HSEA2021 **Fall 2021**

Homework 3

Instructor: Chao Qian *Name:* 丁云翔, *StudentId:* 191250026

1 Problem 1: 基础概念 (5)

试理解适应层分析（fitness level method）、加性漂移分析（additive drift analysis）、乘性漂移分析（multiplicative drift analysis）三种理论分析工具的核心思想，并简述如何应用这三种分析方法。

答：适应层分析（fitness level method）的核心思想为：将解空间 S 划分为 m+1 个子空间 $S_0, S_i, ..., S_m$，并计算从 S_i 到更高层的 S_j 的概率的上界和下界，由此我们可以根据这些上下界来计算得到整个问题的期望运行时间的上下界。应用时先要按照问题特征对解空间进行划分，然后再根据问题的约束计算概率上下界，由此可以计算出期望运行时间的上下界。

加性漂移分析（additive drift analysis）的核心思想为：设计一个距离函数 $V(x)$ 来度量从状态空间中的一个状态 x 到目标状态空间的距离，然后计算期望单步漂移距离的上下界（与当前状态到目标状态空间的距离无关），由此可以计算出期望运行时间的上下界。应用时先要根据问题特征设计出合适的距离函数，然后再根据问题的约束计算单步距离上下界，由此可以计算出期望运行时间的上下界。

乘性漂移分析（multiplicative drift analysis）的核心思想在加性漂移分析的基础上有所改动：乘性漂移分析中期望单步漂移距离的上下界与当前状态到目标状态空间的距离有关。应用与加性漂移分析相似，除了在单步距离上下界和期望运行时间上下界的计算公式上有不同。

2 Problem 2: 加深理解 (15)

课上已讲述“如何用加性漂移分析推出乘性漂移分析”，请将其证明过程整理完善，并说明乘性和加性漂移分析方法的区别。

答：首先定义距离函数

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } V(x) = 0 \\ 1 + ln(V(x)/V_{min}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

然后计算从某个不属于目标状态空间的状态 ξ_t（即 $V(\xi_t) > 0$ 或 $U(\xi_t) > 0$）的漂移:

如果 ξ_{t+1} 属于目标状态空间，则

$$U(\xi_t) - U(\xi_{t+1}) = 1 + \ln(V(\xi_t)/V_{min}) \geq 1 = \frac{V(\xi_t) - V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$$

如果 ξ_{t+1} 不属于目标状态空间，则

$$U(\xi_t) - U(\xi_{t+1}) = \ln(V(\xi_t)/V(\xi_{t+1}))$$

又有 $1 + x \leq e^x$，可得

$$\frac{u}{w} = 1 + \frac{u-w}{w} \leq e^{\frac{u-w}{w}}$$

$$\ln\frac{u}{w} \leq \frac{u-w}{w}$$
$$\ln\frac{w}{u} \geq \frac{w-u}{w}$$

故有

$$\ln(V(\xi_t)/V(\xi_{t+1}) \geq \frac{V(\xi_t)-V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$$
$$U(\xi_t)-U(\xi_{t+1}) = \ln(V(\xi_t)/V(\xi_{t+1}) \geq \frac{V(\xi_t)-V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$$

综上，无论 ξ_{t+1} 是否属于目标状态空间，都有

$$U(\xi_t)-U(\xi_{t+1}) \geq \frac{V(\xi_t)-V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$$

可继续计算从某个不属于目标状态空间的状态 ξ_t（即 $V(\xi_t)>0$ 或 $U(\xi_t)>0$）的期望漂移:

$$E[U(\xi_t)-U(\xi_{t+1}) \mid \xi_t] \geq \frac{E[V(\xi_t)-V(\xi_{t+1}) \mid \xi_t]}{V(\xi_t)} \geq \delta$$

由加性漂移分析的漂移下界和期望运行时间上界：

$$E[U(\xi_t)-U(\xi_{t+1}) \mid \xi_t] \geq c_l$$
$$\sum_{x\in\chi}\pi_0(x)\frac{U(x)}{c_l}$$

可推出乘性漂移分析的漂移下界和期望运行时间上界：

$$E[V(\xi_t)-V(\xi_{t+1}) \mid \xi_t] \geq \delta V(\xi_t)$$
$$\sum_{x\in\chi}\pi_0(x)\frac{1+ln(V(x)/V_{min})}{\delta}$$

二者的区别在于乘性漂移分析中期望单步漂移距离的上下界与当前状态到目标状态空间的距离有关，而加性漂移分析则无关。

3 Problem 3: 求解 LeadingOnes 问题 (20)

用适应层分析法来分析 (1+1)-EA 找到 LeadingOnes 问题最优解的期望运行时间的上界。

答：首先将解空间 $\{0,1\}^n$ 按从左往右数连续的 1 的个数（一旦遇到 0 就不用考虑右边的 1 了）划分为 n+1 个子空间 $S_0, S_i, ..., S_n$，其中 $S_i = \{x \in \{0,1\}^n \mid f(x)=i\}$，$f(x)$ 即 x 从左往右数连续的 1 的个数（一旦遇到 0 就不用考虑右边的 1 了）。
然后计算从 S_i 到更高层的 S_j 的概率的下界（从左往右数第一个为 0 的位翻转，前 i 个 1 不变）

$$P(\xi_{t+1} \in \cup_{j=i+1}^{m} S_j \mid \xi_t \in S_i) \geq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^i$$

可以得到该问题的期望运行时间上界

$$\sum_{i=0}^{n-1}\pi_0(S_i)\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{v_j} \leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{v_j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} n\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^i} \leq en^2 \in O(n^2)$$

