

1. Постановка задачи

Задача коммивояжера является одной из самых известных задач комбинаторной оптимизации. Изначально у нас имеется полный взвешенный граф, который является математической моделью для некоторых городов и расстояний между ними, где вершина графа это город, а ребра графа - это путь, пролегающий между городами. Вес ребра это длина пути или же стоимость проезда. Задача: найти путь минимальной стоимости, то есть найти гамильтонов цикл минимального веса. Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, в который каждая вершина графа включена ровно один раз. Данная задача относится к классу NP-трудных задач. По этой причине для этой задачи актуально исследование приближенных алгоритмов с целью получения приемлемого решения за более короткий промежуток времени.

Одним из алгоритмов, находящих некое решение за приемлемое количество операций, $O(n^2)$, где n - количество вершин, является жадный алгоритм с выбором ближайшей вершины. Суть алгоритма заключается в том, что на каждом шаге мы просматриваем все непосещенные вершины в которые можно попасть из текущей вершины, и выбираем ту, расстояние до которой минимально. Оценку времени работы алгоритма получить нетрудно: на каждом шаге мы просматриваем не более n вершин и выбираем одну из них. Всего у нас n вершин, значит будет n шагов. Получаем оценку $O(n^2)$. В общем случае данный алгоритм может работать сколь угодно плохо относительно оптимального решения. На изображении ниже представлен пример на котором жадный алгоритм, запущенный из любой точки будет работать сколь угодно плохо в зависимости от веса ребра. *здесь будет пример плохой работы алгоритма* Однако, если мы наложим дополнительные условия на веса ребер или сам граф мы можем получить более точный результат. Например, если граф метрический, у нас появляются верхняя и нижняя оценки оптимальности работы жадного алгоритма.

Для маршрута коммивояжера с n вершинами справедлива теорема:

Теорема 1. Верхняя оценка оптимальности:

$$\left(\frac{Greedy}{Optimal}\right) \leq \frac{1}{2}[\lg n] + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Где *Greedy* - вес пути, найденного жадным алгоритмом, *Optimal* - вес наиболее оптимального пути.

Доказательство:

Лемма 1: Допустим существует отображение вершины p в число l_p такое, что:

1) $d(p, q) \geq \min(l_p, l_q) \forall p, q$

2) $l_p \leq \frac{1}{2}OPT \forall p$

Тогда

$$\sum l_p \leq \frac{1}{2}([\lg(n)] + 1)Optimal \quad (2)$$

Доказательство. Допустим Б.О.О., что N такое, что $i]1 \leq i \leq n$ и $l_i \geq l_j$ если $i \leq j$. Докажем, что

$$Optimal \geq 2 \sum_{i=k+1}^{\min(2k,n)} l_i \quad (3)$$

для любого k такого что $l \leq k \leq n$. Пусть H полный подграф, определенный на множестве узлов

$$\{i | 1 \leq i \leq \min(2k, n)\} \quad (4)$$

Пусть T - это маршрут коммивояжера в H , который посещает вершины H в том же порядке, что и эти узлы посещаются при оптимальном обходе исходного графа. Обозначим длину маршрута T как $LENGTH$. По неравенству треугольника каждое ребро (b, c) графа T должно иметь длину меньше или равную длине пути от b до c , вычисленного в оптимальном пути коммивояжера. Так как ребра T суммируются в $LENGTH$, а сумма ребер оптимального пути равна $OPTIMAL$ мы заключаем что

$$Optimal \geq LENGTH \quad (5)$$

По условию 1) Леммы для каждого (i, j) в пути T $d(i, j) \geq \min(l_i, l_j)$. Следовательно,

$$LENGTH \geq \sum_{(i,j) \in T} \min(l_i, l_j) = \sum_{i \in H} a_i l_i \quad (6)$$

где a_i - количество ребер (i, j) в T , для которых $i > j$ (и, следовательно, $l_i = \min(l_i, l_j)$). Мы хотим получить нижнюю оценку правой части 6. Заметьте, что каждое a_i не превосходит 2 (потому что i это конечная точка только двух ребер в маршруте T) и что сумма a_i равна количеству ребер в T . Поскольку k составляет не менее половины количества ребер в T , мы заведомо получим нижнюю оценку правой части 6, если мы предположим, что k наибольших l_i имеют $a_i = 0$, а остальные $\min(2k, n) - k$ из l_i имеют $a_i = 2$. По предположению, k наибольших $\{l_i | 1 \leq i \leq k\}$, поэтому оценка нижней границы:

$$\sum_{i \in H} a_i l_i \geq 2 \sum_{i=k+1}^{\min(2k,n)} l_i \quad (7)$$

Таким образом мы доказали неравенство 3

Теперь просуммируем неравенства 3 для всех k равных степени двойки меньшей n , то есть:

$$\sum_{j=0}^{\lceil \lg(n) \rceil - 1} OPT \geq \sum_{j=0}^{\lceil \lg(n) \rceil - 1} 2 * \sum_{i=2^j+1}^{\min(2^{j+1}, n)} l_i \quad (8)$$

