Punto 1

sábado, 5 de marzo de 2022 7:13 p. m.

0.1 Ecuación diferencial no lineal

1. Resolver analíticamente la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q, \ t \in [0, 10] \tag{1}$$

La solución exacta es: $u(t) = e^t$ para $q = 1$ y $u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ para $q < 1$ y $t(1-q)+1 > 0$.

Para $q=1$

$$du/dt = u \Rightarrow du/u = dt$$

$$\Rightarrow \ln(u) = t + c$$

$$u = e^{t+c}$$

Con $u(0)=1$ tenemos $u(0) = e^c = 1 \Rightarrow c = \ln(1) = 0$.

$$\Rightarrow u(t) = e^t.$$

Para $q > 1$

$$\frac{du}{dt} = u^q \Rightarrow \frac{du}{u^q} = dt \qquad \int u^{-q}\,du = \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{u^{-q+1}}{-q+1} = t + c \qquad u^{1-q} = (1-q)(t+c)$$

$$u = (1-q)^{\frac{1}{1-q}} (t+c)^{\frac{1}{1-q}}$$

Como $u(0) = 1 \Rightarrow (1-q)^{\frac{1}{1-q}} (c)^{\frac{1}{1-q}} = 1$

$$(1-q)c = 1 \qquad c = \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow u(t) = (1-q)^{\frac{1}{1-q}} \left(t + \frac{1}{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}} = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$$

Se restringe a $t(1-q)+1 > 0$ para obtener resultado real.

2. Encontrar la solución numéricamente para algunos valores de $q = [0., 0.2, 0.4, 0.7, 0.9, 1.]$.

- $q = 0$ $\quad u(t) = t + 1$
- $q = 0{,}2$ $\quad u(t) = (0.8t + 1)^{5/4}$
- $q = 0{,}4$ $\quad u(t) = (0{,}6\,t + 1)^{10/6}$
- $q = 0{,}7$ $\quad u(t) = (0{,}3\,t + 1)^{10/3}$
- $q = 0{,}9$ $\quad u(t) = (0{,}1\,t + 1)^{10}$
- $q = 1$ $\quad u(t) = e^{t}$