



机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔, 谢晓佳等 译

Slides by Xiang Gao

2020年春



第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态



注意

- 本章的几个注意点:
 - 注意区别向量的变换关系与坐标的变换关系
 - 向量变换关系告诉我们向量之间的运算，而坐标变换关系则真正告诉我们数值上的计算



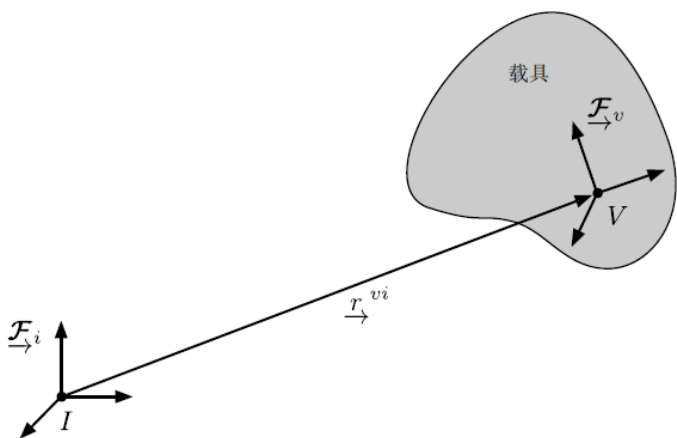
第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态



向量和参考系

- 本章和下章将重点介绍三维空间的各种性质，内容比较丰富
- 本章介绍三维空间，下章介绍三维空间上的李群李代数
- 在考虑实际的车辆或机器人问题时，通常会定义固定在世界上、车辆上的参考系，以及各参考系之间的关系



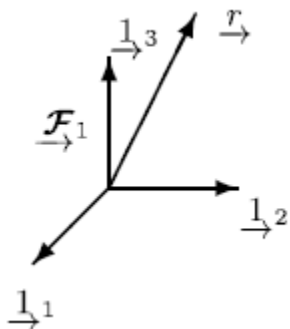
术语：

- **姿态** (pose) : 六自由度
 - 姿态包含**位置** (position) 和**朝向** (orientation)
 - 位置和朝向各有三个自由度
- 有些地方，把朝向称为“姿态”，而把这里的“姿态”称为“位姿”
- 但这只是翻译习惯的问题，这里我们统一把6自由度的称为“姿态”



向量和参考系

• 参考系



$$\begin{aligned}
 r &= r_1 \vec{1}_1 + r_2 \vec{1}_2 + r_3 \vec{1}_3 \\
 &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \\ \vec{1}_2 \\ \vec{1}_3 \end{bmatrix} \\
 &= r_1^T \mathcal{F}_1
 \end{aligned}$$

- 3D空间中，一个参考系由三个单位正交的空间向量组成
- 空间向量的符号是下方加一个箭头，如： $\vec{1}_1$

注意：

1. 空间向量只是一个符号，指代这样一个有长度有方向的东西，本身不带有“坐标”的概念，所以 **请不要把它和几个数值联系起来**
2. 向量本身可以**取长度**，**计算夹角**、**内外积**，这些计算结果是**有效的数值**

- 坐标系由斜体符号带下箭头组成，如： $\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \\ \vec{1}_2 \\ \vec{1}_3 \end{bmatrix}$ 这个称为“**矢阵**” (vectrix)

- 于是向量 \vec{r} 可以在这个参考系下表出
 - 左侧的 r_1^T 是这个向量的坐标，它是有具体取值的
 - 通常写成列的形式： $r_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

请务必区别**空间向量**与平时使用的**数学向量**！

同样注意矢阵没有数值！虽然它的运算与矩阵相似，但不是通常意义上的矩阵！



向量和参考系

- 向量之间可以计算点积，考虑两个向量：

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \\ \vec{1}_2 \\ \vec{1}_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} \vec{1}_1 & \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- 其内积为：

