

1. 填空题

(1) 若齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 只有零解, 则 λ 满足条件_____。

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为三阶零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t =$ _____。

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中

$a_i \neq a_j (i \neq j; j = 1, 2, \cdots, n)$, $A^T X = B$ 的解是_____。

(4) 设 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 有 n 个线性无关的解向量, 则 $A =$ _____。

(5) 设三元方程组有 2 个线性无关的解 ζ_1 和 ζ_2 , 已知 $r(A) = 2$, 则 $AX = b$ 的通解是_____。

2. 选择题

(1) 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 的系数矩阵为 A , 若存在三阶矩阵 $B \neq 0$,

则 ()

2

(2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分条件是

(A) $r(A)=n$ (B) $r(A)<n$ (C) $r(A)=r(\bar{A})$ (D) $r(A)>n$

(3) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 仅有零解的重要条件是

(A) 系数矩阵 A 的行向量线性无关

(B) 系数矩阵 A 的列向量线性无关

(C) 系数矩阵 A 的行向量线性相关

(D) 系数矩阵 A 的列向量线性相关

(4) 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, 则方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} = 0 \end{cases}$$
 _____。

(A) 有唯一解 (B) 无解 (C) 有无穷多解 (D) 仅有零解

(5) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $r(A) = n - 1, \alpha_1, \alpha_2$ 是 $AX = b$ 的两个不同的解向量, 则 $AX = 0$ 的通解为 ()

(A) $k\alpha_1$ (B) $k\alpha_2$ (C) $k(\alpha_1 - \alpha_2)$ (D) $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

3、求下列齐次线性方程组的基础解系

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_6 = 0 \end{cases}$$

4.求下列非齐次线性方程组的通解

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

5. k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有惟一解、无解、有无穷多解? 并在有解的情况下, 求出其全部解。

6.已知下列非齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

(1) 求方程组 (I) 的通解

(2) 当 (II) 中 m, n, t 为何值时, (I) 与 (II) 同解

7.设矩阵 $A_{m \times s}, B_{s \times m}$, 若 $AB = o$, 试证明: $r(A) + r(B) \leq s$