深蓝学院
shenlanxueyuan.com

# 多传感器融合定位

## 第6章 基于图优化的建图方法

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者

# 目录


1. 基于预积分的融合方案流程
2. 预积分模型推导
3. 典型方案介绍
4. 融合编码器的优化方案

# 目录

1. 基于预积分的融合方案流程
2. 预积分模型推导
3. 典型方案介绍
4. 融合编码器的优化方案

# 基于预积分的融合方案流程

## 1. 优化问题分析

优化问题可以等效为如下形式

$$\min_{\mathbf{X}}\left\{\boxed{\sum\left\|\mathbf{r}_{L}\left(\boldsymbol{L}_{k}^{k+1},\mathbf{X}\right)\right\|^{2}}+\boxed{\sum\left\|\mathbf{r}_{B}\left(\boldsymbol{B}_{k}^{k+1},\mathbf{X}\right)\right\|^{2}}+\boxed{\sum\left\|\mathbf{r}_{G}\left(\boldsymbol{G}_{k},\boldsymbol{X}\right)\right\|^{2}}\right\}$$

**激光里程计约束** **IMU约束** **RTK约束**

三种约束分别通过以下方式获得

1) 激光里程计约束：使用激光里程计，计算每个关键帧位姿，进而得到相对位姿；

2) IMU约束：在上一个关键帧位姿基础上，进行惯性积分，从而得到两关键帧相对位姿；

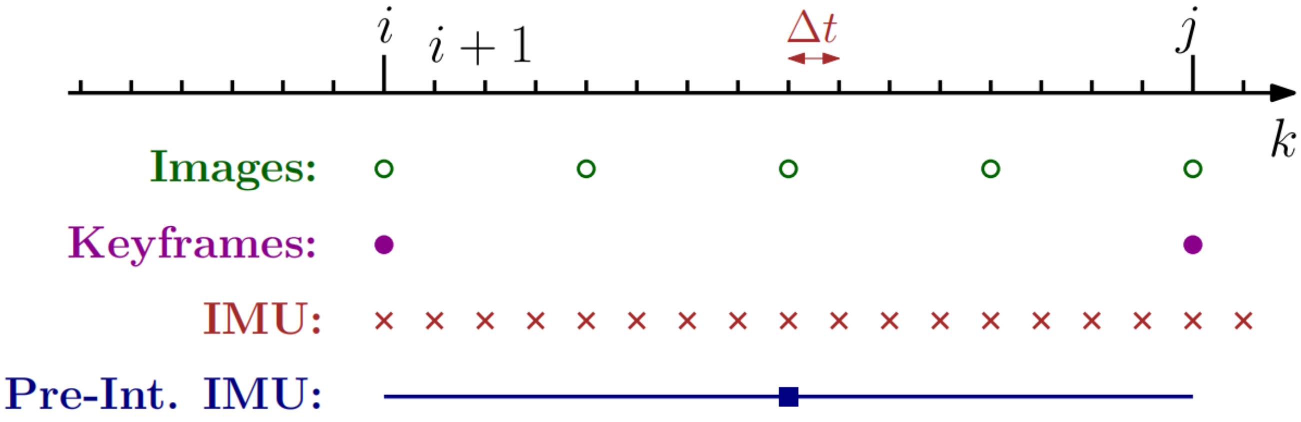
3) RTK约束：直接测量得到。

# 基于预积分的融合方案流程

## 2. 预积分的作用

**问题：**位姿每次优化后会发生变化，其后的IMU惯性积分就要重新进行，运算量过大

**解决思路：**直接计算两帧之间的相对位姿，而不依赖初始值影响，即所谓的预积分

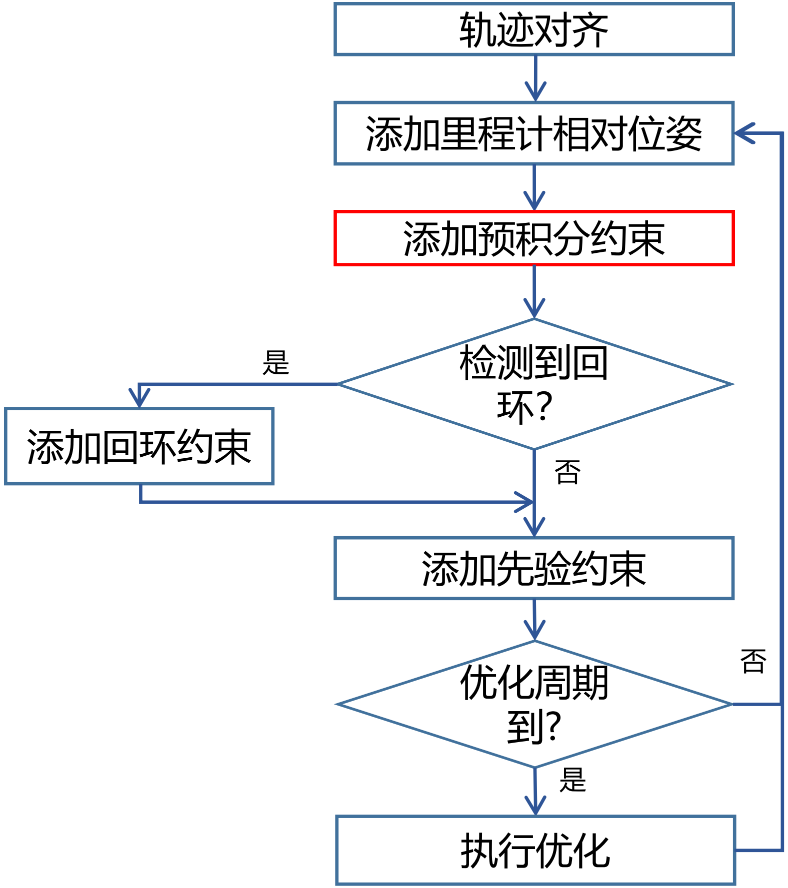


# 基于预积分的融合方案流程

## 3. 基于预积分的建图方案流程

由于此处讨论的优化方案包含组合导航系统，且认为外参已标定，因此会和常见的lio/vio中的方案有所不同，它不包含以下内容：

1) 初始化lidar和IMU之间的外参；
2) 初始化速度、陀螺仪bias等；
3) 初始化重力；
4) 世界坐标系对齐(组合导航已经对齐)。




点云地图建立流程图

# 目录

1. 基于预积分的融合方案流程

2. 预积分模型推导

3. 典型方案介绍

4. 融合编码器的优化方案

# 预积分模型推导

## 1. 预积分计算

在第三章中，已知导航的微分方程如下

$$\dot{\mathbf{p}}_{wb_t} = \mathbf{v}_t^w \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t^w = \mathbf{a}_t^w \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{wb_t} = \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \tag{3}$$

根据该微分方程，可知从 $i$ 时刻到 $j$ 时刻 IMU的积分结果为

