深蓝学院
shenlanxueyuan.com

机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔，谢晓佳等 译
Slides by Xiang Gao

2020年春

第8讲 位姿和点的估计问题

- 光束平差法
- SLAM

内容回顾

- 前面我们介绍了
  - 通常向量空间的状态估计理论
  - 三维空间的矩阵李群

- 本节课与下节课
  - 该领域内的一些典型问题比如点云配准/SLAM等

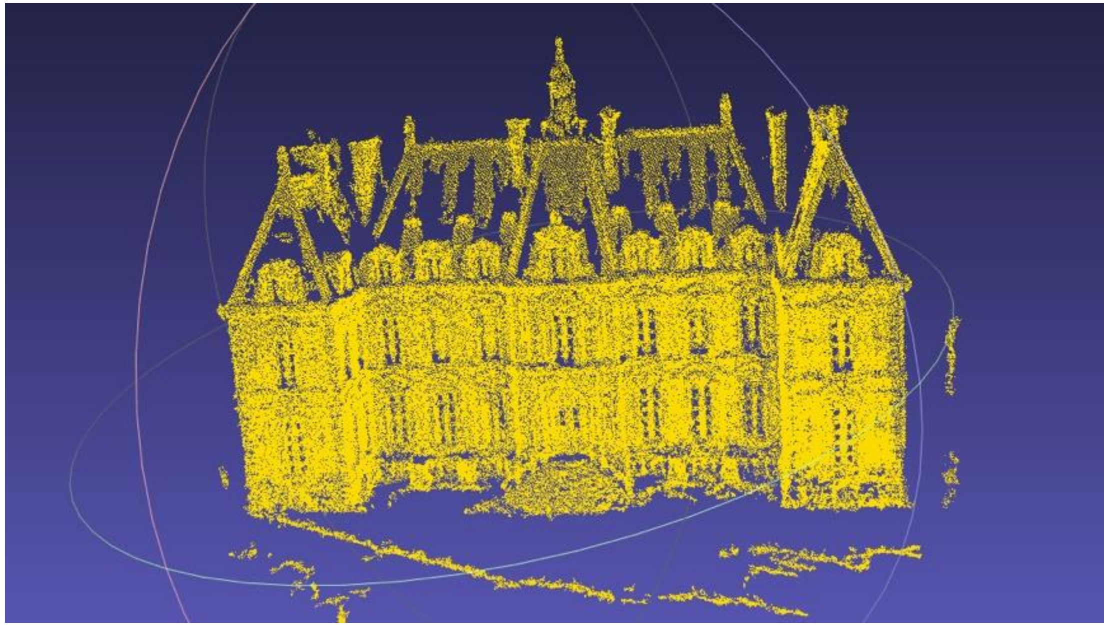
  - 上一节重点介绍了点云配准，尤其是ICP的几种解法
  - 本节我们带上Pose，介绍SLAM类方法

第8讲 位姿和点的估计问题

- 光束平差法
- SLAM

光束平差法

- 光束平差法（Bundle Adjustment）
  - 最早用于航拍图像拼接中
  - 随着计算机视觉的发展，出现在越来越多的商业软件里
  - “光束”是指点通过相机光心，落在成像平面上的过程
  - “平差”是指误差均分，这个概念在测绘学中也用到
  - 下面从状态估计角度介绍光束平差法



