电路与电子技术基础

第三章 非正弦交流电路与电路中的过渡过程

宋雪萌

songxuemeng@sdu.edu.cn

目录

目录

电路的过渡过程

稳态

对直流电路而言，是指各支路电压电流保持恒定；

对交流电路而言，是指各支路的电压电流的幅值、频率、变化规律等稳定不变。

过度过程（瞬变过程）

当电路的结构(开关的接通或断开)或元件参数发生变化时，如电源或其他元器件的突然接入或断开，可能会改变电路原来的工作状态，使得电路中的电压或电流由一种稳定状态逐渐转换成另一种稳定状态的过程。

电路的过渡过程必然性

在含有储能元件（C,L）的电路中，当电路结构或元件参数发生改变时，电路中电流和电压会随之变化，而这些改变，必然伴随电容中电场能量和电感中磁场能量的改变。这种改变是能量渐变，而非跃变。

电路的过渡过程必然性

在含有储能元件（C,L）的电路中，当电路结构或元件参数发生改变时，电路中电流和电压会随之变化，而这些改变，必然伴随电容中电场能量和电感中磁场能量的改变。这种改变是能量渐变，而非跃变。

在能量的观点看，电容中储能 $W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$，由于换路时能量不能跃变，故电容上的电压一般不能跃变。

从电流的观点看，$i_C=C\frac{du}{dt}$，电容上电压的跃变将导致其中的电流变为无限大，这通常也是不可能的。

电路的过渡过程必然性

在含有储能元件（C,L）的电路中，当电路结构或元件参数发生改变时，电路中电流和电压会随之变化，而这些改变，必然伴随电容中电场能量和电感中磁场能量的改变。这种改变是能量渐变，而非跃变。

类似地，对电感中储存的磁场能量 $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$，能量不能跃变。

电感中的电压电流关系为 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$，电压为有限值，故电感中的电流一般也不能跃变。

换路定理

在换路瞬间，电容电压和电感电流不能突变。★

换路的瞬间一般设为t=0，并且把换路前趋于换路的一瞬间记为$t=0_-$，把换路后的最初瞬间记为$t=0_+$。

1、具有电感的电路

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

2. 具有电容的电路

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

换路定理

特别注意： 除了i_L和u_C其他物理量可以发生突变。

即：

$$i_C(0_+) \neq i_C(0_-) \qquad i_R(0_+) \neq i_R(0_-)$$

$$u_L(0_+) \neq u_L(0_-) \qquad u_R(0_+) \neq u_R(0_-)$$

上式中的不等号表示可以不相等，由换路前后的电路结构决定。

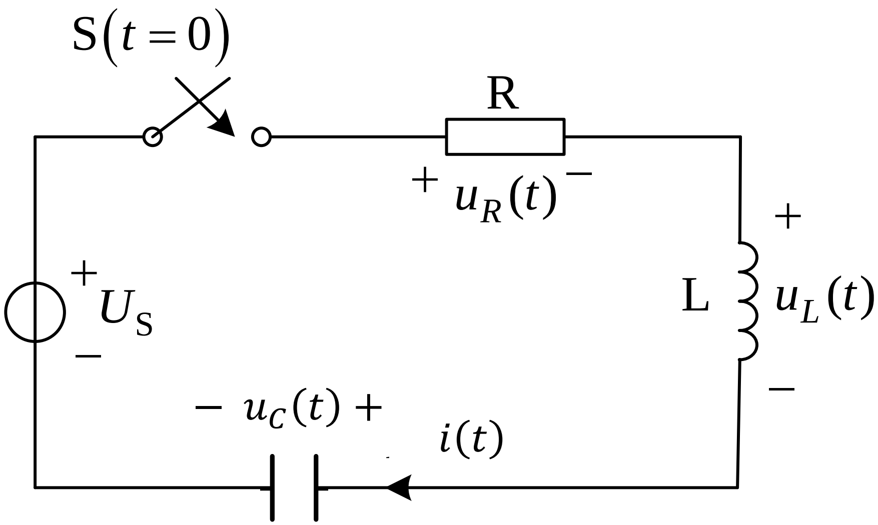
时域经典法

根据KVL，KCL和元件的伏安特性建立描述电路的方程（由于动态元件的伏安特性是微分或积分关系，因此建立的是线性常系数微分方程），然后再求解微分方程，得到所求变量的解（响应），称为时域经典法。

过渡过程中电容和电感两端的电压与电流的关系：

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

动态电路方程



$$u_R(t) + \ u_C(t) + \ u_L(t) = \ U_S$$

$$u_R(t) = Ri(t)$$

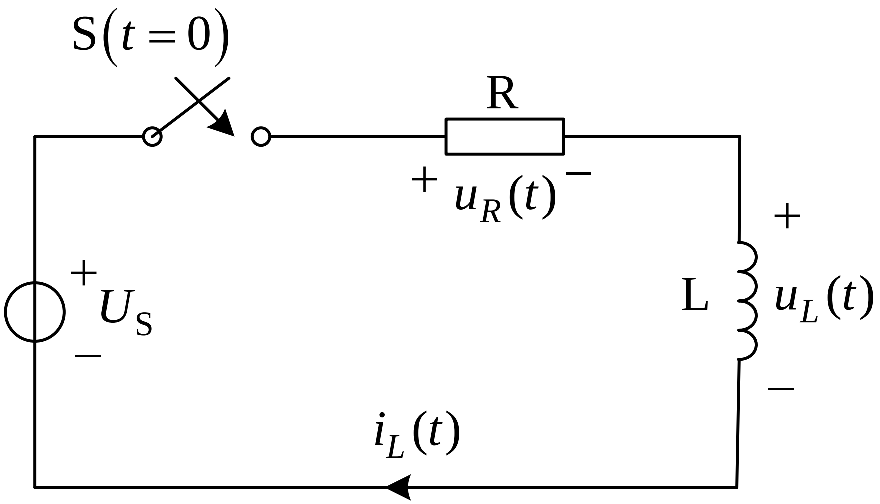
$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = U_S$$

微分方程的阶次称为电路的阶次。

一阶电路



$$u_R(t) + u_L(t) = U_S$$

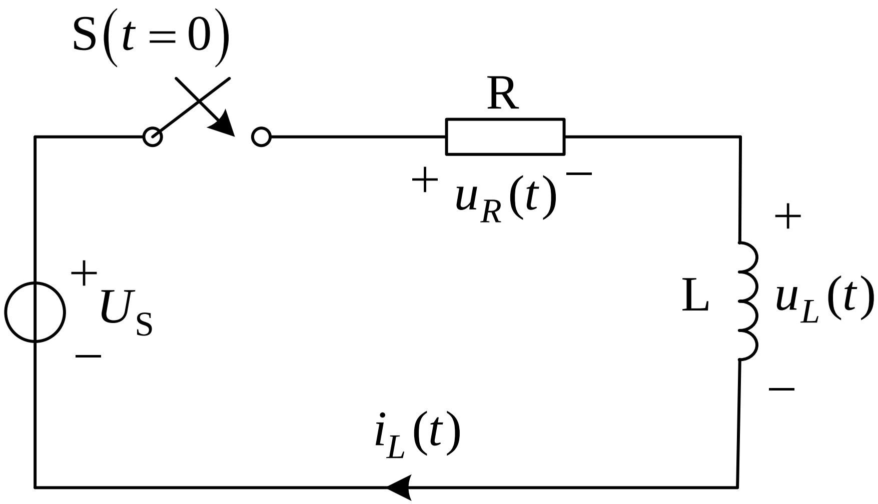
$$u_R(t) = Ri_L(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = U_S$$

当所得到的方程为一阶线性常系数微分方程，相应的电路为一阶线性电路。

一阶电路



$$u_R(t) + u_L(t) = U_S$$

$$u_R(t) = Ri_L(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = U_S$$

当所得到的方程为一阶线性常系数微分方程，相应的电路为一阶线性电路。

- 电路中仅一个动态元件的电路是一阶电路。
- 若电路中的动态元件可以归结为一个动态元件时，也是一阶电路。

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的一般形式为：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

其中，**p(x),Q(x)**是关于**x**的连续函数。

分类：$\begin{cases}\mathbf{Q(x)=0}\text{: 一阶齐次线性微分方程}\\ \mathbf{Q(x)\neq 0}\text{: 一阶非齐次线性微分方程}\end{cases}$

一阶齐次线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

通解： $y=Ce^{-\int p(x)dx}$

系数C进而由初始值决定。

一阶线性微分方程

一阶非齐线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐线性方程的通解与非齐线性方程的一个特解之和。

$$y=\underbrace{\boxed{Ce^{-\int p(x)dx}}}_{\text{通解}}+\underbrace{\boxed{e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx}}_{\text{特解}}$$

一阶线性微分方程

一阶非齐线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

$p(x)$，$Q(x)$均为常数时，特解可以是一个常数。

$$y=\boxed{Ce^{-\int p(x)dx}}+\boxed{\frac{Q(x)}{p(x)}}$$

通解　　　　特解

系数C进而由初始值决定。

初始值计算 $y(0_+)$

1． $u_C(0_-)$， $i_L(0_-)$

- 题目已知；
- t ＝ $0_$时，原电路为直流稳态；

  C：断路， L：短路

2.画0_+时的等效电路

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

过渡过程的三种类型

- 零输入响应：
  - 在没有电源输入的情况下引起的电路中电压和电流的称为电路的零输入响应；

过渡过程的三种类型

- 零输入响应：
  - 在没有电源输入的情况下引起的电路中电压和电流的称为电路的零输入响应；电路中含有储能元件时就可能出现零输入相应。

过渡过程的三种类型

- 零输入响应：
  - 在没有电源输入的情况下引起的电路中电压和电流的称为电路的零输入响应；电路中含有储能元件时就可能出现零输入相应。
- 零状态响应：
  - 电路中的储能元件的初始储能为零，完全由电源激励所产生的电路响应为零状态响应。

过渡过程的三种类型

- 零输入响应：
  - 在没有电源输入的情况下引起的电路中电压和电流的称为电路的零输入响应；电路中含有储能元件时就可能出现零输入相应。
- 零状态响应：
  - 电路中的储能元件的初始储能为零，完全由电源激励所产生的电路响应为零状态响应。
- 全响应：
  - 输入和初始储能均不为零的电路，引起的电路响应。
  - 全响应=零输入响应+零状态响应。

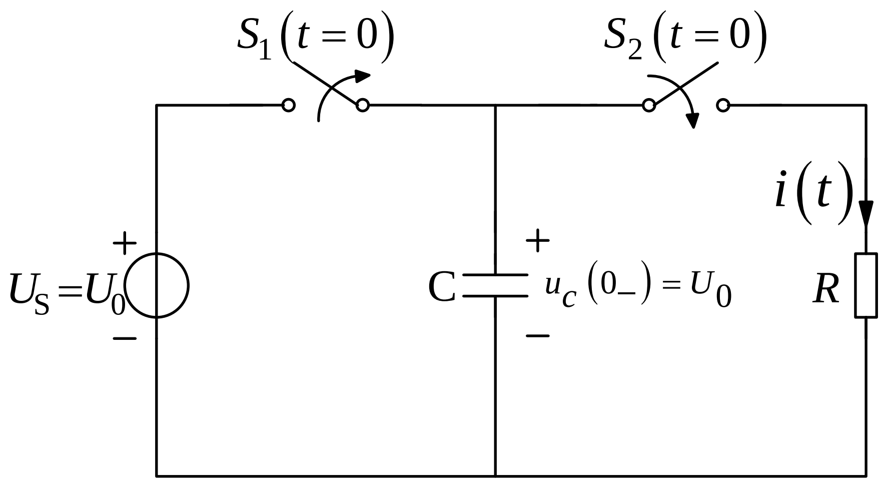
一阶电路的零输入响应

无激励，电路中没有任何独立源，电路的动态过程体现为动态元件通过电阻、受控源等耗能元件构成的回路进行电磁能量释放的物理过程。

一阶RC电路的零输入响应

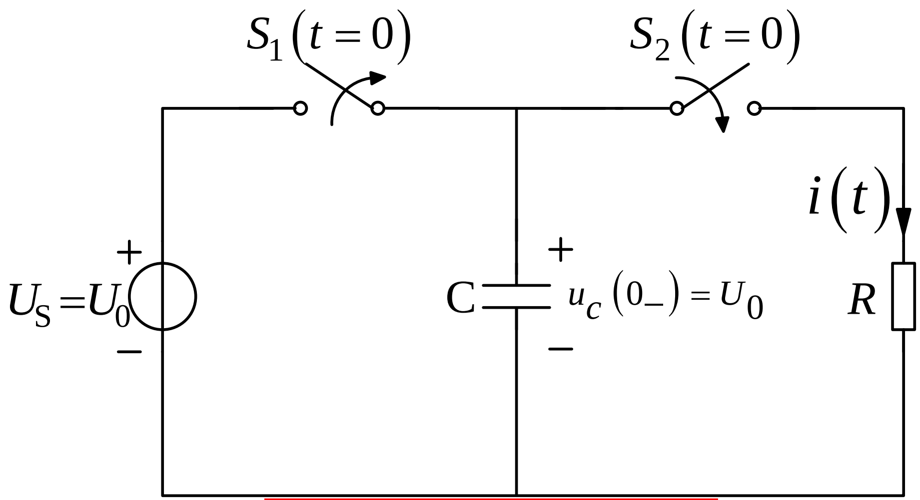
例1.换路前($t=0_-$)，S_1 闭合，S_2 断开，电路由C与电压源 $U_s=U_0$ 组成。电容电压相当于已充电：$u_C(0_-)=U_0$

当$t=0$ 时发生换路，S_1断开，S_2闭合，使电容脱离电源而改接于电阻R上。此后，电容C通过电阻R放电。求换路后，$u_C(t)$ 和 $i(t)$ 随时间变化规律（零输入响应）。



电路的零输入响应示例

一阶RC电路的零输入响应



解. 根据KVL： $u_C(t)-i(t)R=0$

将 $i(t)=-C\dfrac{du_C(t)}{dt}$ 代入得

$$RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0\\ y=Ce^{-\int p(x)dx}\end{array}}$$

