《线性代数》模拟试卷 3

一、填空题（30 分）：

1．若行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 3(a_1+a_3) & \frac{1}{2}a_2 \\ b_1 & 3(b_1+b_3) & \frac{1}{2}b_2 \\ c_1 & 3(c_1+c_3) & \frac{1}{2}c_2 \end{vmatrix}$ =（　　　　）

2．已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$无解，则$a =$（　　　　）

3．设向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$,线性相关，$\lambda$=（　）它的秩是(　　　)，

一个最大线性无关组是（　　　　　　）.

4． 已知四阶矩阵A和B相似，A的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,和相似 ，则行列式$\left|B^{-1}-E\right|$=（　　　）.

5．方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$的基础解系是（　　　　）

6.设A为n阶矩阵,|A|≠0,A^*为A的伴随矩阵,E为n阶单位阵。若A有特征值λ,则(A^*)^2+E的特征值是(　　　)。

7． 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}-2x_1x_3$，则二次型的正惯性指数为（　　　　） .

8．设 A是正交 矩阵 ,$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,是A的特征值 ，α,β是相应于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,的特征向量 ，

α与 β线性（　　　　）

9．设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的特征值为（　　　　　）

10．从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为（　　　　　）。

二、计算题：

1．(7 分) 设 A 为 三阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{8}$，试计算行列式 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|$.

2．(8 分) 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $(A+2E)^{-1}(A-2E)$.

3．(8 分) 已知 3 维向量空间 V 的两个基分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 和

$\beta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 向量 $\alpha=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\in V$. 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 C；

并求向量 α 在这两个基下的坐标.

4．(8 分) 讨论下述线性方程组 $\begin{cases} x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2-2x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$ 问 b 为何值时该方程组有解？, 并求出其通解 .

5．(共 15 分)已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，

试求（1）a 的值

（2）求正交阵Q，使得$Q^T AQ$为对角矩阵 .

三、证明题：

1．（6 分）已知矩阵 A 与 B 合同，矩阵 C 与 D 合同，

证明：分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$ 也 合同 .

2 ．(10 分)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}-2x_3^{\ 2}+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

（1）求a,b的值

（2）利用正交变换将二次型f化为标准型，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵

3．（8 分）非齐次线性方程组$AX=b$的系数矩阵的秩为$r,\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r+1}$是它的$n-r+1$个线性无关的解，试证它的任意解可表示为$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$（其中$k_1+k_2+\cdots k_{n-r+1}=1$）。