光束平差法

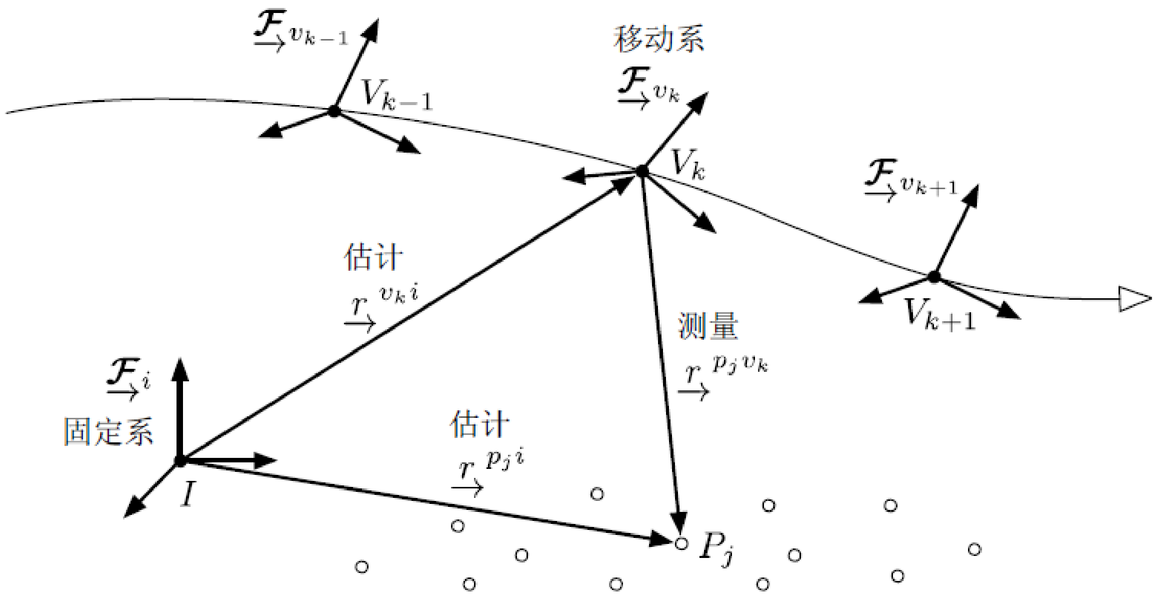
- 问题： $T_k = T_{v_k i}$ ：机器人在 k 时刻的变换矩阵

  $p_j = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix}$ ：第 j 个路标点的齐次坐标

- 待估计的状态整体为：

$$x = \{T_1, \cdots, T_K, p_1, \cdots, p_M\}$$

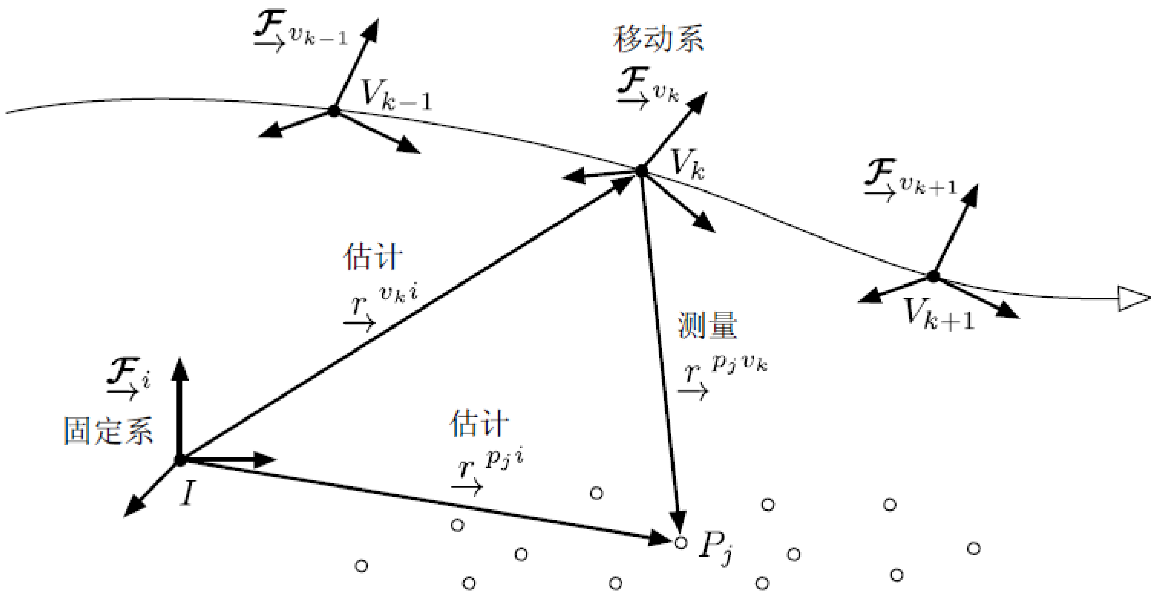
- 即所有时刻的Pose与Point
  - 在上节课里，假设Point坐标是已知的



光束平差法

- 测量模型
  - 我们考虑非线性的测量模型（如相机），而不是像上节课那样，直接测量点的位置
  - 定义测量模型：

$$\boldsymbol{y}_{jk}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right)+\boldsymbol{n}_{jk} \qquad \boldsymbol{n}_{jk}\sim\mathcal{N}\left(\boldsymbol{0},\boldsymbol{R}_{jk}\right)$$



