

从零开始手写 VIO

第一讲 概述与课程介绍

贺一家、高翔、崔华坤

2019 年 10 月 10 日

① 课程内容与提要

② VIO 概述

③ 预备知识回顾

Section 1

课程内容与提要

课程与内容提要

- 本课程专注于视觉 +IMU 融合定位的基础理论和实现，作为视觉 SLAM 的进阶课程
- 在本课程中，你将学习到的重点内容有：
 - IMU 的工作原理和噪声方程
 - 视觉与 IMU 紧耦合的基础理论
 - 从零开始实现 VIO 紧耦合优化器（仅基于 Eigen）

相比视觉 SLAM 基础课程，本次课程更加注重 IMU 融合的理论推导与实现。

课程与内容提要

讲师介绍：

贺一家，中科院自动化所博士，“白巧克力亦唯心”博主，研究方向包括视觉 SLAM、多传感器信息融合。CSDN 博客专家，发表 SCI 和 EI 论文数篇。



课程与内容提要

讲师介绍：

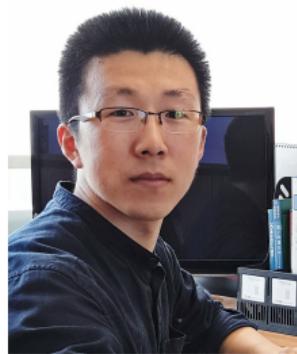
高翔，清华大学博士，慕尼黑工业大学博士后，《视觉 SLAM 十四讲》、《机器人学中的状态估计》作者、译者。曾在 RAS、IROS 等期刊会议发表论文。



课程与内容提要

讲师介绍：

崔华坤，北京工业大学物理学专业毕业，北京臻迪科技 SLAM 算法工程师，研究方向为基于多传感器融合的无人机定位导航。



课程与内容提要

- 课程时间安排：公式推导为主，代码为辅
 - 课程提要，约 1 小时
 - IMU 原理与模型，约 2.5 小时
 - 后端优化与 VIO BA，约 2.5 小时
 - 滑动窗口算法与 FEJ，约 2.5 小时
 - 后端求解系统与代码，约 2.5 小时
 - 前端介绍，约 1.5 小时
 - VIO 初始化，约 1.5 小时
 - VIO 系统回顾与展望，约 1 小时
- 课后作业时间安排：以编程为主，公式推导为辅，每周约 8 小时。

课程与内容提要

预备知识

- 数学：线性代数、微积分、概率论
- 编程：Linux、C++、OpenCV
- 英语：文献阅读
- 专业知识：2D/3D 计算机视觉、图像处理

Section 2

VIO 概述

VIO 概述

VIO: (Visual-Inertial Odometry)

以视觉与 IMU 融合实现里程计

IMU (Inertial Measurement Unit), 惯性测量单元

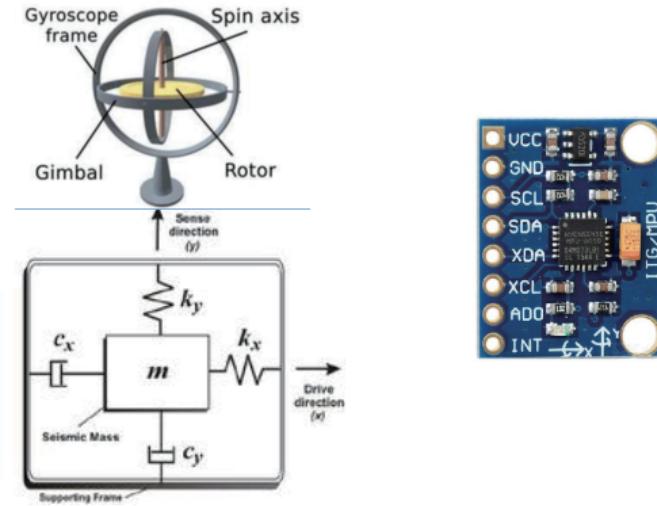
- 典型 6 轴 IMU 以较高频率 ($\geq 100\text{Hz}$) 返回被测量物体的角速度与加速度
- 受自身温度、零偏、振动等因素干扰，积分得到的平移和旋转容易漂移