Это можно упростить до

$$\lceil \lg(n) \rceil OPT \geq 2 * \sum_{i=2}^n l_i \quad (9)$$

По условию 2) Леммы

$$OPT \geq 2 * l_1 \quad (10)$$

Два данных неравенства доказывают лемму

Доказательство Теоремы 1. Для каждой вершины p положим, что l_p это длина ребра, выходящего из p и идущего в вершину, которая выбирается жадным алгоритмом. Мы хотим показать, что l_p удовлетворяет условиям Леммы 1. Если вершина p была выбрана жадным алгоритмом до вершины q , тогда вершина q была кандидатом на ближайшую невыбранную вершину для вершины p . Это значит, что ребро (p, q) не короче чем выбранное ребро, то есть

$$d(p, q) \geq l_p \quad (11)$$

И наоборот, если вершина q была выбрана до p , тогда

$$d(p, q) \geq l_q \quad (12)$$

Так как одна из вершин была выбрана раньше другой, одно из двух последних неравенств должно выполняться, вследствие чего условие 1) Леммы 1 выполняется. Для доказательства условия 2) достаточно доказать, что для любого ребра (p, q)

$$d(p, q) \leq \frac{1}{2} OPT \quad (13)$$

Мы можем рассмотреть оптимальный маршрут как объединение двух частей маршрута, каждый из которых это путь между p и q . Из неравенства треугольника получаем, что длина любого пути между p и q не может быть меньше, чем $d(p, q)$, что доказывает неравенство выше. Так как l_p это длины всех пар, составляющих маршрут T

$$\sum l_p = GREEDY \quad (14)$$

Данное равенство вместе с Леммой 1 доказывают неравенство из Теоремы 1.

Теорема 2. Верхняя оценка оптимальности:

$$\left(\frac{Greedy}{Optimal} \right) > \frac{1}{3} \lg(n+1) + \frac{4}{9} \quad (15)$$

Доказательство: Для каждого $i \geq 1$ построим неполный взвешенный граф F с тремя особыми вершинами: левая вершина, центральная вершина и правая вершина. Эти графы строятся рекурсивно как показано на рис.1 (TODO нарисовать и вставить) где левая вершина располагается слева, правая - справа и центральная посередине. Каждый граф F имеет путь P , соединяющий левую вершину и центральную, в который входят все вершины графа. Путь P также строится рекурсивно как на рис.1.

