимости коэффициентов регрессии следует найти отношение абсолютного значения

коэффициента к его среднему квадратическому отклонению $t_{b_i} = \frac{|b_i|}{s_{b_i}}$ и сравнить его с критерием значимости.

Если условие соблюдается, то коэффициент b_i значим

$$\frac{|b_i|}{s_{b_i}} = t_{b_i} > t_{T(q,f)}.$$

Проверка адекватности математической модели

Линейное уравнение регрессии адекватно описывает исследуемый объект, если выполняется неравенство:

$$F = \frac{s_{ост}^2}{s_0^2} < F_{T(f_1, f_2)}$$

где F_T - значение критерия Фишера, которое следует находить по таблицам распределения Фишера для выбранного уровня значимости q (в технических исследованиях обычно $q=5\%$), степеней свободы

$$f_1 = Nm - n - 1 \text{ и } f_2 = N(m - 1)$$

(m – число параллельных опытов, N – количество опытов, n – количество факторов); s_0^2 – дисперсия опыта; $s_{ост}^2$ – остаточная дисперсия.

II. Практическая часть

1. Считать из файла экспериментальные данные (при использовании среды Matlab, например, функция load).

2. Для получения, перечисленных в теоретической части, статистических оценок можно использовать следующие средства:

- написать программный код на любом языке программирования;
- написать код в среде MATLAB;
- использовать при написании кода стандартные функции среды Matlab, приведенные в таблице 1 (необходимое выбрать).

Таблица 1

Название функции	Описание функции
bcotstrp	Бутстреп оценки. Оценка статистик для данных с дополнительным объемом выборки посредством математического моделирования
corrcoef	Оценка коэффициента корреляции (функция MATLAB)
cov	Оценка матрицы ковариаций (функция MATLAB)
crosstab	Кросстабуляция для нескольких векторов с положительными целыми элементами
geomean	Среднее геометрическое
grpstats	Сводные статистики по группам
harmmean	Среднее гармоническое
igr	Разность между 75% и 25% квантилями или между 3-й и 1-ой квартилями

mad	Среднее абсолютное отклонение от среднего значения
mean	Среднее арифметическое (функция MATLAB)
median	Медиана (функция MATLAB)
moment	Оценка центрального момента. Порядок момента задается как аргумент функции.
nanmax	Максимальное значение в выборке. Нечисловые значения в выборке игнорируются.
nanmean	Среднее арифметическое выборки. Нечисловые значения в выборке игнорируются.
nanmedian	Медиана выборки. Нечисловые значения в выборке игнорируются.
nanmin	Минимальное значение в выборке. Нечисловые значения в выборке игнорируются.
nanstd	Оценка среднего квадратического отклонения выборки. Нечисловые значения в выборке игнорируются.
nansum	Сумма элементов выборки. нечисловые значения в выборке игнорируются.
prctile	Выборочная процентная точка (процентиль)
range	Размах выборки
skewness	Оценка коэффициента асимметрии
std	Оценка среднего квадратического отклонения (функция MATLAB)
tabulate	Определение частот целых положительных элементов вектора случайных значений.
trimmean	Оценка среднего арифметического значения, находящаяся с игнорированием заданного процента минимальных и максимальных элементов в выборки
var	Оценка дисперсии

3. Для построения регрессионной модели можно использовать следующие средства:

- написать программный код на любом языке программирования (в этом случае необходимо использовать аналитические формулы);
- написать код в среде Matlab;
- использовать при написании кода стандартные функции среды Matlab, приведенные в таблице 2 (необходимое выбрать).

Таблица 2

Название функции	Описание функции
anova1	Однофакторный дисперсионный анализ
anova2	Двухфакторный дисперсионный анализ
anovan	Многофакторный дисперсионный анализ

