Solutions of Union Training II - Dynamic Programming

A. 雷神之路

题意

$N \le 10^{18}$的路径，0是起点，n是终点，每次只能走1步、2步或者3步

路径上有500个地雷不能通过，求起点到终点的方法数

分析

显然的dp，$f[i] = f[i-1] + f[i-2] + f[i-3]$，由于$n$很大，矩阵快速幂优化下递推

对于地雷，只要分段计算就可以啦，并且在每次之后把矩阵里的$f[i]$置0，代表雷

思考

矩阵快速幂的使用还是要熟练啊

B. Snowdrop修长廊

题意

$N \le 2 \times 10^5$个点，标号为$1 \sim N$，现要修这N个点

每次可以修$[i,\ j]$区间的点，$cost(i,\ j) = W + (x_j - x_i)^2,\ i \le j$

问修完的最小花费

分析

显然的dp，$f[i] = max\{f[j] + cost(j+1,\ i)\},\ j < i$

然后这是个很斜率的式子，然后推一推就可以了

具体咋推可以参考我的博客，也就是这个题的原题，传送门

思考

— — 算的时候，别被思维代入了，不然你发现你算不出样例

仔细看看那个$cost(i,\ j)$是减去x_i而不是x_{i-1}

C. TaoSama与煎饼

题意

$N \le 350$个工作台，煎饼要从1号去N号，每个工作台会给煎饼增加$A_i \le 100$的美味度

现有4种道具，每种有$B_i \le 40$个，分别可以让煎饼移动i距离，$i \in [1,\ 4]$，保证$\sum B_i = N - 1$

问让煎饼到达N能获得最大美味度是多少

分析

一开始想了很多鬼畜的状态，反正都是MLE，因为觉得不能$f[350][40][40][40]$暴力嘛

其实5个滚动一下能过，100个$case$没卡住，但是仔细想想，其实煎饼在哪里是道具相关的

所以$f[40][40][40][40]$就可以辣，然后注意下细节就好啦，越界啥的

思考

dp好难，还是要多想呢

D. 任务

题意

$N \le 2 \times 10^3$个任务，每个任务可以在A或者B上完成，$tA,\ tB \le 3000$

每个任务可以安排在任意一台机器上完成，一台机器只能处理一个任务

任务i可以被处理当前仅当每个任$j < i$已经被完成或者正在进行，并且任务不能被打断

求最早的完成时间

分析

一开始想了$f[time = 2000 * 3000]$的做法，然后发现后效性爆炸，后来又想了很多奇怪的都不行

— — 问了下才知道$f[i][A - B] :=$ 完成前i个任务且第i个任务时A比B多用了多少时间

由于那个$j < i$的都都必须完成，事实上，不管A实际上比B多多少，B总要等到$j < i$的都完成了

换句话说就是，B到可以开始任务的时候A最多比B多一个任务的时间也就是3000

B比A同理，那么这个状态就是科学的

由于$A - B$可以是负数，加个$OFFSET$就好了

让A做，$f[i + 1][a[i] + OFFSET] = max\{f[i][j] + a[i]\},\ j > 0$

让B做，$f[i + 1][j + OFFSET - b[i]] = \{f[i][j] + max(0,\ j - b[i])\},\ j > 0$

$j < 0$同理

思考

这道题好难啊 — —

E. Goozy的积木

题意

$N \leq 50$个积木，每个高度$H_i \leq 5 \times 10^5$，现要搭2个一样高度的塔，求能搭出的最高高度是多少

分析

$f[i][A][B]$显然是不行的，但是仔细想想只有差值才是有效状态

一开始写的$f[i][A - B] :=$ 用前i个积木，A比B高多少，能不能搭成

显然不能钦定A比B高啊，这个题和D题不一样，我们不要区分高低塔

所以转换下状态$f[i][diff] :=$ 用前i个积木，高塔与低塔的差值，能不能搭成

其实差值就是绝对值啦，转移就枚举往高塔上放还是低塔

思考

dp还是不要想当然啊

F. 先锋看烟花

题意

$N \le 1.5 \times 10^5$个房子，$M \le 300$个烟花，每个烟花有(a_i, b_i, t_i)属性，表示(地点，观赏值，施放时间)

