本科概率论与数理统计作业卷(一)

一、填空题

1.设随机事件 A,B 及其并事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件, 则事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______________

解 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-\left[P(A)+P(B)-P(A\cup B)\right]=0.3$

2.已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$____________

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 和 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(AB)$

得 $P(A)+P(B)=1$ $\quad\therefore\ P(B)=1-P(A)=1-p$

3. $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{9}$,则事件 A,B,C 都不发生的概率为__________________.

解 由 $ABC\subset AB$ 得 $P(ABC)\le P(AB)=0$ 故事件 A,B,C 都不发生的概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]=\frac{17}{36}$$

4.把 10 本书随意放在书架上,则其中指定的 3 本书放在一起的概率为_________

解 把指定的 3 本书视为一组与另外 7 本书全排列得所求的概率为 $P=\dfrac{3!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

5.从 0,1,2,⋯,9 中任选出的 4 个不同数字能组成一个 4 位偶数的概率为_______

题意两种理解方式

5表示一个是偶数　　第一位是0，一个是偶数，还剩2位：8、7

解(1)注意到 4 位偶数不能以 0 开头，故 $P=\dfrac{5A_9^3-4A_8^2}{A_{10}^4}=\dfrac{41}{90}\approx 0.455556$

10 9 8 7

(2) 不考虑顺序，只要有一个偶数即可组成，其对立事件是全部是奇数，所以 1-C(5,4)/C(10,4) = 41/42

二、选择题

1.当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则下列结论正确的是__________

(A) $P(C)=P(AB)$ (B) $P(C)=P(A)\cup P(B)$

(C) $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$ (D) $P(C)\le P(A)+P(B)-1$

解 由题意 $AB\subset C$ 及概率加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 得

$P(C)\ge P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1$ 故应选(C)

2. 掷两枚骰子,则所得的两个点中最小点是 2 的概率为___________

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

解 基本事件总数为 6×6＝36，

两点皆为 2 或一个点为 2、另一个点大于 2 的情形有 $1+C_2^1\cdot C_4^1=9$

$\therefore P=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$ 故应选(A)

3.在数集{1,2,3,4,5}中依次取出三个数,每次取一个,记 A=“取出的三个数依次为 1,2,3”, 若依次取出,取后放回时记 $P(A)=p_1$, 若依次取出,取后不放回时记 $P(A)=p_2$,则______

(A) $p_1<p_2$ (B) $p_1=p_2$ (C) $p_1>p_2$ (D) 无法比较 p_1,p_2 的大小

解 两种取法，A 的有利基本事件只有 1 个

$$p_1=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}<p_2=\frac{1}{5\times4\times3}=\frac{1}{60}$$ 故应选(A)

4.袋中装有 2 个伍分、3 个贰分和 5 个壹分的硬币,现任取其中的 5 个,则所得的总币值超过一角的概率为________

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

2个5　1个5 3个2　1个5 2个2

解 $P=\frac{C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2}{C_{10}^5}=\frac{56+10+60}{252}=\frac{1}{2}$ 故应选(B)

三、计算、证明题

1.从五双不同号码的鞋中任取 4 只,求这 4 只鞋至少有 2 只能配成一双的概率.

解 没有成双的事件数为$C_5^4\cdot2^4$,基本事件总数为C_{10}^4,故所求概率 $P=1-\frac{C_5^4\cdot2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$

2.一批产品共有 200 个,其中有 6 个是废品, 求 (1)这批产品的废品率;
(2)任取 3 个恰好有 1 个是废品的概率; (3) 任取 3 个中没有废品的概率

解 (1)$P=\frac{6}{200}=0.03$; (2)$P=\frac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}\approx0.0855$; (3)$P=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}\approx0.9122$

3.一条电路上安装有甲、乙两根保险丝,当电流强度超过一定值时它们单独烧断的概率分别为 0.8 和 0.9,同时烧断的概率为 0.72,求电流强度超过这一定值时至少有一根保险丝被烧断的概率.