aootool	Однофакторный анализ ковариационных моделей. Выходными параметрами функции являются: Интерактивный график исходных данных линейных математических моделей; Таблица однофакторного дисперсионного анализа; Таблица с оценками параметров математических моделей.
dummyvar	Условное кодирование переменных. Функция возвращает матрицу единиц и нулей содержащую число колонок равное сумме чисел возможных значений в столбцах исходной матрицы. Единицы и нули характеризуют отсутствие или наличие определенного значения в каждой колонки исходной матрицы
friedman	Тест Фридмана (непараметрический двухфакторный дисперсионный анализ Фридмана)
glmfit	Определение параметров обобщенной линейной модели
glmval	Прогнозирование с использованием обобщенной линейной модели
kruskalwallis	Тест Краскала-Уоллиса (непараметрический однофакторный дисперсионный анализ)
leverage	Оценка степени влияния отдельных наблюдений в исходном многомерном множестве данных на значения параметров линии регрессии.
lskov	Линейная регрессия (метод наименьших квадратов) при заданной матрице ковариаций (встроенная функция MATLAB)
manoval	Однофакторный многомерный дисперсионный анализ
manovacluster	Дендрограмма, показывающая группировку исходных данных в кластеры по средним значениям. В качестве исходных данных используются выходные данные однофакторного многомерного дисперсионного анализа (manoval)
multcompare	Множественное сравнение оценок средних, параметров линии регрессии и т.д. в качестве входных параметров используются выходные параметры функций anova1, anova2, anovan, aootool, friedman, kruskalwallis
polyconf	Определение доверительных интервалов для линии регрессии
polyfit	Полиномиальная регрессия (встроенная функция MATLAB)
polyval	Прогноз с использованием полиномиальной регрессии (встроенная функция MATLAB)
rcoplot	График остатков
regress	Множественная линейная регрессия
regstats	Функция диагностирования линейной множественной модели. Графический интерфейс.
ridge	Линейная регрессия с применением гребневых оценок (ридж-регрессия)
rstool	Интерактивный подбор и визуализация поверхности отклика
robustfit	Робастная оценка параметров регрессионной модели
stepwise	Пошаговая регрессия (графический интерфейс пользователя)
x2fx	Преобразовывает матрицу факторов в матрицу коэффициентов линий регрессии

4. Используя средства, например MATLAB, изобразить графически (для двух переменных) экспериментальные данные и полученное уравнение регрессии (lsline - график линейной регрессионной модели в среде MATLAB). Данные эксперимента подписать.

5. Записать полученные коэффициенты линейного уравнения регрессии в файл (например в среде Matlab, используя функцию - save).

III. Индивидуальные задания

Вариант №1

Исследовался процесс получения сульфадимизина. Процесс характеризуется переменной y – выход (в %) сульфадимизина по сульгину. Выделены шесть факторов;

X_1 - время реакции (ч),

X_2 - содержание ацетилацетона в реакционной массе (%),

X_3 - содержание уксусной кислоты в реакционной массе (%),

X_4 - температура реакционной массы ($^{\circ}\text{C}$),

X_5 - количество ацетилацетона (%),

X_6 - качество сульгина (%).

Опыты проводились на лабораторной установке, состоящей из стеклянной конической колбы ёмкостью 250 мл, снабжённой металлической конической мешалкой и обратным холодильником. Колба нагревалась на электрической бане, заполненной вазелиновым маслом. Результаты эксперимента приведены в табл. 3 (Температура реакционной массы, количество ацетилацетона и качество сульгина считались постоянными).

Таблица 3 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	18,09	20,28	17,98	81,93
2	17,56	23,67	16,99	84,80
3	16,09	26,89	12,21	82,10
4	18,98	25,98	13,67	91,90
5	19,97	28,00	16,99	84,80
6	18,98	27,98	12,09	89,60
7	16,51	21,19	14,87	84,90
8	19,91	20,98	15,61	88,48
9	18,59	25,67	16,17	83,42
10	18,95	24,56	17,09	85,16

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1 , X_2 , X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №2

Рассматривалась оптимизация прочности сцепления электролитических железных покрытий на образцах стали 45 с мартенситной структурой. В качестве независимых переменных были выбраны:

X_1 - начальная плотность тока ($a/\partial m^3$),

X_2 - кислотность электролита (pH),

X_3 - выдержка образца без тона (c).

Плотность сцепления измеряли по методу отрыва. Поверхность к покрытию для всех образцов подготавливалась одинаково: ее обезжиривали венской известью, подвергали анодному травлению в хлоридном электролите (3 мин при $D_a = 20 a/\partial m^2$) и анодной обработке в 30 %-ном растворе H_2SO_4 (30-40 с при $D_a = 60 \div 80 a/\partial m^2$). После этого образец загружали в ванну, выдерживали без тока, а затем покрывали до нужной толщины.

Результаты эксперимента приведены в табл. 4.

