



多传感器融合定位

第3章 惯性导航基础

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者





目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件内参标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件内参标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



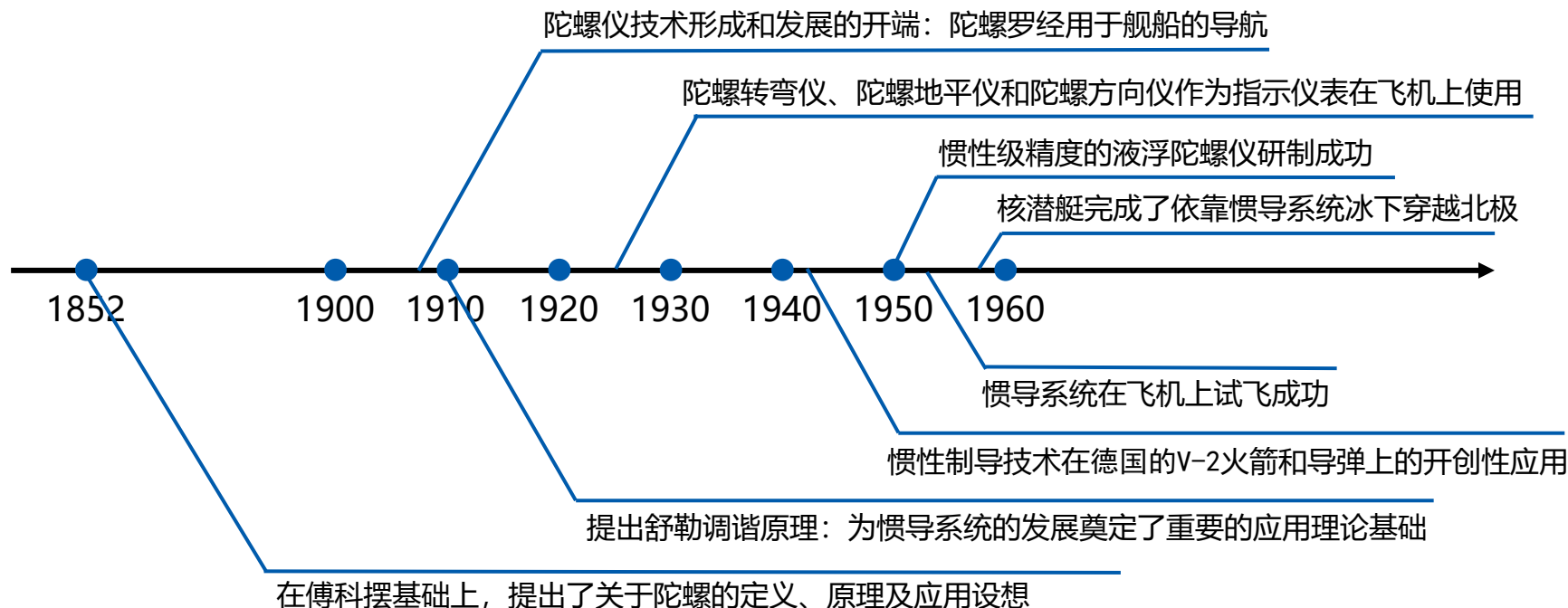
6. 惯性导航误差分析



惯性技术简介

1. 惯性技术发展历史

1687年，伟大的英国科学家牛顿提出力学三大定律，为惯性导航技术奠定了理论基础。

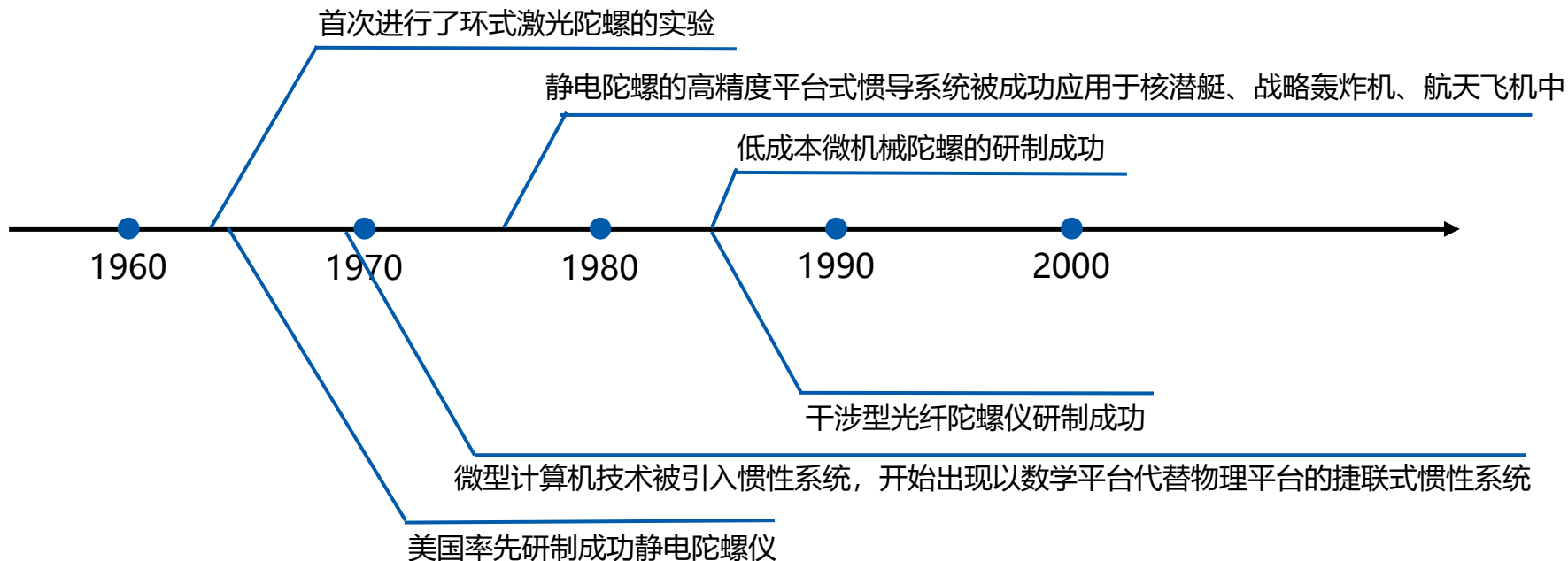




惯性技术简介

1. 惯性技术发展历史

自20世纪60年代起，出现了挠性陀螺仪和动力谐波陀螺仪，同时，平台式惯导系统发展迅速，并大量装备各种飞机、舰船、导弹和航天飞行器。



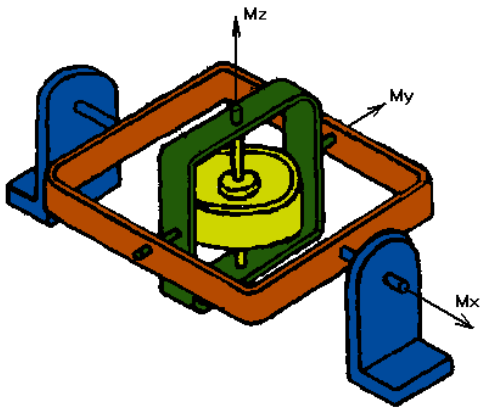


惯性技术简介

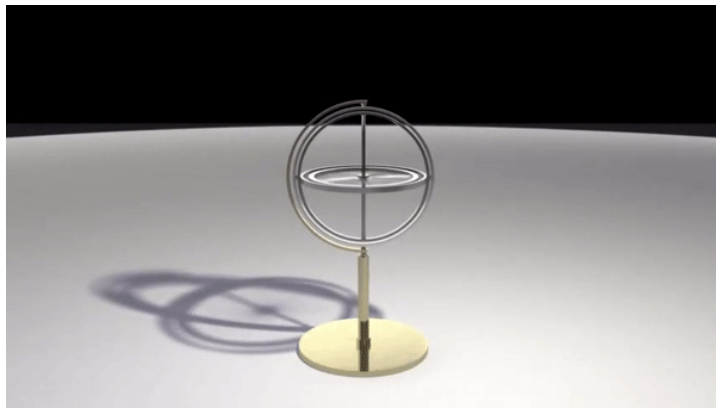
2. 惯性器件-机械陀螺

定轴性：当陀螺转子以高速旋转时，在没有任何外力矩作用在陀螺仪上时，陀螺仪的自转轴在惯性空间中的指向保持稳定不变，即指向一个固定的方向；同时反抗任何改变转子轴向的力量。

进动性：当转子高速旋转时，若外力矩作用于外环轴，陀螺仪将绕内环轴转动；若外力矩作用于内环轴，陀螺仪将绕外环轴转动。其转动角速度方向与外力矩作用方向互相垂直。



平台式惯导



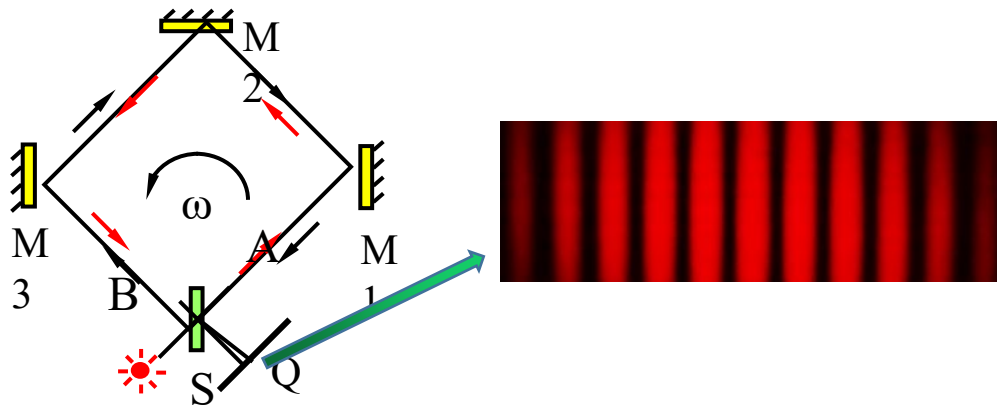
陀螺示意图



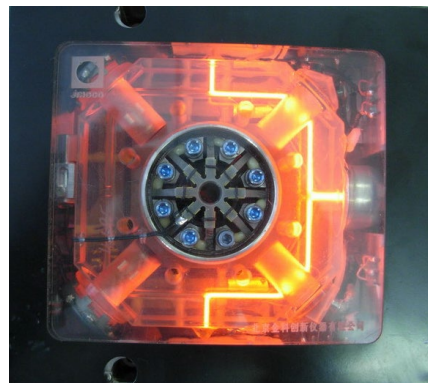
惯性技术简介

2. 惯性器件-激光陀螺

Sagnac效应由法国物理学家 Sagnac 于 1913 年发现，其原理是干涉仪相对惯性空间静止时，光路 A 和 B 的光程相等，当有角速度时，光程不相等，便会产生干涉。



