# 第 2 讲 IMU 传感器

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 10 月 18 日

# 目录

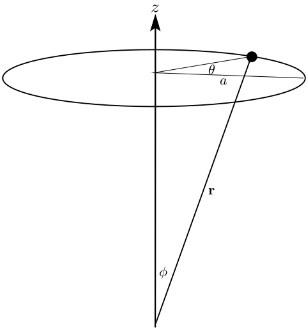
# Section 1

## 旋转运动学

# 线速度与角速度

粒子在坐标系中 $z=h$ 中的平面做圆周运动，坐标为：$\mathbf{r}=(a\cos\theta, a\sin\theta, h)^\top$
对坐标求导得：

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= (-a\dot{\theta}\sin\theta, a\dot{\theta}\cos\theta, 0)^\top \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ h \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}
\end{aligned} \tag{1}
$$



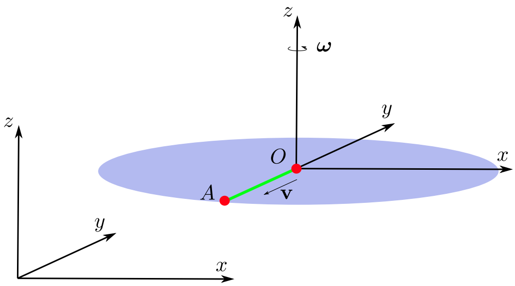

其中 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\mathbf{z}$，$|\dot{\theta}|$ 是角速度大小。
对公式 (1) 两边取模得：

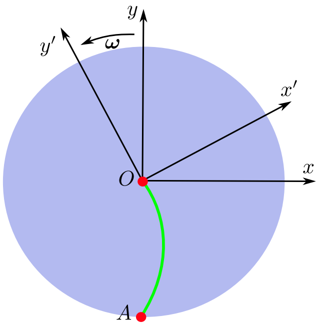
$$
|\dot{\mathbf{r}}| = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}|\sin\phi = a|\dot{\theta}|
$$

# 更复杂一点的例子

一个旋转的水平光滑圆盘上，有一个光滑的小球，从圆心沿着半径向外运动。

- 从外部静止的坐标系来观察，小球轨迹如何？
- 从圆盘旋转坐标系来观察，小球轨迹如何？
- 离心力？科里奥利力？



# 旋转坐标系下的运动学

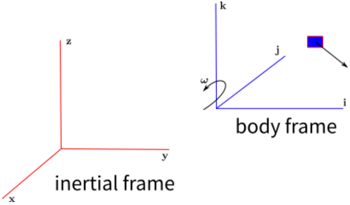


质量块在 body 坐标系下的坐标为：

$$\mathbf{r}^b = (x_1, x_2, x_3)^\top$$

忽略平移，只考虑旋转，则旋转到惯性系下有：

$$\boldsymbol{r}^i(t) = \mathbf{R}_{ib}\mathbf{r}^b$$




对时间求导有：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}^i &= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{r}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib}\mathbf{r}^b \\
&= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{r}}^b + [\mathbf{R}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b]_\times \mathbf{r}^i \\
&= \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i \\
\mathbf{v}^i &= \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i \Leftrightarrow \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b = \mathbf{v}^i - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b$，表示 body 坐标系的角速度在 $I$ 系下的表示。

# 旋转坐标系下的运动学

两个重要的伴随性质之一：
描述：向量v的反对称矩阵，左乘R，右乘RT，就等于向量Rv的反对称矩阵。
常见用法是交换顺序：即Rv^ = (Rv)^R
同理：R·exp(ϕ^) = exp((Rϕ)^)·R

补充：

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_{ib}\mathbf{r}^b &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}_{ib}\exp([\boldsymbol{\omega}^b \Delta t]^\wedge)\mathbf{r}^b - \mathbf{R}_{ib}\mathbf{r}^b}{\Delta t} \\
&\approx \mathbf{R}_{ib}[\boldsymbol{\omega}^b]_\times \mathbf{r}^b \\
&= [\mathbf{R}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b]_\times \mathbf{R}_{ib}\mathbf{r}^b = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i
\end{aligned} \tag{3}
$$