Таблица 4 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	2,09	0,10	75,08	2510
2	2,93	0,89	74,02	1700
3	3,99	0,34	45,98	2700
4	4,00	0,56	48,23	1457
5	2,56	0,46	62,66	1360
6	3,67	0,78	55,87	1890
7	3,98	0,39	57,76	2560
8	2,08	0,56	49,03	2100
9	3,96	0,78	52,08	1567
10	3,54	0,23	67,09	1367
11	2,78	0,59	71,80	2089

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №3

Исследовался процесс электроосаждения в зависимости от состава железоникелевых покрытий. К основным факторам процесса относятся:

X_1 – величина катодной плотности тока, $a/\partial m^2$;

X_2 – кислотность электролита, pH ;

X_3 – концентрация сульфата железа (III) в электролите, $г/л$;

X_4 – концентрация сахараина, $г/л$.

Переменной состояния является содержание никеля в осадках – y (%).

Результаты эксперимента приведены в табл. 5.

Таблица 5 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	1,09	3,09	27,98	0,50	79,4
2	9,99	3,06	26,87	2,39	61,1
3	5,89	2,56	14,01	1,89	78,8
4	6,73	2,45	18,99	1,45	60,5
5	2,45	2,39	15,33	1,89	88,4
6	4,67	3,08	16,44	2,51	76,0
7	5,89	2,35	25,82	0,89	88,0
8	8,33	2,78	23,89	0,67	79,4
9	2,67	2,89	21,12	0,56	79,9
10	1,73	2,67	19,84	2,30	64,6

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №4

Исследовался процесс экстракции пентоксида ниобия. Варьировались факторы:

X_3 – концентрация серной кислоты, г/л, и

X_4 – концентрация сульфита аммония, г/л.

Переменной состояния объекта являлась степень извлечения пентоксида ниобия в органическую фазу – y (%).

Результаты эксперимента приведены в табл. 6.

Таблица 6 Результаты эксперимента

Опыты	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	240,90	200,90	87,64
2	360,03	225,67	84,46
3	238,98	75,09	81,66
4	279,11	100,90	76,72
5	289,22	150,45	88,54
6	245,67	127,56	74,26
7	235,89	120,78	91,96
8	356,22	220,45	66,82
9	341,90	80,89	65,90
10	239,99	90,45	90,34
12	320,78	125,56	87,12
13	342,56	112,34	67,45
14	241,78	210,67	69,34
16	300,09	224,99	75,66
17	243,56	80,90	65,34

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_3 , X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №5

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 - объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес %;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_1, X_2, X_3 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 7.

Таблица 7 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	5,01	1,50	370,90	0,1673
2	3,02	1,54	360,01	-0,0888
3	3,45	1,45	400,00	-0,7090
4	4,67	1,89	376,89	-0,4870
5	4,98	1,95	389,23	-0,6790
6	3,89	1,53	388,45	-0,0875
7	4,76	1,56	368,12	-0,9650
8	3,05	1,45	360,09	+0,6890
9	4,24	1,58	399,99	-0,0875
10	4,55	1,89	368,56	-1,2650
11	4,54	1,76	378,23	+0,2330

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №6

Проводилось исследование с целью составления математической модели ящичного экстрактора. В качестве факторов были выбраны:

X_1 – диаметр турбинки, мм ,

X_2 – скорость вращения турбинки, об/мин;

X_3 – температура, $^{\circ}\text{C}$;

X_4 – концентрация кислоты в водном растворе, г-экв/л;

X_5 – высота слоя жидкости в ячейке, мм;

X_6 – соотношение фаз в эмульсии.

Переменная состояния – продолжительность полного расплавления, мин.

Результаты эксперимента приведены в табл. 8.

Таблица 8 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Переменная состояния y
1	90,99	600,09	27,99	0,55	200,04	0,9090	6,99
2	80,02	500,02	22,09	0,11	225,04	0,7140	15,65
3	10,00	580,98	30,05	0,69	170,98	0,8689	10,50
4	87,90	700,02	25,98	0,23	195,60	0,7534	10,80
5	94,99	680,90	28,45	0,34	210,66	0,9000	8,85
6	98,34	749,23	29,78	0,45	180,45	0,7200	11,65

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №7

Исследовался процесс получения фосфита натрия при обработке фосфитсодержащего шлама раствором карбоната натрия. Опыты проводили на лабораторной установке. Были выбраны следующие факторы:

X_1 – температура процесса, $^{\circ}\text{C}$;

X_2 – содержание карбоната натрия в процентах от стехиометрического количества ; X_3 – время контакта, мин;

X_4 – соотношение жидкой и твердой фаз.