$$\mathbf{p}_{wb_j} = \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \iint_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w\right) \delta t^2 \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_j^w = \mathbf{v}_i^w + \int_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w\right) \delta t \tag{5}$$

$$\mathbf{q}_{wb_j} = \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t \tag{6}$$

# 预积分模型推导

## 1. 预积分计算

根据预积分的要求，需要求的是相对结果，而且不依赖于上一时刻位姿，因此需要对上式做转换。

由于 $\mathbf{q}_{wb_t} = \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_ib_t}$ ，把它带入(4)-(6)式可得

$$\mathbf{p}_{wb_j} = \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \boxed{\iint_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{b_ib_t}\mathbf{a}^{b_t}\right) \delta t^2} \tag{7}$$

$$\mathbf{v}_j^w = \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \boxed{\int_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{b_ib_t}\mathbf{a}^{b_t}\right) \delta t} \tag{8}$$

$$\mathbf{q}_{wb_j} = \mathbf{q}_{wb_i} \boxed{\int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{b_ib_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t} \tag{9}$$

可见，此时需要积分的项，就完全和$i$时刻的状态无关了。

# 预积分模型推导

## 1. 预积分计算

为了整理公式，把积分相关的项用下面的式子代替

$$\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} = \iint_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{b_i b_t}\mathbf{a}^{b_t}\right)\delta t^2 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} = \int_{t\in[i,j]} \left(\mathbf{q}_{b_i b_t}\mathbf{a}^{b_t}\right)\delta t \tag{11}$$

$$\mathbf{q}_{b_i b_j} = \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t \tag{12}$$