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{s} &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \\ \vec{1}_2 \\ \vec{1}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{1}_1 & \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \cdot \vec{1}_1 & \vec{1}_1 \cdot \vec{1}_2 & \vec{1}_1 \cdot \vec{1}_3 \\ \vec{1}_2 \cdot \vec{1}_1 & \vec{1}_2 \cdot \vec{1}_2 & \vec{1}_2 \cdot \vec{1}_3 \\ \vec{1}_3 \cdot \vec{1}_1 & \vec{1}_3 \cdot \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \cdot \vec{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

中间部分有单位正交性：

$$\begin{aligned} \vec{1}_1 \cdot \vec{1}_1 &= \vec{1}_2 \cdot \vec{1}_2 = \vec{1}_3 \cdot \vec{1}_3 = 1 \\ \vec{1}_1 \cdot \vec{1}_2 &= \vec{1}_2 \cdot \vec{1}_3 = \vec{1}_3 \cdot \vec{1}_1 = 0 \end{aligned}$$

于是： $\vec{r} \cdot \vec{s} = r_1^T \mathbf{1} s_1 = r_1^T s_1 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3$

- 该式给出了内积结果与坐标数值之间的联系
- 但是内积也可以通过向量本身的长度和夹角来确定，不需要指定坐标系



向量和参考系

- 叉积:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \times \vec{s} &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{1}_1 \times \vec{1}_1 & \vec{1}_1 \times \vec{1}_2 & \vec{1}_1 \times \vec{1}_3 \\ \vec{1}_2 \times \vec{1}_1 & \vec{1}_2 \times \vec{1}_2 & \vec{1}_2 \times \vec{1}_3 \\ \vec{1}_3 \times \vec{1}_1 & \vec{1}_3 \times \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \times \vec{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \vec{1}_3 & -\vec{1}_2 \\ -\vec{1}_3 & 0 & \vec{1}_1 \\ \vec{1}_2 & -\vec{1}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \vec{1}_1 & \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\
 &= \mathcal{F}_1^T \vec{r}_1^\times s_1
 \end{aligned}$$

- 叉积的结果是一个向量，它的坐标是倒数第二行右侧项
- 我们把反对称算子写出来:

$$\vec{r}_1^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 可以把它看成叉积算子或反对称算子
- 容易验证:

$$(\vec{r}_1^\times)^T = -\vec{r}_1^\times$$

$$\vec{r}_1^\times \vec{r}_1 = 0 \quad \vec{r}_1^\times s_1 = -s_1^\times \vec{r}_1$$



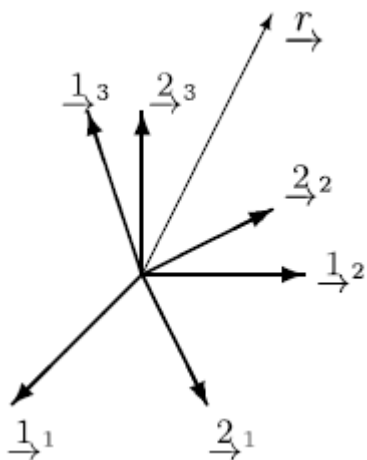
第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态



旋转

- 考虑两个系：1系和2系；某一个向量 \vec{r} 在两个系里分别表示为： $\vec{r} = \underline{\mathcal{F}}_1^T r_1 = \underline{\mathcal{F}}_2^T r_2$



旋转矩阵就是一个内积阵
内积代表投影
所以也可以说是一个投影阵

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{F}}_2^T r_2 &= \underline{\mathcal{F}}_1^T r_1 \\ \underline{\mathcal{F}}_2 \cdot \underline{\mathcal{F}}_2^T r_2 &= \underline{\mathcal{F}}_2 \cdot \underline{\mathcal{F}}_1^T r_1 \\ r_2 &= C_{21} r_1\end{aligned}$$