- 测量中有两处非线性
  - 一是把点从世界系变换到当前机器人系
  - 二是对机器人系下的3D点进行测量

$$\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right)=\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{p}_j \qquad \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right)=\boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right)\right)$$

坐标变换 相机投影

光束平差法

- 对非线性测量模型进行基于扰动的线性化
- 因为一阶的实在太简单了，所以这里用了二阶的扰动：

$$T_k = \exp\left(\epsilon_k^\wedge\right) T_{\mathrm{op},k} \approx \left(1 + \epsilon_k^\wedge + \frac{1}{2}\epsilon_k^\wedge \epsilon_k^\wedge\right) T_{\mathrm{op},k}$$

$$p_j = p_{\mathrm{op},j} + D\zeta_j$$

其中： $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 我们表达整体的状态量与扰动量：

$$x_{\mathrm{op}} = \{T_{\mathrm{op},1}, \cdots, T_{\mathrm{op},K}, p_{\mathrm{op},1}, \cdots, p_{\mathrm{op},M}\}$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_K \\ \hline \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix}$$

某一次观测： $\delta x_{jk} = \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \zeta_j \end{bmatrix}$

光束平差法

- 对于一次观测，扰动后为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{jk}) &\approx \left(1 + \epsilon_k^{\wedge} + \frac{1}{2}\epsilon_k^{\wedge}\epsilon_k^{\wedge}\right) \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j} + \boldsymbol{D}\zeta_j\right) \\
&\approx \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j} + \epsilon_k^{\wedge}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D}\zeta_j \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_k^{\wedge}\epsilon_k^{\wedge}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j} + \epsilon_k^{\wedge}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D}\zeta_j \\
&= \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}) + \boldsymbol{Z}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{1}_i \underbrace{\delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{ijk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}}_{\text{标量}}
\end{aligned}
$$

□ 三阶以上舍去

习题：推导此处一阶与二阶项系数

其中：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}) &= \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j} \\
\boldsymbol{Z}_{jk} &= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j})^{\odot} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{ijk} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_i^{\circledcirc}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j})^{\odot} & \boldsymbol{1}_i^{\circledcirc}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D} \\ (\boldsymbol{1}_i^{\circledcirc}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

点圈与空心圈算子：

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^{\odot} = \begin{bmatrix} \eta\boldsymbol{1} & -\varepsilon^{\wedge} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^{\circledcirc} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \varepsilon \\ -\varepsilon^{\wedge} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}
$$

光束平差法

- 应用相机模型：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right) &= \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right)\right) \\
&\approx \boldsymbol{s}\Bigg(\boldsymbol{z}_{\mathrm{op},jk} + \underbrace{\boldsymbol{Z}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_m \mathbf{1}_m \delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{mjk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}}_{\delta\boldsymbol{z}_{jk}}\Bigg) \\
&\approx \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{z}_{\mathrm{op},jk}\right) + \boldsymbol{S}_{jk}\delta\boldsymbol{z}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{z}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{S}}_{ijk}\delta\boldsymbol{z}_{jk} \\
&= \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{z}_{\mathrm{op},jk}\right) + \sum_i \mathbf{1}_i\left(\mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{jk}\right)\left(\boldsymbol{Z}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_m \mathbf{1}_m\delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{mjk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{1}_i\left(\boldsymbol{Z}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_m \mathbf{1}_m\delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{mjk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}\right)^{\mathrm{T}} \\
&\quad \times \boldsymbol{\mathcal{S}}_{ijk}\left(\boldsymbol{Z}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_m \mathbf{1}_m\delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{mjk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}\right) \\
&\approx \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}\right) + \boldsymbol{G}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{1}_i\underbrace{\delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{ijk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}}_{\text{标量}}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}\right) &= \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}\right)\right) \\
\boldsymbol{G}_{jk} &= \boldsymbol{S}_{jk}\boldsymbol{Z}_{jk} \\
\boldsymbol{S}_{jk} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk})} \\
\boldsymbol{\mathcal{G}}_{ijk} &= \boldsymbol{Z}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{S}}_{ijk}\boldsymbol{Z}_{jk} + \sum_m \underbrace{\mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{jk}\mathbf{1}_m}_{\text{标量}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{mjk} \\
\boldsymbol{\mathcal{S}}_{ijk} &= \left.\frac{\partial^2 s_i}{\partial \boldsymbol{z}\,\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk})}
\end{aligned}
$$