实际使用中，都是使用离散形式，而非连续形式，由于在解算中，一般采用中值积分方法，即

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g\right) + \left(\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g\right)\right] \tag{13}$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_{b_i b_k}\left(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a\right) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}\left(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a\right)\right] \tag{14}$$

那么预积分的离散形式可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}} = \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_k} + \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\delta t^2 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} = \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \mathbf{a}\delta t \tag{16}$$

$$\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} = \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \tag{17}$$

# 预积分模型推导

## 1. 预积分计算

经过以上的推导，此时状态更新的公式可以整理为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} \\ \mathbf{v}_j^w \\ \mathbf{q}_{wb_j} \\ \mathbf{b}_j^a \\ \mathbf{b}_j^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{q}_{wb_i} \mathbf{q}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

需要注意的是，陀螺仪和加速度计的模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{k+1}^a &= \mathbf{b}_k^a + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_k^a} \delta t \\ \mathbf{b}_{k+1}^g &= \mathbf{b}_k^g + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_k^g} \delta t \end{aligned}$$

即认为bias是在变化的，这样便于估计不同时刻的bias值，而不是整个系统运行时间内都当做常值对待。这更符合低精度mems的实际情况。但在预积分时，由于两个关键帧之间的时间较短，因此认为$i$和$j$时刻的bias相等。

# 预积分模型推导

## 1. 预积分计算

需要注意的一点是，预积分的结果中包含了bias，在优化过程中，bias作为状态量也会发生变化，从而引起预积分结果变化。

为了避免bias变化后，重新做预积分，可以把预积分结果在bias处泰勒展开，表达成下面的形式，这样就可以根据bias的变化量直接算出新的预积分结果。

$$\boldsymbol{\alpha}_{b_ib_j} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{b_ib_j} + \mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^a}\delta\mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^g}\delta\mathbf{b}_i^g$$

$$\boldsymbol{\beta}_{b_ib_j} = \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b_ib_j} + \mathbf{J}^{\beta}_{b_i^a}\delta\mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}^{\beta}_{b_i^g}\delta\mathbf{b}_i^g$$

$$\mathbf{q}_{b_ib_j} = \bar{\mathbf{q}}_{b_ib_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^{q}_{b_i^g}\delta\mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^a} = \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_{b_ib_j}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^a}$$

$$\mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^g} = \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_{b_ib_j}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^g}$$

$$\mathbf{J}^{\beta}_{b_i^a} = \frac{\partial\boldsymbol{\beta}_{b_ib_j}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^a}$$

$$\mathbf{J}^{\beta}_{b_i^g} = \frac{\partial\beta_{b_ib_j}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^g}$$

$$\mathbf{J}^{q}_{b_i^g} = \frac{\mathbf{q}_{b_ib_j}}{\partial\mathbf{b}_i^g}$$

注：此处暂时不直接给出以上各雅可比的结果，它的推导放在后面进行。

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

在融合时，需要给不同信息设置权重，而权重由方差得来，因此对于IMU积分，也要计算其方差。方差的计算形式与第四章相同，即

$$\boldsymbol{P}_{i,k+1} = \mathbf{F}_k \boldsymbol{P}_{i,k} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{G}_k \boldsymbol{Q} \mathbf{G}_k^\top$$

但需注意的是，此处 $\boldsymbol{F}_k$和 $\boldsymbol{G}_k$是离散时间下的状态传递方程中的矩阵，而我们一般是在连续时间下推导微分方程，再用它计算离散时间下的传递方程。

连续形式下的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{X} + \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\alpha}_t^{b_k} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_t^{b_k} \\ \delta \boldsymbol{\beta}_t^{b_k} \\ \delta \boldsymbol{b}_{a_t} \\ \delta \boldsymbol{b}_{w_t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_a \\ \boldsymbol{n}_w \\ \boldsymbol{n}_{b_a} \\ \boldsymbol{n}_{b_w} \end{bmatrix}$$

以上变量排列顺序是为了与lio/vio等常见系统顺序保持一致。

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

推导方式仍然按照第三章所述固定套路进行

### 2.1 $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_t^{b_k}$ 的微分推导

简便起见，把 $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_t^{b_k}$ 写作 $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}$

1) 写出不考虑误差的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

2) 写出考虑误差的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_t - \tilde{\boldsymbol{b}}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

