1. Постановка задачи

Задача коммивояжера является одной из самых известных задач комбинаторной оптимизации. Изначально у нас имеется полный взвешенный граф, который является математической моделью для некоторых городов и расстояний между ними, где вершина графа это город, а ребра графа - это путь, пролегающий между городами. Вес ребра это длина пути или же стоимость проезда. Задача: найти путь минимальной стоимости, то есть найти гамильтонов цикл минимального веса. Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, в который каждая вершина графа включена ровно один раз. Данная задача относится к классу NP-трудных задач. По этой причине для этой задачи актуально исследование приближенных алгоритмов с целью получения приемлемого решения за более короткий промежуток времени.
Одним из алгоритмов, находящих некое решение за приемлемое количество операций, $O(n^2)$, где n - количество вершин, является жадный алгоритм с выбором ближайшей вершины. Суть алгоритма заключается в том, что на каждом шаге мы просматриваем все непосещенные вершины в которые можно попасть из текущей вершины, и выбираем ту, расстояние до которой минимально. Оценку времени работы алгоритма получить нетрудно: на каждом шаге мы просматриваем не более n вершин и выбираем одну из них. Всего у нас n вершин, значит будет n шагов. Получаем оценку $O(n^2)$. В общем случае данный алгоритм может работать сколь угодно плохо относительно оптимального решения. На изображении ниже представлен пример на котором жадный алгоритм, запущенный из любой точки будет работать сколь угодно плохо в зависимости от веса ребра. *здесь будет пример плохой работы алгоритма*
Однако, если мы наложим дополнительные условия на веса ребер или сам граф мы можем получить более точный результат. Например, если граф метрический, у нас появляются верхняя и нижняя оценки оптимальности работы жадного алгоритма.

Для маршрута коммивояжера с n вершинами справедлива теорема:

Теорема 1. Веерхняя оценка оптимальности:

$$(\frac{Greedy}{Optimal}) \leqq \frac{1}{2}\lceil \lg n \rceil + \frac{1}{2} \tag{1}$$

Где $Greedy$ - вес пути, найденного жадным алгоритмом, $Optimal$ - вес наиболее оптимального пути.

Доказательство:

Лемма 1: Допустим существует отображение вершины p в число l_p такое, что:
1) $d(p,q) \geq min(l_p, l_q) \;\forall\; p, q$
2) $l_p \leq \frac{1}{2}OPT \;\forall\; p$
Тогда

$$\sum l_p \leq \frac{1}{2}(\lceil lg(n) \rceil + 1)Optimal \tag{2}$$

Доказательство. Допустим Б.О.О., что N такое, что $i]1 <= i <= n$ и $l_i \geq l_j$ если $i \leq j$ Докажем, что

$$Optimal \geqq \sum_{i=k+1}^{min(2k,n)} \mathrm{l}_i \tag{3}$$

для любого k такого что $l \leq k$ $\leq$n Пусть H полный подграф, определенный на множестве узлов

$$\{i|1 \leq i \leq min(2k, n)\} \tag{4}$$

Пусть T - это маршрут коммивояжера в H, который посещает вершины H в том же порядке, что и эти узлы посещаются при оптимальном обходе исходного графа. Обозначим длину маршрута T как LENGTH. По неравенству треугольника каждое ребро (b, c) графа T должно иметь длину меньше или равную длине пути от b до c, вычисленного в оптимальном пути коммивояжера. Так как ребра T суммируются в LENGTH, а сумма ребер оптимального пути равна OPTIMAL мы заключаем что

$$Optimal \geqq LENGTH \tag{5}$$

По условию 1) Леммы для каждого (i, j) в пути T $d(i, j) >= min(\mathrm{l}_i, \mathrm{l}_j)$. Следовательно,

$$LENGTH \geqq \sum_{(i,j)\in T} min(\mathrm{l}_i, \mathrm{l}_j) = \sum_{i\in H} \alpha_i \mathrm{l}_i \tag{6}$$

