

DOI: 10.19724/j.cnki.jmju.2022.05.004

基于整体防护的 SIR 传染病模型的分析与预测

陈婉婷,王火莲,郑仙芳,伍慧玲

(闽江学院数学与数据科学学院(软件学院),福建福州 350108)

摘要: 建立考虑整体防护因素的 SIR 传染病模型,运用数学分析的方法得到传染病不扩散的充分条件。对所建立模型进行改进,运用微分方程稳定性理论证明改进模型平衡点的稳定性,并通过数值模拟说明所得的结论。

关键词: SIR 传染病模型; 整体防护; 稳定性分析

中图分类号: O175.1

文献标识码: A

文章编号: 2096-9562(2022)05-0026-07

Analysis and Prediction of SIR Infectious Disease Model Based on Overall Protection

CHEN Wanting, WANG Huolian, ZHENG Xianfang, WU Huiling

(School of Mathematics and Data Science(Software College), Minjiang University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

Abstract: A SIR infectious disease model which takes the overall protection as an important factor is established. The sufficient conditions which guarantee the indiffusion of the infectious diseases was obtained by careful analysis. Moreover, the model is improved, the stability of the equilibrium point of the new model is studied and the results are illustrated by numerical simulation.

Key words: SIR infectious disease model; overall protection; stability analysis

0 引言

自古以来,传染病的出现及传播都给人类带来了巨大的灾难。例如,2009 年蔓延至全球的“甲型流感 H1N1”、2002 年的传染病疫潮 SARS 以及 2019 年至今的新型冠状病毒肺炎疫情。无论是人类生命健康安全,还是社会的经济稳健发展,都遭受到了这些传染病严重的威胁与影响。现阶段,世界各国均处于新冠疫情的复杂形势下,如何从根源上打好这场疫情防控攻坚战尤为关键,而弄清楚疾病传播的过程及影响因素,是达到最终目标的首要任务。因此,为了研究传染病的影响,不少科研工作者利用数学模型来模拟传染病的传播过程,有些还在原有模型的基础上进行改进,以得到更好的研究效果。早在 1760 年,BERNOULLI 就通过数学模型来研究天花^[1]。20 世纪二三十年代,KERMACK 分别建立了典型的 SIR 和 SIS 传染病模型^[2-3]。随后,有关传染病的

收稿日期: 2021-12-07

基金项目: 福建省大学生创新创业训练计划项目(S202110395039)

通信作者: 伍慧玲(1986—),女,福建惠安人,讲师,博士,主要研究方向为生物数学、非线性分析, huilingwu@mju.edu.cn。

数学模型受到科学家们的广泛关注^[4-9]。最近,张艳霞等在假设人口总数 N 不变的情况下,建立了如下改进的 SIR 传染病模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i - mi \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ \frac{dr}{dt} = \mu i \\ \frac{dq}{dt} = mi \end{cases},$$

其中, i, s, r, q 分别表示感染者、未感染者、治愈者和因病死亡者的数量, λ, μ, m 分别表示日接触率、治愈率和死亡率^[10]。通过对以上模型进行分析,得到新冠肺炎不扩散的条件是 $s_0 < (\mu + m) / \lambda$ 。

在这几年的疫情防控中,随着疫苗接种率的提高以及医学技术的发展,新冠肺炎的死亡率已经大大降低。然而,人们是否采取防护措施,仍然直接或间接地影响着传染病的传播,部分国家防护措施不到位或者缺乏防护意识,导致传染病肆意传播。因此,在张艳霞等提出的模型^[10]的基础上,剔除因病死亡人数的影响,建立考虑整体防护因素的 SIR 传染病模型,借此分析整体防护对新冠病毒传播的影响。

此外,注意到模型中假设人口总量 N 不变是不太符合实际情况的。为了更贴近实情,还将考虑自然出生率和死亡率等要素,对所建立模型进行改进,并分析整体防护对改进模型平衡点稳定性的影响,以说明整体防护在疫情防控中的作用。

