深蓝学院
shenlanxueyuan.com

多传感器融合定位

第3章 惯性导航基础（拾遗）

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者

目录

目录

1. 地球模型

地球近似为椭球体，长轴在赤道平面上，短轴在南北极连线上。

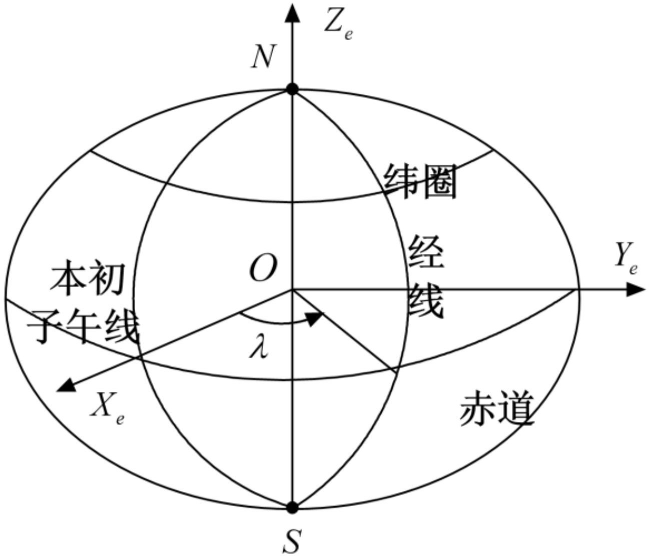
1) **子午面**：南北极点的平面；

2) **子午圈(经圈)**：子午面与椭球的交线；

3) **本初子午线(零度经线)**: 通过英国格林尼治的经线；

4) **经度**：任一经线所在子午面与本初子午面之间的夹角；

5) **纬圈**：平行于赤道面的平面与椭球面的交线。



地球椭球模型

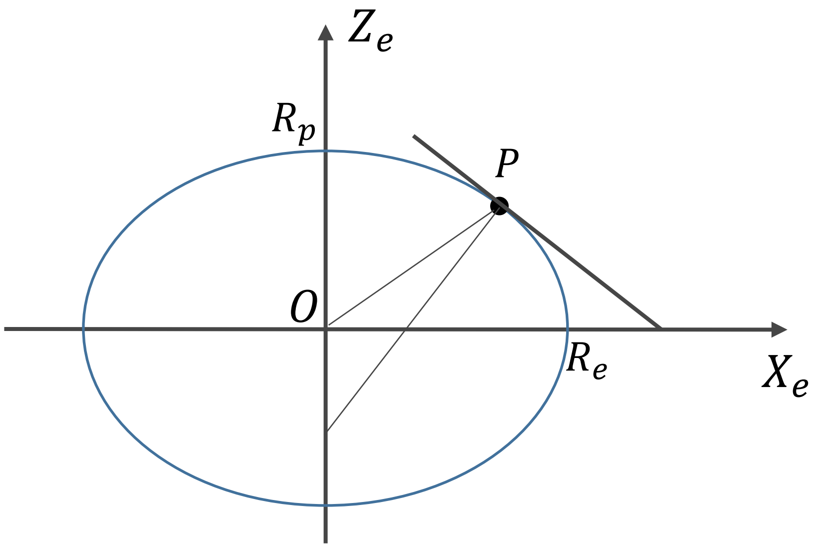
1. 地球模型

6) **地心纬度**：地球上一点和地心连线与赤道平面的夹角

7) **地理纬度**：地球上一点的法线与赤道平面的夹角。平时所说纬度均指地理纬度

图中 R_e 和 R_p 分别是椭球的长半轴和短半轴,与之相关的参数是地球的曲率，其计算方法为:

$$e = \frac{\sqrt{R_e^2 - R_p^2}}{R_e}$$



子午圈椭圆

2. 坐标系

1) 地心惯性坐标系(ECI)：原点在地心，x指向春分点，即黄道平面(地球绕太阳公转的平面)与赤道交点，z指向北极。

2) 地心地固坐标系(ECEF系，也叫e系)：原点在地心，x指向0经度0纬度点（本初子午线和赤道交点），z指向北极。

3) 地理坐标系(g系)：原点在地球上一点，x、y、z分别指向东、北、天。

4) 导航坐标系(n系)：惯性导航中，常常把地理坐标系规定为导航坐标系，那个“地球上一点”指的就是载体所在的点。

5) 载体坐标系(b系)：原点在载体上，x、y、z时常规定为 “右、前、上” 或 “前、左、上” 。

3. 高精度惯性导航解算

所谓高精度惯性导航，指的就是精确考虑地球模型的导航方法，主要体现在以下几个方面。

1) 姿态解算中的体现

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times\right) - \left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times\right) \boldsymbol{C}_b^n$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie}\cos L & \omega_{ie}\sin L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\dfrac{v_N}{R_M + h} & \dfrac{v_E}{R_N + h} & \dfrac{v_E}{R_N + h}\tan L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 的含义是，载体在地球上移动时，等同于绕地球旋转，会产生旋转角速度。由于R_M和R_N的推导过程较为复杂，此处直接给出结论：

$$R_N = \frac{R_e}{\sqrt{1-e^2\sin^2 L}}$$

$$R_M = \frac{R_e\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 L\right)^{3/2}}$$

3. 高精度惯性导航解算

所谓高精度惯性导航，指的就是精确考虑地球模型的导航方法，主要体现在以下几个方面。

2) 速度解算中的体现

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{n}=\boldsymbol{C}_{b}^{n}\boldsymbol{f}^{b}-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\boldsymbol{v}_{en}^{n}+\boldsymbol{g}^{n}$$

其中

$2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\times\boldsymbol{v}_{en}^{n}$ 是由载体运动和地球自转引起的哥氏加速度。

$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\times\boldsymbol{v}_{en}^{n}$ 是由载体绕地球运动形成的向心加速度。

3. 高精度惯性导航解算

所谓高精度惯性导航，指的就是精确考虑地球模型的导航方法，主要体现在以下几个方面。

3) 位置解算中的体现

$$\dot{L} = \frac{1}{R_M + h} v_N^n$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\sec L}{R_N + h} v_E^n$$

$$\dot{h} = v_U^n$$

4. 高精度惯性导航误差方程

此处不给出推导过程，只给出其结果，目的是为了展示高精度导航里面模型有多复杂，从而证明简化模型的必要性。

1) 姿态误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}$$

2) 速度误差方程

$$\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{n} = \boldsymbol{f}^{n} \times \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{v}^{n} \times (2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^{n}) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times \boldsymbol{\delta v}^{n} + \boldsymbol{\delta f}_{sf}^{n} + \boldsymbol{\delta g}^{n}$$

3) 位置误差方程

$$\delta\dot{L} = \frac{1}{R_M + h}\delta v_N - \frac{v_N}{(R_M + h)^2}\delta h$$

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{\sec L}{R_N + h}\delta v_E + \frac{v_E \sec L \tan L}{R_N + h}\delta L - \frac{v_E \sec L}{(R_N + h)^2}\delta h$$

$$\delta\dot{h} = \delta v_U$$

目录

简化版坐标系

1. 为什么要简化

1) 多数多传感器融合定位任务都是在几公里范围内的小场景下，此时可以简单认为是平面，而没必要把地球模型考虑进来。

2) 在完整版模型中，很多是小量(比如哥式加速度、向心加速度、绕地球运动形成的角速度等)，而当器件精度较低时，这些小的补偿量，还没有器件自身的随机游走误差大，那么考虑他们就没太多意义。

2. 简化思路

1) 待定位区域的一个经纬度点为原点，建立一个平面坐标系(也就是SLAM系统中常说的世界坐标系，即w系，为了和地理系对齐，方向仍取 东-北-天)，从而融合过程中所有的坐标都是相对于它的 x、y、z 值，而不是经纬度。

2) 直接忽略那些小的补偿量。

简化版坐标系

3. 简化版坐标系下的模型

1) 姿态解算

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^w = \boldsymbol{C}_b^w \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times\right)$$

2) 速度解算

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^w = \boldsymbol{C}_b^w \boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{g}^n$$

3) 位置解算

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{wb}^w = \boldsymbol{v}_{wb}^w$$

