



# 计算机生成的水彩

卡西迪-J-

柯蒂斯肖

恩

E-安德森\*

乔舒亚-E-

塞姆斯库特W-弗莱塞

大卫-H-塞林

华盛顿大学

\*

斯坦福大学

皮克斯动画工作室

## 摘要

本文描述了水彩的各种艺术效果，并展示了如何对它们进行自动模拟。我们的水彩模型是基于一组有序的半透明釉料，这些釉料是使用浅水流体模拟独立产生的。我们使用Kubelka-Munk合成模型来模拟叠加的釉料的光学效果。我们展示了计算机生成的水彩如何在三种不同的应用中使用：作为交互式水彩画系统的一部分，作为一种自动图像"水彩化"的方法，以及作为一种非逼真的三维场景渲染机制。

**CR类别**。I.3.3 [计算机图形学]。图片/图像生成；I.6.3 [仿真和建模]。应用。

**其他关键词**。流体模拟，上釉，插图，库贝尔卡-蒙克，非逼真渲染，光学合成，绘画，颜料，水彩。

## 1 简介

水彩与其他媒介不一样。它表现出美丽的纹理和图案，显示出水在纸上的运动，就像山谷的形状显示出溪流的流动一样。它鲜艳的色彩和自发的形状使它具有独特的魅力。而且，它可以用精致的图层来实现颜色的微妙变化，即使是最平凡的主题也会有透明、发光的质量。

在本文中，我们描述了水彩最重要的效果，并展示了它们如何被自动模拟。然后，我们展示了计算机生成的水彩如何用于三种不同的应用：作为交互式水彩画系统的一部分（图7），作为自动图像"水彩化"的方法（图10），以及作为三维场景的非逼真渲染的机制（图和14.13）。

我们所描述的水彩模拟器是基于经验的：虽然它确实包含了一些基于物理的模型，但它绝不是一个严格的物理模拟。相反，我们在这项工作中的重点是以一种可预测和可控制的方式来重新合成水彩的最突出的艺术特征。

### 1.1 相关工作

本文继承了一长串关于模拟艺术家传统媒体和工具的重要工作。最直接相关的是Small关于在连接机上模拟水彩的开创性工作[34]。和Small一样，我们使用细胞自动机来模拟流体的流动和颜料的散布。然而，为了实现

为了创造更逼真的水彩效果，我们采用了更复杂的纸张模型，更复杂的浅水模拟，以及更忠实的渲染和基于Kubelka-Munk模型的颜料层的光学合成。这些改进的结合使我们的系统能够创造许多额外的水彩效果，如边缘变暗、颗粒化、回流、颜料分离和上光，如第2节所述。这些效果产生的外观更接近真实的水彩画，并能更好地捕捉到这种媒介所特有的透明感和光亮感。

在商业领域，某些水彩效果是由Fractal Design Painter等产品提供的，尽管这个产品似乎不能像我们描述的模拟那样给出逼真的水彩效果。在其他相关工作中，Guo和Kunii探讨了"Sumie"绘画的效果[13]，而Guo继续将这项工作应用于书法[12]。他们的墨水通过纸张扩散的模型在某种程度上与Small的和我们自己的水模拟技术都很相似。

其他关于厚而有光泽的油漆的建模[2]和毛笔对绘画和书法的影响[30, 36]的研究工作也与这里描述的工作有关，提供了一个可信的

模拟传统艺术家的工具。<sup>1</sup>这里描述的工作也是在不断增长的非逼真渲染研究中的延续[5, 406,9,16,22,23,26,33,39,]，它建立在以前关于水的流体动力学动画[1, 10, 19]和水的流动对表面外观的影响[7, 288,]的工作上。

### 1.2 概述

下一节介绍了水彩介质的物理性质，然后从艺术家的角度调查了它的一些最重要的特性。第3节讨论3了这些关键特征如何能够被合成创造。第4节详细描述了我们对水和颜料的分散的物理模拟。第5节讨论了所产生的颜料分布是如何呈现的。第6节介绍了三个不同的应用，我们在其中使用了我们的水彩模拟，并提供了产生的结果的例子。最后，第7节讨论了对未来研究的一些想法。

## 2 水彩的特性

几个世纪以来，磨碎的颜料与水溶性结合材料结合在一起，用于绘画。水彩的最早用途是作为薄薄的彩色水洗，费力地应用于详细的笔墨或铅笔插图。然而，水彩的现代传统可以追溯到十八世纪后半叶，当时的艺术家如J.M.W.特纳（1775-1851）、约翰-康斯特布尔（1776-1837）和大卫-考克斯（1783-1859）开始尝试新的技术，如擦拭和刮除，以及这种媒介的即时性和自发性[35]。

为了有效地模拟水彩，不仅要研究媒介的物理特性，而且要研究使水彩受到艺术家欢迎的特征现象。只有当一种模拟能够达到许多相同的效果时，才是成功的。在

<sup>1</sup>这种方法与Cockshott等人[2]采取的

"方法基本相同，他们的

"油漆模型被设计成在艺术家看来与真实介质一样的行为，而不一定具有真实的物理基础。

"最小模拟

"湿&粘



Copyright ©1997 by the Association for Computing Machinery, Inc. 允许为个人或教室使用本作品的部分或全部内容制作数字或硬拷贝，但不得为盈利或商业利益而制作或分发拷贝，并且在拷贝的第一页注明本通知和完整的引文。以其他方式复制、再版、在服务器上发布或分发给名单，需要事先获得具体许可和/或付费。

补充材料

1997-05-25 22:03:20

这篇论文的补充材料可在[papers/curtis](http://papers.curtis.org)目录中找到。

允许为个人或课堂使用本作品的部分或全部内容制作数字或硬拷贝，但不得为盈利或商业利益而制作或分发拷贝，

并且在拷贝的第一页注明本通知和完整的引文。必须尊重ACM以外的其他人拥有的本作品的版权。允许摘录并注明出处。以其他方式复制、再版、在服务器上发布或分发给名单，需要事先获得特别许可和/或付费。请向ACM公司出版部申请许可，传真+1 (212) 869-0481，或[permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org)。

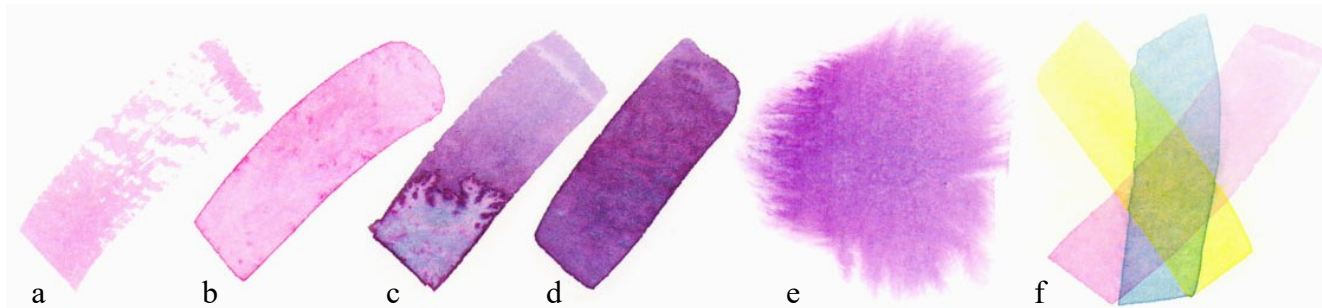


图1为真实的水彩效果：干刷（a），边缘变暗（b），回流（c），造粒（d），流动效果（e），以及上光（f）。

因此，在本节的其余部分，我们将讨论水彩的物理性质，然后从艺术家的角度调查水彩的一些最重要的特点。

## 2.1 水彩材料

水彩画图像是通过在纸上涂抹水彩颜料而形成的。水彩颜料（也被简单地称为水彩）是颜料颗粒在水、粘合剂和表面活性剂溶液中的悬浮液[17, 35]25。下面将详细介绍水彩的成分。