旋转矩阵R与反对称矩阵/指数映射的顺序可以随意交换

对速度求导得到：

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}^i + [\dot{\mathbf{R}}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{R}_{ib}\dot{\boldsymbol{\omega}}^b]_\times \mathbf{r}^i \\
&= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i) + [\mathbf{R}_{ib}\dot{\boldsymbol{\omega}}^b]_\times \mathbf{r}^i \\
&= \mathbf{R}_{ib}\mathbf{a}^b + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^i
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}^i - \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{科氏力}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^i}_{\text{欧拉力}} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i)}_{\text{离心力}}
$$

其中，$\mathbf{v} = \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b$，$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{ib}\mathbf{a}^b$，表示物体在 body 下的速度或加速度在 $I$ 系下的表示。

在旋转坐标系下观察，运动的物体（运动方向和旋转轴不为同一个轴时）会受到科氏力的作用。

# 定义清楚问题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

咦，我们这是要干嘛呢？
惯性坐标系，机器人坐标系，机器人位移和姿态，机器人角速度，加速度…

关于泊松公式一个真正的总结：

旋转矩阵R12的导数，等于R12左乘（1系下角速度的反对称），等于R12右乘（2系下角速度的反对称）

还有一件事，注意区分旋转矩阵的导数（泊松公式）与空间向量坐标系的导数的区别

# Section 2

# IMU 测量模型及运动模型

# IMU 测量模型及运动模型

## MEMS 加速度计工作原理

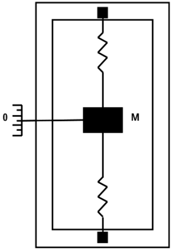
- 测量原理可以用一个简单的质量块 + 弹簧 + 指示计来表示
- 加速度计测量值 $\mathbf{a}_m$ 为弹簧拉力对应的加速度，

别记公式了，用白话：
实际加速度等于测量加速度加上重力加速度，注意是矢量哦！

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{f}}{m} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \tag{5}$$

$\mathbf{f}$ 弹簧拉力，$\mathbf{a}$ 物体在惯性系下的加速度，$\mathbf{g}$ 重力加速度

- MEMS 加速度计利用电容或者电阻桥来等原理来测量 $\mathbf{a}_m$



# 加速度计测量原理

- 东北天坐标系 (ENU):

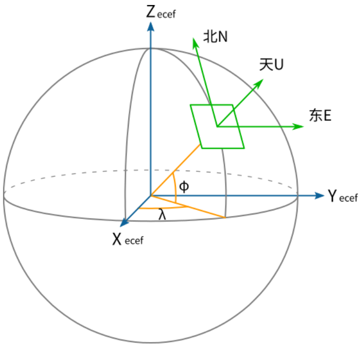
$$\mathbf{g} = (0, 0, -9.81)^\top$$

- 假设 IMU 坐标系就是 ENU 坐标系，$R_{ib} = \mathbf{I}$，静止时有

$$\mathbf{a} = 0$$
$$\mathbf{a}_m = -\mathbf{g}$$

自由落体时有

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}$$
$$\mathbf{a}_m = 0$$



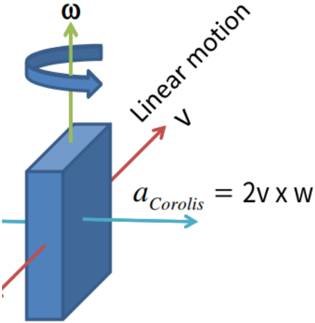
# 陀螺仪测量原理

## 陀螺工作原理

- 陀螺仪主要用来测量物体的旋转角速度，按测量原理分有振动陀螺，光纤陀螺等。
- 低端 MEMS 陀螺上一般采用振动陀螺原理，通过测量 Coriolis force 来间接得到角速度。