Sagnac效应示意



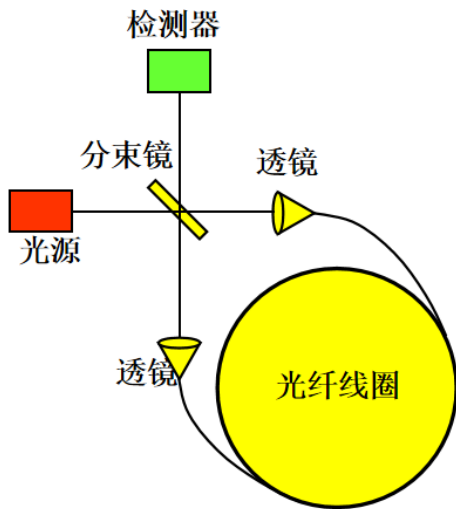
激光陀螺



惯性技术简介

2. 惯性器件-光纤陀螺

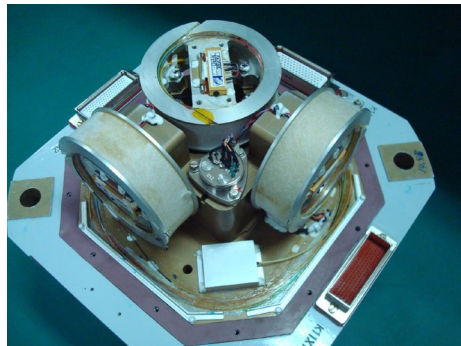
同样基于Sagnac效应，传播介质改成了光纤。



光纤陀螺原理示意



光纤陀螺



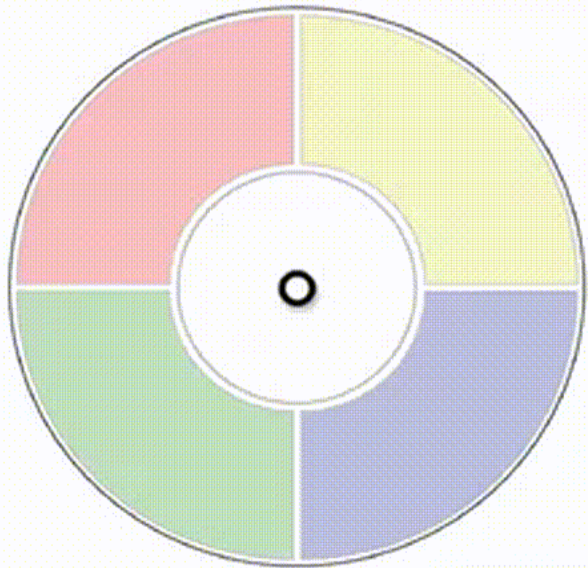
基于光纤陀螺的捷联式惯性导航系统



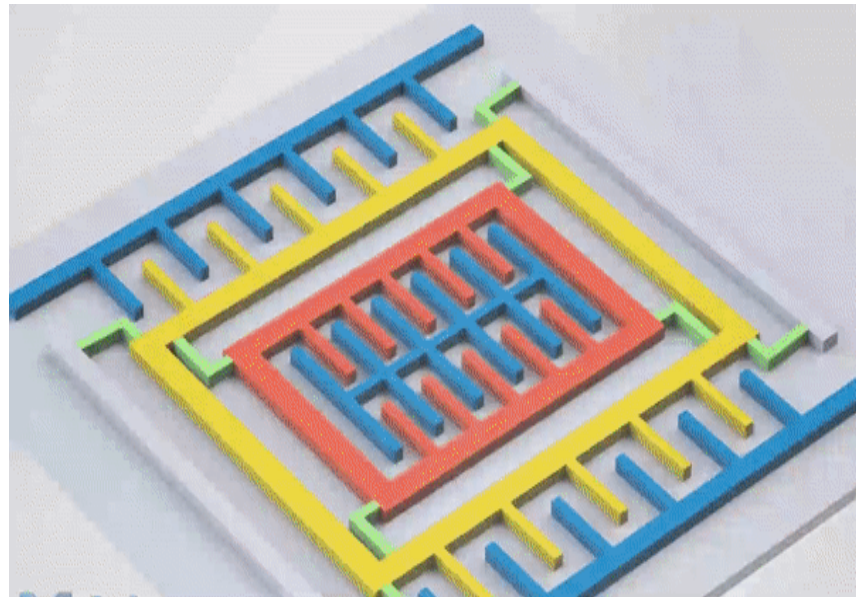
惯性技术简介

2. 惯性器件-MEMS陀螺

科里奥利力 (Coriolis force, 简称为科氏力), 是对旋转体系 (比如自转的地球, 旋转的圆盘等) 中进行直线运动的质点由于惯性相对于旋转体系产生的直线运动的偏移的一种描述。



科里奥利力



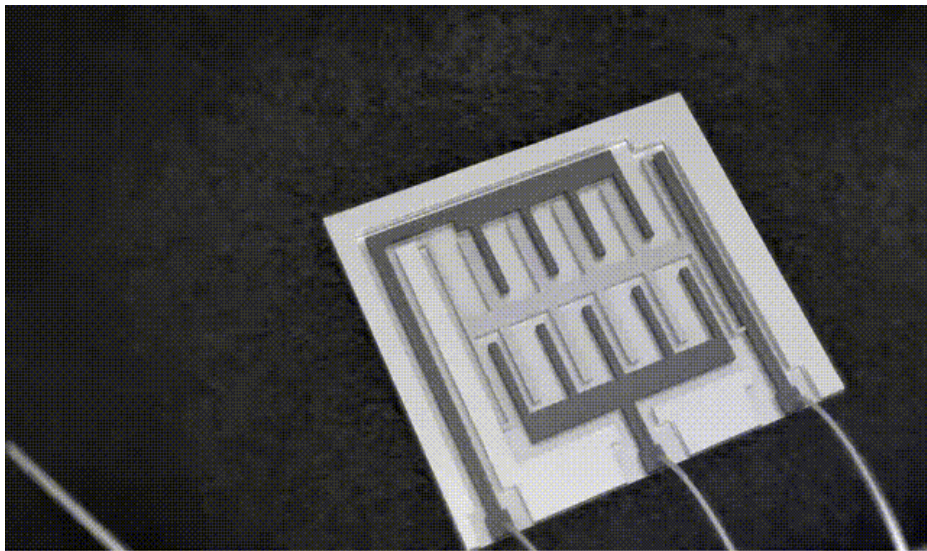
MEMS工作原理



惯性技术简介

2. 惯性器件-加速度计

当运载体相对惯性空间做加速度运动时，仪表壳体也随之做相对运动，质量块保持惯性，朝着与加速度方向相反的方向产生位移（拉伸或压缩弹簧）。当位移量达到一定值时，弹簧给出的力使质量块以同一加速度相对惯性空间做加速运动，加速度的大小与方向影响质量块相对位移的方向及拉伸量。





目录



1. 惯性器件简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件内参标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



惯性器件误差分析

1. 信号误差组成

1) 量化噪声

一切量化操作所固有的噪声，是数字传感器必然出现的噪声；

产生原因：通过AD采集把连续时间信号采集成离散信号的过程中，精度会损失，精度损失的大小和AD转换的步长有关，步长越小，量化噪声越小。

2) 角度随机游走

宽带角速率白噪声：陀螺输出角速率是含噪声的，该噪声中的白噪声成分；

产生原因：计算姿态的本质是对角速率做积分，这必然会对噪声也做了积分。白噪声的积分并不是白噪声，而是一个马尔可夫过程，即当前时刻的误差是在上一时刻误差的基础上累加一个随机白噪声得到的。

角度误差中所含的马尔可夫性质的误差，称为角度随机游走。

3) 角速率随机游走

与角度随机游走类似，角速率误差中所含的马尔可夫性质的误差，称为角速率随机游走。而这个马尔可夫性质的误差是由宽带角加速度白噪声累积的结果。



惯性器件误差分析

1. 信号误差组成

4) 零偏不稳定性噪声

零偏：即常说的bias，一般不是一个固定参数，而是在一定范围内缓慢随机飘移。

零偏不稳定性：零偏随时间缓慢变化，其变化值无法预估，需要假定一个概率区间描述它有多大的可能性落在这个区间内。时间越长，区间越大。

5) 速率斜坡

该误差是趋势性误差，而不是随机误差。

随机误差，是指你无法用确定性模型去拟合并消除它，最多只能用概率模型去描述它，这样得到的预测结果也是概率性质的。

趋势性误差，是可以直接拟合消除的，在陀螺里产生这种误差最常见的原因是温度引起零位变化，可以通过温补来消除。

6) 零偏重复性

多次启动时，零偏不相等，因此会有一个重复性误差。在实际使用中，需要每次上电都重新估计一次。

Allan方差分析时，不包含对零偏重复性的分析。



惯性器件误差分析

2. Allan方差分析

随机信号Allan方差的物理意义及应用在本质来源于它与功率谱之间的关系。

功率谱（全称 功率谱密度函数）：单位频带内的信号功率，它表示信号功率随着频率的变化情况，即信号功率在频域的分布状况。

假设把随机过程 X_α 的功率谱表示为： $\text{PSD}[X_\alpha] = h_\alpha f^\alpha$

其中 f^α 是频率， h_α 为相应的系数。

若多个随机过程相互独立，则其满足线性相加性质，即 $X = \sum X_a$

此时，其功率谱也同样可以线性相加 $\text{PSD}[X] = \sum \text{PSD}[X_\alpha]$



惯性器件误差分析

2. Allan方差分析

Allan方差分析方法的基本思路：

在惯性器件随机误差分析中，以上提到的5种误差相互独立，且 α 值不同，因此若绘制“时间间隔-方差双对数曲线”（时间间隔是频率的倒数，方差是功率谱的积分），则得到的曲线斜率必不相同。