1 SIR 模型的建立

1.1 符号说明

本节用的符号见表1。

表1 SIR 模型的符号说明

Tab.1 Symbolic description of SIR model

序号	符号名称	符号描述
1	t	时间
2	$s(t)$	未感染者数
3	$i(t)$	感染者数
4	$r(t)$	治愈者数
5	$\alpha (0 < \alpha < 1)$	整体防护系数
6	λ	感染者日接触率
7	$\lambda(\alpha) = \lambda(1 - \alpha)$	整体防护情况影响下的感染者日接触率
8	μ	日治愈率
9	N	人群总人数

1.2 模型假设

- 1) 假设人群由未感染者、感染者和治愈者构成, 即 $s(t) + i(t) + r(t) = N(t)$;
- 2) 设整体防护系数与感染者日接触率之间的关系为: $\lambda(\alpha) = \lambda(1 - \alpha)$;
- 3) 设 N 不变, 不考虑出生人数和死亡人数对总人数的影响。

1.3 模型建立

当时间由 t 变化至 $t + \Delta t$ 时, 考虑在 Δt 内增加的感染的人数、减少的未感染的人数、治愈的人数。在不考虑自然出生率与自然死亡率的状态下, 设 Δt 内减少的未感染的人数满足:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = -\lambda(\alpha) s(t) i(t) \Delta t, \quad (1)$$

Δt 内增加的治愈者人数与感染者数成正比:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \mu i(t) \Delta t, \quad (2)$$

则 Δt 内增加的感染者数为

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda(\alpha) s(t) i(t) \Delta t - \mu i(t) \Delta t. \quad (3)$$

综合式 (1) ~ (3), 可得

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda(\alpha) si \\ \frac{di}{dt} = \lambda(\alpha) si - \mu i \\ \frac{dr}{dt} = \mu i \end{cases} \quad (4)$$

假设初始条件为 $s(0) = s_0, i(0) = i_0, r(0) = r_0, s_0 + i_0 \approx N$, 由此不能计算出模型 (4) 的解析解。因此, 这里只分析 $s(t), i(t), r(t)$ 随时间 t 的变化关系。

由式 (4) 中 $\frac{ds}{dt} = -\lambda(\alpha) si$ 可知, $s(t)$ 随时间 t 单调递减, 且 $s(0) = s_0 \geq 0$, 因此 $s(t)$ 随时间增加的极限存在, 即存在 s_∞ , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_\infty$ 。

由式 (4) 中 $\frac{dr}{dt} = \mu i$ 可知, $r(t)$ 随时间 t 单调增加, 且 $r(t) < N$, 因此 $r(t)$ 随时间增加的极限存在, 即存在 r_∞ , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r_\infty$ 。

由以上两个结论以及假设 (1), 可以推断, 随着时间的推移, 人群中的未感人数、感染人数、以及治愈人数终将趋于稳定。接着, 分析整体防护对该模型的影响。

定理 1 模型 (4) 传染病不再扩散 (即 i 不再增加) 的条件是 $\lambda(\alpha) \leq \mu/s_0$ 。

证明 设 $D(s, i) = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq N\}$, 在 $D(s, i)$ 上分析 $i(t)$ 随 $s(t)$ 的变化趋势。式 (4) 中前两式相除可得

$$\frac{di}{ds} = -1 + \frac{\mu}{\lambda(\alpha)} \frac{1}{s}. \quad (5)$$

$$i(s) = -s + \frac{\mu}{\lambda(\alpha)} \ln s - \frac{\mu}{\lambda(\alpha)} \ln s_0 + i_0 + s_0 = -s + \frac{\mu}{\lambda(\alpha)} \ln \frac{s}{s_0} + i_0 + s_0. \quad (6)$$

式 (6) 两端对 s 求导得:

$$i'(s) = -1 + \frac{\mu}{\lambda(\alpha)} \frac{1}{s}. \quad (7)$$

由此可得驻点 $\lambda(\alpha) = \mu/s$ 。于是由初始条件 $s(0) = s_0$ 可得:

