深蓝学院
shenlanxueyuan.com

机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔，谢晓佳等 译
Slides by Xiang Gao

2020年春

第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松驰化

内容回顾

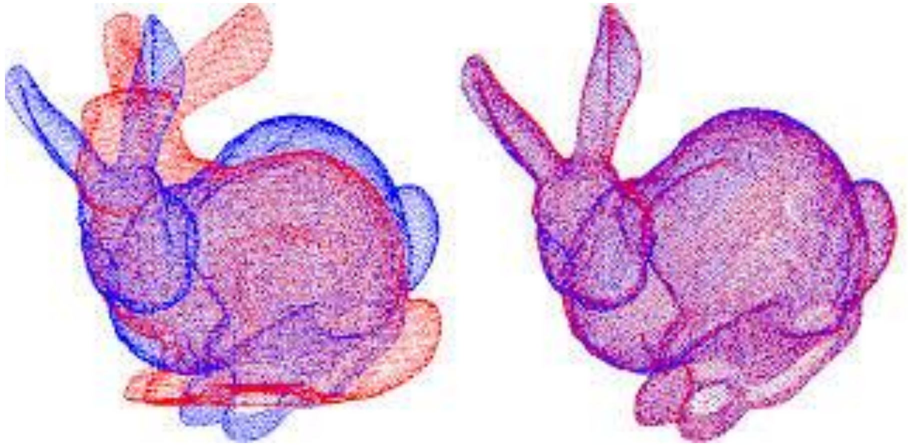
- 前面我们介绍了
  - 通常向量空间的状态估计理论
  - 三维空间的矩阵李群
- 本节课与下节课
  - 该领域内的一些典型问题比如点云配准/SLAM等
  - 本章重点将放在前两个问题上，尤其是第二个问题
  - 由于书本没有课后习题，我们将这里的一些推导作为习题

第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松驰化

点云对准

- 点云对准：通过最小二乘来解决两个三维点云之间的对准问题
- 常见的场景：激光Odom，点云拼接等



常见的解法是ICP
不过旋转部分可以用各种不同方式来表达

- 四元数
- 旋转矩阵
- 变换矩阵

点云对准

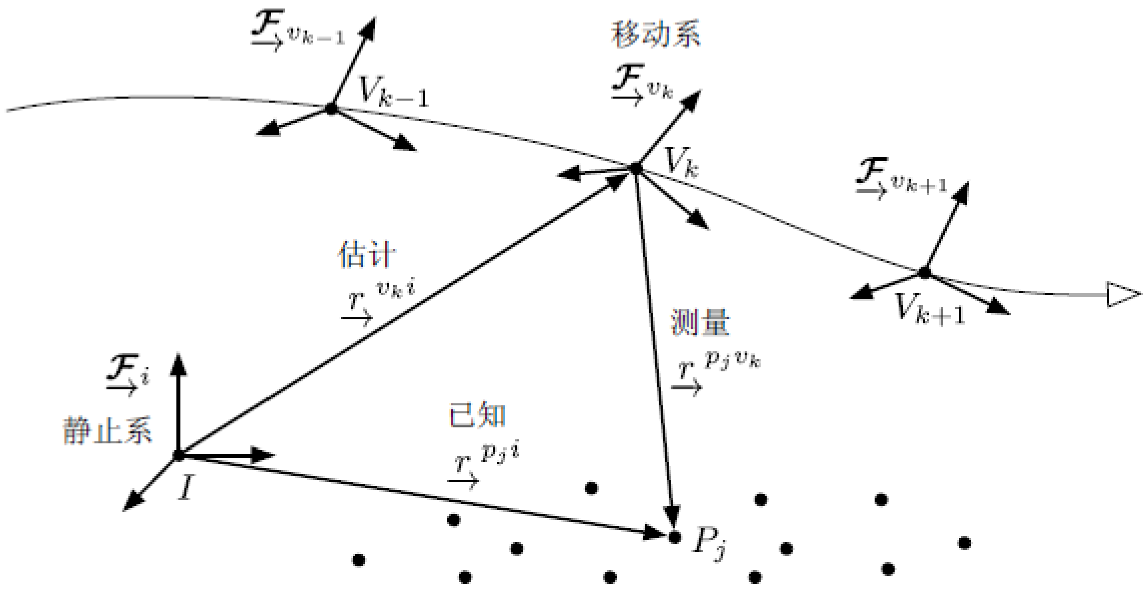
- 点云对准问题
- 背景：

惯性系：$\underrightarrow{\mathcal{F}}_i$
机器人系：$\underrightarrow{\mathcal{F}}_{v_k}$ 并随时间运动