故用适应层分析法来分析 (1+1)-EA 找到 LeadingOnes 问题最优解的期望运行时间的上界为 $O(n^2)$

4 Problem 4: 求解 OneMax 问题 (30)

分别用乘性漂移分析法、加性漂移分析法求解 (1+1)-EA 算法找到 OneMax 问题最优解的期望运行时间的上界。

答：使用乘性漂移分析法，首先设计距离函数 $V(x) = n - O(x)$，其中 $O(x)$ 表示 x 中为 1 的位数。
可以得到期望单步漂移距离的下界（翻转 $n-i$ 个 0 中的一个，其他位不变）

$$E[V(\xi_t) - V(\xi_{t+1}) \mid \xi_t = x] \geq (n-i)\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} = \delta V(x)$$

进而可以得到期望运行时间的上界

$$\sum_{x \in \chi} \pi_0(x) \frac{1 + ln(V(x)/V_{min})}{\delta} = \sum_{x \in \chi} \pi_0(x) \frac{1 + ln(n - O(x))}{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}} \in O(n \log n)$$

故用乘性漂移分析法求解 (1+1)-EA 算法找到 OneMax 问题最优解的期望运行时间的上界为 $O(n \log n)$。
使用加性漂移分析法，首先依然设计距离函数 $V(x) = n - O(x)$，其中 $O(x)$ 表示 x 中为 1 的位数。
可以得到期望单步漂移距离的下界（翻转 $n-i$ 个 0 中的一个，其他位不变）

$$E[V(\xi_t) - V(\xi_{t+1}) \mid \xi_t = x] \geq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} = c_l$$

进而可以得到期望运行时间的上界

$$\sum_{x \in \chi} \pi_0(x) \frac{V(x)}{c_l} \leq \frac{n}{c_l} = en^2 \in O(n^2)$$

故用加性漂移分析法求解 (1+1)-EA 算法找到 OneMax 问题最优解的期望运行时间的上界为 $O(n^2)$。

5 Problem 5: 求解 BinVal 问题 (30)

任选分析工具，求解 (1+1)-EA 算法找到 BinVal 问题最优解的期望运行时间的上界。

答：BinVal 问题等价于使二进制 01 串表示的十进制值最大的问题，而由二进制的性质可得，同等位数的情况下，高位为 1 的数大于所有高位为 0 的数，如 1000 大于最高位为 0 的所有四位二进制数。故和 LeadingOnes 问题一样，从左往右数连续的 1 的个数（一旦遇到 0 就不用考虑右边的 1 了）越多，适应度越高。
故同样使用适应层分析法，将解空间 $\{0,1\}^n$ 按从左往右数连续的 1 的个数（一旦遇到 0 就不用考虑右边的 1 了）划分为 n+1 个子空间 $S_0, S_i, ..., S_n$，其中 $S_i = \{x \in \{0,1\}^n \mid f(x) = i\}$，$f(x)$ 即 x 从左往右数连续的 1 的个数（一旦遇到 0 就不用考虑右边的 1 了）。
然后计算从 S_i 到更高层的 S_j 的概率的下界（从左往右数第一个为 0 的位翻转，前 i 个 1 不变）

$$P(\xi_{t+1} \in \cup_{j=i+1}^{m} S_j \mid \xi_t \in S_i) \geq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^i$$

可以得到该问题的期望运行时间上界

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi_0(S_i) \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{v_j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{v_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^i} \leq en^2 \in O(n^2)$$

故用适应层分析法来分析 (1+1)-EA 算法找到 BinVal 问题最优解的期望运行时间的上界为 $O(n^2)$

6 相关内容

作业相关伪布尔函数问题的定义如下：

定义 1 (LeadingOnes)**.** 一个规模为 n 的 *LeadingOnes* 问题旨在找到一个 n 位的 *01* 串，以最大化

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} s_j, \tag{1}$$

这里 s_j 指 $\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$ 的第 j 位。

定义 2 (OneMax)**.** 一个规模为 n 的 *OneMax* 问题旨在找到一个 n 位的 *01* 串，以最大化

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n} s_i, \tag{2}$$

这里 s_i 指 $\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$ 的第 i 位。

定义 3 (BinVal)**.** 一个规模为 n 的 *BinVal* 问题旨在找到一个 n 位的 *01* 串，以最大化

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} s_i, \tag{3}$$

这里 s_i 指 $\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$ 的第 i 位。

(1+1)-EA 的基本流程如下：

Algorithm 1 (1+1)-EA

Input: 伪布尔函数 $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$
Output: $\{0,1\}^n$ 中的一个解

```
随机均匀地从 {0,1}^n 中选择一个解 s 作为初始解
while 算法终止条件不满足 do
    s' ← 将 s 的每一位独立地以 1/n 的概率翻转
    if f(s') ≥ f(s) then
        s ← s'
    end if
end while
return s
```

7 提交与评分

提交一份 pdf 文档，并发送到liudx@lamda.nju.edu.cn，**12 月 17 日 23:59** 截止。延期提交的折扣为-5/天，即每延迟一天，本次作业得分减 5。请合理分配时间。

- Pdf 文档命名方式：“学号-姓名.pdf”，例如“MG1937000-张三.pdf”；
- 邮件标题命名：“HSEA 第三次作业-学号-姓名”，例如“HSEA 第三次作业-MG1937000-张三”。

注意，pdf 可以用 latex/word/markdown 等方式生成，但是不要用手写证明的照片。

作业的评分主要参考以下几点：

1. 结论的紧致性。
2. 证明过程的完整性以及正确性。例如在使用分析工具时是否充分考虑了工具的条件，公式推导是否完整、以及是否有错误。
3. 文档的细节。例如是否出现符号错误，文档格式是否混乱。

若发现作业出现雷同的情况，会根据相关规定给予惩罚，详情请参考课程主页中“学术诚信”的相关内容。请同学们务必独立完成作业！