

DHBW Mosbach - Campus Bad Mergentheim

Technische Mechanik 1

Skript zur Vorlesung

Siegismund, Volker

24.11.2016



INHALT

1	VORBEMERKUNGEN	3
1.1	Physikalische Größen	3
1.2	Richtungssinn.....	4
1.3	Handwerkszeug.....	4
1.4	Abbildungen in diesem Skript.....	4
2	FRAGESTELLUNG DER STATIK	5
3	KRÄFTE UND IHRE WIRKUNGEN	6
3.1	Darstellung von Kräften	6
3.2	Äußere Kräfte	7
3.3	Reaktionskräfte und innere Kräfte.....	8
3.4	Axiome der Kraft.....	10
4	KRÄFTESYSTEME	12
4.1	Zentrales ebenes Kräftesystem.....	12
4.1.1	Zeichnerische Lösung.....	13
4.1.2	Rechnerische Lösung	14
4.1.3	Gleichgewichtsbedingungen.....	17
4.2	Allgemeines ebenes Kräftesystem	21
4.2.1	Zeichnerische Lösung.....	21
4.2.2	Rechnerische Lösung	21
5	SYSTEME AUS STARREN SCHEIBEN UND EBENE FACHWERKE.....	27
5.1	Rechnerische Behandlung von Systemen aus starren Scheiben	29
6	LITERATURVERZEICHNIS	30

1 Vorbemerkungen

Willkommen zur Technischen Mechanik 1 – einem klassischen „Loser-Fach“ [1] der Ingenieurwissenschaften!

Technische Mechanik = Lehre von Kräften, Bewegungen,
Verformungen und Spannungen von/in Bauteilen

TM1: Lehre von Kräften (ohne Bewegung=Statik), Verformungen und Spannungen

TM2: Lehre von Kräften (mit Bewegungen=Kinetik): kommt im 2. Semester

Das vorliegende Skript dient zur Begleitung der Vorlesung. Es empfiehlt sich jedoch, vorlesungsbegleitend Literatur zu studieren, um den behandelten Stoff zu vertiefen. Die im Literaturverzeichnis angegebenen Bücher sind rundum zu empfehlen. Einige davon sind als online-Dokumente erhältlich!

1.1 Physikalische Größen

Internationales (metrisches) Einheitensystem (SI)

Größe	Einheitenname	Formelzeichen	Einheit
Länge	Meter	l, s	m
Zeit	Sekunde	t, τ	s
Masse	Kilogramm	m	kg
Kraft	Newton	F	N

Hinweis:

$[F]=N$ ✓

$F [N]$ ✗

1.2 Richtungssinn

Vereinbarung zur mathematischen Lösung von Aufgaben der technischen Mechanik

Koordinatensystem mit positiver Achsen- und Momentenrichtung

1.3 Handwerkszeug

Zur Lösung von Aufgaben in der Technischen Mechanik 1 werden u.a. zeichnerische Methoden angewandt. Daher ist es unerlässlich, dass ein Geodreieck, ein Lineal (zur Parallelverschiebung), Bleistift sowie Radiergummi dabei sind. Es empfiehlt sich, die zeichnerischen Lösungsansätze auf kariertem Papier durchzuführen.

Für die rechnerischen Methoden gibt's den Taschenrechner.

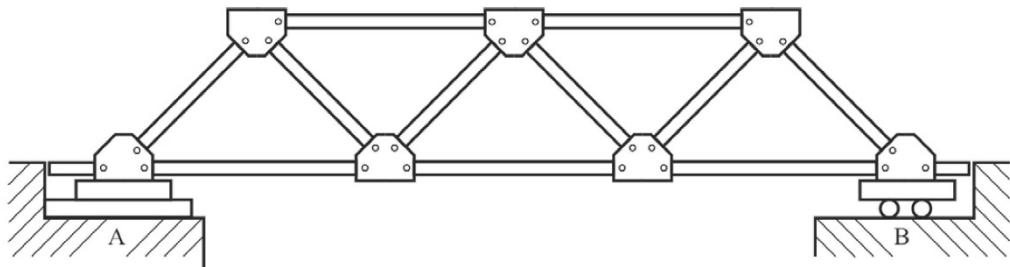
1.4 Abbildungen in diesem Skript

Die meisten Abbildungen in diesem Skript stammen aus [2], [3] und [4]. Zur besseren Lesbarkeit wird an den Abbildungen die Quellenangabe weggelassen.

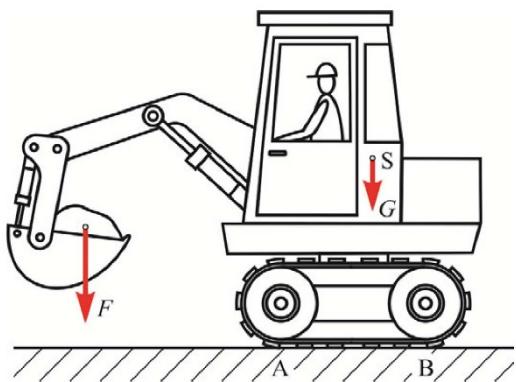
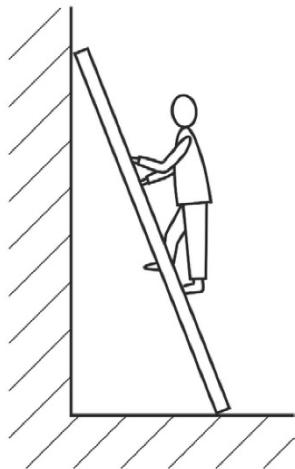
Packen wir's an!

2 Fragestellung der Statik

- Belastung in den Brückenlagern
- Belastung in den Streben



- Bei welchem
 - Winkel
 - Höhe der Person
 - Reibungssituationrutscht die Leiter?
- Wie groß darf die gehobene Last sein, damit Standsicherheit gegeben ist?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte?
- Wie groß ist die Zylinderkraft?
- Welchen Einfluss hat das Körpergewicht?

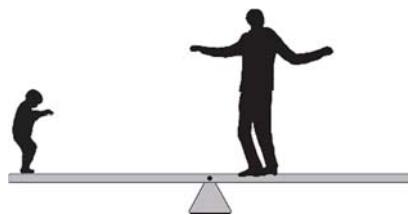


3 Kräfte und ihre Wirkungen

Kraft Einwirkung auf einen Körper, der diesen im Gleichgewicht hält (Auflager-/Reaktionskräfte), beschleunigt (äußere Kräfte) oder verformt (innere Kräfte)

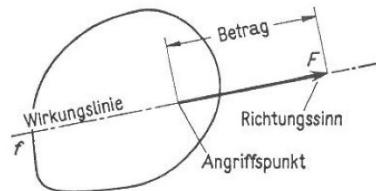
Kräfte sind *vektorielle* (d.h. richtungsabhängige) Größen, dargestellt mit \vec{F}

Beispiel Wippe



3.1 Darstellung von Kräften

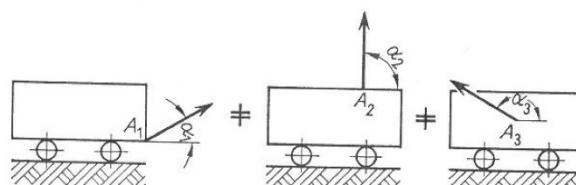
Einzelkraft Die an einem Körper angreifende Kraft wird durch einen Pfeil gekennzeichnet. Der Beginn des Pfeils deutet den *Angriffspunkt* an, die Richtung des Pfeils, die *Wirkrichtung* der Kraft, die Länge des Pfeils, den *Betrag* der Kraft.



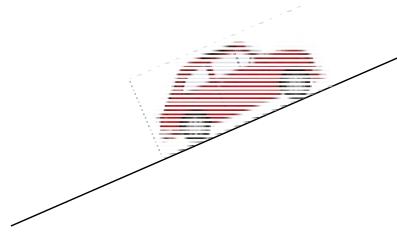
Zur eindeutigen Beschreibung einer Kraft F gehören demnach zwingend die Angaben:

- Betrag
- Angriffspunkt
- Wirklinie und Richtung (z.T. eindeutig vorgegeben, z.B. Gewichtskraft \vec{F}_G)

Beispiel Gleich große Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten bzw. Wirklinien



Indizes Angriffspunkt der Kraft, z.B. F_A , F_B
 Art der Kraft, z.B. F_G (Gewichtskraft), F_n (Normalkraft)



3.2 Äußere Kräfte

Äußere Kräfte greifen an jedem Masseteilchen eines Volumenkörpers an, idealisiert werden Sie jedoch zusammengefasst im Schwerpunkt angreifend dargestellt.

Gewichtskraft F_G

Gewichtskraft F_G greift stets an, Angriffspunkt ist der Schwerpunkt S , Wirklinie ist senkrecht nach unten gerichtet

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$



Beschleunigungskraft F_B

Bewegungsänderungen erfolgen unter dem Einfluss von Beschleunigungskräften. Angriffspunkt ist der Schwerpunkt S , Wirklinie entweder durch Bahn oder als Funktion vorgegeben

$$\vec{F}_B = m \cdot \vec{a}$$

- TM2

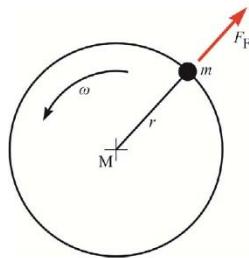


Fliehkraft F_F

Bei Kreisbewegungen wirkt stets eine Fliehkraft. Angriffspunkt ist der Schwerpunkt, Wirkrichtung radial vom Kreismittelpunkt nach außen.

$$\vec{F}_F = m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2$$

- TM2



3.3 Reaktionskräfte und innere Kräfte

Reaktionskräfte

Stützkräfte oder Lagerreaktionen, die den äußereren Kräften entgegenwirken und eine Bewegung eines Körpers verhindern.
-> Auslegung von Lagerstellen

Bildliche Darstellung:

Lagerungsart	Lagerreaktionen
Loslager	 z.B. Rolle
Festlager	 z.B. Gelenk
Einspannung	 z.B. Schweißverbindung

