



机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔, 谢晓佳等 译

Slides by Xiang Gao

2020年春



第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计



内容回顾

角速度、速度、加速度这些东西在IMU的地方会用到

- 上节课介绍了
 - 三维空间中旋转与姿态的表达方法
 - 对应的运动学

李群李代数可以从抽象的角度去讲，但是对我们不实用
我们只要关心三维空间的李群李代数就可以了

- 本节课的内容
 - 三维空间对应的李群李代数
 - 运动学、动力学
 - 李群李代数上的概率与统计

注意点：

- 与十四讲循序渐进的介绍方式不同，在本书中你会看到很多“空降”的概念，初学者可能摸不着头脑
- 例如李代数会直接给出定义而不介绍其背景，伴随也会直接给出定义而没有物理背景
- 我会在课程中稍加补充，但还是请读者习惯这种说话方式
- 本节课重点内容放在1,3部分，第2部分实用性较弱，我会酌情略去一些内容
- 对于复杂的公式，理解其结论和意义即可



第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计



几何学

- 3D旋转矩阵构成了特殊正交群 (special orthogonal group) :

$$SO(3) = \{C \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | CC^T = \mathbf{1}, \det C = 1\}$$

- 正交且行列式为1的矩阵称为旋转矩阵，为-1的通常称为反射旋转 (rotary reflection)
 - 由于SO(3)没有良好定义加法，它不构成向量空间，只能关于乘法成群
-
- 同理，姿态的变换矩阵构成特殊欧氏群 (special Euclidean group)

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \middle| C \in SO(3), r \in \mathbb{R}^3 \right\}$$



几何学

- 群：一个集合和二元运算组成，集合和运算满足下列关系：
 1. 封闭性
 2. 结合律
 3. 存在幺元
 4. 存在逆
- 李群：是群的同时也是一个微分流形 (differential manifold)
 - 流形：局部看起来很像 \mathbb{R}^n 的结构
 - 矩阵李群：元素为矩阵，运算为矩阵乘法的李群
 - $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 都为矩阵李群

性质	$SO(3)$	$SE(3)$
封闭性	$C_1, C_2 \in SO(3) \Rightarrow C_1 C_2 \in SO(3)$	$T_1, T_2 \in SE(3) \Rightarrow T_1 T_2 \in SE(3)$
结合律	$C_1 (C_2 C_3) = (C_1 C_2) C_3 = C_1 C_2 C_3$	$T_1 (T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3 = T_1 T_2 T_3$
幺元	$C, 1 \in SO(3) \Rightarrow C1 = 1C = C$	$T, 1 \in SE(3) \Rightarrow T1 = 1T = T$
逆	$C \in SO(3) \Rightarrow C^{-1} \in SO(3)$	$T \in SE(3) \Rightarrow T^{-1} \in SE(3)$

SE(3)的逆元素：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C^T & -C^T r \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$



几何学

- 李代数：由数域 \mathbb{F} 、向量空间 \mathbb{V} 和二元运算 $[\cdot]$ 组成。
- 若满足以下性质，则称它们构成李代数：

封闭性 (closure): $[X, Y] \in \mathbb{V}$

双线性 (bilinearity): $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$

自反性 (alternating): $[X, X] = 0$

雅可比恒等式 (Jacobi identity): $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

- 李代数是一个向量空间，也是李群么元处的切空间。



几何学

• SO(3)的李代数:

$$\text{向量空间: } \mathfrak{so}(3) = \{\Phi = \phi^\wedge \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \phi \in \mathbb{R}^3\}$$

域: \mathbb{R}

$$\text{李括号: } [\Phi_1, \Phi_2] = \Phi_1 \Phi_2 - \Phi_2 \Phi_1$$

$$[\Phi_1, \Phi_2] = \Phi_1 \Phi_2 - \Phi_2 \Phi_1 = \phi_1^\wedge \phi_2^\wedge - \phi_2^\wedge \phi_1^\wedge = \left(\underbrace{\phi_1^\wedge \phi_2^\wedge}_{\in \mathbb{R}^3} \right)^\wedge \in \mathfrak{so}(3)$$

so(3)的李括号就是，三维向量的叉乘

因为反对称算符是一一映射，也可以把so(3)看成 \mathbb{R}^3 和叉乘运算

SE(3)的李代数:

$$\text{向量空间: } \mathfrak{se}(3) = \{\Xi = \xi^\wedge \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | \xi \in \mathbb{R}^6\}$$

域: \mathbb{R}

$$\text{李括号: } [\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 \Xi_2 - \Xi_2 \Xi_1$$

上尖尖的定义需要重载:

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \rho, \phi \in \mathbb{R}^3$$

李括号的定义:

用白话来记住上尖尖：
se3是六维向量，平移在前，旋转在后
上尖尖就是六维向量的反对称
六维向量的反对称是一个4*4的矩阵，其中
3*3部分是旋转的反对称，右上角是平移向
量，其余补0



几何学

- SE(3)上的李括号:

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 \Xi_2 - \Xi_2 \Xi_1 = \xi_1^\wedge \xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge \xi_1^\wedge = \left(\underbrace{\xi_1^\wedge \xi_2^\wedge}_{\in \mathbb{R}^6} \right)^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$$

- 其中上弯弯的计算定义为:

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ 0 & \phi^\wedge \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \rho, \phi \in \mathbb{R}^3$$

- 同样这是一个一一映射的运算符, 我们可以把 \mathbb{R}^6 与上弯弯运算看成 $\mathfrak{se}(3)$

$\mathfrak{se}(3)$ 就是六维向量的上弯弯

用白话来记住上弯弯:
上弯弯是一个 6×6 的矩阵
对角线上是三维旋转的反对称
右上角是平移部分的反对称

用白话来记住 $\mathfrak{se}(3)$ 的李括号:
两个六维 $\mathfrak{se}(3)$, 第一个变身为 6×6 的上
弯弯算子矩阵, 乘以第二个 $\mathfrak{se}(3)$, 得到
的结果是一个新的 $\mathfrak{se}(3)$



几何学

用白话进行公式记忆：

结论：指数映射把李代数映射到李群，对数映射把李群映射到李代数

指数映射：是一个从0到无穷的级数，累加项是A的i次方除以i的阶乘

对数映射：是一个从1到无穷的级数，累加项是A减单位阵的i次方，除以i，第一项为正，正负交替

- 指数映射：
 - 指数映射把李代数元素映射到李群
 - 通常的矩阵指数映射与对数映射：

$$\exp(A) = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

$$\ln(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (A - 1)^n$$

- 对于SO(3):

$$C = \exp(\phi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$$

$$\phi = \ln(C)^\vee$$

- so(3)到SO(3)的指数映射显然是一个满射



几何学

- SO(3)指数映射的具体计算:

$$\begin{aligned}
 \exp(\phi^\wedge) &= \exp(\phi a^\wedge) \\
 &= \underbrace{1}_{aa^T - a^\wedge a^\wedge} + \phi a^\wedge + \frac{1}{2!} \phi^2 a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{3!} \phi^3 \underbrace{a^\wedge a^\wedge a^\wedge}_{-a^\wedge} + \frac{1}{4!} \phi^4 \underbrace{a^\wedge a^\wedge a^\wedge a^\wedge}_{-a^\wedge a^\wedge} - \dots \\
 &= aa^T + \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{3!} \phi^3 + \frac{1}{5!} \phi^5 - \dots \right)}_{\sin \phi} a^\wedge - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!} \phi^2 + \frac{1}{4!} \phi^4 - \dots \right)}_{\cos \phi} \underbrace{a^\wedge a^\wedge}_{-1 + aa^T} \\
 &= \underbrace{\cos \phi 1 + (1 - \cos \phi) aa^T + \sin \phi a^\wedge}_C
 \end{aligned}$$

- 该式表明只要有一个 ϕ 就可以计算对应的C，且任意多转360度的整数倍，会得到同样的C
- 也表明so(3)实际就是旋转向量，其转换公式即为罗德里格斯公式



几何学

- SO(3)的对数运算: $\phi = \ln(C)^{\vee}$
- 可以分别定义so(3)向量的转轴与转角为: a 与 ϕ
 - 对于转轴有: $Ca = a$, 因此转轴是特征值1对应的特征向量
 - 对于转角, 对罗德里格斯公式两侧取逆:

白话: S03和so3的互转
so3转S03, 罗德里格斯公式
S03转so3, 特征值1对应的特征向量即为转轴
角度是旋转矩阵的迹减去单位阵, 再除以2, 这就是转角的余弦。

$$\begin{aligned}\text{tr}(C) &= \text{tr}(\cos \phi \mathbf{1} + (1 - \cos \phi)aa^T + \sin \phi a^\wedge) \\ &= \cos \phi \underbrace{\text{tr}(\mathbf{1})}_3 + (1 - \cos \phi) \underbrace{\text{tr}(aa^T)}_{a^T a = 1} + \sin \phi \underbrace{\text{tr}(a^\wedge)}_0 = 2 \cos \phi + 1\end{aligned}$$

- 解方程得:

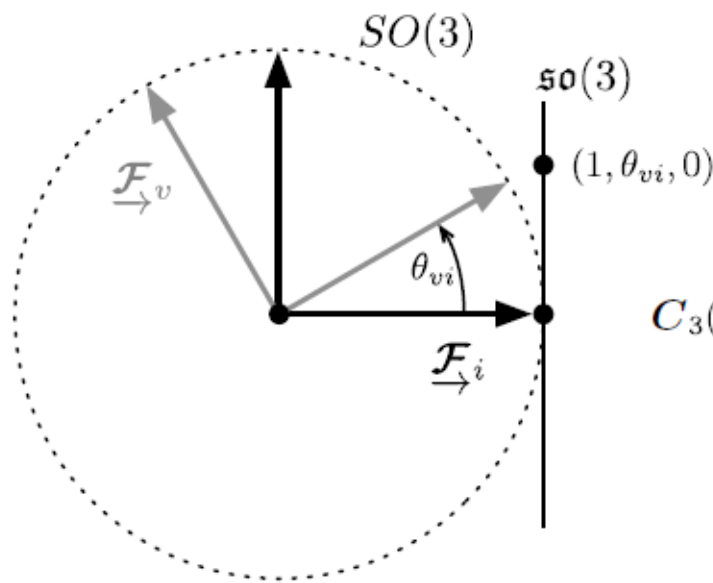
$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(C) - 1}{2} \right) + 2\pi m$$