1) 若 $\lambda(\alpha) > \mu/s_0$, 由方程组(4)的第一个方程以及式(7)可得 随着 t 的增加, $s(t)$ 从 s_0 开始逐渐减少, $i(t)$ 随 $s(t)$ 的减少而增加; 当 $s(t)$ 减少到满足 $\lambda(\alpha) < \mu/s$ 时, $i(t)$ 随 $s(t)$ 的减少而减少, 且在 $\lambda(\alpha) = \mu/s$ 时, 感染者比例 $i(t)$ 达到最大值。这种情况下传染病扩散一段时间后, 随着整体防护水平的提高而得到了控制。

2) 若 $\lambda(\alpha) < \mu/s_0$, $i(t)$ 随 $s(t)$ 的减少而减少, 这种情况传染病不会扩散。

3) 若 $\lambda(\alpha) = \mu/s_0$, 随着 t 的增加, $s(t)$ 在减少, $s(t)$ 的减少使得 $\lambda(\alpha) < \mu/s$, 此时和情况 2) 类似, 传染病不会扩散。

根据证明中的情况 1) 2) 的分析可得出在 $D(s, i)$ 面上 $i(t)$ 随 $s(t)$ 减少的传染病扩散情况 (图 1); 其中图 1 的 P_1 为证明中的情况 1), P_2 为证明中的情况 2)、3)。

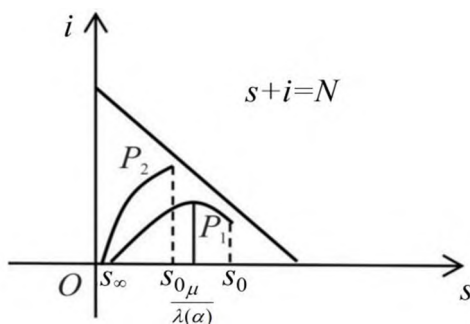


图 1 传染病扩散示意图

Fig.1 Schematic diagram of infectious disease spread

由传染病不扩散的条件 $\lambda(\alpha) \leq \mu/s_0$, 可得控制传染病扩散的办法有以下几种: 1) 提高整体防护系数 α , 加大整体防护力度, 使得 $\lambda(\alpha)$ 降低; 2) 提高 s_0 , 也即每个人做好个人防护工作, 公共场所及时清洁消毒, 降低传染病从某个个体、某种介质、或某些场所传播到未感染者的概率。

2 SIR 模型的改进

模型(4)只考虑了未感染者、感染者、治愈者这 3 类人群人数在接触率、治愈率影响下的变化情况。为了更好地反映实际情况, 在模型中加入自然出生率和死亡率等因素, 并考虑到自然资源和环境容纳量等因素对人口增长的阻滞作用, 建立人口增长满足 Logistic 规律的改进的新模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \left(b - \frac{rN(t)}{K}\right)N(t) - \lambda(\alpha)S(t)I(t) - \beta S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda(\alpha)S(t)I(t) - (\mu + \beta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - \beta R(t) \end{cases}, \quad (8)$$

其中, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 分别表示 t 时刻内未感染者、感染者、治愈者的数量, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 表示 t 时刻的人口总量; b 为自然出生率; β 为自然死亡率; $r = b - \beta$ 为内禀增长率; K 为环境容纳量; 所有参数均为正的常数。

将模型(8)中3个方程相加有

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= \left(b - \frac{rN(t)}{K}\right) N(t) - \beta[S(t) + I(t) + R(t)] = \\ &\left(b - \frac{rN(t)}{K}\right) N(t) - \beta N(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t),\end{aligned}$$

即 t 时刻内的人口总量满足 Logistic 规律。由于 $S(t) = N(t) - I(t) - R(t)$ 模型(8)等价于

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda(\alpha)(N(t) - I(t) - R(t))I(t) - (\mu + \beta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - \beta R(t) \end{cases} \quad (9)$$

基于生物学意义,本文仅在 $G = \{(N(t), I(t), R(t)) \mid N(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0\}$ 内讨论模型(9)的性质。由于模型(9)相对模型(4)而言较为复杂,无法用定理1的证明方法进行分析讨论,为此,通过对该模型平衡点稳定性的分析,来探讨整体防护对传染病传播的影响。