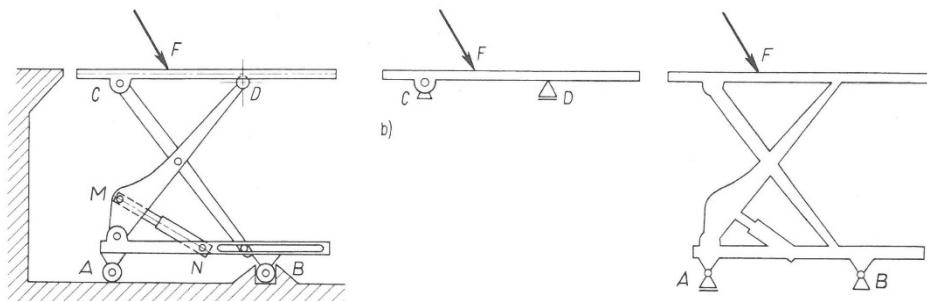
Methode: Freimachen (-schneiden)

Nach [1]

„Das Wichtigste im Leben von MechanikerInnen fängt mit „F“ an und hört mit „n“ auf. Es ist etwas, an das man immer denken muss! Leider wird es viel zu selten und in den wenigsten Fällen mit der notwendigen Sorgfalt und Liebe gemacht und führt dadurch zu allerlei Problemen. Das muss nicht so sein, wenn man von Anfang an lernt, damit richtig umzugehen: die Rede ist vom Freischneiden.“

Beispiel

Hebebühne



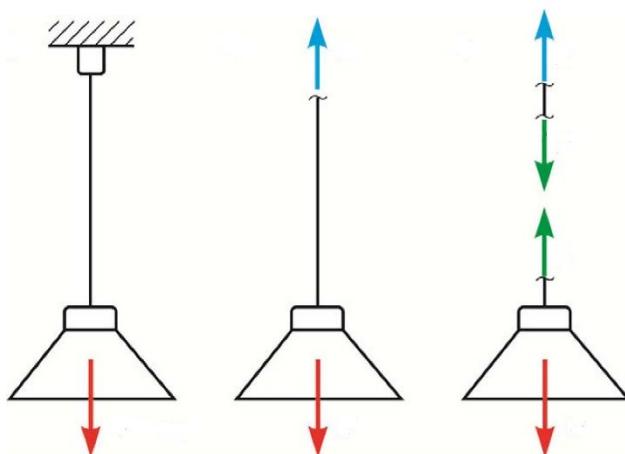
Übung

Skizzieren Sie die Konstruktion der Personenbühne am Eingang Schloss 10 entsprechend der obigen Abbildung.

Innere Kräfte

Durch Aufschneiden an einer beliebigen Stelle können die dort wirkenden Kräfte ermittelt werden.
-> Dimensionierung von Bauteilen

Methode: Schnitt (-methode): innere Kräfte werden zu äußeren Kräften



3.4 Axiome der Kraft

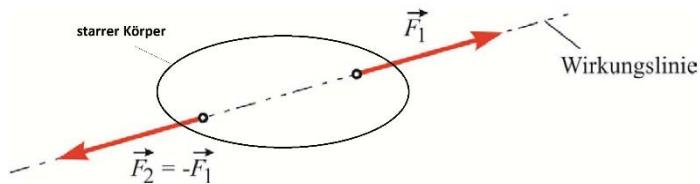
Annahme

Die im Rahmen dieser Vorlesungen betrachteten Körper werden als **starr** betrachtet („Starrer Körper“), d.h. Verformungen in Folge von Krafteinwirkungen werden vernachlässigt

Trägheitsaxiom

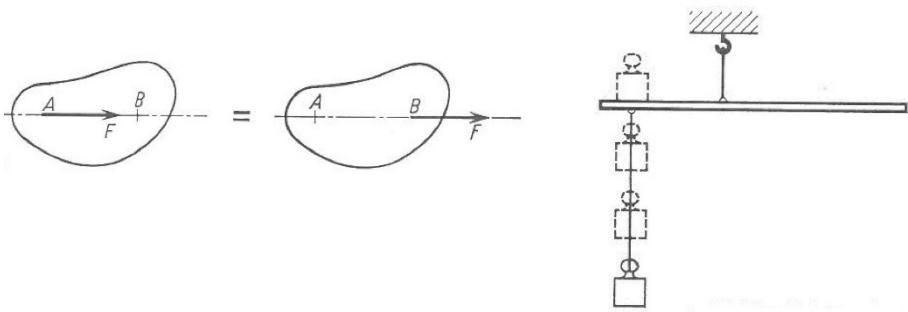
Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe (bzw. gleichförmige geradlinige Bewegung) solange er nicht durch eine angreifende Kraft zur Änderung des Zustands gezwungen wird.

Oft auch als Gleichgewichtsaxiom dargestellt:



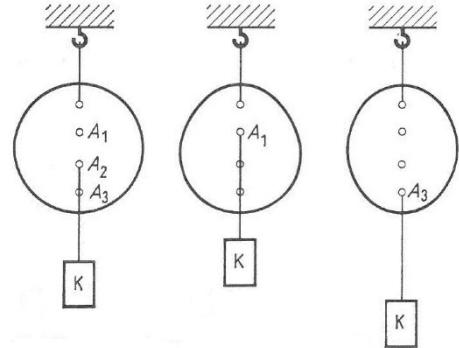
Verschiebungssatz

Der Angriffspunkt einer Kraft darf beim starren Körper entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der Wirkung auf den Körper etwas ändert



BEACHTE

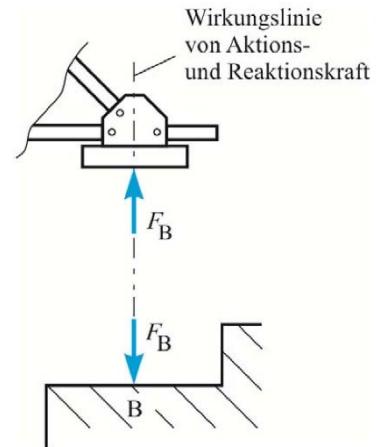
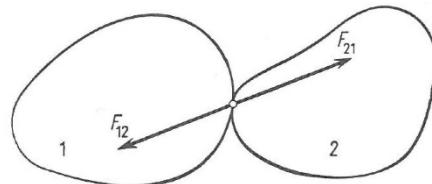
am **nicht starren** Körper kann Verschiebeaxiom nicht angewendet werden



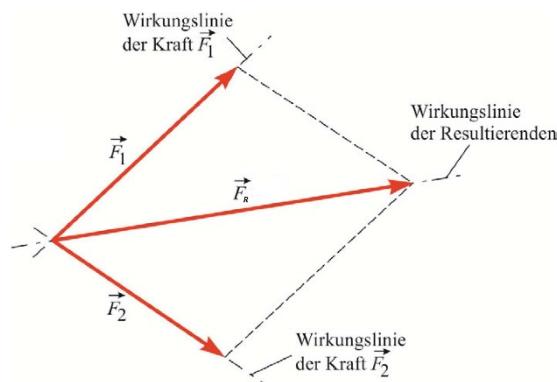
Reaktionsaxiom

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, liegen auf der gleichen Wirklinie, sind aber entgegengesetzt gerichtet

„actio = reactio“

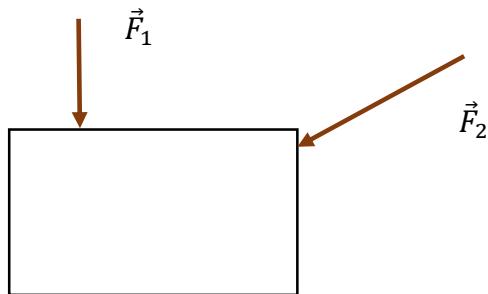


Parallelogrammaxiom Die Wirkung zweier Kräfte F_1 und F_2 mit einem gemeinsamen Angriffspunkt ist gleichwertig mit der Wirkung einer einzelnen Kraft F_R (Resultierende), deren Vektor sich als Diagonale des mit den Vektoren F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ergibt und die den gleichen Angriffspunkt hat wie F_1 und F_2 .



Beispiel

Bestimmen Sie den Angriffspunkt A, die Wirkrichtung bzw. die Größe der Resultierende Kraft F_R



4 Kräftesysteme

= Körper, Baugruppen, etc. an denen eine oder mehrere Kräfte angreifen.

Zunächst Betrachtung des Spezialfalls „Zentrales Ebenes Kräftesystem“ (auch „Kräftegruppe“) danach „Allgemeines ebenes Kräftesystem“.

Räumliche Kräftesysteme: Selbststudium bei Bedarf.

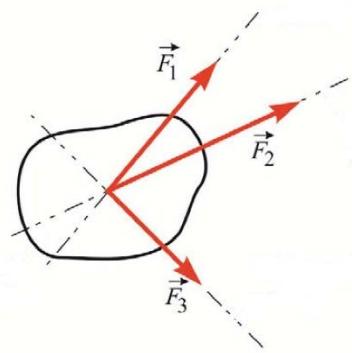
4.1 Zentrales ebenes Kräftesystem

= alle angreifenden Kräfte liegen in einer Ebene und haben einen gemeinsamen Angriffspunkt

Wichtige Aufgaben der Statik sind hier die Ermittlung der Resultierenden einer Kräftegruppe, die Zerlegung einer Kraft nach verschiedenen Richtungen und die Betrachtung des Gleichgewichts dieser Kräftegruppe

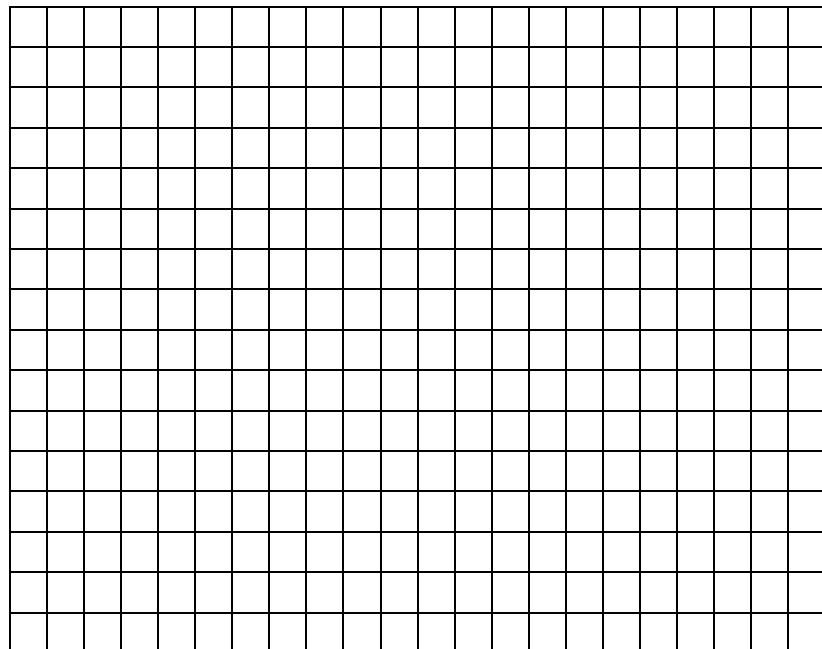
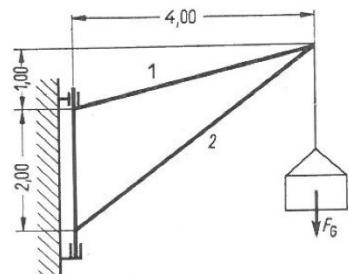
4.1.1 Zeichnerische Lösung