几何学

这个例子整的，有点切空间这个味道了

- 例子：固定在第2个轴上的旋转
 - I系经过旋转之后得到V系
 - I系第1个基向量，原生坐标为 $(1,0,0)$ ，旋转之后得到：
 $(\cos\theta_{vi}, \sin\theta_{vi}, 0)$
 - 在角度很小时，近似于
 $(1, \theta_{vi}, 0)$
 - 这个位于 $\mathfrak{so}(3)$ 上的向量正切于这个圆



$$C_3(\theta_{vi}) \mathbf{1}_1 = \exp \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{vi} \end{bmatrix}^\wedge \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \left(\mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{vi} \end{bmatrix}^\wedge \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_{vi} \\ 0 \end{bmatrix}$$



几何学

- SE(3)上的指数映射与对数映射:

$$T = \exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n$$

$$\xi = \ln(T)^\vee$$

- 指数映射的计算: $\exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n$

$$\text{其中: } r = J\rho \in \mathbb{R}^3, \quad J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n$$

J的定义后面还要用到

白话se3到SE3的转换:
6维向量转4*4矩阵, 怎么搬呢?
3维旋转对应的旋转矩阵占据3*3位置, 平移部分是se3的平移左乘一个J。

J称为左雅克比, 这里的关键就是J

与此对应, SE3转se3的时候, 平移部分也要左乘一个J逆

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^\top & 0 \end{bmatrix}^n \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \right) \rho \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & r \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix}}_T \in SE(3) \end{aligned}$$

这也说明了se(3)上的平移只能称为“平移部分”, 它离SE(3)的平移还相差一个J

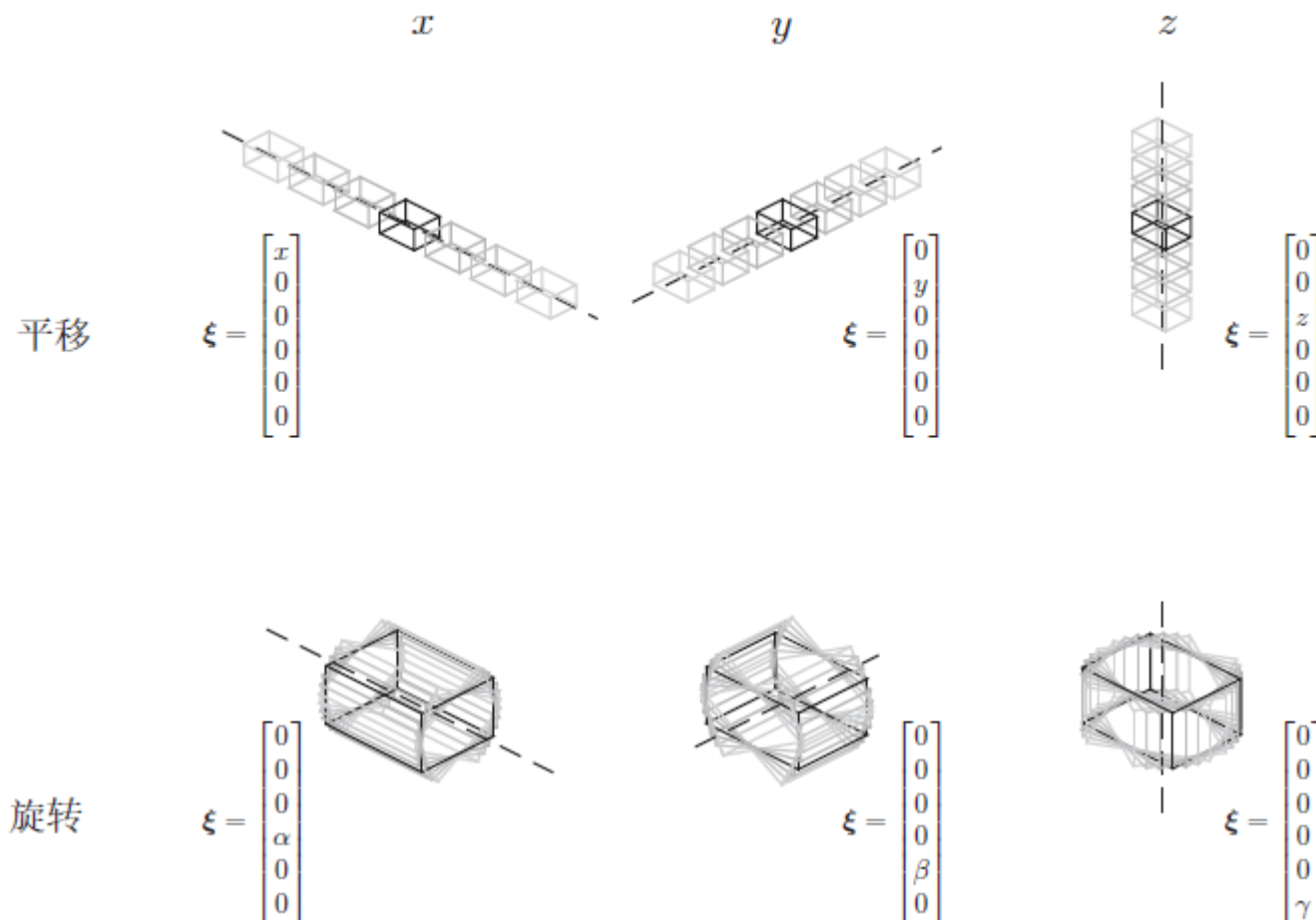


几何学

- 对数映射: $\xi = \ln(T)^\vee$
- SO(3)部分参照SO(3)的对数映射
- 平移部分:

$$\rho = J^{-1}r$$

- 李代数各个分量的改变会影响到李群的表达





几何学

• 关于J

- J称为SO(3)的左雅可比，定义式为：
$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n$$
- 对这个级数展开，可得
 - (VSLAM课程习题中证明过)

$$J = \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top + \frac{1 - \cos \phi}{\phi} \mathbf{a}^\wedge$$

$$J^{-1} = \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}\right) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top - \frac{\phi}{2} \mathbf{a}^\wedge$$

- 而它与自己转置乘积则为：

$$J J^\top = \gamma \mathbf{1} + (1 - \gamma) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top, \quad (J J^\top)^{-1} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top$$

- 对于不为零的x：
$$\begin{aligned} x^\top J J^\top x &= x^\top (\gamma \mathbf{1} + (1 - \gamma) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top) x = x^\top (\mathbf{a} \mathbf{a}^\top - \gamma \mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge) x \\ &= x^\top \mathbf{a} \mathbf{a}^\top x + \gamma (\mathbf{a}^\wedge x)^\top (\mathbf{a}^\wedge x) \\ &= \underbrace{(\mathbf{a}^\top x)^\top (\mathbf{a}^\top x)}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}}_{> 0} \underbrace{(\mathbf{a}^\wedge x)^\top (\mathbf{a}^\wedge x)}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

白话J系列：

罗德里格斯公式，J，J逆是一种形式

都是三个3*3矩阵的线性组合：单位阵，转轴展开，转轴反对称

系数分别是：

余弦，1-余弦，正弦

正弦/角度，1-正弦/角度，(1-余弦)/角度

半角*半角的余切，1-半角*半角的余切，负的半角

角度接近零或 2π 整数倍时，J逆不存在

其中：
$$\gamma = 2 \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}$$

- 所以它总是正定的，且在phi趋于零时趋于单位阵
- 在最小二乘中经常出现这种形式



几何学

- J与C的关系:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 C^\alpha d\alpha &= \int_0^1 \exp(\phi^\wedge)^\alpha d\alpha = \int_0^1 \exp(\alpha \phi^\wedge) d\alpha \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\phi^\wedge)^n \right) d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 \alpha^n d\alpha \right) (\phi^\wedge)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \alpha^{n+1} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} \right) (\phi^\wedge)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n
 \end{aligned}$$

因此: $J = \int_0^1 C^\alpha d\alpha$

- 另一方面:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \quad C = \exp(\phi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$$

因此: $C = 1 + \phi^\wedge J$

但此式并不能用于计算J, 因为phi的反对称是不可逆的



几何学

- 伴随 (Adjoint)

- 我们可以从一个SE(3)矩阵定义它的伴随矩阵：

$$\mathcal{T} = \text{Ad}(\mathbf{T}) = \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{r}^\wedge \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

白话SE3的伴随：
对于4*4的SE3，其伴随是一个6*6的矩阵
主对角线是两个旋转矩阵，右上角是平移的反对称
乘以旋转矩阵，左下角是0
它也是一个李群

- 伴随矩阵的集合记为： $\text{Ad}(SE(3)) = \{\mathcal{T} = \text{Ad}(\mathbf{T}) | \mathbf{T} \in SE(3)\}$
- 它也是一个李群。下面来看它的封闭性和可逆性。



几何学

- $\text{Ad}(\text{SE}(3))$ 的封闭性:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 &= \text{Ad}(\mathcal{T}_1) \text{Ad}(\mathcal{T}_2) = \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} C_1 & r_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} C_2 & r_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & r_1^\wedge C_1 \\ \mathbf{0} & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & r_2^\wedge C_2 \\ \mathbf{0} & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & C_1 r_2^\wedge C_2 + r_1^\wedge C_1 C_2 \\ \mathbf{0} & C_1 C_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & (C_1 r_2 + r_1)^\wedge C_1 C_2 \\ \mathbf{0} & C_1 C_2 \end{bmatrix} \\
 &= \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} C_1 C_2 & C_1 r_2 + r_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) \in \text{Ad}(\text{SE}(3))
 \end{aligned}$$