视觉 Visual Odometry

- 以图像形式记录数据，频率较低 (15 – 60Hz 居多)
- 通过图像特征点或像素推断相机运动

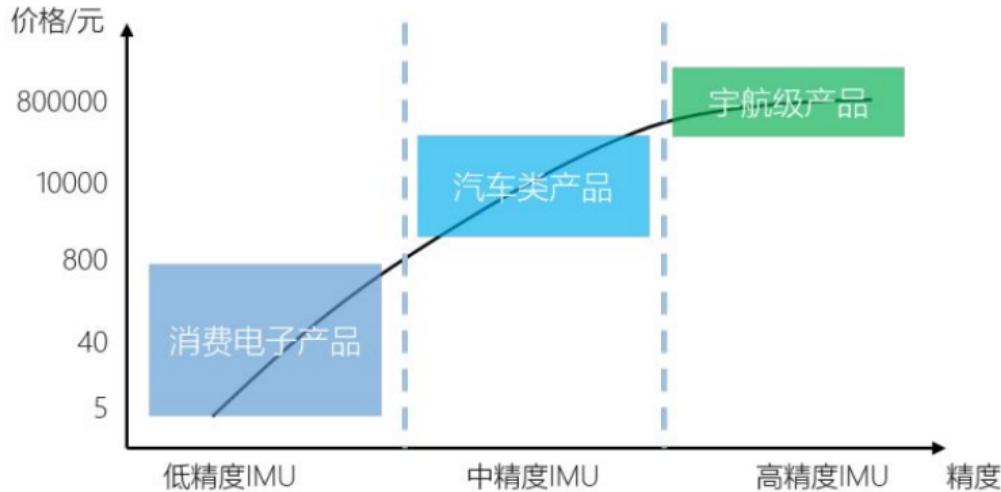
VIO 概述

六自由度 IMU 本身由一个陀螺仪和一个加速度计组成，分别测量自身的角速度和加速度。



VIO 概述

IMU的精度/价格/使用场景



手机等电子产品多使用价格低廉的 MEMS IMU (如 MPU 6050)，自动驾驶类则多使用几万元的 IMU (如 Apollo 中使用的 Novatel SPAN-IGM-A1)¹。

¹ 图片来自<https://zhuanlan.zhihu.com/p/32693377>

VIO 概述

IMU 与视觉定位方案优势与劣势对比：

方案	IMU	视觉
优势	快速响应 不受成像质量影响 角速度普遍比较准确 可估计绝对尺度	不产生漂移 直接测量旋转与平移
劣势	存在零偏 低精度 IMU 积分位姿发散 高精度价格昂贵	受图像遮挡、运动物体干扰 单目视觉无法测量尺度 单目纯旋转运动无法估计 快速运动时易丢失

VIO 概述

整体上，视觉和 IMU 定位方案存在一定互补性质：

- IMU 适合计算短时间、快速的运动；
- 视觉适合计算长时间、慢速的运动。

同时，可利用视觉定位信息来估计 IMU 的零偏，减少 IMU 由零偏导致的发散和累积误差；反之，IMU 可以为视觉提供快速运动时的定位。

VIO 概述

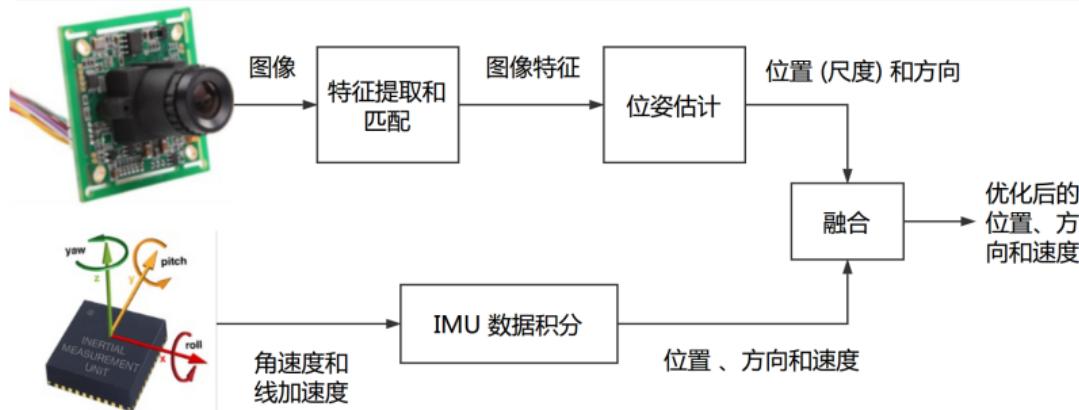
IMU 数据可与多种定位方案融合

- 自动驾驶中通常用 IMU+GPS/差分 GPS/RTK 的融合定位方案，形成 GNSS-INS 组合导航系统，达到厘米级定位精度；
- 头戴式 AR/VR 头盔则多使用视觉 +IMU 的 VIO 定位系统，形成高帧率定位方案。