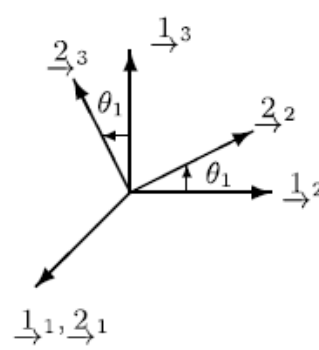
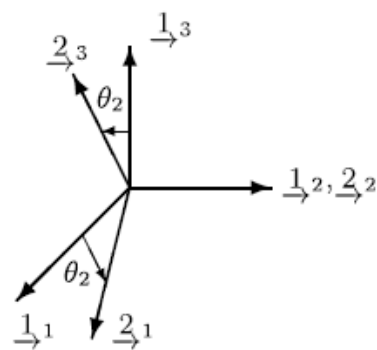
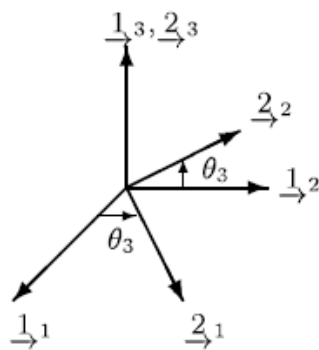
$$\begin{aligned}C_{21} &= \underline{\mathcal{F}}_2 \cdot \underline{\mathcal{F}}_1^T \\ &= \begin{bmatrix} \underline{2}_1 \\ \underline{2}_2 \\ \underline{2}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1}_1 & \underline{1}_2 & \underline{1}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{2}_1 \cdot \underline{1}_1 & \underline{2}_1 \cdot \underline{1}_2 & \underline{2}_1 \cdot \underline{1}_3 \\ \underline{2}_2 \cdot \underline{1}_1 & \underline{2}_2 \cdot \underline{1}_2 & \underline{2}_2 \cdot \underline{1}_3 \\ \underline{2}_3 \cdot \underline{1}_1 & \underline{2}_3 \cdot \underline{1}_2 & \underline{2}_3 \cdot \underline{1}_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

这里的C21称为旋转矩阵/方向余弦矩阵，可以用于进行坐标的转换



旋转

- 旋转矩阵的性质：
 - 旋转矩阵的逆矩阵与转置相同： $C_{12} = C_{21}^{-1} = C_{21}^T$ 因此它是正交矩阵 (orthonormal matrix)
 - 绕三个方向上旋转：



$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

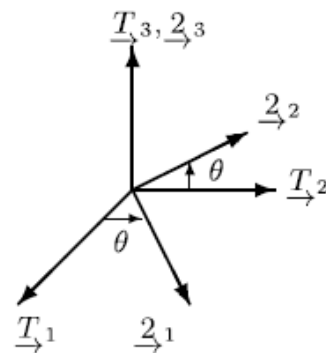
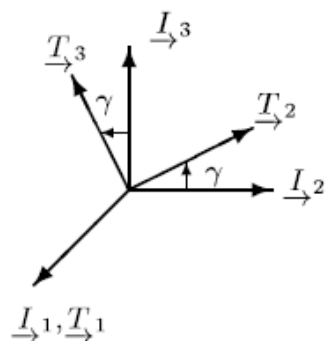
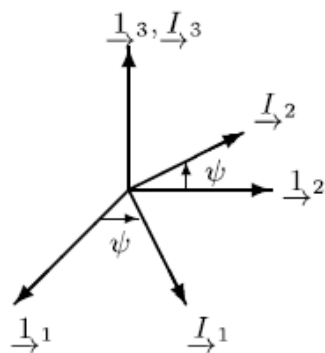
$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



旋转

- 其他旋转表达形式
 - 旋转矩阵是9参数3自由度的，因此必须带有约束（正交且行列式为1）
 - 多于3个参数的表达式，必然有额外约束；只有3个参数的表达式，必然存在奇异点。
- 欧拉角
 - 用一系列绕主轴的旋转之序列来分解某个旋转，例如3-1-3的欧拉角：



θ : 自旋角 (spin angle);

γ : 章动角 (nutation angle);