水彩纸通常不是由木浆制成的，而是由亚麻布或棉布捣成的小纤维。纸张本身主要是空气，与这些纠缠在一起的纤维组成的微观网络相连。这样的物质显然对液体有极强的吸收力，因此纸张被浸渍了施胶，这样液体涂料就可以在上面使用，而不会立即浸透和扩散。浆料通常由纤维素制成。它形成了一个屏障，减缓了水的吸收和扩散的速度。对于大多数水彩画纸来说，施胶剂的用量很少，只是涂在纤维上，填充一些孔隙，使纸的表面仍然粗糙。

颜料是一种小而独立的颗粒形式的固体材料。水彩颜料通常在研磨过程中被磨成由大约0.05至0.5微米的颗粒组成的粉末。颜料可以渗透到纸中，但一旦进入纸中，它们往往不会移动太远。颜料的密度各不相同，较轻的颜料往往比较重的颜料在水中悬浮的时间长，因此在纸上扩散的距离也比较远。染色力是对颜料粘附或覆盖在纸张纤维上的倾向的估计，不同的颜料也有差异。某些颜料表现出颗粒性，即颗粒沉淀在粗糙纸张的凹陷处。另一些颜料则表现出絮凝性，即颗粒通常在电的作用下被吸引到一起形成团块。（由于絮凝现象在外观上与造粒现象相似，我们在本文中只讨论造粒现象的模型。）

剩下的两种成分，粘合剂和表面活性剂，都发挥着重要作用。粘合剂使颜料能够粘附在纸上（称为“纸对颜料的吸附”）。表面活性剂可以使水浸入纸张。颜料、粘合剂和表面活性剂的适当比例是必要的，这样才能使颜料表现出艺术家所期望的品质。（然而，由于这些比例是由涂料制造商而不是艺术家控制的，我们没有把它们作为我们模型的一部分）。

水彩的最终外观来自于各种颜料在流动介质中的运动、纸张对这些颜料的吸附、纸张对水的吸收以及水介质的最终蒸发之间的互动。虽然这些相互作用在本质上是相当复杂的，但熟练的艺术家可以利用它们来实现各种各样的效果，正如下一节所述。

## 2.2 水彩效果

水彩可以用许多不同的方式来使用。首先，有两种基本的刷画技巧。在湿中带湿的绘画中，将装满水彩颜料的画笔涂在已经被水浸透的纸上，让颜料自由扩散。当画笔涂在干纸上时，就被称为干湿画。这些技术产生了一些标准的效果，可以被水彩专家可靠地运用，包括。

- 干刷的效果（图1a）。一个几乎干燥的画笔，以适当的擦拭角度使用，将只在粗糙的纸张上的凸起部分涂抹颜料，留下一个具有不规则间隙和粗糙边缘的笔触。
- 边缘变黑（图1b）。在干湿交替的笔触中，纸张的施胶，加上水的表面张力，不允许笔触扩散。相反，在一个渐进的过程中，当颜料开始干燥时，颜料从被画区域的内部向其边缘迁移，在边缘留下一个深色的沉积物。这一关键效果是水彩画家们所依赖的，也是颜料制造商们在其水彩颜料配方中努力确保的[17]。
- 有意的回流（图1c）。当一滩水扩散到颜料的潮湿区域时，就像水洗干燥不均匀时经常发生的那样，水在扩散时往往会推动颜料，从而产生复杂的、边缘严重发黑的分支形状。
- 颜料的颗粒化和分离（图1d）。颜料的粒化产生了一种颗粒状的质地，强调了纸张的波峰和波谷。颗粒感因颜料而异，当纸张非常潮湿时，颗粒感最强。分离指的是，当密度大的颜料比密度小的颜料更早沉淀时，会出现颜色的分裂。
- 流动图案（图1e）。在湿中带湿的绘画中，湿润的表面允许笔触自由地扩散，从而产生了柔软的、带有精致条纹的、顺着水流方向的羽毛形状。

水彩画中还有一个非常重要的技巧就是上色的过程（图1f）。上色是指在水彩中加入非常薄的、浅色的层，或者说是水洗，一层一层的，以达到非常清晰和均匀的效果。每一层水彩都是在前一层水彩干了以后再加的。更为昂贵的水彩画颜料是专门配制的，具有较低的溶解度，这不仅允许薄而均匀的水洗被覆盖，而且事实上允许在干燥的水洗上采用任何类型的刷子技术（包括干刷和湿对湿）而不干扰底层。

上釉与普通绘画的不同之处在于，不同的颜料不是物理上的混合，而是光学上的混合--

它们在纸上的超级位置。釉上彩产生了一种令人愉悦的效果，通常被描述为“发光”，或“从内部发光”[4, 32]。我们怀疑这种主观印象是由边缘变暗的效果产生的。这种印象在多重超强的情况下会得到加强。

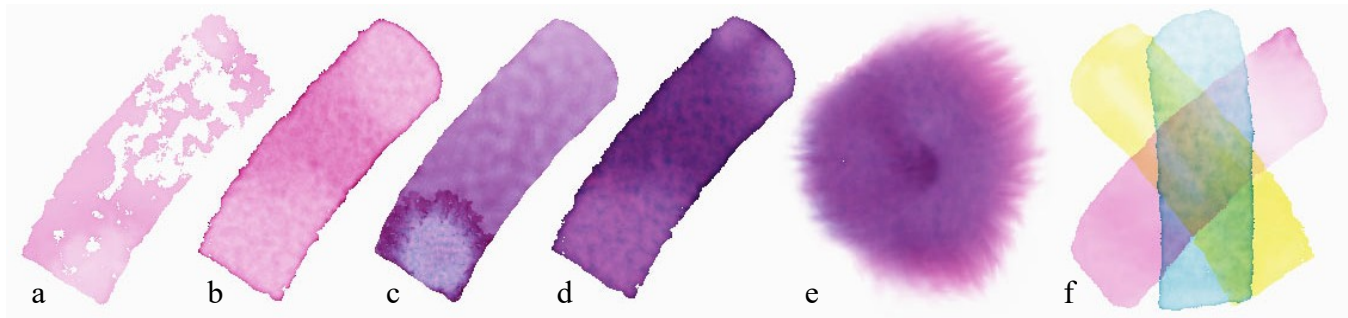


图2 图为我们使用我们的系统创建的模拟水彩效果。

强制实行干湿分离洗涤。

图1显示了真实水彩画的扫描图像。图2显示了我们的水彩模拟得到的类似效果。

### 3 计算机生成的水彩

自动实现所有这些艺术效果是一个有趣的挑战，特别是考虑到可用的艺术效果的匮乏。

有关的物理过程的信息。<sup>2</sup>在这一节中，我们提出了一个关于水彩画的物理和光学行为的基本模型。这个模型的细节将在接下来的两节中阐述。

我们把一幅完整的画表现为在一张粗糙的纸上的一组有序的水洗。每个水洗都可能包含不同数量的颜料，分布在画面的不同部分。我们将这些数量存储在一个叫做“釉”的数据结构中。

每种釉料都是通过运行流体模拟，计算颜料在纸上的流动而独立产生的。该模拟将控制各个颜料、纸张和水彩介质的物理特性的参数作为输入。此外，该模拟还使用了湿区掩码，代表纸张上被水接触的区域。这些遮罩通过限制流体流动的计算来控制水被允许流动的位置。下一节将详细介绍这种流体模拟。

一旦计算出釉料，就使用Kubelka-Munk颜色模型对它们进行光学合成，以提供最终的视觉效果，如本节所述。<sup>5</sup>

### 4 流体模拟

在我们的系统中，每个单独的洗涤都是用三层模型模拟的（图3）。从上到下，这三层包括。

- 浅水层--水和颜料在纸的表面以上流动的地方。
- 颜料沉积层--颜料沉积到（“吸附”）和从纸上解除（“解吸”）的地方。
- 毛细管层--被吸收到纸上的水通过毛细管作用扩散。（该层仅在模拟回流效应时使用）。

