1.填空题

（1）假如 $A^2=E$，则 A 的特征值只有______。

（2）设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值为________。

（3）已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，则矩阵 $B=2A+E$
（E 为三阶单位阵）的特特征值为_______。

（4）若 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq 0, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值________。

（5）设 A 与单位阵 E 相似，则 A=_______。

（6）若 A 与 $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值-1、2、-2 则 x= _______.

2.选择题

（1）下列方阵可对角化的是（　　）

$(A)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$　　$(B)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$　　$(C)\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　　$(D)\ \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

（2）如果______，则矩阵 A 与 B 相似

(A) $|A|=|B|$，　(B) $r(A)=r(B)$，　(C) $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，

(D) n 阶矩阵 A 与 B 有相同特征值且 n 个特征值各不相同。

（3）若四阶矩阵 A 和 B 相似，A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $|B^{-1}-E|=$（　）

（A）30　　（B）24　　（C）32　　（D）25

（4）n 阶矩阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的（　　）

（A）重分必要条件　　（B）　充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　　（D）既非充分有非必要条件

（5）λ_1,λ_2 都是 n 阶矩阵 A 的特征值，$\lambda_1\neq\lambda_2$，且 η_1 与 η_2 分别是 A 对应于 λ_1 与 λ_2 的特征向量，当______时，$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 也为A的特征向量。

（A） $k_1=0$ 且 $k_2=0$，（B）　$k_1\neq 0$ 且 $k_2\neq 0$　　（C） $k_1\cdot k_2\neq 0$

（D）$k_1\neq 0$ 而 $k_2=0$

3.证明题

(1)若 2 阶方阵满足 $|A|<0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可与对角阵相似。

(2) 若 A 是正定阵，则其伴随阵 A^* 也是正定阵。

4.已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵，$A=E+\alpha\alpha^T$，求一个正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并写出该对角阵 .

5.已知 $A=$ $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 5，求正交阵 T，使得 T^TA^TAT 为对角阵 .

6.设 A 是正交矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 是 A 的特征值，α,β 是相应于特征值，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 的特征向量，问：α 与 β 是否线性相关，为什么？α 与 β 是否正交，为什么？

7.设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，(1) 求逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形

(2) 求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角形。

(3) 求 A^n