根据曲线斜率识别出各项误差，并计算出对应的误差强度。

量化噪声 Q 满足下式

$$\log_{10} \sigma_{QN}(\tau) = \log_{10}(\sqrt{3}Q) - \log_{10} \tau$$

角度随机游走 N 满足下式

$$\log_{10} \sigma_{ARW}(\tau) = \log_{10} N - 1/2 * \log_{10} \tau$$

角速率游走 K 满足下式

$$\log_{10} \sigma_{RRW}(\tau) = \log_{10}(K/\sqrt{3}) + 1/2 * \log_{10} \tau$$

零偏不稳定性 B 满足下式

$$\log_{10} \sigma_{BI}(\tau) = \log_{10}(2B/3)$$

速率斜坡 R 满足下式

$$\log_{10} \sigma_{RR}(\tau) = \log_{10}(R/\sqrt{2}) + \log_{10} \tau$$

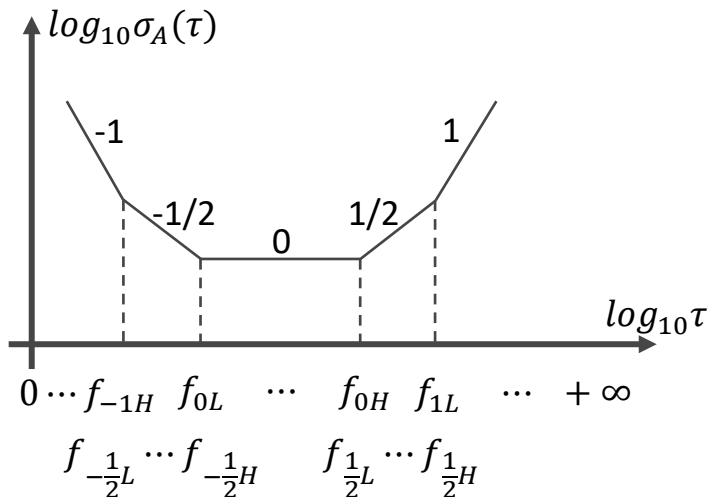
以上公式中， τ 为时间间隔



惯性器件误差分析

2. Allan方差分析

根据以上公式分析，可知曲线的形状如下：



即各随机噪声对应的斜率分别为-1, -1/2, 0, 1/2, 1

同时，令 $\tau = 1$ ，则 $\log_{10}(\tau) = 0$

其含义是求曲线与 $\tau = 1$ 的交点，此时有：

噪声类型	与 $\tau = 1$ 的交点
量化噪声	$\sqrt{3}Q$
角度随机游走	N
角速率游走	$K/\sqrt{3}$
零偏不稳定性	$2B/3$
速率斜坡	$R/\sqrt{2}$

此时可容易地求出 Q 、 N 、 K 、 B 、 R



惯性器件误差分析

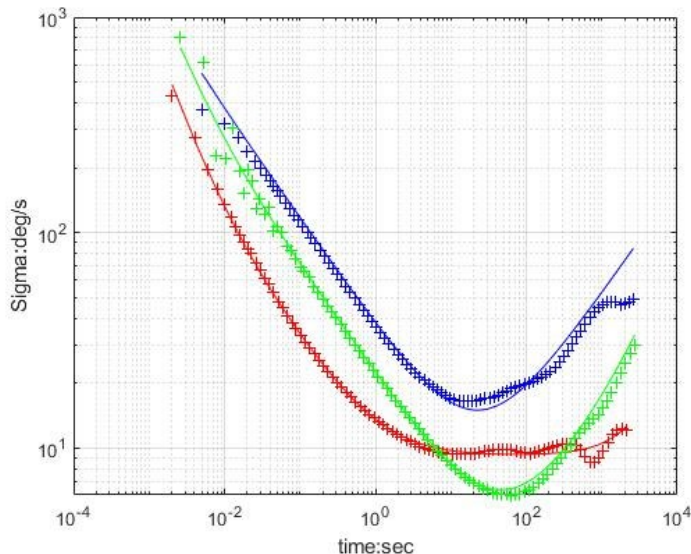
2. Allan方差分析

在测试中，按照一定的周期 T 采集了一段时间数据，可以直接计算它的方差。

如果对每两个相邻的数取平均，合并成一个，便构成了周期为 $2T$ 的离散数据，同样也可以得到它的方差。

按照这样的方法，循环下去，可以得到周期为 $4T$ 、 $8T$ 、 $16T$...对应的点。

最后，可直接使用所有点绘制曲线。



单个IMU三个陀螺仪的Allan方差曲线



惯性器件误差分析

2. Allan方差分析

imu数据仿真程序地址: <https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>

Allan方差分析代码地址: https://github.com/gaowenliang/imu_utils

作业1: 仿真imu数据, 并用Allan方差进行分析。



目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件内参标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



惯性器件内参标定

1. 惯性器件内参误差模型

1) 零偏

误差解释：陀螺仪或加速度计输出中的常值偏移，即常说的bias。

误差特性：由于零偏存在不稳定性，因此零偏并不是固定不变的。

解决办法：实际使用中，只能一段时间内近似为常值。

加速度计的零偏表示为

$$\nabla = [\nabla_x \quad \nabla_y \quad \nabla_z]$$

陀螺仪的零偏表示为

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z]$$



惯性器件内参标定

1. 惯性器件内参误差模型

2) 刻度系数误差

误差解释：器件的输出往往为脉冲值或模数转换得到的值，需要乘以一个刻度系数才能转换成角速度或加速度值，若该系数不准，便存在刻度系数误差。

误差特性：不一定是常值，它会随着输入大小的不同而发生变化，这个就是标度因数的非线性。

解决办法：如果非线性程度比较大，则需要在标定之前先拟合该非线性曲线，并补偿成线性再去做标定。

加速度计的标度因数这里表示如下

$$K_a = \begin{bmatrix} K_{ax} & & \\ & K_{ay} & \\ & & K_{az} \end{bmatrix}$$

陀螺仪的标度因数这里表示为

$$K_g = \begin{bmatrix} K_{gx} & & \\ & K_{gy} & \\ & & K_{gz} \end{bmatrix}$$



惯性器件内参标定

1. 惯性器件内参误差模型

3) 安装误差

误差解释：如右图所示，b坐标系是正交的imu坐标系，g坐标系的三个轴是分别对应三个陀螺仪。由于加工工艺原因，陀螺仪的三个轴并不正交，而且和b坐标系的轴不重合，二者之间的偏差即为安装误差。

误差特性：实际系统中，由于硬件结构受温度影响，安装误差也会随温度发生变化。

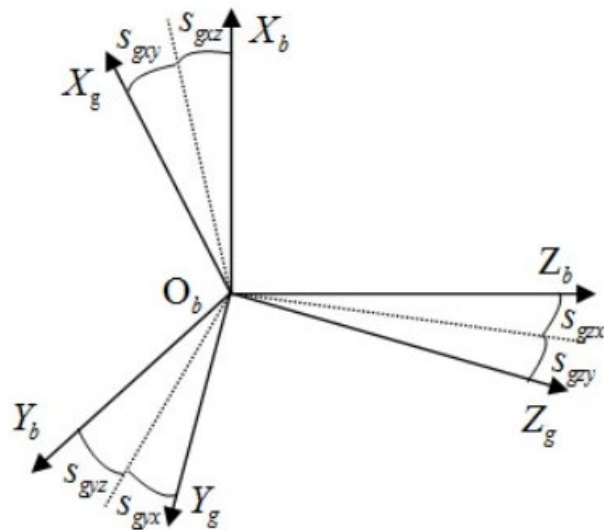
解决办法：在不同温度下做标定，补偿温度变化量。

陀螺仪的安装误差这里表示如下

$$S_g = \begin{bmatrix} 0 & S_{gxy} & S_{gxz} \\ S_{gyx} & 0 & S_{gyz} \\ S_{gzx} & S_{gzy} & 0 \end{bmatrix}$$

加速度计的安装误差这里表示为

$$S_a = \begin{bmatrix} 0 & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & 0 & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & 0 \end{bmatrix}$$





惯性器件内参标定

1. 惯性器件内参误差模型

利用下面公式(以陀螺仪为例)，可以把各项误差综合在一起

$$W = Kg(I + S_g)\omega + \varepsilon \approx (K_g + S_g)\omega + \varepsilon$$

陀螺仪的输出可以展开为：

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{gx} & S_{gxy} & S_{gxz} \\ S_{gyx} & K_{gy} & S_{gyz} \\ S_{gzx} & S_{gzy} & K_{gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

加速度计的输出可以展开为：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ax} & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & K_{ay} & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & K_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix}$$



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.1 标定方法概述

标定的本质是参数辨识，参数包括陀螺仪和加速度计各自的零偏、刻度系数误差、安装误差。

辨识方法包括：

- 1) 解析法或最小二乘
- 2) 梯度下降迭代优化
- 3) 滤波（Kalman等）

常见标定方法与上面辨识方法的对应关系为

- 1) 分立级标定: 解析法、最小二乘
- 2) 半系统级标定: 梯度下降迭代优化
- 3) 系统级标定: Kalman滤波、最小二乘



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定

在IMU的误差模型中，陀螺仪和加速度计的误差方程是互相独立的，可分别标定。

以加速度计为例，其误差模型方程为：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ax} & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & K_{ay} & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & K_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix}$$

