模拟试卷(Ⅱ)

一、填空题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2,a\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$ 线性相关，则 $a=$______.

2. 设 A 是 3×4 矩阵且 $r(A)=2$，若非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解，则解集合中线性无关的解向量个数=______.

3. 在四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 中，$r(A)=2$，η_1,η_2,η_3 是其 3 个特解，且 $\eta_1+\eta_2=(2,1,1,0)^T$，$\eta_2+\eta_3=(3,1,3,1)^T$，$\eta_3+\eta_1=(2,0,3,1)^T$，则方程组的解为=______.

4. 已知 A 与 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A-E)+r(2E+A)=$______.

二、计算题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$ 且 $AB=A-B$，求 B.

2. 设 $A\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $A^{2004}-2A^2$.

3. 设 $\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\beta=(1,1,b+3,5)$.

(1) 求 a,b 使 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

(2) 求 a,b 使 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 惟一线性表示；

(3) 求 a,b 使 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示但表示式不惟一，并写出表示式.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\4&-3&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，(1)求 A 的特征值与特征向量；(2)判断 A 是否与对角阵相似. 相似时写出相应的对角阵 Λ 及可逆变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$；若不相似，说明理由.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 为 A 的二重特征值，求 x,y 及对角阵 Λ 及可逆变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

三、证明题

1. 设 A 是 n 阶非零方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量，且 $\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$.

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性无关？

(2) 证明你的结论.

2. 设 A 是 n 阶方阵，α 是 n 维列向量，若秩$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=$秩$(A)$，证明线性方程组$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解.