第二行至第三行需要:

$$C_1 r_2^\wedge C_2 + r_1^\wedge C_1 C_2 = C_1 r_2^\wedge C_1^T C_1 C_2 + r_1^\wedge C_1 C_2$$

然后使用: $Cv^\wedge C^T = (Cv)^\wedge$

合并之

它的简单证明:

1. 对于叉乘有: $Ca \times Cb = C(a \times b)$
2. 对于任意矢量 u , 有:

$$(Cv) \times u = (Cv) \times (CC^T u) = C(v \times C^T u) = Cv^\wedge C^T u$$

3. 于是上式成立



几何学

- $\text{Ad}(\text{SE}(3))$ 的逆元素:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{-1} &= \text{Ad}(\mathbf{T})^{-1} = \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{r}^\wedge \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & -\mathbf{C}^T \mathbf{r}^\wedge \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & (-\mathbf{C}^T \mathbf{r})^\wedge \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \\ &= \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & -\mathbf{C}^T \mathbf{r} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Ad}(\mathbf{T}^{-1}) \in \text{Ad}(\text{SE}(3))\end{aligned}$$

这里一样用了“先补逆再吃掉”的技巧

- 其他几个性质与矩阵乘法相似，略过
- 于是 $\text{Ad}(\text{SE}(3))$ 也是一个李群



几何学

白话：se3的伴随就是上弯弯
上弯弯是一个6*6的矩阵，对角线上是转轴的反对称，右上角是平移的反对称

- 对于李代数 $\mathfrak{se}(3)$ ，也可以定义其伴随。对于 $\Xi = \xi^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$ ，其伴随为：

$$\text{ad}(\Xi) = \text{ad}(\xi^\wedge) = \xi^\wedge \quad \text{上弯弯运算定义为:} \quad \xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ \mathbf{0} & \phi^\wedge \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \rho, \phi \in \mathbb{R}^3$$

- 可证明 $\text{ad}(\mathfrak{se}(3))$ 也是李代数：

向量空间： $\text{ad}(\mathfrak{se}(3)) = \{\Psi = \text{ad}(\Xi) \in \mathbb{R}^{6 \times 6} | \Xi \in \mathfrak{se}(3)\}$

域： \mathbb{R}

李括号： $[\Psi_1, \Psi_2] = \Psi_1 \Psi_2 - \Psi_2 \Psi_1$

李括号的计算：

$$[\Psi_1, \Psi_2] = \Psi_1 \Psi_2 - \Psi_2 \Psi_1 = \xi_1^\wedge \xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge \xi_1^\wedge = \left(\underbrace{\xi_1^\wedge \xi_2^\wedge}_{\in \mathbb{R}^6} \right)^\wedge \in \text{ad}(\mathfrak{se}(3))$$



几何学

- $\text{Ad}(\text{SE}(3))$ 与 $\text{ad}(\text{se}(3))$ 上也存在指数与对数映射，我们稍后讨论：

$$\mathcal{T} = \exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n \quad \xi = \ln(\mathcal{T})^\vee$$

- 同时， $\text{SE}(3)$, $\text{se}(3)$, $\text{Ad}(\text{SE}(3))$, $\text{ad}(\text{se}(3))$ 四者之间存在联系：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{李代数} & & \text{李群} \\
 4 \times 4 \quad \xi^\wedge \in \mathfrak{se}(3) & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{T} \in \text{SE}(3) \\
 \downarrow \text{ad} & & \downarrow \text{Ad} \\
 6 \times 6 \quad \xi^\wedge \in \text{ad}(\mathfrak{se}(3)) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{T} \in \text{Ad}(\text{SE})(3)
 \end{array}$$

问题：先求伴随和先求指数的含义一样吗？
即是否有：

$$\underbrace{\text{Ad}(\exp(\xi^\wedge))}_{\mathcal{T}} = \exp(\underbrace{\text{ad}(\xi^\wedge)}_{\xi^\wedge})$$

下面给出证明



几何学

目标: $\underbrace{\text{Ad}(\exp(\xi^\wedge))}_{\mathcal{T}} = \exp(\underbrace{\text{ad}(\xi^\wedge)}_{\xi^\wedge})$

- 从右侧出发:
$$\begin{aligned} \exp(\text{ad}(\xi^\wedge)) &= \exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ \mathbf{0} & \phi^\wedge \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} C & K \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 整理可得:
$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)!} (\phi^\wedge)^n \rho^\wedge (\phi^\wedge)^m$$

- 对于左侧:
$$\text{Ad}(\exp(\xi^\wedge)) = \text{Ad}\left(\begin{bmatrix} C & J\rho \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} C & (J\rho)^\wedge C \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$$

- 即要证:
$$K = (J\rho)^\wedge C$$

□ 不是非常显然, 但是可以归纳得出

□ 含义: 对于固定阶次的项 (例如 $n+m+1=3$ 的), 出现 ρ 左边0次, 右边2次; 左边1次, 右边1次; 左边2次, 右边0次, 依此类推



几何学

- 根据J与C的关系，有：

$$\begin{aligned}
 (J\rho)^\wedge C &= \left(\int_0^1 C^\alpha d\alpha \rho \right)^\wedge C = \int_0^1 (C^\alpha \rho)^\wedge C d\alpha \\
 &= \int_0^1 C^\alpha \rho^\wedge C^{1-\alpha} d\alpha = \int_0^1 \exp(\alpha \phi^\wedge) \rho^\wedge \exp((1-\alpha)\phi^\wedge) d\alpha \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\alpha \phi^\wedge)^n \right) \rho^\wedge \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} ((1-\alpha)\phi^\wedge)^m \right) d\alpha \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \left(\int_0^1 \alpha^n (1-\alpha)^m d\alpha \right) (\phi^\wedge)^n \rho^\wedge (\phi^\wedge)^m
 \end{aligned}$$

目标： $\underbrace{\text{Ad}(\exp(\xi^\wedge))}_{\mathcal{T}} = \exp \left(\underbrace{\text{ad}(\xi^\wedge)}_{\xi^\wedge} \right)$

□ $J = \int_0^1 C^\alpha d\alpha$, 见PPT17页

□ 括号中部分：

$$\int_0^1 \alpha^n (1-\alpha)^m d\alpha = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

□ 它“可以证明”（但书中未给出），实际证明也比较麻烦

□ 于是得到 $K = (J\rho)^\wedge C$,



几何学

之前说的伴随，实用当中确实会用到，但主要是作为一种技巧来用。用来做什么呢？用来交换乘积顺序！很多觉得不爽的地方可以用伴随来换顺序。

问：BCH干嘛用的？

答：求导用的

- Baker-Campbell-Hausdorff公式
- BCH公式用于处理两个矩阵指数乘积之对数：

$$\ln(\exp(A) \exp(B)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i > 0, \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i + s_i))^{-1}}{\prod_{i=1}^n r_i! s_i!} [A^{r_1} B^{s_1} A^{r_2} B^{s_2} \dots A^{r_n} B^{s_n}]$$

- 其中：

$$[A^{r_1} B^{s_1} A^{r_2} B^{s_2} \dots A^{r_n} B^{s_n}] = \underbrace{[A, \dots [A, [B, \dots [B, \dots [A, \dots [A, [B, \dots [B, B] \dots]] \dots] \dots] \dots]}_{r_1} \underbrace{\dots}_{s_1} \underbrace{\dots}_{r_n} \underbrace{\dots}_{s_n}$$

当 $s_n > 1$ 或 $s_n = 0$ 且 $r_n > 1$ 的时候，它的值为 0。

- 且方括号是李括号，若 $[A, B] = 0$ ，那么： $\ln(\exp(A) \exp(B)) = A + B$



几何学

- 完整的BCH是个很长的式子，可以观察它前几项：

$$\begin{aligned}\ln(\exp(A) \exp(B)) &= A + B + \frac{1}{2}[A, B] \\ &+ \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] - \frac{1}{24}[B, [A, [A, B]]] \\ &- \frac{1}{720}([[[[A, B], B], B], B] + [[[[B, A], A], A], A]) \\ &+ \frac{1}{360}([[[[A, B], B], B], A] + [[[[B, A], A], A], B]) \\ &+ \frac{1}{120}([[[[A, B], A], B], A] + [[[[B, A], B], A], B]) + \dots\end{aligned}$$

或者还可以只保留A或B的线性项：

$$\ln(\exp(A) \exp(B)) \approx B + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \underbrace{[B, [B, \dots [B, A] \dots]]}_n$$

$$\ln(\exp(A) \exp(B)) \approx A + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \underbrace{[A, [A, \dots [A, B] \dots]]}_n$$

其中 B_n 是伯努利数：

$$\begin{aligned}B_0 &= 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \\ B_7 &= 0, B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \\ B_{13} &= 0, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{15} = 0, \dots\end{aligned}$$



几何学

- BCH公式可以用于处理SO(3)和SE(3)上的李群李代数关系

- SO(3):

$$\begin{aligned}\ln(C_1 C_2)^\vee &= \ln(\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge))^\vee \\ &= \phi_1 + \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1^\wedge \phi_2 + \frac{1}{12} \phi_1^\wedge \phi_1^\wedge \phi_2 + \frac{1}{12} \phi_2^\wedge \phi_2^\wedge \phi_1 + \dots\end{aligned}$$