3) 写出带误差的值与理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_t = \boldsymbol{q}_t \otimes \delta\boldsymbol{q}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_{\omega_t} = \boldsymbol{b}_{\omega_t} + \delta\boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} cos(\frac{|\delta\theta|}{2}) \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{|\delta\theta|} sin(\frac{|\delta\theta|}{2}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

4) 将带误差的值与理想值之间的关系带入2)

$$(\boldsymbol{q}_t \dot{\otimes} \delta\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \delta\boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta\boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

其中

$$(\boldsymbol{q}_t \dot{\otimes} \delta\boldsymbol{q}) = \dot{\boldsymbol{q}}_t \otimes \delta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t \otimes \delta\dot{\boldsymbol{q}}$$

## 2. 预积分方差计算

5) 把1)中的关系带入4)

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{q}_t \dot{\otimes} \delta \boldsymbol{q}) \\
=&\dot{\boldsymbol{q}}_t \otimes \delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t \otimes \delta \dot{\boldsymbol{q}} \\
=&\frac{1}{2} \boldsymbol{q}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t \otimes \delta \dot{\boldsymbol{q}} \\
=&\frac{1}{2} \boldsymbol{q}_t \otimes \delta \boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

6) 化简方程

首先把5)中最后两行左乘 $(\boldsymbol{q}_t)^{-1}$ 并移项可得

$$
\begin{aligned}
\delta \dot{\boldsymbol{q}} =& \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix} \\
&- \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta \boldsymbol{q}
\end{aligned}
$$

根据第三章所讲，四元数相乘可以转换成矩阵与向量相乘

$$
P \otimes Q = M_P Q = M_Q' P
$$

$$
M_P = \begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_v & p_0 \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{p}_v]_\times \end{bmatrix}
$$

$$
M_Q' = \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_v & q_0 \boldsymbol{I} - [\boldsymbol{q}_v]_\times \end{bmatrix}
$$

不妨把$M_P$和$M_Q'$分别称为左矩阵和右矩阵，分别用$[*]_L$和$[*]_R$代替。因此方程可以进一步化简。

# 2. 预积分方差计算

令

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

则

$$\begin{aligned}\delta \dot{\boldsymbol{q}} =& \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{bmatrix}_R \delta \boldsymbol{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}_L \delta \boldsymbol{q} \\ =& \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) & -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{q}\end{aligned}$$

由于

$$\delta \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}}{2} \end{bmatrix}$$

把它代入上式，又可以得到

$$\begin{aligned}\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} =& -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \\ =& -[2\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - 2\boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t}]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} \\ &+ \boldsymbol{n}_\omega - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t}\end{aligned}$$

忽略其中的二阶小项，可得

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}]_\times \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}_\omega - \delta \boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

# 2. 预积分方差计算

## 2.2 $\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}_t^{b_k}$ 的微分推导

简便起见，把 $\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}_t^{b_k}$ 写作 $\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}$

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t})$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \tilde{\boldsymbol{R}}_t(\tilde{\boldsymbol{a}}_t - \tilde{\boldsymbol{b}}_{a_t})$$

3) 写出真实值和理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta} \qquad \tilde{\boldsymbol{a}}_t = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}_t &= \boldsymbol{R}_t exp([\delta\boldsymbol{\theta}]_\times) \\ &= \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)\end{aligned} \qquad \tilde{\boldsymbol{b}}_{a_t} = \boldsymbol{b}_{a_t} + \delta\boldsymbol{b}_{a_t}$$

4) 将3)中的关系带入2)

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\beta}} + \delta\dot{\boldsymbol{\beta}} \\ =&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{b}_{a_t} - \delta\boldsymbol{b}_{a_t})\end{aligned}$$

5) 将1)中的关系带入4)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}) + \delta\dot{\boldsymbol{\beta}} \\ =&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{b}_{a_t} - \delta\boldsymbol{b}_{a_t})\end{aligned}$$

6) 化简方程(忽略二阶小项)

$$\begin{aligned}&\delta\dot{\boldsymbol{\beta}} \\ =&\boldsymbol{R}_t[\delta\boldsymbol{\theta}]_\times(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}) + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_{a_t}) \\ =&-\boldsymbol{R}_t[\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_{a_t})\end{aligned}$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

### 2.3 $\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_t^{b_k}$ 的微分推导

简便起见，把 $\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_t^{b_k}$ 写作 $\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}$

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta}$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$$

4) 把3)中的关系带入2)