（更常见的）一阶近似：

$$
\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{jk}\right) \approx \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk}\right) + \boldsymbol{G}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}
$$

光束平差法

- 线性化之后，可以推导滤波器或者最优化解
- 在有运动方程时，可以类比上一讲，推导EKF与MAP解；
- 无运动方程时，是一个纯BA问题，我们推导最大似然解（无运动先验）

- 误差：
$$\mathbf{e}_{y,jk}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{y}_{jk}-\mathbf{g}\left(\mathbf{x}_{jk}\right)$$
- 目标函数：
$$J\left(\mathbf{x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\mathbf{e}_{y,jk}\left(\mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{jk}^{-1}\mathbf{e}_{y,jk}\left(\mathbf{x}\right)$$

光束平差法

- 牛顿法：
  - 对误差函数进行二阶泰勒展开

$$\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}) \approx \underbrace{\boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk})}_{\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})} - \boldsymbol{G}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} - \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{1}_i \delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{ijk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}$$

  - 合并刚才的相机投影与坐标变换，可以把上式写成：

$$J(\boldsymbol{x}) \approx J(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{b} = \sum_{j,k}\boldsymbol{P}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{jk}^{-1}\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})$$

$$\delta\boldsymbol{x}_{jk} = \boldsymbol{P}_{jk}\delta\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j,k}\boldsymbol{P}_{jk}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{jk}^{-1}\boldsymbol{G}_{jk} - \overbrace{\sum_i \underbrace{\mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{jk}^{-1}\boldsymbol{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})}_{\text{标量}}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{ijk}}^{\text{高斯-牛顿法则忽略这一项}}\right)\boldsymbol{P}_{jk}$$

其中： $\boldsymbol{P}_{jk}$ 为投影矩阵

光束平差法

- 牛顿法推出的A矩阵（即Hessian）为对称正定矩阵，在高斯牛顿法中会被忽略
- 在重投影误差较小时，这项基本可以忽略；
- 但如果较大（离最优解远），那么可以用它来改善收敛速度
  - 然而，虽然收敛快，但每步的计算变多了

- MLE线性方程： $A\delta x^\star = b$ 解得扰动后，更新当前估计

$$T_{\mathrm{op},k} \longleftarrow \exp\left(\epsilon_k^{\star\wedge}\right) T_{\mathrm{op},k}$$

$$p_{\mathrm{op},j} \longleftarrow p_{\mathrm{op},j} + D\zeta_j^\star$$

光束平差法

- 高斯-牛顿法： $\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}^{\star}=\boldsymbol{b}$

  其中：

$$\boldsymbol{b}=\sum_{j,k}\boldsymbol{P}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{jk}^{-1}\mathbf{e}_{y,jk}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}\right)$$

$$\boldsymbol{A}=\sum_{j,k}\boldsymbol{P}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{jk}^{-1}\boldsymbol{G}_{jk}\boldsymbol{P}_{jk}$$

$$\delta\boldsymbol{x}_{jk}=\boldsymbol{P}_{jk}\delta\boldsymbol{x}$$

- 可以不算二阶导数： $\underbrace{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{A}}\delta\boldsymbol{x}^{\star}=\underbrace{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{e}_{y}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}\right)}_{\boldsymbol{b}}$

光束平差法

- 稀疏性与边缘化
- 在BA中，上述线性方程的解并不是稠密的
  - 这是由于每次观测只关联一个点和一个Pose
- 线性方程的求解过程中，把Pose与Point的变量进行分块：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x_1^\star \\ \delta x_2^\star \end{bmatrix}}_{\delta x^\star} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}$$