2

事实上，正如Mayer在他1991年的手册中指出的那样[25，第13页]。“对艺术家的材料和技术的研究受到了阻碍，因为缺乏基于现代科学实验调查的真实的系统性数据来补充我们目前的知识--过去几个世纪的实践经验的积累，必然充满了建立在猜测和共识的不稳定基础上的原则。艺术家的观点，将为我们提供更多的现代科学和技术的好处。”

在浅水层（图3a），水以湿区掩膜为界流过表面。随着水的流动，它把颜料从纸上抬起来，带着它走，然后重新沉积在纸上。在这个模拟中涉及的数量是

- 湿区掩码 $M$ ，如果纸张是湿的，它就是1，否则就是0。
- 水在 $x$ 和 $y$ 方向的速度 $u$ 、 $v$ 。
- 水的压力 $p$ 。
- 水中每种颜料 $k$ 的浓度 $g$ 。
- 粗糙纸张表面的坡度 $h$ ，定义为纸张高度 $h$ 的梯度。
- 水彩介质的物理特性，包括其粘度 $\mu$ 和粘滞阻力 $\eta$ 。（在我们所有的例子中，我们设定 $\mu=$ 和 $0.1\eta=01$ ）。

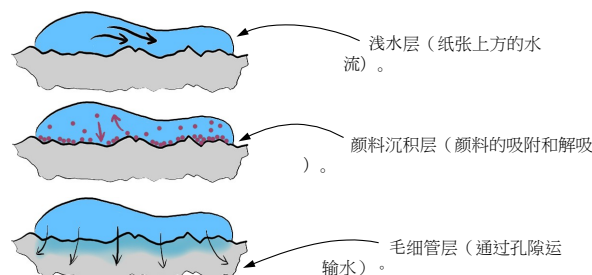
每种颜料 $k$ 通过吸附和解吸在浅水层和颜料沉积层之间转移。虽然浅水层中的颜料用 $g$ 表示 $k$ ，但我们将用 $a^k$ 来表示任何沉积的颜料。各个颜料的物理特性，包括它们的密度 $p$ 、染色力 $w$ 和颗粒度，都会影响纸张的吸附和解吸率。（我们的例子中这些参数的值显示在图5的说明中）。

毛细管层的功能是允许由于水在纸的孔隙中的毛细管流动而使湿面积的掩膜扩大。该层的相关数量是：

- 纸张的水饱和度 $s$ ，定义为一定体积的空间中被水占据的部分。
- 纸张的持液量 $c$ ，即不被纸张纤维占据的体积部分。

所有上述数量都是在代表纸张平面的二维网格上离散化的。

我们将使用下标来指代每个数量的值，例如 $p$ ，在一个特定的单元，如 $p_{i,j}$ 。我们将使用粗体字（如 $\mathbf{p}$ ）来表示



图：水彩画的3层流体模型。





图 纸张纹理的例子4。

表示整个离散值的阵列。

#### 4.1 纸张的产生

在真正的水彩画中，纸张的结构会影响流体的流动、回流和造粒。这些影响所依据的力学原理可能相当复杂，可能取决于各个纤维之间的精确连接，以及纸张上细小规模的山峰和山谷的确切坡度。在我们的系统中，我们使用了一个更简单的模型。纸张纹理被建模为一个高度场和一个流体容量场。高度场 $h$ 是用精选的伪随机过程之一产生的[29, 41]，并按比例调整，使  $0 < h < 1$ 。高度场的4.斜率用于修改动力学模拟中的流体速度 $u, v$ 。此外，流体容量 $c$ 是由高度场 $h$ 计算出来的，即  $c = h (c_{max} + c_{min})$

#### 4.2 主循环

我们模拟的主循环将初始湿面积掩码 $M$ ；水的初始速度 $u, v$ ；初始水压 $p$ ；初始颜料浓度 $g^k$ ；和主循环在指定的时间步数上迭代，在浅水层中移动水和颜料，在浅水层和颜料沉积层之间转移颜料，并模拟毛细流。

```

proc MainLoop( $M, u, v, p, g^1, g^n, d^1, d^n, s$ ):
  对于每一个时间步骤做MoveWater
    ( $M, u, v, p$ ) MovePigment( $M, u, v, g^1, g^n$ )
    转移颜料( $g^1, g^n, d^1, d^n$ )
    SimulateCapillaryFlow( $M, s$ )
  END
FOR END
proc

```

#### 4.3 浅水层中的流动水

为了实现真实性，水的行为应该满足以下几点条件。

1. 流动必须受到限制，使水保持在湿润区域的掩码内。
2. 一个地区的水过剩应该会导致水从该地区向外流向附近地区。
3. 必须对流动进行阻尼，以尽量减少振荡波。
4. 流动必须受到纸张纹理的扰动，以造成与流动方向平行的条纹。
5. 局部的变化应该有全局的影响。例如，在一个局部地区加水应该影响整个模拟。
6. 应该有液体向外流向边缘，以产生边缘变暗的效果。

前两个条件可以通过使用适当的边界条件直接满足基本的浅水方程[24, 38]。

$$\frac{u}{t} = \frac{u}{x^2} + \frac{uv}{y^2} + \mu^2 r u p \quad (1)$$

$$\frac{v}{t} = \frac{v}{y^2} + \frac{uv}{x^2} + \mu^2 r v p \quad (2)$$

这些方程在UpdateVelocities()子程序中实现。如UpdateVelocities()的伪代码所示，通过在流体流动模拟中添加涉及粘性阻力 $\mu$ 和纸面坡度 $h$ 的条款3来4满足条件。条件和5条件是6由两个额外的子程序完成的，即RelaxDivergence()和FlowOutward()。所有这三个程序都是用来实施浅水层中的水的运动。

```

proc MoveWater( $M, u, v, p$ ):
  UpdateVelocities( $M, u, v, p$ )
  RelaxDivergence( $M, u, v, p$ )
  FlowOutward( $M, p$ )
结束程序

```

##### 4.3.1 更新水的速度

为了更新水的速度，我们将方程(1)和(2)离散化。(2)空间上的交错网格(如Foster[10])。这种离散化的影响是，我们的解决方案是依赖于分辨率的。推广到一个与分辨率无关的模型是未来工作的一个重要目标。

交错网格代表在网格单元边界存储速度值，在网格单元中心存储所有其他值(压力、颜料浓度等)。我们使用交错网格的标准符号，将单元边界上的量称为具有"分数"指数。例如，以 $(i, j)$ 和 $(i + 1, j)$ 为中心的网格单元边界上的速度 $u$ 被称为 $u_{i+.5, j}$ 。此外，我们将使用速记符号 $(uv)_i$ 来表示 $u_{i, j}$ 。我们还将使用指数来表示那些不直接表示，而是从其两个邻近隐式计算的数量。比如说。

$$u_{pi+.5, j} (u_{pi, j} + u_{pi+1, j}) / 2$$

在下面的伪代码中，我们对方程(1)和(2)进行了时间离散，并使用欧拉法进行了自适应步长的正向求解。步长 $t$ 的设置是为了确保速度不超过每个时间步长的一个像素。

```

proc UpdateVelocities( $M, u, v, p$ ):
  ( $u, v$ ) = ( $u, v$ ) +  $t \cdot h$ 
   $t \leftarrow \min(t, \frac{1}{\max(|u|, |v|)})$ 
  for  $t$  = 0 to 1 by  $t$  do
    for all cells  $(i, j)$  do
       $A = u_{i, j}^2 + u_{i+1, j}^2 + (uv)_{i+.5, j} (uv)_{i+.5, j+.5}$ 
       $B = (u_{i+.5, j} + u_{i+.5, j+.5})^2 + (u_{pi, j} + u_{pi+.5, j})^2 + (u_{i+.5, j} + u_{i+.5, j+.5})^2$ 
       $u_{i+.5, j} = \frac{2}{B} (A + \mu B + p_{pi, j} + p_{pi+.5, j})$ 
       $v_{i+.5, j} = \frac{2}{B} (A + \mu B + p_{pi, j} + p_{pi+.5, j})$ 
    end for
    ( $u, v$ ) = ( $u, v$ )
    强制执行边界条件( $M, u, v$ )
  END
FOR END
proc