# 陀螺仪测量原理

- 在旋转坐标系中，运动的物体受到科氏力作用
- MEMS 陀螺仪：一个主动运动轴 + 一个敏感轴




陀螺仪原理白话：

顾名思义，陀螺，要转起来

一个主动轴驱动运动

一个敏感轴测量速度v

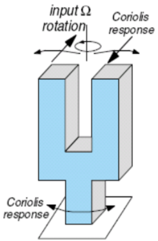
加速度由加速度计获取

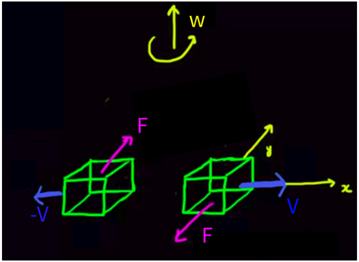
最终算出w

# 音叉振动陀螺原理

## 音叉振动陀螺

- 叉子的中间为旋转轴，叉子左右两个质量块，做方向相反的正弦运动，质量块受到的科氏力方向相反。
- **但是为啥要用这么做呢？一个质量块不行么**



# 思考

## 陀螺仪的 G-sensitivity

实际上，两个质量块不可能完全一致，也就是说陀螺仪的测量可能会受到外部加速度的影响，即常称的 G-sensitivity。

## 疑问

诶，加速度计不需要考虑科氏力的影响吗？

Section 3

# IMU 误差模型

# IMU 误差模型

## 误差分类

- 加速度计和陀螺仪的误差可以分为：确定性误差，随机误差。
- 确定性误差可以事先标定确定，包括：bias, scale ...
- 随机误差通常假设噪声服从高斯分布，包括：高斯白噪声，bias 随机游走...

确定性误差：偏置和尺度
随机误差：偏置的随机游走以及高斯噪声

# 确定性误差

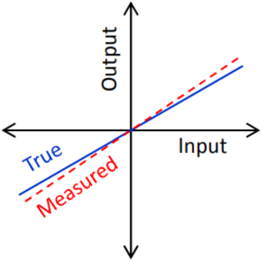
## Bias

理论上，当没有外部作用时，IMU 传感器的输出应该为 0。但是，实际数据存在一个偏置 b。加速度计 bias 对位姿估计的影响：

$$\mathbf{v}_{err} = \mathbf{b}^a t, \quad \mathbf{p}_{err} = \frac{1}{2}\mathbf{b}^a t^2$$

## Scale

scale 可以看成是实际数值和传感器输出值之间的比值。



# IMU 误差模型

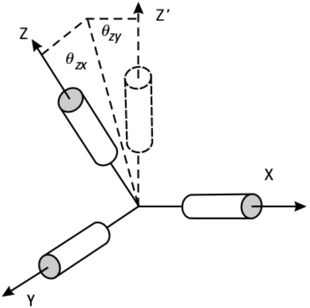
深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## Nonorthogonality/Misalignment Errors

多轴 IMU 传感器制作的时候，由于制作工艺的问题，会使得 $xyz$ 轴可能不垂直，如下图所示。

scale + Misalignment：

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$



# IMU 误差模型

## 其他确定性误差

- Run-to-Run Bias/Scale Factor
- In Run (Stability) Bias/Scale Factor
- Temperature-Dependent Bias/Scale Factor
- ...

# 六面法标定加速度

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

白话：1.用六面法标定加速度和陀螺仪；2.再考虑标定温度

## 六面法标定加速度 bias 和 scale factor

六面法是指将加速度计的 3 个轴分别朝上或者朝下水平放置一段时间，采集 6 个面的数据完成标定。

如果各个轴都是正交的，那很容易得到 bias 和 scale：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \frac{l_f^{up} + l_f^{down}}{2} \\
S &= \frac{l_f^{up} - l_f^{down}}{2 \cdot \|\mathbf{g}\|}
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中，$l$ 为加速度计某个轴的测量值，g 为当地的重力加速度,。

# 六面法标定加速度

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

考虑轴间误差的时候，实际加速度和测量值之间的关系为：

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{bmatrix} \tag{7}$$

水平静止放置 6 面的时候，加速度的理论值为

$$a_1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

对应的测量值矩阵 $\mathbf{L}$ ：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 & \mathbf{l}_4 & \mathbf{l}_5 & \mathbf{l}_6 \end{bmatrix}$$

利用最小二乘就能够把 12 个变量求出来。

# 六面法标定陀螺仪

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

**六面法标定陀螺仪 bias 和 scale factor**

和加速度计六面法不同的是，陀螺仪的真实值由高精度转台提供，这里的 6 面是指各个轴顺时针和逆时针旋转。

# 温度相关的参数标定

## 标定方法

- 目的：这个标定的主要目的是对传感器估计的 bias 和 scale 进行温度补偿，获取不同温度时 bias 和 scale 的值，绘制成曲线。

  两种标定方法：
- soak method：控制恒温室的温度值，然后读取传感器数值进行标定。
- ramp method：记录一段时间内线性升温和降温时传感器的数据来进行标定。