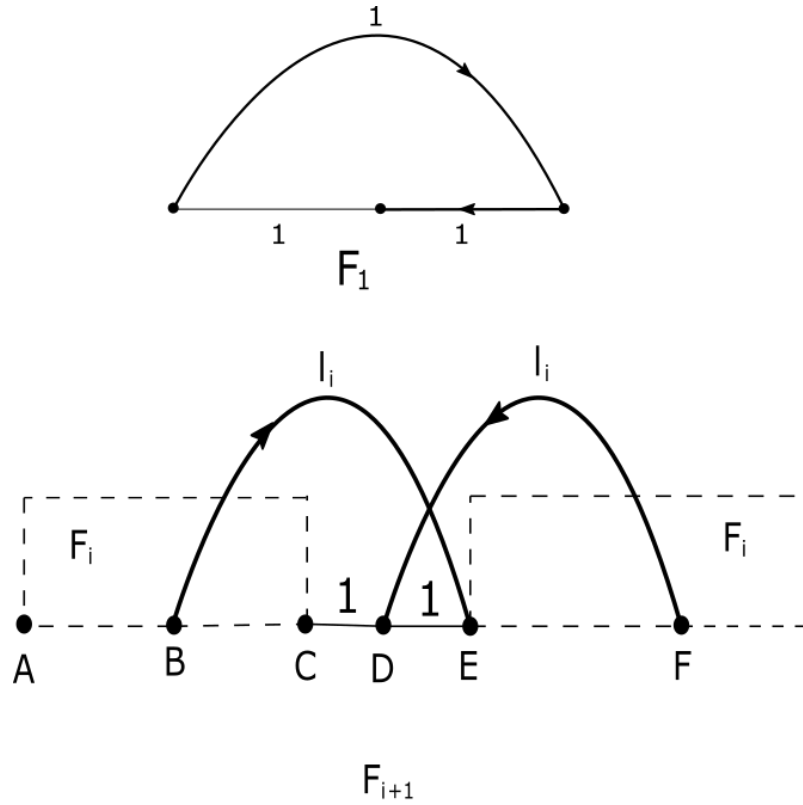


Рис. 1

Граф F_1 состоит из трех вершин, между каждым двумя из которых проведено ребро веса 1. Путь P состоит из двух ребер: между левой и правой вершиной, между правой и центральной вершиной. Для построения графа F_{i+1} возьмем две копии графа F , назовем одну копию левой, а другую правой. Добавим дополнительную вершину которая впоследствии станет центральной для F_{i+1} . На рис.1 эта вершина обозначена D. Она соединяется с правой вершиной левой копии (вершина C) и левой вершиной правой копии (вершина E) ребрами длины 1. Дополнительная вершина D также соединяется с центральной вершиной правой копии (вершина F) ребром веса l_i , который будет определен ниже. Наконец, центральная вершина левой копии (вершина B) соединяется с левой вершиной правой копии (вершина E) ребром веса l_i . Левая вершина F_{i+1} определяется как левая вершина левой копии (вершина A), правая вершина F_{i+1} определяется как правая вершина правой копии (вершина G). Путь P_{i+1} состоит из двух копий пути P_i и ребер (B,E), (F,D) длины l_i . Длина l_i данных ребер определяется по формуле

$$l_i = \frac{1}{6}(4 * 2^i - (-1)^i + 3) \quad (16)$$

Пусть L_i - длина пути P_i . Для длины L_i есть рекуррентное соотношение:

$$L_{i+1} = 2 * L_i + 2 * l_i \quad (17)$$

Так как P_{i+1} состоит из двух копий P_i и двух ребер веса l_i При условии что $L_1 = 2$, решение данного уравнения:

$$L_i = \frac{1}{9}(6i * 2^i + 8 * 2^i + (-1)^i - 9) \quad (18)$$

Для каждого F мы определяем граф G_i , который получается из F путем соединения левой вершины и правой вершины графа ребром веса 1 и соединением центральной вершины с левой вершиной ребром веса $l_i - 1$. Левая вершина графа F считается начальной вершиной графа G_i . На рисунке изображен граф G_4 . Определим \bar{G}_i как полный граф на вершинах G_i . Длина ребер в данном графе будет равна длине наименьшего пути в G_i между двумя вершинами, которые соединяет ребро. Таким образом \bar{G}_i будет удовлетворять неравенству треугольника.

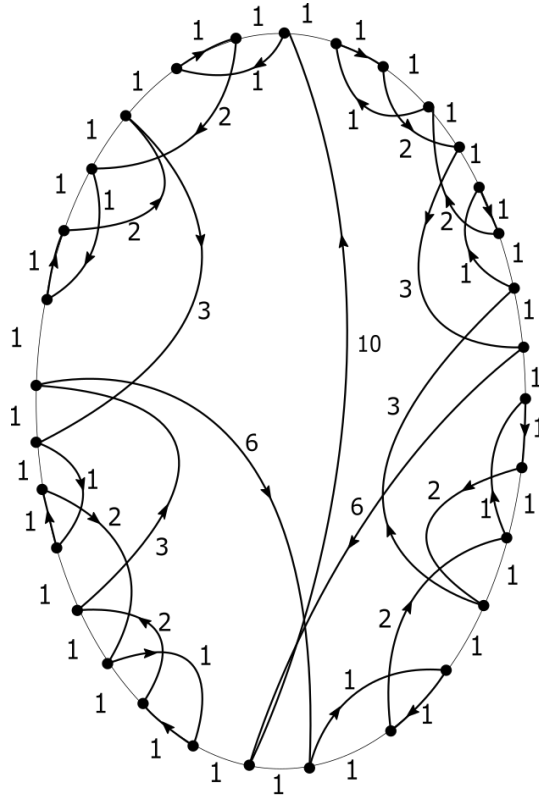


Рис. 2

Граф \bar{G}_i имеет два важных свойства:

- 1) Ребра графа G_i имеют в графе \bar{G}_i такие же длины как и в G_i
- 2) Если жадный алгоритм начинает свою работу с начальной вершины графа G_i то при подходящем выборе между несколькими возможными путями в алгоритме метод может найти путь P_i , который будет следовать за ребром длины $l_i - 1$, проведенным из центральной вершины (последняя в пути P_i) в начальную вершину.