存在M个点：P_j ，j=1, ..., M

这些点在i系下坐标已知：$r_i^{p_j i}$
机器人对M个三维点观测：$r_{v_k}^{p_j v_k}$

希望推断机器人本体的旋转和平移



点云对准

- 单位四元数解法
- 定义齐次坐标

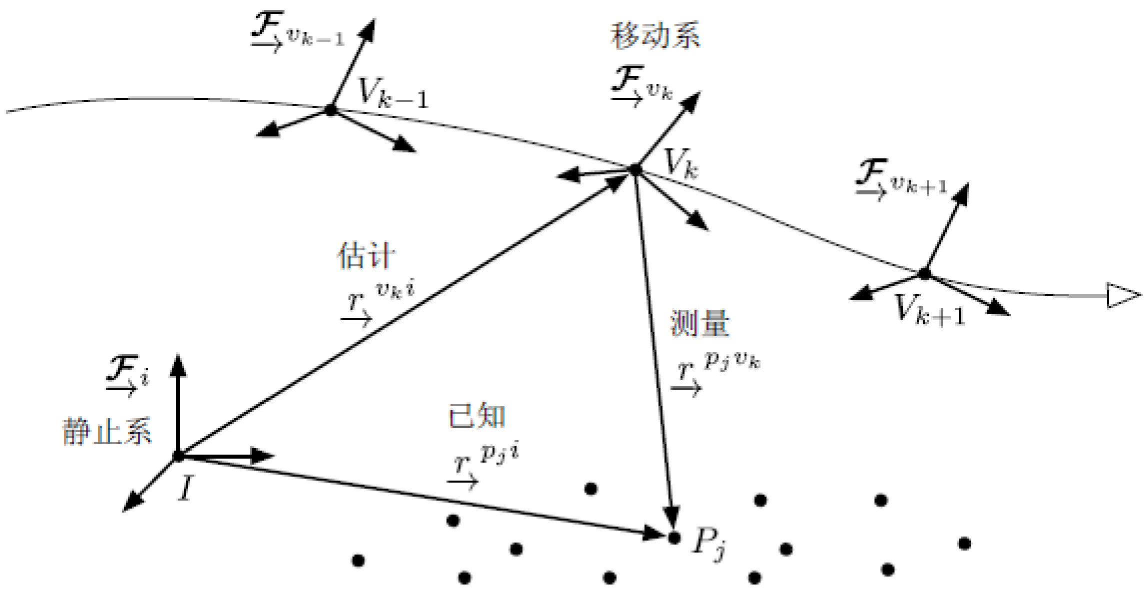
$$y_j = \begin{bmatrix} r_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_j = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 那么它们满足：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}}_{y_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{v_k i} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}}_{q^{-1^+} q^{\oplus}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_j} - \underbrace{\begin{bmatrix} r_i^{v_k i} \\ 0 \end{bmatrix}}_{r} \right)$$

- 写成四元数坐标变换形式：

$$y_j = q^{-1^+} (p_j - r)^+ q$$



- 此问题中，四元数q和平移r可看成v系到i系的变换
- +算符把四元数乘法变成矩阵乘法

$$q = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix} \quad q^+ = \begin{bmatrix} \eta 1 - \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \eta \end{bmatrix}, \quad q^\oplus = \begin{bmatrix} \eta 1 + \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \eta \end{bmatrix}$$

点云对准

- 由于q为单位四元数，这个处理不影响目标函数

- 误差项： $e_j = y_j - q^{-1^+}(p_j - r)^+ q$ 处理一下： $e_j' = q^+ e_j = \left(y_j^\oplus - (p_j - r)^+\right) q$
- 那么目标函数为：

$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j e_j'^{\mathrm{T}} e_j' - \underbrace{\frac{1}{2}\lambda(q^{\mathrm{T}}q - 1)}_{\text{拉格朗日乘子项}}$$

- w为权重

- 写开：

$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j q^{\mathrm{T}} \left(y_j^\oplus - (p_j - r)^+\right)^{\mathrm{T}} \left(y_j^\oplus - (p_j - r)^+\right) q - \frac{1}{2}\lambda(q^{\mathrm{T}}q - 1)$$

拉格朗日乘子
使得q为单位四元数

点云对准

- 求上式对各变量导数并令其为零：

$$J(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}w_j\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus}-(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{r})^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus}-(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{r})^{+}\right)\boldsymbol{q}$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}=\sum_{j=1}^{M}w_j\left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus}-(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{r})^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus}-(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{r})^{+}\right)\boldsymbol{q}-\lambda\boldsymbol{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}=\boldsymbol{q}^{-1^{\oplus}}\sum_{j=1}^{M}w_j\left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus}-(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{r})^{+}\right)\boldsymbol{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-1)$$