其中x1为Pose部分，x2为Point部分

- 那么实际上，由于纯BA中不存在Pose-Pose和Point-Point类型的观测，该矩阵有稀疏结构

光束平差法

- 这种矩阵称为箭头状（Arrow-head）矩阵，对应的平差法称为Sparse Bundle Adjustment

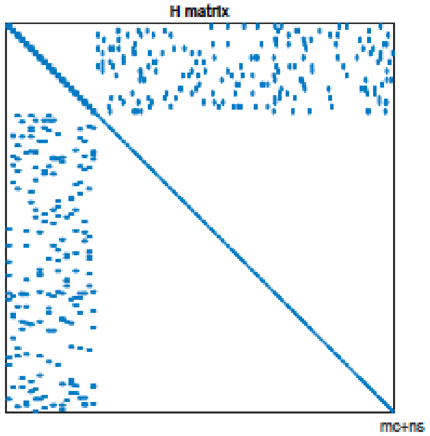


图 10-8　一般情况下的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵。

- 解SBA可以用Schur方法和Cholesky方法

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
* & & & & & * & \cdots & * & \cdots & * \\
 & \ddots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & * & & & * & \cdots & * & \cdots & * \\
 & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\
\hline
* & \cdots & * & \cdots & * & * & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \\
* & \cdots & * & \cdots & * & & & * & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \ddots & \\
* & \cdots & * & \cdots & * & & & & & *
\end{array}\right] \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_k \\ \vdots \\ \epsilon_K \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_j \\ \vdots \\ \zeta_M \end{array} \\
\begin{array}{cccccccccc} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_k & \cdots & \epsilon_K & \zeta_1 & \cdots & \zeta_j & \cdots & \zeta_M \end{array}
\end{array}$$

光束平差法

- Schur法：
- 原问题：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1^\star \\ \delta \mathbf{x}_2^\star \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{x}^\star} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

左右同乘：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- 得到：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1^\star \\ \delta \mathbf{x}_2^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

- 于是可以先解第一个，再解第二个
- 第一个中的A22逆并不难算，因为A22是一个对角块矩阵

- ☐ 注意本书用的Schur法稍有不同
- ☐ 只有左侧的一半，大部分书和论文里还有右侧一半

光束平差法

- Cholesky法
- 对A阵进行Cholesky分解：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{U}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}}$$

- 乘法的展开：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_{22}\boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_{22}&: \text{由于}\boldsymbol{A}_{22}\text{是分对角块矩阵，} \\ &\quad \text{很容易通过 Cholesky 分解计算}\boldsymbol{U}_{22} \\ \boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_{12}&: \text{由于}\boldsymbol{U}_{22}\text{是分对角块矩阵，} \\ &\quad \text{很容易计算}\boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{U}_{11}\boldsymbol{U}_{11}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{U}_{12}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_{11}&: \text{由于}\delta\boldsymbol{x}_1^{\star}\text{元素较少，} \\ &\quad \text{很容易通过 Cholesky 分解计算}\boldsymbol{U}_{11} \end{aligned}$$

所以U的各个块都很好算，于是解：

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$$

得到c，再解：

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}^{\star} = \boldsymbol{c}$$

得到扰动量即可

光束平差法

- Cholesky法也可以换种方式求解：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ U_{12}^{\mathrm{T}} & U_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}_{U^{\mathrm{T}}} \qquad \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

- 于是解： $U^{\mathrm{T}}\delta x^{\star} = U^{-1}b$
- 即

$$\begin{bmatrix} U_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ U_{12}^{\mathrm{T}} & U_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1^{\star} \\ \delta x_2^{\star} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1}\left(b_1 - U_{12}U_{22}^{-1}b_2\right) \\ U_{22}^{-1}b_2 \end{bmatrix}$$

- 整体上和Schur法大同小异

第8讲 位姿和点的估计问题

- 光束平差法
- SLAM

SLAM

- 通常的SLAM除了包含测量方程之外，还会有运动方程
- 增量/批量/滑窗的方式处理SLAM问题都是很常用的
- 这里介绍以李群李代数来处理的方法

- 状态变量： $x = \{T_0, \cdots, T_K, p_1, \cdots, p_M\}$
- 运动： $\bar{T}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^\wedge)}_{\Xi_k} \bar{T}_{k-1}$

$$\delta\xi_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^\curlywedge)}_{\mathrm{Ad}(\Xi_k)} \delta\xi_{k-1} + w_k$$

测量： $y = \{y_{10}, \cdots, y_{M0}, \cdots, y_{1K}, \cdots, y_{MK}\}$

SLAM

- 运动误差：

$$e_{v,k}(x) = \begin{cases} \ln(\check{T}_0 T_0^{-1})^\vee & k=0 \\ \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee & k=1,\cdots,K \end{cases}$$