解得 $u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

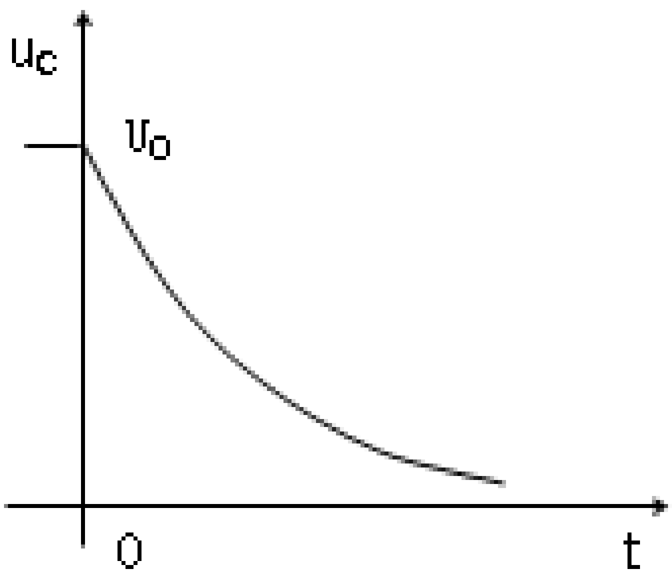
由 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ $u_C(0_+)=Ae^{-\frac{0}{RC}}=A=U_0$

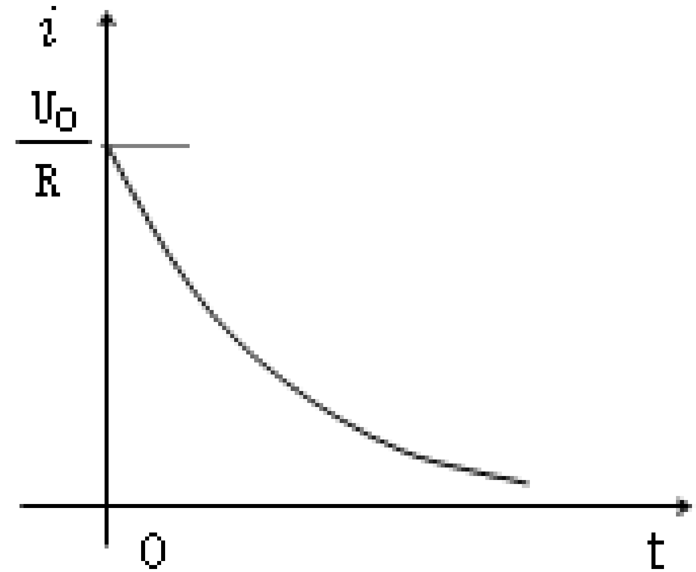
故 $\boxed{u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad ,t\geq 0_+}$ $\boxed{i(t)=\dfrac{u_C(t)}{R}=\dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\quad ,t\geq 0_+}$

一阶RC电路的零输入响应

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad ,t \geq 0_+$$

$$i(t) = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad ,t \geq 0_+$$





可见：$u_C(t)$ 由初始值 U_0 随时间按指数规律衰减到零，

电流 $i(t)$ 由初始值 $\frac{U_0}{R}$ 随时间按指数规律衰减到零。

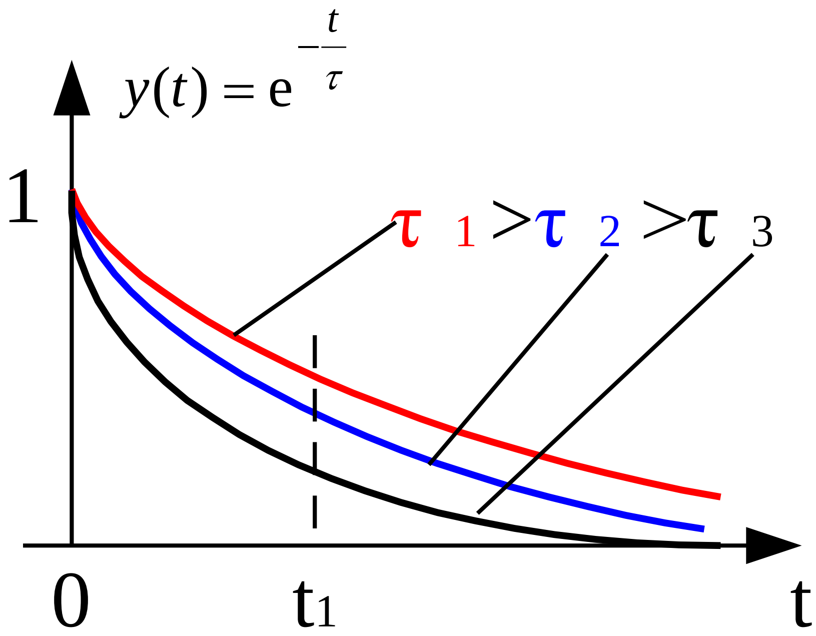
衰减速度取决于电阻R和电容C的乘积(时间常数)。

时间常数 τ 的物理意义

① τ 表示过渡过程进行快慢

τ 越大，电压电流的暂态变化越慢，反之，越快。

τ 仅与电路内参数有关，与激励和初始状态无关。



时间常数 τ 的物理意义

② 一阶RC线性电路的零输入响应中， t $=\tau$时，

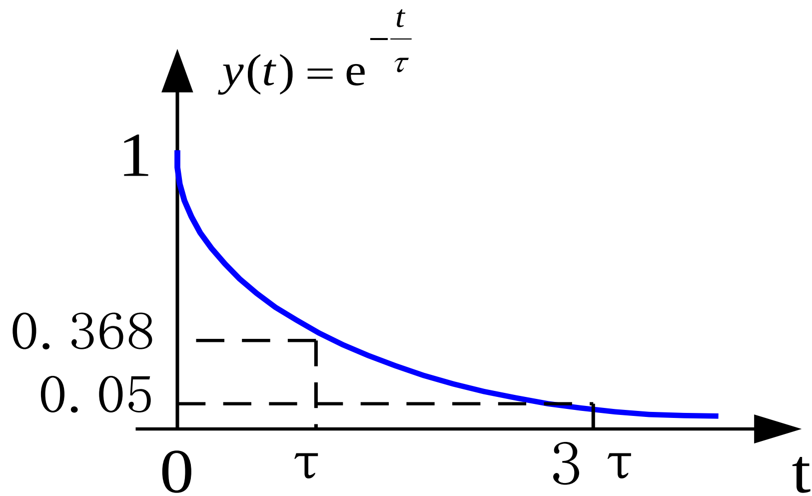
电压Uc衰减到初始值的36.8%。

理论上：t=∞才能达到稳定，

即Uc=0；

实际上: t=5τ 认为进入稳态；

工程上：t=3τ 认为进入稳态。



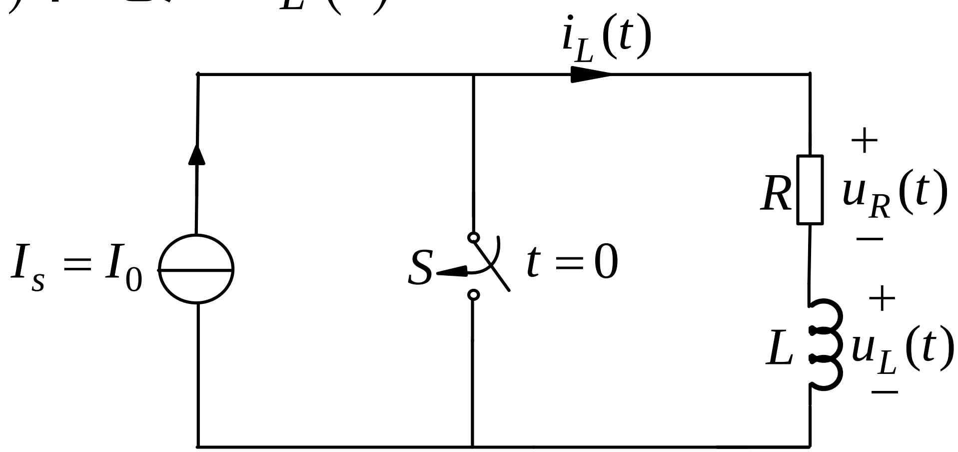
不同t值对应的响应

t	0	τ	2τ	3τ	4 τ	5 τ	…	∞
y(t)= $e^{-t/\tau}$	e^{0} = 1	e^{-1} = 0.368	e^{-2} = 0.135	e^{-3} = 0.05	e^{-4} = 0.018	e^{-5} = 0.007	…	0

一阶RL电路的零输入响应

例2. 如图换路前，电流源 $I_S = I_0$ 给电感L建立了磁场，$i_L(0_-) = I_0$

t＝0时S闭合，电感L通过电阻R释放磁场能量。求换路后电感上的电流 $i_L(t)$和电压 $u_L(t)$。



解：根据KVL, 列回路方程： $u_R(t) + u_L(t) = i_L(t)R + L\dfrac{di_L(t)}{dt} = 0$

整理得： $L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t)R = 0$

一阶RL电路的零输入响应

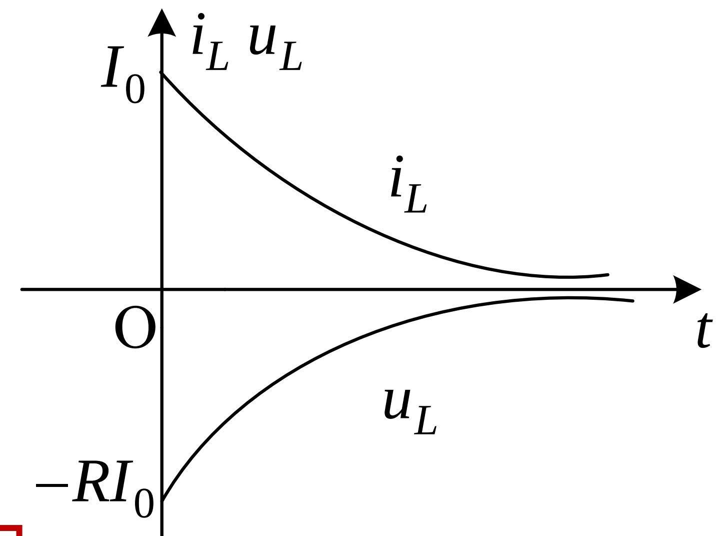
通解 $i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$

解得 $i_L(0_+)Ae^{-\frac{R}{L}0} = A = I_0$

$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0_+}$$

$$\boxed{u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}, t \geq 0_+}$$



电感的电压和电流的变化规律

负即 $\begin{matrix}+\\-\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}-\\+\end{matrix}$

定义RL电路的**时间常数**为：$\tau = L/R = LG$

一阶RL电路的零输入响应

τ 越大，电感L释放磁场能量的速度越慢；反之，越快。

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+$$

$$\tau = L / R = LG$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}, t \geq 0_+$$

物理意义：当G增大（电阻R减小）时，电阻元件消耗功率减小，电感释放能量时间增长；当电感L增大时，在相同初始电流前提下储存磁场能量增大，放电时间变长。

注意：在计算时间常数时，RL电路与RC电路具有强烈的对偶性，电感L与电容C对偶，电导G与电阻R对偶。

一阶电路零输入响应的简化分析方法

RC电路和简单RL电路零输入响应的分析结果归纳如下:

$$\begin{cases} \text{RC电路}: u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, i_c(t) = \dfrac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, t \ge 0_+ & \text{其中：} \quad \tau = RC \\ \text{RL电路}: i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \ge 0_+ & \text{其中：} \quad \tau = \dfrac{L}{R} = LG \end{cases}$$

观察可知：

$$\text{零输入响应} = \text{初始值} \times e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \ge 0_+$$

具体求解过程可归纳为三个步骤：

- **根据电路模型、元件属性和原始状态确定待求变量的初始值；**
- **根据换路后的电路模型确定电路的时间常数 τ；**
- **写出零输入响应。**

一阶RC电路零状态响应

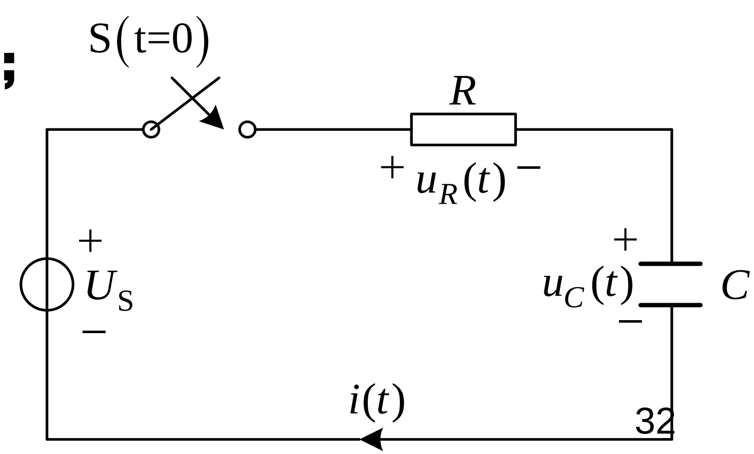
当电路的初始储能为零(即初始状态为零)时，仅由外加激励所引起的响应，称为零状态响应。

分析RC电路的零状态响应，实际上是分析电容元件的充电过程。

如图，$t=0_-$时刻，开关断开，电路处于零初始状态；$t=0$时开关闭合。当开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，电容相当于短路，此时$u_R(0_+)=U_s$，充电电流 $i(0_+)=U_s/R$,为最大；随着电源对电容充电，u_C增大，电流逐渐减小；

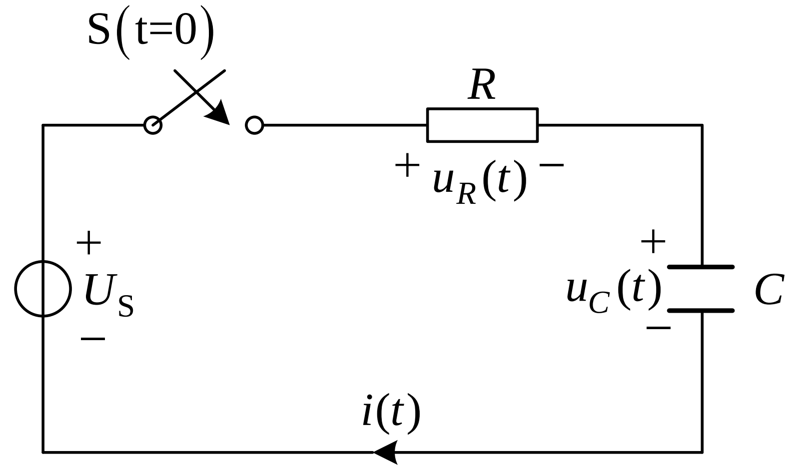
当$u_C=U_S$时，$u_R=0$， $i=0$，

充电过程结束，电路进入稳态。



一阶RC电路零状态响应

当 $t \geq 0$ 时，由定律可得:



$$u_R(t) + u_C(t) = U_S$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = U_S$$