- □ 这个并不是非常直观，留作习题
- □ 提示：使用书本(6.19)-(6.21)帮助证明

- 第二式为零得到： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{y}^{+}\boldsymbol{q}^{-1}$ 其中： $\boldsymbol{y}=\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j\boldsymbol{y}_j,\quad \boldsymbol{p}=\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j\boldsymbol{p}_j,\quad w=\sum_{j=1}^{M}w_j$

- □ 物理意义：y为观测质心，p为世界质心

点云对准

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} = \sum_{j=1}^{M} w_j \left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})^{+}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})^{+}\right) \boldsymbol{q} - \lambda \boldsymbol{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{q}^{-1^{\oplus}} \sum_{j=1}^{M} w_j \left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})^{+}\right) \boldsymbol{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} - 1)$$

- r代入第1式并使之为零，得：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{y}^{+}\boldsymbol{q}^{-1}$$

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q}$$

- 其中：

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \left((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y})^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p})^{+}\right)^{\mathrm{T}} \left((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y})^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p})^{+}\right)$$

- 这步可以用上一步结果

- 可见这是一个特征值问题，q是特征向量，lambda为特征值
- 如果W特征值为正且无重根，取q为最小特征值对应的单位特征向量，使得q长度为1
  - W是半正定的，它的特征值至少非负

点云对准

- 代入原目标函数：

$$J(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})^{+}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y}_j^{\oplus} - (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})^{+}\right) \boldsymbol{q} - \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} - 1)$$

$$J(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \lambda) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \underbrace{\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}}_{\lambda \boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} - 1) = \frac{1}{2}\lambda$$

- 因此，选择最小特征值时使得原问题最小化
- 当W奇异时，问题退化，将在后面讨论
- 解得q后，转为矩阵表达即得旋转矩阵：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{C}}_{v_k i} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}^{-1^{+}} \boldsymbol{q}^{\oplus}, \quad \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_i^{v_k i} \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}$$

点云对准

- 旋转矩阵解法
- 类似前文，定义点云的观测和世界坐标：

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{r}_{v_k}^{p_j v_k}, \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i^{p_j i}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_i^{v_k i}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{v_k i}$$

- 同时把质心、权重和也定义出来：

$$\mathbf{y} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{p}_j, \quad w = \sum_{j=1}^{M} w_j$$

- 这和上文大同小异，但符号使用3x1的非齐次坐标。

点云对准

- 每个点的误差： $\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r})$
- 整体误差：

$$J(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r}))^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{r}))$$

s.t. C为旋转矩阵

- 首先分离平移量： $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}$
- 写成r的表达式并代入目标函数： ◻ 代入后有一个交叉项，但求和后为零

$$J(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{d}) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j ((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}))^{\mathrm{T}} ((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}))}_{\text{仅依赖于}\boldsymbol{C}} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}}_{\text{仅依赖于}\boldsymbol{d}}$$

- 这允许我们：(1)找C使得第一项最小化；(2)计算d使得第二项为零；

点云对准

- 对C的部分，有：

$$\begin{aligned}&((\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}))^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}))\\&=\underbrace{(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})}_{\text{独立于}\boldsymbol{C}}-2\underbrace{((\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}))}_{\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}})}+\underbrace{(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})}_{\text{独立于}\boldsymbol{C}}\end{aligned}$$

- 中间项求和后：

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j((\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}))&=\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}})\\&=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{C}\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\right)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

其中：

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M}w_j(\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}$$

点云对准

- 那么，定义仅关于C的代价函数，既能最小化原问题，又保证C满足旋转矩阵约束：

$$J(C,\Lambda,\gamma) = -\mathrm{tr}(CW^{\mathrm{T}}) + \underbrace{\mathrm{tr}(\Lambda(CC^{\mathrm{T}}-1)) + \gamma(\det C - 1)}_{\text{拉格朗日乘子项}}$$

- 求目标函数关于各变量导数：

$$\frac{\partial J}{\partial C} = -W + 2\Lambda C + \gamma \underbrace{\det C}_{1}\,\underbrace{C^{-\mathrm{T}}}_{C} = -W + LC$$

其中 $L = 2\Lambda + \gamma 1$

$$\frac{\partial J}{\partial \Lambda} = CC^{\mathrm{T}} - 1$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma} = \det C - 1$$

- 第一项为零给出： $LC = W$

□ 用到的矩阵求导公式：

$$\frac{\partial}{\partial A}\det A = \det(A)A^{-\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{tr}(AB^{\mathrm{T}}) = B$$

$$\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{tr}(BAA^{\mathrm{T}}) = (B+B^{\mathrm{T}})A$$