ψ : 进动角 (precession angle).

$$C_{21}(\theta, \gamma, \psi) = C_{2T} C_{TI} C_{I1}$$

$$= C_3(\theta) C_1(\gamma) C_3(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi - s_\theta c_\gamma s_\psi & s_\psi c_\theta + c_\gamma s_\theta c_\psi & s_\gamma s_\theta \\ -c_\psi s_\theta - c_\theta c_\gamma s_\psi & -s_\psi s_\theta + c_\theta c_\gamma c_\psi & s_\gamma c_\theta \\ s_\psi s_\gamma & -s_\gamma c_\psi & c_\gamma \end{bmatrix}$$



旋转

- 其他例子的欧拉角：1-2-3（翻滚-俯仰-偏航）

$$C_{21}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = C_3(\theta_3)C_2(\theta_2)C_1(\theta_1)$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$



所有欧拉角都有奇异点，RPY中P=90度时：

$$C_{21}(\theta_3, \frac{\pi}{2}, \theta_1) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta_1 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_3) \\ 0 & \cos(\theta_1 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见Roll和Yaw描述了同样的运动，此时，给定某个姿态时，计算出来的欧拉角不是唯一的（Roll和Yaw可以任意取值，只要和不变）



旋转

- RPY中，如果旋转角度很小：

$$C_{21}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = C_3(\theta_3)C_2(\theta_2)C_1(\theta_1)$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$

这时把：

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

称为旋转向量 (rotation vector)

- 那么cos约等于1，sin约等于一次项，两个sin可忽略：

$$C_{21} \approx \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \mathbf{1} - \theta^\times$$



旋转

- 欧拉旋转定理：刚体在三维空间的一般运动可分解为刚体上方某一点的平移，以及绕此点旋转轴的转动
- 我们把旋转轴定义为 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ ，角度定义为 ϕ ，那么旋转矩阵可表为：

$$C_{21} = \cos \phi \mathbf{1} + (1 - \cos \phi) \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \sin \phi \mathbf{a}^\times$$

- 该式即罗德里格斯公式。

- 如果把转轴和角度写为： $\eta = \cos \frac{\phi}{2}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} \sin \frac{\phi}{2} = \begin{bmatrix} a_1 \sin(\phi/2) \\ a_2 \sin(\phi/2) \\ a_3 \sin(\phi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$

- 那么也可以用参数 ε , η 来表示旋转，这种表示称为**欧拉参数** (Euler parameters)



旋转

- 四元数

- 四元数使用扩展的复数来表达旋转，3D旋转可以用单位四元数表达
- 由于四元数在各种教材中都有涉及，本课程不展开四元数的详细性质，重点放在后面运动学和动力学上
- 本书使用的四元数：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{虚部, 3x1 向量} \\ \text{实部, 1维标量} \end{array}$$

定义两个算子：

可以把四元数表为旋转矩阵：

$$\mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\top & \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^\oplus = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\top & \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \mathbf{q}^+ \mathbf{q}^{-1\oplus} = \mathbf{q}^{-1\oplus} \mathbf{q}^+ = \mathbf{q}^{\oplus\top} \mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$



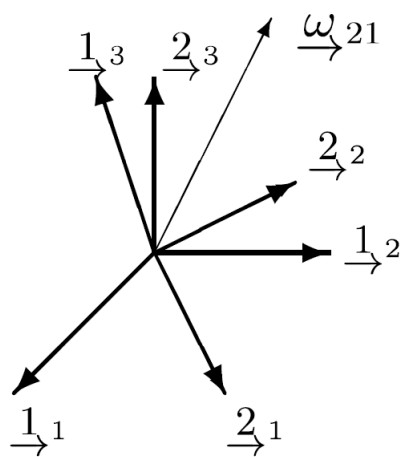
旋转

- Gibbs向量（略）
- 以上谈了各种旋转的表达方式，但这是不够的
- 我们更关心它的运动特性和状态估计特性
- 下面来介绍运动学



运动学

- 设参考系F2正在绕F1旋转，它的旋转角速度是一个**向量**，记作 $\vec{\omega}^{21}$ ，反过来的记作 $\vec{\omega}^{12} = -\vec{\omega}^{21}$