一阶线性非齐次微分方程，初始条件为 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$。方程的解由非齐次微分方程的特解和对应齐次微分方程的通解组成：

$$u_C(t) = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

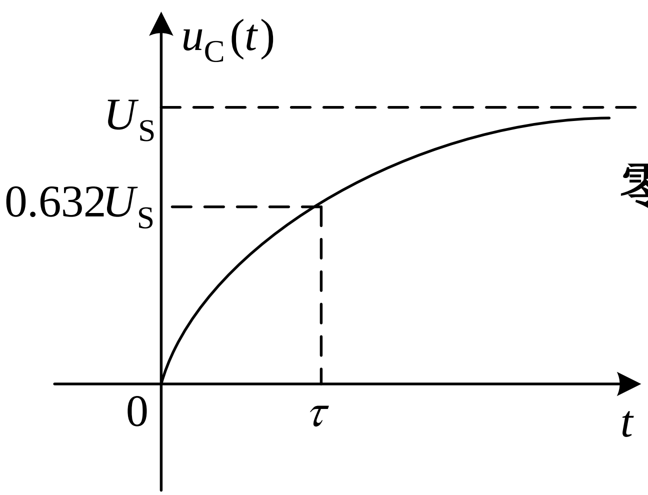
$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \\ y = Ce^{-\int p(x)dx} + \frac{Q(x)}{p(x)}\end{gathered}}$$

A为待定常数,τ 为RC电路时间常数。故：

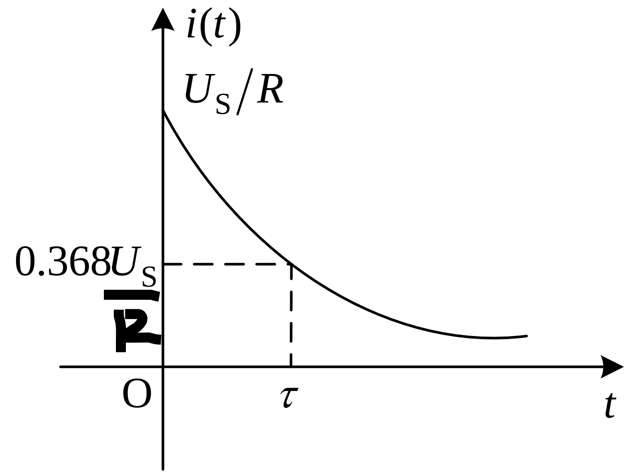
代入初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

$$u_C(t) = U_S - U_S e^{-t/\tau} = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , t \geq 0^+$$

一阶RC电路零状态响应



零状态响应波形

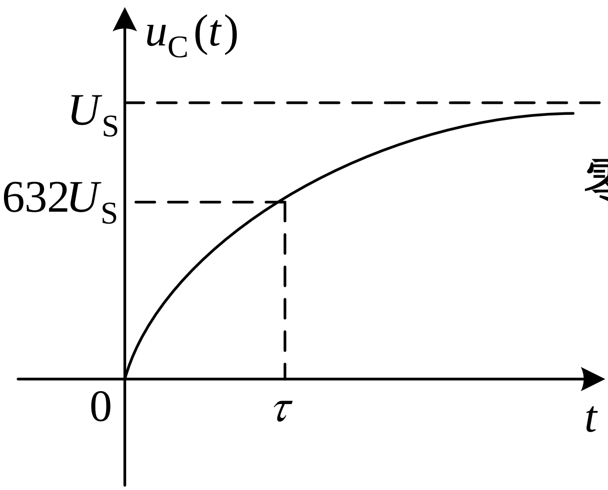


$$u_C(t)=U_S-U_S e^{-t/\tau}=U_S\left(1-e^{-t/\tau}\right)\quad ,\ t\geq 0^+$$

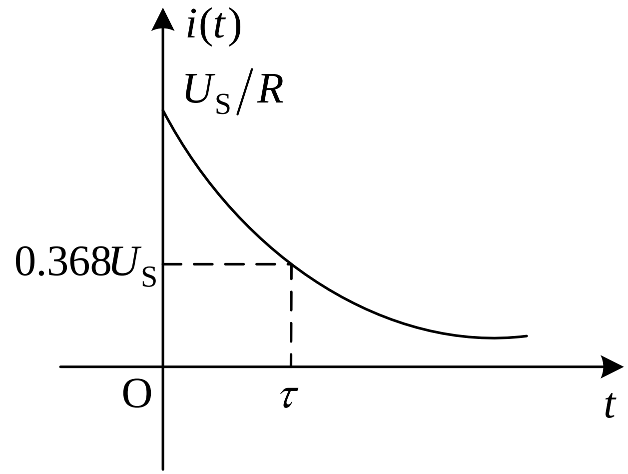
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\quad ,\ t\geq 0_+$$

在直流电压源激励下，电容电压不能突变，须经历动态的充电过程，充电速度取决于时间常数 τ，当电容电压达到电源电压 U_S 时充电结束，电路进入稳态；

一阶RC电路零状态响应



零状态响应波形



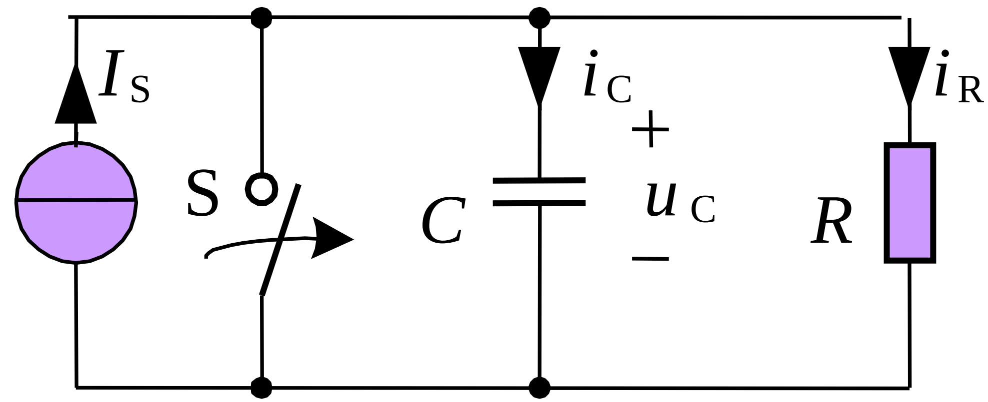
$$\boxed{u_C(t) = U_S - U_S e^{-t/\tau} = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad, t \geq 0^+}$$

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad, \ t \geq 0_+}$$

电容电流$i(t)$换路瞬间发生突变，随充电过程的进行逐渐下降，下降速度取决于时间常数τ，充电结束后，电流为零，电路进入稳态。充电过程中电容元件获得的能量$\frac{1}{2}CU_s^2$以电场能量形式储存。

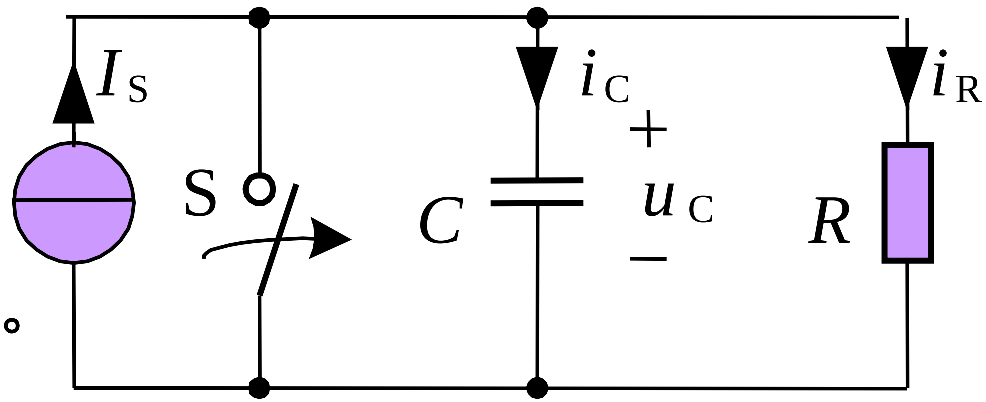
一阶RC电路零状态响应

例3：电路如图所示，已知t<0时，开关S是闭合，电路已达稳态。在t=0时，开关S断开，求t≥0时，电容电压u_C(t)。



一阶RC电路零状态响应

例3：电路如图所示，已知t<0时，开关S是闭合，电路已达稳态。在t=0时，开关S断开，求t≥0时，电容电压u_C(t)。



解：t < 0时开关闭合，

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

故所求响应为零状态响应。

t≥0时，根据KCL有 $i_C + i_R = I_S$，

由于$i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$， $i_R = \dfrac{u_C}{R}$，代入上式得 $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R}u_C = I_S$

或 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{1}{C}I_S$ 式中 τ =RC，初始值 $u_C(0_+) = 0$

对应的齐次方程通解为 $u''(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

一阶RC电路零状态响应

例3：电路如图所示，已知t<0时，开关S是闭合，电路已达稳态。在t=0时，开关S断开，求t≥0时，电容电压u_C(t)。

解：

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{1}{C}I_S$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)\\ y=Ce^{-\int p(x)dx}+\frac{Q(x)}{p(x)}\end{gathered}}$$

故得特解

$$u'(t)=RI_S$$

完全解 $$u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)=A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+RI_S$$

将 $u_C(0_+)=0$ 代入确定A，有 $u_C(0_+)=A+RI_S$，解得 $A=-RI_S$

于是得电路的零状态响应

$$u_C(t)=RI_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

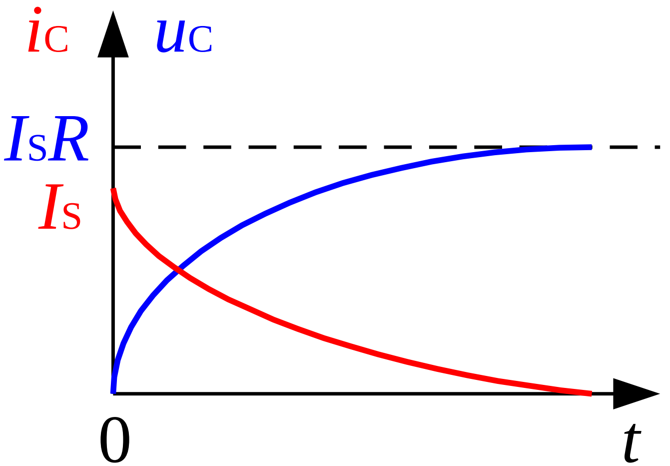
$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=I_S\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

一阶RC电路零状态响应

解：$u_C(t) = RI_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$

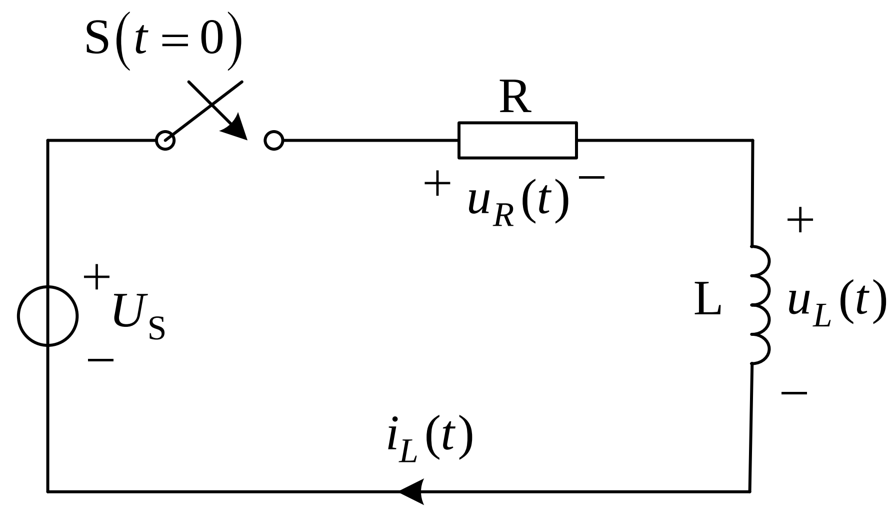
$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = I_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 当开关断开后，电容充电，u_C按指数规律上升，当t→∞时，达到稳态，其稳态值 $u_C(\infty) = RI_S$
- 电容电流i_C按指数规律衰减，当达到稳态时，$i_C(\infty) = 0$



一阶RL电路的零状态响应

例4：电路如图所示，已知t<0时，开关S是断开，电路已达稳态。在t=0时，开关S闭合，求t≥0时，电感电流i_L(t）。

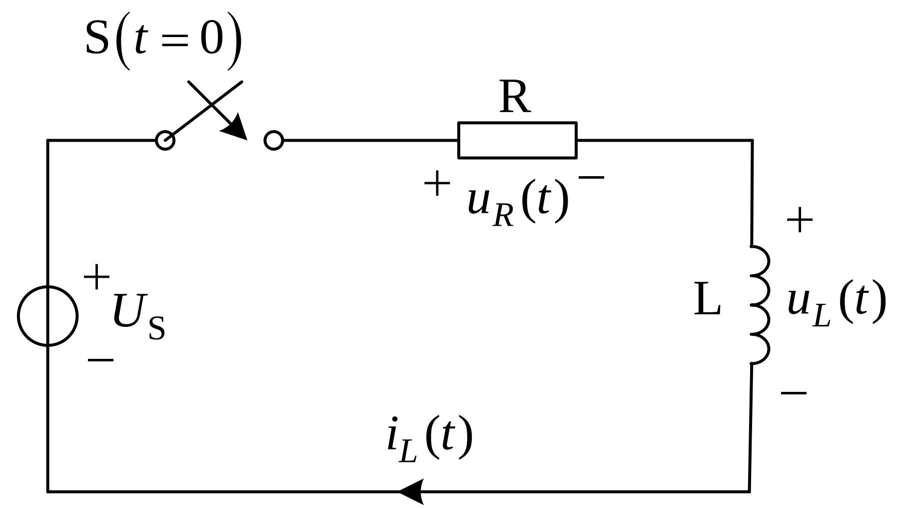


一阶RL电路的零状态响应

例4：电路如图所示，已知t<0时，开关S是断开，电路已达稳态。在t=0时，开关S闭合，求t≥0时，电感电流i_{L}(t)。

解：$t \geq 0$ 时，根据KVL：

$$u_R(t) + u_L(t) = U_{\mathrm{S}}$$



整理得：

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = \frac{U_s}{R}$$

电流的解可分为微分方程的特解和通解两部分：

$$i_L(t) = i_L{}'(t) + i_L{}''(t) = \frac{U_s}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_s}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