где a_i - количество ребер (i, j) в T, для которых $i > j$ (и, следовательно, $l_i = min(l_i, l_j)$). Мы хотим получить нижнюю оценку правой части 6. Заметьте, что каждое a_i не превосходит 2 (потому что i это конечная точка только двух ребер в маршруте T) и что сумма a_i равна количеству ребер в T. Поскольку k составляет не менее половины количества ребер в T, мы заведомо получим нижнюю оценку правой части 6, если мы предположим, что k наибольших l_i имеют $a_i = 0$, а остальные $min(2k, n) - k$ из l_i имеют $a_i = 2$. По предположению, k наибольших $\{l_i|1 \leq i \leq k\}$, поэтому оценка нижней границы:

$$\sum_{i\in H} a_i l_i \geq 2 \sum_{i=k+1}^{min(2k,n)} l_i \tag{7}$$

Таким образом мы доказали неравенство 3

Теперь просуммируем неравенства 3 для всех k равных степени двойки меньшей n, то есть:

$$\sum_{j=0}^{[lg(n)]-1} OPT \geq \sum_{j=0}^{[lg(n)]-1} 2 * \sum_{i=2^j+1}^{min(2^{j+1},n)} l_i \tag{8}$$

Это можно упростить до

$$\lceil lg(n)\rceil OPT \geq 2 * \sum_{i=2}^{n} l_i \tag{9}$$

По условию 2) Леммы

$$OPT \geq 2 * l_1 \tag{10}$$

Два данных неравенства доказывают лемму

Доказательство Теоремы 1. Для каждой вершины p положим, что l_p это длина ребра, выходящего из p и идущего в вершину, которая выбирается жадным алгоритмом. Мы хотим показать, что l_p удовлетворяет условиям Леммы 1. Если вершина p была выбрана жадным алгоритмом до вершины q, тогда вершина q была кандидатом на ближайшую невыбранную вершину для вершины p. Это значит, что ребро (p, q) не короче чем выбранное ребро, то есть

$$d(p, q) \geq l_p \tag{11}$$

И наоборот, если вершина q была выбрана до p, тогда

$$d(p, q) \geq l_q \tag{12}$$

Так как одна из вершин была выбрана раньше другой, одно из двух последних неравенств должно выполняться, вследствие чего условие 1) Леммы 1 выполняется. Для доказательства условия 2) достаточно доказать, что для любого ребра (p, q)

$$d(p, q) \leq \frac{1}{2} OPT \tag{13}$$

Мы можем рассмотреть оптимальный маршрут как объединение двух частей маршрута, каждый из которых это путь между p и q. Из неравенства треугольника получаем, что длина любого пути между p и q не может быть меньше, чем $d(p, q)$, что доказывает неравенство выше. Так как l_p это длины всех пар, составляющих маршрут T

$$\sum l_p = GREEDY \tag{14}$$

Данное равенство вместе с Леммой 1 доказывают неравенство из Теоремы 1.

Теорема 2. Верхняя оценка оптимальности:

$$(\frac{Greedy}{Optimal}) > \frac{1}{3}\lg(n+1) + \frac{4}{9} \tag{15}$$

Доказательство: Для каждого $i \geq 1$ построим неполный взвешенный граф F с тремя особыми вершинами: левая вершина, центральная вершина и правая вершина. Эти графы строятся рекурсивно как показано на рис.1 (TODO нарисовать и вставить) где левая вершина располагается слева, правая - справа и центральная посередине. Каждый граф F имеет путь P, соединяющий левую вершину и центральную, в который входят все вершины графа. Путь P также строится рекурсивно как на рис.1.