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \delta\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$$

5) 把1)中的关系带入4)

$$\boldsymbol{\beta} + \delta\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$$

6) 化简方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \delta\boldsymbol{\beta}$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

得到连续时间微分方程以后，就可以计算离散时间的递推方程了，表示为

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{N}_k$$

其中

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} \\ \delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{k+1} \\ \delta\boldsymbol{b}_{a_{k+1}} \\ \delta\boldsymbol{b}_{\omega_{k+1}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_k = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_k \\ \delta\boldsymbol{\theta}_k \\ \delta\boldsymbol{\beta}_k \\ \delta\boldsymbol{b}_{a_k} \\ \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_{a_k} \\ \boldsymbol{n}_{w_k} \\ \boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\ \boldsymbol{n}_{w_{k+1}} \\ \boldsymbol{n}_{b_a} \\ \boldsymbol{n}_{b_w} \end{bmatrix}$$

# 2. 预积分方差计算

## 2.4 $\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 的求解

由于连续时间下有

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\left[\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}\right]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}_\omega - \delta\boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

则离散时间下应该有

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_k = -\left[\frac{\boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}_{k+1}}{2} - \boldsymbol{b}_{\omega_t}\right]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{n}_\omega - \delta\boldsymbol{b}_{\omega_t}$$

因此有

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \left[\boldsymbol{I} - \left[\frac{\boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}_{k+1}}{2} - \boldsymbol{b}_{\omega_k}\right]_\times \delta t\right] \delta\boldsymbol{\theta}_k + \delta t \frac{\boldsymbol{n}_{\omega_k} + \boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}}}{2} - \delta t \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k}$$

另 $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}_{k+1}}{2} - \boldsymbol{b}_{\omega_k}$，则上式可以重新写为

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \left[\boldsymbol{I} - \left[\bar{\boldsymbol{\omega}}\right]_\times \delta t\right] \delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{n}_{\omega_k} + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} - \delta t \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k}$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

### 2.5 $\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 的求解

由于连续时间下有

$$\delta\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{R}_t[\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_{a_t})$$

则离散时间下应该有

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}_k = & -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_k \\
& -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} \\
& +\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{n}_{a_k} \\
& +\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
& -\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

### 2.5 $\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 的求解

把2.4中求得的 $\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 的表达式代入上式，可得

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}_k = & -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\delta\boldsymbol{\theta}_k \\
& -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\left\{[\boldsymbol{I} - [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times\delta t]\,\delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{n}_{\omega_k} + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} - \delta t\delta\boldsymbol{b}_{\omega_k}\right\} \\
& +\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{n}_{a_k} \\
& +\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
& -\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}
$$

# 2. 预积分方差计算

## 2.5 $\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 的求解

经过一系列合并同类项以后，最终的合并结果为

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\beta}}_k = &-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times+\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\left(\boldsymbol{I}-[\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times\delta t\right)\right]\delta\boldsymbol{\theta}_k \\
&-\frac{\delta t}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\boldsymbol{n}_{\omega_k} \\
&-\frac{\delta t}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} \\
&+\frac{\delta t}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\delta\boldsymbol{b}_{\omega_k} \\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{n}_{a_k} \\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
&-\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}
$$

## 2. 预积分方差计算

### 2.5 $\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 的求解

由导数形式可以得到递推形式如下

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1} =& \delta\boldsymbol{\beta}_k \\
& - \frac{\delta t}{2}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times + \boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\left(\boldsymbol{I} - [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times \delta t\right)\right]\delta\boldsymbol{\theta}_k \\
& - \frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_k} \\
& - \frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} \\
& + \frac{\delta t^2}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k} \\
& + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{n}_{a_k} \\
& + \frac{\delta t}{2}\boldsymbol{R}_{k+1} \boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
& - \frac{\delta t}{2}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}
$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

### 2.6 $\delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 的求解

由于连续时间下有 $\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_t = \delta\boldsymbol{\beta}_t$，则离散时间下应该有

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k =& \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\beta}_k + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\beta}_{k+1} \\
=& \delta\boldsymbol{\beta}_k \\
& - \frac{\delta t}{4}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times + \boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\left(\boldsymbol{I} - [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times \delta t\right)\right]\delta\boldsymbol{\theta}_k \\
& - \frac{\delta t^2}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_k} \\
& - \frac{\delta t^2}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} \\
& + \frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k} \\
& + \frac{\delta t}{4}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{n}_{a_k} \\
& + \frac{\delta t}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
& - \frac{\delta t}{4}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}
$$