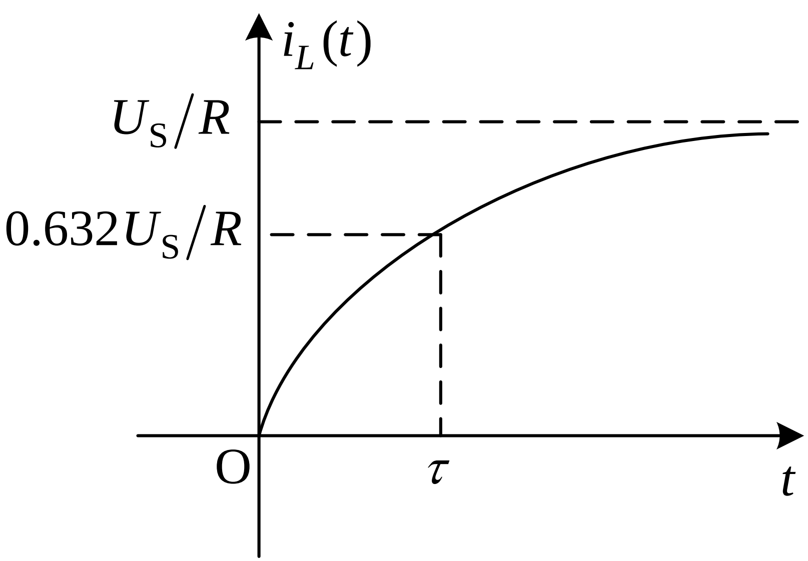
一阶RL电路的零状态响应

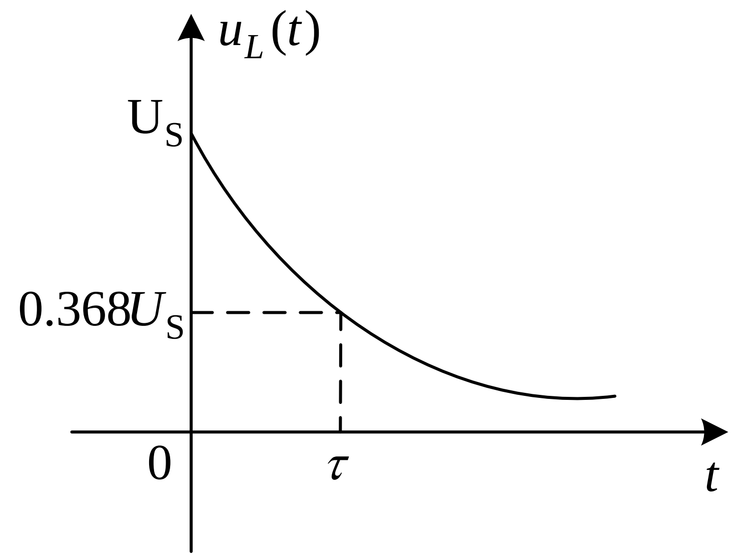
例4：电路如图所示，已知t<0时，开关S是断开，电路已达稳态。在t=0时，开关S闭合，求t≥0时，电感电流i_L(t)。

解：代入初始条件得

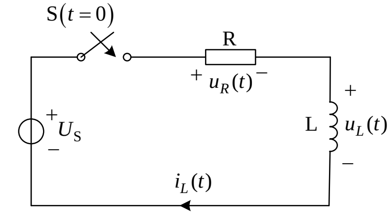
$$i_L(t)=\frac{U_s}{R}-\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U_s}{R}\left(1\text{-}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\quad ,t\geq 0_+$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=U_s e^{-\frac{t}{\tau}}\quad ,t\geq 0_+$$



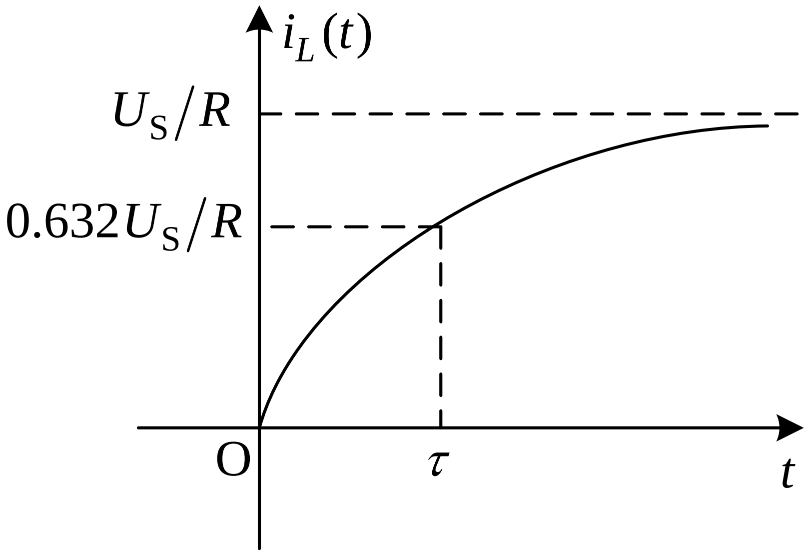


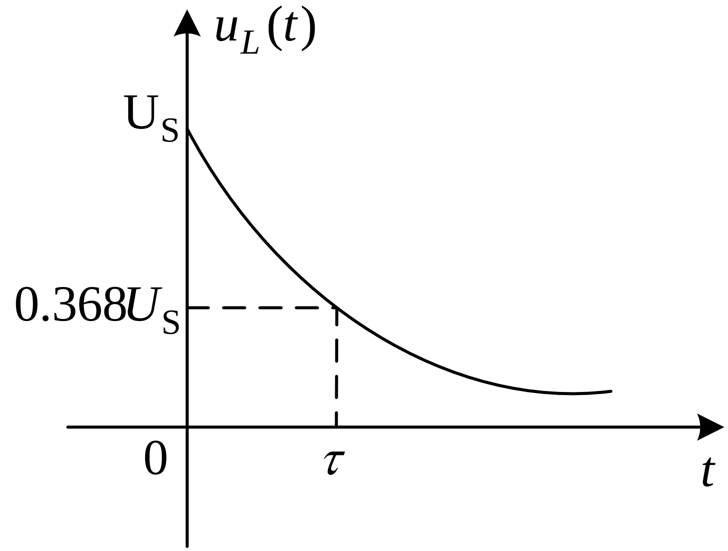
一阶RL电路的零状态响应



电感电流$i_L(t)$不能突变，须经历**动态充电**过程，变化速度取决于时间常数τ，当电感电流达到U_S/R时电路进入稳态；

电感电压$u_L(t)$在换路瞬间发生突变，随充电过程的进行逐渐下降，下降速度取决于时间常数，充电结束后，电压为零，电路进入稳态。充电过程中电感元件获得磁场能量$\frac{1}{2}L\left(\frac{U_s}{R}\right)^2$。





一阶电路全响应

一阶电路在动态元件原始储能和独立源共同作用下电路的响应，即一阶电路的全响应。

在图所示电路中，设电容的初始电压为$u_c(0_-)=U_0$，在t = 0时开关S闭合。我们分析响应电压$u_c(t)$与响应电流 $i(t)$。

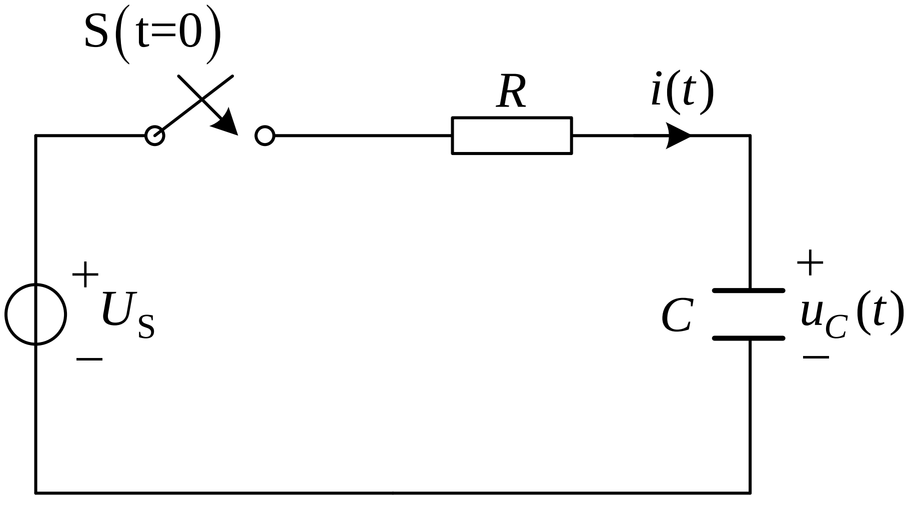
首先求零输入响应

$$u_{ZI}(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i_{ZI}(t)=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

然后求零状态响应

$$u_{ZS}(t)=U_S-U_S e^{-t/\tau}=U_S\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$i_{ZS}(t)=\frac{U_S}{R}e^{-t/\tau}$$



$u_c(0_-)=U_0$

一阶电路全响应

根据叠加原理可知，图中RC电路的全响应为：

$$u_C(t)=u_{ZI}(t)+u_{ZS}(\mathrm{t})=U_s+\underbrace{\left(U_0-U_s\right)e^{-t/\tau}}\quad ,t\geq 0_+$$

$$i(t)=i_{ZI}(t)+i_{ZS}(\mathrm{t})=0+\underbrace{\left(\frac{U_s}{R}-\frac{U_0}{R}\right)e^{-t/\tau}}\quad ,t\geq 0_+$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应= 自然响应 + 强迫响应

= 稳态响应 + 暂态响应

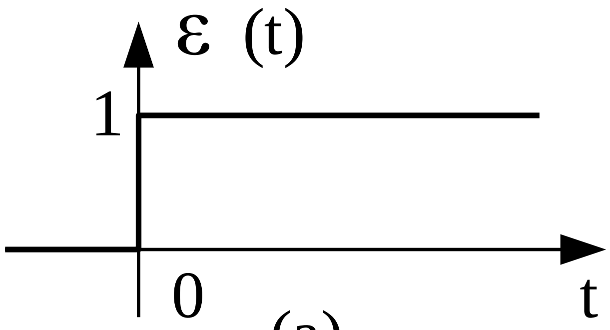
与电路时间常数无关，不会随时间的推移而消逝。

随时间的推移以指数形式不断衰减，衰减速度取决于电路时间常数。

一阶电路的阶跃响应

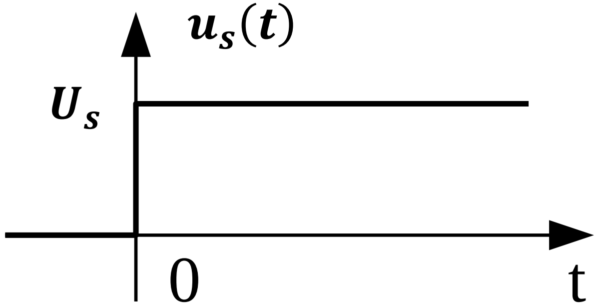
单位阶跃函数用$\boldsymbol{\varepsilon(t)}$表示，其定义为：

$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$



(a)

$$u_s(t) = U_s\varepsilon(t)V$$



$(\boldsymbol{b})$

一阶电路的阶跃响应

阶跃函数的应用2：**描述起始时间。**

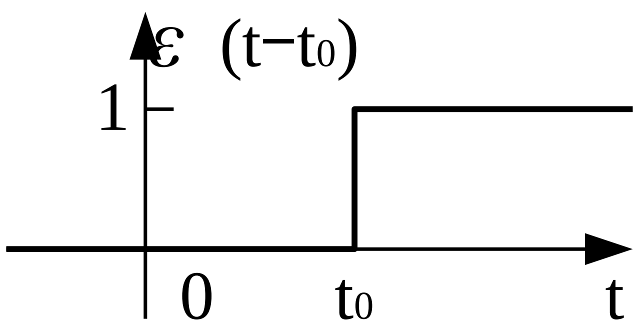
$$u_C(t) = 4 - 2e^{-2t}V \ (t > 0_+)$$

$$\Updownarrow$$

$$u_C(t) = (4 - 2e^{-2t})\varepsilon(t)V$$

若单位直流电源接入的时刻为t_0，则可用**延迟单位阶跃函数**表示，如图。

$$\varepsilon(t-t_0) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & ,t > t_0 \\ 0 & ,t < t_0 \end{cases}$$

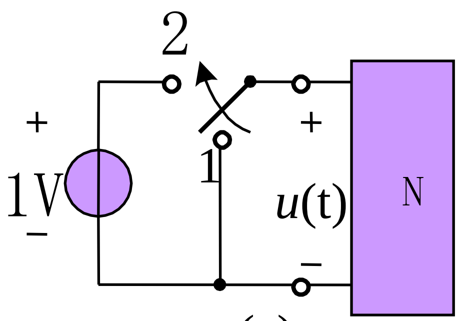


(d)

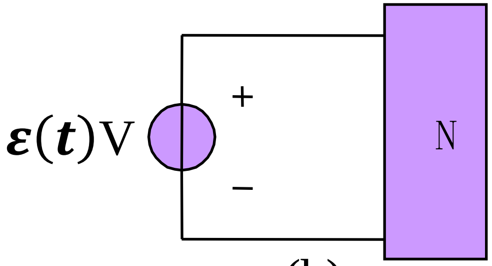
一阶电路的阶跃响应

阶跃函数的应用1：描述某些情况下的开关动作。

假设 $\boldsymbol{u_s(t)=\varepsilon(t)V}$



(a)

