1. 设 $\mathbf{Z}^+=\{x|x\in\mathbf{Z}\wedge x>0\}$，*表示求最小公倍数，则*在 $\mathbf{Z}^+$中 【 】

A．只满足交换律　　B．只满足结合律

C．满足交换律、幂等律和结合律　　D．前述性质均不满足

2. 设集合 $S=\{x|x=2^n，n\in\mathbf{Z}^+\}$，则集合 S 是的普通加法和普通乘法分别是： 【 】

A．不封闭，封闭　　B．封闭，封闭

C．封闭，不封闭　　D．不封闭，不封闭

3. 设 S= {0，1，2，3}，≤是小于等于关系，则<S，≤> 【 】

A．不构成代数系统　　B．是半群，不是独异点

C．是独异点，不是群　　D．是群

4. 下列代数系统中，构成群的系统是 【 】

A．<Z+,+>　　B．<N,×>

C．<R, +>　　D．<R，×>

5. 设 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，$+_4$为模 4 加法，则系统$<A, +_4>$中 2 的逆元是 【 】

A．0　　B．1

C．2　　D．3

6. 在实数集 R 上定义二元运算*为：a*b＝a＋b＋ab，试判断下列论断是否正确？为什么？

(1) <R，*>是一个代数系统。

(2) <R，*>是一个半群。

(3) <R，*>是一个独异点。

7. 设<A，*>是半群，对 A 中任意元 a 和 b，若 a*b＝b*a，则必有 a＝b，证明：

(1) 对 A 中每个元 a，有 a*a＝a。

(2) 对 A 中任意元 a 和 b，有 a*b*a＝a。

(3) 对 A 中任意元 a、b 和 c，有 a*b*c＝a*c。

8. 设 Z 是整数集合，在 Z 上定义二元运算*为：x*y＝x＋y－2，那么 Z 和*是否构成群？为什么？

9. 设<G，*>是群，请证明 x 和 x^{-1}的阶数相同。

10. 设<G，*>是一群，令 $R=\{<a，b>|a、b\in G，存在 g\in G 使 b=g*a*g^{-1}\}$，证明 R 是 G 上的等价关系。

11. 设<G，*>是群，对任一 a∈G，令 H={y|y*a=a*y，y∈G}，试证明<H，*>是<G，*>的子群。

12. 假设$+_6$是模 6 加法，$Z_6=\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$，则$<Z_6, +_6>$是一个群。试写出$<Z_6, +_6>$中所有的生成元和所有的子群，以及 3 阶子群关于[3]的左陪集。

1. C
2. A
3. A
4. C
5. C
6. (1)由 $a*b=a+b+ab\in R$ 知，运算*是封闭的，所以<R，*>是一个代数系统。

   (2)对任意的 a、b、$c\in R$，有

   $(a*b)*c=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+(a+b+ab)c=a+b+c+ab+ac+bc+abc$

   $a*(b*c)=a*(b+c+bc)=a+b+c+bc+a(b+c+bc)=a+b+c+ab+ac+bc+abc$

   所以运算*满足结合率，故<R，*>是一个半群。

   (3)对任意的 $a\in R$，$a*0=a=0*a$，0 是关于运算*的幺元，所以<R，*>是一个独异点。

7. (1)由 $(a*a)*a=a*(a*a)$，所以 $a*a=a$。

   (2)由 $a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*b*(a*a)=(a*b*a)*a$，所以有 $a*b*a=a$。

   (3)由 $(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*(b*c)=a*(b*c)=(a*b)*c=(a*b)*(c*a*c)=(a*b*c)*(a*c)$，所以有 $a*b*c=a*c$。

8. 由 $x*y=x+y-2$ 可知，运算*是封闭的。

   又 $(x*y)*z=(x+y-2)*z=x+y+z-4$，$x*(y*z)=x*(y+z-2)=x+y+z-4$，即有 $(x*y)*z=x*(y*z)$，运算*满足结合率。