聪明的小读者会问：角速度是什么？为什么它是个向量呢？

- 旋转是由转轴和速度刻画的；
- 把转轴定义成方向，速度大小定义为长度，就得到了角速度向量；
- 由于转轴和速度都是可变的，所以我们现在谈论的是**瞬时转轴**；
- 同样，在没有定义参考系时，没法谈论这个向量的坐标或数值



运动学

- 向量随时间发生变化

- 从其中一个系里看来，另一个系的三个轴在不断地运动，因此可以谈论 **向量时间导数** (vector time derivate)
- 向量时间导数仍然是向量，但是在不同系里是**不一样**的。例如：1系的三个轴在1系里是不动的，但在2系里看来是动的。所以，用不同的符号来表达导数在哪个系里取：

$$\dot{\mathcal{F}}_{\rightarrow 1} = \underset{\bullet}{0}, \quad \dot{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2} = \underset{\circ}{0}$$

黑点表示在1系中取导数，白点在2系中
显然自身三个轴在自身看来不动；

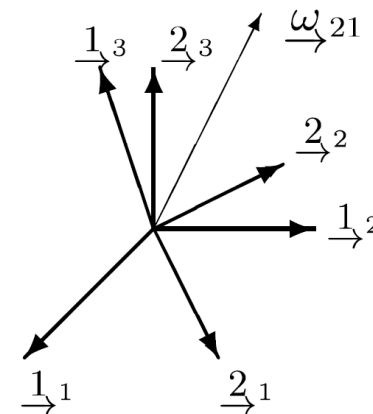
- 2系的三个轴在1系看来，以 ω_{21} 的角速度转动：

$$\dot{\underline{z}}_1 = \omega_{21} \times \underline{z}_1, \quad \dot{\underline{z}}_2 = \omega_{21} \times \underline{z}_2, \quad \dot{\underline{z}}_3 = \omega_{21} \times \underline{z}_3$$

$$\text{等价地写成: } \begin{bmatrix} \dot{\underline{z}}_1 & \dot{\underline{z}}_2 & \dot{\underline{z}}_3 \end{bmatrix} = \omega_{21} \times \begin{bmatrix} \underline{z}_1 & \underline{z}_2 & \underline{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T = \omega_{21} \times \mathcal{F}_{\rightarrow 2}^T$$

注意这里依然没涉及数值
请区分向量时间导数与坐标的时间导数



不是说坐标不一样，
而是向量本身不一样



运动学

- 对于某个向量 $\underline{r}_{\rightarrow}$ ，它的表达式为： $\underline{r}_{\rightarrow} = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 1}^T \underline{r}_1 = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \underline{r}_2$

□ 注意 \underline{r} 本身是在变的

- 对该式求时间导数，导数运算法则仍然成立：

$$\underline{r}_{\rightarrow}^{\bullet} = \underbrace{\underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 1}^{\bullet T}}_{\text{为零}} \underline{r}_1 + \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 1}^T \dot{\underline{r}}_1 = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 1}^T \dot{\underline{r}}_1$$

只乘 \underline{r}_1 的坐标导数

这两个结论是平凡的，显然在自己的系下，坐标轴不动，变化的只有坐标

- 对橙色框取2系的时间导数（白点）：

$$\underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^{\circ T} \underline{r}_2 + \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \dot{\underline{r}}_2 = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \dot{\underline{r}}_2 = \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \dot{\underline{r}}_2$$

- 也可以对橙框取1系的时间导数（黑点）：

坐标对时间导数是数值的，取黑白点都是一样的

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\rightarrow}^{\bullet} &= \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \dot{\underline{r}}_2 + \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^{\bullet T} \underline{r}_2 \\ &= \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \dot{\underline{r}}_2 + \underline{\omega}_{21} \times \underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow 2}^T \underline{r}_2 \\ &= \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{21} \times \underline{r}_{\rightarrow} \end{aligned}$$