Мы вернемся к доказательству этих свойств после завершения доказательства основной теоремы. Каждый граф \bar{G}_i имеет оптимальный маршрут, состоящий из ребер единичного веса, с, соответственно весом пути равным n , где n - это количество вершин ($2^{i+1} - 1$). Данный путь начинается в начальной вершине и далее посещаются все вершины слева направо, после чего происходит возврат в начальную вершину. Примером, удовлетворяющим теореме является граф \bar{G}_{m-1} . Соотношение для него:

$$\frac{GREEDY}{OPTIMAL} = (L_i + l_i - 1)/n, i = \lg(n + 1) - 1 \quad (19)$$

Данное соотношение больше чем соотношение в теореме. Остается доказать свойства 1) и 2). Рассмотрим рис.1 TODO нумерация Покажем что для каждого F_{i+1}

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{EF} = \overline{FG} = l_i - 1 \quad (20)$$

$$\overline{AC} = \overline{EG} = l_{i+1} - 2 \quad (21)$$

$$\overline{BE} = \overline{DF} = l_i \quad (22)$$

$$\overline{AD} = \overline{DG} = l_{i+1} - 1 \quad (23)$$

$$\overline{AG} = l_{i+2} - 2 \quad (24)$$

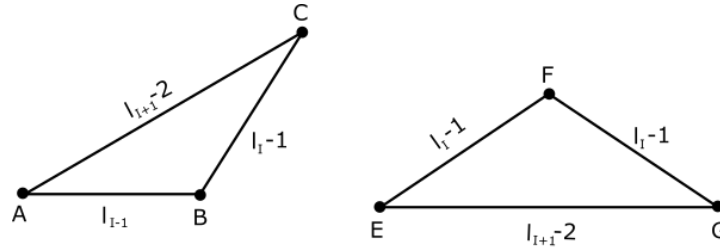


Рис. 3а

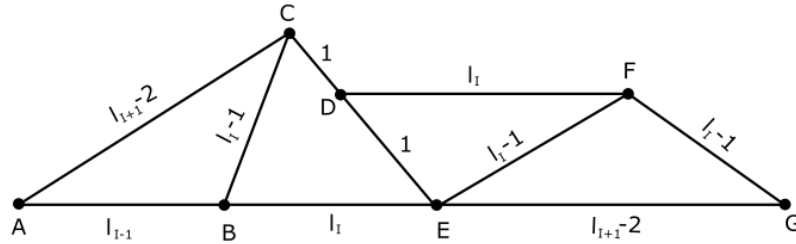


Рис. 3б

Запись \overline{XY} означает длину кратчайшего пути между X и Y в графе F_{i+1} . Данные равенства тривиально доказываются для $i=1$. Далее будем вести доказательство по индукции. Предположим что равенства верны для $i \leq I - 1$, например для F_I . На рис.3а изображены связанные вершины графа F_{I+1} до объединения двух копий F_I в F_{I+1} . Веса ребер графа равны кратчайшему пути между ними в F_I . Эти веса определены в предположении индукции. Например, ребро (A,B) на рис.3а соединяет левую и центральную вершины F_I и, как следует из 23, длина кратчайшего пути между этими вершинами равна $l_i - 1$. На рис.3б мы можем увидеть фигуры с рис.3а с ребрами, которые были добавлены при построении F_{I+1} . Так как каждый вес ребра между двумя вершинами на рис.3а равен кратчайшему пути между этими вершинами, то применяя формулу 16 для l_I ко всем возможным путям в F_{i+1} мы можем найти, что вес каждого ребра на рис.3б действительно является длиной кратчайшего пути между двумя вершинами, которые соединяет ребро. Это доказывает равенства 20-22 для F_{I+1} . Равенства 23, 24 доказываются аналогичными рассуждениями для всех путей на TODO рис.3б. Путем длины $l_{i+1} - 2$ из A в G является путь ABEG.

Также стоит отметить, что 20 - 23 выполняются и когда из F_{l+1} строится G_{l+1} . Это можно доказать соединив A и G на рис. 3б ребром веса $l_{l+1} - 1$ и снова проверив пути. Кратчайшим путем из A в D является ребро (A, D) .

Теперь вернемся к свойству а). Уравнение 22 показывает, что для каждого построенного F_{i+1} ребра, добавленные при построении содержатся в кратчайшем пути. Все расстояния между точками в F_i уже вычислены на момент построения F_{i+1} потому, что расстояния между особыми точками уже вычислены. (сравним 20 и 23, 21 и 24)

Мы уже заметили, что последнее добавленное ребро при построении G_i является кратчайшим путем и, очевидно, путь состоящий из ребер длины 1 является кратчайшим. Таким образом, свойство 1) доказано.