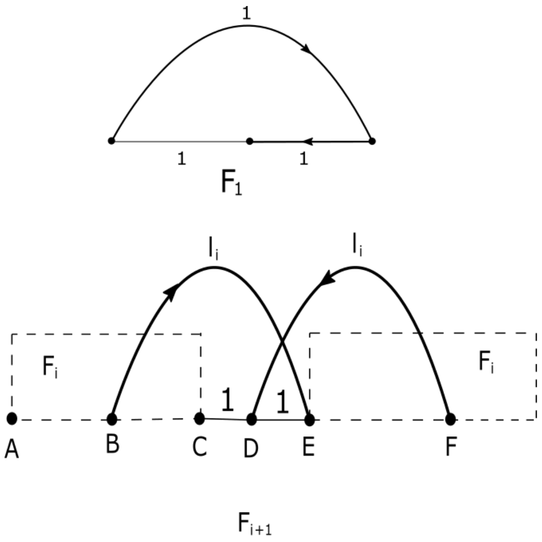

Рис. 1

Граф F_1 состоит из трех вершин, между каждыми двумя из которых проведено ребро веса 1. Путь P состоит из двух ребер: между левой и правой вершиной, между правой и центральной вершиной. Для построения графа F_{i+1} возьмем две копии графа F, назовем одну копию левой, а другую правой. Добавим дополнительную вершину которая впоследствии станет центральной для F_{i+1}. На рис.1 эта вершина обозначена D. Она соединяется с правой вершиной левой копии (вершина C) и левой вершиной правой копии (вершина E) ребрами длины 1. Дополнительная вершина D также соединяется с центральной вершиной правой копии (вершина F) ребром веса l_i, который будет определен ниже. Наконец, центральная вершина левой копии (вершина B) соединяется с левой вершиной правой копии (вершина E) ребром веса l_i. Левая вершина F_{i+1} определяется как левая вершина левой копии (вершина A), правая вершина F_{i+1} определяется как правая вершина правой копии (вершина G). Путь P_{i+1} состоит из двух копий пути P_i и ребер (B,E), (F,D) длины l_i. Длина l_i данных ребер определяется по формуле

$$l_i = \frac{1}{6}(4 * 2^i - (-1)^i + 3) \tag{16}$$

Пусть L_i - длина пути P_i. Для длины L_i есть рекуррентное соотношение:

$$L_{i+1} = 2 * L_i + 2 * l_i \tag{17}$$

Так как P_{i+1} состоит из двух копий P_i и двух ребер веса l_i При условии что $L_1 = 2$, решение данного уравнения:

$$L_i = \frac{1}{9}(6i * 2^i + 8 * 2^i + (-1)^i - 9) \tag{18}$$

Для каждого F мы определяем граф G_i, который получается из F путем соединения левой вершины и правой вершины графа ребром веса 1 и соединением центральной вершины с левой вершиной ребром веса $l_i - 1$. Левая вершина графа F считается начальной вершиной графа G_i. На рисунке изображен граф

G_4 Определим $\bar{G}_i$ как полный граф на вершинах G_i. Длина ребер в данном графе будет равна длине наименьшего пути в G_i между двумя вершинами, которые соединяет ребро. Таким образом $\bar{G}_i$ будет удовлетворять неравенству треугольника.

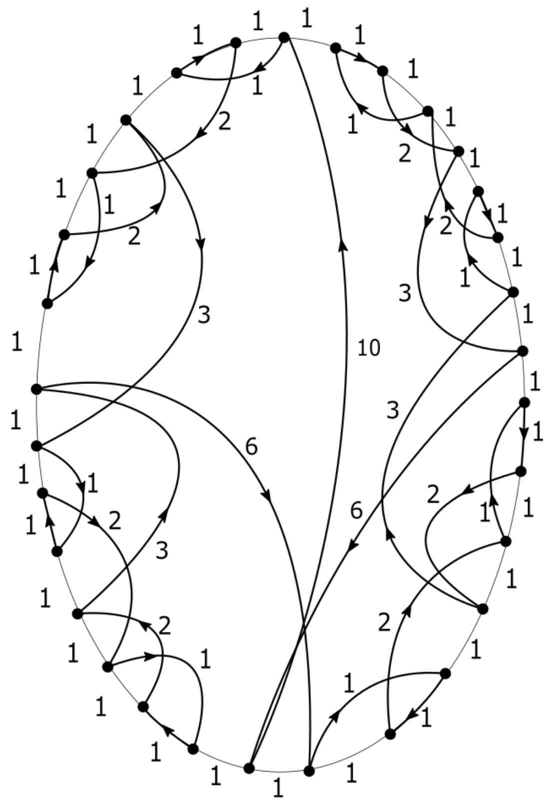

Рис. 2

Граф $\bar{G}_i$ имеет два важных свойства:
1) Ребра графа G_i имеют в графе $\bar{G}_i$ такие же длины как и в G_i
2) Если жадный алгоритм начинает свою работу с начальной вершины графа G_i то при подходящем выборе меджу несколькими возможными путями в алгоритме метод может найти путь P_i, который будет следовать за ребром длины $l_i - 1$, проведенным из центральной вершины (последняя в пути P_i) в начальную вершину.