融合方案

松耦合

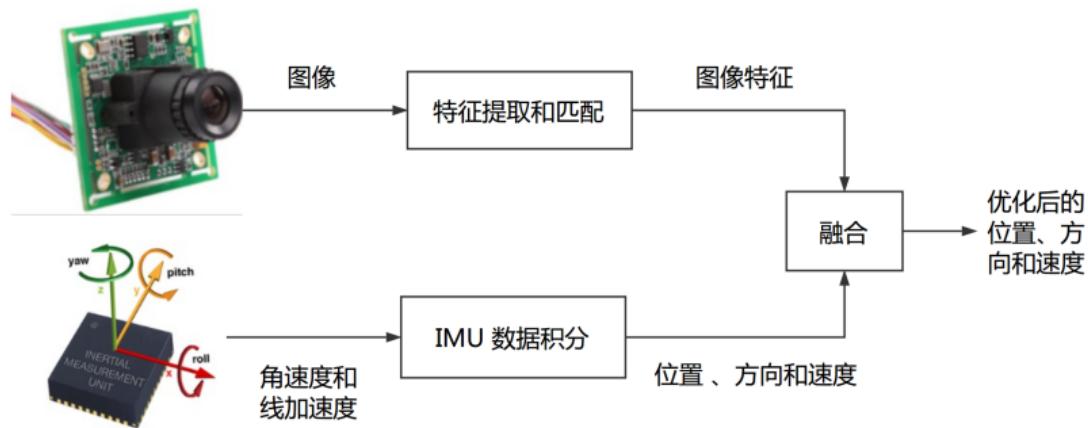
将 IMU 定位与视觉/GNSS 的位姿直接进行融合，融合过程对二者本身不产生影响，作为后处理方式输出。典型方案为卡尔曼滤波器。



融合方案

紧耦合

融合过程本身会影响视觉和 IMU 中的参数（如 IMU 的零偏和视觉的尺度）。典型方案为 MSCKF 和非线性优化。



VIO 概述

为什么要使用紧耦合

- 单纯凭（单目）视觉或 IMU 都不具备估计 Pose 的能力：视觉存在尺度不确定性、IMU 存在零偏导致漂移；
- 松耦合中，视觉内部 BA 没有 IMU 的信息，在整体层面来看不是最优的。
- 紧耦合可以一次性建模所有的运动和测量信息，更容易达到最优。

VIO 概述

本课程要探讨的问题

- IMU 的测量数据表达了系统的什么状态，受哪些噪声影响？
- 如何建立一个带有 IMU 测量信息和视觉特征点信息的非线性优化问题并进行求解？
- 该问题随着时间将发生怎样的演变？



Section 3

预备知识回顾

预备知识回顾

数学符号约定：

- 普通变量： a, b, c
- 矩阵和向量： $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}$
- 集合： \mathbb{R}, \mathbb{Z}
- 特殊集合： \mathcal{F}, \mathcal{G}
- 希腊字母和向量： $\alpha, \boldsymbol{\alpha}$
- 李代数： $\mathfrak{so}(3), \mathfrak{se}(3)$

预备知识回顾

三维刚体运动：

- 我们通常在机器人/车辆上定义各种坐标系，如：
 - 世界坐标系 W；
 - IMU 坐标系 I；
 - 相机坐标系 C；
- 坐标系之间变换关系由一个 $SE(3)$ 给出。如 I 到 W 系的变换矩阵为： T_{WI} ：

$$T_{WI} = \begin{bmatrix} R_{WI} & t_{WI} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (1)$$

- R_{WI} 为 3×3 的旋转矩阵， t_{WI} 为平移向量。
- T_{WI} 右乘一个 I 系下（齐次）坐标，将得到该点 W 系下坐标。

预备知识回顾

约定：

- 当某个量表达坐标系的转换关系时，写在右下脚标，例如 T_{WB} 。
- 当表达矢量在某坐标系中取的坐标时，写在右上角标，如 v^w 表达速度矢量在 World 系坐标。
- I 系也称为 Body 系。
- 定义明确时，有时会省略该脚标，我们会直接谈论 R, t 这样的量。
- 不刻意区分齐次和非齐次坐标，因为在程序中可以自动完成转换，且无歧义。
- 默认以 T_{WI} 表达并存储 IMU 的定位信息，而不是 T_{IW} 。二者实际互为逆，存储哪一类区别不大，视习惯而定。
- 同理， T_{WI} 的平移部分可直接视作 IMU 在世界中的坐标，从而进行绘图或可视化操作。

预备知识回顾

四元数：

- 旋转矩阵 R 亦可用四元数 q 描述。
- 四元数 q 有一个实部和三个虚部。我们把实部写在前：

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^\top \text{ 或 } \mathbf{q} = [w, x, y, z]^\top \quad (2)$$