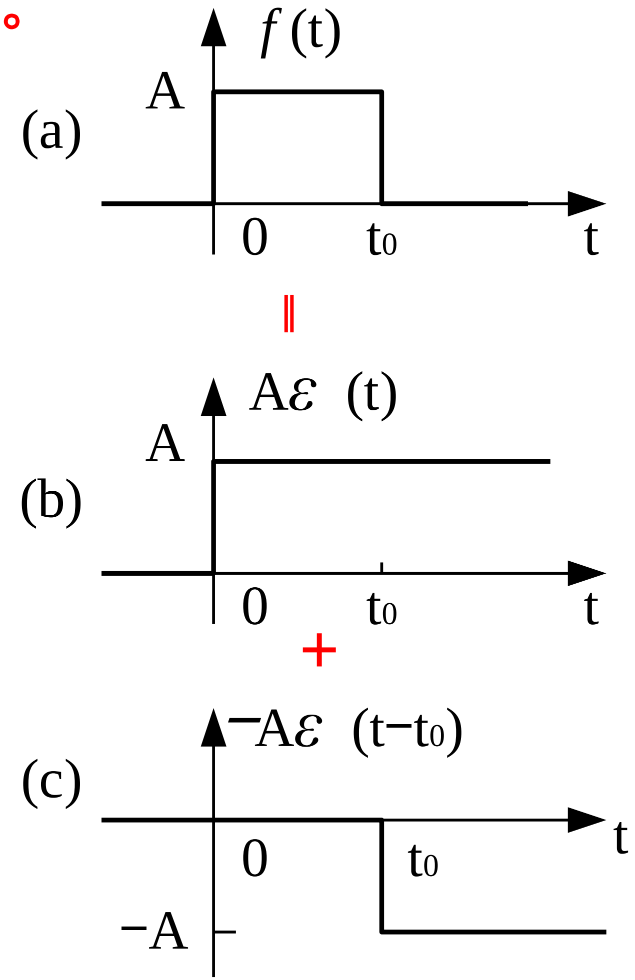


(b)

阶跃函数

阶跃函数的应用3：简洁地表示某些信号。

矩形脉冲信号：$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$

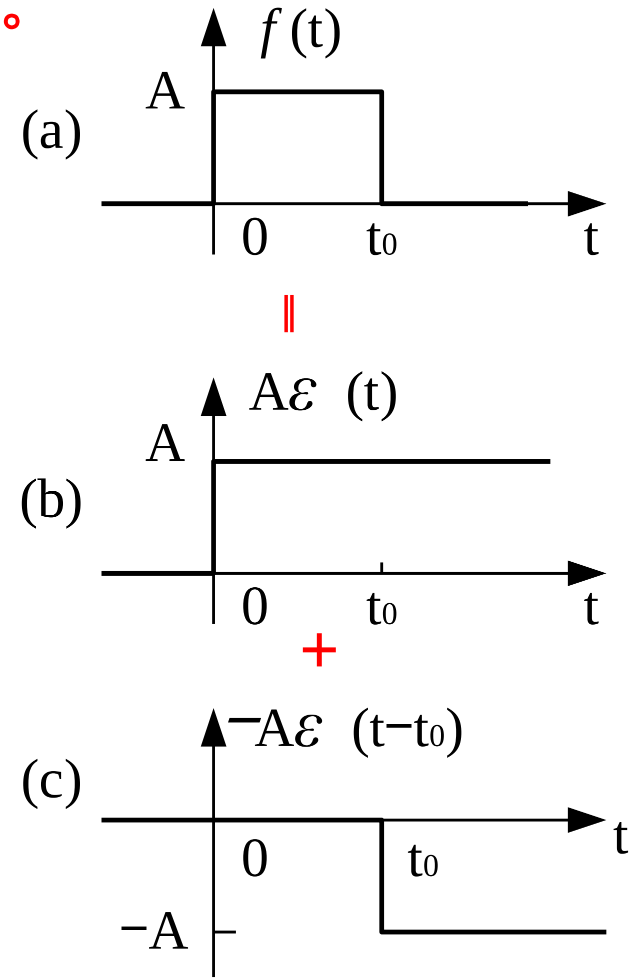


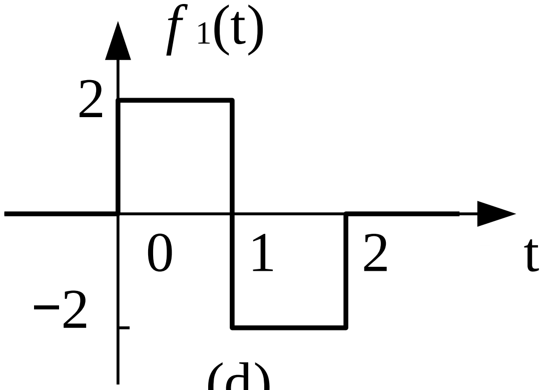
阶跃函数

阶跃函数的应用3：简洁地表示某些信号。

矩形脉冲信号：

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$





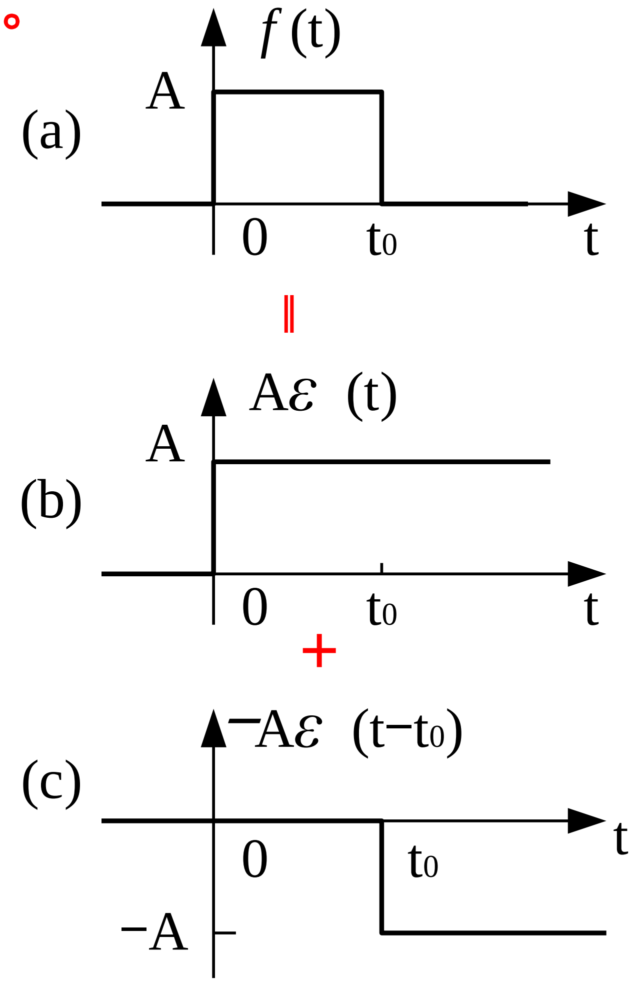
(d)

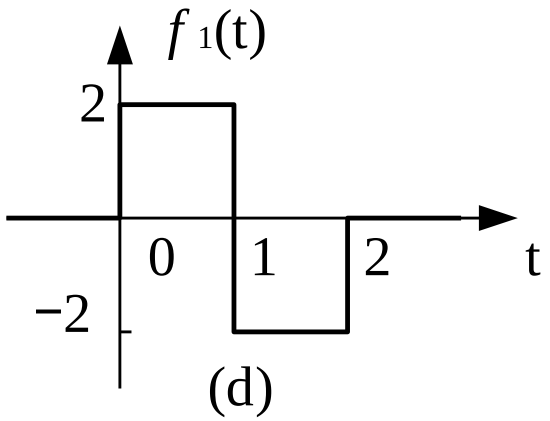
阶跃函数

阶跃函数的应用3：**简洁地表示某些信号。**

矩形脉冲信号：

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$



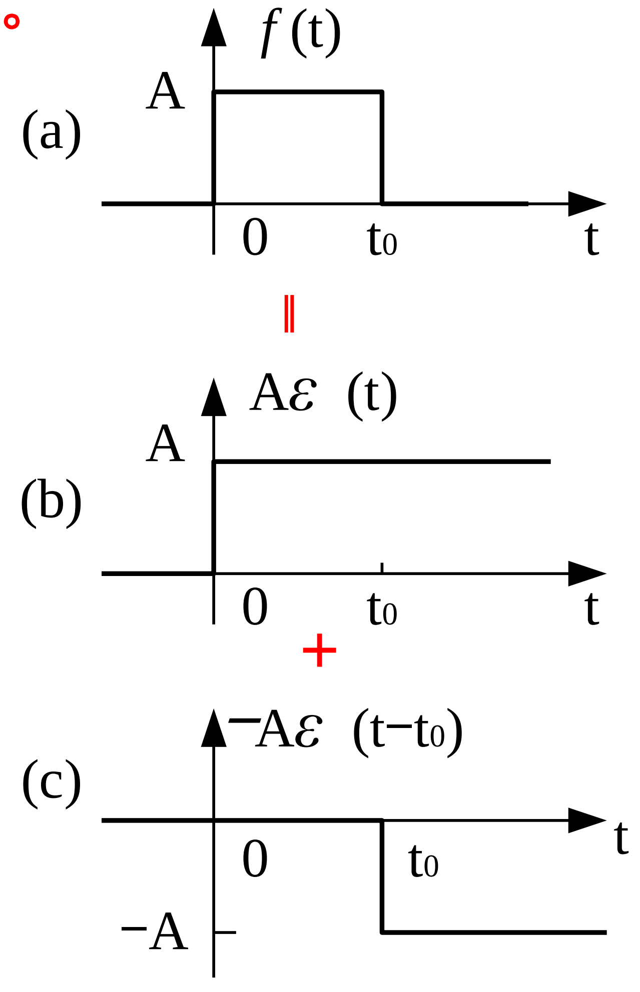


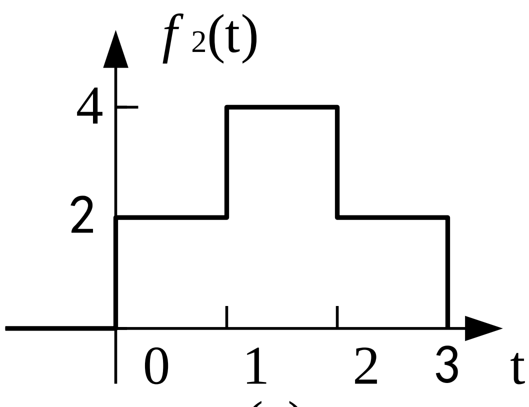
$$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 4\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-2)$$

阶跃函数

阶跃函数的应用3：简洁地表示某些信号。

矩形脉冲信号：　$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$





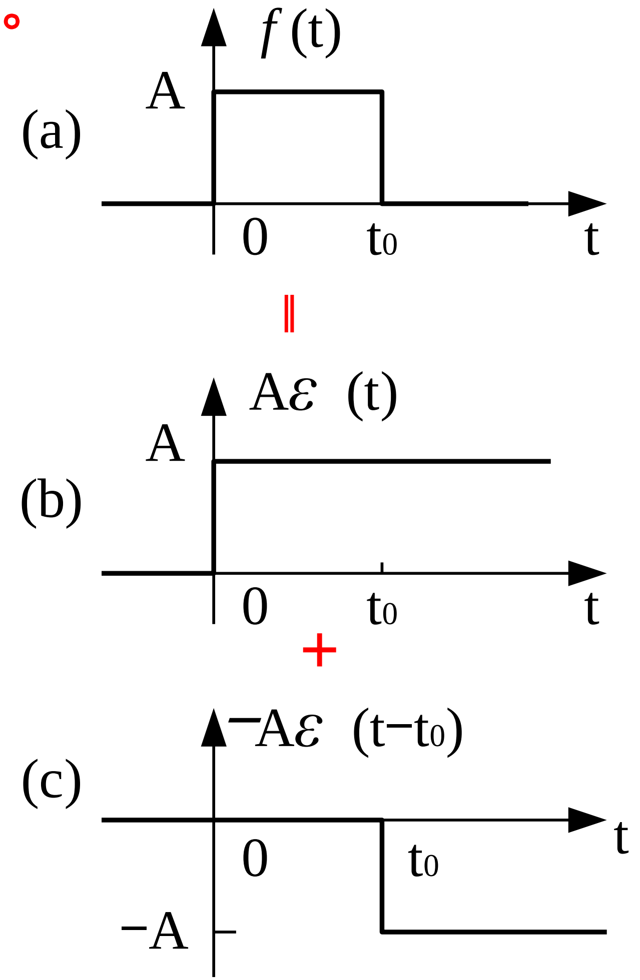
(e)

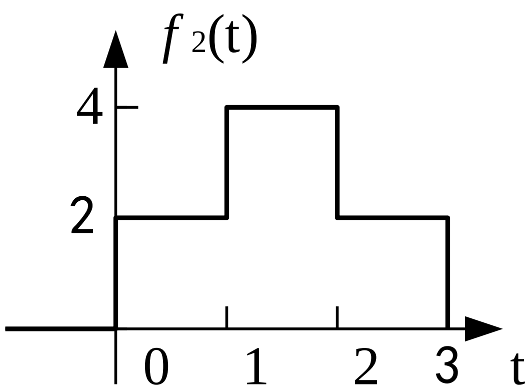
阶跃函数

阶跃函数的应用3：**简洁地表示某些信号。**

矩形脉冲信号：

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$





(e)

$$f_2(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

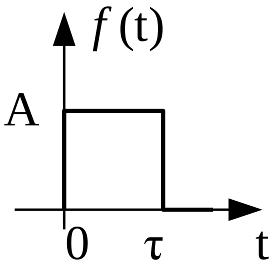
阶跃响应

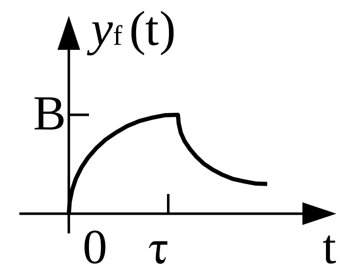
当激励为 ε (t)时，电路的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应 g(t). （相当于单位直流源(1V或1A)在t=0时接入）