Мы вернемся к доказательству этих свойств после завершения доказательства основной теоремы. Каждый граф $\bar{G}_i$ имеет оптимальный маршрут, состоящий из ребер единичного веса, с, соответственно весом пути равным n, где n - это количество вершин $(2^{i+1} - 1)$. Данный путь начинается в начальной вершине и далее посещаются все вершины слева направо, после чего происходит возврат в начальную вершину. Примером, удовлетворяющим теореме является граф $\bar{G}_{m-1}$ Соотношение для него:

$$\frac{GREEDY}{OPTIMAL} = (L_i + l_i - 1)/n, \ i = lg(n+1) - 1 \tag{19}$$

Данное соотношение больше чем соотношение в теореме. Остается доказать свойства 1) и 2). Рассмотрим рис.1 TODO нумерация Покажем что для каждого F_{i+1}

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{EF} = \overline{FG} = l_i - 1 \tag{20}$$

$$\overline{AC} = \overline{EG} = l_{i+1} - 2 \tag{21}$$

$$\overline{BE} = \overline{DF} = l_i \tag{22}$$

$$\overline{AD} = \overline{DG} = l_{i+1} - 1 \tag{23}$$

$$\overline{AG} = l_{i+2} - 2 \tag{24}$$

Запись $\overline{XY}$ означает длину кратчайшего пути между X и Y в графе F_{i+1}. Данные равенства тривиально доказываются для i=1. Далее будем вести доказательство по индукции. Предположим что равенства верны для $i \leq I - 1$, например для F_I На рис.3a изображены связанные вершины графа F_{I+1} до объединения двух копий F_I в F_{I+1}. Веса ребер графа равны кратчайшему пути между ними в F_I. Эти веса определены в предположении индукции. Например, ребро (A,B) на рис.3a соединяет левую и центральную вершины F_I и, как следует из 23, длина кратчайшего пути между этими вершинами равна $l_i - 1$. На рис.3б TODO мы можем увидеть фигуры с рис.3a TODO с ребрами, которые были добавлены при построении F_{I+1}. Так как каждый вес ребра между двумя вершинами на рис.3a равен кратчайшему пути между этими вершинами, то применяя формулу 16 для l_I ко всем возможным путям в F_{i+1} мы можем найти, что вес каждого ребра на рис.3б действительно является длиной кратчайшего пути между двумя вершинами, которые соединяет ребро. Это доказывает равенства 20-22 для F_{I+1}. Равенства 23, 24 доказываются аналогичными рассуждениями для всех путей на TODO рис.3б. Путем длины $l_{i+1} - 2$ из A в G является путь ABEG.

Объектом исследований данной работы являются оценки оптимальности решения задачи, найденного жадным алгоритмом при случае когда веса ребер являются случайными величинами и распределены по некоторому закону распределения.

2. Некоторые определения и вспомогательные теоремы

2.1 Определения

Алгоритм $\mathcal{A}$ будем называть ассимптотически оптимальным если существуют такие $\epsilon_n \to 0, \delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ что применение алгоритма $\mathcal{A}$ дает значение $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$, удовлетворяющее неравенству

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \leq (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\} \geq 1 - \delta_n \tag{25}$$

где $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ - решение, найденное алгоритмом, $\mathcal{Z}$ - минмальное решение. Это определение при $\epsilon_n \equiv 0$ совпадает с понятием алгоритма, который почти всегда приводит к точному решению.

2.2 Неравенство Чебышева

Пусть случайная величина X: $\Omega \to \mathbb{R}$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а её математическое ожидание μ и дисперсия σ^2 конечны. Тогда

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} \tag{26}$$

, где a>0.