其中 q_0 为实部， $[q_1, q_2, q_3]^\top$ 为虚部。因为实部为标量，虚部为矢量，所以也可记为：

$$\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]^\top. \quad (3)$$

其中 s 为标量， \mathbf{v} 为虚部的矢量。

预备知识回顾

四元数之间可以进行乘法

四元数的乘法记了好多次都没记下来。

这次用大白话试试：

两个四元数1和2相乘，得到一个新的四元数

四元数的实部是12的实部相乘，减去12的虚部点乘

四元数的虚部是一个三维向量，它由三个三维向量相加得到：

1的实部乘以2的虚部

2的实部乘以1的虚部

1的虚部又乘2的虚部

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = & w_a w_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ & + (w_a x_b + x_a w_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\ & + (w_a y_b - x_a z_b + y_a w_b + z_a x_b) j \\ & + (w_a z_b + x_a y_b - y_a x_b + z_a w_b) k.\end{aligned}\tag{4}$$

或：

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \left[s_a s_b - \mathbf{v}_a^\top \mathbf{v}_b, s_a \mathbf{v}_b + s_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b \right]^\top. \tag{5}$$

此外，四元数可类似复数，定义加减、模长、逆、共轭等运算，不一一展开。

预备知识回顾

单位四元数可表达任意三维旋转，且无奇异性。

四元数和角轴的转换关系：

假设某个旋转运动的旋转轴为单位向量 \mathbf{u} ，绕该轴旋转的角度为 θ ，那么它对应的单位四元数为：

角轴到四元数：

实部：角度的一半的余弦

虚部：角度的一半的正弦，乘以单位向量

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

当旋转一段微小时间，即角度趋于 0 时，容易有：

小量旋转的四元数近似：

实部为 1

虚部为角度除以 2

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta\theta}{2} \\ \mathbf{u} \sin \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 $\delta\theta$ 的方向表示旋转轴，模长表示旋转角度。

预备知识回顾：对时间求导

角速度：

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\Delta t} \quad (8)$$

四元数时间导数：

总结：

1. 旋转矩阵的时间导数 =

角速度叉乘旋转矩阵

$C \cdot = C \omega^A$

2. 角轴（李代数）的时间导数：

$w = J \phi$

角速度等于左雅克比J乘以

李代数的导数

3. 四元数的时间导数 = 四元数右乘一个虚四元数：

实部为0，虚部为角速度的

一半：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}} &\triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q} - \mathbf{q}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)}{\Delta t} \\
 &= \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (9)$$

预备知识回顾

除了利用四元数求导，亦可利用李代数进行旋转求导。

使用旋转矩阵 R 时，角速度为 ω ，那么 R 相对于时间的导数可写作：

该式子在左乘习惯和右乘习惯下写法不同，可能对应的w坐标也不一样？

$$\dot{R} = R \omega^{\wedge} \quad (10)$$

该式被称为泊松公式 (Poisson's equation)，其中 $^{\wedge}$ 为反对称矩阵算子：

$$\omega^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

在本课程中亦记作： ω_{\times} 或者 $[\omega]_{\times}$ ，表达含义相同。

预备知识回顾

$\mathfrak{so}(3)$ 导数：

在优化带有旋转的函数时，通常计算一个增量 $\phi \in \mathfrak{so}(3)$ ，然后用它更新当前估计值：

$$\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} \exp(\phi^\wedge). \quad (12)$$

其中 \exp 为 $\mathfrak{so}(3)$ 至 $\text{SO}(3)$ 上的指数映射。

本课程习惯为右乘，实际当中左右乘等价，仅为习惯上的差别。

注：(i) 不同的 \mathbf{R} 函数，具体的导数形式也不同。(ii) 在程序中，不必区分 \mathbf{R} 是以矩阵存储或是以四元数存储，只需按照该式更新即可。

预备知识回顾

常见的一些雅可比（以自变量为 R 举例）：
旋转点的左扰动雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\mathbf{R}\mathbf{p})}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\exp(\varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p} - \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{I} + \varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p} - \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi^\wedge \mathbf{R}\mathbf{p}}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-(\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge \varphi}{\varphi} = \boxed{-(\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

预备知识回顾

小结：

雅克比的定义是旋转后的点 Rp ，对旋转本身来求导：

左雅克比的结果是旋转后的点取反对称，即 $-(Rp)^\wedge$

右雅克比的结果是旋转前的点取反对称，再左乘 R ，
即 $-Rp^\wedge$

旋转点的右扰动雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{R \exp(\varphi^\wedge) p - Rp}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{R(I + \varphi^\wedge)p - Rp}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{R\varphi^\wedge p}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-Rp^\wedge \varphi}{\varphi} = \boxed{-Rp^\wedge}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