# IMU 随机误差

## 高斯白噪声

IMU 数据连续时间上受到一个均值为 0，方差为 $\sigma$，各时刻之间相互独立的高斯过程 $n(t)$:

两个不同时刻的0均值高斯分布的乘积的期望为：方差（协方差）乘以狄拉克（t1-t2）

$$
\begin{aligned}
E[n(t)] &= 0 \\
E\left[n\left(t_1\right) n\left(t_2\right)\right] &= \sigma^2 \delta\left(t_1 - t_2\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中 $\delta()$ 表示狄拉克函数。

## Bias 随机游走

通俗来讲，随机游走就是每一步走一个0均值高斯分布的步长。
或者说，bias的导数是标准差乘以方差为1的白噪声。

通常用维纳过程 (wiener process) 来建模 bias 随时间连续变化的过程，离散时间下称之为随机游走。

$$
\dot{b}(t) = n_b(t) = \sigma_b w(t) \tag{9}
$$

其中 $w$ 是方差为 1 的白噪声

# IMU 随机误差

**问题**

实际上，IMU 传感器获取的数据为离散采样，离散和连续高斯白噪声存在何种关系？

假设有一个单轴角速度信号收到高斯白噪声和 bias 的影响，建模如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(t) &= \omega(t) + b(t) + n(t) \\ \dot{b}(t) &= n_b(t)\end{aligned} \tag{10}$$

当传感器采集信号时，假设采样时间段内信息为常数：

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\tilde{\omega}(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left[\omega(t) + b(t) + n(t)\right]dt \tag{11}$$

即

$$\tilde{\omega}\left(t_0+\Delta t\right) = \omega\left(t_0+\Delta t\right) + \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left[b(t) + n(t)\right]dt \tag{12}$$

# 高斯白噪声的离散化

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

只考虑高斯白噪声的积分

$$n_d[k] \triangleq n\left(t_0+\Delta t\right) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau) dt \tag{13}$$

协方差为

$$\begin{aligned}
E\left(n_d^2[k]\right) & =E\left(\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau) n(t) d \tau d t\right) \\
& =\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} E(n(\tau) n(t)) d \tau d t \\
& =\frac{\sigma^2}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau) d \tau d t \\
& =\frac{\sigma^2}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{14}$$

# 高斯白噪声的离散化

连续时间下，bias的导数 = (0, σ)高斯分布 = σ×(0,1)高斯分布
离散时间下，某一时刻的白噪声 = （0， σd)高斯分布
其中σd = σ除以根下△t

即

$$n_d[k] = \sigma_d w[k] \tag{15}$$

其中，

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \sigma_d &= \sigma \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{16}$$

也就是说高斯白噪声的连续时间到离散时间之间差一个 $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$，$\sqrt{\Delta t}$ 是传感器的采样时间。

# bias 随机游走的离散化

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

将公式 (9) 代入 (12)，提取 bias 积分部分

$$b\left(t_0+\Delta t\right)=b\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(t) d t \tag{17}$$

由此可得离散化下的 bias 协方差

$$E\left\{b^2\left(t_0+\Delta t\right)\right\}=E\left\{\left[b\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(t) d t\right]\left[b\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(\tau) d \tau\right]\right\} \tag{18}$$

由于 $E\left\{n_b(t) n_b(\tau)\right\}=\sigma_b^2 \delta(t-\tau)$ 有：

$$E\left\{b^2\left(t_0+\Delta t\right)\right\}=E\left\{b^2\left(t_0\right)\right\}+\sigma_b^2 \Delta t \tag{19}$$

# bias 随机游走的离散化

即:

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bd} w[k] \tag{20}$$

其中 :

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \sigma_{bd} &= \sigma_b \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \tag{21}$$

bias 随机游走的噪声方差从连续时间到离散之间需要乘以 $\sqrt{\Delta t}$ .

更详细的连续到离散的推导参见[1]。

白话：从连续时间到离散时间：
高斯白噪声的标准差要除以采样时间的平方根；
随机游走的标准差要乘以采样时间的平方根。

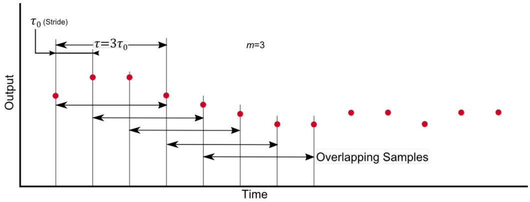
[1] John L Crassidis. "Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation". In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 42.2 (2006), pp. 750–756.