误差模型方程为包含12个未知参数的方程组，显然方程组没有唯一解。此时，通过改变输入，构建多个不同方程，组成的方程组便可求解参数。

以上就是分立级标定方法的思路，具体求解方法包括解析法和最小二乘法。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

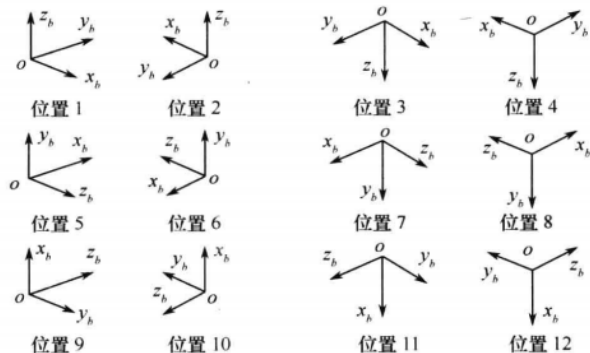
2.2. 分立级标定

分立级标定的核心：通过旋转IMU，改变其输入构造方程组，并且每个位置对应的加速度输入和角速度输入都必须是已知的。

构建方程组时，要不仅要方程组数量足够，而且要能够使误差参数可解，即系数矩阵可逆。

为了满足这一点，常见的转位方案有六位置、八位置、十二位置等。

在实际使用时，通过判断系数矩阵是否满秩便可判断，理论上，只要转位方案能满足这一条件，就可以使用。



十二位置转位方案示意图



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-加速度计标定

1) 解析法:

当IMU水平向上放置时, 有

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = g \end{cases}$$

其中, g 为重力加速度。带入加速度计误差模型,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ax} & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & K_{ay} & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & K_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix}$$

可得:

$$\begin{cases} A_x = S_{axz} * g + \nabla_x \\ A_y = S_{ayz} * g + \nabla_y \\ A_z = K_{az} * g + \nabla_z \end{cases}$$

同理, 当IMU水平向下放置时, 得:

$$\begin{cases} A_x = -S_{axz} * g + \nabla_x \\ A_y = -S_{ayz} * g + \nabla_y \\ A_z = -K_{az} * g + \nabla_z \end{cases}$$

联立这两个方程组, 便可解出6个参数。随后, 再次改变IMU放置方式, 可解其他参数。

并且, 由此可以看出, 转台需要调平。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-加速度计标定

2) 最小二乘法:

加速度计误差模型:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ax} & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & K_{ay} & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & K_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}} = x \begin{bmatrix} K_{ax} \\ K_{ay} \\ K_{az} \\ S_{axy} \\ S_{axz} \\ S_{ayx} \\ S_{ayz} \\ S_{azx} \\ S_{azy} \\ \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix} = x \underset{\boldsymbol{\mu}}{\begin{bmatrix} K_a \\ S_a \\ \nabla \end{bmatrix}}$$

其中

$$K_a = [K_{ax} \ K_{ay} \ K_{az}]^T$$

$$S_a = [S_{axy} \ S_{axz} \ S_{ayx} \ S_{ayz} \ S_{azx} \ S_{azy}]^T$$

$$\nabla = [\nabla_x \ \nabla_y \ \nabla_z]^T$$

$$x = [F \ I_{3 \times 3}]$$

$$F = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_x & 0 & a_x & 0 \\ 0 & a_y & 0 & a_y & 0 & 0 & 0 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & a_z & 0 & a_z & 0 & a_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-加速度计标定

2) 最小二乘法:

加速度计误差模型:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ax} & S_{axy} & S_{axz} \\ S_{ayx} & K_{ay} & S_{ayz} \\ S_{azx} & S_{azy} & K_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = x\theta$$

经过变形, 标定问题变为线性拟合问题, 当第 i 次把IMU朝不同方向放置后, 便得到一个方程组:

$$y_i = x_i\theta$$

所有方程组联立可得: $Y = X\theta$

其中 $Y = [y_0^T \ y_1^T \ \dots \ y_n^T]^T$ $X = [x_0^T \ x_1^T \ \dots \ x_n^T]^T$

参数拟合问题等效为最小二乘问题, 其解为: $\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$, 由此便得到标定参数。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

1) 方法思想:

陀螺仪标定与加速度计标定的重要区别:

- a. 转台一般角速度不如角度精度高, 因此不是直接以角速度作为真值, 而是积分得到角度作为真值;
- b. 陀螺的输入角速度中, 除了转台转动以外, 还包括地球自转角速度(地速)。若要消除它的影响, 可以把转台与地理系(东-北-天)对齐, 但操作复杂。常见的做法是在构建方程时, 让地速自动抵消。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

计算地速在IMU坐标系上的投影，需要经过两步转换：

第一步：计算地球自转角速度在地理系的投影；

$$\begin{bmatrix} \omega_{ie x}^n \\ \omega_{ie y}^n \\ \omega_{ie z}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}$$

其中 ω_{ie} 为地速， L 为纬度

第二步：根据地理系下的投影结果，计算在IMU坐标系下的投影。

$$\begin{bmatrix} \omega_{ie x}^b \\ \omega_{ie y}^b \\ \omega_{ie z}^b \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \omega_{ie x}^n \\ \omega_{ie y}^n \\ \omega_{ie z}^n \end{bmatrix}$$

其中 R_r 是地理系到IMU系的旋转矩阵，为未知量



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

2) 解析法(求解刻度系数和安装误差):

首先, 计算输出与输入的关系(以绕IMU的z轴逆时针旋转为例)

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{gx} & S_{gxy} & S_{gxz} \\ S_{gyx} & K_{gy} & S_{gyz} \\ S_{gzx} & S_{gzy} & K_{gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 + \omega_{ie x}^b \\ 0 + \omega_{ie y}^b \\ \omega + \omega_{ie z}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

展开并忽略二阶小量, 可得

$$\begin{cases} W_x = S_{gxz} * \omega + \varepsilon_x + \omega_{ie x}^b \\ W_y = S_{gyz} * \omega + \varepsilon_y + \omega_{ie y}^b \\ W_z = K_{gz} * \omega + \varepsilon_z + \omega_{ie z}^b \end{cases}$$

对等式两侧进行积分

$$\begin{cases} \theta_{W_x} = S_{gxz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_x} + \theta_{\omega_{ie x}^b} \\ \theta_{W_y} = S_{gyz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_y} + \theta_{\omega_{ie y}^b} \\ \theta_{W_z} = K_{gz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_z} + \theta_{\omega_{ie z}^b} \end{cases} \quad (1)$$

绕IMU的z轴顺时针旋转时, 同样方法可得,

$$\begin{cases} \theta_{W_x} = -S_{gxz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_x} + \theta_{\omega_{ie x}^b} \\ \theta_{W_y} = -S_{gyz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_y} + \theta_{\omega_{ie y}^b} \\ \theta_{W_z} = -K_{gz} * \theta_{\omega} + \theta_{\varepsilon_z} + \theta_{\omega_{ie z}^b} \end{cases} \quad (2)$$

式(1)-式(2)可以求解出 S_{gxz} S_{gyz} K_{gz}

此处不通过式(1)+式(2)求解零偏, 因为:

- 和地速耦合在一起;
- 旋转所用时间偏短, 零偏造成的角度输出太小。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

2) 解析法(求解零偏):

通过相差180度的两位置静态放置得到的方程进行联立, 便可求解零偏。

旋转前(已在前面证明):

$$\begin{bmatrix} \omega_{iex}^b \\ \omega_{iey}^b \\ \omega_{iez}^b \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \omega_{iex}^n \\ \omega_{iey}^n \\ \omega_{iez}^n \end{bmatrix}$$

绕IMU的z轴旋转180°:

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{iex}^b \\ \bar{\omega}_{iey}^b \\ \bar{\omega}_{iez}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) & 0 \\ -\sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_r \begin{bmatrix} \omega_{iex}^n \\ \omega_{iey}^n \\ \omega_{iez}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{iex}^b \\ -\omega_{iey}^b \\ \omega_{iez}^b \end{bmatrix}$$



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

2) 解析法(求解零偏):

在旋转前的位置停留时间T, 对角速度积分:

$$\begin{cases} W_x = \varepsilon_x + \omega_{ie x}^b \\ W_y = \varepsilon_y + \omega_{ie y}^b \\ W_z = \varepsilon_z + \omega_{ie z}^b \end{cases} \xrightarrow{\text{角速度积分}} \begin{cases} \theta_{W_x} = \theta_{\varepsilon_x} + \theta_{\omega_{ie x}^b} \\ \theta_{W_y} = \theta_{\varepsilon_y} + \theta_{\omega_{ie y}^b} \\ \theta_{W_z} = \theta_{\varepsilon_z} + \theta_{\omega_{ie z}^b} \end{cases} \quad (3)$$

在旋转后的位置停留时间T, 对角速度积分:

$$\begin{cases} W_x = \varepsilon_x - \omega_{ie x}^b \\ W_y = \varepsilon_y - \omega_{ie y}^b \\ W_z = \varepsilon_z + \omega_{ie z}^b \end{cases} \xrightarrow{\text{角速度积分}} \begin{cases} \theta_{W_x} = \theta_{\varepsilon_x} - \theta_{\omega_{ie x}^b} \\ \theta_{W_y} = \theta_{\varepsilon_y} - \theta_{\omega_{ie y}^b} \\ \theta_{W_z} = \theta_{\varepsilon_z} + \theta_{\omega_{ie z}^b} \end{cases} \quad (4)$$