```

EnforceBoundaryConditions()程序简单地将不在湿区掩码中的任何像素的边界上的velocity设置为零。

##### 4.3.2 放松

按照Foster等人[10]的做法，我们还在每个时间步长后放松速度场 $u$   $x$  +  $y$ 的发散，直到它小于某个公差 $T$ ，方法是将流体重新分配到邻近的网格单元。在我们实现以下伪代码时，我们使用了 $N = 750$ ，和 $0.01 \leq \epsilon \leq 1$ 。

**proc RelaxDivergence(u, v, p):**

```

t = 0
重复
  (u, v) = (u, v)
  max 0
  对所有单元格 (i, j) 做
    (ui+1,j, ui,j+1, vi,j+1, vi+1,j) =
      (ui,j + pi,j, ui,j + pi,j, vi,j + pi,j, vi,j + pi,j)
  结束
  (u, v) = (u, v)
  t = t + 1
直到 t = T 或 t = N

```

**结束程序**

#### 4.3.3 边缘变暗

在干湿交替的笔触中，颜料往往会在画布上迁移。随着时间的推移，内部向边缘移动。这种现象发生在任何蒸发的悬浮液中，其中的接触线水滴被表面张力钉在原地[3]。由于这种几何约束，在边界附近蒸发的液体必须由内部的液体来补充，从而导致向外流动。这种流动带着颜料，导致水蒸发时边缘变黑。在我们的模型中，我们模拟这种流动是通过减少

靠近湿区掩膜边缘的水压。

FlowOutward()程序在每个时间步骤中，根据细胞与湿区掩膜边界的距离，从每个细胞中去除一定量的水，越靠近边界的细胞去除的水越多。与边界的距离是通过首先对湿区掩膜  $M$  进行  $K$  核的高斯模糊来近似的，然后根据产生的高斯模糊图像  $f$  的值从每个单元中去除一定量的水。

$$p = p(1 - M) \quad (3)$$

在我们的例子中， $K = 100.010.05$ 。

图2b显示了一个边缘变暗效果的例子。

#### 4.4移动颜料

颜料在浅水层内的移动是由上面的水的速度场  $u, v$  计算出来的。在模拟的这一部分，我们根据流体从细胞中流出的速度，将颜料从每个细胞中分配到它的邻居。

**proc MovePigment(M, u, v, g<sup>1</sup>, ..., g<sup>n</sup>):**

```

t = dmax(1, j)
对每个颜料 k 做
  for t = 0 to 1 by t do
    for all cells (i, j) do
      gi+1,j = gi,j + max(0, ui+1,j gi,j)
      gi,j+1 = gi,j + max(0, vi,j+1 gi,j)
      gi,j = gi,j - max(0, ui+1,j gi,j) - max(0, vi,j+1 gi,j)
    end for
  end for
  g = g

```

**结束时，结束时，结束程序**

#### 4.5 颜料的吸附和解吸

在模拟的每一步，颜料也以一定的速度被颜料沉积层吸附，并以另一种速度解吸回流体中（其过程类似于Dorsey等人[8]对流体流动引起的风化模式的描述）。该密度  $p^k$  和染色力  $w^k$  是影响每种颜料  $k$  被纸张吸附和解吸的速度的标量。

造粒决定  $a$  了纸张高度  $h$  的影响程度

吸附和解吸。

**proc TransferPigment(g<sup>1</sup>, ..., g<sup>n</sup>, d<sup>1</sup>, ..., d<sup>n</sup>):**

```

对每个颜料 k 做
  对于所有单元格 (i, j)，如果
    Mi,j = 1，则
    做
      下来 gi,j = (1 - pi,j) gi,j
      up di,j = (1 + pi,j) di,j
      如果 (di,j > 1)
        然后 向下最大 (0, 1 - di,j)
        如果 (gi,j > 1)
          那么，向上最大 (0, gi,j)
          di,j = di,j + down up
          gi,j = gi,j + up down
      end if
    end for
  END
FOR END
proc

```

#### 4.6 回流：通过毛细管层扩散水分

只有当一滩水缓慢地扩散到一个正在干燥但仍然潮湿的区域时，才会发生回流现象[37]。在一个潮湿的区域，唯一存在的水是在纸的孔隙中。在这种情况下，流动是由毛细管效应主导的，而不是像浅水方程那样由动量主导。

在回流模拟中，水以吸收率从上面的浅水层吸收，并通过毛细管层扩散。如果任何一个单元的饱和度超过阈值  $a$ ，那么湿区掩膜就会扩大到包括该单元。通过这种方式，纸张内的毛细作用可以使水坑扩散。各个像素的细胞容量的变化导致了不规则的分支模式。影响这一过程的其他参数有： $E$ ，一个像素在向其邻居扩散之前必须具有的最小饱和度，以及，一个饱和度值，低于这个值，一个像素将不会得到扩散。

**proc SimulateCapillaryFlow(s, M):**

```

for all cells (i, j) do
  if (Mi,j > 0) then
    Si,j = Si,j + max(0, min( , ci,j - Si,j))
  end if
end for
S = S
对每个单元 (i, j) 做
  for each cell (k, ) neighbors(i, j) do
    如果 Si,j > E 和 Si,j > Sk 和 S > Sk 那么
      S = max(0, min(Si,j - Sk, ck - Sk))
    end if
  end for
  S = S
  对于所有单元 (i, j)，如果 Si,j > a，则做
    Mi,j = 1
  end if
END
FOR END
proc

```

## 4.7 干刷效果

当画笔以适当的角度涂抹时，干刷效果就会出现，而且干到只打湿纸张表面的最高点。我们通过将高度小于用户定义的阈值的任何像素从湿区掩码中排除来模拟这种效果。图1a中显示了一个模拟干刷的例子。

## 5 渲染颜料层

我们使用Kubelka-Munk (KM) 模型[14, 20]来进行玻璃层的光学合成。(同样的模型也被Dorsey和Hanrahan用来模拟光线通过铜锈层的传输[7])。

在我们对KM模型的使用中，每一种颜料都被分配了一组吸收系数 $K$ 和散射系数 $S$ 。这些系数是波长的函数，并控制着颜料层中每一单位距离所吸收和散射回来的能量的比例。在我们的实现中，我们对 $K$ 和 $S$ 各使用三个系数，代表每个数量的 $RG$  $B$ 分量。

### 5.1 规定颜料的光学特性

在KM理论的典型应用中，一个特定着色剂层的 $K$ 和 $S$ 系数是通过实验确定的，使用已知厚度的层的光谱测量。然而，在我们的应用中，我们发现让用户以交互方式指定 $K$ 和 $S$ 系数要方便得多，即选择白色和黑色背景上的“单位厚度”的颜料的理想外观。鉴于这两个用户选择的

$RGB$ 颜色 $R_w$ 和 $R_b$ ，分别， $K$ 和 $S$ 值可以通过KM方程的简单反转计算出来。

$$S = \frac{1}{b} \ln \frac{b(1 + aR_w) + (a-1)}{b(1 + aR_b) + (a-1)}$$
$$K = S(a-1)$$

其中

$$a = \frac{1}{\frac{R_w}{R_b} + \frac{R_b R_w + 1}{2}}, \quad b = pa \frac{2}{1 + R_b}$$

