

- 10分 1. 给定自然数集 N 的子集: $A = \{1, 2, 7, 8\}$, $B = \{i | i^2 < 50\}$, $C = \{i | i \text{ 可以被 } 3 \text{ 整除且 } 0 \leq i \leq 30\}$, $D = \{i | i = 2^k \text{ 且 } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 6\}$ 。写出下列集合所包含的所有元素:
- (1) $A \cup (B \cap (C \cap D))$; (2) $A \cap (B \cap (C \cup D))$;
(3) $B - (A \cup C)$; (4) $(\bar{A} \cup B) \cup D$ 。
- 15分 2. 用谓词逻辑演算的方法证明 $A - (A - B) = A \cap B$ 。
- 15分 3. 用集合恒等式的方法证明 $A \cup B = A \cup (B - A)$ 。
- 15分 4. 设 $A = \{a, b\}$, 写出集合 $\mathcal{P}(A) \times A$ 的所有元素。
- 15分 5. 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是 X 上的二元关系, $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
- (1) 画出 R 的关系图。
(2) 写出 R 的关系矩阵。
(3) 说明 R 是否是自反、反自反、对称、传递的。
- 15分 6. 若集合 A 上的二元关系 R 和 S 具有对称性, 证明 $R \circ S$ 对称当且仅当 $R \circ S = S \circ R$ 。
- 15分 7. 设 R_1 是 A 上的等价关系, R_2 是 B 上的等价关系, $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 。关系 R 满足: $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle \in R_1 \text{ 且 } \langle y_1, y_2 \rangle \in R_2$, 证明 R 是 $A \times B$ 上的等价关系。

 WPS PDF编辑试用

1. 由题意得 $A=\{1, 2, 7, 8\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$, $D=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, 所以

$$(1) A \cup (B \cap (C \cap D)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(2) A \cap (B \cap (C \cup D)) = \{1, 2\}$$

$$(3) B - (A \cup C) = \{4, 5\}$$

$$(4) (\bar{A} \cup B) \cup D = N$$

错答案 2. 因为

$$x \in (A \cup B) - C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - C) \vee x \in (B - C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - C) \cup (B - C)$$

所以, $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ 。

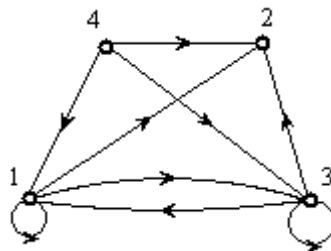
第2题答案 3. $A - (A - B) = A \cap \overline{A - B} = A \cap \overline{A \cap \bar{B}} = A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B$ 。

4. $P(A) \times A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \times \{a, b\} = \{\langle \emptyset, a \rangle, \langle \emptyset, b \rangle, \langle \{a\}, a \rangle, \langle \{a\}, b \rangle, \langle \{b\}, a \rangle, \langle \{b\}, b \rangle, \langle \{a, b\}, a \rangle, \langle \{a, b\}, b \rangle\}$ 。

5. (1) R 的关系图如图所示:

(2) R 的关系矩阵为:

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- (3) 对于 R 的关系矩阵, 由于对角线上不全为 1, R 不是自反的; 由于对角线上存在非 0 元, R 不是反自反的; 由于矩阵不对称, R 不是对称的;

经过计算可得

$$M(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(R), \text{ 所以 } R \text{ 是传递的。}$$

6. 若 $R \circ S$ 对称, 则 $R \circ S = (R \circ S)^c = S^c \circ R^c = S \circ R$ 。

反之, 若 $R \circ S = S \circ R$, 则 $(R \circ S)^c = (S \circ R)^c = R^c \circ S^c = R \circ S$, 从而 $R \circ S$ 对称。

7. 对任意的 $\langle x, y \rangle \in A \times B$, 由 R_1 是 A 上的等价关系可得 $\langle x, x \rangle \in R_1$, 由 R_2 是 B 上的等价关系可得 $\langle y, y \rangle \in R_2$ 。再由 R 的定义, 有 $\langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$, 所以 **R 是自反的**。

对任意的 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in A \times B$, 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, 则 $\langle x, u \rangle \in R_1$ 且 $\langle y, v \rangle \in R_2$ 。由 R_1 对称得 $\langle u, x \rangle \in R_1$, 由 R_2 对称得 $\langle v, y \rangle \in R_2$ 。再由 R 的定义, 有 $\langle \langle u, v \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$, 即 $\langle u, v \rangle R \langle x, y \rangle$, 所以 **R 是对称的**。

对任意的 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle, \langle s, t \rangle \in A \times B$, 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$ 且 $\langle u, v \rangle R \langle s, t \rangle$, 则 $\langle x, u \rangle \in R_1$ 且 $\langle y, v \rangle \in R_2$, $\langle u, s \rangle \in R_1$ 且 $\langle v, t \rangle \in R_2$ 。由 $\langle x, u \rangle \in R_1$ 、 $\langle u, s \rangle \in R_1$ 及 R_1 的传递性得 $\langle x, s \rangle \in R_1$, 由 $\langle y, v \rangle \in R_2$ 、 $\langle v, t \rangle \in R_2$ 及 R_2 的传递性得 $\langle y, t \rangle \in R_1$ 。再由 R 的定义, 有 $\langle \langle x, y \rangle, \langle s, t \rangle \rangle \in R$, 即 $\langle x, y \rangle R \langle s, t \rangle$, 所以 **R 是传递的**。

综上可得, R 是 $A \times B$ 上的等价关系。

