Trabajo de Final de Grado

MARTEST
Hacia una evaluación hecha a medida.

Autor Carlos Pérez
Tutora Carme Viladrich

Grado en Psicología
Universidad Autónoma de Barcelona

9 de mayo de 2021

Trabajo de Final de Grado

Descargo de responsabilidad
Este manual no pretende ser una solución a todas aquellas instituciones que quieran aplicar un Test Adaptativo Informatizado (TAI). Su finalidad es académica aunque tenga un gran componente práctico. Se recomienda que aquellas personas interesadas en implementar este tipo de avances busquen asesoramiento experto.

Colofón
Este documento se ha escrito con la ayuda de KOMA-Script y LaTeX usando la plantilla kaobook; se han hecho modificaciones en su estilo específicas para este proyecto.
El código fuente de este formato está disponible en:
https://github.com/fmarotta/kaobook

Para Carme, Ricky y Nerea, que me han ayudado a ver que a veces escribo cosas que solo yo entiendo.

Prefacio

Soy de los que opina que si sabes unificar tu conocimiento con tus habilidades, los libros no solo se quedan en libros y los actos en solo actos. Por eso, este manual refleja el trabajo de más de un año recopilando información relevante en la elaboración de un test adaptativo que, aunque parezca bien unificada y suficiente en algunos aspectos, debe ser interpretada como un trabajo inacabado.

Este proyecto ha sido redactado con el objetivo de facilitar la comprensión de los conceptos que se van exponiendo a lo largo de los capítulos para personas con algunas nociones de psicometría, estadística y programación o que estén interesadas en los TAIs, en especial a aquellos basados en Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional (MIRT) con finalidades académicas.

El manual apoya y explica qué es necesario saber para aplicar el TAI, unificando el código en R que lo implementa con la teoría que se expone. Este código se puede encontrar en los apéndices, donde también se encuentra un pequeño tutorial en R para aquellas personas que no estén familiarizadas con él. Además, se asume que aquella persona que quiera aplicar este proyecto parta de respuestas a ítems ya administrados, y que estos sean de respuesta binaria.

El primer capítulo hace una introducción a los valores en blanco, contextualiza su problemática en un contexto académico y se propone una imputación con el algoritmo Esperanza-Maximización (EM). Es verdad que la imputación múltiple (MI), ante valores en blanco, consigue mejores resultados que una imputación única, pero aquí no se asume que la persona tenga una gran potencia computacional y las aplicación de la MI para calibrar un banco de ítems no es algo común.

El segundo capítulo consta de una introducción a la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) y a la MIRT donde se explica qué modelos y qué propiedades tienen sus parámetros para modelar las características de un ítem y su interacción con una persona.

El tercer capítulo trata cómo se obtienen los parámetros explicados en el capítulo anterior. Aquí se explican los más comunes para ítems dicotómicos multidimensionales, pero no se mencionan modelos no paramétricos, nominales o modelos logísticos anidados, entre otros. Además, la mitad de este capítulo se basa en pruebas de bondad de ajuste para evaluar el modelo que se obtenga.

Finalmente, el último capítulo implementa un TAI, dando sentido a todos los capítulos anteriores.

Empecé escribiendo este manual recopilando todo el proceso que creo que debe tener un TAI partiendo de un banco de ítems no calibrado; por ello, los capítulos deben ser entendidos como fases. Este proyecto no es algo acabado o perfecto que debe tomarse literalmente, es más bien un compendio de conceptos, código y recomendaciones fundamentadas que abarca y unifica un gran número de conocimientos.

Comparto este proyecto con la esperanza de que alguien pueda encontrar las bases para elaborar su propio evaluación adaptativa o pueda dar sentido a todos aquellos ámbitos de conocimiento que creo necesarios para elaborar un TAI multidimensional.

Carlos Pérez

Índice general

Respuestas en blanco 1

1.1. Introducción a los valores en blanco

Los valores en blanco son un problema constante en **psicometría** porque suponen la estimación de parámetros sesgados o la pérdida de potencia estadística (Roth, 1994). Esa potencia hace referencia a la capacidad que tiene una prueba estadística para descubrir las relaciones en una base de datos y el sesgo, en cambio, produce que dos grupos de personas con el mismo nivel de habilidad rindan de forma diferente en una prueba (Abad y col., 2011).

Psicometría

La psicometría se define como aquella rama de la Psicología Experimental encargada de la medición y la cuantificación de los procesos psicológicos de la psique humana.
En ella se encuentra la construcción de tests, cuyas propiedades pueden ser estudiadas por la Teoría Clásica de los Tests (TCT) o bien la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) y tienen como objetivo estudiar las puntuaciones observadas, medir un valor inobservable del dominio o rasgo psicológico a evaluar y estimar el error de medición.

En el ámbito académico un dato faltante se traduce en dejar ítems o preguntas en blanco, algo muy común hoy en día, ya que no se suele obligar a las personas examinadas a contestar todos los enunciados de un examen.

Con el avance de los ordenadores se han creado y mejorado métodos para paliar la falta de información, pero estos no están exentos de sesgo en las estimaciones o de alteraciones en las relaciones entre variables y en las varianzas, etc. Además, estos métodos no solo se ven afectados por el porcentaje de valores en blanco, también son importantes los patrones y los mecanismos que explican la falta de datos.

Mecanismos

Des de Rubin (1976) se definieron tres posibles causas que pueden explicar los datos en blanco:

- **MCAR** *Missing Completely At Random*

  Los datos en blanco no tienen ninguna causa sistemática, es decir, son completamente aleatorios; p. ej., se daría cuando una persona contesta un examen sin leer ningún enunciado.

- **MAR** *Missing At Random*

  Sucede cuando el valor en blanco depende de una característica o variable medible que pueda ser observada, es decir, de una variable de la cual se tengan datos; p. ej., el tiempo de estudio de cada alumno o alumna determina su nota, por lo tanto, si se conociese, se tendrían un mecanismo MAR. [1]

- **MNAR** *Missing Not At Random*

  Significa que un valor en blanco proviene de una variable desconocida; p. ej., se daría cuando no se sabe si una persona copia o no.

La principal consecuencia de datos **MCAR** es la pérdida de potencia estadística, aunque los análisis no presenten sesgos; lo mismo se aplica a

1: Por ahora no hay ningún método para detectar un mecanismo **MNAR** o **MAR**, aunque este último presente menos complicaciones que **MNAR** (Little & Rubin, 2002).
MCAR es detectable con el test de *Little* (Little, 1988), pero es controvertido e inverosímil que todas las personas contesten aleatoriamente a un examen y el test es inadecuado en algunos casos (Rhoads, 2012).

MAR si se conoce la causa de la pérdida, pero **MNAR** es considerado un problema porque siempre da resultados inestables en la estimación de parámetros, a menos que se especifique un modelo que explique su mecanismo, cosa que es francamente difícil (Allison, 2014).

Patrones

Como se ha visto hasta ahora, las consecuencias de los datos faltantes se pueden explicar por la causa de estos (**MCAR**, **MAR**, **MNAR**), es decir, *¿Por qué faltan datos?* pero también se pueden explicar por los patrones observados, o dicho de otro modo, por aquello que muestran los datos (Rönkkö, 2020), como se observa en la Figura 1.1.

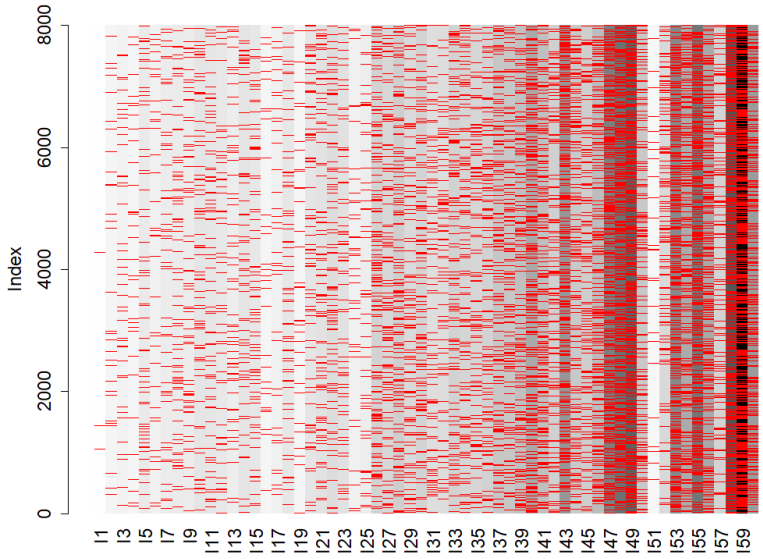
Estos patrones pueden informar de qué mecanismo hay detrás, además de informar de qué ítems pueden conllevar problemas en la imputación. Con esos patrones se pueden obtener estadísticos que muestran la relación e influencia entre pares de ítems y entre el ítem y la resta de datos.

La función *patrones()* crea un gráfico que permite observar qué patrón existe.

```
1 patrones(DatosIniciales)
```

Figura 1.2

Gráfico de la función patrones

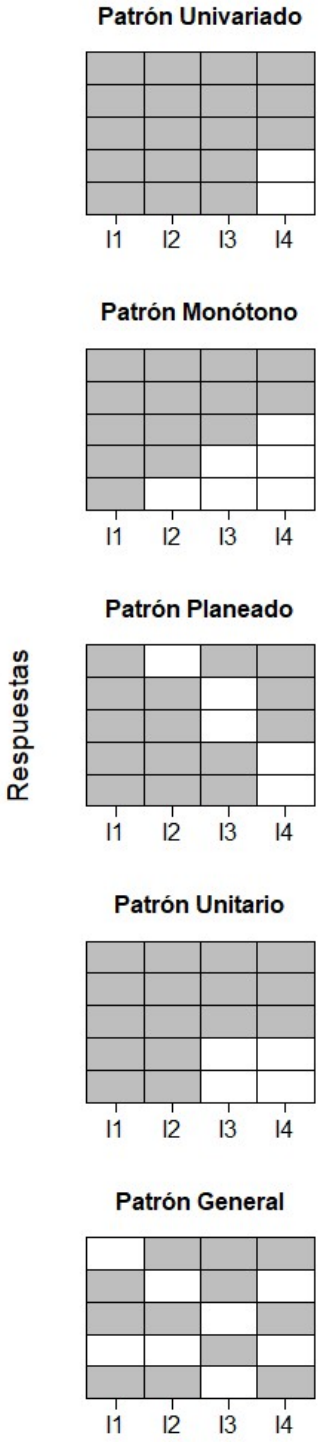


Nota. El gráfico muestra como las respuestas en blanco (rojo) se distribuyen a lo largo de los 60 ítems y las 8000 personas, el color de cada columnna informa del porcentaje de valores faltantes; cuánto más negros, más alto el porcentaje.

La Figura 1.2 demuestra que se estaría delante de un patrón monótono, ya que, a medida que avanza el test se observan más valores en blanco. Si se supiese por qué se da este patrón estaríamos delante de un mecanismo **MAR** y se podrían hacer mejores imputaciones, ya que no se observa un mecanismo **MCAR**.

Figura 1.1

Tipos de patrones.



Nota. Respuestas de cinco personas a 4 ítems; en gris los contestados. Imagen reproducida de *Flexible Imputation of Missing Data* (p.4), S. van Buuren, 2018, Routledge, https://stefvanbuuren.name/fimd/, CC BY 4.0.

Influx y Outflux

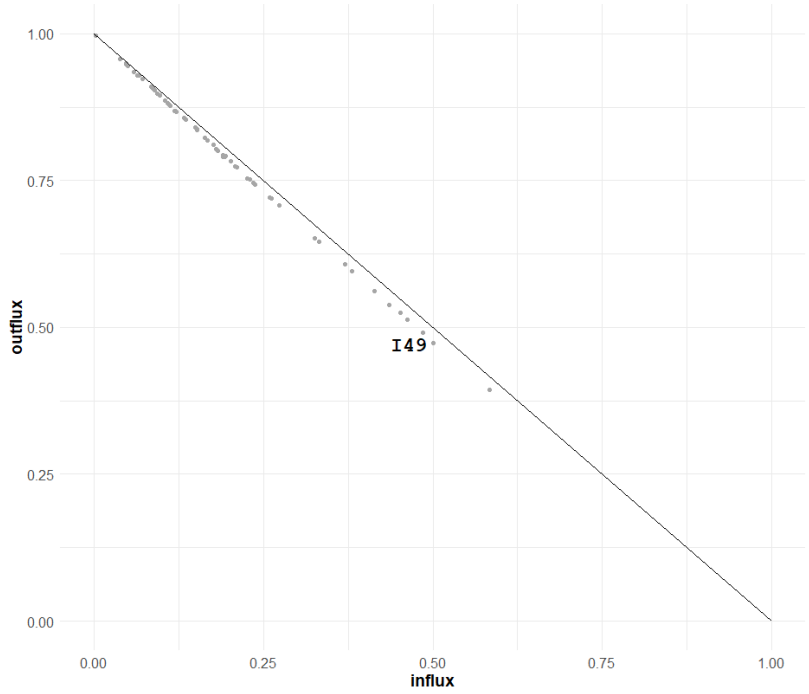
Los estadísticos no basados en pares de ítems son el **Influx**, el cual informa de cómo se relaciona el ítem con los datos observados [2] y el **Outflux**, que informa de cómo el ítem contribuye a la imputación de los demás[*]. Estos dos índices pueden ser representados por la función *potflux()*, como se muestra en la Figura 1.3.

2: Influx es análogo a la proporción de datos en blanco del ítem y los valores cercanos a 1 indican mejor imputabilidad.

```
2 plotflux(DatosIniciales)
```

Figura 1.3

Influx y Outflux



Nota. El gráfico muestra el **Influx** y **Outflux** de cada ítem. Aquellos que tienen ambos índices bajos por debajo de 0.5 son marcados en la gráfica. La etiqueta hace referencia al nombre del ítem que tiene la base de datos introducida.

Un ítem con valores altos de Influx y Outflux podría presentar un patrón de respuestas como la primera columna de la siguiente matriz, donde un 1 representa una respuesta y un 0 un valor en blanco.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El ítem uno tiene un Influx y Outflux de 0.8, dado que es el único que contiene información sobre los posibles valores reales de los demás ítems (Outflux) y además, su falta de información estaría compensada por las respuestas de los demás (Influx).

Estos estadísticos sirven para determinar si un ítem puede crear confusión en la imputación; además, van Buuren (2018) aconseja prescindir de variables con valores de Outflux e Influx bajos que sean insustanciales para análisis posteriores. Aunque van Buuren (2018) no argumentaba este uso des de un punto de vista psicométrico, estos índices pueden ayudar a detectar ítems que, por su alto porcentaje de valores en blanco, sean prescindibles o merecedores de estudio.

En la Figura 1.3 se observan valores equilibrados que no tienen por qué significar una mala imputación, ya que valores por debajo de 0.25 en los dos índices informan de ítems potencialmente problemáticos.

[*] Para más información consultar (van Buuren, 2018)

1.2. Métodos

Los métodos para lidiar con datos omitidos se pueden clasificar según si hacen una eliminación parcial o si hacen una imputación de estos y los dos buscan tener datos completos, pero la imputación es, generalmente, la primera opción (Sulis & Porcu, 2017) porque permite aplicar métodos con datos completos sin perder potencia estadística, como sí haría la eliminación parcial.

Imputación

Hay muchos métodos de imputación, ya sean los de máxima verosimilitud, sustitución por media o mediana y procedimientos Hot-Deck, entre otros, y estos se podrían clasificar en métodos de imputación múltiple (MI) o univariada, los primeros imputan datos plausibles y crean varias simulaciones y los segundos solo crean una simulación (Graham, 2009). Aunque la MI tiene en cuenta la incertidumbre de los valores reales desconocidos, requiere aplicar un procedimiento estadístico, como una media aritmética, a cada muestra simulada. Para tener una eficiencia casi perfecta se necesitan hacer infinitas simulaciones (Allison, 2014) y esto es incompatible con procedimientos que se verán a lo largo del manual, ya que necesitan resultados deterministas. [**]

Por otro lado, entre los métodos univariados se encuentra el algoritmo *esperanza-maximización o algoritmo* **EM**. Este procedimiento no está solo destinado a la imputación de datos, en estadística tiene muchas aplicaciones relacionadas con algoritmos de clasificación o agrupación, ya que estima las propiedades de algo que se desconoce, en este caso, respuestas a un examen (Wikipedia, 2020).

Al ser un algoritmo, este se basa en un procedimiento iterativo y cuando los cambios de los parámetros en cada iteración son tan pequeños como para considerarse triviales, se dice que el algoritmo ha convergido y se obtiene una solución satisfactoria (Graham, 2009).

En R, el algoritmo EM se puede implementar con la función *amelia()* (Honaker y col., 2011).

```
3 df <- amelia(DatosIniciales, noms = 1:60, m = 1)$imputations$imp1
```

```
    -- Imputation 1 --

 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 21 22 23
```

La función toma como primer argumento la matriz de datos; en el segundo, se especifica que todas las columnas tienen valores nominales, ya que representan respuestas binarias; tercero, se elige una sola imputación, ya que no se quiere hacer imputación múltiple y cuarto, se extrae la base de datos con las respuestas imputadas a través de $imputations$imp1.

[**] Para implementar imputación múltiple en **R** consultar el paquete mice (van Buuren & Groothuis-Oudshoorn, 2011) y el manual de van Buuren (2018).

La función muestra el número de iteraciones del algoritmo hasta que converge; en este caso 23 iteraciones. Es posible que *amelia()* dé el siguiente error:

```
Amelia Error Code:  43
 You have a variable in your dataset that does not vary.  Please remove this variable.
 Variables that do not vary:  I1
```

Esto significa que el ítem 1 (I1) no aporta ningún tipo de información, ya que puede haberse contestado erróneamente o correctamente por todas las personas y, por lo tanto, debe eliminarse:

```
4 NombreBaseDeDatos <- NombreBaseDeDatos[,-1]
```

plotflux() también puede informar de ello, ya que si huviese un ítem no imputable, resaltaría en rojo su nombre dentro de la gráfica. La base de datos inicial (*DatosIniciales*) se sobreescribe por la matriz de datos completa y, a partir de ahora, se usará esta durante todo el manual.[3]

3: Es recomendable hacer esta práctica para no perder el objeto que contenía la base de datos inicial y tener un mayor orden en el entorno de trabajo.

Teoría de Respuesta al Ítem 2

Con preguntas de respuesta binaria – sí o no – sería lógico pensar que una persona tiene o no tiene el conocimiento suficiente para contestar correctamente, a diferencia de una respuesta abierta como – *¿Qué eventos históricos ocurrieron en el siglo XVII?* –. Además, para ciertas preguntas, cada alumno o alumna tiene una estrategia diferente para contestar, p. ej., – *¿Cuál es el número áureo?* – se podría contestar de memoria o demostrando $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aunque estos sucesos podrían ser discutibles en algunos casos, en este manual se va a asumir que el nivel de una persona es algo continuo y que se necesita más de una estrategia[1] para contestar a una pregunta.

Para un test adaptativo, se necesita representar la interacción de un ítem con una persona, es decir, establecer cuántas dimensiones evalúa, cómo las evalúa y qué nivel de rasgo y probabilidad tiene cada persona de contestarlo correcta o incorrectamente (Oppl y col., 2017). Para estas premisas, en psicometría, en el primer cuarto del siglo XX, se definieron modelos matemáticos que conseguían definir esa interacción y que posteriormente sentarían las bases de la Teoría de Respuesta al Ítem unidimensional (TRI) (Reckase, 2009).

Aunque la TRI solo evalúe una dimensión, se explicarán sus bases a continuación para presentar los conceptos básicos sobre la interacción persona-ítem con modelos matemáticos más simples que los que se verán más adelante en la Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional (MIRT). Para ello se tratarán conceptos complejos para alguien que no sepa probabilidad o álgebra, de una forma visual y accesible. Aunque es aconsejable saber las bases de la la TRI y la MIRT, si se quiere pasar directamente a su aplicación vaya al capítulo Obtención de Parámetros.

Ya que este manual no está destinado a ítems de respuesta múltiple, no se tratarán los Modelos de Respuesta Graduada (MRG) tanto para la TRI como para la MIRT. Para más información sobre otros modelos y aspectos teóricos, más allá de los explicados a continuación, consulte manuales como el de van der Linden (2019) para la TRI y Reckase (2009) para la MIRT. Además, en el Apéndice B se puede encontrar una explicación más detallada de cómo los modelos de la MIRT, que se van a explicar más adelante, definen al funcionamiento del ítem.

1: A partir de ahora, las diferentes estrategias se van a llamar dimensiones, rasgos o *theta* (θ).

2.1. Teoría de Respuesta al Ítem Unidimensional

Principios

Por ahora, se han comentado algunos principios de la interacción persona-ítem, pero los modelos matemáticos, tanto de la TRI como de la MIRT, necesitan varias asunciones que deben cumplirse:

- **El nivel de rasgo no puede verse afectado durante el test.**
  Este principio se vulnera cuando se aprenden cosas nuevas durante el examen debido a la interacción con los ítems. Por lo tanto, el nivel de rasgo de una persona debe ser constante durante toda la prueba.