# 预积分模型推导

## 2. 预积分方差计算

### 2.6 $\delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 的求解

由导数形式可以写出递推形式

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} =& \delta\boldsymbol{\alpha}_k \\
& + \delta t \delta\boldsymbol{\beta}_k \\
& - \frac{\delta t^2}{4}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times + \boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\left(\boldsymbol{I} - [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times \delta t\right)\right]\delta\boldsymbol{\theta}_k \\
& - \frac{\delta t^3}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_k} \\
& - \frac{\delta t^3}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \boldsymbol{n}_{\omega_{k+1}} \\
& + \frac{\delta t^3}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{a_k}]_\times \delta\boldsymbol{b}_{\omega_k} \\
& + \frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{n}_{a_k} \\
& + \frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1} \boldsymbol{n}_{a_{k+1}} \\
& - \frac{\delta t^2}{4}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1})\delta\boldsymbol{b}_{a_k}
\end{aligned}
$$

## 2. 预积分方差计算

由以上的推导结果，便可以写出 $\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{N}_k$ 中的矩阵

$$\mathbf{F}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{f}_{12} & \mathbf{I}\delta t & -\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{R}_{k+1}\right)\delta t^2 & \mathbf{f}_{15}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}-[\bar{\boldsymbol{\omega}}]_\times\delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}\delta t\\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{32} & \mathbf{I} & -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{R}_{k+1}\right)\delta t & \mathbf{f}_{35}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_k=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\boldsymbol{R}_k\delta t^2 & \mathbf{g}_{12} & \frac{1}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}\delta t^2 & \mathbf{g}_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{R}_k\delta t & \mathbf{g}_{32} & \frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}\delta t & \mathbf{g}_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t\end{bmatrix}$$

## 2. 预积分方差计算

上面的矩阵中，有

$$\boldsymbol{f}_{12}=-\frac{\delta t^2}{4}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times+\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times(\boldsymbol{I}-[\overline{\boldsymbol{\omega}}]_\times\delta t)\right]$$

$$\boldsymbol{f}_{15}=\frac{\delta t^3}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times\delta\boldsymbol{b}_{\omega_k}$$

$$\boldsymbol{f}_{32}=-\frac{\delta t}{2}\left[\boldsymbol{R}_k[\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times+\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times(\boldsymbol{I}-[\overline{\boldsymbol{\omega}}]_\times\delta t)\right]$$

$$\boldsymbol{f}_{35}=\frac{\delta t^2}{2}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times$$

$$\boldsymbol{g}_{12}=-\frac{\delta t^3}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times$$

$$\boldsymbol{g}_{14}=-\frac{\delta t^3}{8}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times$$

$$\boldsymbol{g}_{32}=-\frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times$$

$$\boldsymbol{g}_{34}=-\frac{\delta t^2}{4}\boldsymbol{R}_{k+1}[\boldsymbol{a}_{k+1}-\boldsymbol{b}_{a_k}]_\times$$

# 预积分模型推导

## 3. 预积分更新

回到bias变化时，预积分结果怎样重新计算的问题，再次给出它的泰勒展开形式：

$$\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} = \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} + \mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^a} \delta \mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}^{\alpha}_{b_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g$$

$$\boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} = \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} + \mathbf{J}^{\beta}_{b_i^a} \delta \mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}^{\beta}_{b_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g$$

$$\mathbf{q}_{b_i b_j} = \mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}^{q}_{b_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

这里，雅可比没有明确的闭式解，但是在推导方差的更新时，我们得到了

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{N}_k$$

通过该递推形式，可以知道

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{J}_k$$

即预积分结果的雅可比，可以通过这种迭代方式计算。

$\boldsymbol{J}_j$ 中关于bias的项，就是预积分泰勒展开时，各bias对应的雅可比。

## 4. 残差雅可比的推导

在优化时，需要知道残差关于状态量的雅可比。由于已知姿态位姿更新的方法如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} \\ \mathbf{q}_{wb_j} \\ \mathbf{v}_j^w \\ \mathbf{b}_j^a \\ \mathbf{b}_j^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ \mathbf{q}_{wb_i} \mathbf{q}_{b_i b_j} \\ \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