Свойство 2) доказывается тем фактом, что центральная вершина графа F_i достигается только после посещения всех остальных вершин, и вершина в конце ребра длины l_i хотя бы настолько же близка как любая другая вершина, достигаемая через левую или правую вершины. Эти вершины уже на расстоянии l_{i-1} от центральной вершины и как минимум на расстоянии 1 от еще не выбранной вершины.

Объектом исследований данной работы являются оценки оптимальности решения задачи, найденного жадным алгоритмом при случае когда веса ребер являются случайными величинами и распределены по некоторому закону распределения.

2. Некоторые определения и вспомогательные теоремы

2.1 Определения

Алгоритм \mathcal{A} будем называть асимптотически оптимальным если существуют такие $\epsilon_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ что применение алгоритма \mathcal{A} дает значение $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$, удовлетворяющее неравенству

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \leq (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\} \geq 1 - \delta_n \quad (25)$$

где $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ - решение, найденное алгоритмом, \mathcal{Z} - минимальное решение. Это определение при $\epsilon_n \equiv 0$ совпадает с понятием алгоритма, который почти всегда приводит к точному решению.

2.2 Неравенство Чебышева

Пусть случайная величина $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а её математическое ожидание μ и дисперсия σ^2 конечны. Тогда

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad (26)$$

, где $a > 0$.

2.3 Теорема Петрова

Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины и существуют положительные постоянные g_1, \dots, g_n и T такие, что для всех $0 \leq t \leq T$

$$\mathbb{E} e^{tX_k} \leq e^{\frac{1}{2}g_k t^2} \quad (27)$$

Положим $S = \sum_{k=1}^n X_k$ и $G = \sum_{k=1}^n g_k$. Тогда

$$P\{S > x\} \leq \begin{cases} \exp(-\frac{x^2}{2G}), & 0 \leq x \leq GT \\ \exp(-\frac{Tx}{2}), & x \geq GT \end{cases} \quad (28)$$

3. Условия асимптотической оптимальности жадного алгоритма

Найдем условия, при выполнении которых жадный алгоритм является асимптотически оптимальным, то есть

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq \delta_n \quad (29)$$

где $\epsilon_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Оценим сверху левую часть данного неравенства. Так как $a > 0$, то $\mathcal{Z} \geq na$ и

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)na\} \quad (30)$$

Обозначим через $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*$ верхние оценки соответственно математического ожидания $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ и дисперсии $D(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ случайной величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$. Обозначим $\Delta_n = (1 + \epsilon_n)na - \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*$. Получаем:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)na\} = P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* + [(1 + \epsilon_n)na - \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*]\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})) + \Delta_n\} \quad (31)$$

Пусть $\epsilon_n = k(\frac{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*}{na} - 1)$, $k > 1$. Тогда $\Delta_n = (k - 1)(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* - na) \geq 0$. Продолжим неравенство 31 применив неравенство Чебышева.

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) + \Delta_n\} \leq P\{|\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})| \geq \Delta_n\} \leq \frac{D(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})}{\Delta_n^2} \leq \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*}{\Delta_n^2} = \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*}{(k - 1)^2(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* - na)^2} \quad (32)$$

Так как k - константа, $k > 1$, то из данной цепочки неравенств следует, что условие асимптотической оптимальности жадного алгоритма будет выполнено если мы покажем, что $\epsilon_n = k(\frac{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*}{na} - 1) \rightarrow 0$ и $\delta_n = \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*}{(k - 1)^2(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* - na)^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Вычисление верхних оценок $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*$

Математическое ожидание $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ равно сумме математических ожиданий величин $a_{i_k i_{k+1}}$ минимальных элементов матрицы, выбираемых на k -м шаге алгоритма \mathcal{A}' . В

целях удобства дальнейших вычислений пронормируем случайную величину ξ значений элементов a_{ij} матрицы A , положив $\xi' = \frac{\xi-a}{b-a}$. Обозначим через l_k значение матожидания нормированной случайной величины $l_k = a'_{i_k i_{k+1}}$. На k -ом шаге алгоритма выбирается минимум из $n-k$ элементов. В силу независимости этих элементов вероятность $\Phi_k(x)$ того, что величина l_k минимального из этих элементов не превышает величины x равна

$$\Phi_k(x) = P\{l_k \leq x\} = 1 - (1 - F(x))^{n-k} \quad (33)$$

, где

$$F_k(x) = P\{\xi' \leq x\}, 0 \leq x \leq 1 \quad (34)$$

Тогда величина $E(l_k)$ равна

$$E(l_k) = \begin{cases} \int_0^1 x d\Phi_k(x), & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ E(l_{n-1}), & k = n \end{cases} \quad (35)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} E(l_k) &= x\Phi_k(x)|_0^1 - \int_0^1 \Phi_k(x) dx = \\ &= 1 - \int_0^1 [1 - (1 - F(x))^{n-k}] dx = \int_0^1 (1 - F(x))^{n-k} dx \end{aligned} \quad (36)$$