# IMU 随机误差的标定

## 艾伦方差标定 random walk noise

Allan 方差法是 20 世纪 60 年代由美国国家标准局的 David Allan 提出的，它是一种基于时域的分析方法。
具体的流程如下：

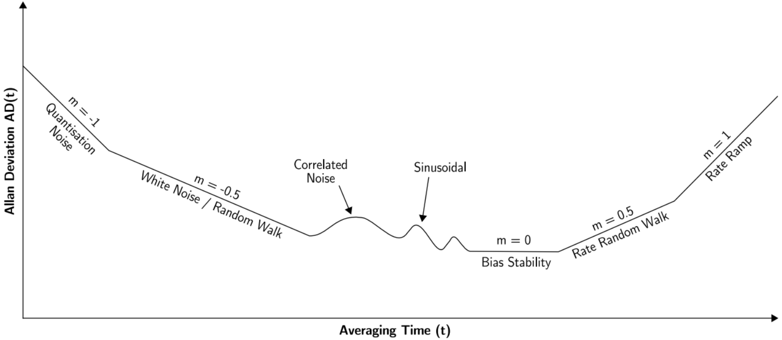
1. 保持传感器绝对静止获取数据。
2. 对数据进行分段，设定时间段的时长，如下图所示。




3. 将传感器数据按照时间段进行平均。
4. 计算方差，绘制艾伦曲线。

# IMU 随机误差的标定

得到的艾伦曲线如下图所示[2]：



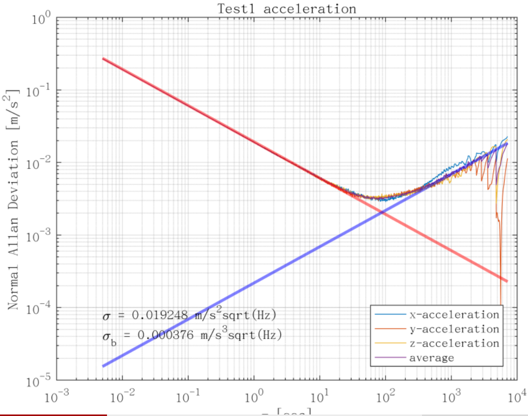

[2] Allan Variance. "Noise Analysis for Gyroscopes". In: *Freescale Semiconductor Document Number: AN5087 Application Note Rev. 0* 2 (2015).

# Allan 方差的验证

## 仿真数据

制作一个仿真 IMU 数据集。设定，加速度的高斯白噪声设定为 $0.019$，陀螺仪的高斯白噪声为 $0.015$。加速度 bias 的随机游走噪声设定为 $5e^{-4}$，陀螺仪的 bias 随机游走噪声设定为 $5e^{-5}$。

加速度的艾伦方差曲线如下：



# 加速度计数学模型

白话：加速度计的测量值是：东北天G系下，实际加速度矢量减去重力加速度矢量，左乘R变换到body系，再乘以尺度。后面再加上加速度bias以及白噪声。

## 加速度计的误差模型

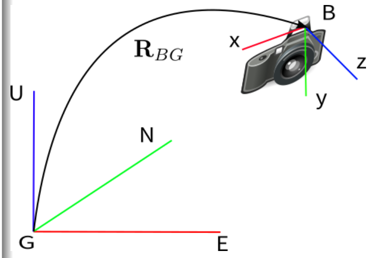
导航系 $G$ 为东北天，$\mathbf{g}^G = (0, 0, -9.81)^\top$。理论测量值为：

$$\mathbf{a}_m^b = \mathbf{R}_{bG}\left(\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G\right) \tag{22}$$

如果考虑高斯白噪声，bias，以及尺度因子，则为：

$$\mathbf{a}_m^b = \mathbf{S}_a\mathbf{R}_{bG}\left(\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G\right) + \mathbf{n}^a + \mathbf{b}^a \tag{23}$$

