

《线性代数》模拟试卷 1

一、 填空题 (本大题共 8 个小题, 满分 25 分) :

1. (3 分) 设 3 阶 实对称矩阵 A 的特征值为 $2, 5, 5$, A 的属于 2 的特征向量是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的属于 5 的两个线性无关的特征向量是() ;

2. (3 分) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 0, -1$, $B = E - 3A^*$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 B 的行列式 $|B| = ()$;

3. (3 分) 设 A 三阶矩阵, 相似于对交矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$, 设 $B = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)$ 则 $B = ()$;

4. (3 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 求 x 与 y 应满足的条件

5. (4 分) 已知 4 维列向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 所生成

的向量空间为 V , 则 V 的维数 $\dim V ()$;

6. (3 分) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 经过正交变换可化为标准型 $f = 3\xi^2$, 则 $a = ()$;

7. (3 分) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$ 中 λ^2 的系数是() ;

8. (3分) 4元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, 已知 a_1, a_2, a_3 是它的3个解向量, 其中

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ 则该方程组的通解是()。}$$

二、 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

(满分 10 分)

三、 设 $f(x) = x^8 - 6400$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$

(满分 10 分)

四、 λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ 无解或有解?

有解时求出所有解 (用向量形式表示)。

(满分 15 分)

五、 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 问: 常数 l, m 满足什么条件时, 向量组 $la_2 - a_1, ma_3 - a_2, a_1 - a_3$ 也线性无关。

六、 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 且 A 有两个不同的特征值, 证明 A 相似于一个对角矩阵。

(满分 10 分)

七、 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$,

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 求一个正交变换 $x = py$, 把 f 化为标准形, 并写该标准型 ;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是什么类型的二次曲面?

(满分 15 分)

七、证明题 (本大题共 2 个小题 , 满分 15 分) :

1 . (7 分) 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关 , 向量 β_1 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示 , 向量 β_2

不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示 . 证明: 向量组 $a_1, a_2, a_3, \beta_1 + \beta_2$ 也线性无关。

2 . (8 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明: $m \times n$ 时, 齐次线性方程组

$ABx = 0$ 必有非零解。