Zeichnerische Lösung mit Kräfteplan (Kräftemaßstab z.B. $1kN \equiv 1cm$)



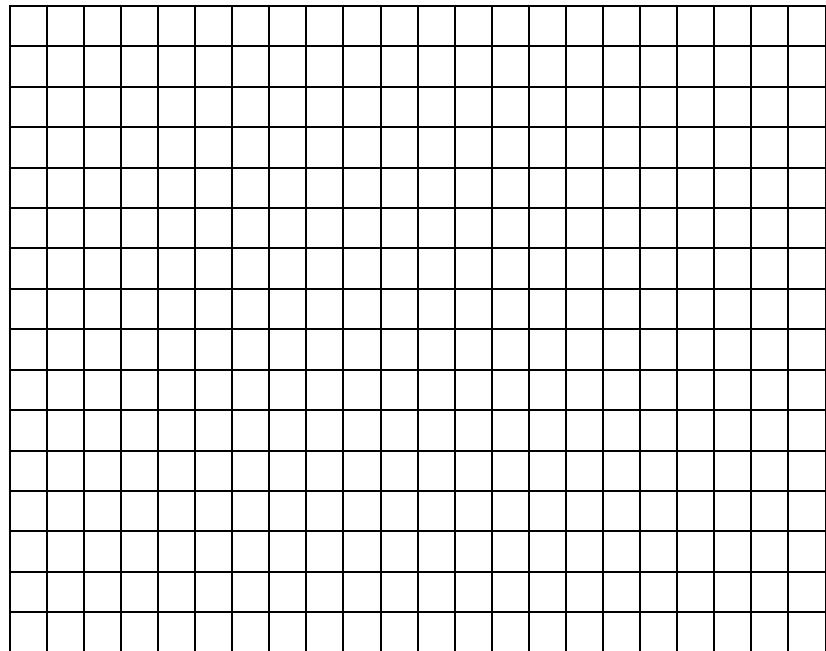
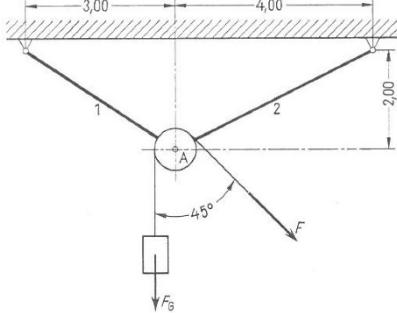
Beispiel

Wie groß sind die Kräfte in den Stäben des Wandkrans, wenn die Last eine Gewichtskraft von $F_G=40kN$ aufweist?



Beispiel

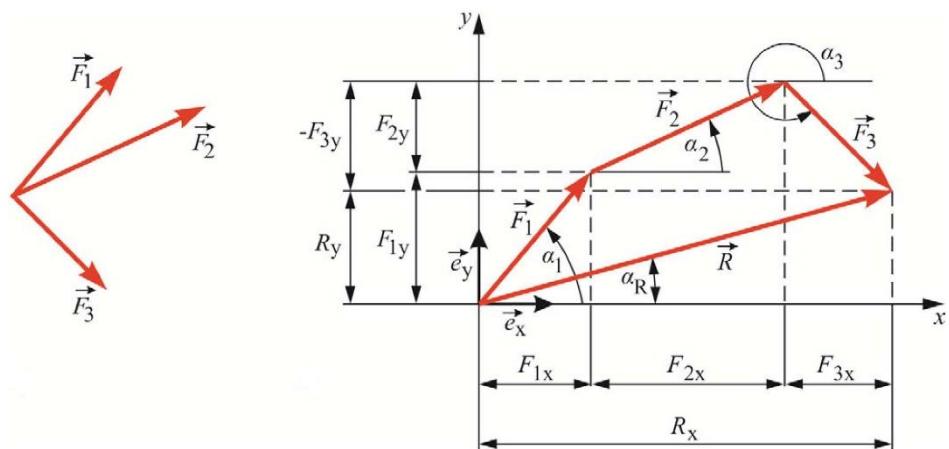
Man bestimme die Kräfte in den Stäben 1 und 2, wenn die Gewichtskraft $F_G = 3\text{kN}$ beträgt.
Wie groß ist die Kraft F_a , die die Rolle auf ihr Lager ausübt?



- U.U. ist die zeichnerische Lösung nicht immer „komfortabel“ bzw. nicht hinreichend genau

4.1.2 Rechnerische Lösung

Rechnerische Lösung Zerlegung aller Kraftvektoren in x- und –Komponente
(Parallelogrammaxiom)



Die Einzelkraft F_i lässt sich mit den Basisvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y darstellen als

$$\vec{F}_i = \vec{e}_x \cdot F_{ix} + \vec{e}_y \cdot F_{iy}$$

Für die x-Komponente der Einzelkraft F_i gilt:

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

Für die y-Komponente der Einzelkraft F_i gilt:

$$F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$

Resultierende R

$$R_x = \sum_{n=1}^i F_{nx} = \sum_{n=1}^i F_n \cdot \cos \alpha_n$$

$$R_y = \sum_{n=1}^i F_{ny} = \sum_{n=1}^i F_n \cdot \sin \alpha_n$$

Betrag der Resultierenden

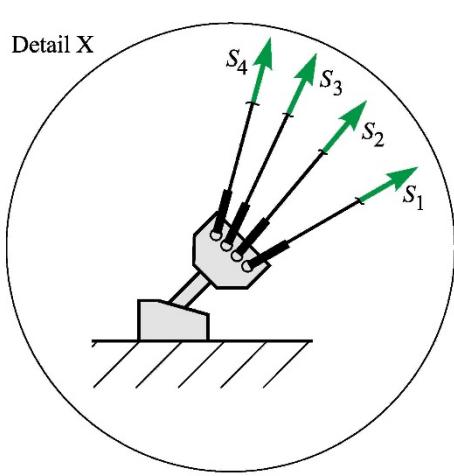
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Richtung der Resultierenden

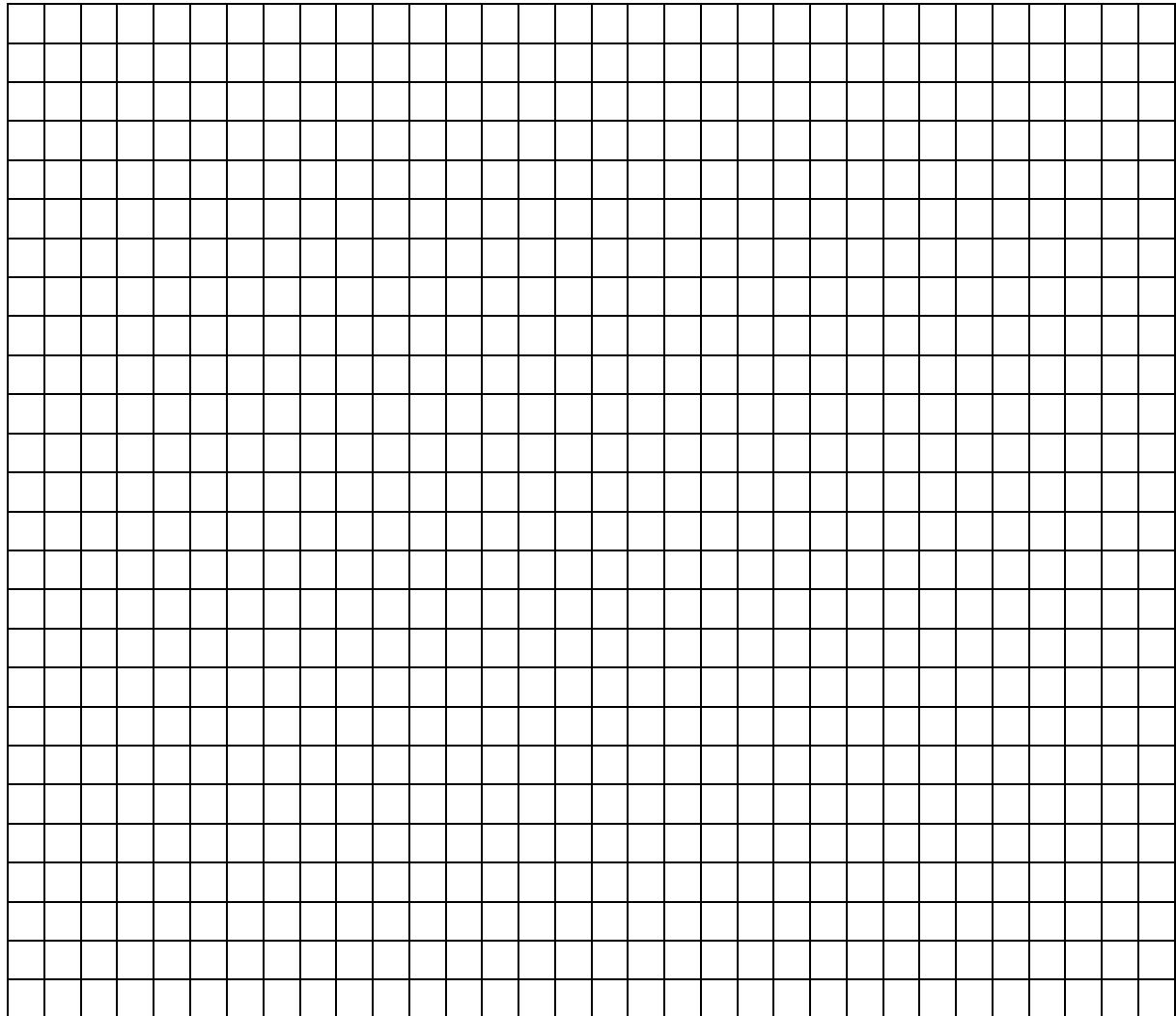
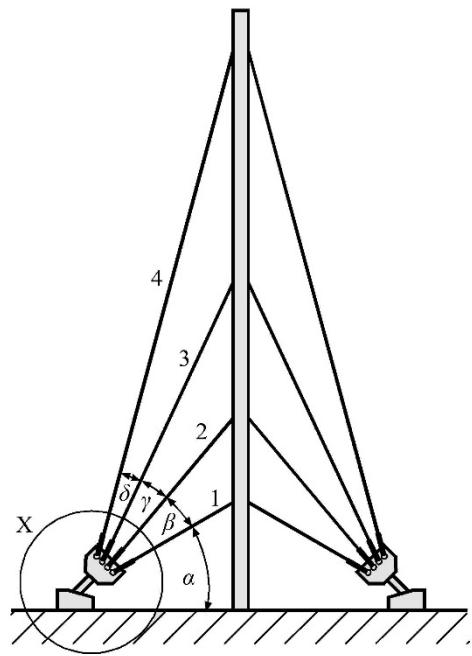
$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