- **Las características de un ítem se mantienen constantes independientemente de a quién se le aplique.**
  Aunque una ítem evalúe una o más dimensiones, estas no pueden variar en número dependiendo de la persona que lo conteste.

- **Las respuestas a un ítem son independientes a las respuestas de otro ítem.**
  Este principio, llamado independencia local, establece que, p. ej., el enunciado de una pregunta no puede ayudar a responder otra.

- **El rendimiento en los ítems solo depende del nivel de la persona en un único rasgo, es decir, el test debe ser unidimensional.** [2]

- **A medida que el nivel de rasgo aumenta, la probabilidad de acertar el ítem también debe aumentar.**
  A esta premisa se le llama principio de monotonicidad.

2: Para la TRI, este principio es la diferencia fundamental entre la MIRT, cuyos principios son idénticos, excepto en el de unidimensionalidad.

Modelos

Rasch (1960) propuso un modelo que cumplía estos principios, introduciendo de esta forma la función logística de probabilidad acumulada como base de los modelos de la TRI.

$$P_{ij}(\theta_j, b_i) = \frac{e^{\theta_j - b_i}}{1+e^{\theta_j - b_i}} \tag{2.1}$$

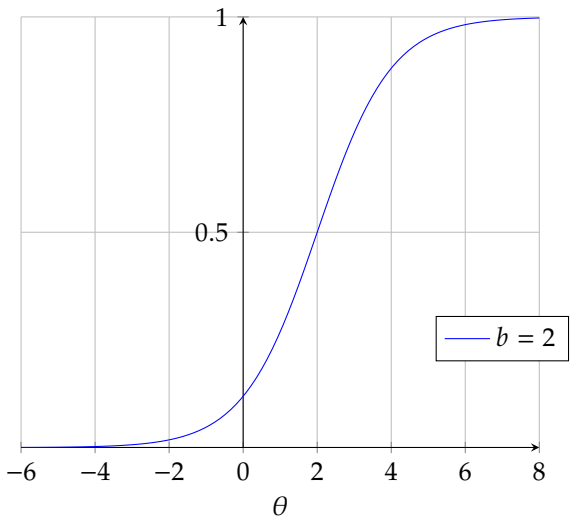
$P_{ij}(\theta_j, b_i)$ significa que la probabilidad P de acertar un ítem i por una persona j depende del nivel θ de la persona $_j$ y la dificultad b del ítem $_i$.

Esta función, como se ve en la Figura 2.1, determina la probabilidad de acertar un ítem para cualquier nivel de θ[3] y contiene solo dos parámetros: θ que corresponde al nivel de rasgo de la persona y b que equivale a la dificultad del ítem; a esta curva se le llama Curva Característica del Ítem (CCI). Una persona que tiene el mismo nivel de θ que la dificultad del ítem tendrá un 50 % de probabilidades de acertarlo.

3: Ahora el nivel de rasgo no solo es un continuo, sino que este va de $-\infty$ a ∞.

Figura 2.1

Modelo de un parámetro (1 PL) o de Rasch



Nota. El gráfico muestra como es el comportamiento de la función logística. Esta es exponencial y su crecimiento decrece a medida que llega a un límite y tanto su extremo inferior como superior son asintóticos, es decir, jamás llegan a 0 o 1. Nótese también, que b equivale a qué nivel de θ se da el punto de inflexión de la curva.

Los modelos para ítems de dos categorías normalmente se nombran según el número de parámetros que tienen; en este caso solo contiene b. El de un parámetro también se llama modelo de Rasch.

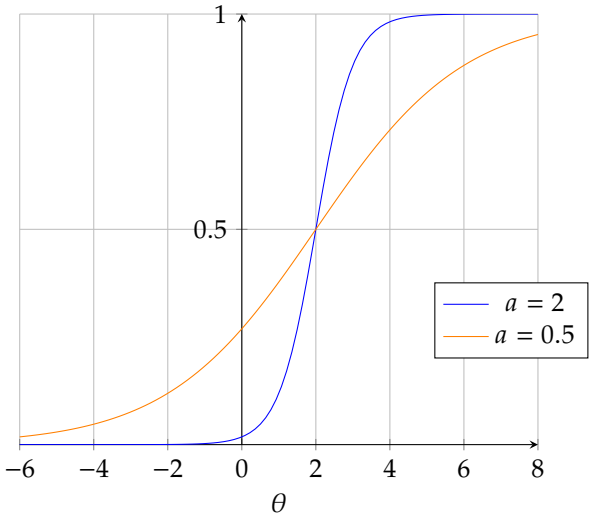
En 1968, Birnbaum añadió el parámetro de discriminación a[4] al modelo de Rasch, que determina qué pendiente tiene la CCI, pero a nivel psicométrico, a determina cómo el ítem es capaz de diferenciar entre valores de θ que pueden o no contestar correctamente el ítem.

4:

$$P_{ij}(\theta_j, b_i, a_i) = \frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1+e^{a_i(\theta_j - b_i)}} \quad (2.2)$$

Figura 2.2

Modelo de dos parámetros (2 PL)



Nota. Se observa como un ítem con $a = 2$ tiene una curva más vertical que uno con $a = 0.5$ y, por lo tanto, es capaz de determinar con más precisión qué niveles de θ lo contestarán correcta o incorrectamente.

Aunque se consiga representar el nivel de habilidad de una persona en un continuo que va de $-\infty$ a ∞, al fin y al cabo, es preferible tener ítems que establezcan puntos de corte bien definidos, es decir, que tengan buena discriminación.

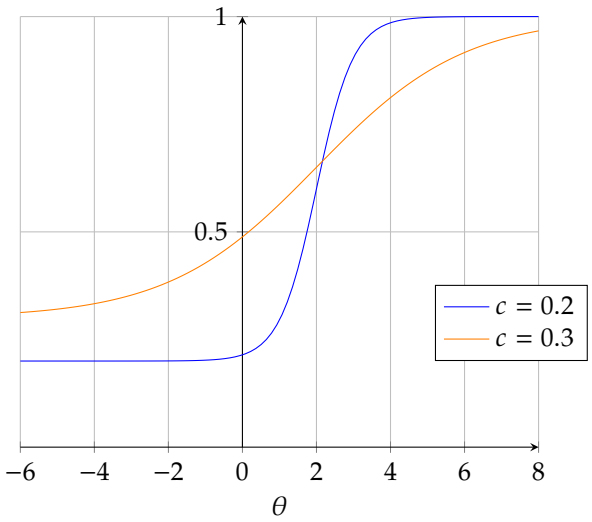
En 1980/2012 Lord incluyó el parámetro c[5] o parámetro de pseudoazar, que se utiliza para representar la probabilidad de contestar una respuesta al azar.

5:

$$P_{ij}(\theta_j, b_i, a_i, c_i) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1+e^{a_i(\theta_j - b_i)}} \tag{2.3}$$

Figura 2.3

Modelo de tres parámetros (3 PL)



Nota. Se puede ver como se da una probabilidad de acierto igual a c a cualquier persona con un nivel bajo de θ.

Parecería lógico utilizar siempre un modelo de 3 parámetros, ya que cualquier ítem puede ser respondido al azar, pero se utiliza principalmente para ítems de respuesta múltiple y también requiere muestras más grandes que los otros porque tiene más parámetros a estimar (Harris, 1989)

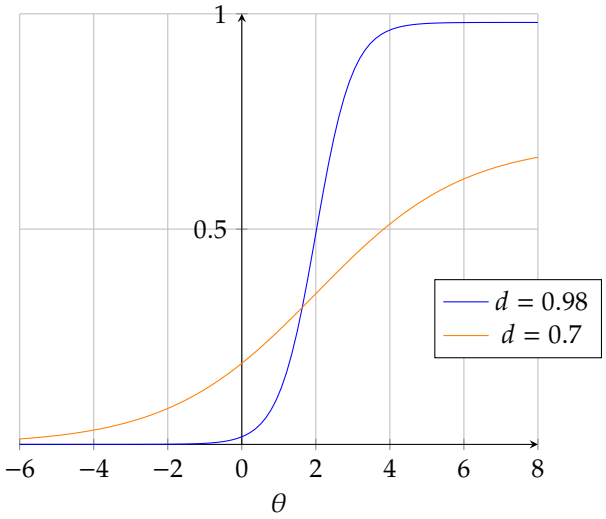
Finalmente, en 1981, Barton y Lord establecieron el modelo de 4 parámetros (4PL), que introduce el parámetro d[6] de inatención, el cual define la altura máxima de la asíntota superior. Este parámetro sirve para no penalizar tanto a las personas con altos niveles de θ que puedan haber fallado durante el test por una falta de atención.

6:

$$P_{ij}(\theta_j, b_i, a_i, c_i, d_i) = c_i + (d_i - c_i)\frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1+e^{a_i(\theta_j - b_i)}} \tag{2.4}$$

Figura 2.4

Modelo de cuatro parámetros (4 PL)



A nivel estadístico una asíntota superior de 0.98 o 0.99 sí que tiene utilidad porque permite estimaciones más precisas del nivel de habilidad en un TAI (Liao y col., 2012).

Ojiva Normal

Con el tiempo se han ido proponiendo muchas otras alternativas a los modelos ya vistos, desde funciones lineales o polinómicas hasta no paramétricas. Una de las más extendidas es aquella basada en la ojiva normal[7] , propuesta por Birnbaum (1968), para el modelo 2PL y 3PL. Ellos propusieron multiplicar a por 1.7 para así obtener probabilidades parecidas a la ojiva normal.

7: Ojiva normal se refiere a la distribución de probabilidad acumulada de la distribución normal.

Aproximar una CCI logística a una CCI normal sirve para preservar la interpretación histórica que acompaña al parámetro de discriminación.

En la actualidad, la constante más extendida es 1.702, dando diferencias de menos de un 1 % en las probabilidades predichas para todos los valores de θ. A esta constante también se la representa como el parámetro D.

$$P_{ij}(\theta_j, b_i, a_i) = \frac{e^{Da_i(\theta_j - b_i)}}{1+e^{Da_i(\theta_j - b_i)}} \tag{2.5}$$

2.2. Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional

Como se ha explicado al comienzo de este capítulo, un ítem puede evaluar más de una habilidad o rasgo a la vez, por lo tanto, a diferencia de la TRI ahora se tendrá más de un valor de θ para cada persona; la probabilidad de acertar un ítem vendrá determinada por el valor de θ que se tenga en cada dimensión. Otro aspecto importante, como se verá más adelante, es que se debe distinguir entre las dimensiones que define la MIRT con los constructos que representan un aspecto cognitivo (aritmética, comprensión lectora, etc); es posible que un modelo establezca dos dimensions para un test con tres **clusters** (Reckase, 2009).

Cluster

APA (American Psychological Association, s.f.) define clustered data como:
a set of observations or scores that can be grouped into multiple subsets (clusters), such that the items in each subset are similar to one another with respect to certain attributes and the distinctions between subsets help explain the overall variation among the values as a whole. [*un conjunto de observaciones o puntuaciones que pueden agruparse en múltiples subconjuntos (clusters), de forma que los elementos de cada subconjunto son similares entre sí con respecto a ciertos atributos y las distinciones entre los subconjuntos ayudan a explicar la variación global entre los valores en su conjunto.*]

Modelos

Todos los modelos se dividen en dos grandes grupos y sus diferencias radican en la forma en la que los valores de θ, junto con las características de cada ítem, determinan la probabilidad de acierto al ítem.

El primer grupo asume que los valores de θ son una combinación lineal de parámetros, es decir, que la capacidad de acertar un ítem es la suma de varios conocimientos al mismo tiempo, lo que implica que distintos niveles de rasgo en varias dimensiones puedan dar la misma probabilidad de acierto.[8]

A estos modelos se les llama compensatorios y tienen una visión holística de como alguien, junto con su nivel de θ en cada una de las dimensiones, puede acertar un ítem.

El segundo grupo de modelos asume que la respuesta a un ítem depende del nivel de θ en cada una de las dimensiones, haciendo que la probabilidad de un ítem sea el producto de acertar ese ítem en cada una de ellas. Este modelo asume que para acertar un ítem se deben tener altos niveles de conocimiento en cada dimensión y por eso se llaman modelos no compensatorios, aunque también se pueden llamar parcialmente compensatorios.[9]

En la literatura actual los modelos más extendidos son los compensatorios tanto para ítems dicotómicos como politómicos, siendo los primeros los más estudiados. Algunos contextos educativos requieran un modelo en vez del otro por sus hipótesis sobre cómo se da la interacción entre respondiente e ítem. En la práctica pocos estudios se han hecho sobre qué modelo es mejor, aunque Bolt y Lall (2003) y Spray y col. (1990) sugirieron que los valores de θ suelen funcionar de una forma compensatoria.

8: En el ejemplo introductorio a este capítulo se proponían dos formas de responder correctamente a – *¿Cual es el número áureo?* –, para ello se pueden desarrollar dos estrategias que no son mutuamente excluyentes, por lo tanto, dos personas que tengan diferentes niveles en memoria o cálculo pueden tener la misma probabilidad de acierto.

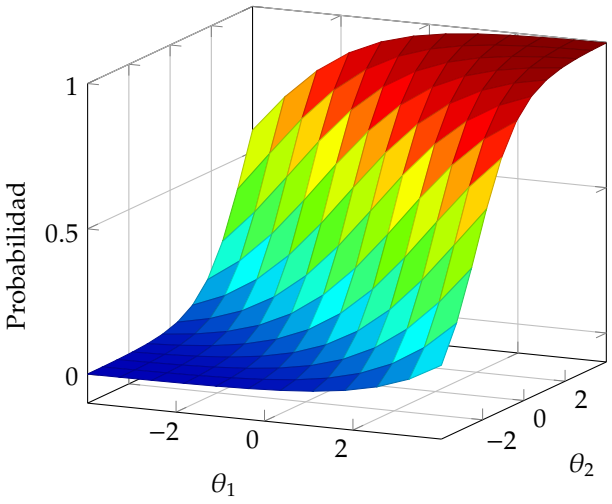
9: Es habitual llamarlos no compensatorios pero Reckase (2009) los nombra parcialmente compensatorios, ya que niveles de θ altos en una sola dimensión dan una probabilidad de acierto mayor que los bajos, por lo tanto, algún tipo de compensación ocurre.

Modelos compensatorios basados en la TRI

En los modelos de la TRI, la curva definida por la función logística era la Curva Característica del Ítem (CCI), pero aquí, ya no se puede hablar de una curva en 2 dimensiones: en la MIRT se habla de la Superficie Característica del Ítem (SCI)(Reckase, 2009), como se ve en la siguiente figura.

Figura 2.5

SCI del modelo de dos parámetros



Nota. SCI de un ítem con $a_1 = 0.75$, $a_2 = 1$ y $d = -0.7$. Los modelos compensatorios cumplen el principio de monotonicidad, ya que a medida que aumenta θ_1 y θ_2 también lo hace la probabilidad de acierto.

La SCI se define por

$$P_{ij}(\theta_j, a_i, d_i) = \frac{e^{a_i\theta'_j + d_i}}{1+e^{a_i\theta'_j + d_i}} \tag{2.6}$$

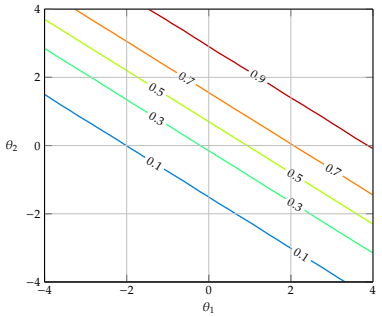
$a_i\theta'_j + d_i$ define que hay un parámetro de discriminación a y un valor de θ para cada dimensión y a esto se le suma la constante d.

La Figura 2.5.1 muestra un gráfico de contorno donde se ve como varias combinaciones de θ tienen la misma probabilidad de acierto; se observa que niveles bajos de θ_1 pero altos en θ_2 tienen la misma probabilidad de acierto y viceversa.

Si θ_1 y θ_2 fuesen entendidas como habilidad visuoespacial y conocimientos en geometría, respectivamente, personas sin apenas habilidad visuospecial tendrían la misma probabilidad de acierto que personas con un nivel de habilidad medio en las dos dimensiones.

Figura 2.5.1

Gráfico de contorno de la SCI



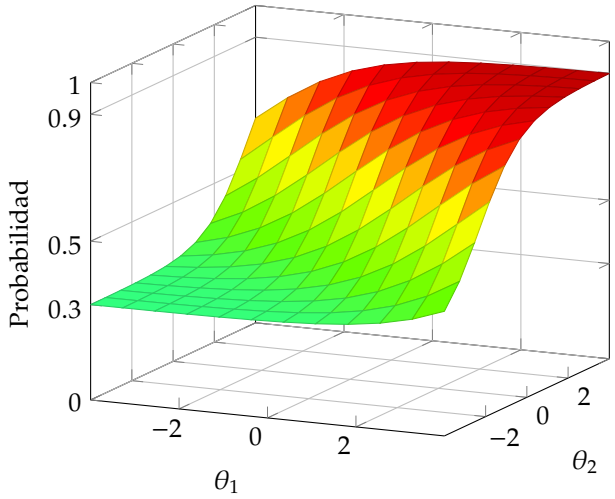
Nota. Las líneas de contorno muestran la probabilidad de acierto para diferentes niveles de θ.

Estos modelos también pueden tener una adaptación al modelo 4PL[10] o 3PL como se muestra en la siguiente figura.

10: En la TRI el cuarto parámetro estaba representado por d, pero en la MIRT para evitar confusiones se utilizará u.

Figura 2.6

SCI del modelo de cuatro parámetros



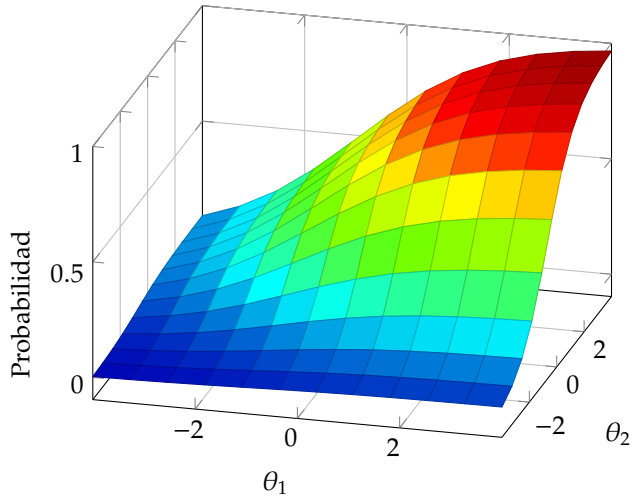
Nota. SCI de un ítem con $a_1 = .75$, $a_2 = 1$, $d = -.7$, $c = .3$ y $u = .9$.

Modelos parcialmente compensatorios basados en la TRI

A diferencia de los compensatorios, estos no entienden el conocimiento de una forma complementaria: los modelos parcialmente compensatorios establecen que para tener una alta probabilidad de acierto se deben tener altos niveles de conocimiento en todas las dimensiones.

Figura 2.7

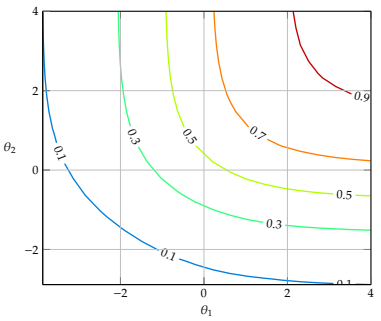
SCI parcialmente compensatoria



Nota. El gráfico muestra la SCI parcialmente compensatoria para los mismos parámetros de la Figura 2.5.

Figura 2.7.1

Gráfico de contorno parcialmente compensatorio



Nota. Se puede apreciar como es necesario tener altos niveles de θ en cada dimensión para cada probabilidad de acierto.

La SCI, por tanto, cambia y pasa a definirse por

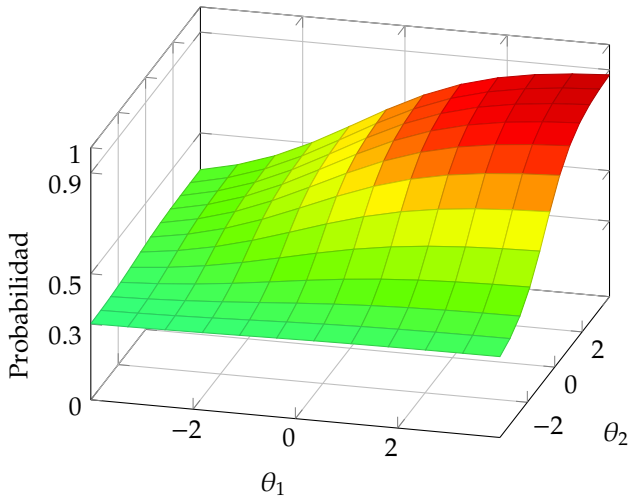
$$Pu_{ij}(\theta_j, a_i, d_i) = \left(\prod_{l=1}^{m} \frac{e^{a_{il}\theta'_{jl}+d_{il}}}{e^{a_{il}\theta'_{jl}+d_{il}}} \right) \tag{2.7}$$

Un modelo parcialmente compensatorio equivale a multiplicar la probabilidad de acierto de tantos modelos de TRI como dimensiones tenga el ítem y esto es lo que define $\prod_{l=1}^{m}$, donde l es cada dimensión y m el total de ellas.