$k = \overline{1, n-1}$

В силу нормировки минимальный элемент $a_{i_{k-1}i_k}$ связан с величиной l_k соотношением $a_{i_k i_{k+1}} = a + (b - a)l_k$. Поэтому

$$E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^n [a + (b - a)E(l_k)] \quad (37)$$

. Откуда с учетом 36 имеем:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) &= na + (b - a) \left[\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (1 - F(x))^{n-k} dx + \int_0^1 (1 - F(x)) dx \right] = \\ &= na + (b - a) \int_0^1 \frac{[1 - F(x)][1 - (1 - F(x))^{n-1} + F(x)]}{F(x)} dx \leq \\ &\leq na + (b - a) \int_0^1 \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx = \\ &= na + (b - a) \left[\int_0^{\gamma_n} \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx + \int_{\gamma_n}^1 \frac{1 - (1 - F(x))^n}{F(x)} dx \right] \end{aligned} \quad (38)$$

где γ_n - корень уравнения $F(\gamma) = \frac{1}{n}$, то есть $\gamma_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$. Учитывая что при $0 \leq Z \leq 1$ справедливо неравенство $\frac{1-(1-Z)^n}{Z} \leq n$, оценку $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ можем

продолжить следующим образом

$$E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) \leq \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* = na + (b - a)[\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)}] \quad (39)$$

Перейдем к вычислению верхней оценки $\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*$. Дисперсия d_k случайной нормированной величины l_k на k -ом шаге равна

$$d_k = \int_0^1 (x - E(l_k))^2 d\Phi_k(x) = \int_0^1 x^2 d\Phi_k(x) - (E(l_k))^2 < \int_0^1 x d\Phi_k(x) = E(l_k) \quad (40)$$

Тогда с учетом того, что дисперсия минимального элемента $a_{i_k i_{k+1}}$ равна $(b - a)^2 d_k$, дисперсия случайной величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$ с учетом 37 оценивается следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^n (b-a)^2 d_k < (b-a)^2 \sum_{k=1}^n E(l_k) = (b-a)^2 * \frac{E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) - na}{(b-a)} \leq (b-a)(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* - na) \quad (41)$$

Окончательно с учетом 39 получаем верхнюю оценку для $\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) < \mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^* = (b - a)^2 [\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)}] \quad (42)$$

Вернемся к неравенству 32. Имея в виду получение оценки 39 и 42, выражения для ϵ_n и δ_n можно записать в следующем виде:

$$\epsilon_n = K(\frac{b}{a} - 1)[\gamma_n + \frac{1}{n} \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)}] \quad (43)$$

$$\delta_n = \frac{1}{(K - 1)^2 [\gamma_n * n + \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)}]} \quad (44)$$

Обозначим $\mathcal{I}_K = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)}$, TODO (большая K, а маленькая в mathcal не отрисовывается) $\Psi(n)$ - произвольная растущая от n функция, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = \infty$

Теорема 1

Алгоритм \mathcal{A}' является асимптотически оптимальным при выполнении условий $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n = \infty$ и

$$\frac{b}{a} \leq \frac{1}{\Psi(n)} \min\{\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{\mathcal{I}_n}\} \quad (45)$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы $\epsilon_n \rightarrow 0$ и $\delta_n \rightarrow 0$ с ростом n . Действительно, при $K > 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{1}{(\gamma_n n + \mathcal{I}_n)(K-1)^2} \leq \frac{1}{\mathcal{I}_n * (K-1)^2} \rightarrow 0 \\
\epsilon_n &= K\left(\frac{b}{a} - 1\right)(\gamma_n + \frac{1}{n}\mathcal{I}_n) \leq K * \frac{b}{a}(\gamma_n + \frac{1}{n}\mathcal{I}_n) \leq \\
&\leq \frac{K}{\Psi(n)} \min\left(\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{\mathcal{I}_n}\right) = \\
&= \frac{K}{\Psi(n)} \min\left(1 + \frac{\mathcal{I}_n}{n\gamma_n}, 1 + \frac{n\gamma_n}{\mathcal{I}_n}\right) \leq \frac{2K}{\Psi(n)} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{46}$$

при $n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Как было показано выше, для своей работы алгоритм \mathcal{A}' требует $O(n^2)$ операций, что сравнимо с трудоемкостью записи исходной информации о задаче коммивояжера. Отсюда получаем, что при выполнении условий теоремы 1 алгоритм \mathcal{A}' является статистически эффективным.