这个结论是有意义，揭示了黑白点（速度向量）之间的转换关系



运动学

- 对角速度取坐标: $\underline{\omega}_{21} = \underline{\mathcal{F}}_2^T \omega_2^{21}$
- 那么可写出坐标之间的变换关系:
$$\begin{aligned} \underline{r}^\bullet &= \underline{\mathcal{F}}_1^T \dot{r}_1 = \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{r}_2 + \underline{\omega}_{21} \times \underline{r} \\ &= \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{r}_2 + \underline{\mathcal{F}}_2^T \omega_2^{21 \times} r_2 \\ &= \underline{\mathcal{F}}_2^T (\dot{r}_2 + \omega_2^{21 \times} r_2) \end{aligned}$$
- 利用旋转矩阵C12, 将其统一到1系的坐标:

$$\dot{r}_1 = C_{12}(\dot{r}_2 + \omega_2^{21 \times} r_2)$$

该式完全是坐标变换关系



运动学

- 速度

- 速度即位移的时间导数，它也是一个向量，而且在两个系中看起来不同

$$\underline{v}_{\rightarrow} = \underline{r}_{\rightarrow}^{\bullet} = \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow}$$

同样，不是说速度这个向量在两个系中坐标不同，
而是说，两个系中速度向量本来就不是同一个

- 再求一次1系的时间导数，可得到加速度向量的变换关系：

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\rightarrow}^{\bullet\bullet} &= \underline{v}_{\rightarrow}^{\bullet} = \underline{v}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{v}_{\rightarrow} \\ &= (\underline{r}_{\rightarrow}^{\circ\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21}^{\circ} \times \underline{r}_{\rightarrow}) \\ &\quad + (\underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times (\underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow})) \\ &= \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ\circ} + 2\underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21}^{\circ} \times \underline{r}_{\rightarrow} + \underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times (\underline{\omega}_{\rightarrow 21} \times \underline{r}_{\rightarrow}) \end{aligned}$$

代入坐标：

$$\underline{r}_{\rightarrow}^{\bullet\bullet} = \underline{\mathcal{F}}_1^T \ddot{\underline{r}}_1, \quad \underline{r}_{\rightarrow}^{\circ\circ} = \underline{\mathcal{F}}_2^T \ddot{\underline{r}}_2, \quad \underline{\omega}_{\rightarrow 21}^{\circ} = \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{\underline{\omega}}_2^{21}$$

于是得：

$$\ddot{\underline{r}}_1 = \underline{C}_{12} \left[\ddot{\underline{r}}_2 + 2\underline{\omega}_2^{21 \times} \dot{\underline{r}}_2 + \dot{\underline{\omega}}_2^{21 \times} \underline{r}_2 + \underline{\omega}_2^{21 \times} \underline{\omega}_2^{21 \times} \underline{r}_2 \right]$$

2系加速度

角加速度

科式加速度

向心加速度



运动学

- 角速度与旋转矩阵的关系

- 旋转矩阵刻画两个参考系之间的变换: $\underline{\mathcal{F}}_1^T = \underline{\mathcal{F}}_2^T C_{21}$

- 两侧取1系的时间导数: $\underline{0} = \underline{\mathcal{F}}_2^{\bullet T} C_{21} + \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{C}_{21}$

- 代入角速度表达式: $\underline{0} = \underline{\omega}_{21} \times \underline{\mathcal{F}}_2^T C_{21} + \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{C}_{21}$

- 代入角速度坐标: $\underline{0} = \omega_2^{21^T} \underline{\mathcal{F}}_2 \times \underline{\mathcal{F}}_2^T C_{21} + \underline{\mathcal{F}}_2^T \dot{C}_{21}$

$$= \underline{\mathcal{F}}_2^T \left(\omega_2^{21 \times} C_{21} + \dot{C}_{21} \right)$$