主角每单位时间可以跑d距离，每个烟花按照时间升序给出

每个烟花的贡献度为$b_i - |a_i - cur|$，cur为当前位置，求看完烟花的最大贡献度和

分析

dp状态还是比较显然的，$f[i][j] :=$ 看完前i个烟花，当前位置在j的最大贡献度

转移就$f[i][j] = max\{f[i-1][k] + b_i - |a_i - k|\}, \ k \in [j - t \times d, j + t \times d]\}, \ t$为$2$个烟花时间差

对于这个k的转移可以用RMQ每次暴力$O(nlogn)$重建，然后$O(1)$每次转移，总时间复杂度为$O(mnlogn)$

当然这是个很单调队列的式子，维护$2 \times t \times d$大小的窗口就好了

思考

数据结优化dp，关键还是要dp想得快 — —虽然简单我还是想得慢啊。。

G. Simple dp

题意

$N \le 24$个点的数，每个节点如果有子节点，子节点数必然大于等于2，求这样的树是否存在

输入是每个节点代表的子树的节点个数

分析

据说能搜我就搜了一下， — —，叶子向根父亲连边，按照题目要求搜就好了

各种剪枝以及cur优化加上就搜过去了

思考

好像标解是状压dp，——想了下感觉还是好难啊

H. 又见背包

题意

$N \le 100$中数字，每种$M_i \le 10^9$个，问能不能凑出$K \le 10^5$

分析

$f[i][j] :=$ 前i种数字，拼j，能不能拼，按照多重背包转移，复杂度是$O(NMK)$爆炸

仔细想想，存$bool$不值得，$f[i][j] :=$ 还剩下第i种多少个

然后就可以$O(NM)$搞啦，根据第i种硬币用还是不用来转移

思考

当然用单调队列优化多重背包直接搞一波也是可以的，[传送门]

I. Mingo's Game

题意

将$N \le 5 \times 10^5$个关卡划分成$M \le min(50,\ n)$个组，组内关卡连续，$t_i \le 10^5$
定义游戏规则，每次选择第一个未全部完成的组，假设组处于关卡区间$[l,\ r]$
选择到组内第一个未完成的关卡的概率$p_i = \frac{t_i}{\sum_{i=l}^{i} t_i}$
求怎样划分组使得通过所有组的期望打关卡次数最小，求这个次数，误差小于10^{-4}

分析

推2遍了——具体看我博客原题题解吧[传送门]

思考

斜率dp是套路，关键是原始dp写得还是要快啊

L. 来签个到吧

题意

$2 \le N \le 5 \times 10^4$个球，每个球上的数字$X \in [0,\ 10^5]$

定义加球操作 $:=$ 选择任意两个球x和y, 然后看$|x-y|$是否存在，不存在就加入算一次成功操作

接下来对所有的球进行摸球操作 $:=$ 摸一个记下来，然后放回去，直到摸出所有球为止

问执行操作的期望次数是多少

分析

$|x-y|$这种东更相减损的感觉，就是gcd辣，所以总球数$total = \frac{max\{X\}}{gcd\{X\}}$，因为不会增加嘛

当然要记得特判0辣

对于第二种操作，设已经有k个球了，则摸出同样的球的概率是$p = \frac{k}{n}$，不同的是$1-p$

设经过x次摸出一个新球，那么x次摸到一个新球的概率是$p^{x-1}(1-p)$

那么期望次数$E = (1-p)(1 + 2 \times p + 3 \times p^2 + \cdots)$

设$Y = \frac{E}{1-p} = 1 + 2 \times p + 3 \times p^2 + \cdots$

$pY = p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots = Y - (1 + p + p^2 + \cdots)$

移项得$(1-p)Y = 1 + p + p^2 + \cdots = E = \lim_{i=1}^{\infty} \frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} = \frac{n}{n-k}$

所以得到结论： 已有$k \in [0,\ n)$个球的情况下，期望$\frac{n}{n-k}$次多拿一个

思考

据说有不用级数的概率dp推公式的做法，改天要学习一下

级数这个推起来好难，我并不会强行学习了一下。。。