式(3)+式(4)可以直接求解 $\varepsilon_x \ \varepsilon_y$



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.2 分立级标定-陀螺仪标定

参考资料：

imu数据仿真程序地址：<https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>

作业2：设计一种转台旋转方案，并基于仿真数据进行内参求解的验证。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.3. 半系统级标定

1) 整体思路

脱离转台，从天然的真值(此处指重力加速度)中寻找约束。

主要包括：

- a. 加速度计测到的重力大小与真实重力之间的差异由加速度计内参误差引起，以它为残差，可以估计加速度计的内参。
- b. 陀螺仪计算得到的姿态与真实姿态之间的差异由陀螺仪内参误差引起，但真实姿态并不存在，因此根据姿态投影得到的重力矢量与真实重力矢量之间的差异计算残差，去估计陀螺仪内参。



惯性器件内参标定

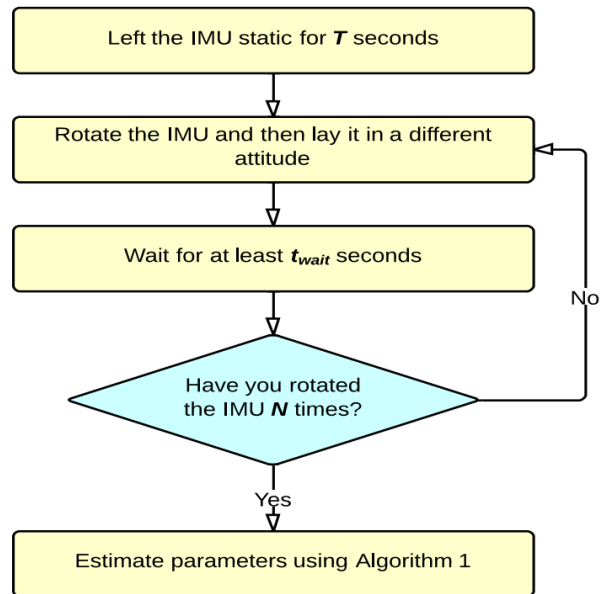
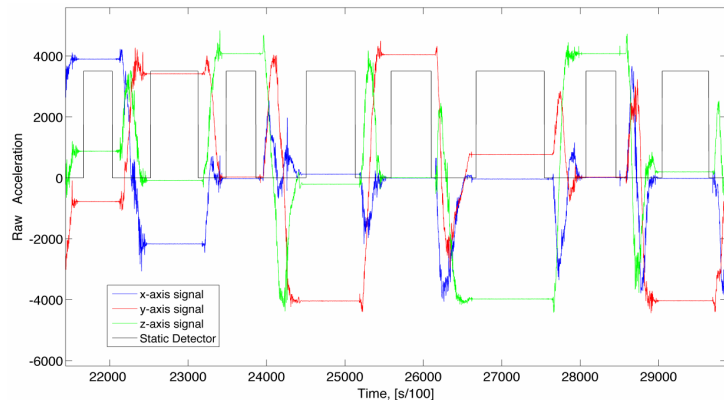
2. 惯性器件内参误差标定

2.3. 半系统级标定

2) 转位方案

转位的本质：为了优化模型有唯一解。

从以下数据可以看出每次转位的角度和方向



转位方案流程图



2. 惯性器件内参误差标定

2.3. 半系统级标定

3) 误差模型

在定义坐标系时, 若令IMU坐标系的 X_b 轴与加速度计的 X_a 轴重合, 且 $X_b O Y_b$ 与 $X_a O Y_a$ 共面(如下图), 则加速度计的安装误差只剩下三个参数。

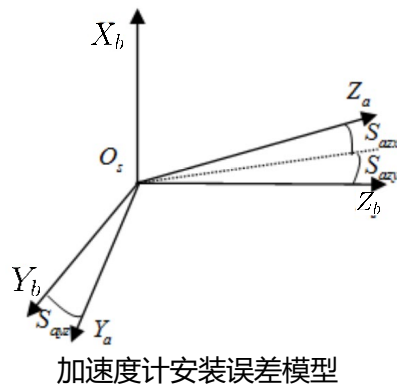
新的安装误差矩阵为 $S_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_{ayx} & 0 & 0 \\ S_{azx} & S_{azy} & 0 \end{bmatrix}$

此时，加速度计内参的待估参数为

$$\boldsymbol{\theta}^{acc} = [S_{ayx}, S_{azx}, S_{azy}, K_{ax}, K_{ay}, K_{az}, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z]$$

陀螺仪的误差模型保持不变, 但此处并没有估计陀螺仪零偏, 因此陀螺仪内参的待估参数为

$$\boldsymbol{\theta}^{gyro} = [S_{gxy}, S_{gxz}, S_{gyx}, S_{gyz}, S_{gzx}, S_{gzy}, K_{gx}, K_{gy}, K_{gz}]$$





惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.3. 半系统级标定

4) 优化模型

加速度计模型的损失函数：

$$L(\theta^{acc}) = \sum_{k=1}^M \left(\|g\|^2 - \|h(a_k^S, \theta^{acc})\|^2 \right)^2$$

其中， g 为重力加速度， M 为位置个数，即每个停止位置都会构建一个残差； $h(a_k^S, \theta^{acc})$ 表示加速度计的输出，它可以表示为加速度输入和加速度计误差参数的模型。

以此残差为优化目标，进行LM优化，便可得到加速度计的标定参数。

陀螺仪模型的损失函数：沿姿态分解的重力向量，与加速度计敏感到的重力向量的差的模

$$L(\theta^{gyro}) = \sum_{k=2}^M \|u_{a,k} - u_{g,k}\|^2$$

其中， $u_{a,k}$ 为加速度计敏感到的重力向量， $u_{g,k}$ 为根据陀螺仪解算的姿态分解得到的重力向量。

同样地，以此残差为优化目标，进行LM优化，便可得到陀螺仪的标定参数。



惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.3. 半系统级标定

参考资料：

文章：A Robust and Easy to Implement Method for IMU Calibration without External Equipments

代码：https://github.com/Kyle-ak/imu_tk

imu数据仿真程序地址：<https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>

作业3：推导基于LM进行加速度计和陀螺仪内参估计的优化过程。按照课件中的模型，修改参考代码，并基于仿真数据实现。

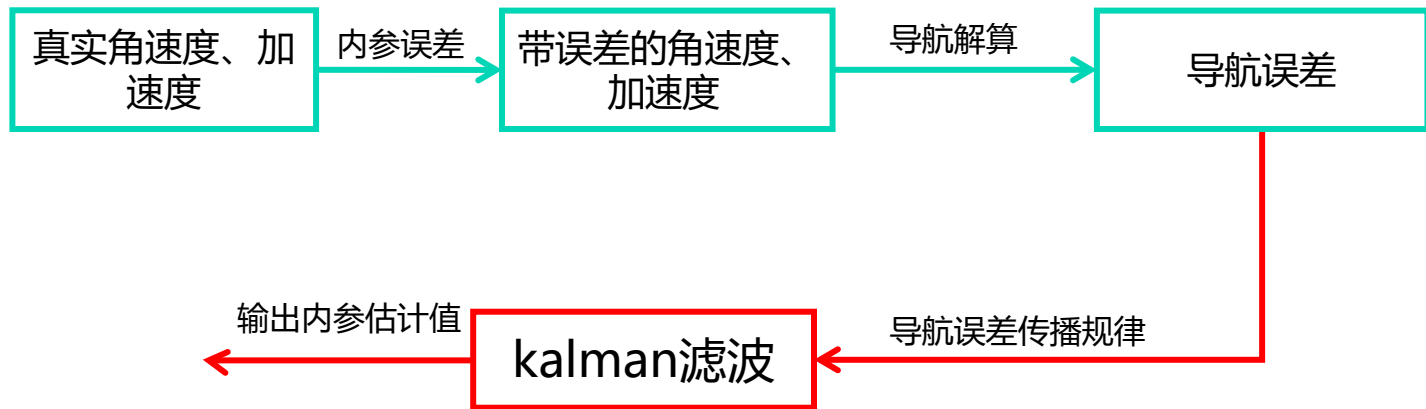


惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.4. 系统级标定简介

系统级标定需要用到kalman滤波、观测性分析、导航误差模型等知识，因此这里只简要介绍其原理（后续章节会重新回顾该方法）。





惯性器件内参标定

2. 惯性器件内参误差标定

2.5. 标定方法比较

- 1) 分立级标定精度较高，但依赖于转台；
- 2) 半系统级标定精度最差，但不依赖转台，成本低、效率高，对MEMS的标定需求已经足够；
- 3) 系统级标定精度最高，但只适用于标定高精度惯导。



目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



惯性器件温补

温补的本质是系统辨识，既要找出合适的物理模型，又要识别物理模型的参数。

1) 物理模型辨识

和温度相关的变量为 T 和 ΔT

分别代表温度、变温率(表示温度变化的快慢)，温补要做的是识别出器件bias(B)和这两者的关系：

$$B = f(T, \Delta T)$$

而f的具体表达多数是靠尝试。

常见的模型为

$$B = a * T^3 + b * T^2 + c * T + \\ e * \Delta T^2 + f * \Delta T + \\ g * T * \Delta T + h$$

实际使用时，可根据情况在此基础上做减法，去掉一些高阶项。

2) 参数辨识

在选定的物理模型基础上做最小二乘曲线拟合，和分立级标定时所用最小二乘原理相同。



3) 其他改进方法

a. 分段拟合

bias随温度变化曲线多是不规则曲线，无法用一个完整的曲线模型做拟合。

常见的方法是按照温度把曲线分成多个区间，每个区间单独拟合一个模型。

b. 基于神经网络

温补最大的问题是物理模型未知，而神经网络不需要已知物理模型，理论上比较合理。

但是，实际使用中，由于很多处理器只是简单的嵌入式板子，运算能力有限，而且多项式方法已经能解决大部分问题，因此这种方法在实际使用中用的不多。

4) 关于温补的讨论

a. 温补在器件误差补偿中是最重要的，但也是最“没有技术含量”的。

b. 温变的本质是和器件整体温度场相关，而不仅仅是和局部温度点相关，但温度传感器只能测量后者。

c. 永远无法找到完全准确的温补模型，但是却能知道什么是够用的。自动控制领域有一句名言 "All models are wrong, but some are useful"