   因为 $x*2=x+2-2=x=2*x$，所以 2 是关于运算*的幺元。

   对任意 $x\in Z$，令 $y=4-x$，则 $x*y=x+y-2=2=y*x$，所以 Z 中的每个元素均有逆元。

   综上可知，Z 和*是否构成群。

9. 假设 x 与 x^{-1} 互为逆元。

   若 x=e，则显然 x 与 x^{-1} 都是 1 阶元。

   若 $x\neq e$，令 x 与 x^{-1} 互为逆元，且 x 是 n 阶元，x^{-1} 为 m 阶元，$n\neq m$，即 $x^m=e$，$(x^{-1})^n=e$。

   已知 $x*x^{-1}=e = x^m = x*x^{m-1}$,所以 $x^{-1}=x^{m-1}$，

   同理，$x*x^{-1}=e=(x^{-1})^n=(x^{-1})*(x^{-1})^{n-1}$,所以 $x=(x^{-1})^{n-1}$

   进而 $x*x(^{-1})=(x^{-1})^{n-1}*x^{m-1}$

   $=\underbrace{x^{-1}* x^{-1}*\ldots* x^{-1}}_{n-1个} * \underbrace{x*x*\ldots*x}_{m-1个}$

   因为 $n\neq m$，所以 $x*x^{-1}\neq e$,和 x 与 x^{-1} 互为逆元矛盾，

   所以 n=m,即 x 与 x^{-1} 的阶数相同。

10. 对任意 x∈G，因为 x＝$e*x*e^{-1}$，所以 xRx，故 R 是自反的。

对任意 x、 y∈G，若 xR y，由 R 的定义知，存在 g∈G 使 y＝$g*x*g^{-1}$，x＝$g^{-1}*y*(g^{-1})^{-1}$，因为<G，*>是一群，g∈G，于是 g^{-1}∈G，所以 yRx，故 R 是对称的。

对任意 x、 y、 z∈G，若 xR y 且 yR z，由 R 的定义知，存在 g_1、 g_2∈G 使 $y = g_1*x*g_1^{-1}$，$z = g_2*y*g_2^{-1}$，于是 $z = g_2*y*g_2^{-1} = g_2*(g_1*x*g_1^{-1})*g_2^{-1} = (g_2*g_1)*x*((g_2*g_1)^{-1}$，因为<G，*>是一群，$g_1$、 g_2∈G，于是 g_2*g_1∈G，所以 zRx，故 R 是传递的。

综上可得，R 是 G 上的等价关系。

11. 证明一：

对于任意的 x，y $\in$H，以及任意的 a∈G，

有 $(x*y)*a = x*y*a = x*(y*a) = x*a*y = a*x*y = a*(x*y)$

所以，x*y $\in$H，*关于 H 是封闭的。

因为 $H = \{y \mid y*a = a*y, y \in G\}$，有 $H \subseteq G$。又因为<G,*>是群，所以*在 H 中可满足结合性。

又因为 e*a=a*e，所以 e $\in$H，即存在幺元。

对任意的 x $\in$H，在 G 上有 $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$，所以

$$a*x^{-1} = (x^{-1}*x)*(a*x^{-1}) = x^{-1}*(x*a)*x^{-1} = x^{-1}*a*x*x^{-1} = x^{-1}*a$$

所以，有 $a*x^{-1} = x^{-1}*a$。即 $x^{-1} \in H$。

综上所述，<H,*>是<G,*>的子群

证明二：

令 x, y∈H，即 x*a=a*x， y*a=a*y

由 y*a=a*y, 可对等式两端同时左乘 y^{-1} 和右乘 y^{-1}，得到 $a*y^{-1}=y^{-1}*a$

故 $x*y^{-1}*a=x*a*y^{-1}=a*x*y^{-1}$

即 $x*y^{-1}$∈H，所以,〈H,∗〉是〈G,∗〉的子群。

12. 生成元有：[1], [5]。

子群有：<{[0]}, $+_6$>，<{[0], [3]}, $+_6$>，<{[0], [2], [4]}, $+_6$>和<Z_6, $+_6$>。

3 阶子群是<{[0], [2], [4]}, $+_6$>, 它关于[3]的左陪集是{[1], [3], [5]}。