

1. 填空题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{20}AQ^{21}$ _____。

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E) =$ _____。

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____, $[(A^*)^T]^{-1} =$ _____。

(4) 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $|2A^{-1}| =$ _____, $|A^*| =$ _____, $|(A^*)^*| =$ _____, $|(A^*)^{-1}| =$ _____, $|3A^{-1} - 2A^*| =$ _____, $|3A - (A^*)^*| =$ _____。

(5) 已知 $AB - B = A$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____, $\left| \left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} - \frac{2}{5}A^* \right| =$ _____。

2. 选择题

(1) 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足等式 $AB=0$, 则必有 ()

(A). $A=0$ 或 $B=0$, (B). $A+B=0$, (C). $|A|=0$, 或 $|B|=0$, (D). $|A|+|B|=0$

(2) 已知 A, B 均为 n 阶矩阵, 则必有 ()

(A). $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, (B). $(AB)^T = A^T B^T$

(C). $AB=0$ 时, $A=0$, 或 $B=0$

(D). 行列式 $|A+AB|=0$ 的充分必要条件是 $|A|=0$ 或 $|E+B|=0$

(4). 设 A, B 是同阶可逆矩阵, 则 ()

(A). $AB=BA$, (B). 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$

(C) 存在可逆矩阵 C , 使 $C^T AC = B$ (D) 存在可逆矩阵 P, Q ,

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 若存在 3 阶矩阵 $B \neq 0$, 使 $AB=0$, 则 ()

(A). $a = -2$, 且 $|B| = 0$, (B). $a = -2$ 且 $|B| \neq 0$, (C) $a = 1$ 且 $|B| = 0$, (D) $a = 1$ 且 $|B| \neq 0$

3. 判断下列命题正确否？

- (1) 若 A,B 是同阶可逆矩阵, 则 $A+B$ 必可逆。()
(2) 若 A,B 为同阶不可逆矩阵, 则 $A-B$ 必不可逆。()
(3) 若 A,B 为同阶不可逆矩阵, 则 BA 必不可逆。()
(4) 若 $AB=E$, 则 A 必可逆。()

4. 若 A,B 为同阶方阵, A 可逆, B 不可逆, 试判断下列矩阵: $AA^T, AB, A+B, A^2, 4B^2$ 是否可逆？

5. 设 A,B,C 均为可逆方阵, 化简表达式 $((BC^T - E)^T (AB^{-1})^T + [(BA^{-1})^T]^{-1}$

6. 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, E 为单位矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,

求矩阵 B

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A^{2k} (K \in N)$.

8. 若矩阵 A 满足 $A^2 - 3A - 2E = 0$, 证明 A 可逆. 并求 A^{-1} .

9. 设 $A = E - SS^T$, 其中 E 是 n 阶单位阵,

S 是 $n \times 1$ 的矩阵且 $S \neq 0$, 证明

(1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $S^T S = 1$;

(2) 当 $S^T S = 1$ 时, A 是不可逆矩阵。

6. 设 A 为 n 阶方阵, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 且 $r(A)=n-1$, 证明存在常数 k 使 $(A^*)^2 = kA^*$