因此，可以很容易写出一种残差形式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} - \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 - \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ 2\left[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \left(\mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j}\right)\right]_{xyz} \\ \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t - \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

## 4. 残差雅可比的推导

但是和预积分相关的量，仍然与上一时刻的姿态有关，无法直接加减，因此，把残差修正为以下形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{wb_i}^* \left(\mathbf{p}_{wb_j} - \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2\right) - \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ 2\left[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \left(\mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j}\right)\right]_{xyz} \\ \mathbf{q}_{wb_i}^* \left(\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t\right) - \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

待优化的变量是 $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_i} & \mathbf{q}_{wb_i} & \mathbf{v}_i^w & \mathbf{b}_i^a & \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} & \mathbf{q}_{wb_j} & \mathbf{v}_j^w & \mathbf{b}_j^a & \mathbf{b}_j^g \end{bmatrix}$

但在实际使用中，往往都是使用扰动量，因此，实际是对以下变量求雅可比

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_{wb_i} & \delta\theta_{wb_i} & \delta\mathbf{v}_i^w & \delta\mathbf{b}_i^a & \delta\mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_{wb_j} & \delta\theta_{wb_j} & \delta\mathbf{v}_j^w & \delta\mathbf{b}_j^a & \delta\mathbf{b}_j^g \end{bmatrix}$$

此处只对几个比较复杂的雅可比进行推导，其余比较简单，感兴趣的可自行完成。

# 4. 残差雅可比的推导

## 4.1 姿态残差的雅可比

1)对$i$时刻姿态误差的雅可比

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial 2\left[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes \left(\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{w b_j}\right)\right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial 2\left[\mathbf{q}_{b_i b_j}^{*} \otimes \left(\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}\right)^{*} \otimes \mathbf{q}_{w b_j}\right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial -2\left[\left(\mathbf{q}_{b_i b_j}^{*} \otimes \left(\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}\right)^{*} \otimes \mathbf{q}_{w b_j}\right)^{*}\right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial -2\left[\mathbf{q}_{w b_j}^{*} \otimes \left(\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}\right) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}\right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}}
\end{aligned}
$$

# 4. 残差雅可比的推导

## 4.1 姿态残差的雅可比

上式可以化简为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \left( \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix} \right) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial \left[ \mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \right]_L \left[ \mathbf{q}_{b_i b_j} \right]_R \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[ \mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \right]_L \left[ \mathbf{q}_{b_i b_j} \right]_R \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# 4. 残差雅可比的推导

## 4.1 姿态残差的雅可比

2)对$j$时刻姿态误差的雅可比

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} &= \frac{\partial 2 \left[ \mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'} \end{bmatrix} \right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} \\
&= \frac{\partial 2 \left[ \left[ \mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j} \right]_L \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'} \end{bmatrix} \right]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[ \mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j} \right]_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# 预积分模型推导

## 4. 残差雅可比的推导

### 4.1 姿态残差的雅可比

3)对$i$时刻陀螺仪bias误差的雅可比

$$\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} = \frac{\partial 2\left[\left(\mathbf{q}_{b_ib_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}\right)^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j}\right]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$$

$$= \frac{\partial -2\left[\left(\left(\mathbf{q}_{b_ib_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}\right)^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j}\right)^*\right]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$$

$$= \frac{\partial -2\left[\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \left(\mathbf{q}_{b_ib_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}\right)\right]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$$

$$= -2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\left[\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_ib_j}\right]_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g} \end{bmatrix}$$

# 预积分模型推导

## 4. 残差雅可比的推导

### 4.2 速度残差的雅可比

1)对$i$时刻姿态误差的雅可比

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial \left( \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial \left( \mathbf{R}_{wb_i} \exp \left( \left[ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \right]_\times \right) \right)^{-1} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial \exp \left( \left[ -\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \right]_\times \right) \mathbf{R}_{b_i w} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial \left( \mathbf{I} - \left[ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \right]_\times \right) \mathbf{R}_{b_i w} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial - \left[ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \right]_\times \mathbf{R}_{b_i w} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \left[ \mathbf{R}_{b_i w} \left( \mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t \right) \right]_\times
\end{aligned}
$$