通常假设尺度因子为单位矩阵。



# 陀螺仪数学模型

陀螺仪的误差模型有两种：
1.陀螺仪测量值等于：body系下的角速度乘以尺度，加上角速度偏置，加上白噪声
2.低端一点的：body系下的角速度乘以尺度，加上g-灵敏度乘以加速度，加上角速度偏置，加上白噪声

## 陀螺仪的误差模型

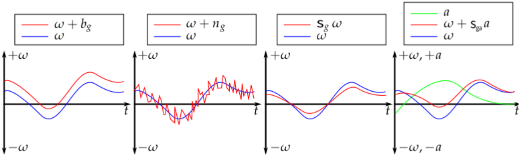
考虑尺度因子，高斯白噪声，以及 bias，陀螺仪的误差模型如下：

$$\boldsymbol{\omega}_m^b = \mathbf{S}_g \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{n}^g + \mathbf{b}^g \tag{24}$$

低端传感器，考虑加速度对陀螺仪的影响，即 g-灵敏度：

$$\boldsymbol{\omega}_m^b = \mathbf{S}_g \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{s}_{ga} \mathbf{a}^b + \mathbf{n}^g + \mathbf{b}^g \tag{25}$$

陀螺仪受四种噪声的影响分别如下图所示[3]：




[3] MA Shelley. "Monocular visual inertial odometry on a mobile device". In: *Master's thesis, Institut für Informatik, TU München, Germany* (2014).

# Section 4

## 运动模型离散时间处理

# VIO 中的 IMU 模型

忽略 scale 的影响，只考虑白噪声和 bias 随机游走：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b = \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \tag{26}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^b = \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a \tag{27}$$

上标 $g$ 表示 gyro，$a$ 表示 acc，$w$ 表示在世界坐标系 world，$b$ 表示 imu 机体坐标系 body。IMU 的真实值为 $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}$，测量值为 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{a}}$。

P(ose),V(elocity),Q(uaternion) 对时间的导数可写成：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{wb_t} &= \mathbf{v}_t^w \\
\dot{\mathbf{v}}_t^w &= \mathbf{a}_t^w \\
\dot{\mathbf{q}}_{wb_t} &= \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

# 连续时间下 IMU 运动模型

根据上面的导数关系，可以从第 i 时刻的 PVQ，通过对 IMU 的测量值进行积分，得到第 j 时刻的 PVQ:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \int\int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t^2 \\
\mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w + \int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t \\
\mathbf{q}_{wb_j} &= \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned} \tag{29}$$

# 运动模型的离散积分——欧拉法

使用欧拉法，即两个相邻时刻 k 到 k+1 的位姿是用第 k 时刻的测量值 $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$ 来计算。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\Delta t^2 \\ \mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a}\Delta t \\ \mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

白话：
求导的时候，右边乘的是虚四元数；
离散积分的时候，右边乘的是实部为1的四元数小量

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{q}_{wb_k}\left(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w \\ \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g \end{aligned} \tag{31}$$

w是角速度测量值减去bias
a是加速度测量值减去bias，经过qwb的旋转到世界系，再加上重力加速度矢量

# 运动模型的离散积分——中值法

使用 mid-point 方法，即两个相邻时刻 k 到 k+1 的位姿是用两个时刻的测量值 $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$ 的平均值来计算。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\Delta t^2 \\
\mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a}\Delta t \\
\mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_{wb_k}\left(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w + \mathbf{q}_{wb_{k+1}}\left(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w\right] \\
\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g\right) + \left(\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g\right)\right]
\end{aligned}
\tag{33}
$$

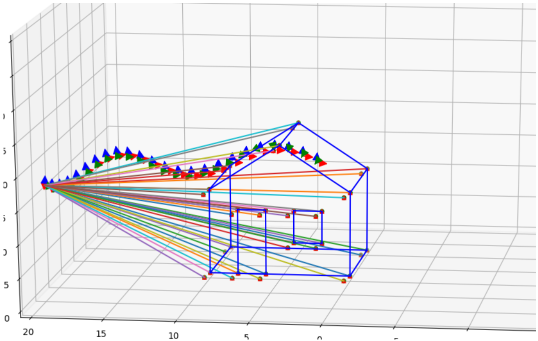
中值法与欧拉法的不同就是，w和a的计算取k和k+1时刻的均值！

Section 5

# IMU 数据仿真

## 仿真

- 思路 1：指定轨迹方程，求一阶导得到速度，角速度，求二阶导得到加速度。
- 思路 2：已有 pose 轨迹，不知道方程，利用 B-Spline 产生 IMU 数据。