两个旋转矩阵乘积的对数映射问题，它体现在李代数空间上：
若SO3左边的旋转矩阵是小量，则对应的so3为右边的李代数加上该李代数处的左雅克比的逆，乘以小量对应的李代数；
若SO3右边的旋转矩阵是小量，则对应的so3为左边的李代数加上该李代数处的右雅克比的逆，乘以小量对应的李代数；

三个问题：
左还是右？看左乘小量还是右乘小量
什么处的雅克比？大李代数处的

- 若其中一个为小量，那么可使用线性近似后的BCH，得到：

$$\ln(C_1 C_2)^\vee = \ln(\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge))^\vee \approx \begin{cases} J_\ell(\phi_2)^{-1} \phi_1 + \phi_2 & \text{若 } \phi_1 \text{ 很小} \\ \phi_1 + J_r(\phi_1)^{-1} \phi_2 & \text{若 } \phi_2 \text{ 很小} \end{cases}$$

搞SLAM，从这里出发即可

对求导的一个说法：
求导，可以大胆使用近似，只要能使目标函数下降即可。至于往哪个方向去下降则没那么严格，偏一点就偏一点没关系，顶多是多迭代几次。每次都最优反而不一定下降最快。

- 其中：

$$\begin{aligned}J_r(\phi)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-\phi^\wedge)^n = \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}\right) a a^\top + \frac{\phi}{2} a^\wedge \\ J_\ell(\phi)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\phi^\wedge)^n = \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}\right) a a^\top - \frac{\phi}{2} a^\wedge\end{aligned}$$

遗留的问题：
这里的近似具体是怎么来的，l和r又分别代表什么意义？

14讲里面的说法非常好，可以去参考，就全明白了

称为左/右雅可比

左和右各代表什么物理意义呢？
根据我目前的理解，左乘描述坐标变换，是在世界系下面；右乘描述刚体变换，是在body系下面。



几何学

- 这里的左/右雅可比是我们之前见过的（这个妹妹我之前见过的） 

$$\begin{aligned} J_r(\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (-\phi^\wedge)^n = \int_0^1 C^{-\alpha} d\alpha \\ &= \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) a a^\top - \frac{1 - \cos \phi}{\phi} a^\wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\ell(\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n = \int_0^1 C^\alpha d\alpha \\ &= \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{1} + \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) a a^\top + \frac{1 - \cos \phi}{\phi} a^\wedge \end{aligned}$$

左与右的关系：

$$\begin{aligned} J_\ell(\phi) &= C J_r(\phi) \\ J_\ell(-\phi) &= J_r(\phi) \end{aligned}$$

左雅可比等于旋转矩阵乘以右雅可比



几何学

记住三句话即可：

- 1、形式上跟SO3一样，也是：大李代数 + J逆(大李代数) × 小李代数
- 2、J的展开暂时不用记
- 3、J的求解要用到Q，也暂时不用记

- SE(3)和Ad(SE(3))：我们直接给出线性化下表达式

$$\ln(T_1 T_2)^\vee = \ln(\exp(\xi_1^\wedge) \exp(\xi_2^\wedge))^\vee \quad \text{其中:} \quad \mathcal{J}_r(\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-\xi^\wedge)^n \quad \mathcal{J}_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (-\xi^\wedge)^n = \int_0^1 \mathcal{T}^{-\alpha} d\alpha = \begin{bmatrix} J_r & Q_r \\ 0 & J_r \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{cases} \mathcal{J}_\ell(\xi_2)^{-1} \xi_1 + \xi_2 & \text{若 } \xi_1 \text{ 很小} \\ \xi_1 + \mathcal{J}_r(\xi_1)^{-1} \xi_2 & \text{若 } \xi_2 \text{ 很小} \end{cases} \quad \mathcal{J}_\ell(\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\xi^\wedge)^n \quad \mathcal{J}_\ell(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\xi^\wedge)^n = \int_0^1 \mathcal{T}^\alpha d\alpha = \begin{bmatrix} J_\ell & Q_\ell \\ 0 & J_\ell \end{bmatrix}$$

$$\ln(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)^\vee = \ln(\exp(\xi_1^\wedge) \exp(\xi_2^\wedge))^\vee \quad \mathcal{Q}_\ell(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+2)!} (\phi^\wedge)^n \rho^\wedge (\phi^\wedge)^m$$

$$\approx \begin{cases} \mathcal{J}_\ell(\xi_2)^{-1} \xi_1 + \xi_2 & \text{若 } \xi_1 \text{ 很小} \\ \xi_1 + \mathcal{J}_r(\xi_1)^{-1} \xi_2 & \text{若 } \xi_2 \text{ 很小} \end{cases} \quad = \frac{1}{2} \rho^\wedge + \left(\frac{\phi - \sin \phi}{\phi^3} \right) (\phi^\wedge \rho^\wedge + \rho^\wedge \phi^\wedge + \phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge)$$

$$\quad + \left(\frac{\phi^2 + 2 \cos \phi - 2}{2\phi^4} \right) (\phi^\wedge \phi^\wedge \rho^\wedge + \rho^\wedge \phi^\wedge \phi^\wedge - 3\phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge)$$

$$\quad + \left(\frac{2\phi - 3 \sin \phi + \phi \cos \phi}{2\phi^5} \right) (\phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge \phi^\wedge + \phi^\wedge \phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge)$$

$$\mathcal{Q}_r(\xi) = \mathcal{Q}_\ell(-\xi) = C \mathcal{Q}_\ell(\xi) + (J_\ell \rho)^\wedge C J_\ell$$

□ Q矩阵的形式虽然复杂，但写在程序里的话，也只是一个函数



几何学

- SE3左右雅可比之关系: $\mathcal{J}_\ell(\xi) = \mathcal{T} \mathcal{J}_r(\xi)$, $\mathcal{J}_\ell(-\xi) = \mathcal{J}_r(\xi)$
- 花体雅可比之逆也不必直接计算, 可以通过:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_r^{-1} &= \begin{bmatrix} J_r^{-1} & -J_r^{-1} Q_r J_r^{-1} \\ 0 & J_r^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathcal{J}_\ell^{-1} &= \begin{bmatrix} J_\ell^{-1} & -J_\ell^{-1} Q_\ell J_\ell^{-1} \\ 0 & J_\ell^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- 算得
- 最后, 使用左或右完全由领域习惯决定。本书以左雅可比作为代表。



几何学

要会用白话来回答问题：怎么衡量旋转之间的距离啊？

旋转矩阵中的一个取转置，然后两者相乘，得到一个组合的旋转矩阵，把这个旋转矩阵通过对数映射，得到一个对应的李代数，这个李代数的范数就代表了旋转之间的距离。

- 距离、体积与积分
- 可以利用李群李代数之间的关系来定义这些常见的概念
- 旋转之间的距离：

有了距离可以使用最小二乘来拟合

$$\phi_{12} = \ln(C_1^T C_2)^{\vee}$$

$$\phi_{21} = \ln(C_2 C_1^T)^{\vee}$$

称为左差和右差，其结果在向量空间上

- 如果要评估旋转估计的大小，直接取范数即可：

$$\phi_{12} = \sqrt{\langle \ln(C_1^T C_2), \ln(C_1^T C_2) \rangle} = \sqrt{\langle \hat{\phi}_{12}, \hat{\phi}_{12} \rangle} = \sqrt{\hat{\phi}_{12}^T \phi_{12}} = |\phi_{12}|$$

$$\phi_{21} = \sqrt{\langle \ln(C_2 C_1^T), \ln(C_2 C_1^T) \rangle} = \sqrt{\langle \hat{\phi}_{21}, \hat{\phi}_{21} \rangle} = \sqrt{\hat{\phi}_{21}^T \phi_{21}} = |\phi_{21}|$$



几何学

- 旋转的微积分
- 由于李代数是向量，于是可以在李代数上加一个小量，得到新的旋转： $C' = \exp((\phi + \delta\phi)^\wedge) \in SO(3)$.
 - 新的旋转与之前的差为（左右均可）：

$$\begin{aligned}\ln(\delta C_r)^\vee &= \ln(C^T C')^\vee = \ln(C^T \exp((\phi + \delta\phi)^\wedge))^\vee \\ &\approx \ln(C^T C \exp((J_r \delta\phi)^\wedge))^\vee = J_r \delta\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(\delta C_\ell)^\vee &= \ln(C' C^T)^\vee = \ln(\exp((\phi + \delta\phi)^\wedge) C^T)^\vee \\ &\approx \ln(\exp((J_\ell \delta\phi)^\wedge) C C^T)^\vee = J_\ell \delta\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是: } dC_r &= |\det(J_r)| d\phi \\ dC_\ell &= |\det(J_\ell)| d\phi\end{aligned}$$

旋转矩阵的微分等于李代数的微分乘以J的行列式的绝对值

$$\text{• 而: } \det(J_\ell) = \det(C J_r) = \underbrace{\det(C)}_1 \det(J_r) = \det(J_r)$$

这说明使用左或右并无影响

$$\text{• 所以: } dC = |\det(J)| d\phi \quad \text{关于旋转的积分也可以用李代数替换: } \int_{SO(3)} f(C) dC \rightarrow \int_{|\phi| < \pi} f(\phi) |\det(J)| d\phi$$



几何学

- SE(3)上的距离:

$$\xi_{12} = \ln(T_1^{-1}T_2)^{\vee} = \ln(\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2)^{\vee}$$

$$\xi_{21} = \ln(T_2T_1^{-1})^{\vee} = \ln(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1^{-1})^{\vee}$$

大小:

$$\xi_{12} = \sqrt{\langle \hat{\xi}_{12}, \hat{\xi}_{12} \rangle} = \sqrt{\langle \hat{\xi}_{12}^{\wedge}, \hat{\xi}_{12}^{\wedge} \rangle} = \sqrt{\xi_{12}^T \xi_{12}} = |\xi_{12}|$$

$$\xi_{21} = \sqrt{\langle \hat{\xi}_{21}, \hat{\xi}_{21} \rangle} = \sqrt{\langle \hat{\xi}_{21}^{\wedge}, \hat{\xi}_{21}^{\wedge} \rangle} = \sqrt{\xi_{21}^T \xi_{21}} = |\xi_{21}|$$

