

# Union Training III - Graph Theory

---

## A. Euler (欧拉路判定)

求一个有向图和无向图是否存在欧拉路

---

没啥好说的，就是几个坑点：

1. 先要判图是否是联通的
2. 无向图存在 0 个或 2 个奇度点有欧拉路
3. 有向图所有点入度和出度相等，  
或者一个点出度比入度大一，一个点入度比出度大一  
然后不能有入出度差大于1的点

就最后的判断特别容易写错 ==

---

## B. -0你电脑炸啦 (暴力枚举)

若干个窗口覆盖一个桌面，窗口可以互相遮挡  
窗口有固定标号，固定大小和固定位置  
给出一个状态，问是否合法

---

奇妙的建图姿势我不会，所以我是暴力做的  
枚举 1 到 9 的全排列，表示窗口的叠放次序  
然后逐个check一下就好了  
时间复杂度  $O(n! * n^2)$

---

## C. 寻找fly真迹（脑洞题）

给定一个只含小写 a、b、c 的字符串  
其中每个字母和字典序相等和相邻的字母相连  
给出连好边的一张图，问是否是一个合法状态

首先 b 和所有字母都连上了边，  
所以图中与所有字母连上边的都是 b，可以先去掉  
然后整张图就变成了两个联通块，一个是 a 的，一个是 b 的  
并且每个联通块都是完全图  
判断一下联通块数目是不是不超过 2，是不是都是完全图就好了

## E. Division（SCC 缩环+最小路径覆盖）

将图分成若干块，满足

1. 相互联通的两个点必须在同一块
2. 同一块中的任意两点，必须能单向可达

原题 HDU - 3861

首先先用 Tarjan 缩点，  
然后同一块的实际上必须在一条单向的路径上  
然后问题就转化为了 dag 上不相交的最小路径覆盖

这个问题可以转化为二分图匹配解决  
建立一个二分图，原图中任意一个点  $u$   
在二分图中都拆成两个点， $X$  部的  $u$  点和  $Y$  部的  $u'$  点  
原图中的任意一条边  $u \rightarrow v$  在二分图中连上  $u \rightarrow v'$   
然后原图的总点数，减去二分图的最大匹配，即为最小路径覆盖

证明如下：

对于二分图  $X$  部的一个点  $u$ ，如果他在  $Y$  部有一个匹配  $v'$   
那么对于原图，则代表了选定这条边  $u \rightarrow v$ ，代表  $u$  点在原图有后继  
而没有匹配的点，即没有后继的点都是某条路径的终点，  
所以原图中的路径数等于  $X$  部中没有匹配的点数

当二分图最大匹配的时候，没有后继的点数最少  
此时就产生了最小路径覆盖

---

## F. meixiuxiu学图论（二分答案 | 最小生成树）

定义一个环的价值为环中最大边的边权  
求图中所有环的最小价值

---

二分的解法：

二分最小的价值，然后在图中跑  
大于mid值的边都割掉不走  
特别无脑，特别暴力  
时间复杂度  $O(n * \log n)$

学长提醒的最小生成树的做法：

利用Kruskal，在加入一条边，发现生成一个环的时候  
这条边的权值就是环中的最大边的权值  
时间复杂度  $O(n * \log n)$

---

## G. 最短路（SPFA+网络流）

求图中从起点到终点互不相交的最短路的个数

---

先跑一遍spfa，转移的时候把最短路记录下来  
然后再建一个图，只连最短路上的边，容量为1  
然后再跑一个网络流，最后统计汇点流量

---

## H. Nightmare2 （二分答案）

给定一张图，一个起点和一个终点，在起点可以带上任意数量的财宝  
但是要通过一些边有财宝数量的限制，走到终点的时间也有限制  
问最多能携带多少财宝

二分能够带的财宝的数量，然后跑spfa  
财宝限制小于当前的二分值的边不走  
最后判断终点所需时间是否小于等于  $k$

## I. 玛雅，好简单（桥）

求图中桥边的数量

Tarjan求桥边，贴板子就好了

## J. An Easy Problem （可重复最小路径覆盖）

求dag上可重复的最小路径覆盖

可重复的最小路径覆盖和不可重复的基本一样  
只要求一个传递闭包，把一个点出发的可达点都连上边  
因为假设覆盖两个点  $u, v$  中途要经过其他点  
求过传递闭包之后，就可以直接用  $u, v$  之间直接相连的边来覆盖  
就转化成了不可重复的最小路径覆盖  
用floyd肯定会T，但是由于dag图的特性，可以使用dfs构图  
构图的时间复杂度  $O(n^2)$

## K. 投票（DFS+逆向建图）

给定有向图，一个点的权值定义为能够到达这个点的点数  
求最大的点权，以及所有点权最大的点

首先先用Tarjan缩环，原图就变成了一个dag  
然后倒着建图，每次从入度为0的点出发dfs  
能走到的点在原图中就是能到达它的点  
时间复杂度  $O(N^2)$