Estos modelos también tienen una extensión al modelo 2PL, 3PL y 4PL, como se aprecia en la siguiente figura.

Figura 2.8

SCI parcialmente compensatoria del modelo 4PL



Nota. El gráfico muestra la SCI parcialmente compensatoria para los mismos parámetros que el ítem de la Figura 2.6.

Obtención de parámetros 3

En este capítulo se van a mostrar todas las aplicaciones en R, de la teoría explicada en el capítulo anterior. Primero se mostrará cómo obtener los dos tipos de modelos de la MIRT que se pueden obtener con la librería mirt (Chalmers, 2012). Estos no se clasifican, como en el capítulo anterior, según el número de parámetros que tiene la Curva Característica del Ítem (CCI), sino que se caracterizan por la estructura o el análisis factorial que permite cada función.

Al final del capítulo se evaluará, con diferentes pruebas estadísticas, la calidad del modelo que se ha obtenido. Esto también supondrá determinar cuál es el número de dimensiones que tienen los datos que se han visto en el Capítulo 1.

Introducción al Análisis Factorial

El Análisis Factorial (AF) es una técnica estadística multivariante que sirve para estudiar las dimensiones subyacentes entre varias variables (ítems), llamadas factores (Bruin, 2011). Su objetivo principal radica en encontrar el menor número de factores que sean capaces de explicar qué relación existe entre las variables de un conjunto de datos (Kline, 2014). Además de determinar el número de dimensiones, también se mide qué ítems son más característicos de cada factor y se pretende establecer una **estructura simple** (Lloret-Segura y col., 2014).

Estructura Simple

En el AF se usa como criterio para determinar cómo de adecuada es una solución factorial. Requiere que cada ítem pese considerablemente en un solo factor y que estos muestren un patrón, repartidos por los demás factores.

Existen dos tipos de Análisis Factorial: Análisis Factorial Exploratorio (AFE) y Análisis Factorial Confirmatorio (AFC), el primero se hace sin una asunción previa del número de factores y, por lo tanto, se usan técnicas que contemplan que cualquier ítem es propio de cualquier dimensión, como se observa en la Figura 3.1; el segundo, comprueba hipótesis previamente establecidas, basadas en cuál es el número de factores, si hay o no correlaciones entre estos y qué peso tiene cada ítem en cada factor (Abad y col., 2011), entre otras.

Un aspecto importante del AFE es el concepto de rotaciones, que se verá más adelante, basado en reposicionar factores de una forma más interpretable, que tengan sentido tanto a nivel matemático como a nivel teórico (Osborne, 2015). Gracias a esto se pueden definir escalas de Ansiedad, Esquizofrenia, etc, en un test psicológico, ya que se puede observar como ítems que fueron redactados para evaluar esos aspectos psicológicos, pesan más en un solo factor y no en otro, es decir, aquellos ítems forman parte de una dimensión abstracta que a posteriori se nombra según el criterio de personas expertas.

Dicho esto, los factores también pueden tener estructuras con diferentes niveles de profundidad entre ellos (Mair, 2018), donde unos pueden ser más generales y simbolizar constructos como la habilidad matemática y otros más específicos (subfactores), como sería el álgebra, cálculo, etc.

3.1. Modelo exploratorio

Estos modelos se estiman a través de la función *mirt()*, la cual tiene más de 30 argumentos mayormente relacionados con el método de optimización*; los más importantes se muestran a continuación:

data Una 'matrix' o 'data.frame' con valores numéricos y valores en blanco cifrados como 'NA'.

model Una 'string' que especifique un argumento de la función *mirt.model()* o un objeto de esta misma función, que especifique cómo debe ser estimado el modelo de la MIRT. Para modelos exploratorios solo es necesario especificar el número de dimensiones.

itemtype Una 'string' que determine el tipo de ítem que debe ser estimado:

- '2PL', '3PL', '3PLu', '4PL' para los modelos compensatorios de 2 a 4 parámetros; 3PL solo estima la asíntota inferior y 3PLu la superior.
- 'PC2PL', 'PC3PL' para los modelos de 2 a 3 parámetros parcialmente compensatorios. Este tipo de ítems solo pueden ser usados en modelos confirmatorios.

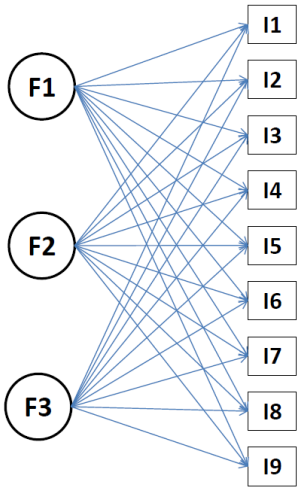
guessing Valor numérico para fijar el parámetro c de pseudoazar para todos los ítems o introducir un vector con el valor de cada ítem.

upper Valor numérico para fijar el parámetro de la asíntota superior del modelo 4PL o 3PLu para todos los ítems o introducir un vector con el valor de cada ítem.

method Especificar el método de optimización, ya sea 'EM' (Máxima Verosimilitud), 'QMCEM' (casi-Monte Carlo EM), 'MCEM' (Monte Carlo EM), 'MHRM' (Metropolitan Hastings), 'SEM' (EM Estocástico) y 'BL' (Bock y Lieberman). 'EM' da buenos resultados cuando se estiman de 1 a 3 dimensiones y 'BL' no se recomienda para tests largos, los demás son más efectivos con más de 3 dimensiones y, por lo general, más rápidos que 'EM'.[1]

Figura 3.1

Modelo exploratorio



Nota. El diagrama muestra una solución factorial de tres factores, donde cada uno de los 9 ítems es representativo de cada factor. Además, ningún factor está correlacionado porque no se muestran flechas que los unan. Por lo tanto, cada factor representa conocimientos o conceptos completamente diferentes.

1: Aunque haya una gran variedad, lo importante es que se llegue a una solución aceptable, es decir, que el algoritmo converja.

* Para más información mirar la documentación de la función (RDocumentation, s.f.) y el paquete *mirt* (Chalmers, 2012), además del Apéndice C para entender mejor el concepto de optimización.

El tiempo de estimación puede reducirse utilizando *mirtCluster()*, ya que permite aumentar el número de procesos que se dan simultáneamente aprovechando los núcleos del procesador del ordenador. El siguiente código muestra como obtener un modelo 2PL a través del método 'MHRM', utilizando todos los núcleos excepto 1[2] y, al final, se vuelve a restablecer el número de núcleos.

2: Con la función *detectCores()*, del paquete parallel (R Core Team, 2019), se obtiene cuántos núcleos tiene el ordenador en el que se trabaje. En este ejemplo se prescinde de 1 para que, mientras se obtiene el modelo, se puedan llevar a cabo otras tareas en el ordenador, sino, se bloquearía hasta que la función acabase.

```
mirtCluster(detectCores()-1)

mirt.exp.3F <- mirt(data = df, model = 3, itemtype = '2PL',
method = 'MHRM')

mirtCluster(remove = TRUE)
```

Mientras *mirt* calcula los parámetros irá devolviendo a tiempo real valores que determinan cómo de bien se aproxima a una solución:

```
Stage 3 = 82, LL = -219879.5, AR(0.51) = [0.40], gam = 0.0066, Max-Change = 0.0007
```

Y si se ejecuta el objeto mirt.exp.3F se obtiene el siguiente resultado:

```
mirt.exp.3F
```

```
Call:
mirt(data = df, model = 3, itemtype = "2PL", method = "MHRM")

Full-information item factor analysis with 3 factor(s).
Converged within 0.001 tolerance after 82 MHRM iterations.
mirt version: 1.32.1
M-step optimizer: NR1
Latent density type: Gaussian
Average MH acceptance ratio(s): 0.396

Log-likelihood = -197099.2, SE = 0.072
Estimated parameters: 237
AIC = 394672.4; AICc = 394686.9
BIC = 396328.3; SABIC = 395575.2
G2 (1e+10) = 250403.2, p = 1
RMSEA = 0, CFI = NaN, TLI = NaN
```

El resultado informa de las características principales del modelo que se ha estimado y reporta los valores de AIC, BIC, RMSEA, etc, que informan de la adecuación del modelo, estos no se tratarán en detalle ni aquí ni en el apartado 1.3 Bondad de ajuste; para más información consultar Maydeu-Olivares y Forero (2010)

Cabe destacar que un modelo puede no converger a una solución estable y dar errores como:

```
Iteration: 84, Log-Lik: -199885.412, Max-Change: 0.54939
Warning messages:
1: Latent trait variance-covariance matrix became non-positive definite.
2: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
3: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
4: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
5: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
6: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
7: Log-likelihood was decreasing near the ML solution. EM method may be unstable
```

o como:

```
EM cycles terminated after 500 iterations
```

Estos mensajes, como se verá más adelante, ya indican que el modelo no es adecuado para los datos que se tienen.

3.2. Modelo confirmatorio

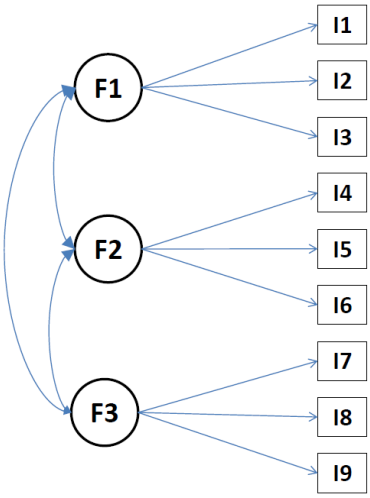
En este método, como se ha explicado en la introducción al capítulo, se necesita especificar qué ítems son característicos de cada dimensión; para ello se utiliza la función *mirt.model()*, cuyos argumentos pueden determinar qué ítems van en cada dimensión, cuáles deberían tener el mismo parámetro de discriminación, cuáles están relacionados y que distribución de probabilidad tienen los parámetros de un modelo, entre otros.

Aunque se podría introducir una opción por cada argumento, *mirt.model()* puede leer una 'string' donde se especifique toda la información necesaria. A continuación se muestra como especificar que cada dimensión contenga un tercio de los ítems y que estos no estén presentes en ninguna otra; además, se establecen relaciones entre todos los factores como en la Figura 3.2.

```
12 modelo.conf.3F <- mirt.model(
13                                'F1 = 1-3
14                                 F2 = 4-6
15                                 F3 = 7-9
16                                 COV = F1*F2*F3'
17                              )
18 mirt.conf.3F <- mirt(NombreBaseDeDatos, modelo.conf.3F, itemtype =
       '2PL', method = 'MHRM')
```

Figura 3.2

Modelo confirmatorio



Nota. El diagrama muestra una solución factorial de tres factores, donde cada uno de los 9 ítems es representativo de un solo factor. Además, todos los factores están correlacionados.

Modelos two-tier

Este tipo de modelos especifican que las dimensiones subyacentes se dividen en uno o varios factores generales o primarios donde todos los ítems tienen un peso determinado y, además, estos ítems se dividen en otros factores específicos no relacionados entre ellos (Mair, 2018), como se observa en la Figura 3.3.

En cambio, el modelo bifactorial es un modelo two-tier específico que establece un solo factor general. Estos modelos se obtienen con la función *bfactor()*.

bfactor() tiene tres argumentos principales:

data Una 'matrix' o 'data.frame' con valores numéricos y valores en blanco cifrados como 'NA'.

model Un vector numérico que especifique qué factor contiene cada ítem. Por ejemplo, para un test de 4 ítems, donde el primer factor específico contiene los dos primeros y el segundo factor los restantes, el vector sería 'c(1, 1, 2, 2)'.

model2 Un objeto definido por *mirt.model()* que especifique, para un modelo two-tier, qué ítems pesan en cada factor. Si se dejase en blanco, *bfactor()* estima un modelo bifactorial por defecto.

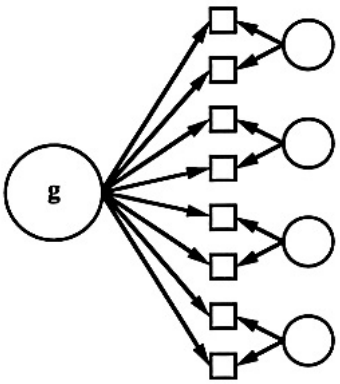
... Argumentos adicionales usados en la función *mirt* como 'itemtype', 'upper' o 'guessing', entre otros.

A continuación se muestra un ejemplo de un modelo bifactorial como el de la Figura 3.3, el cual tiene 4 factores específicos, no correlacionados, que contienen dos ítems cada uno.

```
19 mirt.bifac.4F <- bfactor(NombreBaseDeDatos, c(rep(1:4, each = 2)),
       itemtype = '2PL')
```

Figura 3.3

Modelo bifactorial



Nota. El diagrama muestra una estructura bifactorial con un factor general g, 8 ítems representados por cuadrados y 4 factores específicos, no correlacionados, que contienen dos ítems cada uno. De *Intelligence–Two Models*. (1999, Enero). Intelligence. Consultado el 15 de abril de 2021, desde http://www.personalityresearch.org/intelligence/structure.html.

3.3. Bondad de ajuste

Hasta ahora solo se han comentado formas de obtener los parámetros de los ítems, pero no se ha ahondado en determinar cómo de bien se ajusta un modelo a los datos.

Bondad de ajuste

La bondad de ajuste es el grado en que los valores predichos por un modelo coinciden con los valores observados empíricamente. Un valor no significativo de una prueba de bondad de ajuste indica que el modelo está bien ajustado.

El resultado de mirt.exp.3F, antes visto, daba el valor de varios estadísticos de bondad de ajuste como RMSEA, AIC o BIC, entre otros; estos valores indican cómo de bueno es el modelo a nivel estadístico y, aunque estos en especial no tengan puntos de corte, hay otros métodos y funciones en el paquete mirt que los aprovechan para determinar su ajuste.

En esta sección se verán pruebas de bondad de ajuste y su interpretación para evaluar un modelo de la MIRT.

Interpretación de los parámetros y principio de monotonicidad

Aunque no sea una prueba de bondad de ajuste como tal, es preferible tener modelos interpretables que puedan determinar qué mide cada factor, ya que no solo importan las pruebas estadísticas para determinar el ajuste de un modelo, también es importante observar si la distribución de los ítems en cada factor se adecúa a criterios o asunciones prévias a la estimación del modelo.

Los factores, como se ha ido viendo hasta ahora, son conceptos abstractos que representan las relaciones entre ítems y que permiten determinar el peso[3] que tiene cada uno en cada factor.

3: En la MIRT el peso de cada ítem equivale al parámetro de discriminación a_i.

A los factores se les pueden aplicar rotaciones, cuyo objetivo es obtener una estructura simple, cosa que conseguiría concentrar el peso de un ítem en un solo factor. Con esta premisa se han establecido muchos métodos durante la historia y se pueden categorizar según si las rotaciones son ortogonales o oblicuas, lo que se traduce en si se asume que los factores pueden tener similitudes – oblicuas – o no – ortogonales – (Kline, 2014).[4]

4: Es lógico pensar que las rotaciones oblicuas son mejores, ya que cuesta asumir que dos ámbitos de conocimiento de un mismo examen no tengan nada en común.

Cabe destacar que hay una gran cantidad de rotaciones[**], cuyas propiedades varían a nivel matemático y conceptual, dando la posibilidad de adaptarse mejor al planteamiento teórico que tenían las personas que redactaron esos ítems; por consiguiente, la elección de una rotación u otra debe ser acorde al criterio de las personas que elaboraron ese examen y a la interpretabilidad de esos parámetros rotados (Forina y col., 1989).

[**] Para más información consultar el manual del paquete GPArotation (Bernaards & I.Jennrich, 2005), del cual se basa la función *coef()* para hacer rotaciones, y IBM Documentation (s.f.) para entender sus implicaciones conceptuales.

Dicho esto, los parámetros de un modelo se obtienen con la función *coef()*; a continuación se muestra una rotación oblimin (oblicua) del modelo 'mirt.exp.3F' obtenido anteriormente. Por defecto *coef()* no hace ninguna rotación.

```
20 coef(mirt.exp.3F, rotate = 'oblimin')
```

```
Rotation:  oblimin

 $I1
       a1    a2    a3     d g u
par -0.45 0.741 1.055 5.831 0 1

$I2
       a1     a2   a3     d g u
par -0.55 -0.615 0.71 3.808 0 1

$I3
        a1     a2    a3     d g u
par -0.258 -0.532 0.237 3.299 0 1

$I4
        a1     a2     a3     d g u
par -0.508 -0.405 -0.163 3.113 0 1

$I5
        a1    a2    a3     d g u
par -1.167 2.048 0.084 5.972 0 1

...          ...          ...

$I56
        a1    a2   a3      d g u
par -0.448 0.675 0.05 -0.405 0 1

$I57
        a1    a2     a3      d g u
par -0.206 0.173 -0.125 -0.721 0 1

$I58
        a1     a2     a3      d g u
par -0.009 -0.539 -0.201 -0.255 0 1

$I59
       a1     a2 a3      d g u
par -0.29 -0.354  0 -0.249 0 1

$I60
       a1 a2 a3      d g u
par -0.11  0  0 -0.907 0 1

$GroupPars
    MEAN_1 MEAN_2 MEAN_3 COV_11 COV_21 COV_31 COV_22 COV_32 COV_33
par      0      0      0      1      0      0      1      0      1
```

Cada columna corresponde al parámetro de a que tiene cada ítem en cada factor o dimensión, g equivale a el parámetro c que determina el valor de la asíntota inferior y u es el valor de la asíntota superior.

Hecho esto, también se puede evaluar el principio de monotonicidad que determina que a medida que aumenta el nivel de θ aumenta la probabilidad de acierto y esto se traduce en tener parámetros a_i positivos, como se ha explicado en el capítulo anterior.

Aunque no se muestren todos los parámetros, el modelo mirt.exp.3F no cumple este supuesto, ya que la mayoría de parámetros tiene valores negativos, lo que indica que el modelo podría no estar bien especificado y se deberían estimar otros como los parcialmente compensatorios o no paramétricos[***], entre otros.

Es extraño que, en prácticamente su totalidad, el test vulnere el principio de monotonicidad; en estos casos se deberían evaluar estos ítems y comprobar que no se hayan redactado de forma inversa (que empiezan con una negación) o que estén mal codificadas las respuestas en la base de datos (Kao, 2014).

A pesar de ello, se puede ignorar un valor de a_i negativo si se tiene una teoría o hipótesis muy fuerte que apoye el hecho de que personas con niveles más bajos de habilidad tengan mayor probabilidad de acertar el ítem.

Análisis de la Varianza (ANOVA)

En la MIRT este método sirve para comparar los estadísticos de bondad de ajuste como RMSEA, AIC o BIC, de dos modelos previamente calculados, para establecer si el modelo más simple es más adecuado que otro más complejo. *anova()*, al ser una prueba estadística, tiene un valor p asociado que, si es inferior a 0.05, demuestra que el modelo más simple es mejor.

A continuación se observa como p es 0, por lo tanto, el modelo de 3 dimensiones mirt.exp.3F obtenido anteriormente se ajusta mejor que el de 4 dimensiones que se acaba de estimar.

```
21 mirt.exp.4F <- mirt(df, 4, itemtype = '2PL', method = 'MHRM')
22
23 anova(mirt.exp.3F, mirt.exp.4F)
```

```
Model 1: mirt(data = df, model = 3, itemtype = "2PL", method = "MHRM")
Model 2: mirt(data = df, model = 4, itemtype = "2PL", method = "MHRM")

       AIC     AICc    SABIC       HQ      BIC    logLik      X2  df   p
1 394685.2 394699.8 395588.1 395252.1 396341.2 -197105.6     NaN NaN NaN
2 394662.8 394685.3 395782.7 395365.9 396717.0 -197037.4 136.487  57   0
```

anova() es capaz de comparar cualquier modelo obtenido por la función *mirt()* o *bfactor()*, ya sea factorial o exploratorio y, por lo tanto, las hipótesis que se tienen sobre como se distribuyen los ítems en cada factor pueden ser testadas. Por otro lado, la simplicidad de un modelo no viene dada solo por el número de dimensiones, la simplicidad puede ser entendida como el nivel de restricción. Ante la duda, *anova()* ya especifica cuál es el modelo 1 y 2: si p es inferior a 0.05 se prefiere el modelo 1.