解 设事件 A、B 分别表示甲、乙两根保险丝被烧断,所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.9-0.72=0.98$$

4.从 0,1,2,……,9 的十个数中任选三个不同的数,求下列事件的概率: A_1=“三个数中不含 0 和 5” ; (2) A_2=“三个数中不含 0 或 5” ; (3) A_3=“三个数中含 0 但不含 5”

解 (1) $P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\approx0.46667$

重复的同时不含0和5

(2) $P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}\approx0.93333$

0确定有，所以3个数变成2个数；5确定没有，所以候选的9(10个数去掉0)个数变成了8个

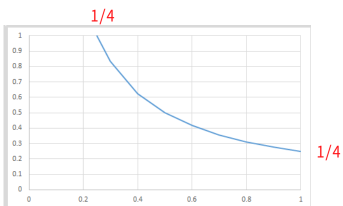
(3) $P(A_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}\approx0.23333$

5.在区间(0,1)中任取两个数,求这两个数的乘积小于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设取出的两个数分别为 x 和 y, 则$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$,

要求“两个数的乘积小于$\frac{1}{4}$”等价于“$(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\Omega\,\middle|\,xy<\frac{1}{4}\right\}$”

$$m_\Omega=1,\ m_D=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}dx\int_{\frac{1}{4x}}^{1}dy=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1-\frac{1}{4x}\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln2$$



故所求概率为 $P\{(x,y)\in D\}=\frac{m_D}{m_\Omega}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln2\approx0.597$

本科概率论与数理统计作业卷(二)

一、填空题

1.设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)$=__________.

解 由题设条件得 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}, P(A)-P(AB)=\boxed{P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)}=P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow \quad P(A)=P(B) \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A})=P(\bar{B})$,再由 A 和 B 独立知 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 也独立,故

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=\left[P(\bar{A})\right]^2=\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A})=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{3}$$

2. 掷一枚不均匀的硬币,已知在 4 次投掷中至少出现一次正面朝上的概率为 $\frac{80}{81}$,则在一次投掷中出现正面朝上的概率为__________.

解 设一次投掷中出现正面朝上的概率为 p,则由题意得

$$1-C_4^0p^0(1-p)^4=1-(1-p)^4=\frac{80}{81} \quad \Rightarrow \quad (1-p)^4=\frac{1}{81} \quad \Rightarrow \quad 1-p=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad p=\frac{2}{3}$$

3.一批产品共有10个正品和2个次品,任意抽取两次,每次取一个,取后不再放回,则第二次取到次品的概率为__________.

解 设 A={第一次取到正品}, B={第二次取到次品},则 $P(A)=\frac{5}{6} \Rightarrow P(\bar{A})=\frac{1}{6}$

$P(B\mid A)=\frac{2}{11}, P(B\mid\bar{A})=\frac{1}{11}$ 由全概率公式得所求概率为

$$P(B)=P(A)\times P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{6}$$

4.设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立试验,则事件 A 至少发生一次的概率为______________,而事件 A 至多发生一次的概率为______________________.

解 设 B={n 次独立试验中 A 至少发生一次},C={n 次独立试验中 A 至多发生一次},则

一次也不发生 或 发生0次

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-C_n^0p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$$

$$P(C)=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

二、选择题

1.将一枚骰子先后掷两次,设 X_1 和 X_2 分别表示先后掷出的点数,记 $A=\{X_1+X_2=10\}$, $B=\{X_1>X_2\}$,则 $P(B|A)$= ________.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

解 事件 A 有三种情形::4 和 6;5 和 5;6 和 4;事件 B 只有一种情形 6 和 4

所以 $P(B|A)=1/3$ 故应选(A)

2. 设 A 与 B 为对立事件,$P(A)>0, P(B)>0$,则错误的是________.

(A) $P(AB)=0$ (B) $P(A+B)=1$ (C) $P(A\mid B)=0$ (D) $P(\bar{B}\mid A)=0$

解 由 $\bar{B}=A$, $\Rightarrow P(\bar{B}\mid A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(AA)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1\neq 0$ 故应选(D)

3. 设 A、B、C 三个事件两两独立,则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是________.