目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



惯性导航解算

1. 概述

惯性导航解算包括：姿态解算、速度解算、位置解算，其中姿态解算最为核心。

姿态解算：

姿态有三种表示形式

- 1) 欧拉角
- 2) 旋转矩阵
- 3) 四元数

本课程只介绍基于旋转矩阵和四元数的姿态更新。

姿态解算方法的推导，是整个惯性技术中最为复杂的，但是却最为“无用”的。

因此后面的推导，为了简洁性，会忽略一些细节，为了理解的流畅，会忽略一些严谨性。

若对详细过程感兴趣，可参考《捷联惯导算法与组合导航原理》书籍（严恭敏等编著）



惯性导航解算

2. 基础知识

1) 旋转矩阵微分方程

设动坐标系(b系)到参考坐标系(i系)的转换矩阵为 C_b^i
 则可以算出b坐标系中的向量在i坐标系中的投影

$$\mathbf{r}^i = C_b^i \mathbf{r}^b$$

两边同时微分, 可得

$$\dot{\mathbf{r}}^i = C_b^i \dot{\mathbf{r}}^b + \dot{C}_b^i \mathbf{r}^b$$

由于

$$\dot{\mathbf{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{r}^b$$

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{0}$$

因此有

$$0 = C_b^i (-\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{r}^b) + \dot{C}_b^i \mathbf{r}^b$$

上式可化简为

$$\dot{C}_b^i \mathbf{r}^b = C_b^i (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \mathbf{r}^b$$

因此有

$$\dot{C}_b^i = C_b^i (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 为角速度构成的反对称矩阵

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$



惯性导航解算

2. 基础知识

2) 四元数及其微分方程

四元数是超复数，即“复数的复数”

若有复数

$$A = a + bi$$

$$B = c + di$$

则复数的复数为

$$Q = A + Bj$$

$$= a + bi + cj + dij$$

若令 $k = ij$ 则有

$$Q = a + bi + cj + dk$$

此即为四元数

一般四元数的常见表示符号为

$$Q = q_0 + \mathbf{q}_v = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

四元数乘法

$$P \circ Q = \begin{bmatrix} p_0q_0 - \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_v \\ p_0\mathbf{q}_v + q_0\mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

若在四元数乘法中出现三维向量，指的是和三维向量构成的纯虚四元数相乘，比如

$$P \circ \mathbf{u} = P \circ \begin{bmatrix} 0 \\ u_1\mathbf{i} \\ u_2\mathbf{j} \\ u_3\mathbf{k} \end{bmatrix}$$



惯性导航解算

2. 基础知识

2) 四元数及其微分方程

四元数相乘，可以展开为矩阵与向量相乘的形式

$$P \circ Q = M_P Q$$

其中

$$\begin{aligned} M_P &= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & p_0 \mathbf{I} + (\mathbf{p}_v \times) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

也可以展开为

$$P \circ Q = M'_Q P$$

其中

$$\begin{aligned} M'_Q &= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & q_0 \mathbf{I} - (\mathbf{q}_v \times) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



2. 基础知识

2) 四元数及其微分方程

为了进一步简写 M_P 和 M'_Q , 可以分别定义4维反对称矩阵:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p}_v^*)_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & (\mathbf{p}_v \times) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 (\mathbf{p}_v^*)_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & -(\mathbf{p}_v \times) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$(\mathbf{p}_v^*)_1, (\mathbf{p}_v^*)_2$ 分别称为第一、第二反对称矩阵, 同理可得 $(\mathbf{q}_v^*)_1, (\mathbf{q}_v^*)_2$ 。此时有:

$$M_P = p_0 I + (\mathbf{p}_v^*)_1$$

$$M'_Q = q_0 I + (\mathbf{q}_v^*)_2$$



2. 基础知识

2) 四元数及其微分方程

设动坐标系(b系)到参考坐标系(i系)的转换矩阵为
则可以算出b坐标系中的向量在i坐标系中的投影

$$\mathbf{r}^i = Q_b^i \circ \mathbf{r}^b \circ Q_i^b \quad (1)$$

其中 Q_b^i 和 Q_i^b 互为共轭四元数, 即若有

$$Q_b^i = q_0 + \mathbf{q}_v = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

则有

$$Q_i^b = q_0 - \mathbf{q}_v = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$$

两个共轭的单位四元数相乘, 结果为1

(1)式两边同时右乘 Q_b^i , 可得

$$\mathbf{r}^i \circ Q_b^i = Q_b^i \circ \mathbf{r}^b$$

上式两边同时求微分, 可得

$$\dot{\mathbf{r}}^i \circ Q_b^i + \mathbf{r}^i \circ \dot{Q}_b^i = \dot{Q}_b^i \circ \mathbf{r}^b + Q_b^i \circ \dot{\mathbf{r}}^b$$

由于

$$\dot{\mathbf{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{r}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \circ \mathbf{r}^b$$

$$\dot{\mathbf{r}}^i = 0$$

则有

$$(Q_b^i \circ \mathbf{r}^b \circ Q_i^b) \circ \dot{Q}_b^i = \dot{Q}_b^i \circ \mathbf{r}^b - Q_b^i \circ (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \circ \mathbf{r}^b)$$



惯性导航解算

2. 基础知识

2) 四元数及其微分方程

上式两边同时左乘 Q_i^b , 可得

$$\mathbf{r}^b \circ Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i = Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i \circ \mathbf{r}^b - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \circ \mathbf{r}^b$$

移项可得

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \circ \mathbf{r}^b = (Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i) \circ \mathbf{r}^b - \mathbf{r}^b \circ (Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i)$$

利用前面四元数相乘展开成矩阵与向量相乘的公式, 可以得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2[(Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i)_v \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^b \end{bmatrix}$$

因此有

$$Q_i^b \circ \dot{Q}_b^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix}$$

即

$$\dot{Q}_b^i = \frac{1}{2} Q_b^i \circ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$$



惯性导航解算

2. 基础知识

3) 等效旋转矢量

理解：把旋转当做绕空间一个固定轴转过一个角度。

直接用向量 ϕ 表示，其方向即为转轴方向，对应的单位向量记为 \mathbf{u} ，它的长度 $\phi = |\phi|$ 即为转角。

等效旋转矢量的指数形式，可以表示为

$$\exp(\phi \times) = \exp(\phi \mathbf{u} \times) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi \mathbf{u} \times)^n$$

上式包含高次幂，为了便于后续计算，需要对高次幂进行化简。

由于反对称矩阵具有以下性质(可自行推导)，

$$(\phi \times)^i = \begin{cases} (-1)^{(i-1)/2} \phi^{i-1} (\phi \times) & i = 1, 3, 5, \dots \\ (-1)^{(i-2)/2} \phi^{i-2} (\phi \times)^2 & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$



2. 基础知识

因此，等效旋转矢量的指数函数可以表示如下：

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{\phi} \times) &= I + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u} \times) + \frac{1}{2!}\phi^2(\mathbf{u} \times)^2 + \frac{1}{3!}\phi^3(\mathbf{u} \times)^3 + \frac{1}{4!}\phi^4(\mathbf{u} \times)^4 + \dots \\&= I + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u} \times) + \frac{1}{2!}\phi^2(\mathbf{u} \times)^2 - \frac{1}{3!}\phi^3(\mathbf{u} \times) - \frac{1}{4!}\phi^4(\mathbf{u} \times)^2 + \dots \\&= I + (\mathbf{u} \times)^2 + \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \dots\right)}_{\sin \phi}(\mathbf{u} \times) - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \dots\right)}_{\cos \phi}(\mathbf{u} \times)^2 \\&= I + \sin \phi(\mathbf{u} \times) + (1 - \cos \phi)(\mathbf{u} \times)^2 \\&= I + \frac{\sin \phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi} \times)^2\end{aligned}$$



惯性导航解算

2. 基础知识

4) 旋转矩阵、四元数、等效旋转矢量之间的关系

a. 由等效旋转矢量求解旋转矩阵

$$C_b^i = I + \frac{\sin \phi}{\phi}(\phi \times) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}(\phi \times)^2$$

此公式也被称为罗德里格斯公式，并且与等效旋转矢量的指数运算结果相同。

b. 由等效旋转矢量求解四元数

$$Q = \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2}$$



惯性导航解算

3. 姿态更新

1) 旋转矩阵上的姿态更新

根据前面推导，旋转矩阵的微分方程为

$$\dot{C}_b^i = C_b^i (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times)$$

根据微分方程的求解方法，可以写出由m-1时刻求解m时刻旋转矩阵的公式为

$$C_{b(m)}^i = C_{b(m-1)}^i e^{\int_{t_{m-1}}^{t_m} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) d\tau}$$

指数上的积分结果其实就是m-1时刻到m时刻之间的相对旋转对应的等效旋转矢量形成的反对称矩阵。

因此上式可以重新写为

$$C_{b(m)}^i = C_{b(m-1)}^i e^{\boldsymbol{\phi} \times}$$

由于反对称矩阵的指数函数前面已经推导完毕，因此上式又可以写为

$$C_{b(m)}^i = C_{b(m-1)}^i C_{b(m)}^{b(m-1)}$$

其中

$$C_{b(m)}^{b(m-1)} = I + \frac{\sin \phi}{\phi} (\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\boldsymbol{\phi} \times)^2$$