Равномерное распределение.

Определены условия асимптотической оптимальности алгоритма \mathcal{A}' для случая, когда элементы a_{ij} матрицы A могут быть выбраны равновероятно из отрезка $[a, b]$, $a > 0$. В этом случае нормированная интегральная функция распределения имеет вид $F(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, $\gamma_n = F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ и

$$\mathcal{I}_n = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)} = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \ln(n) \tag{47}$$

Тогда из теоремы 1 непосредственно получаем результат, который может быть сформулирован как:

Теорема 2

Если элементы a_{ij} матрицы A принимают значения равновероятно из отрезка $[a, b]$, то алгоритм \mathcal{A}' является асимптотически оптимальным при выполнении следующего условия:

$$\frac{b}{a} \leq \frac{n}{\ln(n)} \frac{1}{\Psi(n)} \tag{48}$$

Представляет интерес оценить величины ϵ_n и δ_n , фигурирующие в соотношении 25.

Учитывая специфику равномерного распределения можно получить более точные оценки для этих величин по сравнению с общим случаем. Выведем условия асимптотической оптимальности алгоритма \mathcal{A}' в случае равномерного распределения, проведя в сокращенном виде вычисления оценок для $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})$ и $P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\}$. Согласно 36 нумерация

$$E(l_k) = \int_0^1 (1-x)^{n-k} dx = \int_0^1 x^{n-k} dx = \frac{1}{n-k+1} \tag{49}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-k; E(l_n) = E(l_n - 1) = \frac{1}{2}$$

С учетом 37

$$E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^n [a + (b-a)E(l_k)] = na + (b-a)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k+1}\right) \leq \quad (50)$$

$$\leq na + (b-a)\left(\frac{1}{2} + \ln(n)\right) = \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*$$

Оценим дисперсию $d_k = \int_0^1 (x - E(l_k))^2 d\Phi_k(x)$ случайной величины l_k с учетом того, что для равномерного распределения $\Phi_k(x) = 1 - (1-x)^{n-k}$

Используя 49, имеем

$$d_k = \int_0^1 x^2 d\Phi_k(x) - E(l_k^2) = x^2 \Phi_k(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 x \Phi_k(x) dx - E(l_k^2) =$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 x [1 - (1-x)^{n-k}] dx - E(l_k^2) = \quad (51)$$

$$= \frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n-k+2} - \frac{1}{(n-k+1)^2},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1; d_n = d_{n-1} = \frac{1}{12}$$

Отсюда с учетом определения дисперсии величины $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}$, получим

$$\frac{1}{(b-a)^2} D(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{k=1}^n d_k = \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n-k+2} - \frac{1}{(n-k+1)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{2}{n+1} + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)^2} \leq \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} - \int_3^{n+1} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3} < 0.417 = \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}^*}{(b-a)^2} \quad (52)$$

Приведем оценку вероятности невыполнения соотношения 25 для случая равномерного распределения:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)\mathcal{Z}\} \leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} > (1 + \epsilon_n)na\} \leq$$

$$\leq P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} + \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^* - E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) > (1 + \epsilon_n)na\} =$$

$$= P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}) > (1 + \epsilon_n)na - \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*\} \leq$$

$$\leq P\{|\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} - E(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})| > (1 + \epsilon_n)na - \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*\} \leq$$

$$\leq \frac{D(\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'})}{[1 + \epsilon_n)na + \mathcal{Z}_{\mathcal{A}'}^*]^2} \leq \quad (53)$$

$$\leq \frac{0.417(b-a)^2}{[1 + \epsilon_n)na - (nu + (b-a)(\frac{1}{2} + \ln n))]^2} =$$

$$= \frac{0.417}{[\frac{n\epsilon_n}{\frac{b}{a}-1} - \ln n - \frac{1}{2}]^2}$$

Положим $\epsilon_n = \frac{c}{\Psi(n)}$, константа $c > 1$, и пусть $\frac{a}{b} \leq \frac{n}{l \ln n} \frac{1}{\Psi(n)}$. Тогда 53 может быть продолжено следующим образом:

$$\frac{0.417}{\left[\frac{n \frac{c}{\Psi(n)}}{\left(\frac{b}{a}-1\right)} - \frac{1}{2} - l \ln n\right]} \leq \frac{0.417}{\left[\frac{c \frac{b}{a} l \ln n}{\left(\frac{b}{a}-1\right)} - \frac{1}{2} - l \ln n\right]^2} = \frac{0.417}{\left[(c-1) l \ln n - \frac{1}{2}\right]^2} = \delta_n \quad (54)$$