- 线性化：

$$\begin{aligned} e_{v,k}(x) &= \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee \\ &= \ln\left(\Xi_k \exp(\epsilon_{k-1}^\wedge) T_{\mathrm{op},k-1} T_{\mathrm{op},k}^{-1} \exp(-\epsilon_k^\wedge)\right)^\vee \\ &= \ln\Big(\underbrace{\Xi_k T_{\mathrm{op},k-1} T_{\mathrm{op},k}^{-1}}_{\exp(e_{v,k}(x_{\mathrm{op}})^\wedge)} \exp\left(\left(\mathrm{Ad}(T_{\mathrm{op},k} T_{\mathrm{op},k-1}^{-1})\epsilon_{k-1}\right)^\wedge\right) \exp(-\epsilon_k^\wedge)\Big)^\vee \\ &\approx e_{v,k}(x_{\mathrm{op}}) + \underbrace{\mathrm{Ad}(T_{\mathrm{op},k} T_{\mathrm{op},k-1}^{-1})}_{F_{k-1}} \epsilon_{k-1} - \epsilon_k \end{aligned}$$

SLAM

- 测量误差：$\mathbf{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}}) = \boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j})$
- 线性化：$$\mathbf{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}) \approx \underbrace{\boldsymbol{y}_{jk} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op},jk})}_{\mathbf{e}_{y,jk}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})} - \boldsymbol{G}_{jk}\delta\boldsymbol{x}_{jk} - \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{1}_i \delta\boldsymbol{x}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{ijk}\delta\boldsymbol{x}_{jk}$$
  - 保留一阶，那么：$\boldsymbol{G}_{1,jk} = \boldsymbol{S}_{jk}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{p}_{\mathrm{op},j})^{\odot}$ 对Pose的　　$\boldsymbol{G}_{2,jk} = \boldsymbol{S}_{jk}\boldsymbol{T}_{\mathrm{op},k}\boldsymbol{D}$ 对Point的

SLAM

- 对于整个问题，定义以下整体变量：

$$\delta x_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_K \end{bmatrix}, \quad \delta x_2 = \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix} \quad \delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

$$e_v(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_{v,0}(x_{\text{op}}) \\ e_{v,1}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{v,K}(x_{\text{op}}) \end{bmatrix}, \quad e_y(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_{y,10}(x_{\text{op}}) \\ e_{y,20}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{y,MK}(x_{\text{op}}) \end{bmatrix} \quad e(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_v(x_{\text{op}}) \\ e_y(x_{\text{op}}) \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -F_0 & 1 & & & \\ & -F_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -F_{K-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} G_{1,10} & & & \\ \vdots & & & \\ G_{1,M0} & & & \\ & G_{1,11} & & \\ & \vdots & & \\ & G_{1,M1} & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{1,1K} \\ & & & \vdots \\ & & & G_{1,MK} \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} G_{2,10} & & \\ & \ddots & \\ & & G_{2,M0} \\ G_{2,11} & & \\ & \ddots & \\ & & G_{2,M1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ G_{2,1K} & & \\ & \ddots & \\ & & G_{2,MK} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$Q = \text{diag}\left(\check{P}_0, Q_1, \cdots, Q_K\right), \quad R = \text{diag}\left(R_{10}, R_{20}, \cdots, R_{MK}\right)$$

SLAM

- 那么目标函数的线性方程变为：$\mathbf{A}\delta\mathbf{x}^\star = \mathbf{b}$
- 其中：$\mathbf{A} = \mathbf{H}^\mathrm{T}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{H}^\mathrm{T}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{e}(\mathbf{x}_{\mathrm{op}})$

- 这也就是类似Bundle Adjustment中的大矩阵方程求解
- 用求解结果更新状态变量：$\mathbf{T}_{\mathrm{op},k} \leftarrow \exp\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{\star\wedge}\right)\mathbf{T}_{\mathrm{op},k}, \quad \mathbf{p}_{\mathrm{op},j} \leftarrow \mathbf{p}_{\mathrm{op},j} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_j^\star$