分段直线信号引起的响应性质：

（1）线性叠加性

$af_1(t)+bf_2(t)\rightarrow ay_{f1}(t)+by_{f2}(t)$

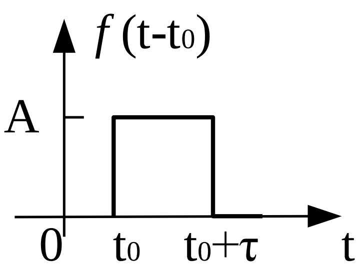


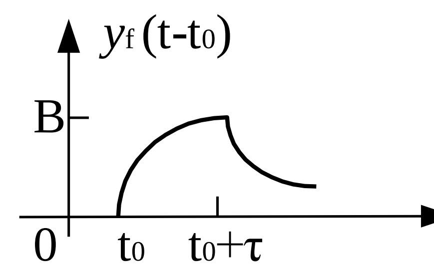


（2）时不变性：

若$f(t)\rightarrow y_f(t)$，

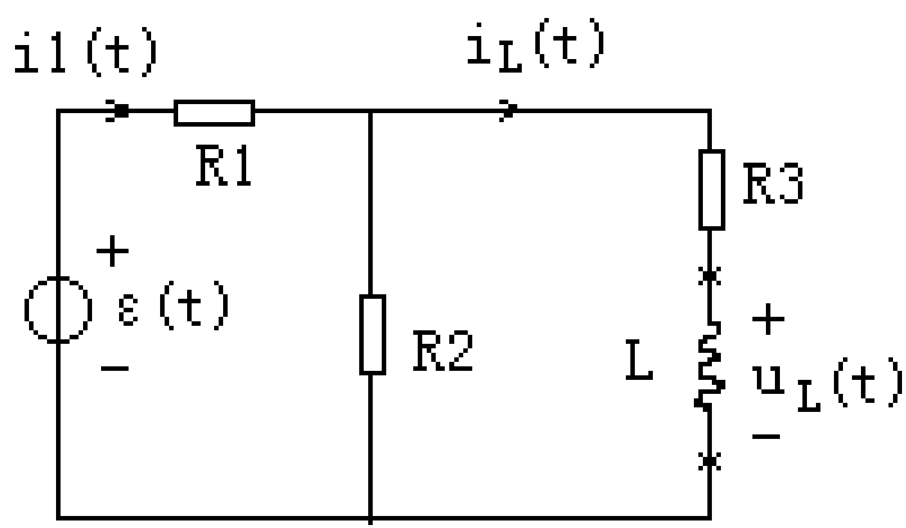
则$f(t-t_0)\rightarrow y_f(t-t_0)$





例5. 图示电路中， R1=8Ω,R2=8Ω， R3=6Ω,L=1H

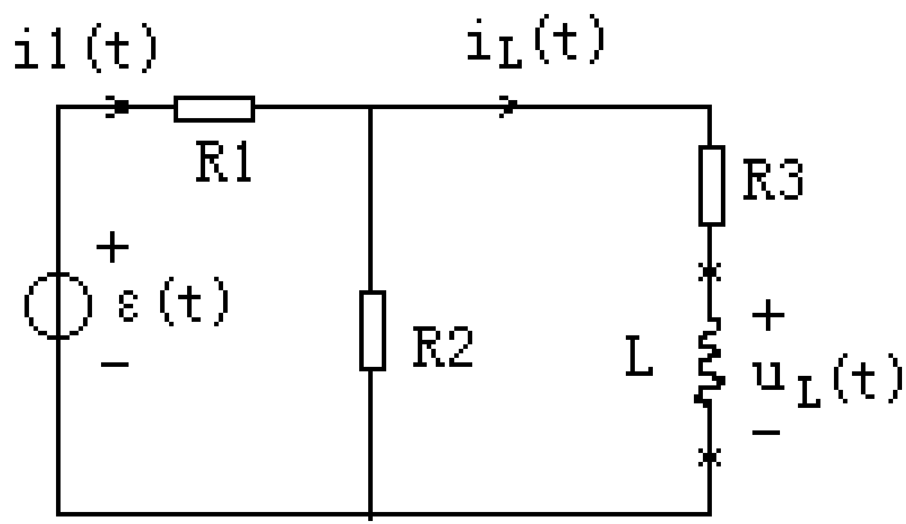
求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应i_L(t)与u_L(t).



例5.图示电路中，R1=8Ω,R2=8Ω， R3=6Ω,L=1H

求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应i_L(t)与u_L(t).

分析：一阶电路零状态响应是对一个动态元件和一个电阻而言的。

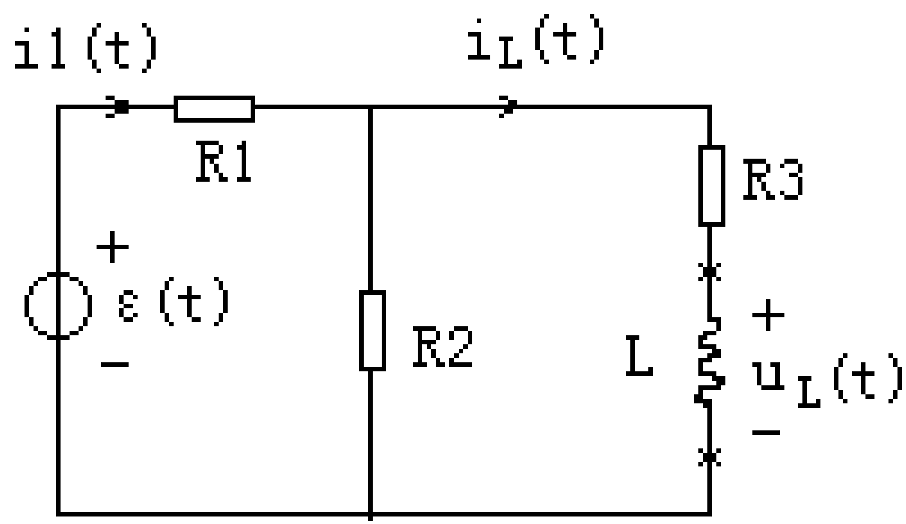


例5. 图示电路中，R1=8Ω, R2=8Ω， R3=6Ω, L=1H

求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应i_L(t)与u_L(t).

分析：一阶电路零状态响应是对一个动态元件和一个电阻而言的。可将电感元件以外的电路作戴维宁等效变换，而后即可直接写出答案。

解：将L两端断开求开路电压u(t)和等效电阻R_0，断开后u(t)即为ε(t)在R_2上的分压：

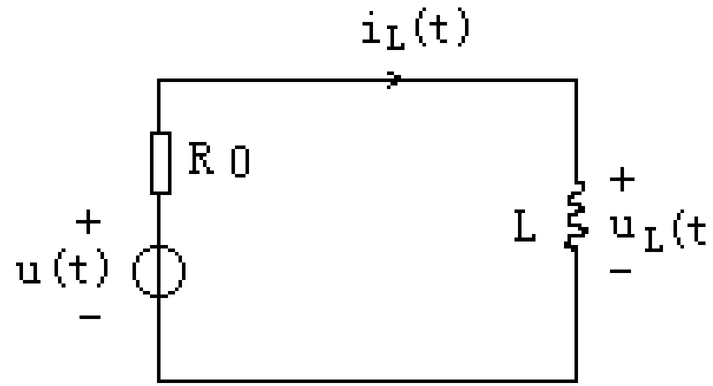


例5. 图示电路中，R1=8Ω,R2=8Ω， R3=6Ω,L=1H

求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应i_L(t)和u_L(t).

解：$u(t)=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\varepsilon(t)=0.5\varepsilon(t)V$

$$R_0 = R_3+(R_1 // R_2)=10\Omega$$



戴维宁等效电路

KVL方程： $$u_L+R_0 i_L=u(t)$$

$$L\frac{di_L}{dt}+R_0 i_L=u(t)$$

R_0除两边: $$\frac{L}{R_0}\frac{di_L}{dt}+i_L=\frac{u(t)}{R_0}$$

此方程的通解为：$i=\dfrac{u}{R_0}+B\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

例5. 图示电路中，R1=8Ω,R2=8Ω， R3=6Ω,L=1H

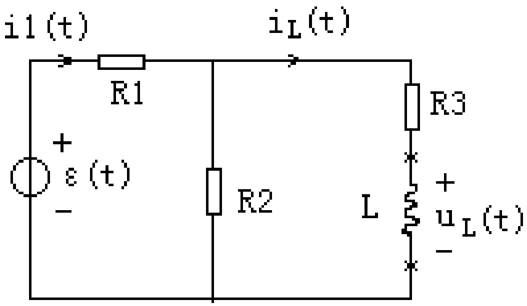
求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应i_L(t)和u_L(t).

解：

$$B=-\frac{u}{R_0} \qquad \tau=\frac{L}{R_0}=0.1$$

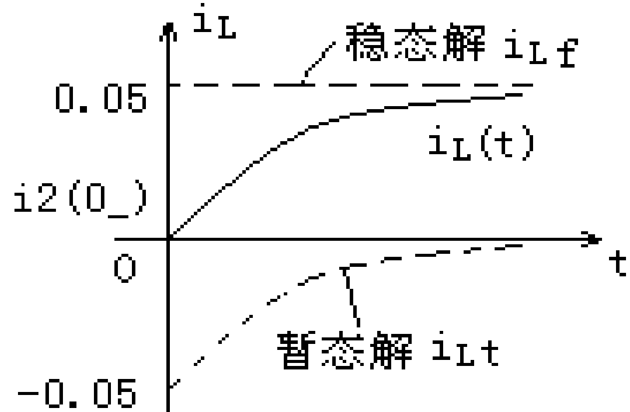
代入初始条件： $i(0+)=i(0-)=0$

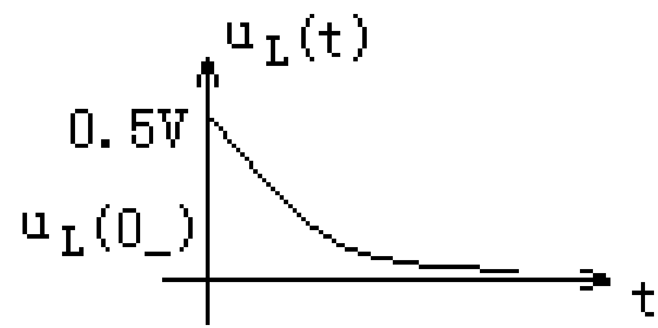
从而阶跃响应： $$i_L(t)=\frac{u}{R_0}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=0.05(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)\boldsymbol{A}$$



$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=u\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=0.5\,\mathrm{e}^{-10t}\,\varepsilon(t)\boldsymbol{V}$$

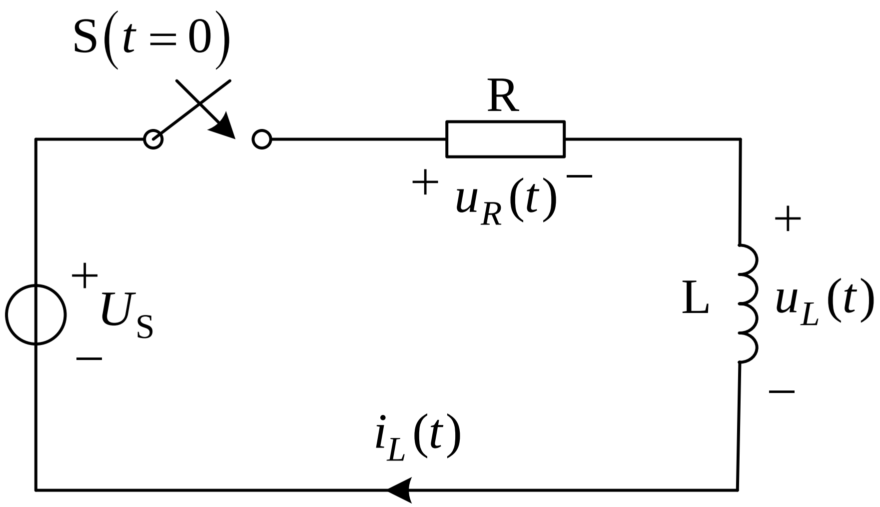
电流曲线





求解一阶电路的三要素法

一阶电路



$$u_R(t) + u_L(t) = U_S$$

$$u_R(t) = Ri_L(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = U_S$$

当所得到的方程为一阶线性常系数微分方程，相应的电路为一阶线性电路。

- 电路中仅一个动态元件的电路是一阶电路。
- 若电路中的动态元件可以归结为一个动态元件时，也是一阶电路。

求解一阶电路的三要素法

三要素法

一阶电路过渡过程中的电压、电流随时间按指数规律变化。若用f(t)表示电压或电流，f(0+)表示其换路后的初始值，f(∞)表示其换路后的稳态值，用τ表示电路的时间常数，则可直接写出其表达式为

$$f(t)=\boxed{f(\infty)}+[\boxed{f(0_+)}-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\boxed{\tau}}}$$

RC电路 $\tau=RC$

RL电路 $\tau=L/R$

初始值和稳态值的计算

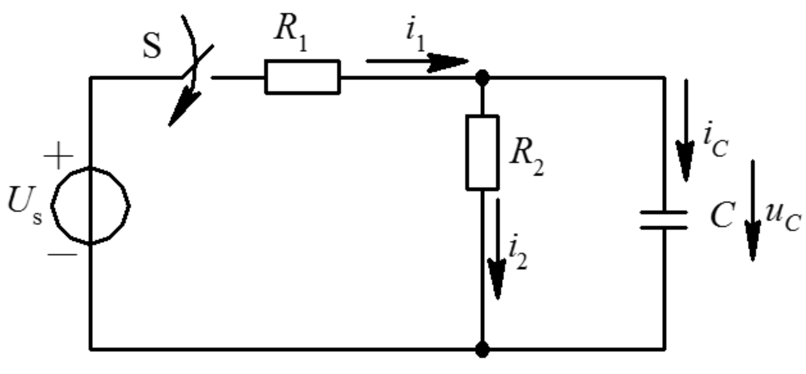
换路后最初一瞬间（即 t=0_+）的电流、电压值，统称为初始值。初始值f(0+) 可由换路后的初态电路计算。

初态电路 $\left\{\begin{array}{l}\text{电容换成电压源 } E_C=u_C(0_+) \\ \text{电感换成电流源 } I_{SL}=i_L(0_+)\end{array}\right.$

稳态值f(∞)可由换路后的稳态电路计算。

稳态电路 $\left\{\begin{array}{l}\text{电容开路} \\ \text{电感短路}\end{array}\right.$

例6. 图（*a*）所示电路中，已知U_s=12V，R_1=4kΩ，R_2=8kΩ，C=1μF，开关S原来处于断开状态，电容上电压$u_C(0_-)=0$。求开关S闭合后，$t=0_+$时，各电流及电容电压的数值。