- 积分变量代换关系: $dT = |\det(\mathcal{J})|d\xi$

$$\int_{SE(3)} f(T) dT = \int_{\mathbb{R}^3, |\phi| < \pi} f(\xi) |\det(\mathcal{J})| d\xi$$



几何学

- 插值

- 向量空间上可以使用线性插值: $x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad \alpha \in [0, 1]$

- 而在李群上可重新定义为:

这样插值比较科学
相反，欧拉角的插值不靠谱，
因为有万向锁的问题

$$C = (C_2 C_1^T)^\alpha C_1, \quad \alpha \in [0, 1]$$

实际上是: $C_{21}^\alpha = \exp(\phi_{21}^\wedge)^\alpha = \exp(\alpha \phi_{21}^\wedge) \in SO(3)$

- 如果把C1看成参考系 (C1=1)，那么插值的过程等于: $C = C_2^\alpha, \quad \phi = \alpha \phi_2$

- 相当于以恒定角速度从C1转到C2

- 类似的，SE(3)上的插值也可以定义为: $T = (T_2 T_1^{-1})^\alpha T_1, \quad \alpha \in [0, 1]$



几何学

- 微积分和优化

- SO(3): 考虑旋转后的点对旋转量的导数: $\frac{\partial (Cv)}{\partial \phi}$ 其中: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$

- 按照定义:

$$\frac{\partial (Cv)}{\partial \phi_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp((\phi + h\mathbf{1}_i)^\wedge) v - \exp(\phi^\wedge) v}{h}$$

其中每一维中的指数部分: $\exp((\phi + h\mathbf{1}_i)^\wedge) \approx \exp((J\mathbf{1}_i)^\wedge) \exp(\phi^\wedge) \approx (1 + h(J\mathbf{1}_i)^\wedge) \exp(\phi^\wedge)$

代回分子:

思路: 先用BCH展开, 然后再把exp泰勒展开
这或许是一个常见套路?

$$\frac{\partial (Cv)}{\partial \phi_i} = (J\mathbf{1}_i)^\wedge Cv = -(Cv)^\wedge J\mathbf{1}_i$$

拼在一起:

$$\frac{\partial (Cv)}{\partial \phi} = -(Cv)^\wedge J$$

如果在外面套一个代价函数, 那么求导也只需使用链式法则.

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\frac{\partial u}{\partial x} (Cv)^\wedge J$$

这个在SLAM里面很常见



几何学

这里的推导过程依旧有些云里雾里，想了解详情，还是去14讲吧

- 另外一种求导方式：寻找C上的一个优化步长（扰动） $C = \exp(\psi^\wedge) C_{\text{op}}$
- 求Cv关于这个扰动的变化率：

$$\frac{\partial (Cv)}{\partial \psi_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h 1_i^\wedge) Cv - Cv}{h} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h 1_i^\wedge) Cv - Cv}{h} = -(Cv)^\wedge 1_i$$

- 叠在一起： $\frac{\partial (Cv)}{\partial \psi} = -(Cv)^\wedge$

看到这里能否用白话说明白下面这些问题呢？

1、所谓的李群李代数求导，或者说旋转求导，用什么来衡量呢？

答：用旋转后的点，也就是点左乘旋转矩阵，对旋转量本身进行求导。

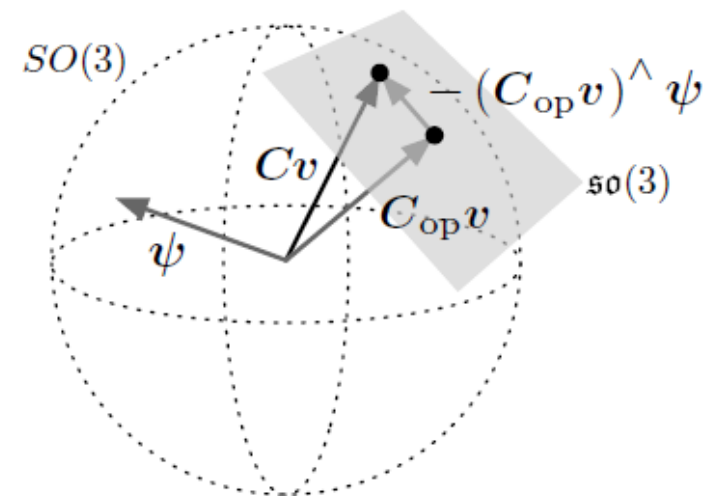
2、这个求导的结果是什么？

答：在左扰动模型下，这个求导的结果是点左乘旋转矩阵，再取反对称，再取负号，得到的是一个3*3的矩阵。

3、以上是扰动模型的结果，那导数模型呢？

答：后面再右乘一个J

- 在很多优化过程中，我们在每步迭代中计算这个扰动，使得误差变小
- 因此，雅可比也重新定义为针对这个扰动的变化率



$$Cv = \exp(\psi^\wedge) C_{\text{op}} v \approx C_{\text{op}} v - (C_{\text{op}} v)^\wedge \psi$$



几何学

- SE(3): 导数模型 $\frac{\partial (Tp)}{\partial \xi} = (Tp)^{\odot} \mathcal{J}$ 其中 \odot 是4x1向量到4x4矩阵算符: $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^{\odot} = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} & -\varepsilon^{\wedge} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$
- 若使用扰动模型, 那么扰动为: $T \leftarrow \exp(\epsilon^{\wedge}) T$
- 对扰动量的导数为: $\frac{\partial (Tp)}{\partial \epsilon} = (Tp)^{\odot}$



几何学

- 于是，针对带有旋转、位姿变量的优化问题，就可以使用扰动策略
- 扰动策略的优点在于：
 - 以无奇异的形式存储旋转和姿态；
 - 每次优化都是无约束的；
 - 所有的操作都以矩阵形式写出，而不像欧拉角那样拆成一个个的变量，然后带有大量的正/余弦函数



几何学

表 7-2 $SO(3)$ 的性质与其近似形式

• $SO(3)$ 性质总览

李代数	李群	(左)雅可比
$u^\wedge = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ $(\alpha u + \beta v)^\wedge \equiv \alpha u^\wedge + \beta v^\wedge$ $u^{\wedge T} \equiv -u^\wedge$ $u^\wedge v \equiv -v^\wedge u$ $u^\wedge u \equiv 0$ $(Wu)^\wedge \equiv u^\wedge(\text{tr}(W)\mathbf{1} - W) - W^T u^\wedge$ $u^\wedge v^\wedge \equiv -(u^T v)\mathbf{1} + vu^T$ $u^\wedge W v^\wedge \equiv -(-\text{tr}(vu^T)\mathbf{1} + vu^T) \times (-\text{tr}(W)\mathbf{1} + W^T) + \text{tr}(W^T vu^T)\mathbf{1} - W^T vu^T$ $u^\wedge v^\wedge u^\wedge \equiv u^\wedge u^\wedge v^\wedge + v^\wedge u^\wedge u^\wedge + (u^T u)v^\wedge$ $(u^\wedge)^3 + (u^T u)u^\wedge \equiv 0$ $u^\wedge v^\wedge v^\wedge - v^\wedge v^\wedge u^\wedge \equiv (v^\wedge u^\wedge v)^\wedge$ $[u^\wedge, v^\wedge] \equiv u^\wedge v^\wedge - v^\wedge u^\wedge \equiv (u^\wedge v)^\wedge$ $\underbrace{[u^\wedge, [u^\wedge, \dots [u^\wedge, v^\wedge] \dots]]}_n \equiv ((u^\wedge)^n v)^\wedge$	$C = \exp(\phi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \cos \phi \mathbf{1} + (1 - \cos \phi) a a^T + \sin \phi a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \phi^\wedge$ $C^{-1} \equiv C^T \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\phi^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \phi^\wedge$ $\phi = \phi a$ $a^T a \equiv \mathbf{1}$ $C^T C \equiv \mathbf{1} \equiv C C^T$ $\text{tr}(C) \equiv 2 \cos \phi + 1$ $\det(C) \equiv 1$ $C a \equiv a$ $C \phi = \phi$ $C a^\wedge \equiv a^\wedge C$ $C \phi^\wedge \equiv \phi^\wedge C$ $(Cu)^\wedge \equiv Cu^\wedge C^T$ $\exp((Cu)^\wedge) \equiv C \exp(u^\wedge) C^T$	$J = \int_0^1 C^\alpha d\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{1} + (1 - \frac{\sin \phi}{\phi}) a a^T + \frac{1 - \cos \phi}{\phi} a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2} \phi^\wedge$ $J^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + (1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}) a a^T - \frac{\phi}{2} a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} - \frac{1}{2} \phi^\wedge$ $\exp((\phi + \delta \phi)^\wedge) \approx \exp((J \delta \phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge)$ $C \equiv \mathbf{1} + \phi^\wedge J$ $J(\phi) \equiv C J(-\phi)$ $(\exp(\delta \phi^\wedge) C)^\alpha \approx (1 + (A(\alpha, \phi) \delta \phi)^\wedge) C^\alpha$ $A(\alpha, \phi) = \alpha J(\alpha \phi) J(\phi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!} (\phi^\wedge)^n$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v, \phi, \delta \phi \in \mathbb{R}^3, W, A, J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, C \in SO(3)$		