SLAM

- SLAM的稀疏性
- 由于运动方程只引入相邻时刻Pose-Pose类型的约束，因此在分块时：

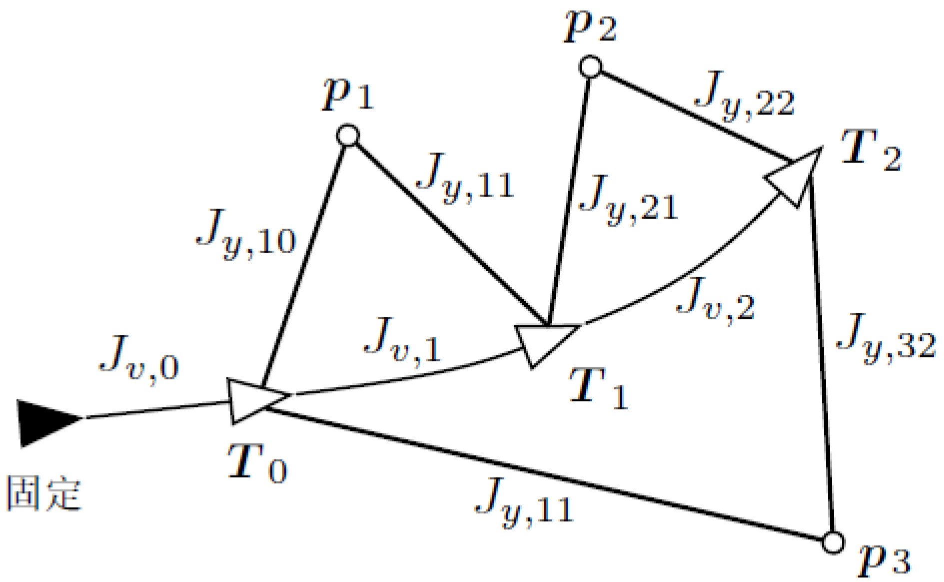
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{T} & A_{22} \end{bmatrix} = H^{T}W^{-1}H$$
$$= \begin{bmatrix} F^{-T}Q^{-1}F^{-1} + G_1^{T}R^{-1}G_1 & G_1^{T}R^{-1}G_2 \\ G_2^{T}R^{-1}G_1 & G_2^{T}R^{-1}G_2 \end{bmatrix}$$

- 仅使得A11变为三对角块矩阵，A12、A22均不动
- 即使考虑回环检测，也只是使A11变为稠密矩阵，仍然可以使用前面所述的Sparse方法

SLAM

- SLAM例子：
- 这种把SLAM问题用图结构来表示的方法称为图优化方法，一个图对应一个SBA问题
- 图结构与Hessian稀疏结构对应

- 图优化是目前SLAM里用到的主流方法
- 本书介绍的SLAM模型也是SLAM里最为简单的一种模型



习题

理论部分：
推导P9页一次项系数与二次项系数

论述题（大作业）：
给定一个综合的自动驾驶SLAM问题，含有传感器为：

- RTK
- IMU
- 车速计
- 激光传感器

请建立离散场景下车辆SLAM问题的数学模型，给出批量状态估计的MAP解法，使用矩阵李群方法，推导其线性化后模型（可以认为各传感器已符合某个给定的时间同步方案）。

该问题有一定的自由发挥空间，大家可以自己定义系统级别的处理方式。例如，IMU部分可以先与车速组合，得到相对运动估计，再作为系统相对运动的一次观测；或者也可以将IMU原始数据模型考虑进来，估计自身参数。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

最后想和大家分享的话

最后想和大家分享的话

- 本门课程已至尾声，通过本课程的学习，我们完成了：
  - 对书上重点内容的深入介绍与亲自推导
  - 熟悉了LG/NLNG系统下的状态估计原理
  - 熟悉了三维空间李群李代数的处理方式
  - 能够自己完成一些公式的推导，对实际问题，能够找到合适的理论进行分析、解决

- 虽然这个课程
  - 全是公式
  - 没有好看的图片（不像CV类或点云类课程）
  - 非常难懂
- 但实际上我们也完整地学习下来了
- 再回过头看前面几章，是什么感觉？

仿佛就像一场悬疑电影。初看时杂乱无章，每个人物都是凭空出现，每个情节都没有来由，然而当答案揭晓，蓦然回看，它们正以最合适的顺序放在那里，不偏不倚。

世上无难事，只要肯登攀。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

谢谢！
Thanks for your attention!