3. 姿态更新

2) 四元数上的姿态更新

根据前面推导，四元数的微分方程为

$$\dot{Q}_b^i = \frac{1}{2} Q_b^i \circ \omega_{ib}^b$$

其矩阵形式为

$$\dot{Q}_b^i = \frac{1}{2} M'_{\omega_{ib}^b} Q_b^i$$

同样按照解微分方程的方法，并对指数项做积分，可以得到

$$Q_{b(m)}^i = e^{\frac{1}{2}\Theta} Q_{b(m-1)}^i$$

其中 Θ 为等效旋转矢量构成的第二反对称矩阵

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} 0 & -\phi_x & -\phi_y & -\phi_z \\ \phi_x & 0 & \phi_z & -\phi_y \\ \phi_y & -\phi_z & 0 & \phi_x \\ \phi_z & \phi_y & -\phi_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\phi^*)_2 \end{aligned}$$

为了求解该方程，要对指数函数进行泰勒展开，同样包含高次幂，展开方法与前述方法相同（可以自行推导，此处直接给出结论）：

$$e^{\frac{1}{2}\Theta(T)} = I \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\Theta}{\phi} \sin \frac{\phi}{2}$$



3. 姿态更新

因此有

$$\begin{aligned} Q_{b(m)}^i &= \left[I \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\Theta}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \right] Q_{b(m-1)}^i \\ &= \left[I \cos \frac{\phi}{2} + \left(\left(\frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \right) * \right)_2 \right] Q_{b(m-1)}^i \\ &= Q_{b(m-1)}^i \circ \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{令 } Q_{b(m)}^{b(m-1)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } Q_{b(m)}^i = Q_{b(m-1)}^i \circ Q_{b(m)}^{b(m-1)}$$



惯性导航解算

3. 姿态更新

3) 等效旋转矢量的计算

基于旋转矩阵的更新和基于四元数的更新，都要求先计算出等效旋转矢量，等效旋转矢量的计算依赖于它的微分方程。

在旋转矩阵微分方程中，把旋转矩阵用等效旋转矢量表示，则可以求出等效旋转矢量的微分方程。同样地，在四元数微分方程中也可以按此方式得到。

此处直接给出结论

$$\dot{\phi} = \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \right) (\phi \times)^2 \omega$$

此处通过对三角函数泰勒展开，并去除高阶项，可以化简得到

$$\dot{\phi} \approx \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega$$

实际中，为了消除微分方程右侧的 ϕ ，一般可以进一步化简成下式

$$\dot{\phi}(t) \approx \omega(t) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t) \times \omega(t)$$

其中 $\Delta\theta$ 为对应的角增量(即角速度在时间上的积分)



惯性导航解算

3. 姿态更新

根据微分方程求解等效旋转矢量，此处采用泰勒展开法，令 $\beta(t) = \Delta\theta(t) \times \omega(t)$

则有 $\dot{\phi}(t) = \omega(t) + \frac{1}{2}\beta(t)$

此时 $\phi(t_m) = \phi(t_{m-1}) + T\dot{\phi}(t_{m-1}) + \frac{T^2}{2!}\ddot{\phi}(t_{m-1}) + \frac{T^3}{3!}\dddot{\phi}(t_{m-1}) + \dots$

其中 $T = t_m - t_{m-1}$ 为计算周期。

此方程的解取决于 $\omega(t)$ 的形式，假设以线性模型考虑角速度，则有

$$\omega(\tau) = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}\tau \quad t_{m-1} \leq \tau \leq t_m$$

由于每次使用旋转矢量更新完姿态后，旋转矢量都会从0开始重新累计，因此在每次求解上面公式时，把 t_{m-1} 设为本次的起始零时刻，同样成立，后面的推导会更简洁，此时

$$\begin{aligned} \omega(\tau) &= \mathbf{a} + 2\mathbf{b}\tau \quad 0 \leq \tau \leq T \\ \Delta\theta(\tau) &= \int_0^\tau \omega(\tau') d\tau' = \mathbf{a}\tau + \mathbf{b}\tau^2 \end{aligned}$$

把以上结果带入泰勒展开的式子中，可以得到

$$\phi(T) = T\mathbf{a} + T^2\mathbf{b} + \frac{T^3}{6}\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



惯性导航解算

3. 姿态更新

a 与 b 的求解

$$\begin{cases} \Delta\theta_1 = \int_0^{T/2} \omega(\tau) d\tau = (a\tau + b\tau^2) \Big|_0^{T/2} = \frac{T}{2}a + \frac{T^2}{4}b \\ \Delta\theta_2 = \int_{T/2}^T \omega(\tau) d\tau = (a\tau + b\tau^2) \Big|_{T/2}^T = \frac{T}{2}a + \frac{3T^2}{4}b \end{cases}$$

即，求解 a 与 b ，需要一个计算周期内有两个采样周期才行。最终解得

$$\phi(T) = (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \frac{2}{3}\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_2$$

同理可以计算，角速度为匀速模型下的解，也可以计算角速度为二阶甚至更高阶模型下的解。

需要注意以下几点：

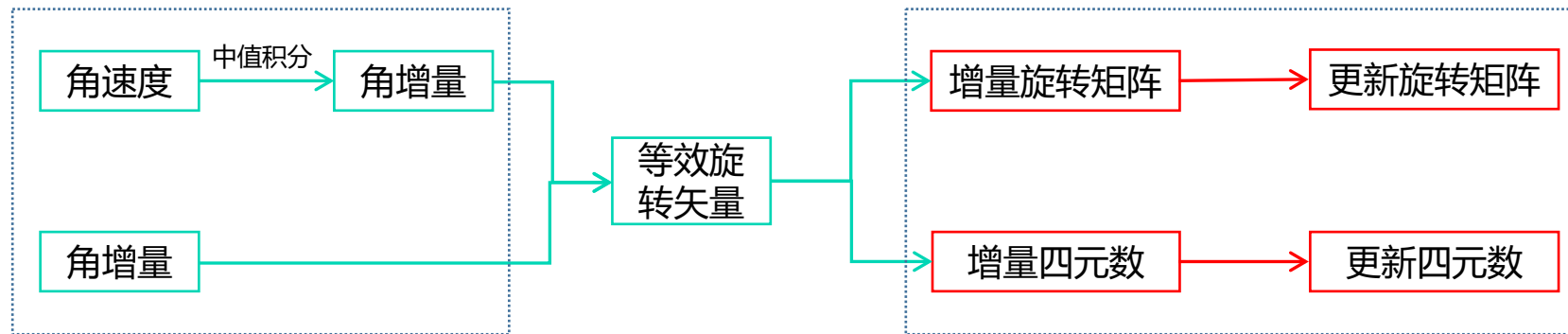
- 1) 实际中采用哪一种，取决于系统精度和载体运动状态。
- 2) 模型阶数越高，所需要的采样周期数就越多，匀速模型下，只需要一个周期，此时旋转矢量等于角增量
- 3) 可使用前一时刻角增量对当前时刻做补偿量的计算，此时可在不降低输出频率的情况下提高精度。



惯性导航解算

3. 姿态更新

姿态更新按以下方式进行数值计算



二选一，取决于器件数据的输出形式

二选一，一般使用四元数



惯性导航解算

3. 姿态更新

4) 一些讨论

a. 导航系与惯性系

在实际导航模型中，不动系(i系)是地心惯性系，而我们要的导航结果是相对于导航系(n系)的，这两个坐标系之间有相对旋转，他们之间的旋转角速度可以表示为

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n$$

其中 ω_{ie}^n 表示地球自转引起的角速度； ω_{en}^n 表示载体在地球表面运动时，绕地球旋转形成的角速度。其表达式如下：

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}^T$$
$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N}{R_M+h} & \frac{v_E}{R_N+h} & \frac{v_E}{R_N+h} \tan L \end{bmatrix}^T$$

后者的理解需要借助地球模型，此处不引入地球模型的推导，其推导过程同样可参考《捷联惯导算法与组合导航原理》（严恭敏等编著）



惯性导航解算

3. 姿态更新

4) 一些讨论

a. 导航系与惯性系

在导航解算时，需要根据相应的角速度，把导航系和惯性系的相对旋转补偿掉，此时基于旋转矩阵的更新变成：

$$C_{b(m)}^{n(m)} = C_i^{n(m)} C_{b(m)}^i = C_{n(m-1)}^{n(m)} C_i^{n(m-1)} C_{b(m-1)}^i C_{b(m)}^{b(m-1)}$$

同样地，四元数也应做相应修改

$$Q_{b(m)}^{n(m)} = Q_i^{n(m)} \circ Q_{b(m)}^i = Q_{n(m-1)}^{n(m)} \circ Q_i^{n(m-1)} \circ Q_{b(m-1)}^i \circ Q_{b(m)}^{b(m-1)}$$



惯性导航解算

3. 姿态更新

4) 一些讨论

b. 四阶龙格库塔方法

早期惯导采样频率低，才引入了该方法。现在惯性器件频率都很高，此方法必要性不大。



惯性导航解算

4. 速度解算方法

由于速度的微分方程为

$$\dot{V} = C_b^n f^b + g^n$$

其中, f 为加速度计敏感到的值, g^n 为地球重力矢量,

$$g^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

其中, g 为重力加速度。

因此, 速度更新方程为

$$V_{t_m} = V_{t_{m-1}} + T \left[\frac{1}{2}(C_{t_{m-1}} f_{t_{m-1}} + C_{t_m} f_{t_m}) + g^n \right]$$

5. 位置解算方法

位置解算更为简单, 其微分方程为

$$\dot{P} = V$$

因此, 位置更新方程为

$$P_{t_m} = P_{t_{m-1}} + \frac{1}{2}T(V_{t_m} + V_{t_{m-1}})$$



惯性导航解算

作业4

对一组数据进行惯性导航解算验证，要求：

- 1) 数据可以使用仿真数据，也可以使用kitti数据集中的数据，只不过使用kitti数据时要修改kitti2bag的代码，把imu的输出频率恢复成100hz，它的原版程序在生成bag时对数据做了降频。
- 2) 由于mems惯导误差发散快，导航时间不用太长，几分钟即可。如果想验证高精度惯导随时间发散的现象，可用仿真数据生成。
- 3) 解算时尽量对比验证角增量方法和旋转矢量方法的区别，由于定轴转动下，二者没有区别，因此若要验证该现象，数据要运动剧烈些。