简化版坐标系

4. 简化版坐标系下的误差方程

1) 姿态误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}$$

2) 速度误差方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^{w} = \boldsymbol{f}^{w} \times \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{g}^{w}$$

其中 $\delta\boldsymbol{g}^{w}$ 有的考虑，有的不考虑

3) 位置误差方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}}_{wb}^{w} = \delta\boldsymbol{v}_{wb}^{w}$$

简化版坐标系

5. 使用中等精度imu时的方法

有些器件，既没有高精度惯导那么好，但也没有vio/lio里所使用的那么差。此时，直接使用低精度模型，有点可惜。

举例：

陀螺仪精度是 $6^\circ/h$ ，地球自转角速度在北京地区的水平分量大概是$12^\circ/h$，天向分量大概是$10^\circ/h$，在把bias作为状态量取估计时，如果强行忽略地速，相当于忽略掉的误差比器件本身误差还大，也就是说无法发挥器件本身的精度。

其他被忽略的误差项，包括绕地球运动引起的旋转、哥式加速度、向心加速度同样会对和该误差精度相当的IMU产生干扰，影响器件精度发挥。

一个简便但不严谨的解决办法：

在器件输出上直接补偿这些误差项，比如在陀螺仪输出上先减去地速的分量，再去解算。好处是不会影响后面的解算和误差方程。

具体补偿哪些量，要看器件误差是否已经和这些误差项大小相当。

为了方便后面介绍，统一把直接忽略所有误差项的做法叫做“舍弃法”，把在器件输出上做补偿的方法叫做“前补偿法”。

目录

简化版坐标系中的组合导航

1. 组合导航的特殊性

此处，组合导航是指只有位置和速度观测的传统组合导航。

第四、五章所述观测性和观测度分析均针对组合导航来说，和KITTI下基于点云做定位无关，因为同时有了位置和姿态观测后，所有状态量都是可观测的。

地球自转角速度这个矢量是观测性和观测度分析的基础，没有它，组合导航中大多数观测性和观测度分析都是不必要的，而且很多组合导航现象也无法解释。

因此，本课程里，为了且仅为了解释组合导航及其观测性，才在导航模型中引入了地速，后面KITTI中的实验可以完全忽略地速模型，而直接采用“前补偿法”，甚至“舍弃法”。

简化版坐标系中的组合导航

2. 怎样在简化版坐标系下引入地速

一个简单而不严谨的做法是，只在姿态解算中引入，而速度和位置解算中直接忽略。

1) 姿态解算中的体现

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times\right) - \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times\right) \boldsymbol{C}_b^n$$

并且在姿态解算中直接另

$$\boldsymbol{C}_b^w = \boldsymbol{C}_b^n$$

其物理意义是，认为整个本地平面坐标系随地球自转，而不是这个平面系内部每个点都对应一个导航系。

2) 速度解算

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^w = \boldsymbol{C}_b^w \boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{g}^n$$

3) 位置解算

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{wb}^w = \boldsymbol{v}_{wb}^w$$

简化版坐标系中的组合导航

3. 简化版坐标系下组合导航误差模型

1) 姿态误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} - \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}$$

2) 速度误差方程

$$\delta \dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^{w} = \boldsymbol{f}^{w} \times \boldsymbol{\phi}$$

3) 位置误差方程

$$\delta \dot{\boldsymbol{p}}_{wb}^{w} = \delta \boldsymbol{v}_{wb}^{w}$$

4. 本课程中的坐标系选择

1) 凡是提及观测性、观测度和组合导航的，均是指此处的简化版坐标系下组合导航。

2) KITTI中指的是“前补偿法”或“舍弃法”，因为二者误差模型没有差异，因此选用哪种，由各位自行决定。后面提到KITTI中的解算时，不区分使用哪一种。

目录

作业第四题讲解

1. 目的及思路

作业目的：熟悉惯性导航解算，并对比以下两种方法对姿态解算精度的影响。

姿态解算方程：$C_{b(m)}^{i} = C_{b(m-1)}^{i}\left(I + \frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2\right)$