[***] Para más información consultar RDocumentation (s.f.).

Convergencia del modelo

Otro forma de evaluar la bondad de ajuste es observando si se converge a una solución estable. Por ejemplo, el resultado de un modelo two-tier con dos factores generales correlacionados, que contienen la primera y la segunda mitad de los ítems, respectivamente, y 4 específicos con el mismo número de ítems, da el siguiente error:

```
model.TwoTier.3F <- mirt.model(
                                  'F1 = 1-30
                                   F2 = 31-60,
                                   COV = F1*F2'
                                   )

mirt.TwoTier.3F <- bfactor(df, c(rep(1:4, each = 15)),
model.TwoTier.3F, itemtype = '2PL')
```

```
Iteration: 84, Log-Lik: -199885.412, Max-Change: 0.54939
Warning messages:
1: Latent trait variance-covariance matrix became non-positive definite.
2: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
3: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
4: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
5: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
6: In log(eigen(sigma, symmetric = TRUE, only.values = TRUE)$values) :
  NaNs produced
7: Log-likelihood was decreasing near the ML solution. EM method may be unstable
```

anova() también muestra que hacer comparaciones con modelos mal especificados no es posible:

```
anova(mirt.exp.2F, mirt.TwoTier.3F)
```

```
Model 1: bfactor(data = df, model = c(rep(1:4, each = 15)), model2 = modelo_two.tier,
    itemtype = "2PL")
Model 2: mirt(data = df, model = 3, itemtype = "2PL", method = "MHRM")

       AIC     AICc    SABIC       HQ      BIC    logLik  X2  df   p
1       NA       NA       NA       NA       NA        NA NaN NaN NaN
2 394685.2 394699.8 395588.1 395252.1 396341.2 -197105.6  NA  56  NA
```

También se puede observar que un modelo no ha convergido si se ejecuta el objeto que lo contiene y en su descripción general los valores de AIC, BIC, RMSEA, etc, son nulos.

```
Call:
mirt(data = df, model = 3, itemtype = "2PL", method = "MHRM")

Full-information item factor analysis with 3 factor(s).
Converged within 0.001 tolerance after 82 MHRM iterations.
mirt version: 1.32.1
M-step optimizer: NR1
Latent density type: Gaussian
Average MH acceptance ratio(s): 0.396

Log-likelihood = NAN, SE = NAN
Estimated parameters: 237
AIC = NAN; AICc = NAN
BIC = NAN; SABIC = NAN
```

itemfit

Esta función puede estimar una gran variedad de pruebas estadísticas para determinar el ajuste de cada ítem al modelo y así determinar cuáles son problemáticos. Aquí se propone la prueba 'S_X2', que tiene por defecto *itemfit()*, ya que Kang y Chen (2008) demostraron una mayor sensibilidad de 'S_X2' sobre 'Q2' o 'G2' – dos de los más utilizados hasta el momento – que también se pueden implementar con itemfit.

```
33 intemfit.mirt.exp.3F <- itemfit(mirt.exp.3F)
34
35 intemfit.mirt.exp.3F
```

```
   item   S_X2 df.S_X2 RMSEA.S_X2 p.S_X2
1    I1 18.130      14      0.006  0.201
2    I2 25.205      20      0.006  0.194
3    I3 19.977      19      0.003  0.396
4    I4 21.279      21      0.001  0.442
5    I5 24.907      18      0.007  0.127
              ...      ...
27  I27 35.510      19      0.010  0.012
              ...      ...
55  I55 16.211      23      0.000  0.846
56  I56 25.894      22      0.005  0.256
57  I57 31.515      22      0.007  0.086
58  I58 23.753      23      0.002  0.418
59  I59 13.389      22      0.000  0.922
60  I60 23.727      23      0.002  0.419
```

Hecho esto, el siguiente código muestra cómo mostrar únicamente los ítems que tienen un mal ajuste.

```
36 itemfit.mirt.exp.3F[which(itemfit.mirt.exp.3F$p.S_X2 < 0.05),]
```

```
    item   S_X2 df.S_X2 RMSEA.S_X2 p.S_X2
14  I14 33.960      18      0.011  0.013
19  I19 41.004      22      0.010  0.008
24  I24 34.312      22      0.008  0.046
39  I39 36.183      21      0.010  0.021
46  I46 37.190      22      0.009  0.023
48  I48 44.975      21      0.012  0.002
```

Valores de 'p.S_X2' inferiores a 0.05 indican un ítem mal ajustado al modelo (Kang & Chen, 2008), por ejemplo, el ítem 48 muestra un mal ajuste, por lo tanto, se debería valorar su causa, como una mala redacción del enunciado o de las opciones de respuesta.

M2

M2 es una prueba estadística de la familia de las pruebas M_r propuesta por Maydeu-Olivares y Joe (2005) para modelos con respuesta binaria. A diferencia de itemfit, este es un estadístico que evalúa el ajuste del test a los datos y, para ello, no los utiliza en su totalidad: obtiene parámetros a través de divisiones de los datos, cosa que permite hacer estimaciones de bases de datos pequeñas a costa de tiempo y perder un poco de información sobre la verdadera adecuación del modelo (Xu y col., 2017).

Su función debe contener un modelo mirt ya calculado y, si tuviesen varias dimensiones, se debe especificar que se use una integración casi-Monte Carlo con el argumento **QMC**.

```
37 M2(mirt.exp.3F, QMC = TRUE)
```

```
            M2   df p       RMSEA    RMSEA_5    RMSEA_95      SRMSR       TLI       CFI
stats 2567.397 1593 0 0.008744645 0.00811825 0.009361312 0.01329049 0.964936 0.9684424
```

M2 rechaza con mucha facilidad modelos bien ajustados como en este caso, ya que el valor de p es inferior a 0.05, por ello se adjuntan otros estimadores de bondad de ajuste como RMSEA, TLI o CFI. Para modelos con ítems de respuesta binaria, Maydeu-Olivares y Joe (2014) propusieron que un RMSEA inferior a 0.05 o 0.089 indica un ajuste bueno o aceptable, respectivamente, pero Xu y col. (2017) observaron que el punto de corte debe establecerse en 0.03. Por otra parte, valores de TLI o CFI por encima de 0.9 y 0.95 indican un ajuste aceptable o relativamente bueno, respectivamente.

Aunque no haya puntos de corte bien establecidos el modelo presenta un buen ajuste, incluso para aquellos más conservadores.

residuals

La función residuals permite evaluar el principio de independencia local visto en la sección de Principios del capítulo anterior. Para ello se evalúa el grado de relación entre pares de ítems, obteniendo de esta forma aquellos que no cumplen el principio de independencia local.

La función necesita un modelo mirt, especificar que se quieran valores p para cada par de ítems con el argumento **df.p** y, si tuviesen varias dimensiones, especificar que se use una integración casi-Monte Carlo con el argumento **QMC**.

```
38 residuales <- residuals(mirt.exp.3F, df.p = TRUE, QMC = T)
```

El output de la función son dos matrices, la primera tiene su triangulo superior con el valor de p de cada par de ítems y la segunda un valor de la V de Cramér estandarizado de -1 a 1 que indica con qué fuerza se vulnera la independencia local: valores cercanos a los extremos indican una clara vulneración y los cercanos a 0 una vulneración prácticamente nula (Allen, 2017).

Para saber qué ítems tienen valores de p inferiores a 0.05 y observar sus V de Cramér se puede emplear la siguiente solución, aunque hay muchas otras formas de indexar valores en R.

```
39 cbind(which(residuales$df.p < 0.05, arr.ind = T), VCramer =
     resid$LD[which(residuales$df.p < 0.05)])
```

```
      row col     VCramer
I6      6   7  0.02347876
I5      5  12  0.02723153
I8      8  16  0.02570147
I11    11  16  0.02833874
I14    14  17  0.02393573
       ...       ...
I43    43  60  0.02360453
I47    47  60  0.02538431
I48    48  60 -0.03814862
I58    58  60 -0.02653811
I59    59  60  0.04918944
```

'row' y 'col' muestran los índices de los ítems, por lo tanto, la primera pareja se refiere a la relación entre el ítem 6 y el 7.

Hay una gran cantidad de parejas de ítems que vulneran el principio de independencia local según el valor de p, pero la V de Cramér estandarizada muestra una evidencia prácticamente nula, cosa que demuestra cómo de sensible puede llegar a ser esta prueba.

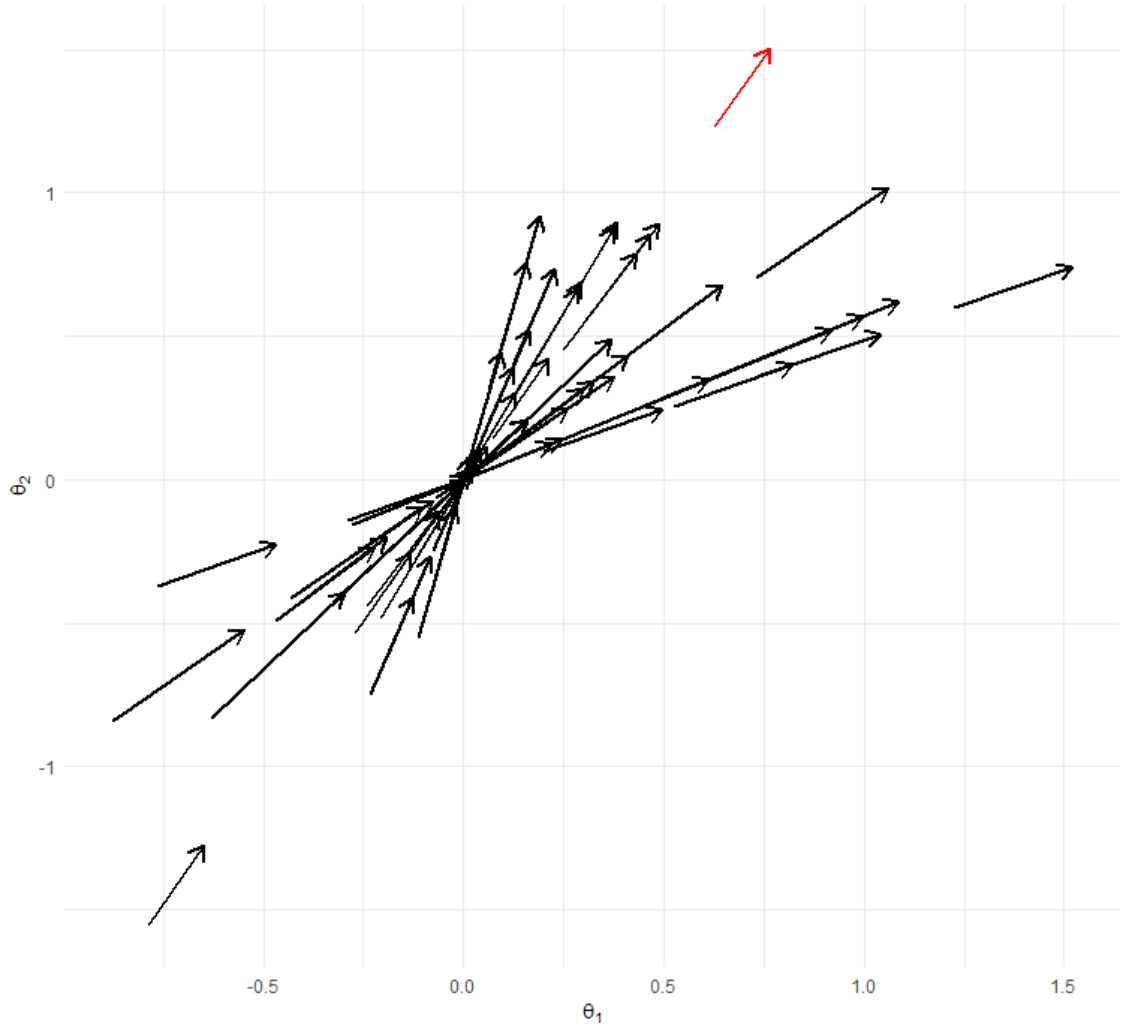
clusters

Reckase (2009) propuso que el máximo de factores de un modelo no puede exceder el número de clusters que tienen los datos y estos últimos se obtienen, primero, definiendo el ángulo que forman los ítems cuando se representan en un sistema de coordenadas polares[5] como se muestra a continuación.

5: En un sistema de coordenadas que define cada punto en un plano o sistema multidimensional por una distancia y un ángulo respecto a un eje.

Figura 3.4

Sistema de coordenadas polares



Nota. Cada vector corresponde a un ítem, cuya dirección equivale a la dirección de máxima pendiente del ítem, la distancia entre su origen y el punto [0 0] equivale a MDIFF y la longitud del vector equivale a MDISC. El vector rojo corresponde a un ítem con $a1 = 1.03$, $a2 = 1.81$, $d = -2.55$, $MDIFF = 1.23$ y $MDISC = 2.08$. Se puede observar como el vector es más paralelo a θ_2, ya que es más discriminativo para esta dimensión.

Mirar el Apéndice B para entender mejor los conceptos MDIFF y MDISC.

Por otro lado, se utiliza el método de Ward para estimar clusters a partir de esos ángulos. La función *ward_mat()* obtiene los ángulos entre cada par de ítems e implementar el algoritmo que obtiene los clusters se consigue con *hclust()*, pero antes se deben obtener los ángulos de cada ítem respecto a cada eje con la función *polar_coords()*.

Para ello se deben introducir los parámetros en forma de matriz o data.frame, pero el output de la función *coef()* es una lista y este tipo de formato no es adecuado para otras funciones como *polar_coords()*. Para pasar de lista a data.frame, se puede utilizar la función *CoefToDataframe()*.

```
40 parametros.mirt.exp.3F <- CoefToDataframe(n_items = 60, modelo =
       mirt.exp.2F, rotate = 'oblimin')
```

Hecho esto, los clusters se obtienen de la siguiente manera:

polar_coords() tiene dos argumentos, el primero necesita introducir una matriz o data.frame de los valores de a_i ordenados y el segundo el valor de d_i.

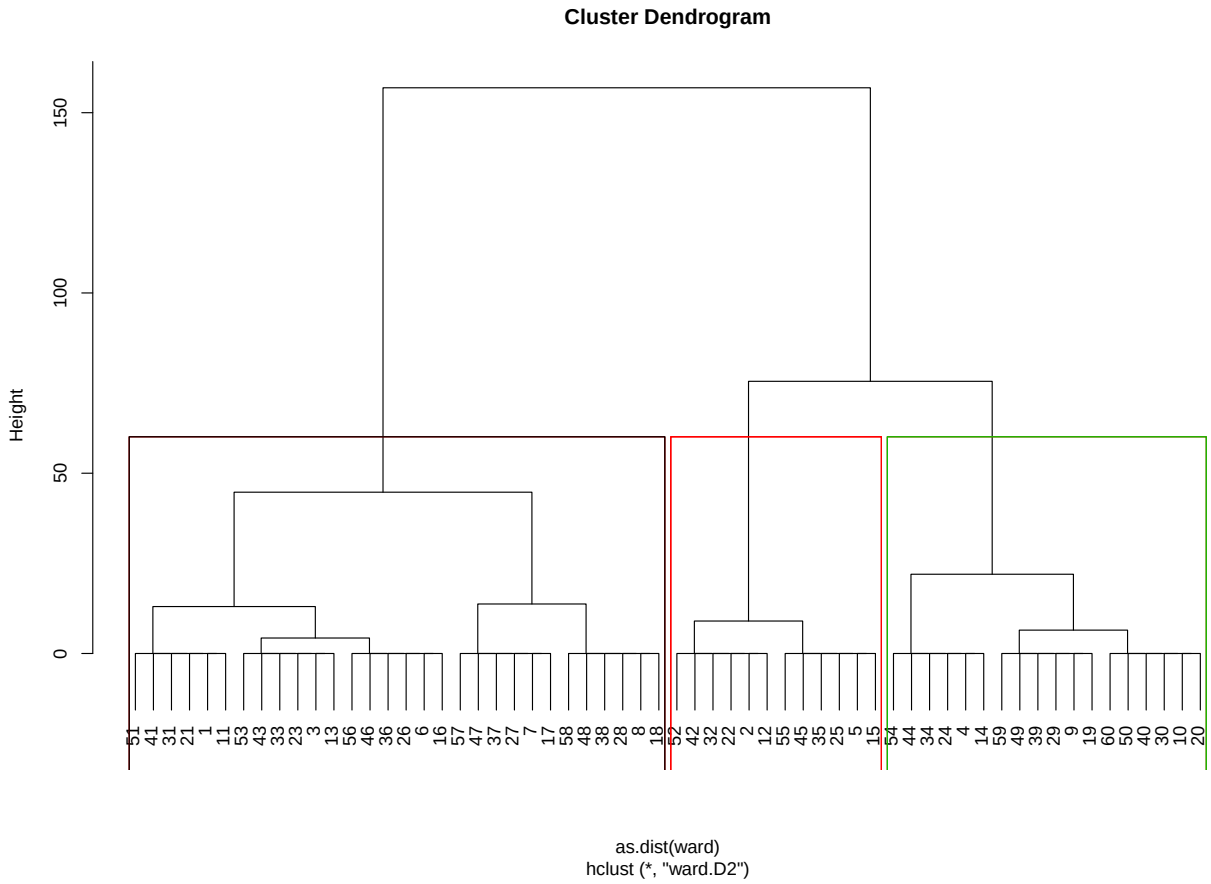
```
41 coordenadas.mirt.exp.3F <- polar_coords(parametros.mirt.exp.3F
       [,1:3], parametros.df$d)
42
43 ward.mirt.exp.3F <- ward_mat(coordenadas[c('ang1', 'ang2', 'ang3')
       ])
44
45 clusters.mirt.exp.3F <- hclust(as.dist(ward.mirt.exp.3F), method =
        'ward.D2')
```

Si se visualiza un dendograma a través de *plot()* y se especifica que se muestren tres clusters con *rect.hclust()* se puede observar como hay 3 clusters principales.

```
46 plot(clusters, cex = 0.6)
47
48 rect.hclust(clusters, k = 3, border = 1:3)
```

Figura 3.5

Dendograma



Nota. La altura (Height) indica el orden en que se han hecho los clusters y en el eje de abscisas está el número de cada ítem. Primero se obtienen dos clusters con la misma distancia que se dividen en otros dos clusters cada uno.

El punto de corte que toma Reckase (2009) estaría inmediatamente debajo de la primera división de la derecha: si se observan las alturas de los 3 clusters, remarcados en color, se puede trazar una linea horizontal que

deja por encima tres líneas verticales. Esa linea horizontal es lo que se debe observar a la hora de determinar clusters visualmente, pero si el gráfico es muy complejo *hclust()* facilita su interpretación.

Cabe destacar que el dendograma también informa de a qué cluster pertenece cada ítem, pero Reckase (2009) advierte que este método agrupa ítems según la forma en la que las personas los responden, por lo tanto, los ítems se pueden agrupar de formas que las personas que los redactaron no contemplaban.

Además, Reckase (2009) no recomienda su uso para determinar que ítems son propios de cada cluster, él explica este método para tener un valor máximo de dimensiones al que puede llegar el modelo que se estime.

Test Adaptativo Informatizado

4

La principal premisa de un TAI es seleccionar los ítems que se presentan a una persona de forma dinámica a medida que avanza en el examen y ese dinamismo supone seleccionar el próximo ítem acorde a las respuestas que ha dado la persona en los anteriores y considerando la información que estos dan respecto al nivel de habilidad de la persona (Oppl y col., 2017). Además, los ítems que se administran en un TAI deben provenir de una banco de ítems calibrado (Vale, 2006/2015), que es en sí mismo, lo que se ha procurado obtener durante los capítulos anteriores.

La administración empieza por seleccionar un ítem al azar o uno que tenga una dificultad media, ya que en este estadio, no se tiene ninguna información sobre la administración de ítems previos. Después, en el momento en que se tiene la suficiente información sobre la persona para estimar el nivel de rasgo, la selección del próximo ítem se basa en métodos estadísticos más sofisticados, como el del Apéndice D.

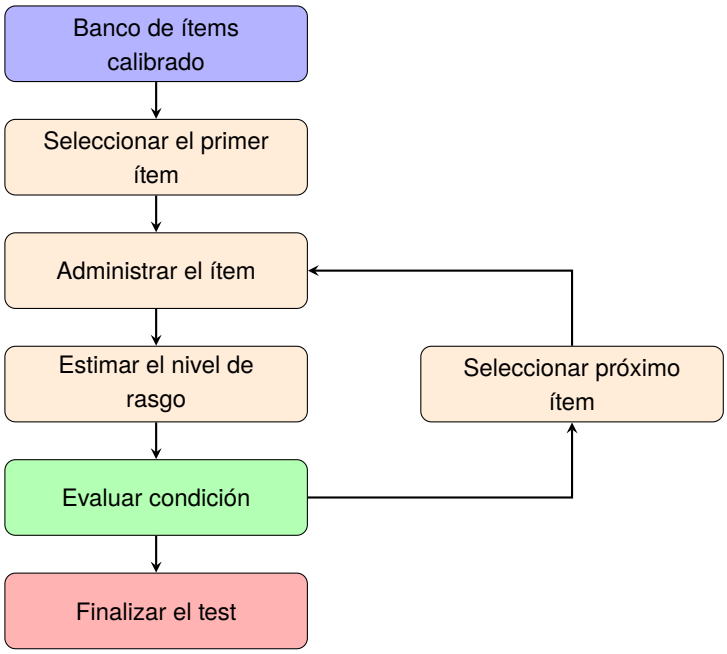
Cada vez que se da una respuesta se actualiza el nivel de rasgo y el TAI finaliza cuando se cumple una condición o varias, como pueden ser la largada del test o el error de medida del nivel de rasgo de una persona.