点云对准

- 也可以不使用拉格朗日乘子，得到李群的方法
- 设旋转矩阵左扰动： $\mathbf{C}' = \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\mathbf{C}$
- 利用左扰动的定义式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \phi_i} &= \lim_{h\to 0} \frac{J(\mathbf{C}') - J(\mathbf{C})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{tr}(\mathbf{C}'\mathbf{W}^T) + \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{W}^T)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{tr}(\exp(h\mathbf{1}_i^\wedge)\mathbf{C}\mathbf{W}^T) + \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{W}^T)}{h} \\
&\approx \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{tr}((\mathbf{1} + h\mathbf{1}_i^\wedge)\mathbf{C}\mathbf{W}^T) + \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{W}^T)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{tr}(h\mathbf{1}_i^\wedge\mathbf{C}\mathbf{W}^T)}{h} \\
&= -\operatorname{tr}(\mathbf{1}_i^\wedge\mathbf{C}\mathbf{W}^T)
\end{aligned}
$$

设导数为零，得到：

$$
(\forall i)\ \operatorname{tr}(\mathbf{1}_i^\wedge \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{W}^T}_{\mathbf{L}}) = 0
$$

此式说明L为对称矩阵
取转置右乘C后得到：

$$
\mathbf{L}\mathbf{C} = \mathbf{W}
$$

点云对准

- 之后的推导有简略版和完整版两个版本，我们课上推导简略版，完整版留给同学自己阅读
- 假设：$\det \boldsymbol{W} > 0$ 根据：$\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{W}$ ，那么它自乘自己转置时，得：

$$\boldsymbol{L}\underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}}_{1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$$

- 相当于对WW^T做Cholesky分解，于是：

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}$$

- 矩阵平方根：将矩阵对角化，然后对特征值矩阵求平方根即可
- 实对称矩阵有效

- 于是：$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}$
- 这和我们之前提到把R转到SO(3)上的投影是一致的：$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}$

点云对准

- 完整版（思路）
- 不假设det(W)>0的条件（det(W)>0意味着点云的形状正常且不退化）
- 讨论W的奇异值情况

- 完整版的详细推导留给同学课后完成

点云对准

- 完整版结论
- 如果W满足下列三种条件之一:
  1. det(W) >0
  2. det(W)<0, W的最小奇异值不重复
  3. rank(W)=2
- 那么解法为:
  1. W作奇异值分解: $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$
  2. 设 $\boldsymbol{S} = \operatorname{diag}(1, 1, \det \boldsymbol{U} \det \boldsymbol{V})$
  3. 那么 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$

- ☐ 如果C存在唯一全局解，那么它的解必为此式
- ☐ 如果不存在唯一全局解，那么C存在无数种解

- 平移部分由质心给出

点云对准

- 变换矩阵解法
- 使用之前定义好的变量：

$$y_j = \begin{bmatrix} y_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_j = \begin{bmatrix} p_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = T_{v_k i} = \begin{bmatrix} C_{v_k i} & -C_{v_k i} r_i^{v_k i} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$$

- 注意使用SE(3)时，要用齐次坐标
- 误差定义为： $e_j = y_j - T p_j$
- 目标函数：

$$J(T) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} w_j e_j^{\mathrm{T}} e_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} w_j (y_j - T p_j)^{\mathrm{T}} (y_j - T p_j)$$

点云对准

- 使用SE(3)上的左扰动，在工作点附近添加左扰动为：

$$\boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{\epsilon}^\wedge)\boldsymbol{T}_{\text{op}} \approx (1 + \boldsymbol{\epsilon}^\wedge)\boldsymbol{T}_{\text{op}}$$

- 那么目标函数变为：

$$J(\boldsymbol{T}) \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j\left((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{z}_j) - \boldsymbol{z}_j^{\odot}\boldsymbol{\epsilon}\right)^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{z}_j) - \boldsymbol{z}_j^{\odot}\boldsymbol{\epsilon}\right)$$

- 其中 $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{T}_{\text{op}}\boldsymbol{p}_j$ ，并且$\boldsymbol{\epsilon}^\wedge\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{z}_j^{\odot}\boldsymbol{\epsilon}$
- 整个问题是一个无约束优化问题（且是二次的）

点云对准

- 直接用目标函数对扰动求导：$\frac{\partial J}{\partial \epsilon^{T}} = -\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^T} \left((\mathbf{y}_j - \mathbf{z}_j) - \mathbf{z}_j^{\odot} \epsilon \right)$
- 令其为零，得到最优的扰动量：$\left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^T} \mathbf{z}_j^{\odot} \right) \epsilon^{\star} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^T} (\mathbf{y}_j - \mathbf{z}_j)$
- 该式给出了迭代步长的解法，但公式里z是依赖于T的工作点的
- 下面进行化简