几何学

• SE(3)性质总览

$$\begin{aligned}
 x^\wedge &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} v^\wedge & u \\ 0^\top & 0 \end{bmatrix} \\
 x^\wedge &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} v^\wedge & u^\wedge \\ 0 & v^\wedge \end{bmatrix} \\
 (\alpha x + \beta y)^\wedge &\equiv \alpha x^\wedge + \beta y^\wedge \\
 (\alpha x + \beta y)^\wedge &\equiv \alpha x^\wedge + \beta y^\wedge \\
 x^\wedge y &\equiv -y^\wedge x \\
 x^\wedge x &\equiv 0 \\
 (x^\wedge)^4 + (v^\top v) (x^\wedge)^2 &\equiv 0 \\
 (x^\wedge)^5 + 2(v^\top v) (x^\wedge)^3 + (v^\top v)^2 (x^\wedge) &\equiv 0 \\
 [x^\wedge, y^\wedge] &\equiv x^\wedge y^\wedge - y^\wedge x^\wedge \equiv (x^\wedge y)^\wedge \\
 [x^\wedge, y^\wedge] &\equiv x^\wedge y^\wedge - y^\wedge x^\wedge \equiv (x^\wedge y)^\wedge \\
 \underbrace{[x^\wedge, [x^\wedge, \dots [x^\wedge, y^\wedge] \dots]]}_n &\equiv ((x^\wedge)^n y)^\wedge \\
 \underbrace{[x^\wedge, [x^\wedge, \dots [x^\wedge, y^\wedge] \dots]]}_n &\equiv ((x^\wedge)^n y)^\wedge \\
 p^\odot &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix} \eta 1 & -\varepsilon^\wedge \\ 0^\top & 0^\top \end{bmatrix} \\
 p^\odot &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^\wedge & 0 \end{bmatrix} \\
 x^\wedge p &\equiv p^\odot x \\
 p^\top x^\wedge &\equiv x^\top p^\odot
 \end{aligned}$$

表 7-3 SE(3) 的性质与其近似形式

李代数

李群

(左)雅可比

$$\begin{aligned}
 \xi &= \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \\
 T &= \exp(\xi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n \\
 &\equiv 1 + \xi^\wedge + \left(\frac{1-\cos\phi}{\phi^2} \right) (\xi^\wedge)^2 + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3} \right) (\xi^\wedge)^3 \\
 &\approx 1 + \xi^\wedge \\
 T &\equiv \begin{bmatrix} C & J\rho \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} \\
 \xi^\wedge &\equiv \text{ad}(\xi^\wedge) \\
 \mathcal{T} &= \exp(\xi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^\wedge)^n \\
 &\equiv 1 + \left(\frac{3\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi} \right) \xi^\wedge + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2} \right) (\xi^\wedge)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi^3} \right) (\xi^\wedge)^3 + \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4} \right) (\xi^\wedge)^4 \\
 &\approx 1 + \xi^\wedge \\
 \mathcal{T} &= \text{Ad}(T) \equiv \begin{bmatrix} C & (J\rho)^\wedge C \\ 0 & C \end{bmatrix} \\
 \text{tr}(T) &\equiv 2\cos\phi + 2, \quad \det(T) \equiv 1 \\
 \text{Ad}(T_1 T_2) &= \text{Ad}(T_1) \text{Ad}(T_2) \\
 T^{-1} &\equiv \exp(-\xi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\xi^\wedge)^n \approx 1 - \xi^\wedge \\
 T^{-1} &\equiv \begin{bmatrix} C^\top & -C^\top r \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{T}^{-1} &\equiv \exp(-\xi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\xi^\wedge)^n \approx 1 - \xi^\wedge \\
 \mathcal{T}^{-1} &\equiv \begin{bmatrix} C^\top & -C^\top (J\rho)^\wedge \\ 0 & C^\top \end{bmatrix} \\
 \mathcal{T}\xi &\equiv \xi \\
 T\xi^\wedge &\equiv \xi^\wedge T, \quad \mathcal{T}\xi^\wedge \equiv \xi^\wedge \mathcal{T} \\
 (\mathcal{T}x)^\wedge &\equiv T x^\wedge T^{-1}, \quad (\mathcal{T}x)^\wedge \equiv \mathcal{T} x^\wedge \mathcal{T}^{-1} \\
 \exp((\mathcal{T}x)^\wedge) &\equiv T \exp(x^\wedge) T^{-1} \\
 \exp((\mathcal{T}x)^\wedge) &\equiv \mathcal{T} \exp(x^\wedge) \mathcal{T}^{-1} \\
 (Tp)^\odot &\equiv T p^\odot \mathcal{T}^{-1} \\
 (Tp)^\odot{}^\top (Tp)^\odot &\equiv \mathcal{T}^{-\top} p^\odot{}^\top p^\odot \mathcal{T}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &= \int_0^1 \mathcal{T}^\alpha d\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\xi^\wedge)^n \\
 &= 1 + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2} \right) \xi^\wedge + \left(\frac{4\phi-5\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^3} \right) (\xi^\wedge)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4} \right) (\xi^\wedge)^3 + \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5} \right) (\xi^\wedge)^4 \\
 &\approx 1 + \frac{1}{2} \xi^\wedge \\
 \mathcal{J} &\equiv \begin{bmatrix} J & Q \\ 0 & J \end{bmatrix} \\
 \mathcal{J}^{-1} &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\xi^\wedge)^n \approx 1 - \frac{1}{2} \xi^\wedge \\
 \mathcal{J}^{-1} &\equiv \begin{bmatrix} J^{-1} & -J^{-1} Q J^{-1} \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \\
 Q &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+2)!} (\phi^\wedge)^n \rho^\wedge (\phi^\wedge)^m \\
 &\equiv \frac{1}{2} \rho^\wedge + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3} \right) (\phi^\wedge \rho^\wedge + \rho^\wedge \phi^\wedge + \phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge) \\
 &\quad + \left(\frac{\phi^2+2\cos\phi-2}{2\phi^4} \right) (\phi^\wedge \phi^\wedge \rho^\wedge + \rho^\wedge \phi^\wedge \phi^\wedge - 3\phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge) \\
 &\quad + \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5} \right) (\phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge \phi^\wedge + \phi^\wedge \phi^\wedge \rho^\wedge \phi^\wedge) \\
 \exp((\xi+\delta\xi)^\wedge) &\approx \exp((\mathcal{J}\delta\xi)^\wedge) \exp(\xi^\wedge) \\
 \exp((\xi+\delta\xi)^\wedge) &\approx \exp((\mathcal{J}\delta\xi)^\wedge) \exp(\xi^\wedge) \\
 \mathcal{T} &\equiv 1 + \xi^\wedge \mathcal{J} \\
 \mathcal{J}\xi^\wedge &\equiv \xi^\wedge \mathcal{J} \\
 \mathcal{J}(\xi) &\equiv \mathcal{T}\mathcal{J}(-\xi) \\
 (\exp(\delta\xi^\wedge) T)^\alpha &\approx (1 + (\mathcal{A}(\alpha, \xi) \delta\xi)^\wedge) T^\alpha \\
 \mathcal{A}(\alpha, \xi) &= \alpha \mathcal{J}(\alpha\xi) \mathcal{J}(\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!} (\xi^\wedge)^n
 \end{aligned}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v, \phi, \delta\phi \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{R}^4, x, y, \xi, \delta\xi \in \mathbb{R}^6, C \in SO(3), J, Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, T, T_1, T_2 \in SE(3), \mathcal{T} \in \text{Ad}(SE(3)), \mathcal{J}, \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$



第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计



运动学

- 前面我们介绍了几何学的结构，下面我们来关心一下运动学
- SO(3)上，旋转矩阵与角速度的关系由泊松方程刻画： $\dot{C} = \omega^\wedge C$
- 而旋转矩阵C有对应的李代数，那么也可以考虑李代数的时间导数：

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} \exp(\phi^\wedge) = \int_0^1 \exp(\alpha \phi^\wedge) \dot{\phi}^\wedge \exp((1-\alpha)\phi^\wedge) d\alpha \quad \frac{d}{dt} \exp(A(t)) = \int_0^1 \exp(\alpha A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \exp((1-\alpha)A(t)) d\alpha$$

- 右侧乘C逆，得： $\dot{C}C^T = \int_0^1 C^\alpha \dot{\phi}^\wedge C^{-\alpha} d\alpha = \int_0^1 (C^\alpha \dot{\phi})^\wedge d\alpha = \left(\int_0^1 C^\alpha d\alpha \dot{\phi} \right)^\wedge = (J\dot{\phi})^\wedge$
- 这显示了李代数导数与李群之间的关系： $\omega = J\dot{\phi} \quad \dot{\phi} = J^{-1}\omega$

哈哈哈哈，笑死了。当你有角速度的时候，你为什么还要去用李代数上的导数呢？啊哈哈哈哈



运动学

- 积分
- \dot{C} 并不能直接用来积分，因为积出来的结果不一定满足旋转矩阵约束
- 我们可以假设一小段时间内角速度为常数，那么：

$$\dot{C} = \omega^{\wedge} C \quad \text{可以看成常微分方程，它的解为：}$$

$$C(t_2) = \underbrace{\exp((t_2 - t_1) \omega^{\wedge})}_{C_{21} \in SO(3)} C(t_1)$$

- 该式可用于小区间的数值积分

我的理解哈：

已知当前时刻的旋转矩阵和角速度，如何推测下一时刻的旋转矩阵呢？

答案就在这里。

时间差乘以角速度得到一个李代数，然后指数映射成旋转矩阵，当前的旋转矩阵左乘这个旋转矩阵，就是估计时刻的旋转矩阵。

记得VIO里面常用这个东西，只不过他们可能用的是四元数。



运动学

- $SO(3)$ 的投影
- 由于数值误差，我们往往需要把一个带有误差的矩阵投回 $SO(3)$
- 即寻找 $R \in SO(3)$ ，使得 R 近似于约定的 C ；该问题可构建为优化问题：