Beispiel

Ein Funkmast wird durch mehrere Drahtseile gehalten. Je vier dieser Drahtseile sind mittels einer Halterung im Boden verankert. Wie groß ist die resultierende Kraft der Seile 1 bis 4 und in welche Richtung zeigt sie? (Lösung rechnerisch)



geg.: $S_1 = 10 \text{ kN}$, $S_2 = 15 \text{ kN}$, $S_3 = 20 \text{ kN}$,
 $S_4 = 25 \text{ kN}$
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 15^\circ$, $\delta = 10^\circ$



4.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

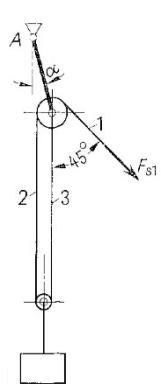
- Statik: Körper befindet sich im Gleichgewicht
- = Summe der an einem Körper angreifenden Kräfte ist Null
 - = Resultierende ist Null
 - = Krafteck am angreifenden Körper ist geschlossen

Greift an einer zentralen Kräftegruppe mindestens eine (mit Wirklinie und Betrag) gegebene Kraft F an, können mit dieser Gleichgewichtsbedingung max. zwei Unbekannte (Wirklinien und/oder Beträge von weiteren angreifenden Kräften) bestimmt werden:

- Beträge zweier Kräfte
- Wirkungslinien zweier Kräfte
- Betrag und Wirkungslinie einer Kraft
- Betrag einer Kraft und Wirkungslinie einer weiteren Kraft

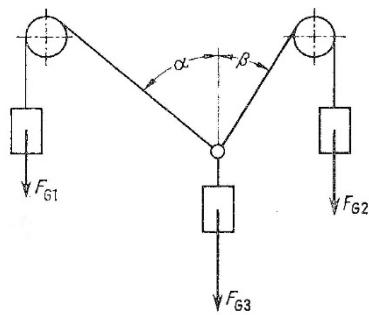
Zuordnung zu den o.g. Fällen:

Fall:



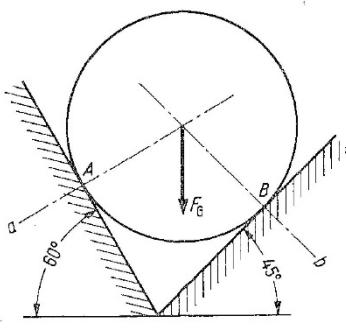
Geg.: F_{S1} , 45°

Fall:



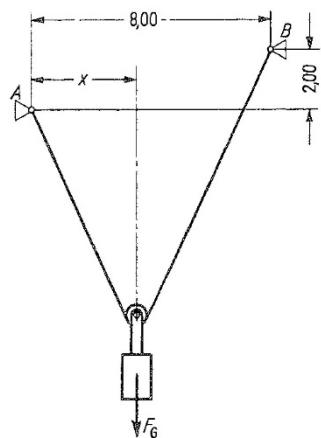
Geg.: F_{G1} , F_{G2} und F_G

Fall:



Geg.: F_G , 60° , 45°

Fall:

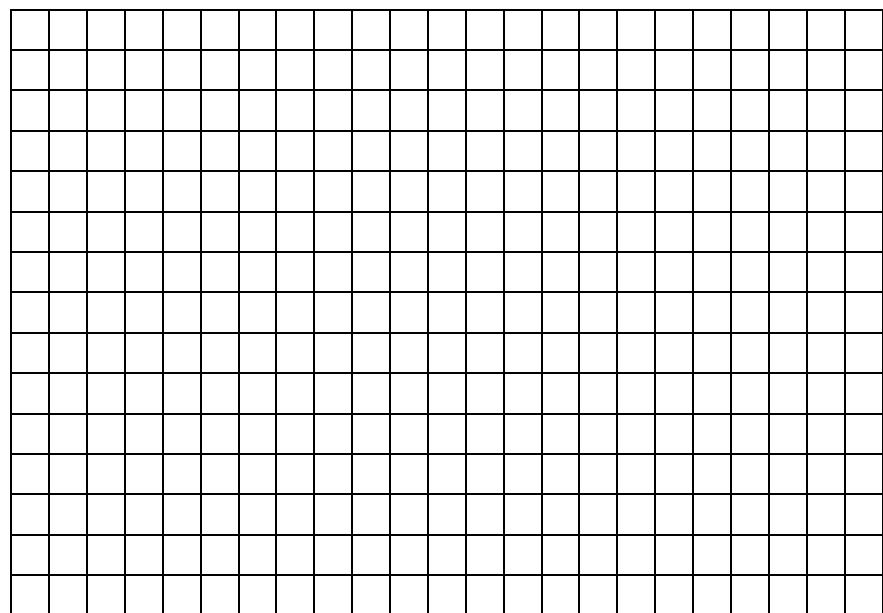
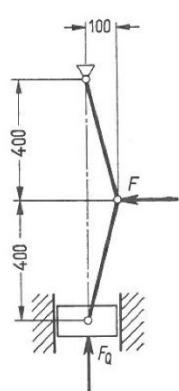


Geg.: F_G

Zeichnerische Gleichgewichtsbedingung: Krafteck am angreifenden Körper ist geschlossen

Beispiel

Welche Kraft F muss an der Kniehebelpresse aufgebracht werden, um eine Presskraft $F_Q=3\text{kN}$ zu erreichen?



Rechnerische Gleichgewichtsbedingungen: Summe aller x- und y-Komponenten ist gleich Null

$$\sum F_x = 0$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

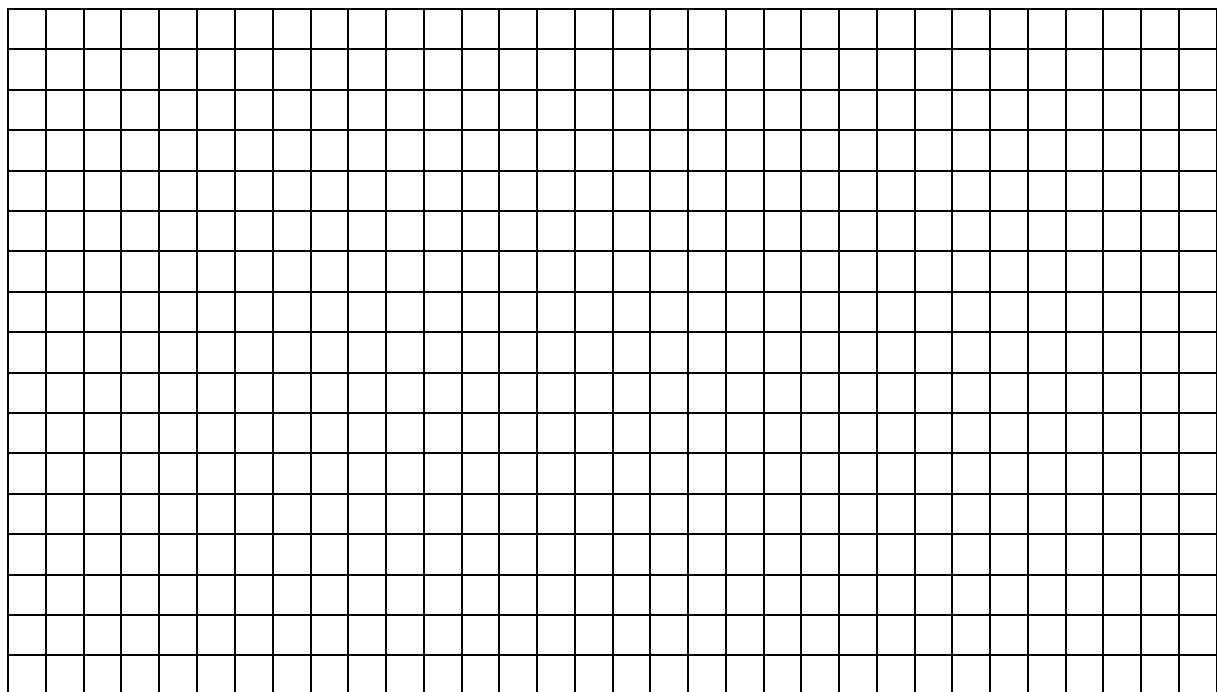
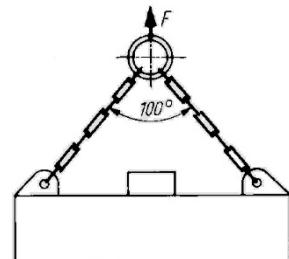
Gleichgewichtskraft: Betrag und Richtung (Quadrant durch Überlegung!)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \alpha_r = \frac{F_y}{F_x}$$