Cabe destacar que un TAI no acepta respuestas en blanco y, por lo tanto, la persona que responda se ve obligada a seleccionar una opción (Mills & Stocking, 1996).

A continuación se muestra un diagrama de todos los pasos:

Figura 4.1

Pasos de un TAI



4.1. mirtCAT

En R, el paquete mirtCAT (Chalmers, 2016) y su función, también llamada *mirtCAT()*, consiguen implementar un TAI a través de una interfaz (GUI) en HTML a través de la librería shiny (Chang y col., 2020) y también ubica todos los procesos y cálculos en el ordenador local donde se llame a la función *mirtCAT()*. Esta función tiene una gran cantidad de argumentos y opciones, repartidos entre diseño del TAI y de la GUI, selección del ítem e incluso se puede administrar un preTAI[1] .

1: Pequeño número de ítems que se administran antes del TAI para tener un nivel de rasgo inicial y evitar problemas de cálculo con los algoritmos.

Su funcionalidad se verá a partir de ahora, pero se recomienda consultar Chalmers (2016) para ampliar la información que aquí se proporciona. Los argumentos de mirtCAT se irán presentando a continuación con explicaciones y ejemplos basados en Chalmers (2016).

df Un data.frame que contenga los enunciados (*Question*), opciones a los ítems (*Option*), respuestas (*Answer*), tipos de opciones (*Type*) y enlaces a material adicional que se quiera introducir en el enunciado como imágenes o tablas (*Stem*).

A continuación se muestra un ejemplo de un test no adaptativo de tres ítems con dos opciones de respuesta, donde los dos primeros tienen casillas para cada opción de respuesta y el último un botón, la primera opción es la correcta y el último enunciado contiene una imagen.

```
49 enunciados <- c('¿2 + 3 = 5?', '¿Preceder significa estar o ir
       antes en el tiempo o delante en el espacio de otra persona o
       cosa que se toma como referencia, en especial si existe una
       anterioridad inmediata?', '¿La imagen de arriba muestra un
       caribú?')
50
51 opciones <- matrix(c('Verdadero', 'Falso'), nrow = 3, ncol = 2,
       byrow = T)
52
53 respuestas <- rep('Verdadero',3)
54
55 tipo <- c(rep('checkbox',2), 'radio')
56
57 imagenes <- c('','','D:/Documentos/TFG/Stems/Caribú.html')
58
59 df <- data.frame(Questions = enunciados,
60                  Option = opciones,
61                  Answer = respuestas,
62                  Type = tipo,
63                  Stem = imagenes)
64
65 TAI <- mirtCAT(df = df)
```

Siempre que se quiera adjuntar una imagen, una tabla o un enunciado hecho en un editor de textos, este debe estar en formato HTML (.html) o markdown (.md) y se debe especificar dónde está el archivo en el ordenador.

Automáticamente, la interfaz se abre en un buscador como Chrome o Firefox; es recomendable guardar el TAI en un objeto, en este ejemplo 'TAI', para poder obtener el nivel de rasgo o su error de medida a cada pregunta, como se verá más adelante. La sesión acaba cuando se cierra la

ventana en el buscador y automáticamente se guarda toda la información en el objeto asignado.

Figura 4.2

Interfaz de mirtCAT

Nota. Se puede observar como las opciones de respuesta del ítem tienen forma de botón y la imagen queda arriba del enunciado.

Dicho esto, los argumentos para hacer una evaluación adaptativa, a parte de **df** son:

mo	Un objeto definido por la función mirt o bfactor.
method	Método por el cual se estima el nivel de habilidad.
criteria	Criterio por el cual se selecciona el proximo ítem.
preCAT	Especificar el diseño de TAI previo a la administración de los ítems del test (preTAI).
design	Especificar el criterio de finalización del TAI, entre otros.

El método por el cual se estima el nivel de habilidad puede cambiar el valor de θ final, haciéndolo más próximo o más alejado a 0. Los métodos por máxima verosimilitud tienden a dar valores más extremos, como son 'ML' o 'WLE', aunque entre ellos también haya diferencias, 'WLE' da valores más conservadores que 'ML' aunque den el mismo error de medida (Contents, s.f.). Además, son incapaces de converger cuando se tiene un patrón de respuestas extremo, como alguien que lo contesta todo correctamente o incorrectamente.

Ante esto, surgieron los modelos Bayesianos, que siempre convergen a una solución aunque haya respuestas extremas, pero también produce que los valores de θ tiendan a valores más centrales (Abad y col., 2011).

Los métodos Bayesianos son 'MAP' o 'EAP' y estos también difieren al igual que 'ML' y 'WLE': MAP da valores más centrales que 'EAP'. Los más comunes son 'MAP' y 'ML', el segundo no tendría que fallar si el test es lo suficientemente largo, pero sino convergiera, *mirtCAT()* lo cambia automáticamente por 'MAP'.

Por otro lado, los criterio de selección del próximo ítem para TAIs multidimensionales estan basados en la estimación de divergencia de Kullback-Leibler: 'KL', 'KLd', y en la matriz de información de Fischer, como son 'Drule', 'Trule', 'Arule', 'Erule' y 'Wrule, entre otros.

Es lógico pensar que uno de ellos debe prevalecer sobre los demás a la hora de obtener estimaciones precisas, pero todavía es necesario hacer más investigación. Wang y Chang (2011) demostraron que, en modelos de dos dimensiones, el mejor criterio es el Método de Información Mútua (MUI), el cual no contempla *mirtCAT()*, pero sí da resultados similares a 'Drule'; además, se demostró que 'KL' es problemático cuando los valores de θ de una persona están cercanos a 0.

Esto indica que en modelos de dos dimensiones son preferibles los criterios relacionados con la matriz de información, pero que todavía está por descubrir el desempeño de los demás criterios en una gran variedad de modelos.

preCAT tiene muchos inputs que deben ser especificados en forma de lista:

min_items Mínimo número de ítems que presentar antes de empezar el TAI.

max_items Máximo número de ítems que presentar antes de empezar el TAI.

criteria Criterio de selección del ítem. Por defecto es aleatorio.

method Método para estimar el nivel de habilidad.

response_variance Detener preCAT si se estuviese llegando a una estimación precisa del nivel de habilidad. Por defecto no se detiene y necesita un valor lógico.

design, por otro lado, también tiene múltiples inputs, pero los más importantes para determinar una regla de parada son:

min_SEM Error de medida estàndard para cada dimensión, por defecto es 0.3. Este valor define que el test se detenga cuando se tenga la certeza de que el nivel de habilidad no varia más de 0.3 o -0.3 unidades.

delta_thetas Un valor x que determina si el cambio en el nivel de habilidad, a medida que se presentan ítems, es significativo.

min_items Mínimo número de ítems que debe tener el TAI.

max_items Máximo número de ítems que debe tener el TAI.

content Un vector de caracteres que defina qué concepto evalúa cada ítem.

content_prop Definir la proporción de ítems que se quieren mostrar por cada concepto que evalúa el ítem, definido en el input anterior.

classify Un valor numérico como punto de corte para definir personas que están por encima o por debajo de un valor de θ determinado.

classify_CI Un valor numérico entre 0 y 1 que indique el intervalo de confianza para clasificar según el punto de corte especificado en classify.

exposure Valores entre 0 y 1 para el método Synpson-Hetter.

Unos de los mayores problemas de un TAI es administrar siempre los mismos ítems de un banco de ítems y estos siempre son los más informativos, ya que los criterios de selección buscan ese tipo de ítems.

mirtCAT() implementa el de Sympson-Hetter basado en determinar el porcentaje de personas a las que se les debe presentar un ítem: 0.02 significaría que solo un 2 % de todas las personas examinadas podrían responder a ese ítem (Thompson, 2018).[2]

2: Cada vez que se busca un nuevo ítem en el banco, se genera un valor aleatorio entre 0 y 1, si ese valor es mayor que **exposure** no se presentará, si es inferior sí.

El último argumento que se presenta aquí es **shinyGUI**, cuyos inputs principales definen el estilo de la interfaz:

title Un vector de caracteres para el título de la GUI.

authors Un vector de caracteres para los nombres de de los autores o autoras o la institución del TAI. Puede omitirse para ignorar este input.

instructions Un vector de caracteres de tres componentes que indique como progresar por la GUI.

begin_message Texto que mostrar en la página anterior al inicio del TAI.

max_time Máximo de tiempo, en segundos, para finalizar el test. Por defecto no hay límite.

Resultados

Una vez finaliza el TAI, toda la información se guarda en el objeto al que se haya asignado. Para obtener el nivel de la persona y su error de medida solo hay que ejecutar ese objeto, pero para observar qué ítems se han administrado o que error de medida se tenía en cada administración se debe utilizar la función *summary()* y, adicionalmente, se puede visualizar con *plot()*.

```
66 summary(TAI)
```

```
$final_estimates
           Theta_1  Theta_2    Theta_3
Estimates 4.935148 19.99999 -2.8926607
SEs       0.000000  0.00000  0.1887483

$raw_responses
 [1] "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Falso"     "Falso"     "Falso"     "Verdadero"
 [8] "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero"
[15] "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Falso"
[22] "Verdadero" "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Verdadero"
[29] "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero"
[36] "Verdadero" "Verdadero" "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Verdadero" "Verdadero"
[43] "Falso"     "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Falso"     "Verdadero" "Falso"
```

```
[50] "Verdadero" "Falso"

$scored_responses
 [1] 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1
[44] 1 1 0 0 1 0 1 0

$items_answered
 [1]  1 32 29 54 39 13 30 57 31  4 19 37 46  2 23 41 55  3 27 43 53 40 15 22 34  9 28 60 33
[30] 14 16 42 59 11 18 38 51  6 20 45 50 36  7 24 35  8 25 47 44 10 26

$thetas_history
            Theta_1      Theta_2      Theta_3
 [1,]  0.0000000000  0.000000000  0.000000000
 [2,]  0.0007502515  0.003615403  0.001933021
 [3,] -0.0800203060  0.042610463 -0.065282892
 [4,] -0.1054463927  0.065133342  0.009937181
 [5,] -0.1054463927  0.065133342  0.009937181
           ...          ...          ...
[48,]  4.9351476198 19.999993297 -2.892660690
[49,]  4.9351476198 19.999993297 -2.892660690
[50,]  4.9351476198 19.999993297 -2.892660690
[51,]  4.9351476198 19.999993297 -2.892660690
[52,]  4.9351476198 19.999993297 -2.892660690

$thetas_SE_history
            Theta_1   Theta_2   Theta_3
          1.0000000 1.0000000 1.0000000
          0.9999040 0.9977713 0.9993632
          0.9806851 0.9932778 0.9860766
          0.9768578 0.9905754 0.9539358
theta_SE  0.9768578 0.9905754 0.9539358
         21.2878262 0.0000000 9.9201113
          2.2782406 0.0000000 4.4953453
          1.5733353 0.0000000 4.4395816
          1.5733293 0.0000000 4.3696122
              ...       ...       ...
          1.2117508 0.0000000 1.5042163
          1.2117455 0.0000000 1.5042015
          1.2113548 0.0000000 1.4926694
          1.2113547 0.0000000 1.4926694
          0.0000000 0.0000000 0.1887483

$terminated_sucessfully
[1] TRUE

$item_time
 [1]  3.22  1.44  2.17  9.76 10.03  4.50  4.79  8.87  2.17  1.89  1.98  2.01  2.67  1.49
[15]  1.48  1.81  3.58  2.80  1.56  1.53  1.75  2.36  1.94  1.95  1.67  1.56  1.28  1.68
[29]  1.45  1.54  1.74  1.56  1.61  1.50  2.52  1.61  1.47  1.47  1.38  1.45  1.92  2.36
[43]  1.56  2.13  1.72  1.41  1.32  1.85  2.11  2.47  1.87
```

Se puede observar como, tanto el error de medida como los niveles de θ finales son inverosímiles y esto es debido a que, en este ejemplo, se ha contestado al azar, además, los valores de θ negativos van en consonancia con los valores de discriminación negativos vistos en el Capítulo 3.

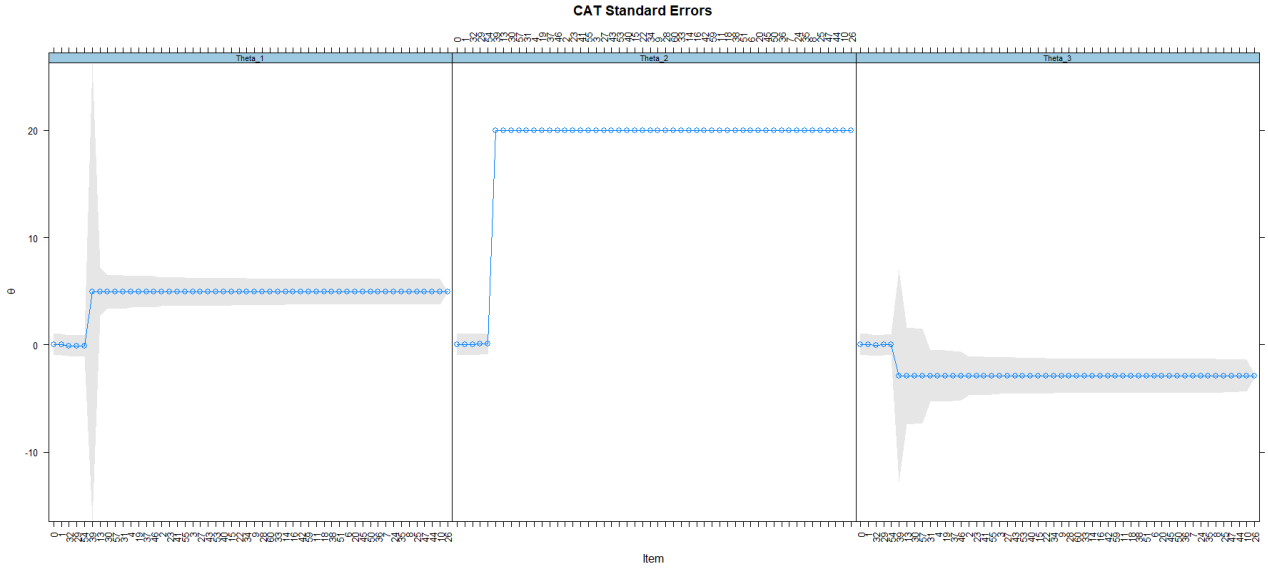
Por lo que respecta al preTAI, solo el apartado '$thetas_SE_history' muestra el erro de medida de los 3 ítems que se han administrado antes de empezar el TAI.

Con la función *plot()* es más fácil observar si hay algún patrón de respuestas extraño como se muestra a continuación.

```
67 plot(TAI)
```

Figura 4.3

Nivel de habilidad



Nota. La imagen muestra como cambia el nivel de habilidad de la persona, junto a su error de medida (en gris), para todas las dimensiones que evalúa TAI, a medida que la persona avanza por este último.

4.2. Consideraciones finales

AFE o AFC

En el inicio del Capítulo 3 se explicó qué es un Análisis Factorial Exploratorio (AFE) y Confirmatorio (AFC) como dos procesos aparentemente separados: si no conoces la distribución de los ítems en cada dimensión o el número de dimensiones conduces un AFE y si tienes una hipótesis clara sobre estos principios conduces un AFC.

En los últimos años estos análisis pueden ser entendidos como un proceso, donde primero se lleva un AFE con una mitad de los datos y después se prueban las hipótesis resultantes del AFE con un AFC en la otra mitad como se ve en Cabrera-Nguyen (2010) y Schreiber y col. (2006). En otras publicaciones se puede entender que no hay una norma clara a la hora de utilizar un AFE o un AFC de una forma determinada (Velada y col., 2009); que es mejor un AFE si un AFC no da un buen ajuste (Schmitt, 2011); que un AFE puede ser suficiente en muchos casos (Worthington & Whittaker, 2006) o que siempre se debe hacer un AFC para validar una escala o un modelo (Cabrera-Nguyen, 2010), entre otros.

mirtCAT() asume que cualquier modelo que se utilice para un TAI debe ser confirmatorio como se puede apreciar a continuación, con el modelo mirt.exp.3F obtenido en el Capítulo 3:

```
68 mirtCAT(df = df, mo = mirt.exp.3F, method = 'MAP', criteria = '
       Drule',
69                     design = list(max_items = 10))
```

```
    Error: CATs are intended for confirmatory IRT models not exploratory
```

Si se quisiera seguir con un modelo exploratorio e incluso unos parámetros que cumplan una determinada rotación, ya sea de un modelo confirmatorio o exploratorio, se puede utilizar la función generate.mirt_object, que tiene como primer argumento un data.frame donde se especifica qué valor tiene cada parámetro y qué tipo de ítem se quiere obtener; aunque primero hay que convertir el output de la función *coef()* a data.frame como en el Capítulo 3.

```
70 parametros.mirt.exp.3F <- CoefToDataframe(n_items = 60, modelo =
       mirt.exp.3F, rotate = 'oblimin')
71
72 mirt2PL.coef <- generate.mirt_object(parameters = parametros.mirt.
       exp.2F, itemtype = '2PL')
```

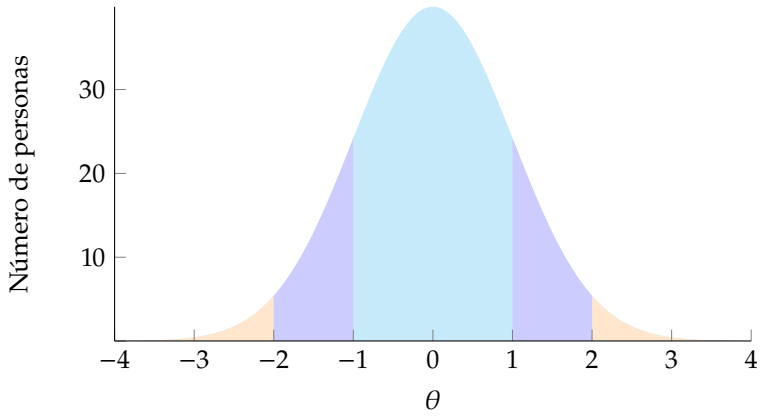
Interpretar las puntuaciones

En un contexto académico una calificación o una nota sirve para evaluar y categorizar el rendimiento escolar del los y las estudiantes. En un TAI esa nota se traduce en un nivel de θ, que como se ha visto hasta ahora, puede tener valores de $-\infty$ a ∞. Por lo tanto, categorizar el nivel de una persona es complicado y por ello existen varias formas de establecer puntos de corte, como se puede ver en Abad y col. (2011).

Por ejemplo, si al final de aplicar un TAI, θ se distribuye como una campana de Gauss con media 0 y desviación estándar 1, como en la Figura 4.4, esa distribución puede ser transformada linealmente a una escala que vaya de 0 a 100, de media 50 y una desviación típica 15, cosa que permitiría una mayor interpretación, como se ve en la Figura 4.4.1.

Figura 4.4

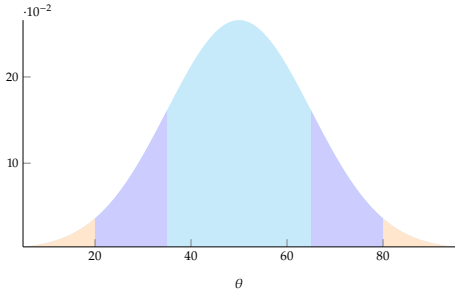
Distribución de θ



Nota. El gráfico muestra que los valores de θ se distribuyen como una campana de Gauss, donde es más difícil encontrar personas que tengan niveles de θ en los extremos y las puntuaciones más comunes son las centrales.

Figura 4.4.1

Distribución de θ escalada



Nota. La imagen muestra como la distancia que había entre personas evaluadas se mantiene, es decir, los niveles de θ han cambiado pero respetan la misma distribución que en la Figura 4.4.

Este método tiene como inconveniente determinar qué características tiene la distribución a la que se van a escalar los valores de θ o tener unos valores de θ iniciales que no sigan una distribución de probabilidad paramétrica (Yen, 1986).