预备知识回顾

Q1:是什么？

两个旋转矩阵相乘，得到新的旋转矩阵，该矩阵对矩阵1和2的偏导数

Q2:怎么表达和推导？

在李代数空间进行求导。分子和分母都是

$$\begin{aligned} \frac{d \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{d \mathbf{R}_2} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \exp(\phi^\wedge))^\vee - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{\phi} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee + \mathbf{J}_r^{-1} \phi - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{\phi} \quad (15) \\ &= \mathbf{J}_r^{-1} (\ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee) \end{aligned}$$

其中用到了对 $\forall \mathbf{R}$:

这是哪个常见的公式，要这么翻译：SO3上右乘一个小量，相当于so3上加上该小量对应的李代数，乘以右雅克比的逆（注意在哪个点）

$$\ln (\mathbf{R} \exp(\phi^\wedge))^\vee = \ln (\mathbf{R})^\vee + \mathbf{J}_r^{-1} \phi \quad (16)$$

和 \mathbf{J}_r^{-1} 为 SO(3) 上的右雅可比：

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\theta \boldsymbol{\omega}) = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T + \frac{\theta}{2} \boldsymbol{\omega}^\wedge. \quad (17)$$

预备知识回顾

旋转连乘的雅可比：

小结：旋转连乘的雅克比

关键是计算该旋转结果处的右雅克比的逆，记为M

对R2求导，结果就是M

对R1求导，结果是M右乘R2的转置

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{d \mathbf{R}_1} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln (\mathbf{R}_1 \exp(\phi^\wedge) \mathbf{R}_2)^\vee - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{\phi} \\
 &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \exp((\mathbf{R}_2^\top \phi)^\wedge))^\vee - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee}{\phi} \\
 &= \mathbf{J}_r^{-1} (\ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^\vee) \mathbf{R}_2^\top
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

这里用到了 SO(3) 的伴随性质：

SO3的伴随性质是什么？一个旋转
李群空间上左乘RT，右乘R，相当于：
李代数空间上左乘RT。
作用其实就是交换了顺序

$$\mathbf{R}^\top \exp(\phi^\wedge) \mathbf{R} = \exp\left(\left(\mathbf{R}^\top \phi\right)^\wedge\right)
 \tag{19}$$

预备知识回顾

有关 SE(3)：由于 SE(3) 李代数性质复杂，在 VIO 中，我们通常使用 $\text{SO}(3) + \mathbf{t}$ 的形式表达旋转和平移。对平移部分使用矢量更新而非 SE(3) 上的更新。

习题

1. VIO 文献阅读

阅读 VIO 相关综述文献如^a，回答以下问题：

- 视觉与 IMU 进行融合之后有何优势？
- 有哪些常见的视觉 +IMU 融合方案？有没有工业界应用的例子？
- 在学术界，VIO 研究有哪些新进展？有没有将学习方法用到 VIO 中的例子？

你也可以对自己感兴趣的方向进行文献调研，阐述你的观点。

^a Jianjun Gui et al. "A review of visual inertial odometry from filtering and optimisation perspectives". In: *Advanced Robotics* 29.20 (2015), 1289–1301. ISSN: 0169-1864. DOI: {10.1080/01691864.2015.1057616}.

习题

两种更新方式：

R右乘小量w对应的SO3

或者q右乘一个四元数（实部为1，虚部为w/2）

2. 四元数和李代数更新

课件提到了可以使用四元数或旋转矩阵存储旋转变量。当我们用计算出来的 ω 对某旋转更新时，有两种不同方式：

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\leftarrow \mathbf{R} \exp(\boldsymbol{\omega}^\wedge) \\ \text{或 } \mathbf{q} &\leftarrow \mathbf{q} \otimes \left[1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\right]^\top \end{aligned} \quad (20)$$

请编程验证对于小量 $\boldsymbol{\omega} = [0.01, 0.02, 0.03]^\top$ ，两种方法得到的结果非常接近，实践当中可视为等同。因此，在后文提到旋转时，我们并不刻意区分旋转本身是 \mathbf{q} 还是 \mathbf{R} ，也不区分其更新方式为上式的哪一种。

习题

3. 其他导数

使用右乘 $\mathfrak{so}(3)$, 推导以下导数:

$$\frac{d(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p})}{d\mathbf{R}} \quad (21)$$

$$\frac{d \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^{-1})^\vee}{d\mathbf{R}_2} \quad (22)$$