目录



1. 惯性技术简介



2. 惯性器件误差分析



3. 惯性器件标定



4. 惯性器件温补



5. 惯性导航解算



6. 惯性导航误差分析



惯性导航误差分析

1. 误差方程推导方法

误差方程：误差量的微分方程，此处误差量指姿态误差、速度误差、位置误差。

误差方程的推导有固定的套路，举例说明具体步骤：

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{z} = x + y$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{x} + \tilde{y}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{z} = z + \delta z$$

$$\tilde{x} = x + \delta x$$

$$\tilde{y} = y + \delta y$$

4) 把3)中的关系，带入2)

$$\dot{z} + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

5) 把1)中的关系，带入4)

$$x + y + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

6) 化简方程

$$\delta \dot{z} = \delta x + \delta y$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

1) 第一步：写出不考虑误差时的微分方程

以“东-北-天(E-N-U)”坐标系为导航坐标系(n系)，“右-前-上”坐标系为(b系)时，姿态微分方程可以表示为

$$\dot{C}_b^n = C_b^n (\omega_{nb}^b \times)$$

当考虑地球自转角速度时， ω_{nb}^b 不易直接测量，因此上面的微分方程可以拆解为

$$\begin{aligned}
\dot{C}_b^n &= C_b^n [(\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) \times] \\
&= C_b^n (\omega_{ib}^b \times) - C_b^n (\omega_{in}^b \times) \\
&= C_b^n (\omega_{ib}^b \times) - C_b^n (\omega_{in}^b \times) C_n^b C_b^n \\
&= C_b^n (\omega_{ib}^b \times) - (\omega_{in}^n \times) C_b^n
\end{aligned}$$

其中 ω_{in}^n 表示导航系(n系)相对于惯性系(i系)的旋转，它包含地球自转和导航系相对于地球的旋转，其表达式为

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n$$

2) 第二步：写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{C}}_b^n = \tilde{C}_b^n (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - (\tilde{\omega}_{in}^n \times) \tilde{C}_b^n$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

3) 第三步：写出真实值与理想值之间的关系

a. 姿态误差的引入

理想情况下，从导航坐标系（n 系）到载体坐标系（b 系）的捷联惯导姿态矩阵为 C_b^n ，而姿态计算时会有误差，一般假设误差在 n 系上。有误差的导航坐标系称为计算导航坐标系，简记为 n' 系。此时有误差的姿态矩阵表示为

$$\tilde{C}_b^n = C_b^{n'} = C_n^{n'} C_b^n$$

以 n 系作为参考坐标系，记从 n 系至 n' 系的等效旋转矢量为 ϕ (其 3 个元素也被称作失准角)，当它为小量时，根据等效旋转矢量与方向余弦阵关系式

$$C_n^{n'} = I - \frac{\sin \phi}{\phi} (\phi \times) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\phi \times)^2$$

进行简化可得

$$C_n^{n'} \approx I - (\phi \times)$$

此时有误差的姿态矩阵表示为

$$\tilde{C}_b^n = [I - (\phi \times)] C_b^n$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

3) 第三步：写出真实值与理想值之间的关系

b. imu角速度误差的引入

含误差的imu角速度可以表示为

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \delta\omega_{ib}^b$$

严格来讲, $\delta\omega_{ib}^b$ 包含了imu内参相关的所有误差, 而在实际中, 会根据任务需求进行化简, 只取一部分变量。

$$\begin{bmatrix} \delta\omega_{ibx}^b \\ \delta\omega_{iby}^b \\ \delta\omega_{ibz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{gx} - 1 & S_{gxy} & S_{gxz} \\ S_{gyx} & K_{gy} - 1 & S_{gyz} \\ S_{gzx} & S_{gzy} & K_{gz} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

3) 第三步：写出真实值与理想值之间的关系

c. 关联误差的引入

$$\tilde{\omega}_{in}^n = \tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n = \omega_{ie}^n + \delta\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n + \delta\omega_{en}^n$$

$$\text{其中 } \delta\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin L \cdot \delta L \\ \omega_{ie} \cos L \cdot \delta L \end{bmatrix}$$

$$\delta\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\delta v_N / R_{Mh} + v_N \delta h / R_{Mh}^2 \\ \delta v_E / R_{Nh} - v_E \delta h / R_{Nh}^2 \\ \tan L \cdot \delta v_E / R_{Nh} + v_E \sec^2 L \cdot \delta L / R_{Nh} - v_E \tan L \cdot \delta h / R_{Nh}^2 \end{bmatrix}$$

在实际使用时，这两项角速度误差均忽略不计，理由如下：

c.1. 在中等精度及以下的惯性导航中，这两项角速度误差相比于器件误差，量级太小，没有考虑的必要；

c.2. 在组合导航中，速度误差和位置误差一直被修正，会使他们的量级进一步减小。



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

4) 第四步：把3)中的关系，带入2)

带误差的微分方程为

$$\dot{\tilde{C}}_b^n = \tilde{C}_b^n (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - (\tilde{\omega}_{in}^n \times) \tilde{C}_b^n$$

带误差的变量为

$$\tilde{C}_b^n = [I - (\phi \times)] C_b^n$$

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b$$

$$\tilde{\omega}_{in}^n = \omega_{ie}^n + \delta \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n + \delta \omega_{en}^n$$

把这三个带误差的量带入微分方程可得

$$(-\dot{\phi} \times) C_b^n + [I - (\phi \times)] \dot{C}_b^n = [I - (\phi \times)] C_b^n [(\omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times] - (\omega_{in}^n \times) [I - (\phi \times)] C_b^n$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

5) 第五步：把1)中的关系，带入4)

得到如下结果

$$\begin{aligned}
& (-\dot{\phi} \times) C_b^n + [I - (\phi \times)] [C_b^n (\omega_{ib}^b \times) - (\omega_{in}^n \times) C_b^n] \\
&= [I - (\phi \times)] C_b^n [(\omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times] - (\omega_{in}^n \times) [I - (\phi \times)] C_b^n
\end{aligned}$$

6) 第六步：化简方程

上式两边同时右乘 C_n^b ，可得

$$\begin{aligned}
& (-\dot{\phi} \times) + [I - (\phi \times)] [C_b^n (\omega_{ib}^b \times) C_n^b - (\omega_{in}^n \times)] \\
&= [I - (\phi \times)] C_b^n [(\omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times] C_n^b - (\omega_{in}^n \times) [I - (\phi \times)]
\end{aligned}$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

上式可以写为

$$\begin{aligned}
 & (-\dot{\phi} \times) + [I - (\phi \times)] [(\omega_{ib}^n \times) - (\omega_{in}^n \times)] \\
 &= [I - (\phi \times)] [(\omega_{ib}^n + \delta\omega_{ib}^b) \times] - (\omega_{in}^n \times) [I - (\phi \times)]
 \end{aligned}$$

展开并忽略其中的二阶小项，可得

$$\dot{\phi} \times = [(\phi \times) (\omega_{in}^n \times) - (\omega_{in}^n \times) (\phi \times)] - (\delta\omega_{ib}^n \times)$$

根据定理 $(V_1 \times) (V_2 \times) - (V_2 \times) (V_1 \times) = [(V_1 \times V_2) \times]$ 姿态误差方程可以重新写为

$$(\dot{\phi} \times) = [(\phi \times \omega_{in}^n - \delta\omega_{ib}^n) \times]$$

因此有姿态误差方程为

$$\dot{\phi} = \phi \times \omega_{in}^n - \delta\omega_{ib}^n$$



惯性导航误差分析

3. 速度误差方程

1) 第一步：写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b + g^n$$

2) 第二步：写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{V}}^n = \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b + \tilde{g}^n$$

3) 第三步：写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{V}^n = V^n + \delta V^n$$

$$\tilde{C}_b^n = [I - (\phi \times)] C_b^n$$

$$\tilde{f}^b = f^b + \delta f^b$$

$$\tilde{g}^n = g^n + \delta g^n$$

其中

δf^b 表示加速度测量误差，同样和内参相关；

δg^n 表示重力误差，非高精度模型下可以直接忽略。

4) 第四步：把3)中的关系带入2)

$$\begin{aligned} \dot{V} + \delta \dot{V}^n \\ = (I - \phi \times) C_b^n (f^b + \delta f^b) + g^n \end{aligned}$$

5) 第五步：把1)中的关系带入4)

$$\begin{aligned} C_b^n f^b + g^n + \delta \dot{V}^n \\ = (I - \phi \times) C_b^n (f^b + \delta f^b) + g^n \end{aligned}$$

6) 第六步：化简方程

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n &\approx -(\phi \times) C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b \\ &= (f^n \times) \phi + \delta f^n \end{aligned}$$



惯性导航误差分析

4. 位置误差方程

1) 第一步：写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{P} = V$$

2) 第二步：写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{P}} = \tilde{V}$$

3) 第三步：写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{P} = P + \delta P$$

$$\tilde{V} = V + \delta V$$

4) 第四步：把3)中的关系带入2)，并进行化简

$$\dot{P} + \delta \dot{P} = V + \delta V$$

5) 第五步：把1)中的关系带入4)

$$V + \delta \dot{P} = V + \delta V$$

6) 第六步：化简方程

$$\delta \dot{P} = \delta V$$



惯性导航误差分析

5. 误差分析总结

- 1) 误差分析是惯导的“灵魂”，惯导几乎所有的现象都和这三个方程有关；
- 2) 误差分析的套路后面会多次用到，请务必掌握，且活学活用；
- 3) 误差分析除了用来推导状态和观测方程，另一个作用是辅助器件选型，根据导航精度的要求，反推器件精度。当然，若不想用复杂公式，仿真也可用来选型。

感谢聆听 !
Thanks for Listening