- 内部为零, 于是: $\dot{C}_{21} = -\omega_2^{21 \times} C_{21}$

- 因此, 角速度给出了旋转矩阵在时间上的微分关系。该式称为泊松公式 (Poisson' s Equation) 。

- 欧拉角序列的运动学 (略)



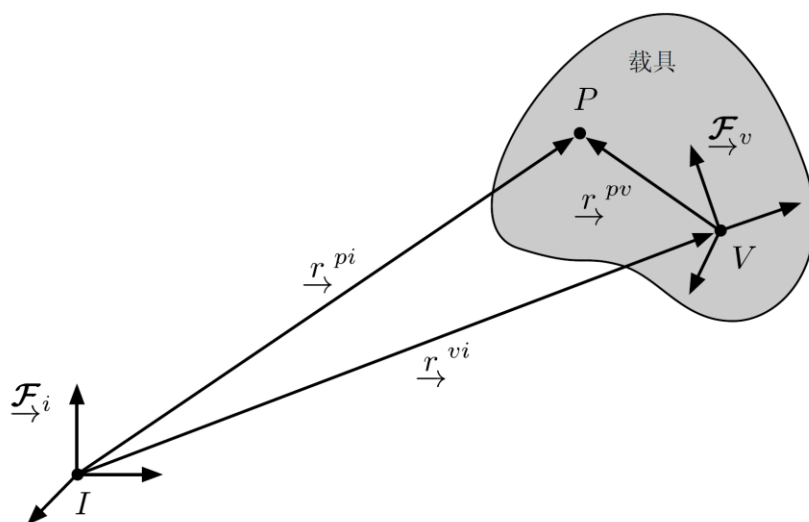
第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态



姿态

- 下面我们把平移也考虑进来：



平移部分的向量关系：

$$\underline{r}^{pi} = \underline{r}^{pv} + \underline{r}^{vi}$$

取 I 系作为参考系，那么坐标关系为：

$$\mathbf{r}_i^{pi} = \mathbf{r}_i^{pv} + \mathbf{r}_i^{vi}$$

如果 P 固定在载体上，那么利用载体系的旋转矩阵，可写为：

$$\mathbf{r}_i^{pi} = \mathbf{C}_{iv} \mathbf{r}_v^{pv} + \mathbf{r}_i^{vi}$$

那么载体的姿态（或位姿）记为： $\{\mathbf{r}_i^{vi}, \mathbf{C}_{iv}\}$

注意实际取Cvi或riv都是可以的



姿态

- 有了平移之后，加进旋转矩阵，将其扩充为变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_i^{pi} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{iv} & \mathbf{r}_i^{vi} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{iv}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_v^{pv} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 变换矩阵在使用时，需要对3D点坐标末尾增加一个1，使之成为齐次坐标：
 - 齐次坐标在计算机视觉中很有用，不过状态估计中不必展开讨论
- 不需要齐次坐标时，把最后的1去掉即可。
- 有了齐次坐标，变换矩阵就可以累乘： $\mathbf{T}_{iv} = \mathbf{T}_{ia}\mathbf{T}_{ab}\mathbf{T}_{bv}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



姿态

- 例子：2D车辆

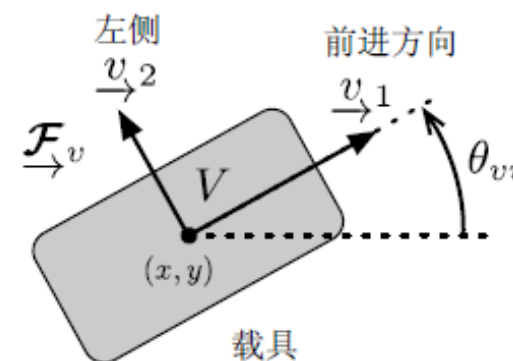
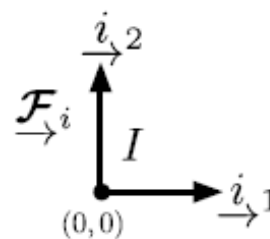
- 世界参考系为I系，车辆系为V系；
- 车辆的位置表达为I到V的向量在I系下取坐标：
- 而方向可以取I到V的旋转矩阵或其逆：