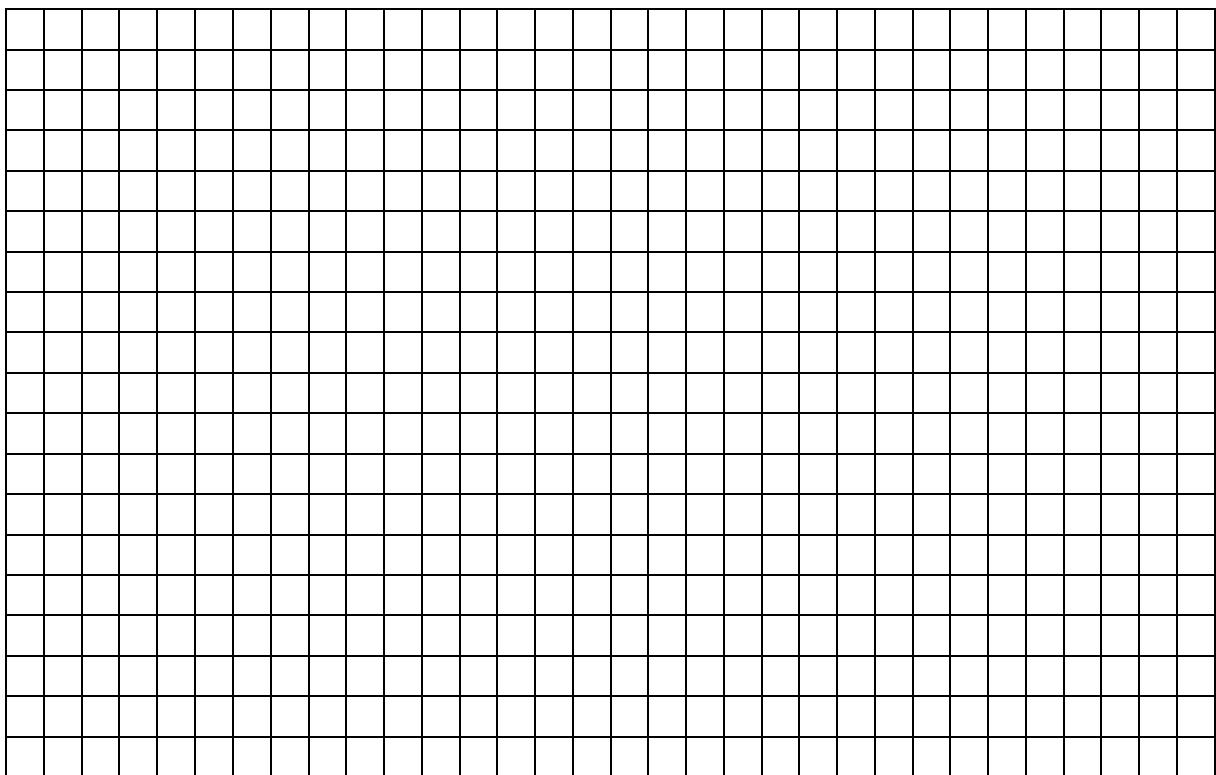
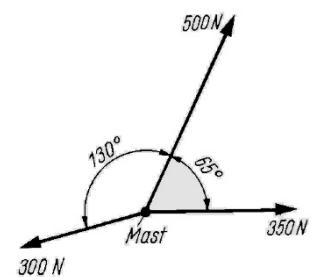
Beispiel

Die max. Kettenlast beträgt $F_k=10\text{kN}$. Welche max. Last darf der Magnet anheben?
(zeichnerisch und rechnerisch)



Beispiel:

Unter welchem Winkel muss ein Seil angebracht werden, um den Masten im Gleichgewicht zu halten? Wie groß ist die Seilkraft? (zeichnerisch und rechnerisch)



So und nun verstehen Sie auch, wie solche Programme (z.B. www.tm-interaktiv.de) funktionieren. Rechnen Sie die o.g. Beispiele mit dem Programm doch einmal nach!

4.2 Allgemeines ebenes Kräftesystem

= alle angreifenden Kräfte liegen in einer Ebene, die Wirklinien schneiden sich aber nicht in einem gemeinsamen Punkt

⇒ Die Lage der resultierenden Kraft ist nicht bekannt

4.2.1 Zeichnerische Lösung

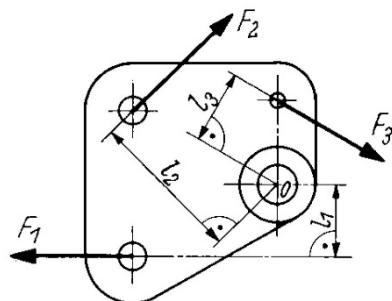
Bei Kräftesystemen mit mehr als zwei angreifenden Kräften stehen verschiedene Verfahren für eine zeichnerische Lösung zur Verfügung (z.B. Seileckverfahren, Schlusslinienverfahren, siehe Literatur), welche in Zeiten von (Hochleistungs-)Rechnern i.d.R. nicht mehr eingesetzt und daher hier auch nicht behandelt werden.

4.2.2 Rechnerische Lösung

Die Größe und Richtung der resultierenden Kraft eines beliebigen Kräftesystems wird analog zur Vorgehensweise des zentralen Kräftesystems bestimmt. Allerdings kann die Lage mit den bisher zur Verfügung stehenden Gleichungen nicht bestimmt werden. Daher zunächst Einführung von

Moment und Kräftepaar

Lagebestimmung der Einzelkräfte: senkrechter Abstand / der Wirklinie zu einem Bezugspunkt 0 (**Hebelarm**)



Statisches Moment M

Produkt aus Kraft und senkrechtem Abstand er Wirklinie zu einem Bezugspunkt

$$M = F \cdot l \quad \text{in Nm}$$

Vereinbarung

Linksdrehende Momente sind positiv (+)
Rechtsdrehende Momente sind negativ (-)

Darstellung von Momenten

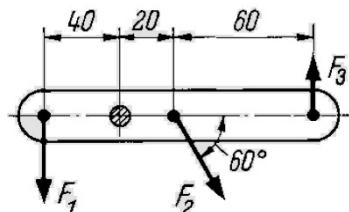
Pfeil mit Doppelspitze oder
Kreisbogen mit Richtungssinn

Momentensatz Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte

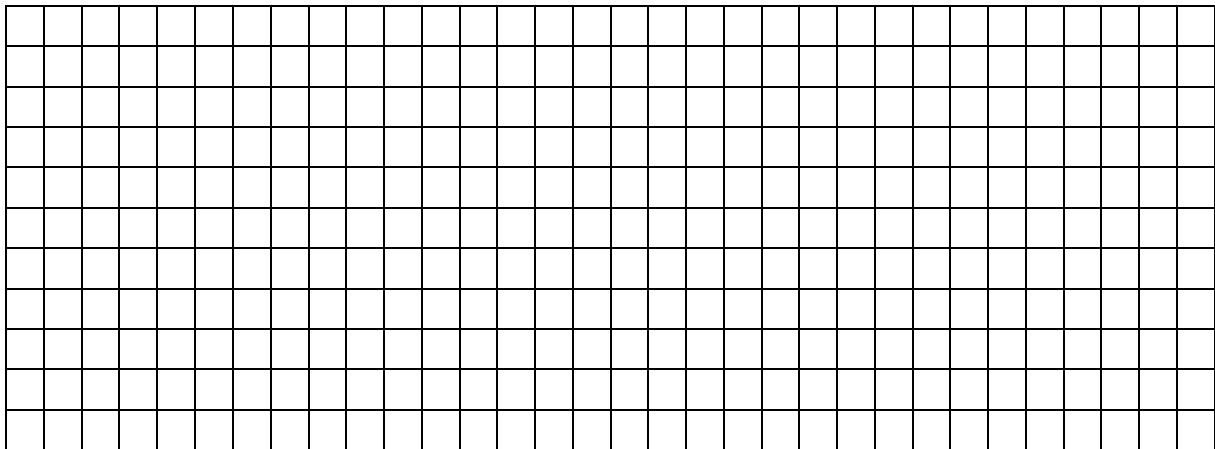
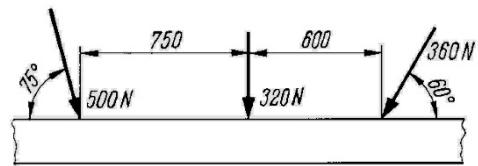
$$M_R = \sum M_i = M_1 + M_2 + \dots + M_n = F_R \cdot l_R$$

$$M_R = \sum (F_i \cdot l_i) = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + \dots + F_n \cdot l_n$$

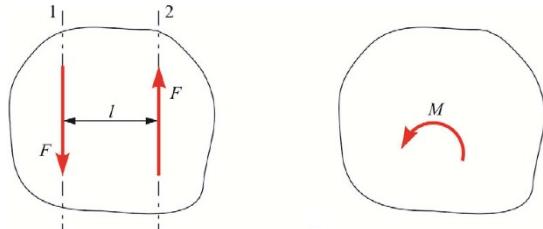
Beispiel Hebel Das an der Welle angreifende resultierende Moment und dessen Drehsinn sind zu bestimmen.
Geg.: $F_1 = 60\text{N}$, $F_2 = 100\text{N}$, $F_3 = 20\text{N}$



Beispiel Balken An einem Träger wirken drei Kräfte. Es sind die Resultierende F_R , ihr Abstand zur mittleren Kraft sowie ihr Winkel zur Horizontalen zu bestimmen.



Kräftepaar Zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte mit parallelen Wirklinien bilden ein **Kräftepaar**



BEACHTE Resultierende Kraft = Null, jedoch übt das Kräftepaar ein Moment M auf den Körper aus

Allgemein gilt Ohne Kräftepaar keine Drehbewegung

Gleichgewichtsbestimmung

Ein beliebiges Kräftesystem ist im Gleichgewicht (=Statik), wenn weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Drehmoment vorhanden sind.