2.1 平衡点的稳定性分析

模型(9)的非负平衡点应满足以下方程式

$$\begin{cases} r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) = 0 \\ \lambda(\alpha)[N(t) - I(t) - R(t)]I(t) - (\mu + \beta)I(t) = 0 \\ \mu I(t) - \beta R(t) = 0 \end{cases}.$$

经计算后分析可知,模型(9)的平衡点共有3个:

1) 边界平衡点 $O = (0, 0, 0)$;

2) 无病平衡点 $E^0 = (K, 0, 0)$;

3) 地方病平衡点 $E^* = (K, I^*, R^*)$ 其中, $I^* = \frac{\beta[\lambda(\alpha)K - (\mu + \beta)K]}{\lambda(\alpha)(\mu + \beta)}$, $R^* = \frac{\mu}{\beta}I^*$ 。

定理 2 在域 G 上,边界平衡点 $O = (0, 0, 0)$ 是不稳定的。当 $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$ 时, E^0 局部渐近稳定;当 $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ 时, E^0 不稳定, E^* 局部渐近稳定。

证明 在点 O 处的雅可比矩阵为

$$J(O) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + \beta) & 0 \\ 0 & \mu & -\beta \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -(\mu + \beta) < 0$, $\lambda_3 = -\beta < 0$, 可知点 $O = (0, 0, 0)$ 不稳定。

在点 E^0 处的雅可比矩阵为

$$J(E^0) = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\alpha) - (\mu + \beta) & 0 \\ 0 & \mu & -\beta \end{pmatrix},$$

当 $\lambda(\alpha) < (\mu + \beta)$ 时,其特征值为: $\lambda_1 = -r < 0$, $\lambda_2 = \lambda(\alpha) - (\mu + \beta) < 0$, $\lambda_3 = -\beta < 0$, 故当 $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$ 时, E^0 是局部渐近稳定的; $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ 时, E^0 是不稳定的。

在点 E^* 处的雅可比矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(\alpha) I^* (I^* + R^*)}{K^2} & -\frac{\lambda(\alpha) I^*}{K} & -\frac{\lambda(\alpha) I^*}{K} \\ 0 & \mu & -\beta \end{pmatrix},$$

当 $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ 时,其特征值为: $\lambda_1 = -r < 0$,代数方程

$$\lambda^2 + \left(\frac{\lambda(\alpha) I^*}{K} + \beta \right) \lambda + \frac{\lambda(\alpha) I^* (\mu + \beta)}{K} = 0$$

的两个根 λ_2 与 λ_3 都有负实部,因此可判定点 E^* 局部渐近稳定。

由上述结论可得,当 $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$ 时,该传染病最终将消失,即整体防护系数以及医疗水平的提高,可以较好地抑制传染病传播的作用。而当 $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ 时,传染病将持续传播,即当整体防护水平、医疗水平较低时,传染病会一直流行,但随着时间的推移,未感染、感染的人数、治愈人数将趋于稳定。

2.2 数值模拟

为了验证结论,利用 MATLAB 对模型(9)进行数值模拟,取环境容纳量 $k = 500$ 万人。根据国家统计局发布的 2020 年我国的人口出生率和死亡率,以及 2020 年 2 月 1 日至 2 月 8 日国家卫健委发布的实际数据^[10],在模型(9)中取 $b = 0.00852$ $\beta = 0.00707$ $\mu = 0.042$ 。

首先,假设 $\lambda(\alpha) = 0.03$,此时 $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$ E^0 局部渐近稳定,模拟结果见图 2;取 $\lambda(\alpha) = 0.06$,此时 $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ E^* 局部渐近稳定,模拟结果见图 3。

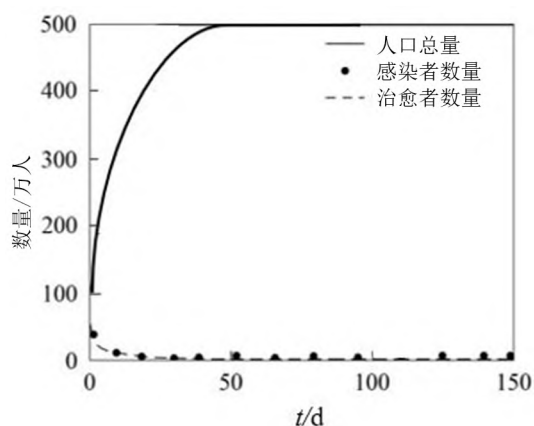


图2 $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$ 时各类人群数量随时间的变化曲线

Fig.2 Variation curves of total population, infected population and immune population with t for $\lambda(\alpha) < \mu + \beta$