上述计算是独立应用于 $S$ 、 $K$ 、 $R_w$ 和 $R_b$ 的每个颜色通道。为了避免任何除以0，我们要求每个颜色通道的 $0 < R_b < R_w < 1$ 。这个限制即使对不透明的颜料来说也是合理的，因为用户只是通过一个薄层来指定反射的颜色，它至少应该是部分透明的。虽然对于大多数指定颜色的有效组合，计算出的 $K$ 和 $S$ 值都在0到1的合法范围内，但对于某些非常饱和的输入颜色，通过这种方法计算出的吸收或散射系数实际上可能超过1某些颜色通道的值。尽管这样大的 $K$ 或 $S$ 值对于任何物理颜料来说显然是不可能的，但我们没有注意到在我们的模拟中允许这样的“超范围”值所带来的任何不良影响。这种情况有点类似于允许“阿尔法”不透明度位于0另1,一种非物理效果的范围之外，这种效果有时是有用的[15]。

我们发现，这种指定颜料的方法对于创造各种逼真的颜料来说是相当充分的（见图5）。此外，这种方法比采取其他方式所需的那种极其仔细的测量要容易得多。通过在黑色和白色上指定颜色，用户可以很容易地创造出不同类型的颜料。作为例子。

- 不透明的涂料，如印度红，在白色和黑色上都表现出类似的颜色。这种涂料在与其颜色相同的波长中具有高散射性，而在互补的波长中具有高吸收性。

透明的油漆，如Quinacridone

- Rose，在白色上看起来是彩色的，在黑色上几乎是黑色的。这种涂料在所有波长中都具有低散射性，而在与其颜色互补的波长中具有高吸收性。
- 干涉涂料，如干涉丁香，在白色上显示为白色（或透明），在黑色上显示为彩色。这种颜料在与其颜色相同的波长中具有高散射性，而在所有波长中具有低吸收性。这样的颜料实际上是通过涉及光波相位的干涉效应来获得其颜色的，Gondek等人[11]已经对此进行了精确的建模。虽然我们的简单模型没有模拟相位效应，但它还是能够产生与水彩画中使用的干涉颜料外观相似的颜色。

我们的方法还可以很容易地模拟在黑色上表现出与白色稍有不同色调的真实涂料，例如汉萨黄。图5 (i) 显示了这种颜料在黑色和白色背景上的模拟色块。

### 5.2 层的光学合成

给定厚度为 $x$ 的颜料层的散射和吸收系数 $S$ 和 $K$ ，KM模型允许我们计算通过该层的反射率 $R$ 和透射率 $T$ [20]。

$$\frac{R - \sinh bSx}{T - b} = c, \quad \text{其中 } c = \frac{a \sinh bSx + b \cosh bSx}{a \sinh bSx + b \cosh bSx}$$

然后我们可以使用Kubelka的光学合成方程[20, 21]来确定两个相邻层的整体反射率 $R$ 和透射率 $T$ ，其反射率分别为 $R_1, R_2$ 和 $T_1, T_2$ 。

$$R = R_1 + \frac{1}{1 + RR_{12}} \frac{2T_1T_2}{1 + TT_{12}}, \quad T = \frac{1}{1 + RR_{12}} \frac{TT_2}{1 + TT_{12}}$$

这个计算对每个额外的釉面都要重复进行。然后用整体反射率 $R$ 来渲染像素。

对于含有一个以上厚度为 $x^1$ ， $x^2$ 的“颜料”的个别层，每个颜料 $k$ 的 $S$ 和 $K$ 系数为与该颜料的相对厚度 $x^k$ 成比例加权。颜料层 $x$ 的整体厚度被认为是各个颜料厚度的总和。

在我们的流体模拟中（见第4节），我们用 $g^k$ 表示浅水层中的颜料浓度， $d^k$ 表示沉积在纸上的颜料浓度。这些值相加，计算出库贝尔卡-蒙克方程使用的厚度参数 $x^k$ 。

### 5.3 颜料的例子

图5显示了例子中使用的调色板，每一种颜料都是在黑色条纹上画出的色块。我们为这些颜料选择的颜色是基于对实际涂料在黑色和白色背景上的颜色的相当随意的观察。 $K$ 和 $S$ 系数是由这些颜色按照章节中概述的程序推导出来的，随着5.1.一层颜料厚度的增加，它的颜色在色彩空间中呈现出复杂的曲线。例如，图6显示了在白色和黑色背景上涂抹“汉萨黄”所能得到的颜色范围。请注意两条曲线之间色调的差异，以及每条曲线上色调和饱和度的变化。这种复杂性是赋予这些颜料丰富外观的品质之一。

### 5.4 关于库贝尔卡-蒙克模型的讨论

在我们尝试的所有情况下，知识模型似乎都给出了非常合理和直观的结果。一方面，这些结果并不令人惊讶，因为考虑到知识模型是专门为类似于水彩的情况而设计的，其中有多层颜料层散射和吸收光线。然而，它是。

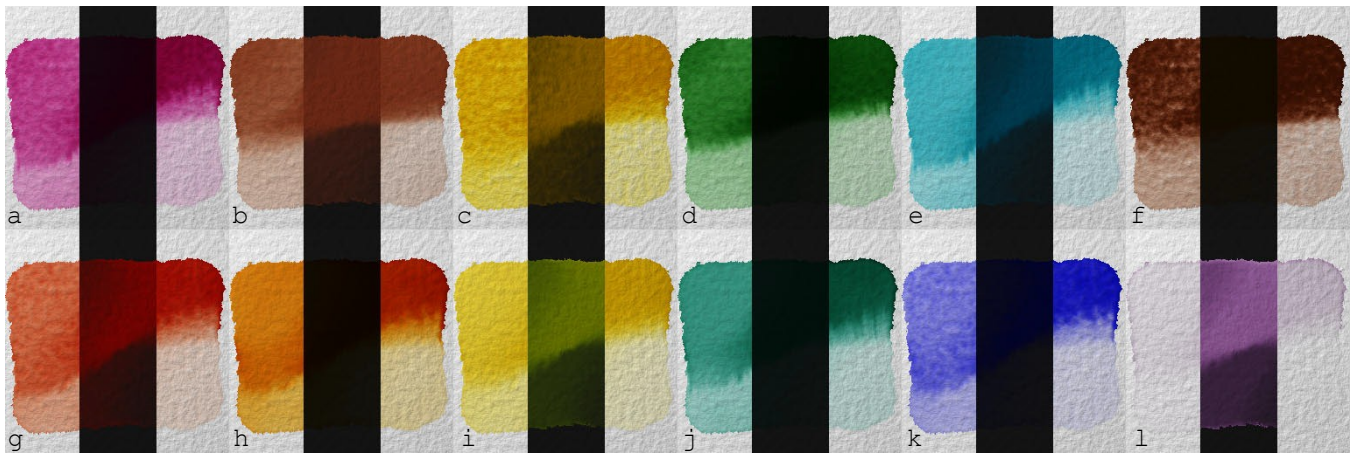


图5 各种合成颜料。  
这些色板都是用相同的初始条件，更厚的上半部分的颜料，以及额外的水在左上角和右下角。各个色卡的唯一变化是颜料的光学和物理特性参数，如右图所示。色板在黑色条纹上涂抹，以区别...遮盖较不透明的颜料，如"印度红"(b)从更透明的诸如"辉煌的橙色"(h)等。

