第 5 讲 后端优化实践：逐行手写求解器

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 7 月 14 日

目录

非线性最小二乘问题求解：solver

高斯牛顿求解流程

有如下最小二乘系统，对应的图模型如有图所示：

$$\boldsymbol{\xi} = \underset{\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \sum_i \|\mathbf{r}_i\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}_i} \tag{1}$$

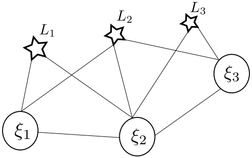
对应的高斯牛顿求解，normal equation：

$$\underbrace{\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{J}}_{\mathbf{H} \ or \ \boldsymbol{\Lambda}} \delta \boldsymbol{\xi} = \underbrace{-\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r}}_{\mathbf{b}} \tag{2}$$

连加形式：

高斯牛顿的核心：对残差本身进行一阶泰勒展开

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{J}_i \delta \boldsymbol{\xi} = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{J}^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{r} \tag{3}$$



SLAM 问题中高斯牛顿方程的求解

利用舒尔补加速 SLAM 问题的求解

直接求解 $\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$，计算量大。解决办法：舒尔补，利用 SLAM 问题的稀疏性求解。

比如，某单目 BA 问题，其信息矩阵如有图所示，可以将其分为：

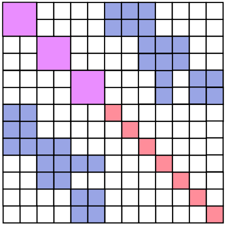
$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{pp}} & \mathbf{H}_{\mathrm{pl}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{lp}} & \mathbf{H}_{\mathrm{ll}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{p}}^{*} \\ \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{l}}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{\mathrm{p}} \\ -\mathbf{b}_{\mathrm{l}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

可以利用舒尔补操作，使上式中信息矩阵变成下三角，从而得到：

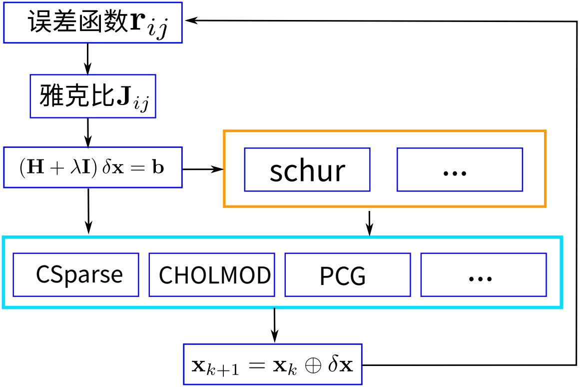
$$\left(\mathbf{H}_{\mathrm{pp}} - \mathbf{H}_{\mathrm{pl}}\mathbf{H}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathrm{pl}}^{\top}\right)\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{p}}^{*} = -\mathbf{b}_{\mathrm{p}} + \mathbf{H}_{\mathrm{pl}}\mathbf{H}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{b}_{\mathrm{l}} \tag{5}$$

求得 $\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{p}}^{*}$ 后，再计算 $\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{l}}^{*}$：

$$\mathbf{H}_{\mathrm{ll}}\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{l}}^{*} = -\mathbf{b}_{\mathrm{l}} - \mathbf{H}_{\mathrm{pl}}^{\top}\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{p}}^{*} \tag{6}$$



solver 全流程回顾



推荐阅读[1][2][3].

[1] Giorgio Grisetti et al. "A tutorial on graph-based SLAM". In: *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* 2.4 (2010), pp. 31–43.

[2] Rainer Kümmerle et al. "g 2 o: A general framework for graph optimization". In: *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2011, pp. 3607–3613.

