《线性代数》模拟试卷 4

一、 填空题（每空 2 分， 共 30 分）：

1． 若 n 阶方阵 A,B 均可逆，$AXB=C$ ，则 $X=$ ________。

2． 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r<n$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 一定有非零解，

且自由未知量的个数为__________。

3． 设 S 是 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间，其中 $R(A)=r$，则 S 的维数为_______。

4． 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由另一向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r$ 线性表示，

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)$ ________ $r(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r)$

5．设 4 阶方阵 A 的秩为 2 ，则其伴随阵 A^* 的秩为________。

6． 设 λ 是方阵 A 的一个特征值，则矩阵 A^3+3A^2+3A 的一个特征值是_______。

7 设 $\alpha=\begin{pmatrix}0\\y\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$，它们单位正交，则 $x=$____ ，$y=$_____ 。

8．已知三维向量空间的两组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是_________。

9 设三阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，$B=A^3-5A^2$，则 $|A|=$______ ，B 的特征值为________，A^* 的特征值为________ ，

A^2+2A+E 的特征值为________ ，$|B|$________， B 能否与对角阵相似________ ？

二．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是 $AX=0$ 的基础解系，β 不是 $AX=0$ 的解，即 $A\beta\neq0$，证明

β，$\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关。

三．计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & & & \\ 1 & a+1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a+1 & a \\ & & & 1 & a+1 \end{vmatrix}$ $(a \neq 1)$

四．当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_1 + (\lambda+1)x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解。

五．已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，E 为 3 阶单位矩阵，$A = E + aa^T$，求一个正交矩阵 P，

使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并写出该对角阵 .

六、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为 n 维非零列向量，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关且 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别正交。

试证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关。

七、求一个正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + +4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

1.　若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____ 。

2． 设 $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，则 $P^{10}AQ^{10}=$

三、

（满分 8 分）

四、 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&7&6\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&-1\end{pmatrix}$，求 X，使得 $\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}C\\O\end{pmatrix}$。

（满分 12 分）

1． 若 $\begin{vmatrix}x&3&1\\y&0&1\\z&2&1\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\\frac{3}{2}&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$ _____ 。

2． 设 $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，则 $P^{10}AQ^{10}=$

三、

（满分 8 分）

四、 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&7&6\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&-1\end{pmatrix}$，求 X，使得 $\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}C\\O\end{pmatrix}$。

（满分 12 分）

五、 在 R^3 中有两组基：

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ 和 } a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

写出 e_1,e_2,e_3 到 a_1,a_2,a_3 的变换公式以及 a_1,a_2,a_3 到 e_1,e_2,e_3 的变换公式。

（满分 8 分）

六、

（满分 14 分）

七、

（满分 16 分）

八、 设 A 为已知的 $m\times n$ 矩阵，集合 $V=\{X\ AX=O, X\text{为}n\text{阶方阵}\}$，

1． 验证 V 对通常矩阵的加法和数乘构成实数域 R 下的线性空间；

2． 当 $A=(0,1)$ 时，求该线性空间的一组基。

（满分 10 分）

九、 证明题（ 本大题共 2 个小题，每小题 6 分， 满分 12 分 ）：

1． 设 a_1,a_2,a_3,a_4 为一向量组，其中 a_1,a_2,a_3 线性相关， a_2,a_3,a_4 线性无关，证明 a_1 能由 a_2,a_3,a_4 线性表示。

2． 若 A 为 n 阶方阵，$A^3=O$ ，证明：$A-E$ 为可逆矩阵。