点云对准

$$\left(\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} \mathbf{z}_j^{\odot}\right)\boldsymbol{\epsilon}^{\star} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} (\mathbf{y}_j - \mathbf{z}_j)$$

- 左侧：

$$\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} \mathbf{z}_j^{\odot} = \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathrm{op}}^{-\mathrm{T}}}_{>0} \left(\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{p}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} \mathbf{p}_j^{\odot}\right) \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathrm{op}}^{-1}}_{>0}}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$$

- 其中：

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathrm{op}} = \mathrm{Ad}(\mathbf{T}_{\mathrm{op}}), \quad \boldsymbol{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}^{\wedge} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{p}^{\wedge} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

$$w = \sum_{j=1}^{M} w_j, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \mathbf{p}_j, \quad \mathbf{I} = -\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j (\mathbf{p}_j - \mathbf{p})^{\wedge}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p})^{\wedge}$$

- 花体M形如广义质量矩阵，为常量

点云对准

$$\left(\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{z}_j^{\odot}\right)\boldsymbol{\epsilon}^{\star} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{z}_j)$$

- 右侧： $$\boldsymbol{a} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{z}_j^{\odot^{\mathrm{T}}} (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{z}_j) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{op}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{op}}) \\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}^{\wedge}\boldsymbol{C}_{\mathrm{op}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{op}}) \end{bmatrix}$$
- 其中： $$\boldsymbol{b} = \left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{1}_i^{\wedge}\boldsymbol{C}_{\mathrm{op}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})\right]_i, \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{op}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{op}} & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{op}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{op}} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y})(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{M} w_j \boldsymbol{y}_j$$

- 那么每一次迭代可由： $\boldsymbol{\epsilon}^{\star} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathrm{op}}\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 给出
- 该解法只和当时工作点取值相关，因此可以不断迭代至收敛

点云对准

- 小结

- 关于点云对准问题，我们从四元数、旋转矩阵、SE3流形三种角度来进行了推导
- 它们的结果大同小异，四元数和旋转矩阵可以一步得到，SE3流形则以迭代方式得到
- 常用的推导以旋转矩阵为主，我们需要关心它通常的解与退化条件

第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松驰化

点云跟踪

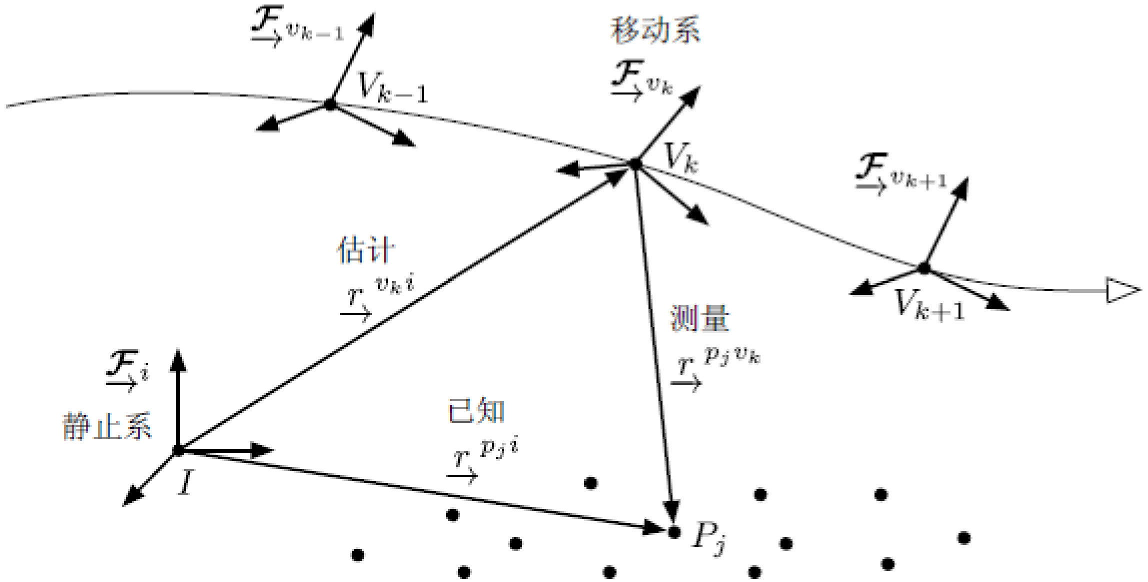
- 继续考虑上面提到的问题，但这时认为机器人在随时间运动
- 以SE(3)变量表达机器人变换矩阵：

□ 注意这时候T的平移部分不再是坐标

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{v_k i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{v_k i} & -\mathbf{C}_{v_k i}\mathbf{r}_i^{v_k i} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