Otros métodos tienen en cuenta el criterio de personas expertas para determinar puntos de corte y así clasificar las personas evaluadas en franjas (excelente, notable, etc), como el método de Angoff (Abad y col., 2011), o también se pueden tomar puntos de referencia de otras pruebas que informen del nivel de cada persona, entre otros.

Por ejemplo, si se aplicase un examen y un TAI equivalentes – ítems que evalúan el mismo contenido – a un mismo grupo de personas, se podrían establecer relaciones entre el valor de θ y la nota en el examen.

Escalar parámetros de θ apela a uno de los mayores problemas en psicometría, porque no es posible tener una unidad de medida de forma empírica de fenómenos no observables, como la habilidad de una persona. Además, cabe destacar que muchos de los métodos existentes han sido pensados para la TRI y no para la MIRT.

4.3. Ejemplo

A continuación se muestra un TAI con el modelo MIRT 2PL con una rotación varimax (ortogonal) con enunciados indeterminados para cada uno de los 60 ítems, repartidos en 4 contenidos diferentes: Comprensión lectora y oral, Ortografía y Cohesión, con la siguiente proporción de aparición: 25 %, 25 %, 30 % y 20 %, respectivamente.

Las opciones de respuesta son dicotómicas, ninguna necesita un archivo externo para el enunciado y las respuestas correctas son aleatorias. Se utiliza un criterio 'Drule' para el próximo ítem y una estimación 'ML', al igual que en el preTAI, que tiene un máximo de 5 ítems.

El criterio de finalización es un error de medida mínimo de 0.2 y una largada máxima de 50 ítems, si se da una de estas dos premisas el TAI finalizará, además, se controla la exposición del ítem en un 80 %.

También se proporcionarán un título, unas instrucciones adecuadas, el nombre del autor y un máximo de una hora.

```
# Generar un mirt_object con mirt2PL

n_items <- 60

parametros.lst <- coef(mirt2PL, rotate = 'varimax')

parametros.df <- rbind(parametros.lst[[1]])

for(i in 2:n_items){

  parametros.df <- rbind(parametros.df, parametros.lst[[i]])

}

mirt2PL.coef <- generate.mirt_object(parameters = parametros.df,
                                     itemtype = '2PL')

# Definir df

enunciados <- sprintf('Enunciado.%d', seq_len(n_items))

opciones <- matrix(c('Verdadero', 'Falso'), nrow = 60, ncol = 2,
    byrow = T)

respuestas <- sample(c('Verdadero','Falso'), 60, replace = T)

tipo <- c('radio')

df <- data.frame(Questions = enunciados,
                 Option = opciones,
                 Answer = respuestas,
                 Type = tipo,
                 stringsAsFactors = F)

# Definir preCAT

preTAI <- list(max_items = 5,
               criteria = 'Drule',
```

```
110                method = 'ML')
111
112 # Definir design
113
114 contenido <-  rep(c('ComprensiónLectora', 'ComprensiónOral',
115                      'Ortografía', 'Cohesión'), each = 15)
116
117 contenido_prop <- c(ComprensiónLectora = 0.25,
118                      ComprensiónOral = 0.25,
119                      Ortografía = 0.30,
120                      Cohesión = 0.20)
121
122 diseño <- list(min_SEM = 0.2,
123                max_items = 50,
124                content = contenido,
125                content_prop = contenido_prop,
126                max_time = 3600,
127                exposure = 0.80)
128
129 # Definir ShinyGUI
130
131 GUI <- list(title = 'TAI: Ejemplo 1',
132             authors = 'Carlos Pérez',
133             instructions = c('Para contestar a un ítem se debe
    seleccionar siempre una de las dos opciones,
134                              no se permiten respuestas en blanco y
     finalizará en una hora.', 'Siguiente ítem'))
135 # Definir mirtCAT
136
137 TAI <- mirtCAT(df = df, mirt2PL.coef, method = 'ML', criteria = '
    Drule',
138                preCAT = preTAI, design = diseño, shinyGUI = GUI)
```

Bibliografía

Abad, F. J., Olea, J., Ponsoda, V. & García, C. (2011). *Medición en ciencias sociales y de la salud*. Sintesis. https://www.sintesis.com/metodolog%5C%C3%5C%ADa%5C%20de%5C%20las%5C%20ciencias%5C%20del%5C%20comportamiento%5C%20y%5C%20de%5C%20la%5C%20salud-22/medici%5C%C3%5C%B3n%5C%20en%5C%20ciencias%5C%20sociales%5C%20y%5C%20de%5C%20la%5C%20salud-ebook-1572.html

Wikipedia. (2020). Algoritmo esperanza-maximización. Wikimedia Foundation. https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_esperanza-maximizaci%5C%C3%5C%B3n

Allen, M. (2017). Phi Coefficient, *4*. https://doi.org/10.4135/9781483381411.

Allison, P. (2014, 25 de septiembre). *Sensitivity Analysis for Not Missing at Random*. https://statisticalhorizons.com/sensitivity-analysis

American Psychological Association. (s.f.). *APA Dictionary of Psychology*. Consultado el 24 de marzo de 2021, desde https://dictionary.apa.org/clustered-data

Barton, M. A. & Lord, F. M. (1981). AN UPPER ASYMPTOTE FOR THE THREE-PARAMETER LOGISTIC ITEM-RESPONSE MODEL*. *ETS Research Report Series*, *1981*(1), i-8. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.1981.tb01255.x

Bernaards, C. A. & I.Jennrich, R. (2005). Gradient Projection Algorithms and Software for Arbitrary Rotation Criteria in Factor Analysis. *Educational and Psychological Measurement*, *65*, 676-696.

Birnbaum, F. L. M. N. A. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Addison-Wesley.

Bolt, D. M. & Lall, V. F. (2003). Estimation of Compensatory and Noncompensatory Multidimensional Item Response Models Using Markov Chain Monte Carlo. *Applied Psychological Measurement*, *27*(6), 395-414. https://doi.org/10.1177/0146621603258350

Bruin, J. (2011). *newtest: command to compute new test @ONLINE*. https://stats.idre.ucla.edu/stata/ado/analysis/

Cabrera-Nguyen, E. (2010). Author Guidelines for Reporting Scale Development and Validation Results in the Journal of the Society for Social Work and Research. *Journal of the Society for Social Work and Research*, *1*, 99-103. https://doi.org/10.5243/jsswr.2010.8

Chalmers, R. P. (2012). mirt: A Multidimensional Item Response Theory Package for the R Environment. *Journal of Statistical Software*, *48*(6), 1-29. https://doi.org/10.18637/jss.v048.i06

Chalmers, R. P. (2016). Generating Adaptive and Non-Adaptive Test Interfaces for Multidimensional Item Response Theory Applications. *Journal of Statistical Software*, *71*(5), 1-39. https://doi.org/10.18637/jss.v071.i05

Chang, W., Cheng, J., Allaire, J., Xie, Y. & McPherson, J. (2020). *shiny: Web Application Framework for R* [R package version 1.4.0.2]. R package version 1.4.0.2. https://CRAN.R-project.org/package=shiny

IBM Documentation. (s.f.). *Factor Analysis Rotation*. Consultado el 16 de abril de 2021, desde https://www.ibm.com/docs/en/spss-statistics/SaaS?topic=analysis-factor-rotation

Forina, M., Armanino, C., Lanteri, S. & Leardi, R. (1989). Methods of varimax rotation in factor analysis with applications in clinical and food chemistry. *Journal of Chemometrics*, *3*(S1), 115-125. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cem.1180030504

Graham, J. W. (2009). Missing Data Analysis: Making It Work in the Real World. *Annual Review of Psychology*, *60*(1), 549-576. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.58.110405.085530

Harris, D. (1989). Comparison of 1-, 2-, and 3-Parameter IRT Models. *Educational Measurement: Issues and Practice*, *8*(1), 35-41. https://doi.org/10.1111/j.1745-3992.1989.tb00313.x

Honaker, J., King, G. & Blackwell, M. (2011). Amelia II: A Program for Missing Data. *Journal of Statistical Software*, *45*(7), 1-47. http://www.jstatsoft.org/v45/i07/

Kang, T. & Chen, T. T. (2008). Performance of the Generalized S-X2 Item Fit Index for Polytomous IRT Models. *Journal of Educational Measurement*, *45*(4), 391-406. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.2008.00071.x

Kao, F. M. Y. S. T. (2014). Item response theory for measurement validity. *Shanghai archives of psychiatry*, *26*(3), 171-177. https://doi.org/10.3969/j.issn.1002-0829.2014.03.010

Kline, P. (2014). *An Easy Guide to Factor Analysis*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315788135

Liao, W.-W., Ho, R.-G., Yen, Y.-C. & Cheng, H.-C. (2012). The Four-Parameter Logistic Item Response Theory Model As a Robust Method of Estimating Ability Despite Aberrant Responses. *Social Behavior and Personality: an international journal*, *40*(10), 1679-1694. https://doi.org/10.2224/sbp.2012.40.10.1679

Little, R. J. A. (1988). A Test of Missing Completely at Random for Multivariate Data with Missing Values. *Journal of the American Statistical Association*, *83*(404), 1198-1202. https://doi.org/10.1080/01621459.1988.10478722

Little, R. J. A. & Rubin, D. B. (2002). *Statistical Analysis with Missing Data*. John Wiley & Sons, Inc. https://doi.org/10.1002/9781119013563

Lloret-Segura, S., Ferreres-Traver, A., Hernández-Baeza, A. & Tomás-Marco, I. (2014). El análisis factorial exploratorio de los ıtems: una guıa práctica, revisada y actualizada. *Anales de Psicologıa*, *30*(3). https://doi.org/10.6018/analesps.30.3.199361

Lord, F. M. (2012). *Applications of Item Response Theory To Practical Testing Problems*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203056615 (Fecha inicial de publicación 1980)

Mair, P. (2018). *Modern Psychometrics with R*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93177-7

Maydeu-Olivares, A. & Joe, H. (2005). Limited-and full-information estimation and goodness-of-fit testing in 2 n contingency tables: A unified framework. *Journal of the American Statistical Association*, *100*(471), 1009-1020.

Maydeu-Olivares, A. & Forero, C. (2010). Goodness-of-Fit Testing. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.01333-6

Maydeu-Olivares, A. & Joe, H. (2014). Assessing approximate fit in categorical data analysis. *Multivariate Behavioral Research*, *49*(4), 305-328. https://doi.org/10.1080/00273171.2014.911075

Mills, C. N. & Stocking, M. L. (1996). Practical issues in Large-Scale Computerized Adaptive Testing. *Applied Measurement in Education*, *9*(4), 287-304. https://doi.org/10.1207/s15324818ame0904_1

RDocumentation. (s.f.). *mirt: Full-Information Item Factor Analysis (Multidimensional Item Response Theory)*. Consultado el 17 de abril de 2021, desde https://www.rdocumentation.org/packages/mirt/versions/1.33.2/topics/mirt

Oppl, S., Reisinger, F., Eckmaier, A. & Helm, C. (2017). A flexible online platform for computerized adaptive testing. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *14*(1). https://doi.org/10.1186/s41239-017-0039-0

Osborne, J. W. (2015). What is Rotating in Exploratory Factor Analysis? https://doi.org/10.7275/HB2G-M060

R Core Team. (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. https://www.R-project.org/

Rasch, G. (1960). *Studies in mathematical psychology: I. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Nielsen Lydiche. https://www.routledge.com/Handbook-of-Item-Response-Theory-Volume-1-Models/Linden/p/book/9780367220013

Reckase, M. D. (2009). *Multidimensional Item Response Theory*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-89976-3

Rhoads, C. H. (2012). Problems with Tests of the Missingness Mechanism in Quantitative Policy Studies. *Statistics, Politics, and Policy*, *3*(1). https://doi.org/10.1515/2151-7509.1012

Rönkkö, M. (2020, 24 de junio). *Levels and patterns of missing data[Archivo de vídeo]*. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=rmezzIK1Zd4

Roth, P. L. (1994). MISSING DATA: A CONCEPTUAL REVIEW FOR APPLIED PSYCHOLOGISTS. *Personnel Psychology*, *47*(3), 537-560. https://doi.org/10.1111/j.1744-6570.1994.tb01736.x

Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika*, *63*(3), 581-592. https://doi.org/10.1093/biomet/63.3.581

Schmitt, T. A. (2011). Current Methodological Considerations in Exploratory and Confirmatory Factor Analysis. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *29*(4), 304-321. https://doi.org/10.1177/0734282911406653

Schreiber, J., Nora, A., Stage, F., Barlow, E. & King, J. (2006). Reporting Structural Equation Modeling and Confirmatory Factor Analysis Results: A Review. *Journal of Educational Research - J EDUC RES*, *99*, 323-338. https://doi.org/10.3200/JOER.99.6.323-338

Spray, J., Davey, T., Reckase, M., Ackerman, T. & Carlson, J. (1990). Comparison of Two Logistic Multidimensional Item Response Theory Models, 46.

Sulis, I. & Porcu, M. (2017). Handling Missing Data in Item Response Theory. Assessing the Accuracy of a Multiple Imputation Procedure Based on Latent Class Analysis. *Journal of Classification*, *34*(2), 327-359. https://doi.org/10.1007/s00357-017-9220-3

Thompson, N. (2018, 25 de enero). *What is the Sympson-Hetter Item Exposure Control?* Consultado el 16 de abril de 2021, desde https://assess.com/2018/01/25/sympson-hetter-item-exposure-control/

Vale, C. D. (2015). Computerized Item Banking. En S. Lane, M. R. Raymond & T. M. Haladyna (Eds.), *Handbook of Test Development* (2.ª ed., pp. 261-287). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203102961 (Fecha inicial de publicación 2006)

van der Linden, W. J. (2019). *Handbook of Item Response Theory: Volume 1: Models*. Routledge. https://www.routledge.com/Handbook-of-Item-Response-Theory-Volume-1-Models/Linden/p/book/9780367220013

van Buuren, S. (2018). Flexible Imputation of Missing Data. Routledge. https://stefvanbuuren.name/fimd/

van Buuren, S. & Groothuis-Oudshoorn, K. (2011). mice: Multivariate Imputation by Chained Equations in R. *Journal of Statistical Software*, *45*(3), 1-67. https://www.jstatsoft.org/v45/i03/

Velada, R., Caetano, A., Bates, R. & Holton, E. (2009). Learning transfer – validation of the learning transfer system inventory in Portugal. *Journal of European Industrial Training*, *33*. https://doi.org/10.1108/03090590910985390

Wang, C. & Chang, h.-h. (2011). Item Selection in Multidimensional Computerized Adaptive Testing—Gaining Information from Different Angles. *Psychometrika*, *76*, 363-384. https://doi.org/10.1007/s11336-011-9215-7

Contents, R. M. T. (s.f.). *Warm's Mean Weighted Likelihood Estimates (WLE) of Rasch Measures*. Consultado el 16 de abril de 2021, desde https://www.rasch.org/rmt/rmt211h.htm

Worthington, R. L. & Whittaker, T. A. (2006). Scale Development Research: A Content Analysis and Recommendations for Best Practices. *The Counseling Psychologist*, *34*(6), 806-838. https://doi.org/10.1177/0011000006288127

Xu, J., Paek, I. & Xia, Y. (2017). Investigating the Behaviors of M2 and RMSEA2 in Fitting a Unidimensional Model to Multidimensional Data. *Applied Psychological Measurement*, *41*(8), 632-644. https://doi.org/10.1177/0146621617710464

Yen, W. M. (1986). THE CHOICE OF SCALE FOR EDUCATIONAL MEASUREMENT: AN IRT PERSPECTIVE. *Journal of Educational Measurement*, *23*(4), 299-325. https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.1986.tb00252.x

Apéndice

1. Apéndice A: Pequeño tutorial en R

Instalar R y RStudio

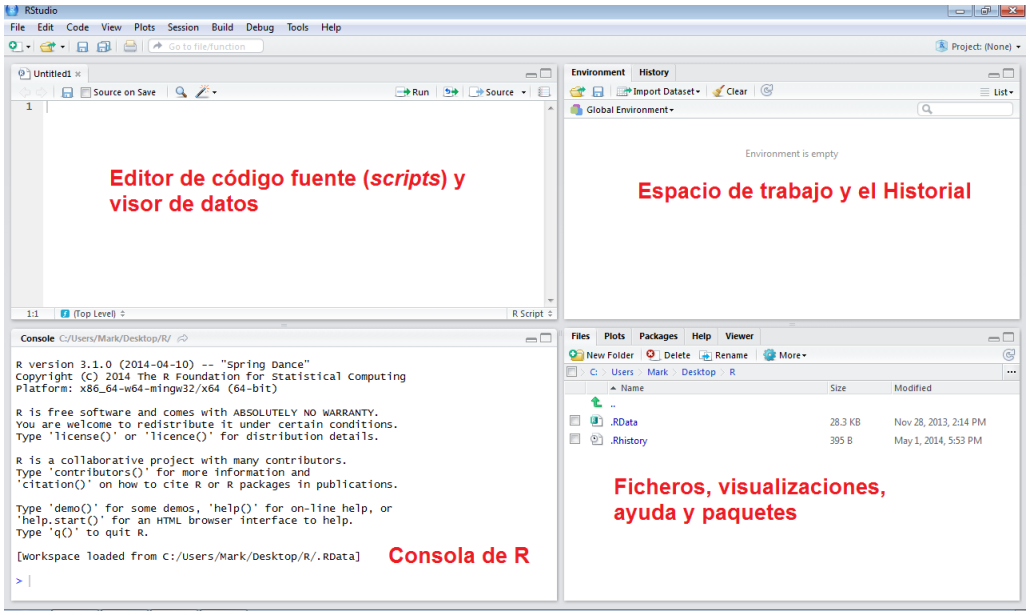
R está disponible para las plataformas **Windows**, **OS X** y **Linux/Unix** y la principal colección de recursos en línea es **Comprehensive R Archive Network** (CRAN). Si va al sitio web del proyecto **R** en http://www.r-project.org/, podrá navegar por las diferentes secciones del proyecto e informarse mejor de la labor de **R Project**. El primer parágrafo – ***Getting Started*** – conduce a los diferentes mirrors* que tiene la web. Una vez se selecciona el más cercano a su ubicación podrá seguir las indicaciones para descargar el archivo ejecutable e instalar **R**. Como se verá más adelante, es posible que algunos paquetes necesiten instalarse con binarios, en ese caso, se debe tener instalado RTools que se puede encontrar en https://cran.r-project.org/bin/windows/Rtools/.

R es un lenguaje interpretado que es estrictamente sensible a las mayúsculas y los caracteres, por lo tanto, responde a instrucciones que siguen una sintaxis específica en una consola o una interfaz de comandos; el software interpreta y ejecuta ese código y devuelve el resultado.

Cuando se abre la aplicación de **R** se abre la interfaz que tiene por defecto. Tanto **OS X** como **Windows** tienen la interfaz sobria, cosa que podría intimidar a primera vista; por eso se propone **RStudio** como interfaz por defecto de este manual, aunque se pueda implementar en cualquier otra. **RStudio** se descarga en su página oficial (https://rstudio.com/products/rstudio/download/) y es completamente gratuita. Tiene un aspecto mucho más depurado formado por cuatro componentes o paneles principales: la consola; el editor o script; el historial y el entorno, y por otro lado, los ficheros, gráficos y demás.

Figura 1

RStudio



Nota. En la imagen se observan los diferentes paneles de la interfaz gráfica de RStudio.

* CRAN no es una sola web, es una colección de servidores que contienen copias idénticas de toda la información de CRAN, también llamados mirros (espejos). Existen para agilizar la descarga de contenido en el lugar del mundo en el que estés, de esta forma, se reduce el tráfico de internet internacional o de larga distancia.

Aunque la funcionalidad de **RStudio** es muy extensa, lo más importante por ahora es que todo el código que se precie debería escribirse en script y no directamente en la consola. Al iniciar **RStudio** no hay ningún script abierto a menos que se tenga guardado uno; en File se encuentra todo lo necesario para crear script o proyectos nuevos. La interfaz es altamente personalizable, se puede elegir el color, la tipografía y la distribución de los paneles, entre otros, en *Tools* → *Global Options* → *Appereance*.

RStudio, al igual que cualquier otro editor de texto tiene comandos integrados que se pueden aprender con las RStudio cheatsheet, pero Ctrl+Enter sería el más común ya que ejecuta una línea de código en los script, seguido de Ctrl+Shift+S, que lee todo el código de un script sin mostrar ningún resultado en la consola; muy útil para tener en el entorno todas las funciones necesarias para el TAI de forma rápida.

Por defecto, la consola o intérprete que se ve en la Figura 1, indica si **R** está listo y esperando un comando con el símbolo **>**. Si se estuviese ejecutando un comando muy costoso, en la parte derecha superior de la consola aparecería una señal de Stop que detendría el proceso, pero si **RStudio** está consumiendo muchos recursos en ese momento puede ser que la sesión se bloquee y se pierda parte del trabajo sino se ha guardado, por eso se recomienda guardar el progreso antes de ejecutar un comando que se prevé costoso o probarlo con una porción de la base de datos original, entre otros.