Переменными состояниями являлись степень перехода фосфита натрия в раствор (y_1) и содержание CO_2 в растворе.

Результаты эксперимента приведены в табл. 9.

Таблица 9 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	70,03	120,09	75,05	8,5:1	57,22
2	30,99	80,09	15,90	5,5:1	68,31
3	45,45	98,34	28,78	6,6:1	88,82
4	56,78	79,90	37,78	7,6:1	75,73
5	62,98	101,01	49,50	8,0:1	60,29
6	39,67	120,04	70,33	6,9:1	67,32
7	49,02	110,90	60,22	7,0:1	84,48
8	57,90	118,96	50,11	5,8:1	74,56
9	69,98	85,78	40,33	7,5:1	73,53

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №8

Требуется составить адекватное описание процесса образования герметика. Процесс характеризуется переменной y – предел прочности герметика на разрыв (кг/см^2). Выделены четыре фактора:

X_1 – содержание парахинондиоксима в смеси;

X_2 – содержание двуокиси марганца;

X_3 – содержание цемента;

X_4 – содержание растворителя (все в граммах на 100 г бутылкаучука).

Результаты эксперимента приведены в табл. 10.

Таблица 10 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	0,50	4,75	66,02	100,00	4,2
2	2,39	3,75	42,00	90,99	4,7
3	1,89	3,98	65,99	93,89	4,3
4	1,45	4,02	50,98	97,90	3,6
5	1,89	4,72	47,34	91,67	4,5
6	2,51	6,98	45,36	95,08	4,0
7	0,89	3,89	49,99	96,70	4,9
8	0,67	4,10	52,98	99,99	5,0
9	0,56	4,23	56,77	100,02	3,4
10	2,30	4,56	60,34	91,91	5,1
12	2,45	4,67	56,89	93,56	5,2
13	0,67	4,50	65,23	96,99	3,7

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №9

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 - объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес.%;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_2, X_3, X_4 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 11.

Таблица 11 Результаты эксперимента

Опыты	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	2,00	400,00	42,23	-0,9723
2	1,51	360,99	-37,77	-0,9460
3	1,99	399,90	-35,90	-0,9990
4	1,78	370,56	40,90	-0,9370
5	1,90	365,00	36,98	-0,9550
6	1,89	380,98	15,09	-0,9875
7	1,55	390,67	27,90	-1,1650
8	1,67	378,99	-20,08	+0,2330
9	1,89	385,80	-10,23	-1,6790
10	1,56	378,99	-4,90	-1,0875
11	1,83	359,89	6,90	-1,9650
12	1,95	400,10	4,78	+1,6890

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
 - определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
 - построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
 - построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №10

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 - объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес.%;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_3, X_4, X_5 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 12.

Таблица 12 Результаты эксперимента

Опыты	X_3	X_4	X_5	Переменная состояния y
1	400,00	40,90	1,01	-0,3723
2	360,99	36,98	0,52	-0,3460
3	399,90	15,09	0,67	-0,2090
4	370,56	27,90	0,99	-0,2170
5	365,00	-20,08	0,95	-0,1550
6	380,98	-10,23	0,56	-0,1875
7	390,67	-4,90	0,88	-1,2650
8	378,99	6,90	0,77	+0,2330
9	385,80	4,78	0,93	+0,1098

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_3, X_4, X_5 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №11

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 - объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес.%;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_1, X_3, X_4 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 13.

Таблица 13 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	5,01	400,00	40,90	0,1673
2	3,02	360,99	36,98	-0,0888
3	3,45	399,90	15,09	-0,7090
4	4,67	370,56	27,90	-0,4870
5	4,98	365,00	-20,08	-0,6790
6	3,89	380,98	-10,23	-0,0875
7	4,76	390,67	-4,90	-0,9650
8	3,05	378,99	6,90	+0,6890
9	4,24	385,80	4,78	-0,0875
10	4,55	390,12	-37,01	-1,2650
11	4,54	399,10	-20,04	+0,2330
12	3,09	376,09	4,09	+0,1998
13	5,02	370,00	-4,09	+0,2056

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №12

Требуется составить адекватное описание процесса образования герметика. Процесс характеризуется переменной y – предел прочности герметика на разрыв (кг/см^2). Выделены четыре фактора:

X_1 – содержание парахинондиоксима в смеси;

X_2 – содержание двуокиси марганца;

X_3 – содержание цемента;

X_4 – содержание растворителя (все в граммах на 100 г бутилкаучука).