背景：有时候对旋转矩阵进行了一系列操作后，得到的结果就不是旋转矩阵了。这时候需要对旋转矩阵进行归一化，让它重新成为旋转矩阵

$$\arg \max_R J(R), \quad J(R) = \text{tr}(CR^T) - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} (r_i^T r_j - \delta_{ij})}_{\text{拉格朗日乘子}}$$

- 此问题的解为： $R = (CC^T)^{-\frac{1}{2}} C$ 它可以用于对误差矩阵进行“归一化”
 - 过程部分略去，可以参见书本第224页

旋转矩阵的投影、归一化
其实挺有意思，也挺有用的
见过一种工程实现是用SVD分解来做的
两种方法孰优孰劣，可以想一想



运动学

- SE(3)运动学: $\dot{r} = \omega^\wedge r + \nu$ 线速度
 $\dot{C} = \omega^\wedge C$ 角速度

$$T = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & J\rho \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} = \exp(\xi^\wedge)$$
- 可以把线、角速度写在一起成为广义速度: $\varpi = \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix}$, 那么运动学可以写得更简单: $\dot{T} = \varpi^\wedge T$
- 同SO(3), SE(3)的李代数也有广义速度与李代数导数的对应关系: $\varpi = \mathcal{J}\dot{\xi}$ $\dot{\xi} = \mathcal{J}^{-1}\varpi$
- 除了使用SO(3)和SE(3)之外, 也可以使用SO(3)+平移的方式来表达运动学
 - 这种方式称为混合类方法, 其实更为常见 (可以规避一些SE(3)上的雅可比计算)



运动学

- 类似的，也可以在SE(3)上进行数值积分：

$$T(t_2) = \underbrace{\exp((t_2 - t_1) \varpi^\wedge)}_{T_{21} \in SE(3)} T(t_1)$$

- 积分误差可以通过对旋转矩阵部分进行归一化，同时对左下角进行归零化实现



运动学

- 下面考虑对SO(3), SE(3)的运动学进行线性化

- SO(3)上的标准运动学方程:

$$\dot{C} = \omega^{\wedge} C$$

引入扰动: $C' = \exp(\delta\phi^{\wedge}) C \approx (1 + \delta\phi^{\wedge}) C$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} ((1 + \delta\phi^{\wedge}) C)}_{\dot{C}'} \approx \underbrace{(\omega + \delta\omega)^{\wedge}}_{\omega'} \underbrace{(1 + \delta\phi^{\wedge}) C}_{C'}$$

- SE(3)上的标准运动学方程:

$$\dot{T} = \varpi^{\wedge} T$$

扰动运动学: $\delta\dot{\phi} = \omega^{\wedge} \delta\phi + \delta\omega$

扰动运动学: $\delta\dot{\xi} = \varpi^{\wedge} \delta\xi + \delta\varpi$



运动学

- 本节略去的内容
 - 李代数上的扰动运动学
 - 动力学
- 原因：实用当中很少使用 $SE(3)$ 上的运动学与动力学，通常是 $SO(3)+t$ 的混合形式
- 扰动运动学更为少见



第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计



概率与统计

- 接下来考虑在 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 上的概率与统计问题
- 这事关我们前几章介绍的方法应该如何应用到三维空间
- 对于向量空间，可以谈论： $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ 但是如何来描述旋转或姿态的不确定性呢？
- 显然李代数是一个向量空间，所以可以在李代数上考虑问题
 - 我们可以在李代数上使用加法，或者在李群上使用扰动，这样共三种情况：

	$SO(3)$	$\mathfrak{so}(3)$
左式	$C = \exp(\epsilon_\ell^\wedge) \bar{C}$	$\phi \approx \mu + J_\ell^{-1}(\mu) \epsilon_\ell$
中式	$C = \exp((\mu + \epsilon_m)^\wedge)$	$\phi = \mu + \epsilon_m$
右式	$C = \bar{C} \exp(\epsilon_r^\wedge)$	$\phi \approx \mu + J_r^{-1}(\mu) \epsilon_r$

左中右的关系：

$$\epsilon_m \approx J_\ell^{-1}(\mu) \epsilon_\ell \approx J_r^{-1}(\mu) \epsilon_r$$

我们默认使用左式



概率与统计

- 使用左式时，那么随机变量C的形式为： $C = \exp(\epsilon^\wedge) \bar{C}$
- 我们说它服从高斯分布，实际指的是：

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \epsilon^\top \Sigma^{-1} \epsilon\right) \quad \text{或} \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

扰动对应的李代数向量服从0均值高斯分布

为了回避周期性问题，通常要假设这个噪声很小

- 如果旋转发生了改变，例如左乘固定的R： $C' = RC$ ，那么C' 也服从高斯分布：

$$C' = RC = R \exp(\epsilon^\wedge) \bar{C} = \exp((R\epsilon)^\wedge) R\bar{C} = \exp(\epsilon'^\wedge) \bar{C}' \quad C' \text{ 的噪声为: } \epsilon' = R\epsilon \sim \mathcal{N}(0, R\Sigma R^\top)$$

这里好像是用到了伴随那里的一个性质？用来交换顺序？

- 可见，它的性质与正常向量的高斯分布一致



概率与统计

- 对于SE(3), 同理
- SE(3)的左式: $T = \exp(\epsilon^\wedge) \bar{T}$ 其中: $\epsilon \in \mathbb{R}^6 \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$

- 同样对于T的线性变换 $T' = RT$, 其噪声变化为:

$$T' = RT = R \exp(\epsilon^\wedge) \bar{T} = \exp((\mathcal{R}\epsilon)^\wedge) R \bar{T} = \exp(\epsilon'^\wedge) \bar{T}'$$

- 新的均值和方差为: $\bar{T}' = R\bar{T}$, $\epsilon' = \mathcal{R}\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{R}\Sigma\mathcal{R}^T)$



概率与统计

- **案例1**: 旋转向量的不确定性
- 现在对固定向量 x 进行旋转, 得到 y , 考虑当旋转不确定时, y 的不确定性 (y 的均值和方差)

$$y = Cx \quad C = \exp(\epsilon^\wedge) \bar{C}, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- 我们可以
 1. 使用蒙特卡洛方法进行模拟
 2. 使用sigma point变换
 3. 或使用解析方法来求



概率与统计

- 先来看解析方法，对exp进行泰勒展开：

$$y = Cx = \left(1 + \epsilon^\wedge + \frac{1}{2} \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge + \frac{1}{6} \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge + \frac{1}{24} \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge + \dots \right) \bar{C}x$$

- 对y取均值时，因为噪声为高斯分布，奇数项期望为零，偶数部分计算二阶和四阶的

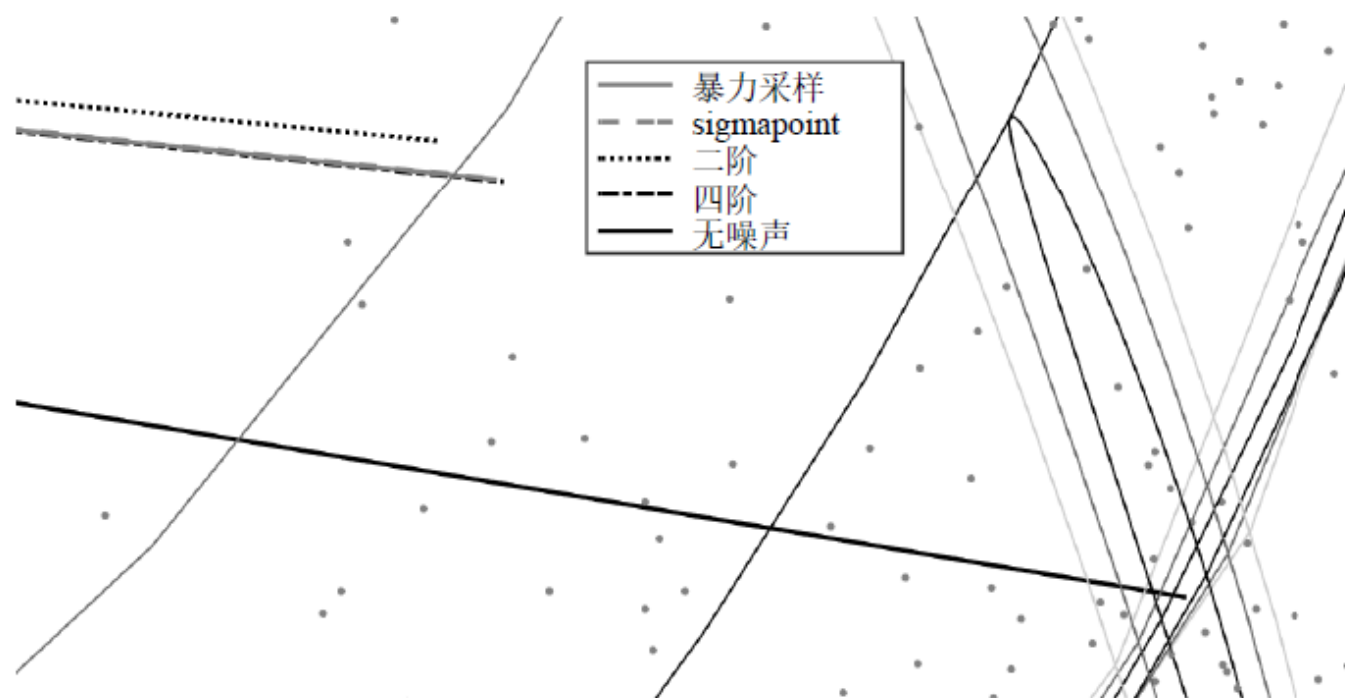
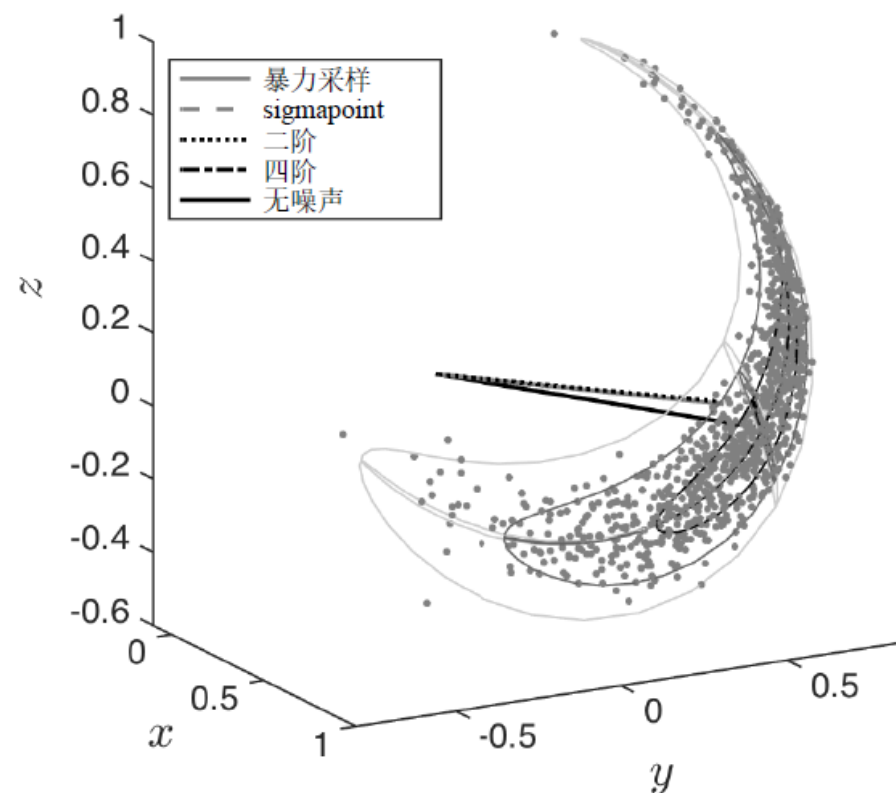
$$E[\epsilon^\wedge \epsilon^\wedge] = E[-(\epsilon^T \epsilon) \mathbf{1} + \epsilon \epsilon^T] = -\text{tr}(E[\epsilon \epsilon^T]) \mathbf{1} + E[\epsilon \epsilon^T] = -\text{tr}(\Sigma) \mathbf{1} + \Sigma$$