2.3 Теорема Петрова

Пусть X1,...,Xn — независимые случайные величины и существуют положительные постоянные g1,...,gn и T такие, что для всех 0 ≤ t ≤ T

$$\mathbb{E}e^{tX_k} \leq e^{\frac{1}{2}g_k t^2} \tag{27}$$

Положим $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ и $G = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Тогда

$$P\{S > x\} \leq \begin{cases} exp(-\frac{x^2}{2G}),\ 0 \leq x \leq GT \\ exp(-\frac{Tx}{2}),\ x \geq GT \end{cases} \tag{28}$$

3. Условия асимптотической оптимальности жадного алгоритма

Найдем условия, при выполнении которых жадынй алгоритм является асимптотически оптимальным, то есть

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq \delta_n \tag{29}$$

где $\epsilon_n \to 0, \delta_n \to 0\ n \to \infty$

Оценим сверху левую часть данного неравенства. Так как a>0, то $\mathcal{Z} \geq na$ и

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)na\} \tag{30}$$

Обозначим через$\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}$и $\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}$верхние оценки соответственно математического ожидания $\mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$и дисперсии $\mathrm{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$случайной величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$. Обозначим $\Delta_n = (1+\epsilon_n)na - \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}$. Получаем:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)na\} = P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} + [(1+\epsilon_n)na - \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}]\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})) + \Delta_n\} \tag{31}$$

Пусть $\epsilon_n = k(\frac{\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}}{na} - 1), k > 1$. Тогда $\Delta_n = (k-1)(\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} - na) \geq 0$. Продолжим неравенство 31 применив неравенство Чебышева.

$$\begin{gathered} P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) + \Delta_n\} \leq P\{|\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}))| \geq \Delta_n\} \leq \\ \frac{\mathrm{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})}{\Delta_n^2} \leq \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{\Delta_n^2} = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(k-1)^2(\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} - na)^2} \end{gathered} \tag{32}$$

Так как k - константа, k>1, то из данной цепочки неравенств следует, что условие ассимптотической оптимальности жадного алгоритма будет выполнено если мы покажем, что $\epsilon_n = k(\frac{\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}}{na} - 1) \to 0$ и $\delta_n = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(k-1)^2(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - na)^2} \to 0$ при

$n \to \infty$

Вычисление верхних оценок $\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}$и $\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}$

Математическое ожидание $\mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$равно сумме матожиданий величин $a_{i_k i_{k+1}}$ минимальных элементов матрицы, выбираемых на k-м шаге алгоритма $\mathcal{A}'$. В целях удобства дальнейших вычислений пронормируем случайную величину ξ значений элементов a_{ij} матрицы A, положив $\xi' = \frac{\xi - a}{b - a}$. Обозначим через l_kзначение матожидания нормированной случайной величины $l_k = a'_{i_k i_{k+1}}$. На k-ом шаге алгоритма выбирается минимум из n-k элементов. В силу независимости этих элементов вероятность $\Phi_k(x)$того, что величина l_kминимального из этих элементов не превышает величины x равна

$$\Phi_k(x) = P\{l_k \le x\} = 1 - (1 - F(x))^{n-k} \tag{33}$$

, где

$$F_k(x) = P\{\xi' \le x\}, 0 \le x \le 1 \tag{34}$$

Тогда величина $E(l_k)$ равна

$$E(l_k) = \begin{cases} \int_0^1 x d\Phi_k(x), k = 1, 2, ...n-1 \\ E(l_{n-1}), k = n \end{cases} \tag{35}$$

откуда получим

$$\begin{gathered} E(l_k) = x\Phi_k(x)|_0^1 - \int_0^1 \Phi_k(x)dx = \\ = 1 - \int_0^1 [1 - (1 - F(x))^{n-k}]dx = \int_0^1 (1 - F(x))^{n-k}]dx \\ k = \overline{1, n-1} \end{gathered} \tag{36}$$

В силу нормировки минимальный элемент $a_{i_{k-1} i_k}$ связан с величиной l_kсоотношением $a_{i_k i_{k+1}} = a + (b - a)l_k$. Поэтому

$$\mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^{n} [a + (b - a)E(l_k)] \tag{37}$$

. Откуда с учетом 36 имеем:

$$\begin{gathered} \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = na + (b - a)[\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (1 - F(x))^{n-k} dx + \int_0^1 (1 - F(x))dx] = \\ = na + (b - a) \int_0^1 \frac{[1 - F(x)][1 - (1 - F(x))^{n-1} + F(x)]}{F(x)} dx \le \\ \le na + (b - a) \int_0^1 \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx = \\ = na + (b - a)[\int_0^{\gamma_n} \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx + \int_{\gamma_n}^1 \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx] \end{gathered} \tag{38}$$