Результаты эксперимента приведены в табл. 14.

Таблица 14 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	0,55	5,75	66,02	110,00	4,1
2	1,39	3,75	42,00	91,99	3,7
3	1,89	3,98	65,99	93,89	4,3
4	1,45	3,02	50,98	97,90	3,6
5	1,89	4,72	47,34	91,67	4,5
6	2,51	6,98	45,36	95,08	4,0
7	0,89	3,89	49,99	96,70	3,9
8	0,67	4,10	52,98	98,99	5,0
9	0,56	4,23	56,77	101,02	3,4
10	4,30	4,56	60,34	91,91	4,1

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №13

Проводилось исследование с целью составления математической модели ящичного экстрактора. В качестве факторов были выбраны:

X_1 – диаметр турбинки, мм ,

X_2 – скорость вращения турбинки, об/мин;

X_3 – температура, °C ;

X_4 – концентрация кислоты в водном растворе, г-экв/л;

X_5 – высота слоя жидкости в ячейке, мм;

X_6 – соотношение фаз в эмульсии.

Переменная состояния – продолжительность полного расплавления, мин.

Результаты эксперимента приведены в табл. 15.

Таблица 15 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Переменная состояния y
1	92,99	600,09	27,99	0,55	200,04	0,9090	7,99
2	86,02	500,02	22,09	0,11	225,04	0,7140	12,65
3	100,00	580,98	30,05	0,69	170,98	0,8689	11,50
4	87,90	700,02	25,98	0,23	195,60	0,7534	10,80
5	95,99	680,90	28,45	0,34	210,66	0,9000	9,85
6	98,34	749,23	29,78	0,45	180,45	0,7200	11,65

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №14

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 – объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес %;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_1, X_2, X_3 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 16.

Таблица 16 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	5,01	1,50	370,90	0,1873
2	3,02	1,54	360,01	-0,0999
3	3,45	1,45	400,00	-0,9090
4	4,67	1,89	376,89	-0,5870
5	4,98	1,95	389,23	-0,6790
6	3,89	1,53	388,45	-0,0875
7	4,76	1,56	368,12	-0,9650
8	3,05	1,45	360,09	+0,6890
9	4,24	1,58	399,99	-0,0875
10	4,55	1,89	368,56	-1,3650

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №15

Исследовался процесс получения сульфадимизина. Процесс характеризуется переменной y – выход (в %) сульфадимизина по сульгину. Выделены шесть факторов;

X_1 - время реакции (τ),

X_2 - содержание ацетилацетона в реакционной массе (%),

X_3 - содержание уксусной кислоты в реакционной массе (%),

X_4 - температура реакционной массы ($^{\circ}\text{C}$),

X_5 - количество ацетилацетона (%),

X_6 - качество сульгина (%).

Опыты проводились на лабораторной установке, состоящей из стеклянной конической колбы ёмкостью 250 мл, снабжённой металлической конической мешалкой и обратным холодильником. Колба нагревалась на электрической бане, заполненной вазелиновым маслом. Результаты эксперимента приведены в табл. 17 (Температура реакционной массы, количество ацетилацетона и качество сульгина считались постоянными).

Таблица 17 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	17,56	23,67	17,98	81,93
2	16,09	26,89	12,21	84,80
3	18,98	25,98	13,67	82,10
4	19,97	28,00	16,99	91,90
5	18,98	27,98	12,09	89,60
6	16,51	21,19	14,87	84,90
7	19,91	20,98	15,61	88,48
8	18,59	25,67	16,17	83,42
9	18,95	24,56	17,09	85,16

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1 , X_2 , X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №16

Рассматривалась оптимизация прочности сцепления электролитических железных покрытий на образцах стали 45 с мартенситной структурой. В качестве независимых переменных были выбраны:

X_1 - начальная плотность тока ($a/\partial m^3$),

X_2 - кислотность электролита (pH),

X_3 - выдержка образца без тона (c).