(*a*)

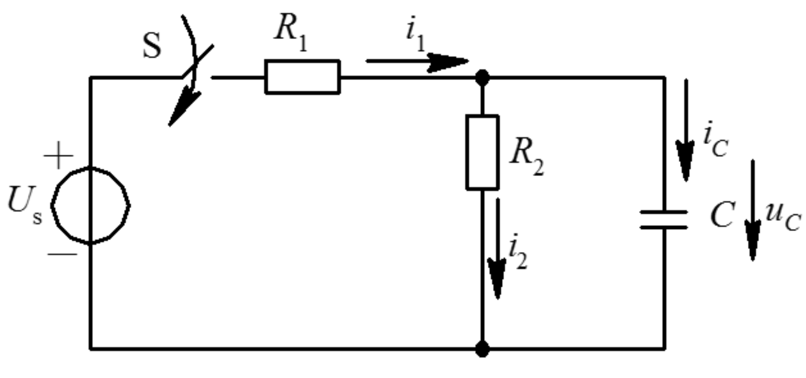
例6. 图（a）所示电路中，已知U_s=12V，R_1=4kΩ，R_2=8kΩ，C=1μF，开关S原来处于断开状态，电容上电压$u_C(0_-)=0$。求开关S闭合后，$t=0_+$时，各电流及电容电压的数值。

解 选定有关参考方向如图所示。

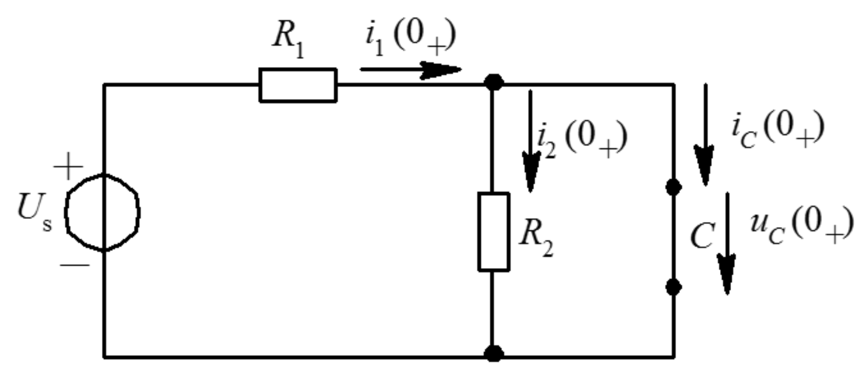
(1) 由已知条件可知：$u_C(0_-)=0$。

(2) 由换路定律可知：$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$。

(3) 画出$t=0_+$时刻的等效电路，如图(b)。电容相当于短路。



(a)



(b)

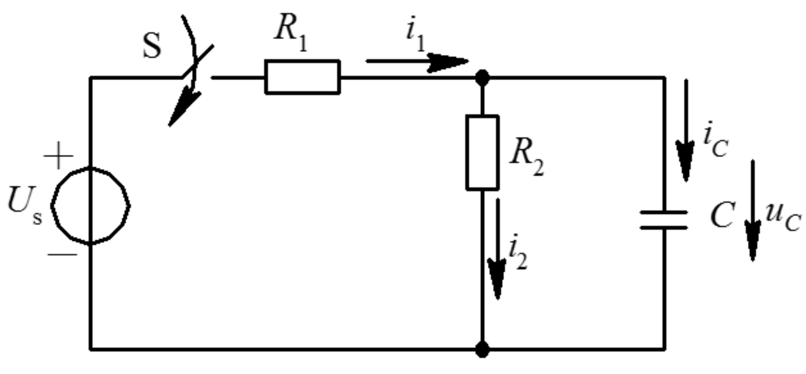
例6．图（*a*）所示电路中，已知U_s=12V，R_1=4kΩ，R_2=8kΩ，C=1μF，开关S原来处于断开状态，电容上电压$u_C(0_-)=0$。求开关S闭合后，$t=0_+$时，各电流及电容电压的数值。

解

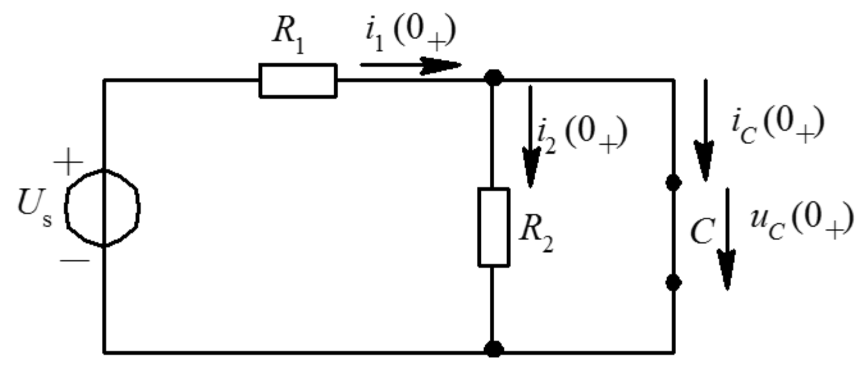
$$i_2(0_+)=\frac{u_C(0_+)}{R_2}=\frac{0}{R_2}=0,$$

$$i_1(0_+)=\frac{U_s}{R_1}=\frac{12}{4\times10^3}=3mA$$

由KCL有$i_C(0_+)=i_1(0_+)-i_2(0+)=3\text{mA}$。



(*a*)



(*b*)

例7. 如图（a）所示, 已知U_s=10V, R_1=6Ω, R_2=4Ω, L=2mH, 开关S原处于断开状态。求开关S闭合后t=0+时，各电流及电感电压u_L的数值。

解 选定有关参考方向如图所示。

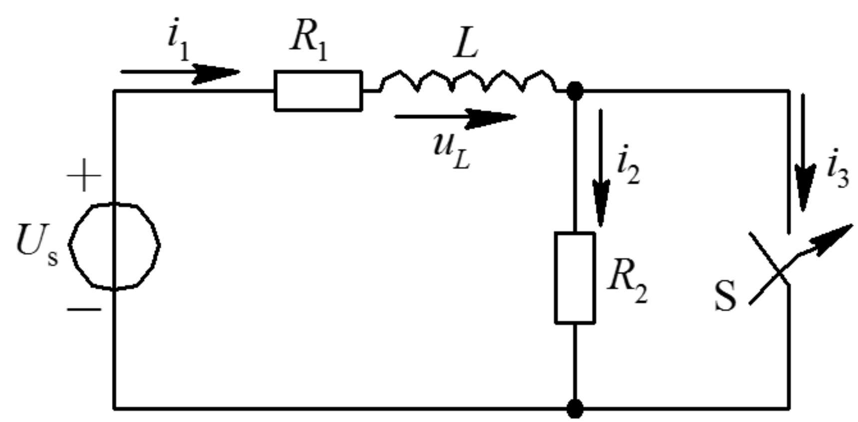
(1) 由已知条件可知，

$$i_L(0_-)=i_1(0_-)=i_2(0_-)=\frac{U_s}{R_1+R_2}=\frac{10}{6+4}=1A$$

$$i_3(0_-)=0$$

(2) 由换路定律知

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1A$$



(a)

例7. 如图（*a*）所示, 已知U_s=10V, R_1=6Ω, R_2=4Ω, L=2mH, 开关S原处于断开状态。求开关S闭合后t=0+时，各电流及电感电压u_L的数值。

解 (3) 画出$t=0_+$时的等效电路如图。

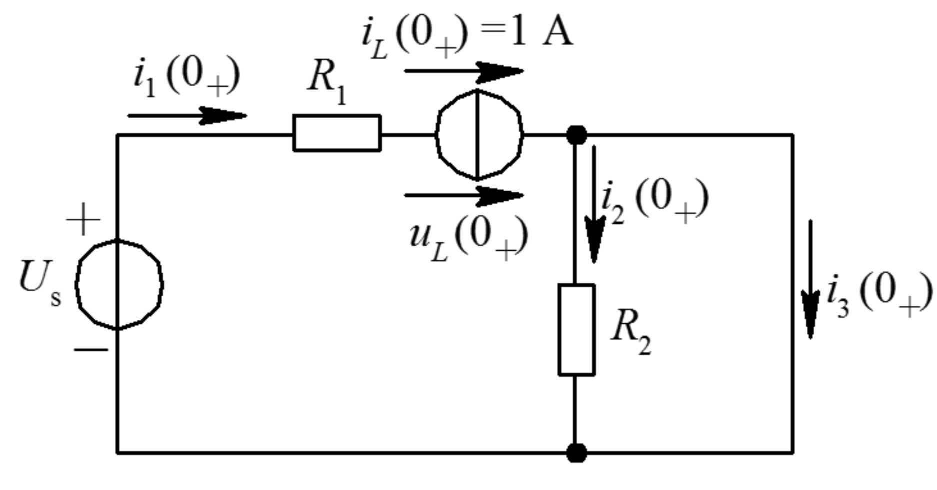
由于S闭合, R_2被短路, 则R_2两端电压为零, 故$i_2(0_+)=0$。

由KCL有 $$i_3(0_+)=i_1(0_+)-i_2(0_+)=i_1(0_+)=1A$$

由KVL有

$$U_s=i_1(0_+)R_1+u_L(0_+)$$

$$U_L(0_+)=U_s-i_1(0_+)R_1$$
$$=10-1\times6=4V$$



(*b*)

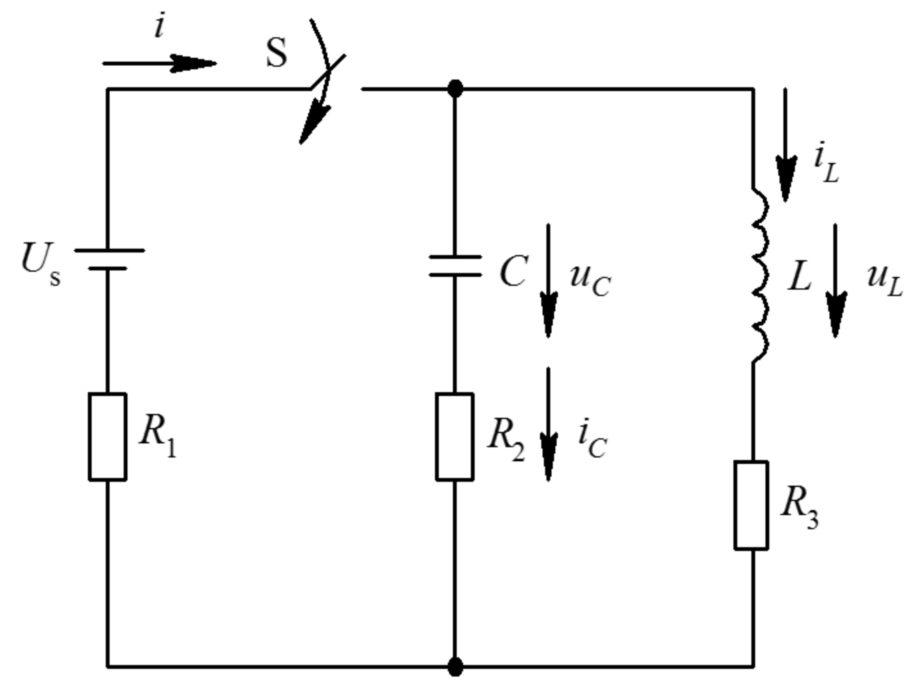
例8. 如图（a）所示电路，已知Us=12V，R1=4Ω，R2=8Ω，R3=4Ω， $u_C(0_-)=0$**,** $i_L(0_-)=0$ **。 t=0时，S闭合。 求当开关S闭合后，各支路电流的初始值和电感上电压的初始值。**

解 (1) 由已知条件可得

$$u_C(0_-)=0$$
$$i_L(0_-)=0$$

(2) 由换路定律可知

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$



(a)

例8. 如图（a）所示电路，已知Us=12V，R1=4Ω，R2=8Ω，R3=4Ω， $u_C(0_-)=0$**,** $i_L(0_-)=0$ **。 t=0时，S闭合。 求当开关S闭合后，各支路电流的初始值和电感上电压的初始值。**

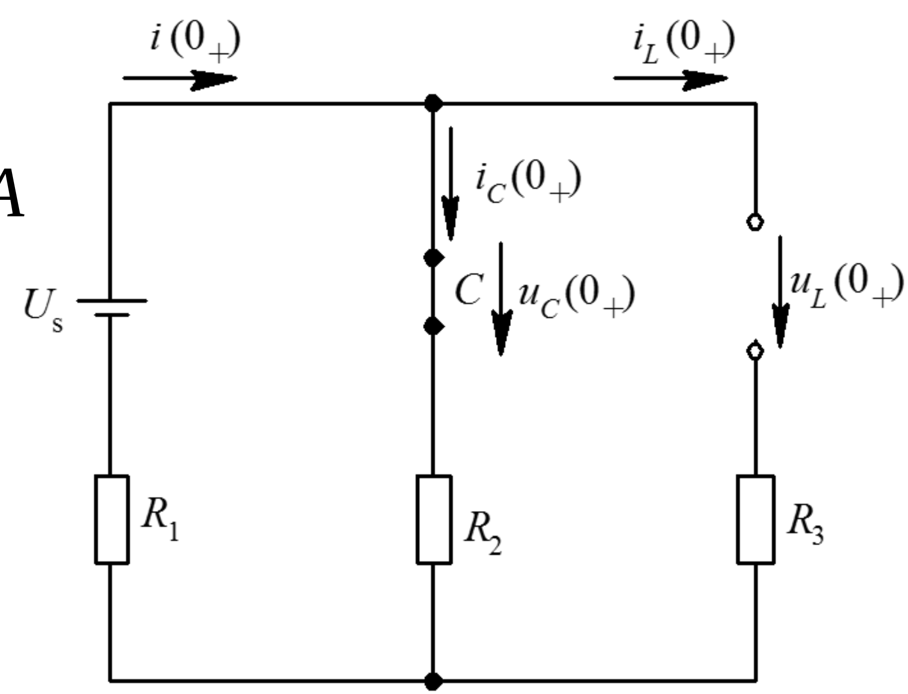
解（3）画出 t=0$_+$时的等效电路如图。

$$i(0_+)=i_C(0_+)$$

$$=\frac{U_s}{R_1+R_2}=\frac{12}{4+8}=1A$$

$$u_L(0_+)=i_C(0_+)R_2$$

$$=1\times 8=8V$$



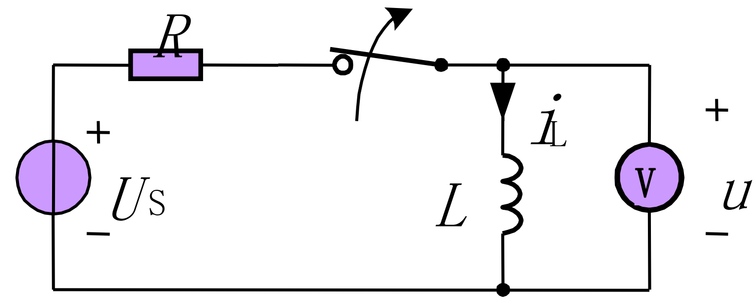
(b)