где γ_n - корень уравнения $F(\gamma)=\frac{1}{n}$, то есть $\gamma_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$. Учитывая что при $0 \le Z \le 1$ справедливо неравенство $\frac{1-(1-Z)^n}{Z} \le n$, оценку $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ можем продолжить следующим образом

$$\mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) \le \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} = na + (b-a)[\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}] \tag{39}$$

Перейдем к вычислению верхней оценки $\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}}$. Дисперсия d_k случайной нормированной величины l_k на k-ом шаге равна

$$d_k = \int_0^1 (x - E(l_k))^2 d\Phi_k(x) = \int_0^1 x^2 d\Phi_k(x) - (E(l_k))^2 < \int_0^1 x d\Phi_k(x) = E(l_k) \tag{40}$$

Тогда с учетом того, что дисперсия минимального элемента $a_{i_k i_{k+1}}$ равна $(b-a)^2 d_k$, дисперсия случайной величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$ с учетом 37 оценивается следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^{n} (b-a)^2 d_k < (b-a)^2 \sum_{k=1}^{n} E(l_k) = (b-a)^2 * \frac{E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) - na}{(b-a)} \le (b-a)(\mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} - n \tag{41}$$

Окончательно с учетом 39 получаем верхнюю оценку для $\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) < \mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'} = (b-a)^2[\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}] \tag{42}$$

Вернемся к неравенству 32. Имея в виду получение оценки 39 и 42, выражения для ϵ_n и δ_n можно записать в следующем виде:

$$\epsilon_n = K(\frac{b}{a} - 1)[\gamma_n + \frac{1}{n} \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}] \tag{43}$$

$$\delta_n = \frac{1}{(K-1)^2[\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}]} \tag{44}$$

Обозначим $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}$, TODO (большая K, а мальенкая в mathcal не отрисовывается) $\Psi(n)$ - произвольная растущая от n функция, $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi(n) = \infty$

Теорема 1

Алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным при выполнении условий $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = \infty$ и

$$\frac{b}{a} \le \frac{1}{\Psi(n)} min\{\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{\mathcal{I}_n}\} \tag{45}$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы $\epsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ с ростом n. Действительно, при K>1 имеем:

$$\begin{aligned} \delta_n = \frac{1}{(\gamma_n n + \mathcal{I}_n)(K-1)^2} \leq \frac{1}{\mathcal{I}_n * (K-1)^2} \rightarrow 0 \\ \epsilon_n = K(\frac{b}{a} - 1)(\gamma_n + \frac{1}{n}\mathcal{I}_n) \leq K * \frac{b}{a}(\gamma_n + \frac{1}{n}\mathcal{I}_n) \leq \\ \leq \frac{K}{\Psi(n)} min(\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{\mathcal{I}_n}) = \\ = \frac{K}{\Psi(n)} min(1 + \frac{\mathcal{I}_n}{n\gamma_n}, 1 + \frac{n\gamma_n}{\mathcal{I}_n}) \leq \frac{2K}{\Psi(n)} \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{46}$$

при $n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Как было показано выше, для своей работы алгоритм $\mathcal{A}'$ требует $O(n^2)$ операций, что сравнимо с трудоемкостью записи исходной информации о задаче коммивояжера. Отсюда получаем, что при выполнении условий теоремы 1 алгоритм $\mathcal{A}'$ является статистически эффективным.

Равномерное распределение.

Определены условия асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ для случая, когда элементы a_{ij} матрицы A могут быть выбраны равновероятно из отрезка [a,b], a>0. В этом случае нормированная интегральная функция распределения имеет вид $F(x) = x, 0 \leq x \leq 1, \gamma_n = F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ и

$$\mathcal{I}_n = \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{x} = ln(n) \tag{47}$$

Тогда из теоремы 1 непосредственно получаем результат, который может быть сформулирован как:

Теорема 2

Если элементы aij матрицы A принимают значения равновероятно из отрезка [a,b], то алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным при выполнении следующего условия:

$$\frac{b}{a} \leq \frac{n}{ln(n)} \frac{1}{\Psi(n)} \tag{48}$$

Представляет интерес оценить величины ϵ_n и δ_n, фигурирующие в соотношении 25.