Плотность сцепления измеряли по методу отрыва. Поверхность к покрытию для всех образцов подготавливалась одинаково: ее обезжиривали венской известью, подвергали анодному травлению в хлоридном электролите (3 мин при $D_a = 20 a/\partial m^2$) и анодной обработке в 30 %-ном растворе H_2SO_4 (30-40 с при $D_a = 60 \div 80 a/\partial m^2$). После этого образец загружали в ванну, выдерживали без тока, а затем покрывали до нужной толщины.

Результаты эксперимента приведены в табл. 18.

Таблица 18 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	2,09	0,10	75,08	2510
2	2,93	0,89	74,02	1700
3	3,99	0,56	62,66	2700
4	3,67	0,46	55,87	1457
5	3,98	0,78	57,76	1360
6	2,08	0,39	49,03	1890
7	3,96	0,78	52,08	2560
8	3,54	0,23	67,09	2100
9	2,78	0,59	71,80	1367

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №17

Исследовался процесс электроосаждения в зависимости от состава железоникелевых покрытий. К основным факторам процесса относятся:

X_1 – величина катодной плотности тока, $a/\text{дм}^2$;

X_2 – кислотность электролита, pH ;

X_3 – концентрация сульфата железа (III) в электролите, $г/л$;

X_4 – концентрация сахараина, $г/л$.

Переменной состояния является содержание никеля в осадках – y (%).

Результаты эксперимента приведены в табл. 19.

Таблица 19 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	1,09	3,09	27,98	0,50	79,4
2	9,99	3,06	26,87	2,39	61,1
3	5,89	2,56	14,01	1,89	78,8
4	6,73	2,45	18,99	1,45	60,5
5	4,67	2,39	15,33	1,89	88,4
6	5,89	2,35	25,82	2,51	76,0
7	8,33	2,78	23,89	0,89	79,4
8	2,67	2,89	21,12	0,56	79,9
9	1,73	2,67	19,84	2,30	64,6

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №18

Исследовался процесс экстракции пентоксида ниобия. Варьировались факторы:

X_3 – концентрация серной кислоты, г/л, и

X_4 – концентрация сульфита аммония, г/л.

Переменной состояния объекта являлась степень извлечения пентоксида ниобия в органическую фазу – y (%).

Результаты эксперимента приведены в табл. 20.

Таблица 20 Результаты эксперимента

Опыты	X_3	X_4	Переменная состояния y
1	240,90	200,90	87,64
2	360,03	225,67	84,46
3	238,98	100,90	76,72
4	289,22	150,45	88,54
5	245,67	220,45	74,26
6	235,89	80,89	66,82
7	239,99	90,45	65,90
8	320,78	125,56	90,34
9	342,56	112,34	67,45
10	241,78	210,67	69,34
12	300,09	224,99	75,66
13	243,56	80,90	65,34

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_3 , X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №19

Ставилась задача получения математической модели для изучения реакции гидрогенолиза индивидуальных сероорганических соединений. Исследовался процесс гидродесульфурации дизельного топлива на лабораторной установке. Варьировалось пять факторов:

X_1 – отношение водорода к сырью в исходной смеси, причем $X_1 = \ln(\gamma_{H_2} / \gamma_{сырье})$;

X_2 – условное время контакта, связанное соотношением $X_2 = \ln n_0$ с n_0 - объемной скоростью подачи реагирующего компонента, $с/(с*ч)$;

$X_3 = \frac{1}{T}$, где T – абсолютная температура, $^{\circ}K$;

X_4 – исходная концентрация, вес %;

X_5 – размер зерна, условные единицы.

Было решено оставить только три фактора X_1, X_2, X_3 .

Результаты эксперимента приведены в табл. 21.

Таблица 21 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	Переменная состояния y
1	5,01	1,50	370,90	0,1673
2	3,02	1,54	360,01	-0,0888
3	3,45	1,45	400,00	-0,7090
4	4,67	1,89	376,89	-0,4870
5	4,98	1,95	389,23	-0,6790
6	4,76	1,53	388,45	-0,9650
7	3,05	1,56	368,12	+0,6890
8	4,24	1,58	399,99	-0,0875
9	4,55	1,89	368,56	-1,2650
10	4,54	1,76	378,23	+0,2330

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

Вариант №20

Проводилось исследование с целью составления математической модели ящичного экстрактора. В качестве факторов были выбраны:

X_1 – диаметр турбинки, мм ,

X_2 – скорость вращения турбинки, об/мин;

X_3 – температура, $^{\circ}\text{C}$;

X_4 – концентрация кислоты в водном растворе, г-экв/л;

X_5 – высота слоя жидкости в ячейке, мм;

X_6 – соотношение фаз в эмульсии.