Una sesión en **R** activa siempre tiene un directorio (carpeta) asociado, a menos que se especifique la ruta de un archivo en específico, de otro directorio y para saber en qué directorio se está trabajando use la función *getwd*.

Instalar y cargar paquetes

Con la instalación de R viene un número pequeño de paquetes instalada, por lo tanto, solo necesitan ser cargados con la función *library*.

```
library(MASS)
```

Cargando paquetes o librerías, se puede acceder a todas las funciones y bases de datos que contenga la librería. Si no se cargasen, se tendría que especificar de qué paquete proviene cada función que se quiera utilizar.

```
MASS::fractions
```

Por otro lado, hay miles de paquetes disponibles en CRAN, que no se encuentran en la instalación base y que, por lo tanto, deben ser instalados manualmente. Para ello se necesita conexión a internet, ya que se descargarán de la mirror de las cual se haya descargado R; por esto es importante escoger el servidor local más cercano. También es posible que la instalación requiera permiso para instalar binarios, esto no debe suponer un problema si el sistema es compatible con esa versión del paquete o se tiene instalado RTools. Una vez instalado, un paquete es como cualquier otro y, por lo tanto, también se debe cargar con *library*.

```
install.packages(mirt)
library(mirt)
```

Documentación y guardado

Hasta ahora ya se han mostrado algunas funciones: *library* se encarga de cargar librerías pero tiene muchos matices y opciones que por ahora, no sería lógico explicar. Siempre que se tenga alguna duda sobre qué opciones hay dentro de la función o cómo es una base de datos, se puede utilizar *help* o *?* y en el panel de ayuda se mostrará un resumen general de aquello que estemos buscando ayuda. Además, en el mismo código se pueden escribir comentarios si van precedidos de almohadillas.

```
# Esto es un comentario que no afecta al código
help(data.frame); ?lm
```

Cuando se quieran guardar los progresos en RStudio se debe prestar atención a dos cosas, cualquier nuevo objeto o función que se ha creado durante la sesión, que aparece en el panel de Enviorment y segundo, todos aquellos scripts que se hayan escrito. En cada nuevo proyecto (en la pestaña File se puede crear cualquier tipo de proyecto) de R se creará automáticamente un documento .RData[**], el cual guarda automáticamente el estado de la sesión antes de cerrar RStudio, por lo tanto, se mantienen todos los scripts y los objetos creados.

Datos

R es capaz de trabajar con los siguientes tipos de datos:

Tabla 1

Tipos de datos

Categoría	
Números	$1, 2, 3...$
Enteros	$1L, 2L, 3L...$
Números complejos	$0 + 5i$
Caracteres	$a, b, c...$
Valores lógicos	$TRUE, FALSE$

Nota. Los números equivalen a los números naturales $\mathbb{N}$ y los enteros, también llamados así en matemáticas $\mathbb{F}$, son un tipo de número que no tiene decimales, en R se especifican con una L a la derecha y se diferencian principalmente de los números por la memoria que ocupan, los enteros ocupan menos. En R, el único número complejo es i, los caracteres se refieren a cualquier tipo de texto y los valores lógicos se usan para trabajar con operadores booleanos.

Cualquier dato puede asignarse a un objeto en la sesión en la que se esté trabajando, como, por ejemplo, el resultado de una suma. En R se pueden asignar de dos formas: usando una flecha (<-) o usando el signo igual (=).

```
entero <- 10L; suma = 12 + 3
entero; suma
```

```
[1] 10
[1] 123
```

Como se puede ver, R mostrará el valor asignado a un objeto cuando se ejecute en la consola. Además, cuando se usa un objeto en otras operaciones, R lo sustituye por el valor que tiene asignado.

```
suma / 5
```

```
[1] 3
```

[**] Cada vez que se crea un proyecto se debe especificar el directorio donde se guardará todo lo que se derive del proyecto, es decir, todos los scripts, gráficos y el documento .RData, entre otros.

Estructuras de datos

Aunque R contemple más formas para guardar datos, aquí se van a mostrar las más básicas:

Tabla 2

Estructuras básicas

Objeto	Valores	¿Varios valores en el mismo objeto?
Vectores	números, caracteres, números complejos o valores lógicos	No
Factores	números o valores lógicos	No
Matrices	números, caracteres, números complejos o valores lógicos	No
Data frame	números, caracteres, números complejos o valores lógicos	Sí
Listas	números, caracteres, números complejos, valores lógicos, funciones, expresiones...	Sí

Un vector es una secuencia de elementos, que como se ve en la tabla puede contener varios tipos de datos; se crea con la función *c* que significa concatenar. Aunque se intenten concatenar valores diferentes R acabará forzándolos a que sean de solo un tipo, en este caso caracteres, ya que cada valor está entre comillas.

```
vector <- c(1 + 2, 3^3, TRUE, 'Hola')
vector
```

```
[1] "3"    "27"   "TRUE" "Hola"
```

Los factores se crean con la función factor y es la mejor forma de contener datos categóricos. Automáticamente detecta qué grupos de datos categóricos hay en el vector y se muestran en Levels.

```
factor <- factor(c('Hombre', 'Mujer', 'Mujer', 'Desconocido'))
factor
```

```
[1] Hombre      Mujer       Mujer       Desconocido
Levels: Desconocido Hombre Mujer
```

Las matrices es una colección de datos organizados en una tabla de m filas por n columnas a la que se le pueden aplicar operaciones aritméticas, al igual que una matriz matemática. Aunque acepten varios tipos de valores, lo normal es que contengan valores numéricos.

```
matriz <- matrix(1:9, ncol = 3, nrow = 3)
matriz
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

Los data.frame son parecidos a las matrices, ya que también son tablas de m filas por n columnas pero está pensado para contener datos heterogéneos y se podría extrapolar su comportamiento a la de una tabla de Excel.

```
dataframe <- data.frame(números = 1:10, caracteres = alphabet[1:10], enteros = 1:10L, lógicos =
    sample(c(TRUE, FALSE), size = 10, replace = T))
```

```
     números caracteres integers lógicos
1       1          a        1   FALSE
2       2          b        2   FALSE
3       3          c        3    TRUE
4       4          d        4   FALSE
5       5          e        5    TRUE
```

Finalmente, las listas pueden contener elementos de diferente tipo (matrices, data.frame, vectores, funciones, etc) e incluso contener listas dentro de listas.

```
lista <- list(vector = vector, factor = factor, matriz = matriz, datarfame =  dataframe, lista =
    list(vector))
lista
```

```
$vector
[1] "3"    "27"   "TRUE" "Hola"

$factor
[1] Hombre      Mujer       Mujer       Desconocido
Levels: Desconocido Hombre Mujer

$matriz
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9

$datarfame
  números caracteres integers lógicos
1       1          a        1    TRUE
2       2          b        2    TRUE
3       3          c        3   FALSE
4       4          d        4    TRUE
5       5          e        5    TRUE

$lista
$lista[[1]]
[1] "3"    "27"   "TRUE" "Hola"
```

Indexar

Hay muchas formas de acceder a un dato, columna, componente, etc, de cualquiera de los objetos que se han explicado antes y a todos se puede acceder con corchetes. Los vectores y factores al tener solo una dimensión tendrán un índice o una secuencia (p. ej. 1:5) entre corchetes.

```
vector[1]; factor[c(1,4)]
```

```
[1] "3"
[1] Hombre      Desconocido
Levels: Desconocido Hombre Mujer
```

Las matrices y los data frames tendrán dos, el primero acorde a la fila y el segundo a la columna.

```
matriz[1,2]; dataframe[2,5]
```

```
[1] 4
[1] b
Levels: a b c d e
```

Las listas necesitan un índice también, al ser un objeto de una sola dimensión, pero para acceder a un componente o varios se deben utilizar dos corchetes, si no se hace así, se accede a un componente pero este no cambia de clase.

```
lista[[1]]; lista[[3]][1,1]; lista[3][2,3]; lista[[5]][[1]][2]
```

```
[1] "3"    "27"   "TRUE" "Hola"
[1] 1
Error in lista[3][2, 3] : incorrect number of dimensions
[1] "27"
```

A diferencia de los demás, a los data.frames o las listas también se puede acceder por el nombre que tenga la columna o el componente de la lista a través del signo del dólar.

```
dataframe$lógicos[c(1,2)]; lista$vector
```

```
[1] TRUE TRUE
[1] "3"    "27"   "TRUE" "Hola"
```

Funciones

Una función también es un objeto en R, pero este no sirve para contener información. Al igual que una función matemática, esta tiene unos parámetros (argumentos) a los que se les puede aplicar otras funciones y operaciones aritméticas, entre otros. Se definen por *function* y entre paréntesis se definen los argumentos y entre llaves se define el cuerpo de la función.

```
suma.columna <- function(datos, columna){

    sum(datos[,columna])

}

suma.columna(matriz, 3)
```

```
[1] 24
```

2. Apéndice B: Funcionamiento del ítem

En el Capítulo 2 se han mostrado descripciones matemáticas sobre la interacción persona-ítem, cosa que conlleva a tener una forma poco intuitiva de entender las características de un ítem.

En esta sección se proporcionan otras formas estadísticas de describir el funcionamiento de los ítems basadas en los modelos compensatorios de la MIRT, porque tienen representaciones gráficas menos complejas que los parcialmente compensatorios.

Dificultad y discriminación del ítem

En la TRI, la discriminación del ítem está directamente relacionada con el parámetro a y equivale a la pendiente de la CCI y, más exactamente, la pendiente equivale a

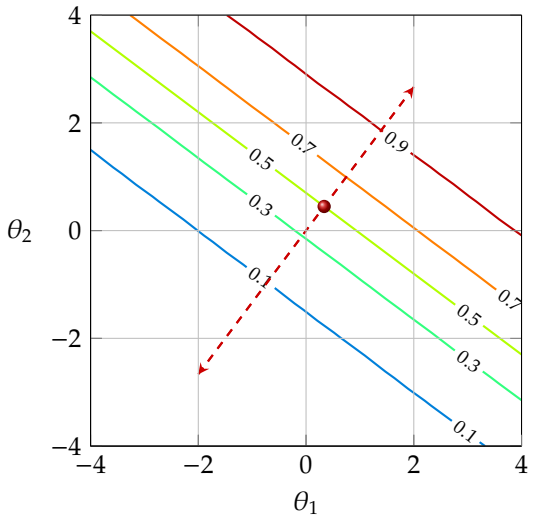
$$\frac{1}{4}a_i(1-c_i) \tag{1}$$

Dicho de otro modo, la pendiente equivale a qué rapidez aumenta la probabilidad de acierto si aumenta el nivel de rasgo. Esta velocidad se puede observar en la Figura 2: cuánto más próximas están las líneas más discriminación tiene el ítem y, por tanto, más cambia la probabilidad de acierto si se cambia el valor de θ_1 o θ_2.

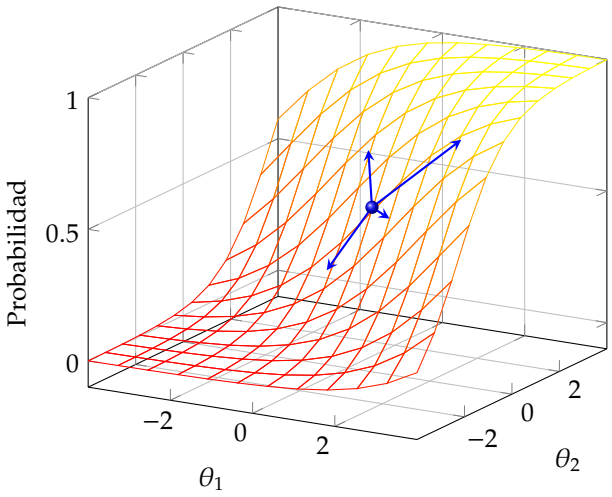
En la SCI no solo se define la pendiente por a, sino que también se debe evaluar la dirección en la que se mide. Si des de cualquier punto de la SCI se quiere ascender o descender lo más rápido posible por ella, solo hay una dirección que permita tal cosa; esta dirección es la que define la recta perpendicular a todas las líneas de probabilidad que se ven en la siguiente figura.

Figura 2

Recta de máxima pendiente



(a) *Nota*. Se puede apreciar que la recta roja es perpendicular a las líneas de probabilidad, además, se puede obtener el ángulo que tiene respecto a θ_1 y θ_2 y, en este caso, equivalen a 53.13º y 36.87º.



(b) *Nota*. El gráfico muestra diferentes direcciones en las que se podría evaluar la pendiente. Si se tuviese que legar caminando des del centro hasta la parte más elevada o llana de la CCI, solo habría una dirección que lo permitiría y esta es la de máxima pendiente.

La discriminación en la MIRT se llama MDISC y equivale a

$$MDISC_i = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2} \tag{2}$$

Aunque no tenga una representación gráfica clara por sí sola, si se utiliza la ecuación 1.8 y se substituye a_i por MDISC se obtiene la velocidad exacta a la que aumenta la probabilidad de acierto cada vez que se avanza una unidad por la dirección de máxima pendiente, como se ve en la Figura 2.9. Por otro lado, los valores de MDISC no pueden ser negativos y cuanto más grande es su valor, más discriminatorio es el ítem.

Por lo que respecta a la dificultad, en la TRI esta equivale al valor de θ donde se encuentra el punto de inflexión – como se aprecia en la Figura 2.1 – que a su vez es el punto que define una probabilidad de acierto del 50 %. En la MIRT ese parámetro de dificultad se llama MDIFF y puede tener valores negativos, que indican ítems más difíciles, y valores positivos, que indican una mayor facilidad del ítem.

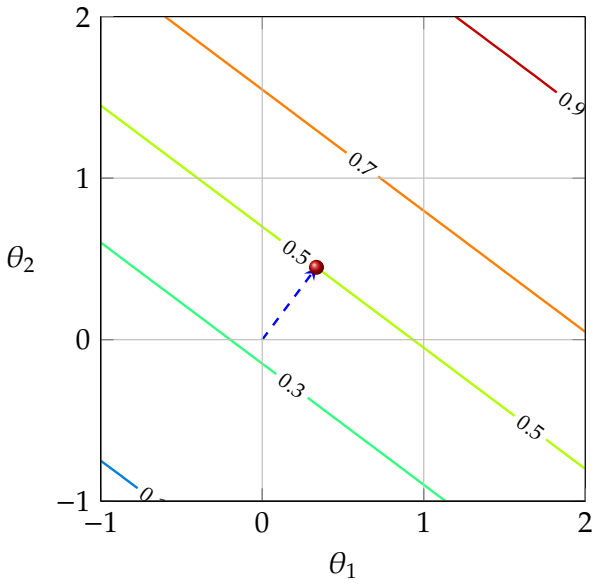
Tomando como referencia la Figura 8, MDIFF equivale a la distancia entre el origen [0 0] y la esfera que interseca la recta de máxima pendiente y la probabilidad del 50 %. Esta distancia equivale a

$$MDIFF_i = \frac{-d_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2}} \tag{3}$$

La siguiente figura muestra una representación gráfica de MDIFF.

Figura 3

MDIFF



Nota. El valor de MDIFF de un ítem con $a1 = .75$, $a2 = 1$ y $d = -.7$ es 0.56 y equivale a la longitud de la recta azul.

Información del ítem

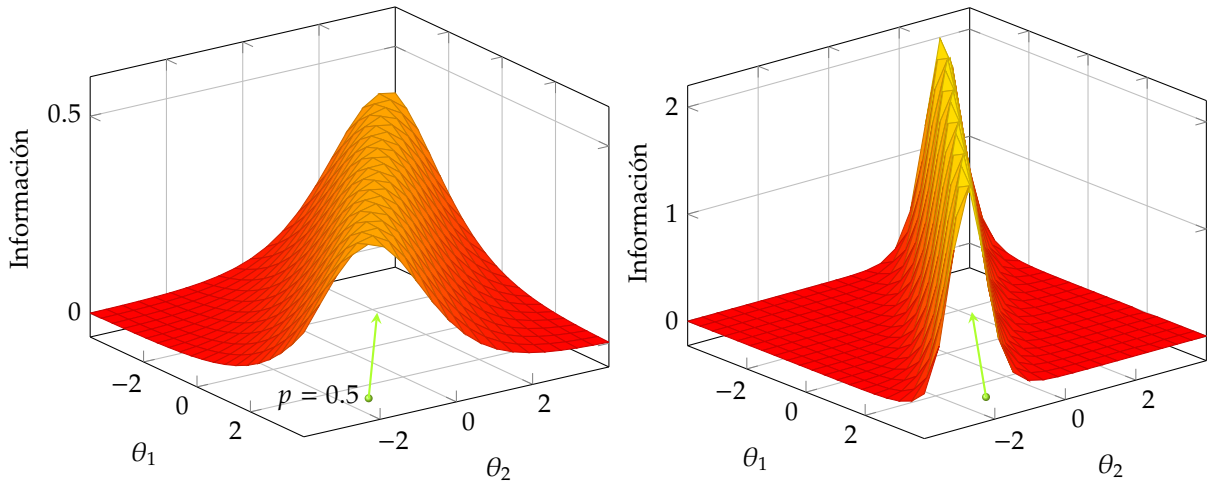
La información de un ítem, que se usa tanto en la TRI como en la MIRT, es un indicador estadístico que informa de la calidad de cualquier estimación del nivel de habilidad de una persona. Aunque se hayan hecho varias formulas para definirla (Reckase, 2009), es más fácil entenderla como la derivada de la SCI o de la CCI.

Por ejemplo, la superficie de información de la Figura 8 se muestra a continuación y, visualmente, equivale a plegar la SCI sobre si misma de forma que quede una superficie simétrica.

Esta superficie puede ser más pronunciada dependiendo de la dirección en la que se evalúe la información, pero para saber la información exacta de un ítem en la MIRT, se tendría que evaluar en todas las direcciones.

Figura 4

Información del ítem



(a) *Nota*. La sección más elevada de la superficie de información tiene la misma dirección que las líneas de contorno de la Figura 8, además, se puede observar como los valores de θ de los que se tiene más información son aquellos que tienen una probabilidad de acierto del 50 % (flecha amarilla).

(b) *Nota*. El gráfico muestra la superficie de información para un ítem con $a_1 = 2.25$, $a_2 = 3$ y $d = -.7$. Se puede observar como la información aumenta para aquellas combinaciones de θ_1 y θ_2 cercanas a una probabilidad de acierto del 50 % al igual que en la Figura 2.8, pero la superficie ahora es más estrecha.

Además, la discriminación y la información están estrechamente relacionadas: la SCI es más pronunciada cuanto más lo es la superficie de información y viceversa. Esto conlleva que más discriminación reduzca el número de los valores de θ más informativo, ya que la amplitud de la superficie es menor, como se observa en la Figura 2.10.

3. Apéndice C: Optimización

En este apartado se propone un ejemplo práctico basado en estimar el nivel de habilidad de una persona a través de máxima verosimilitud (MLE). De esta forma se quiere ilustrar el concepto de optimización matemática, basado en elegir el mejor conjunto de elementos que de respuesta a un tipo de problema matemático, y así para extrapolar cómo la función *mirt* llega a una solución. Este procedimiento se explicará ilustrando cómo se obtiene el nivel de habilidad de una persona.

MLE se definiría como:

> El criterio por máxima verosimilitud se basa en estimar aquellos valores de θ que resultan más probables según una distribución de probabilidad, a través de maximizar su función de verosimilitud.

El proceso consta de dos aspectos principales: una función, cuyos parámetros son desconocidos y se quieren obtener aproximándolos a una solución aceptable, y una función objetivo que mide cómo de verosímiles son los resultados que se van obteniendo durante el proceso de optimización, hasta llegar a una solución aceptable.

Estimación de habilidad

Este tipo de cálculos se hacen una vez la persona evaluada contesta a una serie de ítems, por lo tanto, se obtendría un vector de unos (correcto) y ceros (incorrecto).

La probabilidad de acertar un ítem es un evento discreto, es decir, se puede responder correcta o incorrectamente, por lo tanto, la distribución de probabilidad que se ajusta mejor al vector de respuestas de una persona evaluada es la distribución de Bernoulli.

Bernuolli

La distribución de Bernuolli se define por

$$f(x) = p^x(1-p)^{n-x}$$

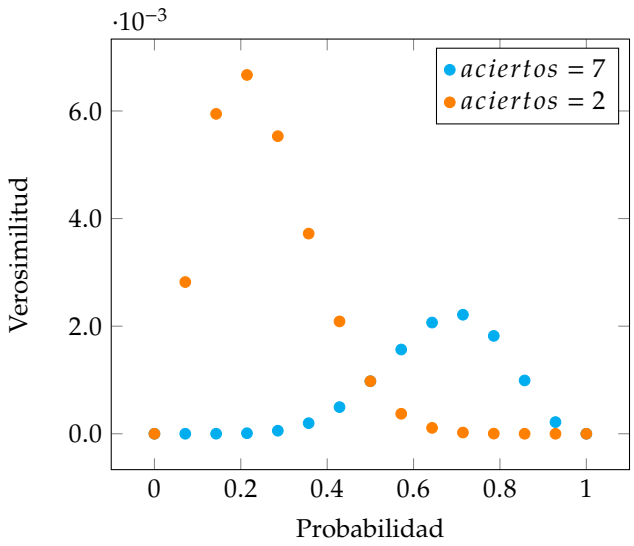
donde

- p es la probabilidad de un acierto.
- n es el número total de intentos.
- x es el número total de aciertos.

Si una persona contestase correctamente 7 preguntas ($x = 7$) de 10 ($n = 10$) muestra una probabilidad del 70 % ($p = 0.7$) de acertar un ítem, pero, se puede saber cómo de segura es esa probabilidad. Si se ponen a prueba diferentes probabilidades manteniendo fijo el número de aciertos se observa la siguiente distribución de probabilidad:

Figura 5

Distribución de Bernuolli



Nota. El gráfico muestra la verosimilitud para diferentes probabilidades. No es necesario establecer una distribución de probabilidad sobre lo que sería una simple media aritmética, pero como se ve más adelante, es importante entender el comportamiento de esta función.

Si se tuviesen el siguiente vector de respuestas para los siguientes ítems:

Tabla 3

Ítems de muestra

	Parámetros		Respuestas
a_i	b_i	d_i	
0.8	0.5	-0.6	1
0.2	1.1	-1.2	0
1	0.2	-2	0

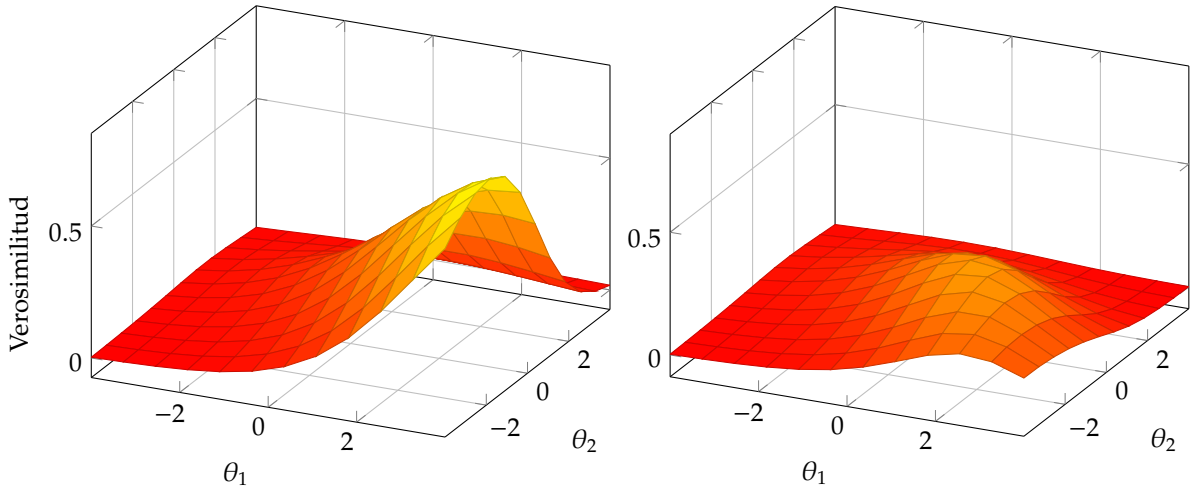
Bernuolli se vería como la siguiente ecuación si se substituyese p por la ecuación de la superficie característica del ítem (SCI) en la ecuación 2.5.

$$\left(\frac{e^{0.8\theta_1+0.5\theta_2-0.6}}{1+e^{0.8\theta_1+0.5\theta_2-0.6}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{0.2\theta_1+1.1\theta_2-1.2}}{1+e^{0.2\theta_1+1.1\theta_2-1.2}}\right)\right)\left(1-\left(\frac{e^{1\theta_1+.2\theta_2-2}}{1+e^{1\theta_1+.2\theta_2-2}}\right)\right)$$

En este punto si se substituye θ_1 y θ_2 por varios valores entre -4 y 4, obtendríamos una superficie (gradiente) que determina cómo de probable es observar θ_1 y θ_2, y así obtener el nivel de habilidad de una persona.

Figura 6

Máxima verosimilitud



(a) *Nota*. Aquí se muestra la superficie para los dos primeros ítems. Se observa como no hay un valor máximo claro, ya que se necesitarían más valores de θ para determinarlo. En este punto, la función tiende a infinito para cada nivel de θ.

(b) *Nota*. Aquí se observa un máximo alrededor de θ_1 = 1.6 y θ_2 = -.8. Además el valor en el eje de ordenadas es más bajo y esto se ocurre porque se van multiplicando más probabilidades a medida que se contestan más ítems.

El estimador de máxima verosimilitud puede dar como válido un valor de θ imposible o no finito para combinaciones de ítems muy diferentes y pocas respuestas o respuestas improbables. Esto suele ser síntoma de un banco de ítems mal calibrados o poco sensible a determinados niveles de rasgo, ya que en condiciones normales este estimador da buenos resultados; su precisión aumenta a medida que se administran más ítems. Cabe destacar, que el proceso de optimización de la función *mirt* o de cualquier otro no buscará un máximo (o un mínimo) probando todos los valores de θ posibles, ya que sería, en algunos casos, imposible a nivel computacional. Para ello se utilizan algoritmos como el de Newton-Raphson, que se aproximan a una solución, minimizando los costes computacionales.

4. Apéndice D: Seleccionar el próximo ítem del banco de ítems

Maximizar la información en la dirección de menor información

Este método propone que, a medida que se va estimando el nivel de habilidad, se trie el siguiente ítem que aporta más información en la dirección de menor información que tienen los ítems ya respondidos.

Como se ha visto en el Apéndice B la cantidad de información de un ítem, o varios, depende de la dirección que se elija des de cualquier combinación de θ. Si un ítem no discrimina en una dimensión, es decir, tiene un a_i igual a 0, no será útil para medir la habilidad en esa dimensión.

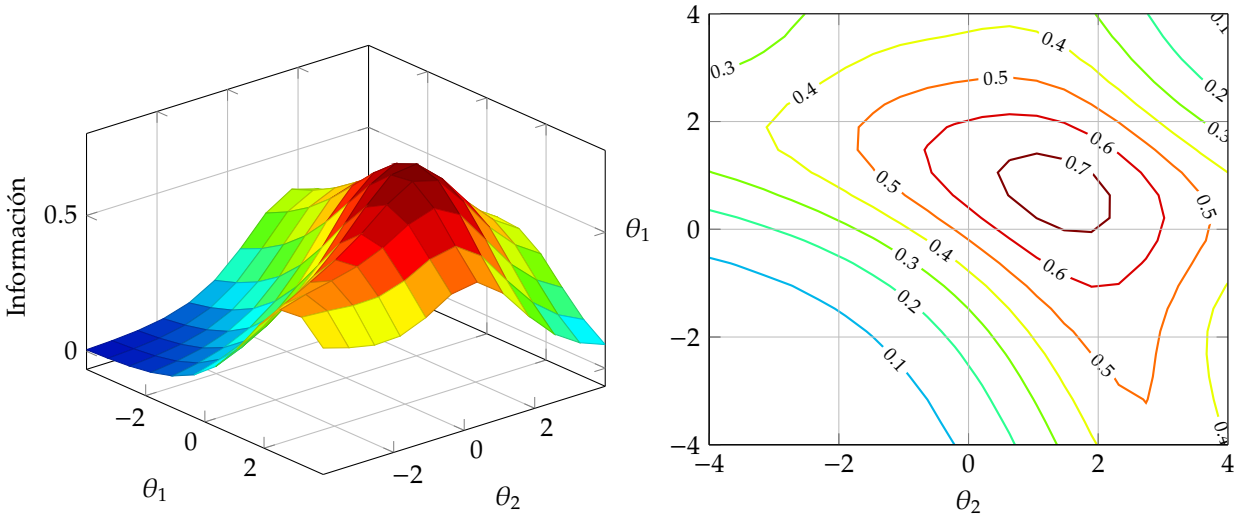
El proceso es relativamente sencillo y consta de los siguientes pasos:

1. Obtener la superficie de información para los ítems administrados.
2. Evaluar en qué dirección se tiene menos información.
3. Obtener la superficie de cada ítem, no administrado, para la dirección obtenida en el paso anterior.
4. Seleccionar el ítem con más información en el paso anterior.

Por ejemplo, si se hubiesen administrado los ítems de la Tabla 3 se tendría la siguiente superficie de información:

Figura 7

Información de ítems administrados



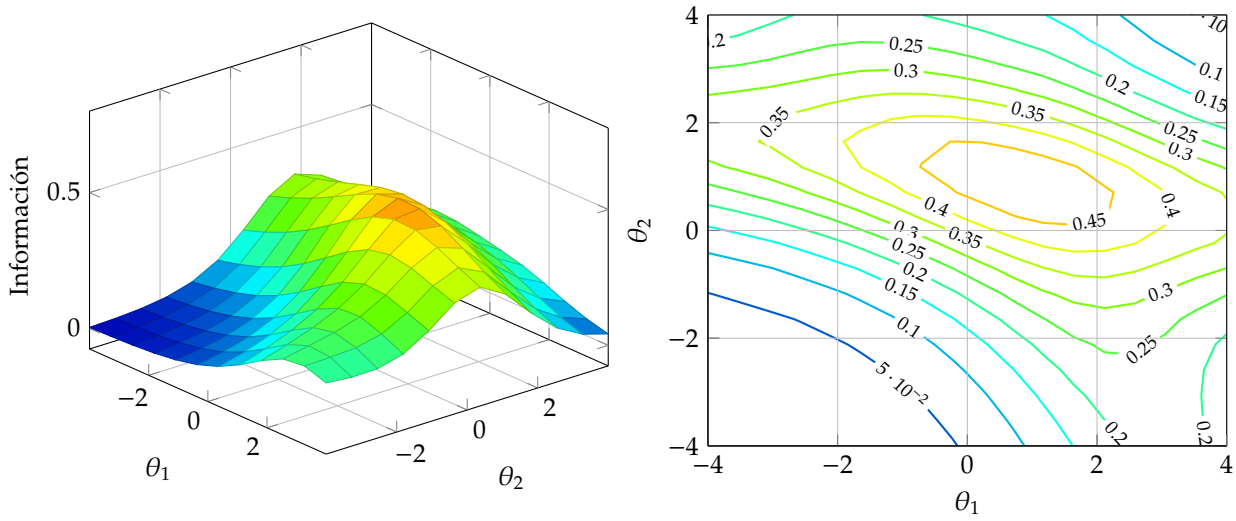
(a) *Nota*. La información de los ítems se ha obtenido teniendo en cuenta la dirección de máxima información para cada uno, es decir, esta es la máxima información que presentan los tres ítems.

(b) *Nota*. Los valores de θ con más información son aproximádamente $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 1.5$. Además, los valores de θ negativos son los que necesitan más información, es decir, se necesita administrar ítems sensibles a niveles de θ bajos para tener más precisión sobre estos valores.

En el paso 2, se suma la información de cada ítem con la misma dirección para cada uno. Aunque teóricamente se deban evaluar todas las direcciones posibles, en la práctica, aquellas que estén muy próximas no darán resultados muy diferentes. Por lo tanto, si se evalúan ángulos de 0 a 90 grados, divididos cada 10 grados, la dirección de menor información es de 70º para θ_1 y 30º para θ_2, como se muestra en la Figura 8. En el paso 3 esta dirección se evalúa para cada ítem que no se haya administrado y se selecciona el más informativo en el paso 4.

Figura 8

Información de ítems en dirección de menor información



Nota. Los gráficos muestran como la información global se reduce drásticamente en comparación a la Figura 4.

5. Apéndice E: Código