(A)A 与 BC 独立 (B)AB 与 $A\cup C$ 独立 (C)AB 与 AC 独立 (D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

解 由 A、B、C 两两独立知 $P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$

故 A、B、C 相互独立的充分必要条件是 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$

等价于 A 与 BC 独立　　　　　　　　　　　　　　　故应选(A)

4.仓库中有甲、乙、丙三个工厂生产的灯管,其中甲厂生产的有 1000 支,次品率为 2%,乙厂生产的有 2000 支,次品率为 3%,丙厂生产的有 3000 支,次品率为 4%.若从中随机抽取一支结果发现为次品,则该次品是甲厂产品的概率为________.

(A) 10%　　　(B)20%　　　(C)30%　　　(D)15%

解 B_1、B_2、B_3 分别表示抽到的灯管是甲、乙、丙三个工厂生产的产品,则 B_1、B_2、B_3 构成完备事件组,又设 A 表示抽到次品,则由题意知

$$P(B_1)=\frac{1}{6}, P(B_2)=\frac{2}{6}, P(B_3)=\frac{3}{6}, P(A|B_1)=0.02, P(A|B_1)=0.03, P(A|B_1)=0.04$$

由贝叶斯公式得所求概率为 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=0.1$　　故应选(A)

三、计算、证明题

1.设某种动物由出生算起能活 20 年以上的概率为 0.8，能活 25 年以上的概率为 0.4，现有一只 20 岁的这种动物,问它能活到 25 岁以上的概率是多少？

解 记 B=“能活 20 年以上”, A=“能活 25 年以上”,由题意知 $P(B)$=0.8，$P(A)$=0.4

$$\because A\subset B \quad \therefore BA=A \quad \Rightarrow P(AB)=P(A)=0.4 \qquad \therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

2.甲、乙、丙三门高射炮向同一架飞机进行独立射击,设甲、乙、丙射中飞机的概率分别是 0.1，0.15，0.2.又设飞机被一门炮击中时坠毁的概率为 0.2, 被两门炮击中时坠毁的概率为 0.6, 被三门炮击中时必坠毁.试求飞机坠毁的概率.

解 记 B_k=“飞机被 k 门炮击中”(k=0,1,2,3),则 B_0,B_1,B_2,B_3 构成完备事件组

又设 A=“飞机坠毁”,则由题意及加法公式和乘法公式得

$$P(A|B_0)=0,\ P(A|B_1)=0.2,\ P(A|B_2)=0.6,\ P(A|B_3)=1$$

$$P(B_0)=0.9\times0.85\times0.8=0.612$$

$$P(B_1)=0.1\times0.85\times0.8+0.9\times0.15\times0.8+0.9\times0.85\times0.2=0.329$$

$$P(B_2)=0.1\times0.15\times0.8+0.9\times0.15\times0.2+0.1\times0.85\times0.2=0.056$$

$$P(B_3)=0.1\times0.15\times0.2=0.003$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.612\times0+0.329\times0.2+0.056\times0.6+0.003\times1=0.1024$$

3.甲、乙两个乒乓球运动员进行单打比赛,每局比赛甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 比赛采用三局两胜制或五局三胜制,问采用何种赛制对甲更有利?

解 (1) 若采用三局两胜制：记 A＝“每局比赛中甲胜”, B＝“每局比赛中乙胜”

则甲获胜情形有：AA，ABA，BAA, 故甲胜的概率为

$$P_1=0.6^2+0.6\times0.4\times0.6+0.4\times0.6\times0.6=0.648$$

(2) 若采用五局三胜制：记 A＝“甲胜”；A_1=“前三局比赛中甲全胜”；

A_2=“前三局比赛中甲全胜两局,乙胜一局,第四局甲胜”；

A_3=“前四局比赛中甲、乙各胜两局,第五局甲胜”

则 A_1, A_2, A_3 互不相容且 A＝A_1+ A_2+ A_3 ，故甲胜的概率为

$$P_2=P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=0.6^3+C_3^2\times0.6^2\times0.4\times0.6+C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6=0.68256$$

由于 $P_1=0.648<0.68256=P_2$，因此采用五局三胜制对甲更有利.