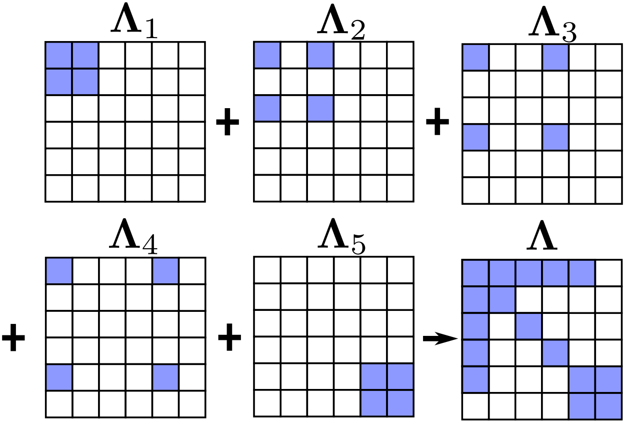
[3] Manolis IA Lourakis and Antonis A Argyros. "SBA: A software package for generic sparse bundle adjustment". In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 36.1 (2009), p. 2.

solver 求解中的小疑问

1. 上节课说到信息矩阵 $\mathbf{H}$ 不满秩，那求解的时候如何操作呢？
   - 使用 LM 算法，加阻尼因子使得系统满秩，可求解，但是求得的结果可能会往零空间变化。
   - 添加先验约束，增加系统的可观性。比如 g2o tutorial 中对第一个 pose 的信息矩阵加上单位阵 $\mathbf{H}_{[11]} += \mathbf{I}$.
2. orbslam，svo 等等求 mono BA 问题时，fix 一个相机 pose 和一个特征点，或者 fix 两个相机 pose，也是为了限定优化值不乱飘。那代码如何实现 fix 呢？
   - 添加超强先验，使得对应的信息矩阵巨大（如，10^{15}），就能使得 $\Delta x = 0$;
   - 设定对应雅克比矩阵为 0，意味着残差等于 0. 求解方程为 $(\mathbf{0} + \lambda \mathbf{I})\,\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$，只能 $\Delta x = 0$。

单目 Bundle Adjustment 求解代码讲解

核心问题：矩阵块的对应关系，如何拼接信息矩阵。



单目 Bundle Adjustment 求解代码讲解

代码讲解时间

代码框架和 g^2o 类似[4].

顶点： vertex

- id，维度， 矩阵 index.
- 变量加法.

边： edge

- 残差计算
- 雅克比矩阵计算
- 保存对应的顶点

求解器： solver

- LM 算法
- make $\mathbf{H}$, $\mathbf{b}$
- 线性求解器：QR,SVD,PCG,...

[4] Giorgio Grisetti et al. "g2o: A general framework for (hyper) graph optimization". In: *Tech. Rep.* (2011).

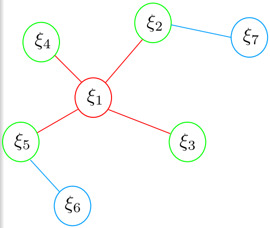
Section 2

滑动窗口算法

第四讲滑动窗口算法回顾

toy example 3

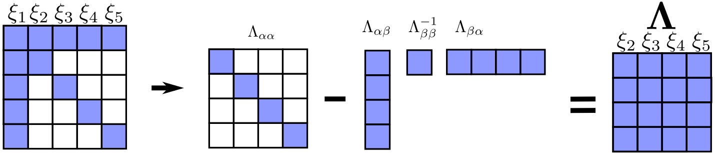
1. 如右图所示，在 $t \in [0, k]$s 时刻, 系统中状态量为 $\xi_i, i \in [1, 6]$。第 k' 时刻，加入新的观测和状态量 ξ_7.
2. 在第 k 时刻，最小二乘优化完以后，marg 掉变量 ξ_1。被 marg 的状态量记为 $\mathbf{x}_m$, 剩余的变量 $\xi_i, i \in [2, 5]$ 记为 $\mathbf{x}_r$.
3. marg 发生以后，$\mathbf{x}_m$ 所有的变量以及对应的测量将被丢弃。同时，这部分信息通过 marg 操作传递给了保留变量 $\mathbf{x}_r$. marg 变量的信息跟 ξ_6 不相关。
4. 第 k' 时刻，加入新的状态量 ξ_7(记作 $\mathbf{x}_n$) 以及对应的观测，开始新一轮最小二乘优化。