```
####### VALORES EN BLANCO #######

## PATRONES

patrones(DatosIniciales)

## INFLUX OUTFLUX

plotflux(DatosIniciales)

#######  IMPUTAR DATOS, AMELIA  #######

df <- amelia(DatosIniciales, noms = 1:20, m = 1)$imputations$imp1

####### OBTENCIÓN DE PARÁMETROS #######

n_items <- ncol(df)

mirtCluster(parallel::detectCores()-1)

# MODELOs EXPLORATORIO

mirt.exp.3F <- mirt(df[,1:10], 10, itemtype = '2PL', method = 'MHRM')
```

```
mirt.exp.3F

mirt.exp.2F <- mirt(df, 20, itemtype = '2PL', method = 'MHRM')

mirt.exp.2F

# MODELOs CONFIRMATORIO


modelo.TwoTier.3F <- mirt.model('
                                F1 = 1-20
                                F2 = 1-20
                                F3 = 1-20
                                COV = F1*F2*F3
                                ')

mirt.TwoTier.3F <- bfactor(df,
                           c(rep(1:4, each = 5)),
                           modelo.TwoTier.3F,
                           itemtype='2PL')

mirt.bifactor.4F <- bfactor(df,
                            c(rep(1:4, each = 5)),
                            itemtype='2PL')

mirtCluster(remove = TRUE)

####### BONDAD DE AJUSTE #######

# ANOVA

anova.exp.1 <- anova(mirt.exp.2F, mirt.exp.3F)

anova.exp.1

anova.conf.1 <- anova(mirt.bifactor.4F, mirt.TwoTier.3F)

anova.conf.1

# itemfit

itemfit.mirt.exp.3F <- itemfit(mirt.exp.3F, QMC = T)

itemfit.mirt.exp.3F[which(itemfit.mirt.exp.3F$p.S_X2 < 0.05),]

itemfit.mirt.exp.3F

# M2

M2.mirt.exp.3F <- M2(mirt.exp.3F, QMC = T)

M2.mirt.exp.3F

# residuals

residuals.mirt.exp.3F <- residuals(mirt.exp.3F, df.p = T, QMC = T)

cbind(which(residuals.mirt.exp.3F$df.p < 0.05, arr.ind = T),
```

```
      p = residuals.mirt.exp.3F$LD[which(residuals.mirt.exp.3F$df.p < 0.05)])

# clusters

parametros.mirt.exp.3F <- CoefToDataframe(modelo = mirt.exp.3F, n_items = n_items)

coordenadas.mirt.exp.3F <- polar_coords(parametros.mirt.exp.3F[,1:3],
                                        parametros.mirt.exp.3F$d)

Ward.mirt.exp.3F <- ward_mat(coordenadas.mirt.exp.3F[c('ang1', 'ang2', 'ang3')])

clusters.mirt.exp.3F <-  hclust(as.dist(Ward.mirt.exp.3F), method = 'ward.D2')

plot(clusters.mirt.exp.3F)

rect.hclust(clusters.mirt.exp.3F, k = 3, border = 1:3)

####### TAI #######

# Aquí se proporciona el ejemplo del Capítulo 4

# Definir df

enunciados <- sprintf('Enunciado.%d', seq_len(n_items))

opciones <- matrix(c('Verdadero', 'Falso'), nrow = n_items, ncol = 2, byrow = T)

respuestas <- sample(c('Verdadero','Falso'), n_items, replace = T)

tipo <- c('radio')

df <- data.frame(Questions = enunciados,
                 Option = opciones,
                 Answer = respuestas,
                 Type = tipo,
                 stringsAsFactors = F)

# Definir preCAT

preTAI <- list(max_items = 5,
               criteria = 'Drule',
               method = 'ML')

# Definir design

contenido <-  rep(c('ComprensiónLectora', 'ComprensiónOral',
                    'Ortografía', 'Cohesión'), each = 5)

contenido_prop <- c(ComprensiónLectora = 0.25,
                    ComprensiónOral = 0.25,
                    Ortografía = 0.30,
                    Cohesión = 0.20)

diseño <- list(min_SEM = 0.2,
               max_items = 15,
               content = contenido,
               content_prop = contenido_prop,
               max_time = 3600,
```

```
               exposure = 0.80)

# Definir ShinyGUI

GUI <- list(title = 'TAI: Ejemplo 1',
            authors = 'Carlos Pérez',
            instructions = c('Para contestar a un ítem se debe seleccionar siempre una de las dos
    opciones,
                             no se permiten respuestas en blanco y finalizará en una hora.', '
    Siguiente ítem'))

# Crear un modelo mirtCAT a partir de uno mirt explopratorio

mirtCAT.exp.3F <- generate.mirt_object(parametros.mirt.exp.3F, itemtype = '2PL')

# Definir mirtCAT

TAI <- mirtCAT(df = df, mirtCAT.exp.3F, method = 'ML', criteria = 'Drule',
               preCAT = preTAI, design = diseño, shinyGUI = GUI)

# Visualizar y obtener el nivel de habilidad

summary(TAI)

plot(TAI)
```

6. Apéndice F: Funciones

patrones

```
patrones <- function(data){
matrixplot(
  (matrix(colMeans(is.na(data))*1.8,
          nrow(data), ncol(data),
          byrow = T) + ifelse(is.na(data), NA, 0)),
  cex.lab = 1.5,
  cex.axis=1.5,
  ylab = 'Respondientes',
  xlab = 'Items'
  )
}
```

plotflux

```
plotflux <- function(data) {
  pat <- md.pairs(data)
  outflux <- rowSums(pat$rm) / (rowSums(pat$rm + pat$mm))
  influx <- rowSums(pat$mr) / (rowSums(pat$mr + pat$rr))
  datframe <- data.frame(influx = influx, outflux = outflux, items = colnames(data),
                  Imputable = colMeans(data, na.rm = T) %in% 0:1)
    ggplot(datframe,aes(influx, outflux, label = items, col = Imputable)) +
    geom_segment(aes(x = 0, y = 1, xend = 1, yend = 0))+
    coord_cartesian(xlim = c(0:1),
                    ylim = c(0:1)) +
    theme_minimal()+
      geom_point() +
      scale_color_manual(values = c('black','red'))+
```

```
    geom_text_repel(
      max.overlaps = ncol(data),
      data = subset(datframe, influx < .5 & outflux < .5 | Imputable),
      segment.linetype = 3.5,
      family = 'mono',
      fontface = 'bold',
      size = 6) +
      theme(legend.position = 'none',
            axis.text=element_text(size=12),
            axis.title=element_text(size=14,face="bold"))
}
```

polar_coords

MDIFF

```
MDIFF <- function(a, d){
  -d / sqrt(sum(a^2))
}
```

MDISC

```
MDISC <- function(a){
  sqrt(sum(a^2))
}
```

interseccion2d

```
interseccion2d <- function(a1, a2, d){
  a <-  list(c(a1, a2))
  angulo <- acos(a1/sqrt(a1^2 + a2^2))
  x0 <- cos(angulo) * mapply(MDIFF, a, d)
  y0 <- sin(angulo) * mapply(MDIFF, a, d)
  return(c(x0, y0, angulo / pi*180))
}
```

polar_coords

```
polar_coords <- function(a, d){
  MMDD <- sapply(1:nrow(a), function(x){
    c(MDIFF(a[x,],d[x]), MDISC(a[x,]))
  })
  if (ncol(a) == 2){
    coords <- mapply(intrsccion2d, a[,1],a[,2], d)
    x1 <- MMDD[2,] * .25 * cos(coords[3,] * pi / 180) + coords[1,]
    y1 <- MMDD[2,] * .25 * sin(coords[3,] * pi / 180) + coords[2,]
    data.frame(a, d, MDIFF = MMDD[1,], MDISC = MMDD[2,], ang1 = coords[3,],
               ang2 = 90 - coords[3,], x0 = coords[1,], y0 = coords[2,], x1, y1)
  } else {
    angulos <- t(apply(a, 1, function(x){
      sapply(1:ncol(a), function(y) {
        acos(x[y]/sqrt(sum(x^2))) / pi*180
      })
    })
    )
    colnames(angulos) <- sprintf("ang%d", 1:ncol(angulos))
    data.frame(a, d, MDIFF = MMDD[1,], MDISC = MMDD[2,], angulos)
  }
```

```
}
```

CoefToDataframe

```
CoefToDataframe <- function(n_items, modelo, rotate = 'none'){
  parametros.lst <- coef(modelo, rotate = rotate)
  parametros.df <- rbind(parametros.lst[[1]])
  for(i in 2:n_items){
    parametros.df <- rbind(parametros.df, parametros.lst[[i]])
  }
  as.data.frame(parametros.df)
}
```

ward_mat

```
ward_mat <- function(df){
  angulo_vectores <- function(angulo1, angulo2) {
    coord1 <- cos(angulo1 * pi / 180)
    coord2 <- cos(angulo2 * pi / 180)
    acos(sum(coord1 * coord2) / (sqrt(sum(coord1^2)) * sqrt(sum(coord2^2)))) * 180 / pi
  }
  angulos <- df[complete.cases(df),]
  mat <- sapply(1:nrow(angulos), function(x){
    sapply(1:nrow(angulos), function(y){
      angulo_vectores(angulos[x,],angulos[y,])
    })
  })
  mat[is.na(mat)] <- 0
  return(mat)
}
```