- 初始值： $\check{\mathbf{T}}_0$ 以及它的不确定性

- 下面我们给出运动方程与观测方程，并给出对应的EKF滤波算法与优化算法



点云跟踪

- 运动方程（连续） 使用SE(3)的运动学

$$\dot{r} = \omega^{\wedge} r + \nu \qquad \varpi = \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \qquad \dot{T} = \varpi^{\wedge} T$$
$$\dot{C} = \omega^{\wedge} C$$

线速度
角速度

- 广义速度也受噪声影响： $\varpi = \bar{\varpi} + \delta\varpi$
- 于是把这个运动分成两个部分：

标称运动： $\dot{\bar{T}} = \bar{\varpi}^{\wedge} \bar{T}$

扰动运动： $\delta\dot{\xi} = \bar{\varpi}^{\curlywedge} \delta\xi + \delta\varpi$

离散化后：

标称运动： $\bar{T}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^{\wedge})}_{\Xi_k} \bar{T}_{k-1}$

扰动运动： $\delta\xi_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^{\curlywedge})}_{\mathrm{Ad}(\Xi_k)} \delta\xi_{k-1} + w_k$

真正的噪声： $w_k = \mathcal{N}(0, Q_k)$

点云跟踪

- 测量模型： $y_{jk} = D^{\mathrm{T}} T_k p_j + n_{jk}$
- 其中：

$$p_j = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

为齐次坐标　　　　为齐次转非齐次的矩阵

- 测量噪声： $n_{jk} \sim \mathcal{N}(0, R_{jk})$

- 该方程相对于T的线性化：

$$\bar{y}_{jk} + \delta y_{jk} = D^{\mathrm{T}} \left(\exp\left(\delta \xi_k^{\wedge}\right) \bar{T}_k \right) p_j + n_{jk}$$

$$\delta y_{jk} \approx D^{\mathrm{T}} \left(\bar{T}_k p_j \right)^{\odot} \delta \xi_k + n_{jk}$$

点云跟踪

- 推导过程中的符号：

下面先看EKF，然后看MAP估计

$\hat{\boldsymbol{T}}_k$ ： 在时刻 k 的 4×4 的校正后位姿估计

$\hat{\boldsymbol{P}}_k$ ： 在时刻 k 的 6×6 的校正后位姿估计协方差（含平移量和旋转量）

$\check{\boldsymbol{T}}_k$ ： 在时刻 k 的 4×4 的预测位姿估计

$\check{\boldsymbol{P}}_k$ ： 在时刻 k 的 6×6 的预测位姿估计协方差（含平移量和旋转量）

$\check{\boldsymbol{T}}_0$ ： 4×4 的先验输入，作为在时刻 0 的位姿

$\boldsymbol{\varpi}_k$ ： 6×1 的先验输入，作为在时刻 k 的广义速度

$\boldsymbol{Q}_k$ ： 6×6 的过程噪声协方差（含平移量和旋转量）

$\boldsymbol{y}_{jk}$ ： 机器人在时刻 k 对点 j 的 3×1 的测量

$\boldsymbol{R}_{jk}$ ： 在时刻 k 的测量 j 的 3×3 的协方差

点云跟踪

- EKF预测： 均值 $\check{T}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \varpi_k^{\wedge})}_{\Xi_k} \hat{T}_{k-1}$ 方差 $\check{P}_k = E\left[\delta\check{\xi}_k \delta\check{\xi}_k^{\mathrm{T}}\right]$

$$\delta\check{\xi}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \varpi_k^{\curlywedge})}_{F_{k-1}=\mathrm{Ad}(\Xi_k)} \delta\hat{\xi}_{k-1} + w_k$$

- 线性化处系数矩阵为： $F_{k-1} = \exp(\Delta t_k \varpi_k^{\curlywedge})$

- 于是预测的协方差变为： $\check{P}_k = F_{k-1}\hat{P}_{k-1}F_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_k$

点云跟踪

- 校正部分
- 测量模型线性化为：$\delta \boldsymbol{y}_{jk} = \underbrace{\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\check{\boldsymbol{T}}_k \boldsymbol{p}_j)^{\odot}}_{\boldsymbol{G}_{jk}} \delta\check{\boldsymbol{\xi}}_k + \boldsymbol{n}_{jk}$ 雅可比矩阵 $\boldsymbol{G}_{jk} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\check{\boldsymbol{T}}_k \boldsymbol{p}_j)^{\odot}$
- 把M个点的观测写到一起：

$$\boldsymbol{y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{1k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{Mk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{1k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{Mk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_k = \operatorname{diag}(\boldsymbol{R}_{1k}, \cdots, \boldsymbol{R}_{Mk})$$