Переменная состояния – продолжительность полного расплавления, мин.

Результаты эксперимента приведены в табл. 22.

Таблица 22 Результаты эксперимента

Опыты	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Переменная состояния y
1	90,99	600,09	27,99	0,55	200,04	0,9090	6,99
2	80,02	500,02	22,09	0,11	225,04	0,7140	15,65
3	10,00	580,98	30,05	0,69	170,98	0,8689	10,50
4	87,90	700,02	25,98	0,23	195,60	0,7534	10,80
5	94,99	680,90	28,45	0,34	210,66	0,9000	8,85
6	98,34	749,23	29,78	0,45	180,45	0,7200	11,65
7	95,22	699,23	27,44	0,38	199,23	0,7883	12,32

Требуется:

- определить для входных переменных математическое ожидание, дисперсию, ковариацию, коэффициент корреляции;
- определить для выходной зависимой переменной общую и остаточную дисперсию, коэффициент детерминации;
- построить линейную парную регрессионную модель (зависимость X_1 от y), найти коэффициенты модели (модель (1));
- построить линейную множественную регрессионную модель (зависимость X_1, X_2, X_3, X_4 от y), найти коэффициенты модели (модель (2));
- провести сравнительный анализ полученных моделей.

IV. Требования к оформлению отчёта

1. Титульный лист.
2. Лист, содержащий условие задачи, соответствующее варианту по списку преподавателя в журнале.
3. Распечатанный программный код.
4. Скриншоты работы программы.
5. Результаты работы программы.
6. Анализ полученных результатов.
7. Выводы.
8. Отчет принимается после демонстрации работы программного кода на компьютере.

V. Контрольные вопросы

1. Основные понятия моделирования.
2. Понятия: система, объект, модель.
3. Классификация моделей.
4. Классификация систем.
5. Детерминированные и стохастические модели, их обозначения в теории моделирования систем.
6. Дать определение: прогнозирование, предсказание, интерполяция, экстраполяция.
7. Постановка задачи о приближении функций.
8. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа.
9. Линейные регрессионные модели. Задача регрессионного анализа.
10. Парная и множественная регрессия.
11. Идея метода наименьших квадратов.
12. Примерный вид функции ошибки. Перечислить методы, которые могут быть использованы вместо НМК. Объяснить когда целесообразно их использование.
13. Почему используют метод наименьших квадратов?
14. Оценка качества регрессионной модели.
15. Задача корреляционного анализа.
16. Проверка значимости коэффициентов регрессионной модели.
17. Проверка на адекватность регрессионной модели.
18. Нелинейные регрессионные модели.
19. Основные функции среды MatLab, используемые в регрессионном анализе.

VI. Литература

Методическая литература

1. Методичні вказівки з курсу “Моделювання систем” для студентів III курсу спеціальностей “Інформаційні управляючі системи та технології”, “Спеціалізовані комп’ютерні системи” всіх форм навчання / Укл.: Н.О. Солодка, Л.В. Новікова, Л.І. Коротка. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2011. – 31 с. (МВ № 2111).
2. Інструкції до лабораторних робіт з дисципліни «Імітаційне моделювання» (повний факторний експеримент) для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр напрям підготовки 6.050101 «Комп’ютерні науки» професійне спрямування на спеціальність «Інформаційні управляючі системи та технології» денної та заочної форм навчання / Укл.: Л.І. Коротка, Н.Ю. Науменко. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2014. – 42 с. (МВ № 2922).
3. Інструкції до самостійної роботи з дисципліни «Імітаційне моделювання» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр напрям підготовки 6.050101 «Комп’ютерні науки» професійне спрямування на спеціальність «Інформаційні управляючі системи та технології» денної та заочної форм навчання / Укл.: Коротка Л.І., Науменко Н.Ю. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2014. – 19 с. (МВ №2981).

