Punto1, 3

lunes, 14 de febrero de 2022 9:02 p. m.

1. A)

1 a) K es una constante de proporcionalidad que relaciona qué tanto se deforma un cierto material con respecto a la fuerza por volumen que se le ejerce.

B). Una fuerza conservativa es tal que

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

camino cerrado.

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{F}}{\partial r_1} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial r_2} = 3k \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - 3k \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = 0$$

La fuerza sí es conservativa.

1. Un cilindro cerrado está separado por un piston móvil sin fricción. La sección (1) de la izquierda contiene un mol de gas ideal monoatómico a 400 K. La sección (2) de la derecha también contiene un mol de gas monoatómico a una temperatura desconocida. El pistón se encuentra en equilibrio cerca del lado derecho a una longitud de 1/3 de la longitud total. Un estudiante de Métodos 2 conecta el lado derecho y el izquierdo con un alambre de cobre de conductividad $k = 389.6$, sección transversal de $A = 0.01\ m^2$ y longitud total de $l = 0.30\ m$, permitiendo el flujo de calor entre ambas secciones.

   a) Encuentre la temperatura de equilibrio de la sección derecha antes de conectar el alambre de cobre $(T_0^2 = 200\ K)$.

Condiciones de equilibrio

1. $P_0^1 = P_0^2$

2. $PV = NRT$

$$T_0^2 = \frac{PV}{NR} = \frac{P_0^2 V_0^2}{N_0^2 R} = \frac{P_0^1 V_0^1}{N_0^1 R}$$

$$P_0^1 = \frac{N_0^1 R T_0^1}{V_0^1} = \frac{3}{2} \frac{N_0^1 R T_0^1}{AL}$$

$$\Rightarrow T_2^0 = \left(\frac{3}{2} \frac{N_0^1 R T_0^1}{AL}\right)\left(\frac{1/3\, AL}{N_0^2 R}\right) = \frac{T_0^1}{2} = \frac{400K}{2} = 200K$$

b) Considerando que no se realiza trabajo y que el proceso es lo suficientemente lento, use la primera ley de la termodinámica y la ley de transferencia de Fourier para encontrar:

$$\begin{aligned} nc_v \frac{dT_1}{dt} &= -\frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \\ nc_v \frac{dT_2}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2), \end{aligned} \tag{6}$$

donde podemos definir $C = \frac{kA}{nc_v l}$ y $c_v = 3/2R$. Dadas estas ecuaciones, las condiciones iniciales de la derivadas están bien definidas.

$$\begin{aligned} \left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} &= -C(T_1^0 - T_2^0) \\ \left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} &= C(T_1^0 - T_2^0) \end{aligned} \tag{7}$$

$W=0 \Rightarrow \Delta U = Q + W = Q \Rightarrow \Delta \frac{du}{dt} = \frac{dQ}{dt}$

Luego, la transferencia de calor de Fourier queda como

$H = \frac{dQ}{dt} = \frac{KA\,[T_1 - T_2]}{L}$ $\quad H = \frac{\Delta du}{dt} = nC_v \frac{dT_1}{dt}$

$$\Rightarrow \quad nC_v \frac{dT_1}{dt} = -\frac{KA[T_1 - T_2]}{L}$$

$$nC_v \frac{dT_2}{dt} = -\frac{KA[T_1 - T_2]}{L}$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} &= -C(T_1^0 + T_2^0) \\ \left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} &= C(T_1^0 + T_2^0) \end{aligned}\right\} \text{Sistema de ecuaciones.}$$

c) Encuentre analíticamente la solución del sistema de ecuaciones.

Del sistema de ecuaciones anterior. tenemos que

$$-\frac{T_1'}{C} = T_1 - T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{T_1'}{C}$$

$$T_1 = T_2 - \frac{T_1'}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2'}{C} = T_1 - T_1 - \frac{T_1'}{C} \Rightarrow T_2' = -T_1'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_2'}{c} = T_1 - T_1 - \dfrac{T_1'}{c} & \Rightarrow T_2' = -T_1' \\ T_1 = T_2 + \dfrac{T_2'}{c} \end{cases}$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_2'}{dt}\frac{1}{c} \Rightarrow T_1' = T_2' + \frac{T_2''}{c}$$

$$\Rightarrow T_1' = -cT_1 + cT_2$$

$$T_2' + \frac{T_2''}{c} = -cT_2 + T_2' + cT_2 = T_2'$$

$$\Rightarrow T_2'' + 2cT_2' = 0$$

La solución viene de la forma

$$T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2ct}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 4c^2 e^{-2ct} - \alpha_2 4c^2 e^{-2ct} = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 + \frac{T_2'}{c} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2ct} - \frac{\alpha_2 2c\, e^{-2ct}}{c}$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2ct} - 2\alpha_2 e^{-2ct}$$

$$= \alpha_1 - \alpha_2 e^{-2ct}$$

y así

$$T_2 = \alpha_1 - \alpha_2 e^{-2ct}$$

$$T_1 = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2ct}$$

Con condiciones iniciales tenemos

$$T_2(t=0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 200K$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 200K - \alpha_2$$

$$T_1(t=0) = \alpha_1 - \alpha_2 = 400K$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - 400K$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 = 600K$$

$$\alpha_1 = 300K, \quad \alpha_2 = 100K.$$