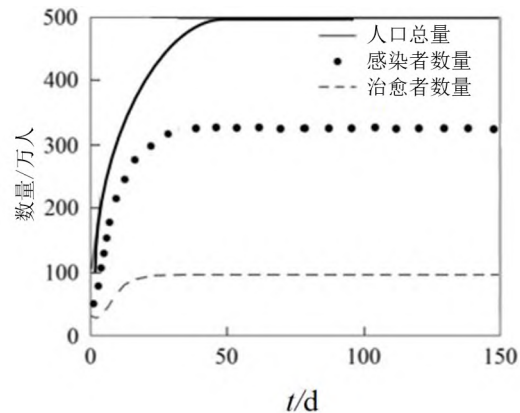


图3 $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$ 时各人群数量随时间的变化曲线

Fig.3 Variation curves of total population, infected population and immune population with t for $\lambda(\alpha) > \mu + \beta$

其次,在不同的整体防护系数下,对模型(9)的平衡点 E^* 进行模拟。设定 α 的范围为 0.2~1,步长为 0.2,分 5 组数据进行模拟,结果如图 4(只画出口口数量以及感染者数量时间的变化曲线)。由此可推出,整体防护系数越大,地方病平衡点中感染者的数量 I^* 越小,即较好的整体防护可将传染病控制在小范围内,甚至达到疾病消失。

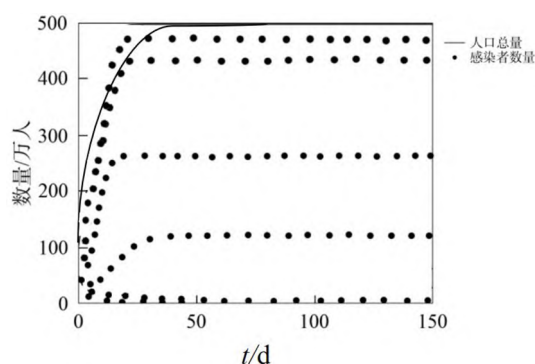


图 4 地方病平衡点随防护系数变化曲线

Fig.4 Variation curve of endemic equilibrium point with protection coefficient

3 结论

本文建立了两个考虑整体防护因素的 SIR 传染病模型,分别借助数学分析、微分方程稳定性理论等知识分析了整体防护对模型中各变量值以及模型平衡点稳定性的影响,并以此为依据说明整体防护在新冠疫情传播中的作用。

参考文献

- [1] BERNOULLI D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir in mémoires de mathématiques et de physique [D]. Paris: Académie Royale des Sciences, 1760.
- [2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1927, 115: 700–721.
- [3] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemic. II. The problem of endemicity [J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1932, 138 (834): 55–83.
- [4] 李文轩, 李辉来, 赵彦军. 一类基于心理作用的 SIRS 传染病模型 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(3): 513–517.
- [5] 雷学红, 许云霞. 一类具有非线性传染率的 SIRS 传染病模型的稳定性分析 [J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2020, 41(3): 230–236.
- [6] 王增鑫, 王琳琳, 樊永红. 一类具有时滞的 SIR 传染病模型的分析 [J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2018, 34(3): 193–198.
- [7] 宫兆刚, 杨柳. 一类具有非线性发生率的 SIR 传染病模型的全局稳定性 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(13): 258–261.
- [8] 李小妮, 张启敏. 基于信息干预的 SIRS 传染病模型稳定性分析 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2019, 51(5): 98–103.
- [9] 原珊珊, 张国洪. 考虑信息变量 Logistic 自然增长的 SIR 传染病模型 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2020, 34(4): 230–234, 250.
- [10] 张艳霞, 李进. 基于 SIR 模型的新冠肺炎疫情传播预测分析 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 94–101.

[责任编辑: 金 甦]