Учитывая специфику равномерного распределения можно получить более точные оценки для этих величин по сравнению с общим случаем. Выведем условия асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ в случае равномерного распределения, проведя в сокращенном виде вычисления оценок для $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ и $P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\}$. Согласно 36 нумерация

$$E(l_k) = \int_0^1 (1-x)^{n-k} dx = \int_0^1 x^{n-k} dx = \frac{1}{n-k+1} \tag{49}$$

$k = 1, 2, ...n - k$; $E(l_n) = E(l_n - 1) = \frac{1}{2}$

С учетом 37

$$E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^{n}[a + (b-a)E(l_k)] = na + (b-a)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k+1}) \leq$$
$$\leq na + (b-a)(\frac{1}{2} + ln(n)) = \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} \tag{50}$$

Оценим дисперсию $d_k = \int_0^1 (x - E(l_k))^2 d\Phi_k(x)$ случайной величины l_k с учетом того, что для равномерного распределения $\Phi_k(x) = 1 - (1-x)^{n-k}$

Используя 49, имеем

$$d_k = \int_0^1 x^2 d\Phi_k(x) - E(l_k^2) = x^2\Phi_k(x)|_0^1 - 2\int_0^1 x\Phi_k(x)dx - E(l_k^2) =$$
$$= 1 - 2\int_0^1 x[1-(1-x)^{n-k}]dx - E(l_k^2) =$$
$$= \frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n-k+2} - \frac{1}{(n-k+1)^2},$$
$$k = 1, 2, ..., n-1;\; d_n = d_{n-1} = \frac{1}{12} \tag{51}$$

Отсюда с учетом определения дисперсии величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$, получим

$$\frac{1}{(b-a)^2}\mathrm{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n-k+2} - \frac{1}{(n-k+1)^2}) =$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{2}{n+1} + 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-k+1)^2} \leq \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} - \int_3^{n+1}\frac{dx}{x^2} =$$
$$= \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3} < 0.417 = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(b-a)^2} \tag{52}$$

Приведем оценку вероятности невыполнения соотношения 25 для случая равномерного распределения:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1+\epsilon_n)na\} \leq$$
$$\leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} + \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'} - \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) > (1+\epsilon_n)na\} =$$
$$= P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) > (1+\epsilon_n)na - \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}\} \leq$$
$$\leq P\{|\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - \mathrm{E}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})| > (1+\epsilon_n)na - \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}\} \leq$$
$$\leq \frac{\mathrm{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})}{[1+\epsilon_n)na + \mathcal{Z}^*_{\mathcal{A}'}]^2} \leq$$
$$\leq \frac{0.417(b-a)^2}{[1+\epsilon_n)na - (nu + (b-a)(\frac{1}{2} + lnn))]^2} =$$
$$= \frac{0.417}{[\frac{n\epsilon_n}{\frac{b}{a}-1} - lnn - \frac{1}{2}]^2} \tag{53}$$

Положим $\epsilon_n = \frac{c}{\Psi(n)}$, константа c>1, и пусть $\frac{a}{b} \leq \frac{n}{lnn}\frac{1}{\Psi(n)}$. Тогда 53 может быть продолжено следующим образом:

$$\frac{0.417}{[\frac{n\frac{c}{\Psi(n)}}{(\frac{b}{a}-1)} - \frac{1}{2} - lnn]} \leq \frac{0.417}{[\frac{c\frac{b}{a}lnn}{(\frac{b}{a}-1)} - \frac{1}{2} - lnn]^2} = \frac{0.417}{[(c-1)lnn - \frac{1}{2}]^2} = \delta_n \tag{54}$$

Таким образом, окончательная оценка для вероятности выполнения соотношения 25 примет вид:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\} \geq 1 - \frac{0.417}{[(c-1)lnn - \frac{1}{2}]^2} \tag{55}$$