- 那么校正部分给出：

$$\boldsymbol{K}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{G}_k \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{G}_k) \check{\boldsymbol{P}}_k$$

- 此式用于迭代方差部分

点云跟踪

- 校正均值部分
- 先计算更新量：$\boldsymbol{\epsilon}_k = \underbrace{\ln\left(\hat{\boldsymbol{T}}_k \check{\boldsymbol{T}}_k^{-1}\right)^{\vee}}_{\text{更新}} = \boldsymbol{K}_k \underbrace{\left(\boldsymbol{y}_k - \check{\boldsymbol{y}}_k\right)}_{\text{革新量}}$
- 然后再更新到先验变换矩阵上：

$$\hat{\boldsymbol{T}}_k = \exp(\boldsymbol{\epsilon}_k^{\wedge})\check{\boldsymbol{T}}_k$$

综合起来：

$$\begin{aligned}
\text{预测：}\quad & \check{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_k \\
& \check{\boldsymbol{T}}_k = \boldsymbol{\Xi}_k \hat{\boldsymbol{T}}_{k-1} \\
\text{卡尔曼增益：}\quad & \boldsymbol{K}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_k \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1} \\
\text{校正：}\quad & \hat{\boldsymbol{P}}_k = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{G}_k)\check{\boldsymbol{P}}_k \\
& \hat{\boldsymbol{T}}_k = \exp\left((\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \check{\boldsymbol{y}}_k))^{\wedge}\right)\check{\boldsymbol{T}}_k
\end{aligned}$$

这种计算方式保证状态变量一直在SE(3)上
协方差一直定义在李代数空间上

点云跟踪

- MAP解法
- 运动方程误差：

$$e_{v,k}(x) = \begin{cases} \ln(\check{T}_0 T_0^{-1})^\vee & k=0 \\ \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee & k=1,\cdots,K \end{cases}$$

其中： $\Xi_k = \exp(\Delta t_k \varpi_k^\wedge)$

- 测量方程误差： $e_{y,jk}(x) = y_{jk} - D^{\mathrm{T}} T_k p_j$
- 下面考察误差的协方差矩阵（噪声特性）

点云跟踪

- 运动方程：
- 初始值 $e_{v,0}(x) = \ln\left(\check{T}_0 T_0^{-1}\right)^\vee = \ln\left(\check{T}_0 \check{T}_0^{-1} \exp\left(-\delta\xi_0^\wedge\right)\right)^\vee = -\delta\xi_0$ $\quad e_{v,0}(x) \sim \mathcal{N}(0, \check{P}_0)$
- 后续：

$$
\begin{aligned}
e_{v,k}(x) &= \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee \\
&= \ln(\Xi_k \exp(\delta\xi_{k-1}^\wedge) \check{T}_{k-1} \check{T}_k^{-1} \exp(-\delta\xi_k^\wedge))^\vee \\
&= \ln\left(\underbrace{\Xi_k \check{T}_{k-1} \check{T}_k^{-1}}_{1} \exp\left((\mathrm{Ad}(\Xi_k)\delta\xi_{k-1})^\wedge\right) \exp(-\delta\xi_k^\wedge)\right)^\vee \\
&\approx \mathrm{Ad}(\Xi_k)\delta\xi_{k-1} - \delta\xi_k \\
&= -w_k
\end{aligned}
$$

$e_{v,k}(x) \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$

点云跟踪

- 观测模型： $e_{y,jk}(x) = y_{jk} - D^{\mathrm{T}} T_k p_j = n_{jk}$ $\qquad e_{y,jk}(x) \sim \mathcal{N}(0, R_{jk})$

- 于是目标函数为：

$$J_{v,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e_{v,0}(x)^{\mathrm{T}} \check{P}_0^{-1} e_{v,0}(x) & k = 0 \\ \frac{1}{2} e_{v,k}(x)^{\mathrm{T}} Q_k^{-1} e_{v,k}(x) & k = 1, \cdots, K \end{cases}$$

$$J_{y,k}(x) = \frac{1}{2} e_{y,k}(x)^{\mathrm{T}} R_k^{-1} e_{y,k}(x)$$

- 把M个点合写：

$$e_{y,k}(x) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x) \end{bmatrix}, \qquad R_k = \mathrm{diag}(R_{1k}, \cdots, R_{Mk})$$