# 旋转基础知识

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 旋转积分的几种方式

四元数的形式：

$$\mathbf{q}_{wb'} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Delta t \end{bmatrix} \tag{34}$$

SO3 形式：

$$\mathbf{R}_{wb'} = \mathbf{R}_{wb} \exp\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta t\right) \tag{35}$$

欧拉角形式：

$$\boldsymbol{\vartheta} wb' = \boldsymbol{\vartheta}_{wb} + E_{wb} \cdot \boldsymbol{\omega}\Delta t \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{\vartheta} = (\psi_{roll}, \theta_{pitch}, \phi_{yaw})^\top$，$E_{wb}$ 表示将 IMU body 坐标系下的角速度转换成欧拉角速度[a]。

[a] MIT. *Kinematics Of Moving Frames*. URL: https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-154-maneuvering-and-control-of-surface-and-underwater-vehicles-13-49-fall-2004/lecture-notes/lec1.pdf (visited on 2004).

# 欧拉角

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

**问题**

inertial frame 下的一个点旋转到 body 坐标系，用欧拉角如何表示？仿真数据中旋转矩阵用欧拉角来表示很方便。

step 1. 绕着惯性坐标系的 z 轴旋转，得到新的坐标系 $b^1$。

$$\mathbf{x}_b^1 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^0 = R(\phi)\mathbf{x}_b^0$$

step 2. 绕着新坐标系 $b^1$ 的 y 轴旋转得到坐标系 $b^2$

$$\mathbf{x}_b^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^1 = R(\theta)\mathbf{x}_b^1$$

# 欧拉角

step 3. 绕着新坐标系 $b^2$ 的 x 轴旋转得到坐标系 $b^3$, $b^3$ 就是我们的 body 坐标系。

$$\mathbf{x}_b^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^2 = R(\psi)\mathbf{x}_b^2$$

综合起来，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b &= R(\psi)R(\theta)R(\phi)\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\phi & c\theta s\phi & -s\theta \\ -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & s\psi c\theta \\ s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\theta \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= R(\phi,\theta,\psi)\mathbf{x} \end{aligned}$$

# 欧拉角速度和 body 角速度的转换

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 问题

inertial frame 下的欧拉角速度怎么转到 body 坐标系下呢？

euler rate to body rate:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= R(\psi)R(\theta)\left\{\begin{array}{c}0\\0\\\frac{d\phi}{dt}\end{array}\right\}+R(\psi)\left\{\begin{array}{c}0\\\frac{d\theta}{dt}\\0\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\frac{d\psi}{dt}\\0\\0\end{array}\right\}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\0 & \cos\psi & \sin\psi\cos\theta\\0 & -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\frac{d\psi}{dt}\\\frac{d\theta}{dt}\\\frac{d\phi}{dt}\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{37}$$

公式 (37) 取逆就能得到，body rate to euler rate 的变换：

$$\frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{dt}=\begin{bmatrix}1 & \sin\psi\tan\theta & \cos\psi\tan\theta\\0 & \cos\psi & -\sin\psi\\0 & \sin\psi/\cos\theta & \cos\psi/\cos\theta\end{bmatrix}\vec{\omega} \tag{38}$$

# 仿真代码

## IMU 仿真

- 定义 imu body 坐标系的位置方程, 椭圆， 圆形等等.
- 定义 imu body 坐标系在惯性系下的欧拉角方程.
- 求导得到角速度， 加速度
- 设置噪声参数， 利用 imu 的模型产生数据。

介绍下仿真代码:

https://github.com/HeYijia/vio_data_simulation

# 习题

## 基础作业，必做

1. 设置 IMU 仿真代码中的不同的参数，生成 Allen 方差标定曲线。allan 方差工具：
   `https://github.com/gaowenliang/imu_utils`
   `https://github.com/rpng/kalibr_allan`
   ...
2. 将 IMU 仿真代码中的欧拉积分替换成中值积分。

## 提升作业，选做

阅读从已有轨迹生成 imu 数据的论文，撰写总结推导：

- 2013 年 BMVC, Steven Lovegrove ,Spline Fusion: A continuous-timerepresentation for visual-inertial fusion withapplication to rolling shutter cameras.

谢谢