$$\begin{aligned} E[\epsilon^\wedge \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge] &= E[-(\epsilon^T \epsilon) \epsilon^\wedge \epsilon^\wedge] \\ &= E[-(\epsilon^T \epsilon) (-(\epsilon^T \epsilon) \mathbf{1} + \epsilon \epsilon^T)] \\ &= \text{tr}(E[(\epsilon^T \epsilon) \epsilon \epsilon^T]) \mathbf{1} - E[(\epsilon^T \epsilon) \epsilon \epsilon^T] \\ &= \text{tr}(\Sigma(\text{tr}(\Sigma) \mathbf{1} + 2\Sigma)) \mathbf{1} - \Sigma(\text{tr}(\Sigma) \mathbf{1} + 2\Sigma) \\ &= ((\text{tr}(\Sigma))^2 + 2\text{tr}(\Sigma^2)) \mathbf{1} - \Sigma(\text{tr}(\Sigma) \mathbf{1} + 2\Sigma) \end{aligned}$$

- 高阶的需要用到Isserlis定理，前面课程略掉了，所以这边也只给结论，不作解释
- 所以， $E[y]$ 并不等于 Cx 的均值，实际上会有一些偏移



概率与统计





概率与统计

- **案例2：**姿态的组合
- 考虑两个带有不确定性的姿态进行组合： $\{\bar{T}_1, \Sigma_1\}$, $\{\bar{T}_2, \Sigma_2\}$ 组合后成为： $T = T_1 T_2$
- 按照噪声的定义，把扰动写出来： $\exp(\epsilon^\wedge) \bar{T} = \exp(\epsilon_1^\wedge) \bar{T}_1 \exp(\epsilon_2^\wedge) \bar{T}_2$
 - 利用Ad把噪声项移到一侧： $\exp(\epsilon^\wedge) \bar{T} = \exp(\epsilon_1^\wedge) \exp((\bar{T}_1 \epsilon_2)^\wedge) \bar{T}_1 \bar{T}_2$ 其中 $\bar{T}_1 = \text{Ad}(\bar{T}_1)$
 - 令 $\epsilon'_2 = \bar{T}_1 \epsilon_2$ ，那么利用BCH展开噪声项：

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon'_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1^\wedge \epsilon'_2 + \frac{1}{12} \epsilon_1^\wedge \epsilon_1^\wedge \epsilon'_2 + \frac{1}{12} \epsilon'_2^\wedge \epsilon'_2^\wedge \epsilon_1 - \frac{1}{24} \epsilon'_2^\wedge \epsilon_1^\wedge \epsilon_1^\wedge \epsilon'_2 + \dots$$

- 假设两个噪声项独立，那么这里列出的项里，只有第4阶是有值的
- 故，保留到3阶项时，可以认为组合之后的均值与均值之组合是一样的
- 协方差推导比较复杂，只给结论：

$$\Sigma_{4\text{th}} \approx \underbrace{\Sigma_1 + \Sigma'_2}_{\Sigma_{2\text{nd}}} + \underbrace{\frac{1}{4} \mathcal{B} + \frac{1}{12} \left(\mathcal{A}_1 \Sigma'_2 + \Sigma'_2 \mathcal{A}_1^\top + \mathcal{A}'_2 \Sigma_1 + \Sigma_1 \mathcal{A}'_2{}^\top \right)}_{\text{额外的四阶项}}$$



概率与统计

- Pose组合的实验
 - 设两个随机Pose变量为：

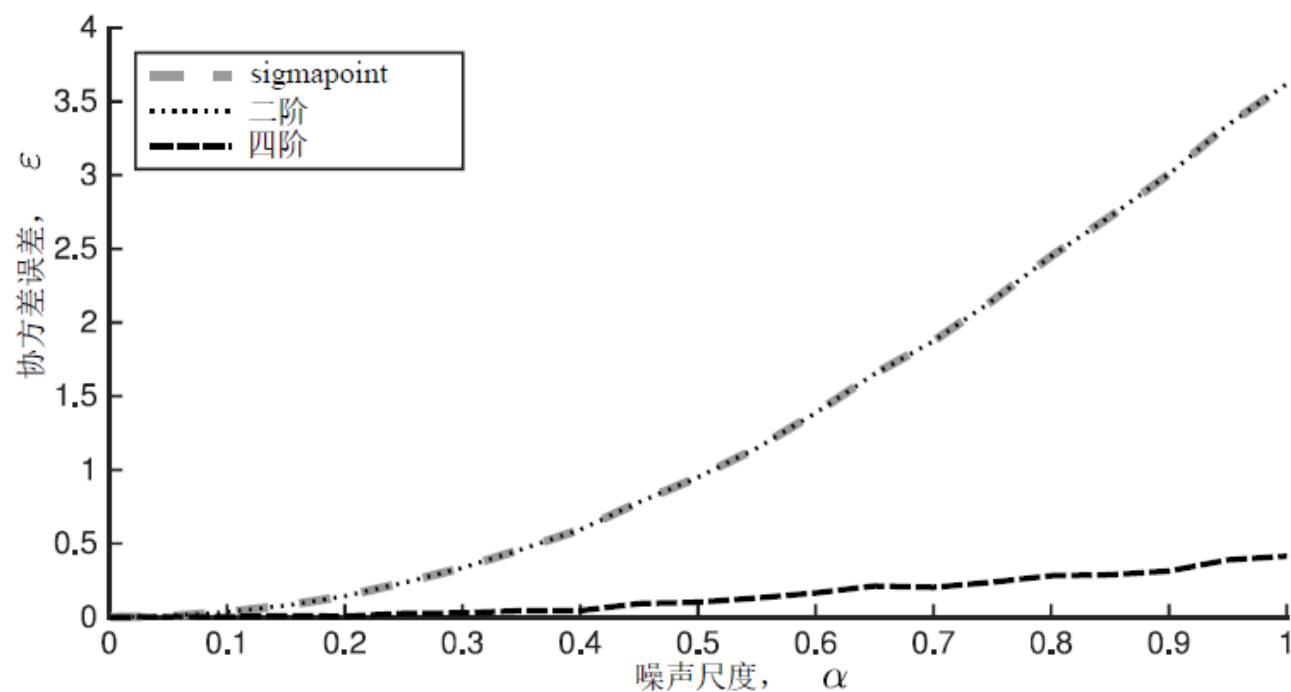
$$\bar{T}_1 = \exp(\bar{\xi}_1^\wedge), \quad \bar{\xi}_1 = [0 \ 2 \ 0 \ \pi/6 \ 0 \ 0]^T$$

$$\Sigma_1 = \alpha \times \text{diag} \left\{ 10, 5, 5, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\bar{T}_2 = \exp(\bar{\xi}_2^\wedge), \quad \bar{\xi}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \pi/4 \ 0]^T$$

$$\Sigma_2 = \alpha \times \text{diag} \left\{ 5, 10, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

- 分别用蒙特卡洛、二阶、四阶和sigma point考察其组合之后的分布情况



协方差误差表明，二阶方法与sigma point方法类似，四阶方法明显优于其他



概率与统计

- 其余几个案例，请同学们自己阅读（多个Pose组合案例、相机观测路标案例）
- 小结
- 本节课介绍了：
 - 如何通过 $SO(3)$, $SE(3)$ 表达旋转和姿态；
 - $so(3)$ 、 $se(3)$ 与李群的关系
 - 利用 $so(3)$ 和 $se(3)$ 进行求导、求差、求不确定性的方式



习题

- 课后习题1-5, 7, 8, 11, 12