Нетрудно заметить, что эта величина, характеризующая точность получаемого решения, улучшается с ростом $\Psi(n)$, но при этом ухудшается оценка для величины $\frac{b}{a}$. Выберем функцию $\Psi(n)$ таким образом, чтобы произведение верхних оценок для ϵ_n и $\frac{b}{a}$ стремилось к 25 с ростом n. Такому условию отвечает функция $\Psi(n) = \sqrt{\frac{cn}{lnn}}$. При этом оценки для ϵ_n и $\frac{b}{a}$ принимают вид:

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{\frac{n}{clnn}} \tag{56}$$

$$\epsilon_n \leq \sqrt{\frac{clnn}{n}} \tag{57}$$

Анализ соотношений 55-57, полученных для равномерного распределения показывает, что уменьшение константы с "улучшает"оценки для $\frac{b}{a}$ и ϵ_n и "ухудшает"оценку вероятности $P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1+\epsilon_n)\mathcal{Z}\}$

β **- распределение**. Очень часто в опытно-конструкторских разработках в промышленности и научно-исследовательских проектах длительности a_{ij} отдельных операций предполагается распределенными по следующему закону / β - распределение /:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi-a)^{\alpha} * (b-\xi)^{\gamma}}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1}\beta(\alpha+1,\gamma+1)} \; \xi \in [a,b] \\ 0 \; \xi \notin [a,b] \end{cases} \tag{58}$$

где

$$\beta(\alpha,\gamma) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{F(\alpha+\gamma)} \tag{59}$$

где α и γ - параметры распределения. В нормированном виде функция плотности $f(\xi)$ запишется следующим образом:

$$f(\xi') = \begin{cases} \frac{(\xi)^{\alpha}(1-\xi)^{\gamma}}{\beta(\alpha+1,\gamma+1)} \; \xi' \in [0,1] \\ 0 \; \xi' \notin [0,1] \end{cases} \tag{60}$$

Рассмотрим частный случай β - распределения, когда $\gamma = 0$, $\alpha > 0$. В этом случае интегральная функция распределения равна

$$F(x) = \int_0^x f(\xi')d\xi' = \int_0^x \frac{x}{\beta(\alpha+1,1)} = x^{\alpha+1} \tag{61}$$

Вычислим величину γ_n, фигурирующую в условиях теоремы 1:

$$\gamma_n = F^{-1}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt[\alpha+1]{n}} \tag{62}$$

Тогда первое из условий теоремы 1 выполняется в силу $\alpha > 0$

$$\mathcal{I}_n = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)} = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}(n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1) \to \infty, \quad n \to \infty \tag{63}$$

Второе условие принимает вид:

TODO здесь могут быть неточности (они есть)

$$\frac{b}{a} \leq \frac{1}{\Psi(n)} min(\sqrt[\alpha+1]{n}, \frac{\alpha n}{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) \tag{64}$$

Учитывая, что

$$min(1, \frac{\alpha}{1 - n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \geq min(1,\alpha) \tag{65}$$

Получаем следующее условие асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ для β - распределения в частном случае $\gamma = 0$, $\alpha > 0$:

$$\frac{b}{a} \leq \frac{\sqrt[\alpha+1]{n}}{\Psi(n)} min(1,\alpha) \tag{66}$$

4. Оптимальность жадного алгоритма для графов с случайным распределением весов ребер.

4.1. Граф с равномерным распределением весов ребер на промежутке. Оценка оптимальности жадного алгоритма.

Список использованных источников и литературы.

Статьи из журнала:

1. Э. Х. Гимади, А. Ле Галлу, А. В. Шахшнейдер, “Вероятностный анализ одного алгоритма приближённого решения задачи коммивояжёра на неограниченных сверху входных данных”, Дискретн. анализ и исслед. опер., 15:1 (2008), 23–43; J. Appl. Industr. Math., 3:2 (2009), 207–221

2. Rosenkrantz, Daniel J.; Stearns, Richard E.; Lewis, II, Philip M – An Analysis of Several Heuristics for the Traveling Salesman Problem. September 1977 SIAM Journal on Computing 6(3):563-581

3. Э. Х. Гимади, В. А. Перепелица, “Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера”, Управляемые системы, 1974, № 12, 35–45