颜料	克	公	$K_b$	$\bar{A}A$	$\bar{A}A$	$S_b$	$p$	$w$	
a "Quinacridone Rose"	0.22	1.47	0.57	0.05	0.003	0.03	0.02	5.5	0.81
b "印度红"	0.46	1.07	1.50	1.28	0.38	0.21	0.05	7.0	0.40
c "镉黄"	0.10	0.36	3.45	0.97	0.65	0.007	0.05	3.4	0.81
d "妓女绿"	1.62	0.61	1.64	0.01	0.012	0.003	0.09	1.0	0.41
e "蔡兰蓝"	1.52	0.32	0.25	0.06	0.26	0.40	0.01	1.0	0.31
f "烧焦的琥珀"	0.74	1.54	2.10	0.09	0.09	0.004	0.09	9.3	0.90
g "镉红"	0.14	1.08	1.68	0.77	0.015	0.018	0.02	1.0	0.63
h "辉煌的橙色"	0.13	0.81	3.45	0.005	0.009	0.007	0.01	1.0	0.14
i "汉萨黄"	0.06	0.21	1.78	0.50	0.88	0.009	0.06	1.0	0.08
j "Phthalo Green"	1.55	0.47	0.63	0.01	0.05	0.035	0.02	1.0	0.12
k "法国群青色"	0.86	0.86	0.06	0.005	0.005	0.09	0.01	3.1	0.91
l "干扰性丁香"	0.08	0.11	0.07	1.25	0.42	1.43	0.06	1.0	0.08

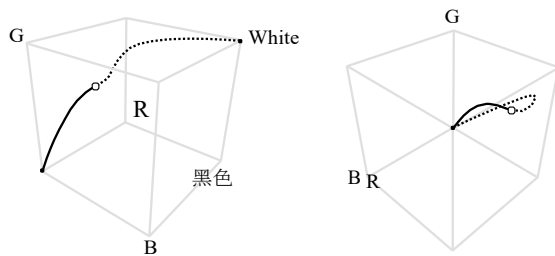


图6  
在黑色（实线曲线）和白色（虚线曲线）上合成不同厚度的"汉萨黄"所能得到的颜色范围。两条曲线的交汇点是 $R_{\infty}$ ，即无限厚的一层的颜色。在左边，RGB立方体被透视；在右边，我们直接从亮度轴看下去，显示出两条曲线之间的色调差异。

值得注意的是，在我们的情况下，知识管理的基本假设中有许多细微之处，充其量只能部分满足。

1. 所有着色剂层都浸泡在相同折射率的介质中。事实上，这个假设在"空气到颜料层"和"颜料层到纸张"的边界处都被违反了（尽管已经提出了一个相当简单的修正项[18]，可以用来提高准确性）。
2. 颜料颗粒的方向是随机的。这个假设对大多数水彩画颜料来说是满足的，尽管不是全部。例如，金属漆颜料大多有水平的片状物。
3. 照明是漫射的。我们模拟的水彩画在所有的照明和观看条件下显然不会看起来完全正确。Duntley[20]有一个更普遍的理论，有四个参数而不是两个，可以说明更普遍的照明条件。
4. KM方程一次只适用于一个波长。荧光涂料违反了这一假设。
5. 不同的颜料之间，或颜料和介质之间没有化学或电的相互作用，这将

导致颜料颗粒的结块和不均匀的颗粒大小。这些假设对于大多数水彩画颜料来说是被违反的。

综上所述，鉴于水彩违反了模型的一些基本假设，KM模型看起来工作得很好，这一事实实际上可以被认为是非常令人惊讶的。我们怀疑，虽然该模型的结果在物理上可能不是很准确，但它们至少提供了非常合理的物理近似值，这对许多应用来说似乎是相当充分的。

## 6 应用

在本节中，我们简要讨论计算机生成水彩的三种不同应用：交互式绘画、自动图像"水彩化"和三维非逼真渲染。

### 6.1 水彩画的交互式绘画

我们编写了一个交互式应用程序，允许用户为水彩模拟器绘制初始条件。用户为模拟器设置一个或多个染料，每个染料都有颜料、水和湿区掩码的子层。所有的染料都有一个参考图像和一个阴影纸的纹理。有滑块控制来调整每个染料的物理参数（包括粘性阻力 $t_i$ 、边缘变暗和内核大小 $K$ ）以及迭代模拟的次数。

染料的颜料通道由染料中的彩色图像表示。每个颜料都是用高斯强度下降的圆形画笔独立绘制的。画笔的大小、笔刷和整体强度参数是可以调整的。与表面相关的颜料调色板可以通过指定每个颜料在黑色和白色上的颜色来定义，如第5.1节所述，使用HSV颜色选择器，或者通过从文件中加载预定义的颜料。对于每一种颜料，密度 $p$ 、染色力 $w$ 和颗粒度 $\sigma$ 也可以用滑块来控制。

湿区遮罩可以直接使用类似的画笔来画，或者通过使用"智能剪刀"[27]从参考图像中选择区域。用户可以通过设置干刷的效果来实现



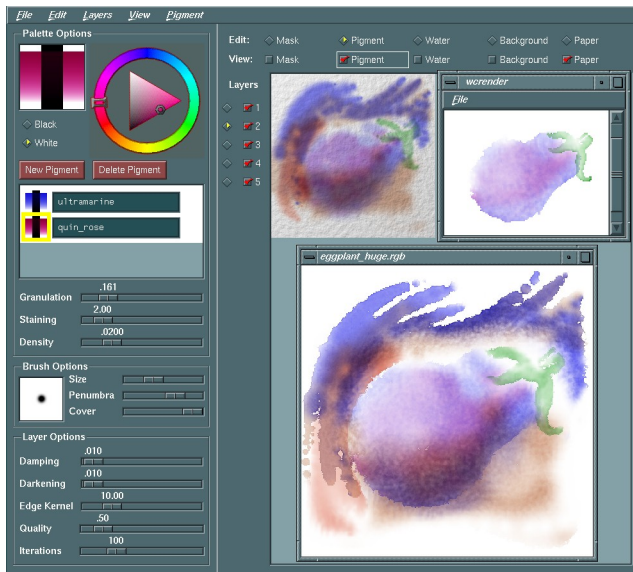


图7 一个交互式绘画应用。在顶部中心的是用户绘制的初始条件；右上角是水彩画。正在进行的模拟，显示了该画的五个釉中的两个。大图是完成的画作。

允许画笔接触纸张的深度。

虽然我们的水彩模拟器运行速度太慢，无法进行交互式绘画，但使用KM模型合成许多颜料的釉料是实时可行的，并为用户提供了关于模拟产生的颜色的宝贵反馈。参考图像、纸张纹理和一组釉料及其子层可以独立切换，并以任何组合显示。另一个有用的功能是一个渲染窗口，显示模拟器在一组釉料（可能按比例缩小）上的运行进度。低分辨率的模拟被放大以显示在观察窗口中，模拟器的每一帧动画通常在几分之一秒到几分钟内显示。图7是应用程序的截图，显示了几个处于不同完成阶段的模拟。

## 6.2 自动图像“水彩化”

我们建立的另一个应用程序允许将彩色图像自动转换为水彩插图，一旦关键元素的哑光被提取出来，并且选择了一组有序的颜料，每个釉面有一种颜料。在我们的测试中，我们使用一个商业绘画程序快速生成这些区域。在我们的例子中，我们也是通过手工选择颜料的，尽管为了进一步自动化，颜料的选择可以通过优化过程来计算[31]。

转换分两个阶段进行：分色（图8），计算每块釉料中颜料的理想分布，以产生所需的图像；笔触规划（图9），考虑到媒介的行为，通过添加水和颜料的笔触，试图重新创造所需的颜料分布。其结果是一个接近原作的图像，但具有水彩画的流动模式和纹理。

**分色。**分色是通过对每一种颜料的离散厚度集的暴力搜索来计算的。给定一个 $n$ 种颜料的有序列表，每种颜料的厚度范围首先被划分为 $m$ 个步骤，在 $R_i$ 和 $\pi_i$  Kubelka-Munk参数的六维空间中使用曼哈顿距离的二进制细分。使用KM光学合成模型，然后为每一个 $m^n$ 组合计算出一个复合颜色，并根据其RGB颜色值将颜色存储在一个三维树中。（该树被修剪，因此，在该树上的颜色之间的差值为0。

