

模拟试卷(Ⅲ)

一、填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 行与第 2 行交换得矩阵 B , 再把 B 的第 2 行加到第 3 行得矩阵 C , 则满足 $PA=C$ 的可逆矩阵 $P=$ _____.

2. 设 $X(2E - BC^{-1}) = C^{-1}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|X| =$ _____.

3. 设 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, 则该向量组的秩 = _____, 一个极大无关组为 _____.

4. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0. \end{cases} (n \geq 2), a \neq 0$, 当 $a =$

_____ 时, 该方程组的基础解系只含一个解向量.

5. 设 A 是 n 阶奇异方阵, 已知元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11} \neq 0$, 则 $AX=0$ 的通解为_____.

二、计算题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$, 求 X .

2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, t)$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, t-2)$.

(1) t 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $e = (0, 0, 0, 1)$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

(2) t 为何值时, 该向量组线性相关? 并求它的秩和一个极大无关组.

3. 求解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 1. \end{cases}$

4. 设 A 为秩是 3 的 4×5 阶矩阵, $\alpha_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, -2, 3, -2, 0)$ 均为方程组 $AX=0$ 的解向量, 求 $AX=0$ 的解空间的一个标准正交基.

5. 求 R^3 中向量 $\beta_1 = (5, 0, 7)$, $\beta_2 = (-9, -8, -13)$ 在基 $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)$, $\alpha_3 = (3, 1, 2)$ 下的坐标.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的特征值.

7. 用正交变换法将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形, 写出所用的正交变换 $X=QY$ 中的正交矩阵 Q .

三、证明题

1. 设 A, B 均为 3 阶方阵且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 证明 $A - 2E$ 可逆并求其逆.

2. 设非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^5$, α_2 不是 α_1 的倍数, α_3 不是 α_1, α_2 的线性组合.

(1) 问 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性无关?

(2) 证明你的结论.