Mathematische Formulierung

$$\boxed{\sum F_x = 0}$$

Summe aller Kräfte in x-Richtung = Null

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

Summe aller Kräfte in y-Richtung = Null

$$\boxed{\sum M_{i,O} = 0}$$

Summe aller Momente um einen Punkt O = Null

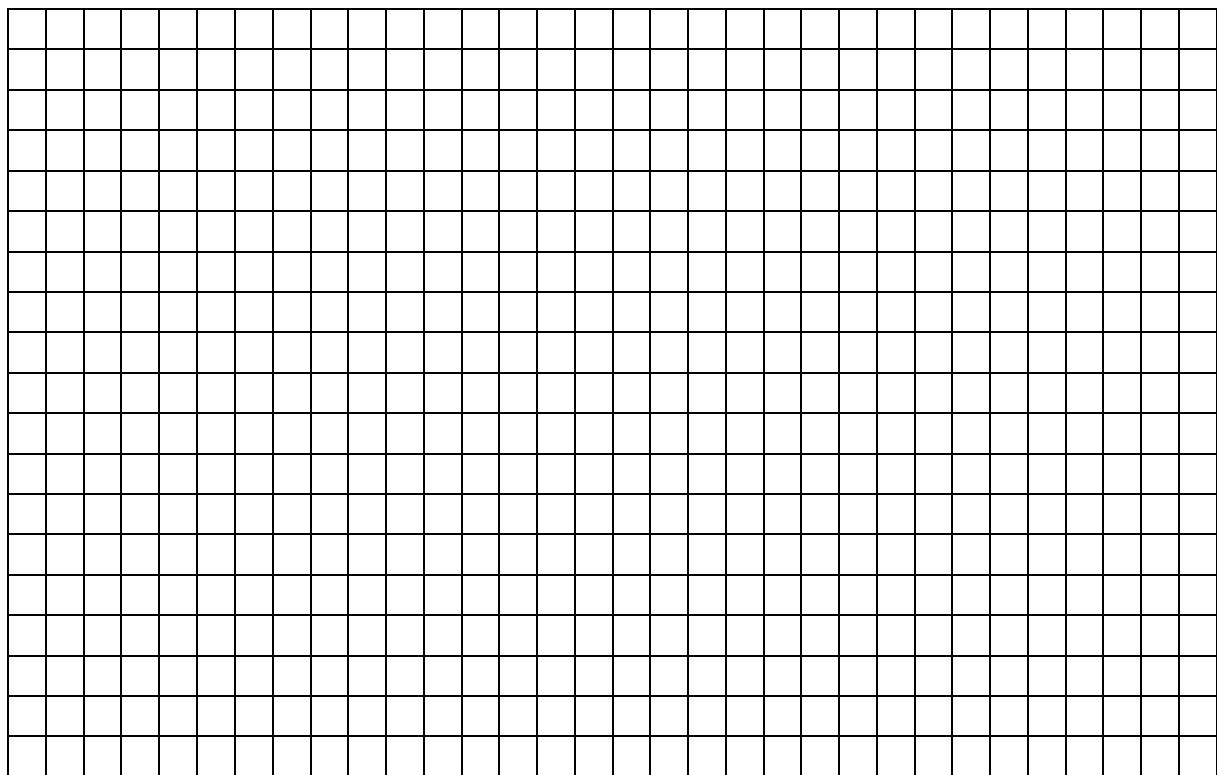
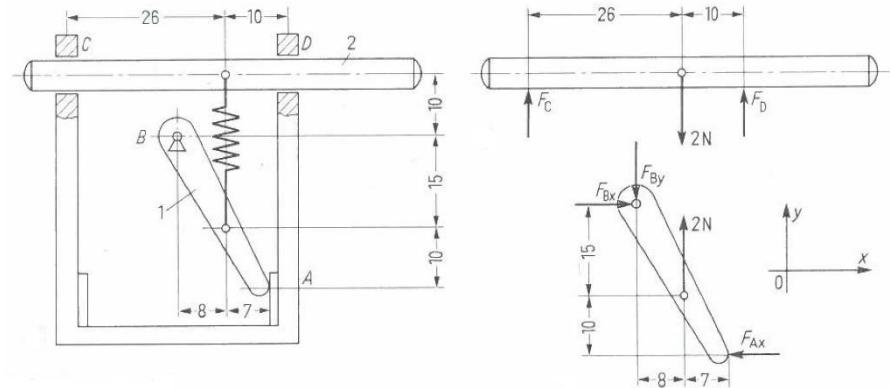
Diese Gleichungen werden eingesetzt, um z.B. Auflager oder Schnittreaktionen zu bestimmen.

Vorgehensweise

- ① Freimachen: Skizze des Bauteils/der Bauteile erstellen mit allen angreifenden Kräften, Dimensionen, etc.
- ② u.U. x- und y-Komponenten der schräg wirkenden Kräfte bestimmen
- ③ Gleichgewichtsbedingungen (s.o.) aufstellen und nach den gesuchten Größen umstellen und lösen
- ④ u.U. Gesuchte Kräfte bzw. deren Richtungswinkel aus deren x- und y-Komponenten bestimmen

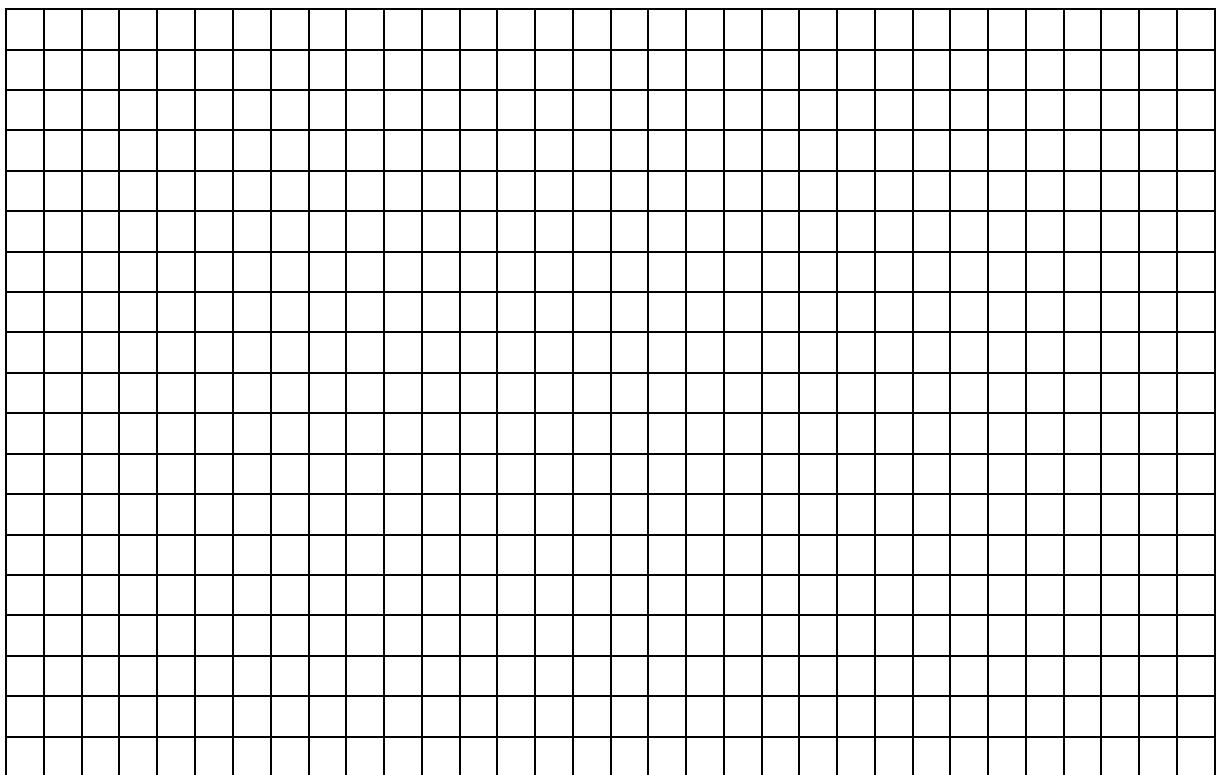
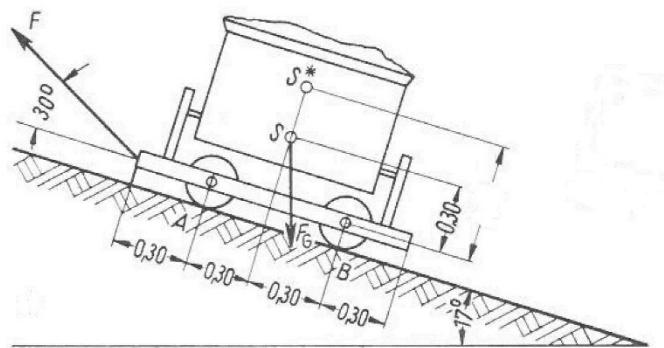
Beispiel

Der Hebel wird von einer Feder mit der Kraft $F=2\text{N}$ belastet. Zu bestimmen sind die Anpresskraft F_A , die Auflagerkräfte F_{Bx} und F_{By} sowie die Auflagerkräfte F_C und F_D sowie



Beispiel

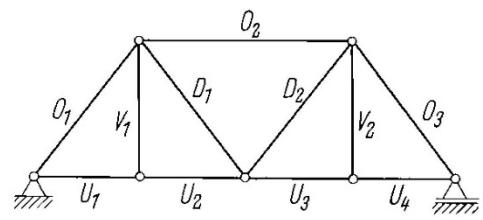
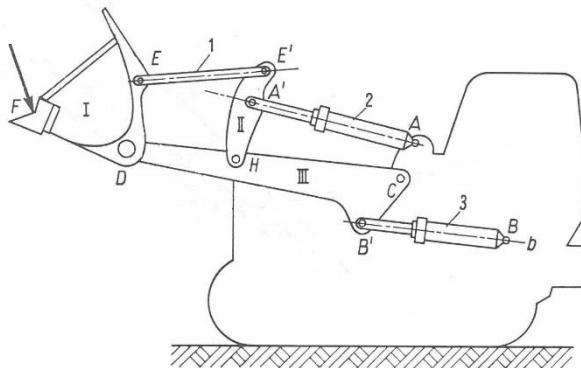
Eine Lore wird von einem Seil auf einer geneigten Fahrbahn festgehalten. Die Gewichtskraft $F_G = 3\text{kN}$ greift im Schwerpunkt S an. Zu bestimmen sind die Seilkraft F sowie die Auflagerkräfte F_A und F_B .