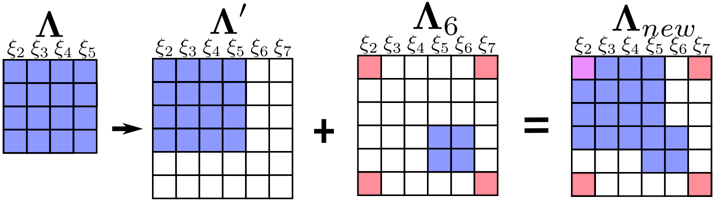
- 红色为被 marg 变量以及测量约束。
- 绿色为跟 marg 变量有关的保留变量。
- 蓝色为和 marg 变量无关联的变量。

滑动窗口算法关键步骤可视化

步骤 1：构建先验



步骤 2：先验 $+$ 新测量信息 $\rightarrow$ 新的信息矩阵



和直接 Bundle Adjustment 相比，多了一个先验矩阵的维护。

滑动窗口算法中关键问题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

如何更新先验残差？

- 目的：虽然先验信息矩阵固定不变，但随着迭代的推进，变量被不断优化，先验残差需要跟随变化。否则，求解系统可能奔溃。
- 方法：先验残差的变化可以使用一阶泰勒近似。

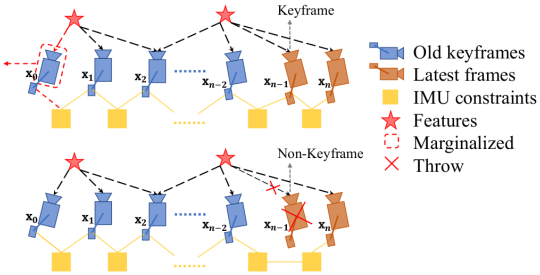
$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_\mathrm{p}' &= \mathbf{b}_\mathrm{p} + \frac{\partial \mathbf{b}_\mathrm{p}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{p}} \delta \mathbf{x}_\mathrm{p} \\
&= \mathbf{b}_\mathrm{p} + \frac{\partial \left(-\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} \right)}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{p}} \delta \mathbf{x}_\mathrm{p} \\
&= \mathbf{b}_\mathrm{p} - \boldsymbol{\Lambda}_\mathrm{p} \delta \mathbf{x}_\mathrm{p}
\end{aligned} \tag{7}$$

VINS-Mono 中的滑动窗口算法

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

two way marginalization

- 当滑动窗口中第二新的图像帧为关键帧，则 marg 最老的帧，以及上面的路标点。
- 当滑动窗口中第二新的图像帧不是关键帧，则丢弃这一帧上的视觉测量信息，IMU 预积分传给下一帧。



引自[5]

[5] Tong Qin, Peiliang Li, and Shaojie Shen. "Vins-mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator". In: *IEEE Transactions on Robotics* 34.4 (2018), pp. 1004–1020.

VINS-Mono 中的滑动窗口算法

代码讲解时间

作业

基础题

1. 完成单目 Bundle Adjustment 求解器 problem.cc 中的部分代码。
   - 完成 Problem::MakeHessian() 中信息矩阵 H 的计算。
   - 完成 Problem::SolveLinearSystem() 中 SLAM 问题的求解。
2. 完成滑动窗口算法测试函数。
   - 完成 Problem::TestMarginalize() 中的代码，并通过测试。

说明：为了便于查找作业位置，代码中留有 TODO:: home work 字样.

提升题

paper reading[a]，请总结论文：优化过程中处理 **H** 自由度的不同操作方式。总结内容包括：具体处理方式，实验效果，结论。

[a] Zichao Zhang, Guillermo Gallego, and Davide Scaramuzza. "On the comparison of gauge freedom handling in optimization-based visual-inertial state estimation". In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 3.3 (2018), pp. 2710–2717.