# 4. 残差雅可比的推导

## 4.2 速度残差的雅可比

2)对$i$时刻速度误差的雅可比

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{v}_i^w} = -\mathbf{R}_{b_i w}$$

3)对$i$时刻加速度bias误差的雅可比

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\mathbf{J}_{b_i^a}^{\beta}$$

## 4.3 位置残差的雅可比

由于位置残差的形式与速度残差极其相似，因此不再重复推导。

# 目录

1. 基于预积分的融合方案流程

2. 预积分模型推导

3. 典型方案介绍

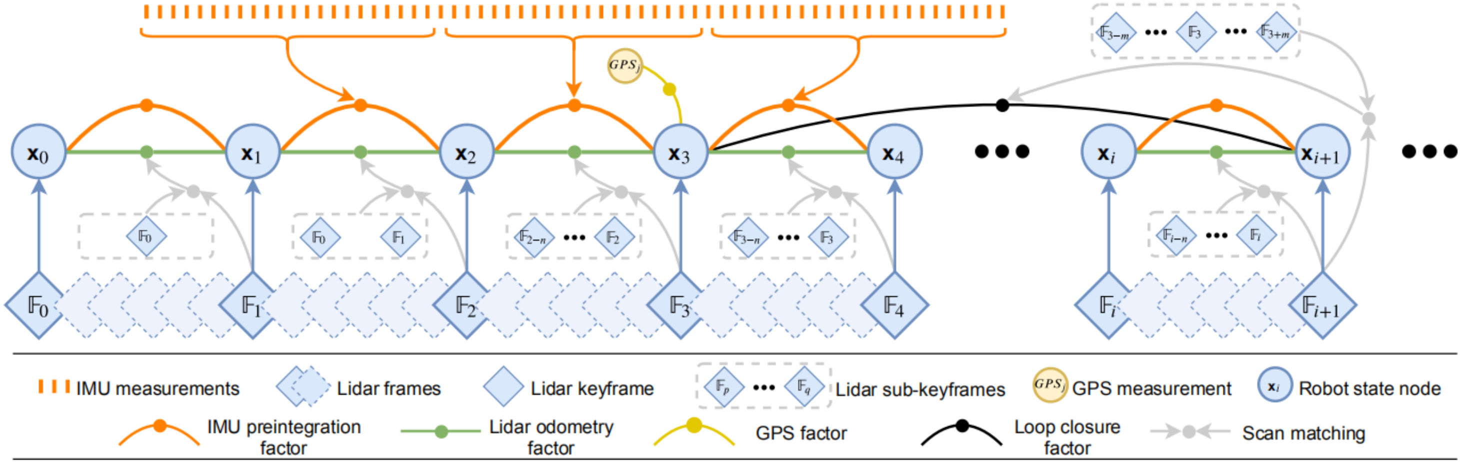
4. 融合编码器的优化方案

# 典型方案介绍

## 1. LIO-SAM介绍

论文名称：LIO-SAM: Tightly-coupled Lidar Inertial Odometry via Smoothing and Mapping

代码地址：https://github.com/TixiaoShan/LIO-SAM



# 典型方案介绍

## 1. LIO-SAM介绍

最大特点：分两步完成，先通过点云特征计算出相对位姿，再利用相对位姿、IMU预积分和GPS做融合。相比于直接一步做紧耦合，大大提高了效率，而且实测性能也很优异。

代码讲解环节：讲解LIO-SAM代码

# 目录


1. 基于预积分的融合方案流程
2. 预积分模型推导
3. 典型方案介绍
4. 融合编码器的优化方案

# 融合编码器的优化方案

## 1. 整体思路介绍

理论上，只要是在载体系下测量，且频率比关键帧的提取频率高，就都可以做预积分。

编码器同样满足这个条件，只不过它测量的信息和原理与IMU略有不同。

编码器的预积分推导留作作业

# 作业

**作业1：** 推导基于编码器的预积分方法，包括：

1) 预积分模型

2) 预积分残差的设计

3) 预积分方差的递推

4) 预积分对各状态量扰动的雅可比

推导思路可参考论文：VINS on wheels

**作业2**（选做，并且可推迟到最后与大作业一起提交）：

使用仿真数据(或你可以找到的实验数据)，验证作业1的模型是否准确。

**大作业(建图部分)：**

在kitti中实现结合预积分融合的建图。

# 感谢聆听！

Thanks for Listening