例9：电路如图所示，已知R = 4Ω，L = 0.1H，U_S = 24V，开关在t = 0打开，求t≥0时的电流i_L，其中电压表的内阻R_V = 10kΩ，量程为100V，问开关打开时，电压表有无危险？

解 由已知得：

t=0-时，电感短路，$u(0-)=0$。

而$i_L(0_+)=i_L(0-)$=Us/R=24/4=6A

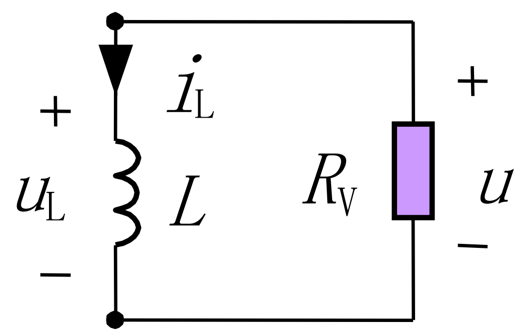


(a)

换路后，等效电路如图(b)。

由KVL方程有 $u_L - u = 0$

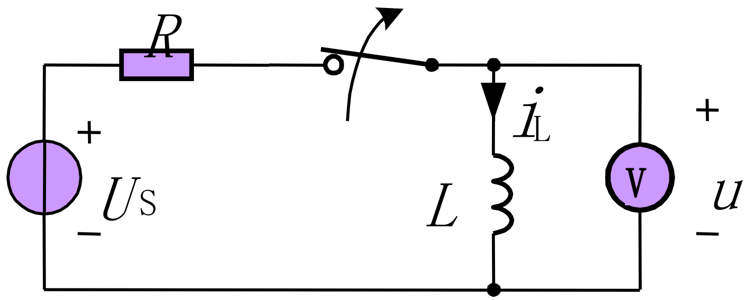
将u =L di_L/dt和u =−$R_V i_L$代入上式得



(b)

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+R_V i_L=0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{R_V}{L}i_L=0$$

例9：电路如图所示，已知R = 4Ω，L = 0.1H，U_S = 24V，开关在t = 0打开，求t≥0时的电流i_L，其中电压表的内阻R_V = 10kΩ，量程为100V，问开关打开时，电压表有无危险？



(a)

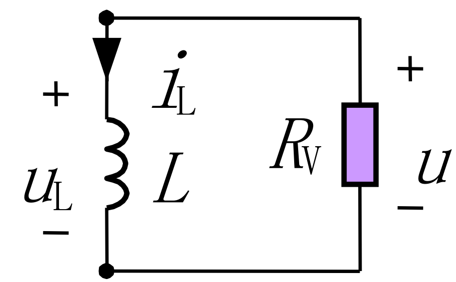
解 令 $\tau = L/R_V = 10^{-5}$s，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_L = 0$$

故 $i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 6\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{A}$

$$u(t) = -R_V i_L(t)$$

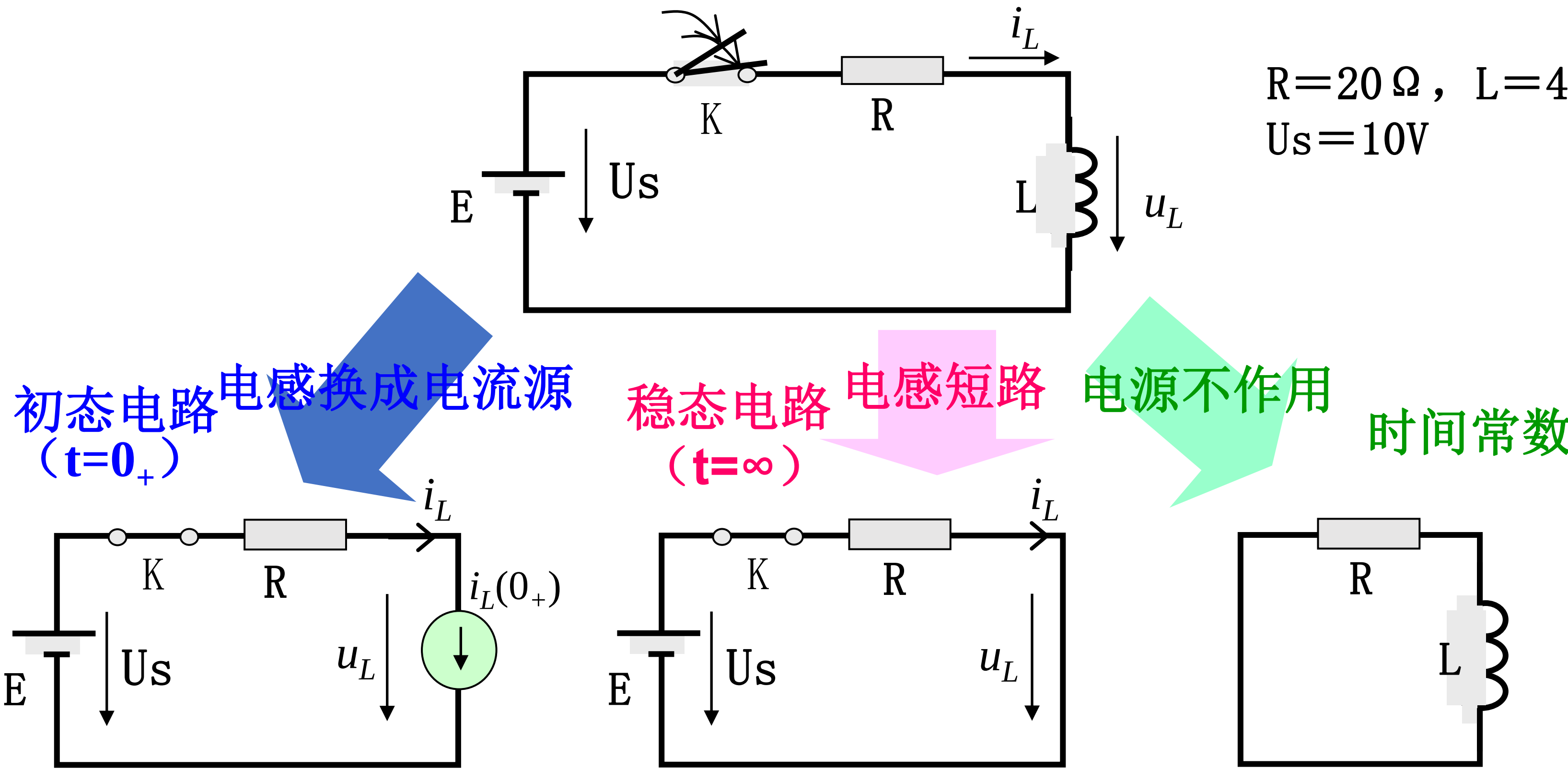
$$= -10\times10^3\times6\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -60\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}kV$$



(b)

电压表换路后瞬间要承受-60kV的高压，而其量程只有100V，因此电压表立即被打坏。

例10 图示电路，t=0时 K闭合。 K闭合前电感中无电流。求K闭合后电路的过渡过程。



R＝20Ω，L＝40mH ，Us＝10V

$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

$u_L(0_+) = U_S = 10(V)$

$i_L(\infty) = U_S/R = 0.5\ (A)$

$u_L(\infty) = 0$

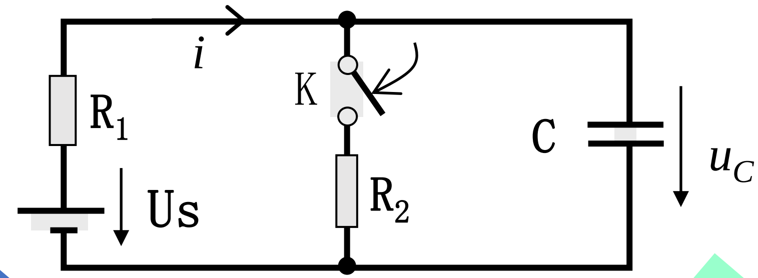
$\tau = L/R = 0.04/20 = 0.002(S)$

过渡过程表达式:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [\,i_L(0_+) - i_L(\infty)\,]\ e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5 - 0.5e^{-500t}(A)$$

$$u_L(t) = u_L(\infty) + [\,u_L(0_+) - u_L(\infty)\,]\ e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-500t}(V)$$

例11 图示电路，t=0时 K闭合。K闭合前电路已处稳态。
求K闭合后电路的过渡过程。

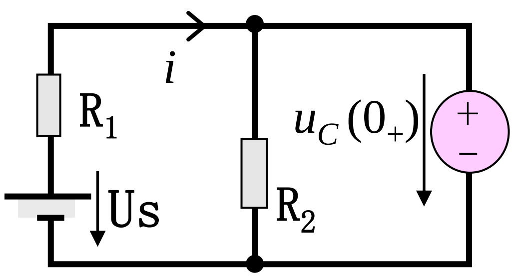


$R_1=400\,\Omega$，$R_2=100\,\Omega$

$C=50\,\mu F$，$Us=40V$ 。

电容换成电压源

初态电路
（$t=0_+$）

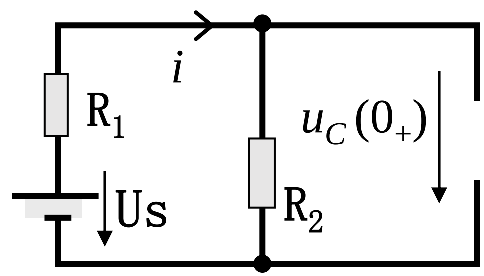


$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 40(V)$

$i(0_+) = [U_S - u_C(0_+)]/R_1 = 0$

电容开路

稳态电路
（t=∞）

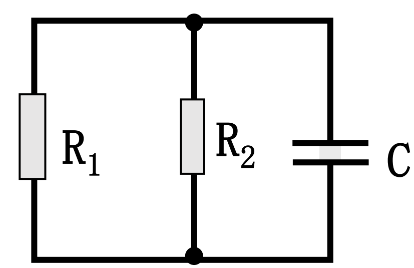


$u_C(\infty) = U_S R_1/(R_1+R_2) = 8(V)$

$i(\infty) = U_S/(R_1+R_2) = 0.08(A)$

电源不作用

时间常数



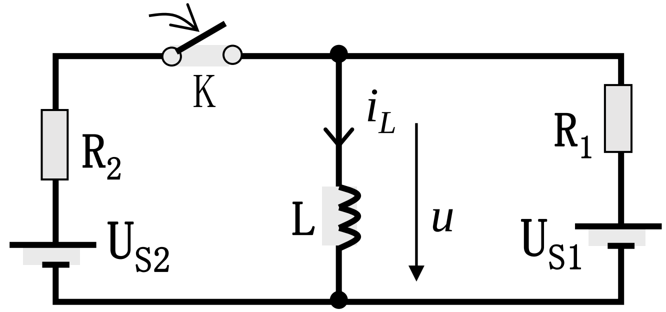
$R = R_1 \| R_2 = 80(\Omega)$

$\tau = RC = 80 \times 50 \times 10^{-6} = 0.004(S)$

过渡过程表达式：$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 + 32\,e^{-250t}(V)$

$$i_C(t) = i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.08 - 0.08\,e^{-250t}(A)$$

例12 图示电路，t=0时 K闭合。K闭合前电路已处稳态。求K闭合后电路的过渡过程。



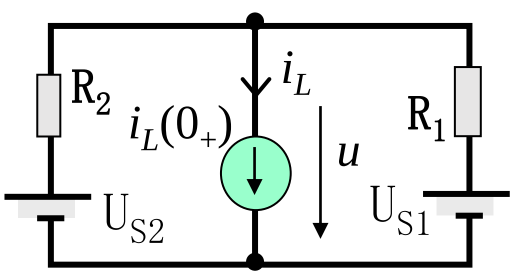
$R_1=6\Omega$，$R_2=9\Omega$

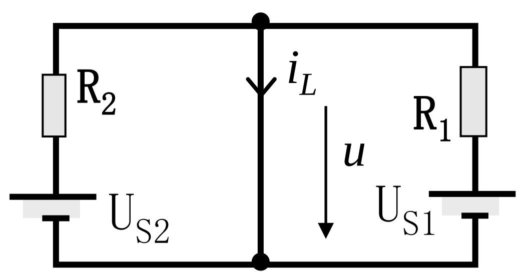
Us1＝6V，Us2=9V

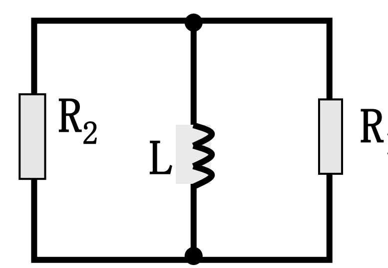
L=1.8H。

电感换成电流源　　电感短路　　电源不作用

初态电路（$t=0_+$）　　稳态电路（$t=\infty$）　　时间常数







$i_L(0_+) = i_L(0_-) = U_{S1}/R_1 = 1(A)$　　$i_L(\infty) = U_{S1}/R_1 + (U_{S2}/R_2 = 2(A)$　　$R = R_1 || R_2 = 3.6(\Omega)$

$$u(0_+) = \frac{U_{S1}/R_1 + U_{S2}/R_2 - i_L(0_+)}{1/R_1 + 1/R_2} = 3.6(V) \qquad u(\infty) = 0$$

$\tau = L/R = 1.8/3.6 = 0.5(S)$

过渡过程表达式:

$$u_L(t) = u_L(\infty) + [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 3.6\,e^{-2t}(V)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 - e^{-2t}(A)$$

作业

- **练习三**
- **计算题： 8，9，10，11，12。**