$$C_{vi} = C_3(\theta_{vi}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{vi} & \sin \theta_{vi} & 0 \\ -\sin \theta_{vi} & \cos \theta_{vi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{iv} = C_{vi}^T = C_3(-\theta_{vi}) = C_3(\theta_{iv})$$

- 那么用于表示车辆姿态的变换矩阵可以取：

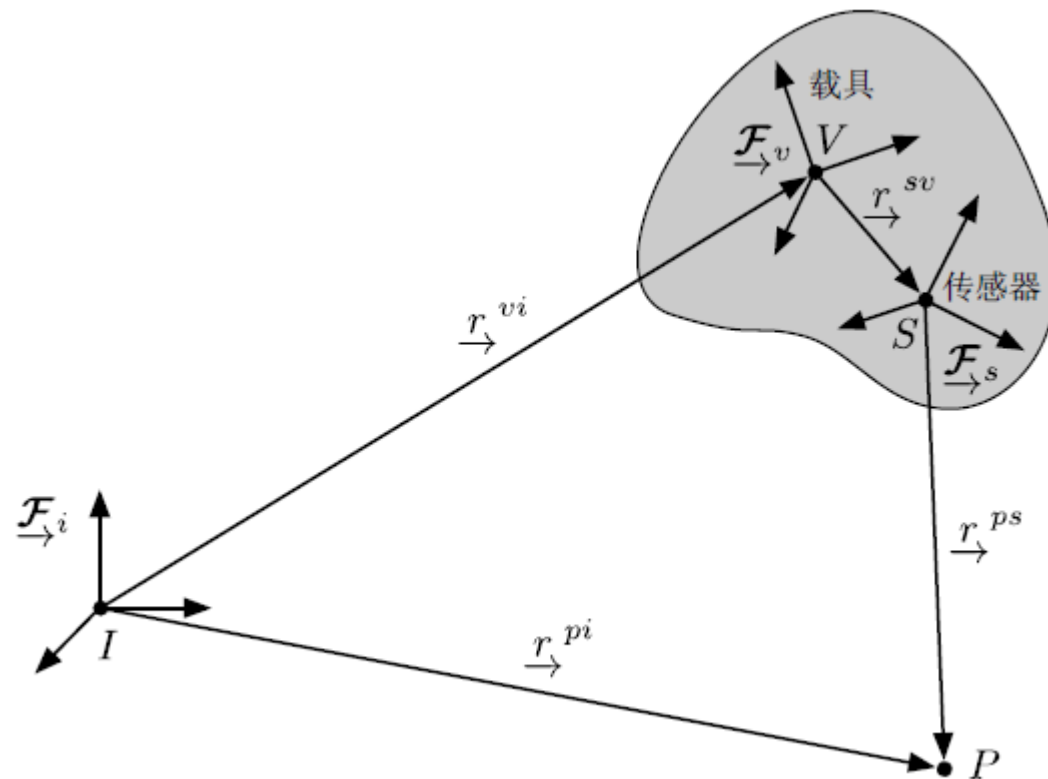
$$T_{iv} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{vi} & -\sin \theta_{vi} & 0 & x \\ \sin \theta_{vi} & \cos \theta_{vi} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





姿态

- Frenet标架 (略)
- 传感器模型
 - 传感器安装于载具上, 有自己的参考系
 - 传感器系到载具系的相对姿态称为外参: T_{sv}
 - 传感器自身还有测量模型, 构成观测方程
- 各种相机模型请参考VSLAM相关课程
- IMU传感器参见VIO课程
- 激光点云模型参见激光课程
- 本课程不作展开





习题

- 课后习题1,2,3,4.