5 Systeme aus starren Scheiben und ebene Fachwerke

Ziel

Bestimmung von Auflagerkräften, Zwischenreaktionen und Kräften in den Stäben



Statische Bestimmtheit

= Voraussetzung zur Bestimmung der Auflagerreaktionen

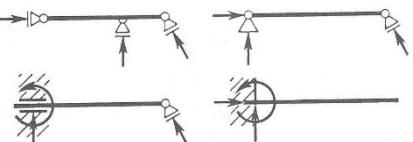
Eine (starre) Scheibe

3 Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_{i,O} = 0$)

3 unabhängige Lagerreaktionen

drei Kräfte oder

zwei Kräfte und ein Moment



Mehrere Scheiben

Anwendung der Schnittmethode: Zwischenreaktionen als zusätzliche Unbekannte

Dann gilt

n Anzahl der Teile, in die das System zerlegt wird

a Anzahl der unabhängigen Lagerreaktionen

z Anzahl der unabhängigen Zwischenreaktionen

$$a + z = 3 \cdot n$$

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt

$$a + z > 3 \cdot n$$

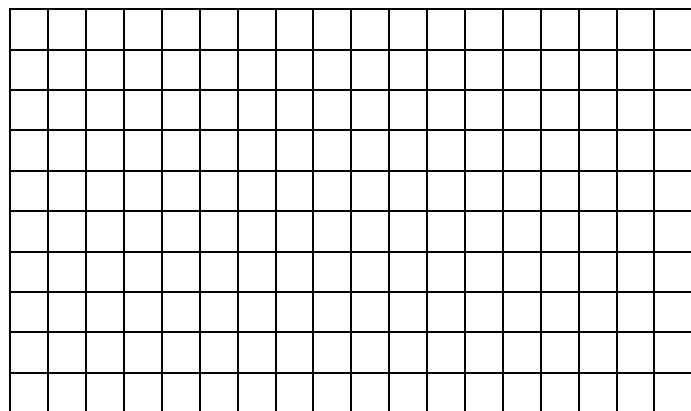
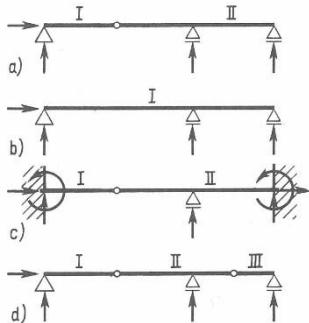
System ist statisch unbestimmt mit $k = (a + z) - 3 \cdot n$
als Grad der Unbestimmtheit: einfache, zweifach, ...

$$a + z < 3 \cdot n$$

Das System ist verschieblich

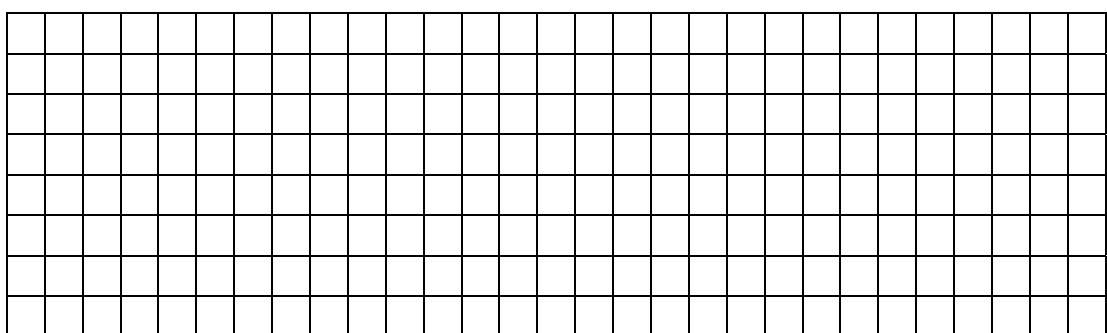
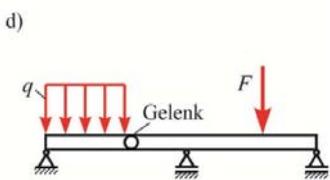
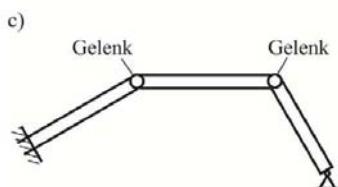
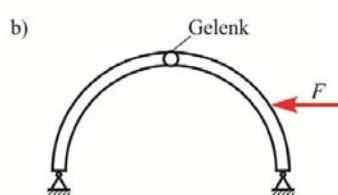
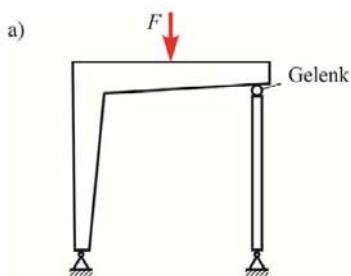
Beispiel

Auf ihre statische Bestimmtheit sind folgende Tragwerke zu untersuchen



Beispiel

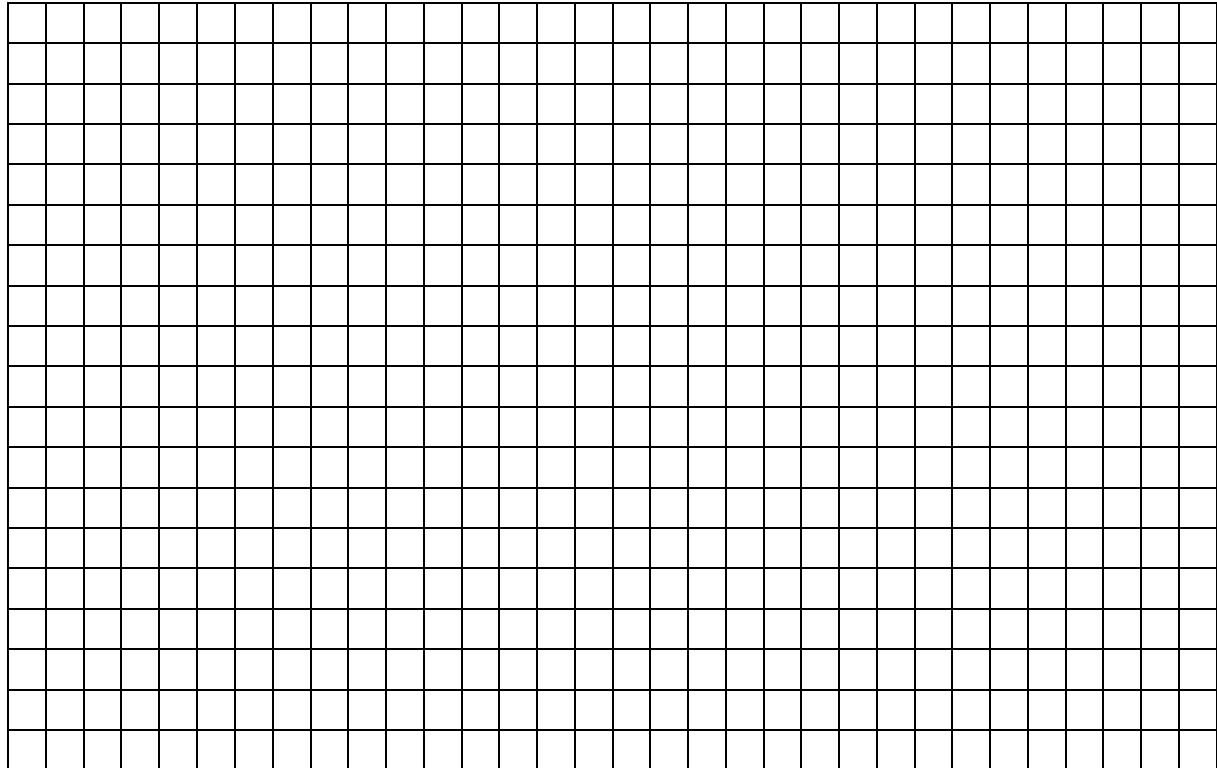
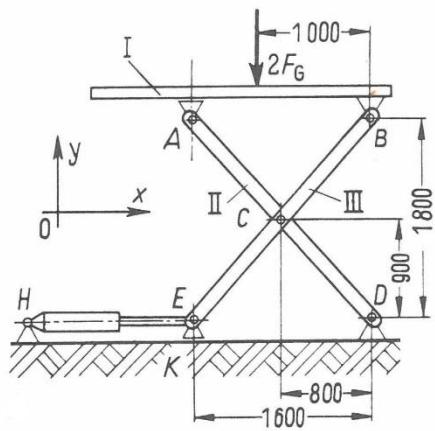
Die statische Bestimmtheit ist nachzuweisen



5.1 Rechnerische Behandlung von Systemen aus starren Scheiben

- Überprüfung der statischen Bestimmtheit
- Zerlegen des Systems in einzelne Scheiben (Schnitte in Gelenken)
- Eintragen von allen von außen angreifenden Kräften, Auflager- und Zwischenreaktionen an den einzelnen Scheiben
- Erstellen des linearen Gleichungssystems
- Lösen des Gleichungssystems (hier kommt die Mathematik ins Spiel...)

Beispiel



6 Literaturverzeichnis

- [1] O. Romberg und N. Hinrichs, Keine Panik vor Mechanik, Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlag, 2006.
- [2] H. A. Richard und M. Sander, Technische Mechanik. Statik, 5 Hrsg., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016.
- [3] G. Schumpich, G. Holzmann und H. Meyer, Technische Mechanik Teil 1 Statik, Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1990.
- [4] K. Kabus, Mechanik und Festigkeitslehre, 7. Auflage Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2012.
- [5] W. Kulisch, Technische Mechanik für Dummies, 2. Hrsg., Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2015.
- [6] J. Dankert und H. Dankert, Technische Mechanik, 7. Hrsg., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [7] M. Mayr, Technische Mechanik, 8. Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2015.
- [8] U. Gabbert und I. Raeke, Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure, 7. Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2013.
- [9] A. Böge, Technische Mechanik, 30. Hrsg., Wiesbaden: Springer Verlag, 2013.