Таким образом, окончательная оценка для вероятности выполнения соотношения 25 примет вид:

$$P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1 + \epsilon_n) \mathcal{Z}\} \geq 1 - \frac{0.417}{\left[(c-1) l \ln n - \frac{1}{2}\right]^2} \quad (55)$$

Нетрудно заметить, что эта величина, характеризующая точность получаемого решения, улучшается с ростом $\Psi(n)$, но при этом ухудшается оценка для величины $\frac{b}{a}$. Выберем функцию $\Psi(n)$ таким образом, чтобы произведение верхних оценок для ϵ_n и $\frac{b}{a}$ стремилось к 25 с ростом n . Такому условию отвечает функция $\Psi(n) = \sqrt{\frac{cn}{l \ln n}}$. При этом оценки для ϵ_n и $\frac{b}{a}$ принимают вид:

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{\frac{n}{c l \ln n}} \quad (56)$$

$$\epsilon_n \leq \sqrt{\frac{c l \ln n}{n}} \quad (57)$$

Анализ соотношений 55-57, полученных для равномерного распределения показывает, что уменьшение константы c "улучшает" оценки для $\frac{b}{a}$ и ϵ_n и "ухудшает" оценку вероятности $P\{\mathcal{Z}_{\mathcal{A}'} \leq (1 + \epsilon_n) \mathcal{Z}\}$

β - распределение. Очень часто в опытно-конструкторских разработках в промышленности и научно-исследовательских проектах длительности a_{ij} отдельных операций предполагается распределенными по следующему закону / β - распределение /:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi-a)^{\alpha-1}(b-\xi)^{\gamma-1}}{(b-a)^{\alpha+\gamma-1} \beta(\alpha, \gamma)} & \xi \in [a, b] \\ 0 & \xi \notin [a, b] \end{cases} \quad (58)$$

где

$$\beta(\alpha, \gamma) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\gamma-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \quad (59)$$

где α и γ - параметры распределения. В нормированном виде функция плотности $f(\xi)$ запишется следующим образом:

$$f(\xi') = \begin{cases} \frac{(\xi')^{\alpha-1}(1-\xi')^{\gamma-1}}{\beta(\alpha, \gamma)} & \xi' \in [0, 1] \\ 0 & \xi' \notin [0, 1] \end{cases} \quad (60)$$

Рассмотрим частный случай β - распределения, когда $\gamma = 0$, $\alpha > 0$. В этом случае интегральная функция распределения равна

$$F(x) = \int_0^x f(\xi') d\xi' = \int_0^x \frac{x}{\beta(\alpha + 1, 1)} = x^{\alpha+1} \quad (61)$$

Вычислим величину γ_n , фигурирующую в условиях теоремы 1:

$$\gamma_n = F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt[\alpha+1]{n}} \quad (62)$$

Тогда первое из условий теоремы 1 выполняется в силу $\alpha > 0$

$$\mathcal{I}_n = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{F(x)} = \int_{\gamma_n}^1 \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha} (n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (63)$$

Второе условие принимает вид:

TODO здесь могут быть неточности (они есть)

$$\frac{b}{a} \leq \frac{1}{\Psi(n)} \min(\sqrt[\alpha+1]{n}, \frac{\alpha n}{\alpha+1}) \quad (64)$$

Учитывая, что

$$\min(1, \frac{\alpha}{1 - n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}) \geq \min(1, \alpha) \quad (65)$$

Получаем следующее условие асимптотической оптимальности алгоритма \mathcal{A}' для β - распределения в частном случае $\gamma = 0$, $\alpha > 0$:

$$\frac{b}{a} \leq \frac{\sqrt[\alpha+1]{n}}{\Psi(n)} \min(1, \alpha) \quad (66)$$

4. Оптимальность жадного алгоритма для графов с случайным распределением весов ребер.

4.1. Граф с равномерным распределением весов ребер на промежутке. Оценка оптимальности жадного алгоритма.

Список использованных источников и литературы.

Статьи из журнала:

1. Э. Х. Гимади, А. Ле Галлу, А. В. Шахшнейдер, “Вероятностный анализ одного алгоритма приближённого решения задачи коммивояжёра на неограниченных сверху входных данных”, Дискретн. анализ и исслед. опер., 15:1 (2008), 23–43; J. Appl. Industr. Math., 3:2 (2009), 207–221
2. Rosenkrantz, Daniel J.; Stearns, Richard E.; Lewis, II, Philip M – An Analysis of Several Heuristics for the Traveling Salesman Problem. September 1977 SIAM Journal on Computing 6(3):563-581
3. Э. Х. Гимади, В. А. Перепелица, “Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера”, Управляемые системы, 1974, № 12, 35–45