方法一：$\boldsymbol{\phi}(T) = (\Delta\boldsymbol{\theta}_1 + \Delta\boldsymbol{\theta}_2) + \frac{2}{3}\Delta\boldsymbol{\theta}_1 \times \Delta\boldsymbol{\theta}_2$

方法二：$\boldsymbol{\phi}(\frac{T}{2}) = \Delta\boldsymbol{\theta}_1$

整体思路：给定导航的真值，仿真器件数据，并注意

1) 不能仿定轴转动的数据，不然姿态解算没有对比效果；

2) 两种方法对比，不必限定是哪种坐标系模型，只要对比时的两次解算选用的是同一种即可。

2. 实现中的注意细节

由于速度和位置的解算很简单，因此，此处只说明姿态的数据仿真与解算。

第一步介绍的是原始数据仿真原理，如果用gnss-ins-sim实现，不必自己写这个仿真程序。

1) 姿态真值

仿真得有真值，且不能是定轴转动，因此先按以下方式产生欧拉角

俯仰角 $\alpha_t = A_\alpha sin(\omega_\alpha t)$

横滚角 $\beta_t = A_\beta sin(\omega_\beta t)$

航向角 $\gamma_t = A_\gamma sin(\omega_\gamma t)$

再由欧拉角计算旋转矩阵

$$\boldsymbol{C}_{b_t}^{w} = \begin{bmatrix} cos(\gamma_t) & -sin(\gamma_t) & 0 \\ sin(\gamma_t) & cos(\gamma_t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_t) & -sin(\alpha_t) \\ 0 & sin(\alpha_t) & cos(\alpha_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\beta_t) & 0 & sin(\beta_t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta_t) & 0 & cos(\beta_t) \end{bmatrix}$$

作业第四题讲解

2. 实现中的注意细节

2) 由姿态真值仿真对应的角速度

取采样时刻前后各一小段时间，得到对应的真实姿态矩阵

$$\boldsymbol{C}_{b_{t1}}^{w} = \begin{bmatrix} cos(\gamma_{t_1}) & -sin(\gamma_{t_1}) & 0 \\ sin(\gamma_{t_1}) & cos(\gamma_{t_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_{t_1}) & -sin(\alpha_{t_1}) \\ 0 & sin(\alpha_{t_1}) & cos(\alpha_{t_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\beta_{t_1}) & 0 & sin(\beta_{t_1}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta_{t_1}) & 0 & cos(\beta_{t_1}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{b_{t2}}^{w} = \begin{bmatrix} cos(\gamma_{t_2}) & -sin(\gamma_{t_2}) & 0 \\ sin(\gamma_{t_2}) & cos(\gamma_{t_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_{t_2}) & -sin(\alpha_{t_2}) \\ 0 & sin(\alpha_{t_2}) & cos(\alpha_{t_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\beta_{t_2}) & 0 & sin(\beta_{t_2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta_{t_2}) & 0 & cos(\beta_{t_2}) \end{bmatrix}$$

$$t1 = t - \Delta t$$

$$t2 = t + \Delta t$$

作业第四题讲解

2. 实现中的注意细节

根据真实姿态，计算该时间段内的姿态变化

$$\boldsymbol{C}_{b_{t2}}^{b_{t1}} = \left(\boldsymbol{C}_{b_{t1}}^{w}\right)^{T} \boldsymbol{C}_{b_{t2}}^{w}$$

在小角度情况下，有近似关系为

$$\boldsymbol{C}_{b_{t2}}^{b_{t1}} = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

并且可近似认为

$$\phi_x = 2\omega_x \Delta t$$
$$\phi_y = 2\omega_y \Delta t$$
$$\phi_z = 2\omega_z \Delta t$$

由此，便可以反推出采样时刻对应的角速度。

需要注意的是，在姿态解算中，只使用角增量当做转动矢量会精度不够，而由姿态真值仿真角速度时却近似认为角增量等于转动矢量，不矛盾吗？

区别在于时间间隔，假如100HZ解算，即周期为10ms，那么仿真时，如果 $2\Delta t$ 的取值远小于10ms，那么我们在 $2\Delta t$ 内认为是定轴转动，和在10ms内认为是非定轴转动，就没有矛盾了。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！

Thanks for Listening