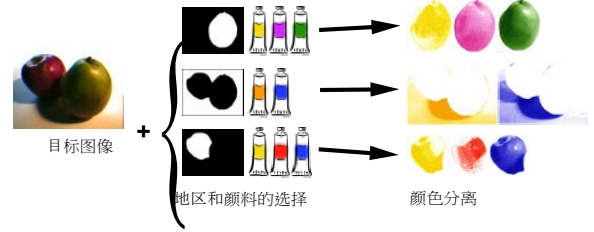


图 分色过程概述8。

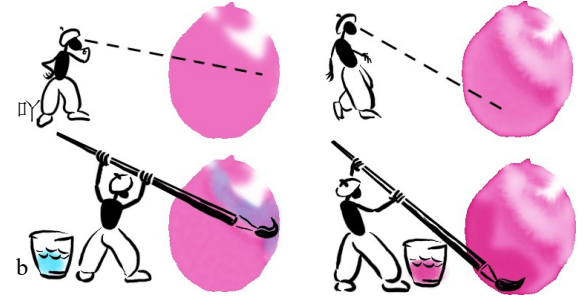


图9 画笔规划。在给定的时间间隔内，规划者会识别出含有过多颜料的区域（a），并通过添加白水（b）来稀释它们。计划者还可以通过添加颜料水（d）来弥补颜料的不足（c）。

颜色小于1/255)。对于图10和14所用的分离， $m=20$ ， $n=3$ 。颜色分离是通过搜索每个像素的树来计算的，以找到产生最接近所需颜色的颜料组合。这些颜色被储存在一个叫做目标釉的图像中。

**笔触规划。**画家可以通过仔细观察画笔和画纸的相对湿度来控制水洗中颜料的浓度和流向，要知道水的扩散会带着颜料，并倾向于使其变薄。同样，我们可以通过增加颜料的笔触来控制釉面，我们可以通过增加或减少颜料的水压来控制流动的方向。

整个过程是通过在模拟过程中以用户指定的时间间隔（在我们的例子100中为30步）反复查询和操作釉面的状态，使用用户控制的参数 $g$ 、 $c_g$ 和 $c_p$ 。在我们的例子中，下面的步骤在和2次5之间重复，我们使用了以下数值。

0.01  $g$  0.2,  $c_g = g$ , and  $c_p = 1.0$ . At each step, the current pigment distribution is compared to the target glaze, ignoring high frequency details, by performing a low-pass filter on the difference between the two. Then one of two actions is performed:

1. 在目前的釉面没有足够的颜料的地方（超过 $g$ ），用 $g$ 增加 $g$ ，用 $c_g$ 增加 $p$ 。
2. 在目前的釉面有太多的颜料的地方（超过 $g$ ），用 $c_p$ 来增加 $p$ 。

作为最后一步，高光通过从用户定义的哑光区域去除颜料而产生的。这一步类似于艺术家为获得类似效果而使用的“抬出”技术。图10显示了最终的结果，图11显示了在添加釉料的过程中绘画的外观。

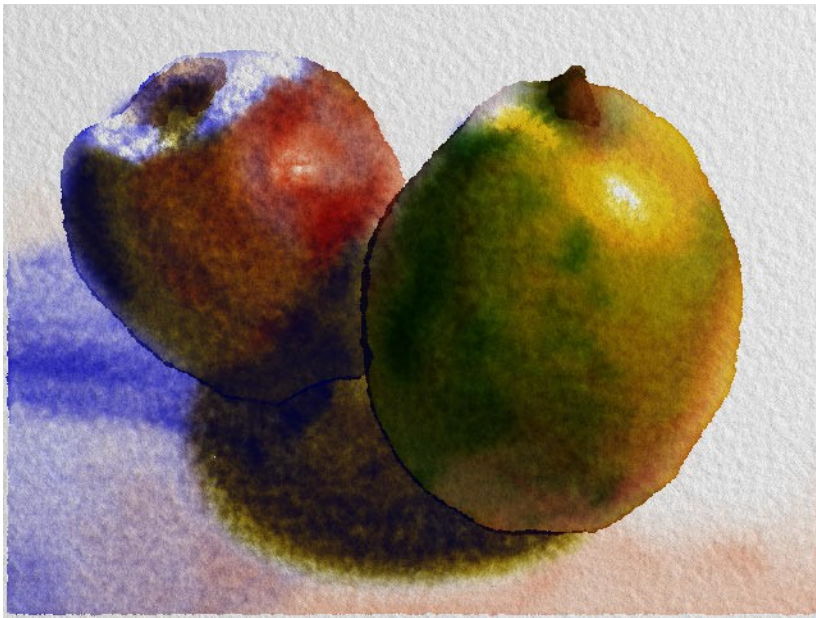


图10

用劣质摄像机拍摄的低分辨率图像（上图）的自动水彩化（左图）。完成的绘画由11种釉料组成，总共使用了2750次模拟器的迭代，在MHz 133SGI R4600处理器7上以640像素480的分辨率渲染了几个小时。

### 6.3 3D模型的非写实渲染

上一节的自动水彩化的一个直接的扩展是直接从三维模型中进行非写实的水彩渲染。

给定一个三维几何场景，我们自动生成隔离每个物体的哑光。这些哑光被用来作为水着色过程的输入，同时作为目标图像的更传统的"逼真"的场景渲染。颜料的选择和笔触的规划参数是由用户提供的。如图所示，即使12,是非常原始的"逼真"图像也可以因此而转化为具有丰富纹理的绘画（如图14所示）。图13显示了仅用几十个球体生成的云的绘画动画的几帧。

### 7 未来的工作

**其他效果。**有几种技术我们没有建模，比如喷溅和干刷技术的某些方面。模拟干笔画中毛发图案外观的方法之一是将毛笔[36]与水彩模拟器整合。将水彩与其他媒介（如钢笔和墨水）结合起来也是很有趣的。

**自动渲染。**我们想进一步探讨在更广泛的意义上对图像进行自动水彩化的想法。一个自动指定湿润区域的算法将特别有用，以便正确放置硬边缘，还有一个分色算法可以计算出图像不同区域使用的最佳颜料调色板[31]。其他的可能性包括自动识别和生成使用干刷、喷溅、刮擦和其他技术的纹理。

**一般化。**我们的模型将回流和湿中带湿的流动模式视为两个独立的过程。然而，在真实的水彩画中，它们只是一系列效果中的两个极端，它们之间的差别仅仅是纸张的湿润程度。一个能够整合这两种效果的模型，以湿度为参数，将是一个重大的改进。

**动画问题。**当一个动画序列被逐帧转换为水彩时，产生的动画会表现出某些时间上的假象，如"淋浴门"效应[26]。在未来，我们希望开发一个系统，考虑到时间上的一致性问题，并允许用户控制这些

文物。

### 鸣谢

图12-14的三维目标动画是由Siang Loo制作的。我们还要感谢丹尼尔-史密斯艺术家材料公司的罗恩-哈蒙将我们与现实联系起来；感谢约翰-休斯、艾伦-巴尔、兰迪-勒韦克、迈克尔-黄和亚当-芬克尔斯坦的许多有益讨论；感谢丹尼尔-韦克斯勒和亚当-谢弗对图片的协助。

这项工作得到了Alfred P. Sloan Research Fellowship (BR-3495), NSF Presidential Faculty Fellow award (CCR- 9553199), ONR Young Investigator Award (N00014-95-1-0728) 和 Augmentation Award (N00014-90-J-P00002) 的支持，以及微软的工业礼物。