- 目标函数写为：

$$J(x) = \sum_{k=0}^{K} (J_{v,k}(x) + J_{y,k}(x))$$

点云跟踪

- 下面对各误差项进给线性化，并给出迭代求解方案
- 工作点设为：$\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}$ ，我们每次求工作点上的一个扰动： $\boldsymbol{T}_k = \exp(\boldsymbol{\epsilon}_k^\wedge)\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}$
- 每次迭代的工作点统一为： $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}} = \{\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},1}, \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},2}, \cdots, \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},K}\}$
- 初始误差项： $\boldsymbol{e}_{v,0}(\boldsymbol{x}) = \ln(\check{\boldsymbol{T}}_0\boldsymbol{T}_0^{-1})^\vee = \ln\Big(\underbrace{\check{\boldsymbol{T}}_0\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},0}^{-1}}_{\exp(\boldsymbol{e}_{v,0}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})^\wedge)} \exp(-\boldsymbol{\epsilon}_0^\wedge)\Big)^\vee \approx \boldsymbol{e}_{v,0}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}) - \boldsymbol{\epsilon}_0$

点云跟踪

- 运动误差项：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{v,k}(\boldsymbol{x}) &= \ln(\boldsymbol{\Xi}_k \boldsymbol{T}_{k-1} \boldsymbol{T}_k^{-1})^\vee \\
&= \ln\left(\boldsymbol{\Xi}_k \exp(\boldsymbol{\epsilon}_{k-1}^\wedge) \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}^{-1} \exp(-\boldsymbol{\epsilon}_k^\wedge)\right)^\vee \\
&= \ln\left(\underbrace{\boldsymbol{\Xi}_k \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}^{-1}}_{\exp(\boldsymbol{e}_{v,k}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})^\wedge)} \exp\left(\left(\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k-1}^{-1}) \boldsymbol{\epsilon}_{k-1}\right)^\wedge\right) \exp(-\boldsymbol{\epsilon}_k^\wedge)\right)^\vee \\
&\approx \boldsymbol{e}_{v,k}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}) + \underbrace{\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k-1}^{-1})}_{\boldsymbol{F}_{k-1}} \boldsymbol{\epsilon}_{k-1} - \boldsymbol{\epsilon}_k
\end{aligned}
$$

- 测量误差项：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_k \boldsymbol{p}_j \\
&= \boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \exp(\boldsymbol{\epsilon}_k^\wedge) \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{p}_j \\
&\approx \boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\epsilon}_k^\wedge) \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{p}_j \\
&= \underbrace{\boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{p}_j}_{\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})} - \underbrace{\left(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k} \boldsymbol{p}_j)^\odot\right)}_{\boldsymbol{G}_{jk}} \boldsymbol{\epsilon}_k
\end{aligned}
$$

点云跟踪

- 把k时刻所有测量点写在一起，有： $e_{y,k}(x) \approx e_{y,k}(x_{\text{op}}) - G_k \epsilon_k$

$$
e_{y,k}(x) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x) \end{bmatrix}, \quad e_{y,k}(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x_{\text{op}}) \end{bmatrix}, \quad G_k = \begin{bmatrix} G_{1k} \\ \vdots \\ G_{Mk} \end{bmatrix}
$$

- 于是得到了各个雅可比

点云跟踪

- Putting them together
- 在每次高斯-牛顿迭代中，使用各矩阵：

$$\delta x = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_K \end{bmatrix}, \quad H = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ -F_0 & 1 & & & & \\ & -F_1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & -F_{K-1} & 1 & \\ \hline G_0 & & & & & \\ & G_1 & & & & \\ & & G_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & G_K \end{array}\right], \quad e(x_{op}) = \left[\begin{array}{c} e_{v,0}(x_{op}) \\ e_{v,1}(x_{op}) \\ \vdots \\ e_{v,K-1}(x_{op}) \\ e_{v,K}(x_{op}) \\ \hline e_{y,0}(x_{op}) \\ e_{y,1}(x_{op}) \\ \vdots \\ e_{y,K-1}(x_{op}) \\ e_{y,K}(x_{op}) \end{array}\right] \tag{8.160}$$

$$W = \mathrm{diag}(\check{P}_0, Q_1, \cdots, Q_K, R_0, R_1, \cdots, R_K)$$

点云跟踪

- 得到高斯-牛顿法的线性方程： $A\delta x^{\star}=b$
- 其中：

$$A=\underbrace{H^{\mathrm{T}}W^{-1}H}_{\text{三对角块}},\quad b=H^{\mathrm{T}}W^{-1}e(x_{\mathrm{op}})$$

- 把扰动左乘到当前估计值即可： $T_{\mathrm{op},k}\leftarrow\exp\left(\epsilon_k^{\star\wedge}\right)T_{\mathrm{op},k}$

第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松弛化（略）

习题

理论部分：

1. 推导第9页r的表达式；
2. 推导第23页第1个式子；
3. 推导第24页第1个式子；

编程部分

1. 写一段ICP程序，完成两个PCD文件的Pose计算，不允许使用PCL或第三方点云库