Библиотечная литература

1. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели" /Т.И. Алесинская// Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002.- 153 с.
2. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. / Е.В. Бережная, В.И. Бережной// 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с: ил.
3. Бобков С.П. Моделирование систем. Учебное пособие /С.П. Бобков, Д.О. Бытев// Иван.хим.-технол.ун-т, Иваново, 2008. – 156 с.
4. Боев В.Д. Компьютерное моделирование: Пособие для курсового и дипломного проектирования /В.Д. Боев, Д.И. Кирик, СПб: ВАС, 2011. -348 с.
5. Дворецкий Д.С. Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем: Учеб. пособие / Д.С. Дворецкий, С.И. Дворецкий, Е.И. Муратова, А.А. Ермаков// Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 80 с.
6. Духанов, А. В. Имитационное моделирование сложных систем: курс лекций / А.В. Духанов, О. Н. Медведева // Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 115 с.
7. Кельтон В Имитационное моделирование [Текст] /В. Кельтон, А. Лоу, В.. // СПб. : Питер, 2004. – 190 с.
8. Кобелев Н.Б. Основы имитационного моделирования экономических систем. Учебн. пособие / Н.Б. Кобелев// М.: Дело, 2003. – 366 с.
9. Моделирование систем: учебник для студ. высш. учебн. заведений /С.И. Дворецкий, М.Л. Муромцев, В.А. Погонин, А.Г. Схиртладзе// М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.
10. Петров, А.В. Моделирование систем. Учебное пособие. [Текст] / А.В. Петров // Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. Техн. Ун-та, 2000. - 268 с., ил.
11. Советов, Б. Я. Моделирование систем: Учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. / Б.Я. Советов, С.А Яковлев // М.: Высш. шк., 2001. — 343 с: ил.
12. Томашевский, В.М. Имитационное моделирование в среде GPSS [Текст] / В.М.Томашевский, О.Г.Жданова. // М.: Бестселлер, 2003. – 416 с.
13. Томашевський, В.М. Вирішення практичних завдань методами комп’ютерного моделювання: Навчальний посібник [Текст] / В.М.Томашевський, О.Г.Жданова, О.О.Жолдаков // К.: Корнійчук, 2001.- 268с.
14. Томашевський, В.М. Моделювання систем: Підручник для студентів ВНЗ./ В.М. Томашевський // К.: ВНУ, 2005, - 352 с.
15. Харин Ю.С. Основы имитационного и статистического моделирования /Ю.С. Харин, Малюгин В.И., Кириллица В.П. и др./ Учебное пособие Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 288 с ил.

VII. Приложения

Приложение 1

Критерий Кохрена при $q = 0,05$

$q \backslash f$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8584	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3907	0,3726	0,3555	0,3384	0,3254	0,3154	0,2756	0,2277	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0677
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0766	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Процентные точки распределения Стьюдента

f \ q	10%	5%	2%	1%	f \ q	10%	5%	2%	1%
1	6.31	12.71	31.82	63.66	18	1.73	2.10	2.55	2.88
2	2.92	4.30	6.96	9.92	19	1.73	2.09	2.54	2.86
3	2.35	3.18	4.54	5.84	20	1.72	2.09	2.53	2.85
4	2.13	2.78	3.75	4.60	21	1.72	2.08	2.52	2.83
5	2.02	2.57	3.36	4.03	22	1.72	2.07	2.51	2.82
6	1.94	2.45	3.14	3.71	23	1.71	2.07	2.50	2.81
7	1.89	2.36	3.00	3.50	24	1.71	2.06	2.49	2.80
8	1.86	2.31	2.90	3.36	25	1.71	2.06	2.49	2.79
9	1.83	2.26	2.82	3.25	26	1.71	2.06	2.48	2.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	27	1.70	2.05	2.47	2.77
11	1.80	2.20	2.72	3.11	28	1.70	2.05	2.47	2.76
12	1.78	2.18	2.68	3.05	29	1.70	2.05	2.46	2.76
13	1.77	2.16	2.65	3.01	30	1.70	2.04	2.46	2.75
14	1.76	2.14	2.62	2.98	40	1.68	2.02	2.42	2.70
15	1.75	2.13	2.60	2.95	60	1.67	2.00	2.39	2.66
16	1.75	2.12	2.58	2.92	120	1.66	1.98	2.36	2.62
17	1.74	2.11	2.57	2.90	∞	1.64	1.96	2.33	2.58

Критерий Фишера при $q = 0,05$

$f \backslash q$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	249,00	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69

Продолжение приложения

$f \backslash q$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00