### 参考文献

- [1] Jim X. Chen和Niels da Vitoria Lobo.使用Navier-Stokes方程对有移动障碍物的流体进行交互式速率模拟。《图形模型与图像处理》, 57(2):107-116, March 1995.
- [2] Tunde Cockshott, John Patterson, and David England.对油漆的纹理进行建模。《计算机图形论坛》(Eurographics '92), 11 (3) : 217-226, 9月 1992.
- [3] Robert D. Deegan, Olga Bakajin, Todd F. Dupont, Greg Huber, Sidney R. Nagel, and Thomas A. Witten.蒸发水滴中的接触线沉积。James Franck研究所 (芝加哥大学) 预印本, 10月 1996.
- [4] 珍妮-多比 (Jeanne Dobie)。《让色彩歌唱》。Watson-Guptill, 1986.
- [5] Debra Dooley和Michael F. Cohen.三维几何模型的自动插图。线条。《计算机图形学》, 24 (2) : 77-82, 3月 1990.
- [6] Debra Dooley和Michael F. Cohen.三维几何模型的自动插图。表面。在Visualization '90会议上, 第307-314页。十月 1990.
- [7] Julie Dorsey和Pat Hanrahan.金属青铜器的建模和渲染。在SIGGRAPH '96论文集, 第387-396页。1996.
- [8] 朱莉-多尔西, 汉斯-科林-佩德森, 和帕特-汉拉汉。流动和外观的变化。在SIGGRAPH '96论文集, 第411-420页。1996.
- [9] Gershon

Elber.通过等参数曲线的覆盖进行线条艺术渲染.*IEEE 可视化和计算机图形交易*, 1 (3) : 231-239, 9月 1995.



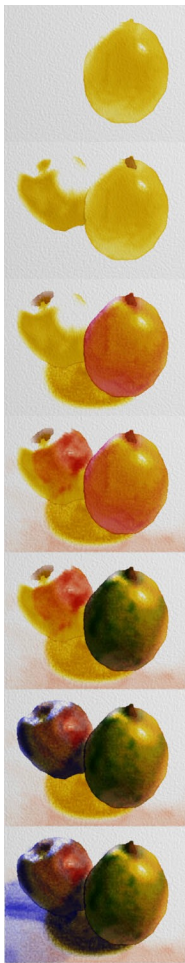


图10的效果图中的步骤11。

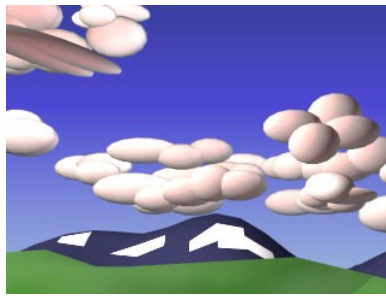
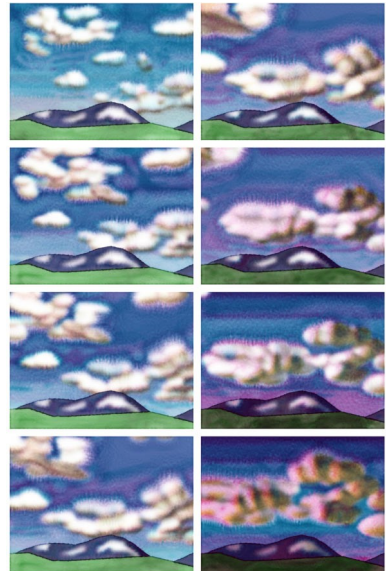


图 图中的12目标图像 14.



图为移动云层的非写实动画中的几帧 13。



图：图中一帧的细节14 13.

- [10] Nick Foster和Dimitri Metaxas. 液体的逼真动画。在《图形界面'96》, 第204-212页。1996。
- [11] Jay S. Gondek, Gary W. Meyer, and Jonathan G. Newman. 波长相关的反射函数。在《SIGGRAPH '94 Proceedings》, 第213-220页。1994。
- [12] 郭青莲. 生成逼真的书法字。《IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences》, E78A(11):1556-1558, November 1996。

- [14] Chet S. Haase 和 Gary W. Meyer. 为逼真的图像合成建模的颜料材料。《ACM Trans. on Graphics》, 11(4):305, October 1992。
- [15] Paul Haeberli 和 Douglas Voorhies. 通过线性内插和外推进行图像处理。《IRIS宇宙杂志》, (28), 8月 1994。
- [16] Paul E. Haeberli. 绘画的数字。抽象图像表示。在《SIGGRAPH '90论文集》, 第207-214页。1990。
- [17] 罗恩·哈蒙, 个人通信。技术经理, 丹尼尔·史密斯艺术家材料公司。1996。
- [18] D.B. Judd和G. Wyszecki. 《商业、科学和工业中的色彩》。John Wiley and Sons, New York, 1975。
- [19] Michael Kass和Gavin Miller. 用于计算机图形的快速、稳定的流体动力学。在《SIGGRAPH '90论文集》, 第49-57页。1990。
- [20] G. Kortum. 《反射率光谱学》。Springer-Verlag, 1969。
- [21] P. Kubelka. 对强光散射材料的光学的新贡献, 第二部分: 非均质层。《J. Optical Society》, 44:330, 1954。
- [22] John Lansdown和Simon Schofield. 富有表现力的渲染。非逼真技术的回顾。《IEEE 计算机图形和应用》, 15 (3) : 29-37, 5月 1995。
- [23] 沃尔夫冈-莱斯特计算机生成的铜板。《计算机图形论坛》, 13 (1) : 69-77。1994。
- [24] James A. Liggett. 非稳态流动的基本方程。《Open Channels中的非稳定流动》, 卷1, 编辑。K. Mahmood和V. Yevjevich, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1975。
- [25] 拉尔夫-迈尔。《艺术家的材料和技术手册》。企鹅出版社, 版本5。1991。
- [26] Barbara J. Meier. 动画的绘画式渲染。在《SIGGRAPH '96论文集》, 第477-484页。1996。
- [27] Eric N. Mortensen and William A. Barrett. 图像合成的智能剪刀。在《SIGGRAPH '95论文集》, 第191-198页。1995。
- [28] F. Kenton Musgrave, Craig E. Kolb, and Robert S. Mace. 侵蚀的分形地形的合成和渲染。在《SIGGRAPH '89论文集》, 第41-50页。1989。
- [29] 肯-佩林一个图像合成器。在《SIGGRAPH '85论文集》, 第287-296页。7月 1985。
- [30] 范斌. 富有表现力的笔触。《CVGIP: Graphical Models and Image Processing》, 53(1), 1991。
- [31] Joanna L. Power, Brad S. West, Eric J. Stollnitz, and David H. Salesin. 将彩色图像复制成双色调。在《SIGGRAPH '96论文集》, 第237-248页。1996。
- [32] 唐-兰金掌握水彩的上釉技术。Watson-Guptill, 1986。
- [33] Takafumi Saito and Tokiichiro Takahashi. 3D形状的可理解渲染。《Computer Graphics》, 24(4):197-206, August 1990。
- [34] 大卫-斯莫尔通过对扩散、颜料和纸张纤维进行建模来模拟水彩。在《SPIE '91的会议上》。2月 1991。
- [35] 雷-史密斯。《The Artist's Handbook》。Alfred A. Knopf, 1987。
- [36] 史蒂夫-斯特拉斯曼毛茸茸的刷子。在《SIGGRAPH '86论文集》, 第225-232页。八月 1986。
- [13] Qinglian Guo and T. L. Kunii. 对苏米的漫反射绘画进行建模。In T. L. Kunii, editor, 《IFIP Modeling in Computer Graphics》. 1991。



- [37] Zoltan Szabo. *创意水彩技术*. Watson-Guptill, 1974.
- [38] C.B. Vreugdenhil. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer学术出版社。1994.
- [39] Georges Winkenbach和David H. Salesin。计算机生成的笔墨插图。在*SIGGRAPH '94论文集*，第91-100页。1994.
- [40] Georges Winkenbach和David H. Salesin。用钢笔和墨水渲染自由形状的表面。在*SIGGRAPH '96论文集*，第469-476页。1996.
- [41] Steven P. Worley. A cellular texturing basis function. 在*SIGGRAPH '96论文集*，第291-294页。1996.