DHBW Mosbach - Campus Bad Mergentheim

Technische Mechanik 1

Skript zur Vorlesung

Siegismund, Volker

24.11.2016



INHALT

1	VORBEMERKUNGEN	3
1.1	Physikalische Größen	3
1.2	Richtungssinn.....	4
1.3	Handwerkszeug.....	4
1.4	Abbildungen in diesem Skript.....	4
2	FRAGESTELLUNG DER STATIK	5
3	KRÄFTE UND IHRE WIRKUNGEN	6
3.1	Darstellung von Kräften	6
3.2	Äußere Kräfte	7
3.3	Reaktionskräfte und innere Kräfte.....	8
3.4	Axiome der Kraft.....	10
4	KRÄFTESYSTEME	12
4.1	Zentrales ebenes Kräftesystem.....	12
4.1.1	Zeichnerische Lösung.....	13
4.1.2	Rechnerische Lösung	14
4.1.3	Gleichgewichtsbedingungen.....	17
4.2	Allgemeines ebenes Kräftesystem	21
4.2.1	Zeichnerische Lösung.....	21
4.2.2	Rechnerische Lösung	21
5	SYSTEME AUS STARREN SCHEIBEN UND EBENE FACHWERKE.....	26
5.1	Rechnerische Behandlung von Systemen aus starren Scheiben	28
6	LITERATURVERZEICHNIS	33

1 Vorbemerkungen

Willkommen zur Technischen Mechanik 1 – einem klassischen „Loser-Fach“ [1] der Ingenieurwissenschaften!

Technische Mechanik = Lehre von Kräften, Bewegungen,
Verformungen und Spannungen von/in Bauteilen

TM1: Lehre von Kräften (ohne Bewegung=Statik), Verformungen und Spannungen

TM2: Lehre von Kräften (mit Bewegungen=Kinetik): kommt im 2. Semester

Das vorliegende Skript dient zur Begleitung der Vorlesung. Es empfiehlt sich jedoch, vorlesungsbegleitend Literatur zu studieren, um den behandelten Stoff zu vertiefen. Die im Literaturverzeichnis angegebenen Bücher sind rundum zu empfehlen. Einige davon sind als online-Dokumente erhältlich!

1.1 Physikalische Größen

Internationales (metrisches) Einheitensystem (SI)

Größe	Einheitenname	Formelzeichen	Einheit
Länge	Meter	l, s	m
Zeit	Sekunde	t, τ	s
Masse	Kilogramm	m	kg
Kraft	Newton	F	N

Hinweis:

$[F]=N$ ✓

$F [N]$ ✗

1.2 Richtungssinn

Vereinbarung zur mathematischen Lösung von Aufgaben der technischen Mechanik

Koordinatensystem mit positiver Achsen- und Momentenrichtung

1.3 Handwerkszeug

Zur Lösung von Aufgaben in der Technischen Mechanik 1 werden u.a. zeichnerische Methoden angewandt. Daher ist es unerlässlich, dass ein Geodreieck, ein Lineal (zur Parallelverschiebung), Bleistift sowie Radiergummi dabei sind. Es empfiehlt sich, die zeichnerischen Lösungsansätze auf kariertem Papier durchzuführen.

Für die rechnerischen Methoden gibt's den Taschenrechner.

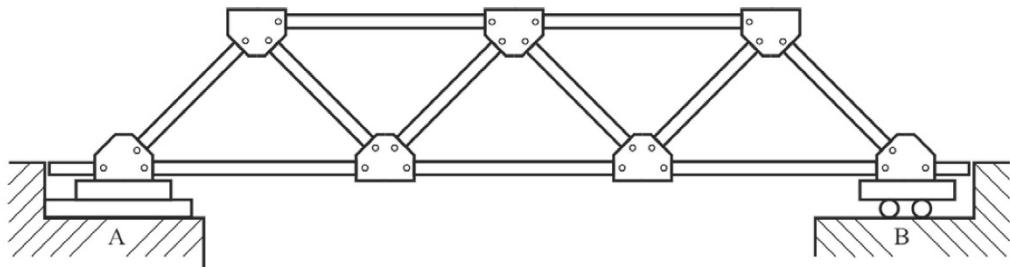
1.4 Abbildungen in diesem Skript

Die meisten Abbildungen in diesem Skript stammen aus [2], [3] und [4]. Zur besseren Lesbarkeit wird an den Abbildungen die Quellenangabe weggelassen.

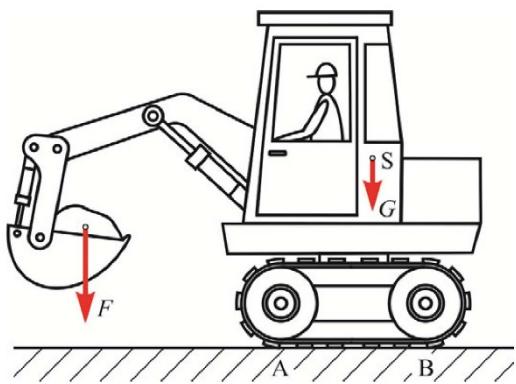
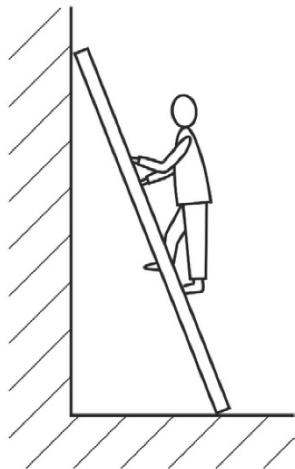
Packen wir's an!

2 Fragestellung der Statik

- Belastung in den Brückenlagern
- Belastung in den Streben



- Bei welchem
 - Winkel
 - Höhe der Person
 - Reibungssituationrutscht die Leiter?
- Wie groß darf die gehobene Last sein, damit Standsicherheit gegeben ist?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte?
- Wie groß ist die Zylinderkraft?
- Welchen Einfluss hat das Körpergewicht?

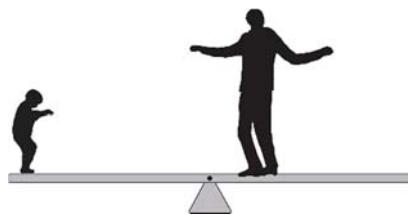


3 Kräfte und ihre Wirkungen

Kraft Einwirkung auf einen Körper, der diesen im Gleichgewicht hält (Auflager-/Reaktionskräfte), beschleunigt (äußere Kräfte) oder verformt (innere Kräfte)

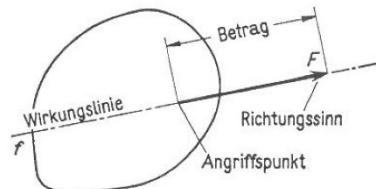
Kräfte sind *vektorielle* (d.h. richtungsabhängige) Größen, dargestellt mit \vec{F}

Beispiel Wippe



3.1 Darstellung von Kräften

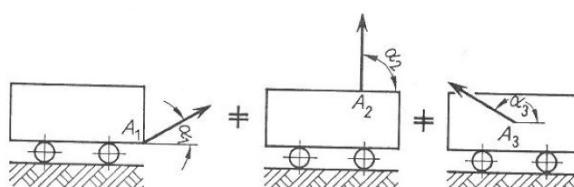
Einzelkraft Die an einem Körper angreifende Kraft wird durch einen Pfeil gekennzeichnet. Der Beginn des Pfeils deutet den *Angriffspunkt* an, die Richtung des Pfeils, die *Wirkrichtung* der Kraft, die Länge des Pfeils, den *Betrag* der Kraft.



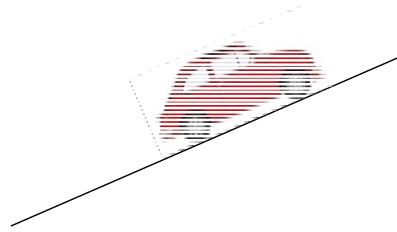
Zur eindeutigen Beschreibung einer Kraft F gehören demnach zwingend die Angaben:

- Betrag
- Angriffspunkt
- Wirklinie und Richtung (z.T. eindeutig vorgegeben, z.B. Gewichtskraft \vec{F}_G)

Beispiel Gleich große Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten bzw. Wirklinien



Indizes Angriffspunkt der Kraft, z.B. F_A , F_B
 Art der Kraft, z.B. F_G (Gewichtskraft), F_n (Normalkraft)



3.2 Äußere Kräfte

Äußere Kräfte greifen an jedem Masseteilchen eines Volumenkörpers an, idealisiert werden Sie jedoch zusammengefasst im Schwerpunkt angreifend dargestellt.

Gewichtskraft F_G

Gewichtskraft F_G greift stets an, Angriffspunkt ist der Schwerpunkt S , Wirklinie ist senkrecht nach unten gerichtet

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$



Beschleunigungskraft F_B

Bewegungsänderungen erfolgen unter dem Einfluss von Beschleunigungskräften. Angriffspunkt ist der Schwerpunkt S , Wirklinie entweder durch Bahn oder als Funktion vorgegeben

$$\vec{F}_B = m \cdot \vec{a}$$

- TM2

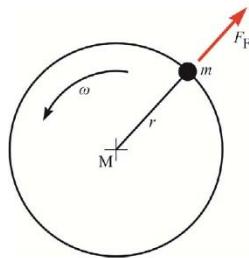


Fliehkraft F_F

Bei Kreisbewegungen wirkt stets eine Fliehkraft. Angriffspunkt ist der Schwerpunkt, Wirkrichtung radial vom Kreismittelpunkt nach außen.

$$\vec{F}_F = m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2$$

- TM2



3.3 Reaktionskräfte und innere Kräfte

Reaktionskräfte

Stützkräfte oder Lagerreaktionen, die den äußereren Kräften entgegenwirken und eine Bewegung eines Körpers verhindern.
-> Auslegung von Lagerstellen

Bildliche Darstellung:

Lagerungsart	Lagerreaktionen
Loslager	 z.B. Rolle
Festlager	 z.B. Gelenk
Einspannung	 z.B. Schweißverbindung

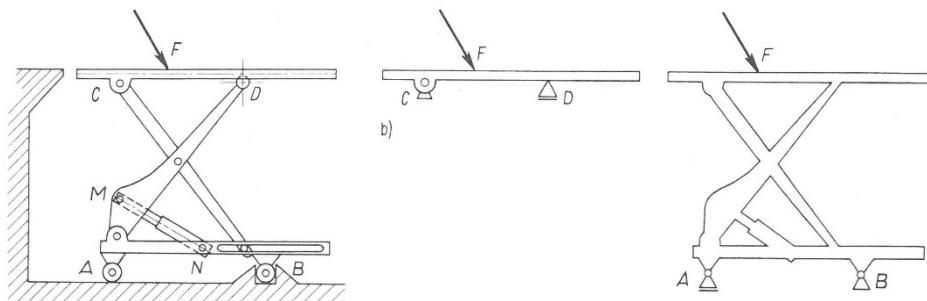
Methode: Freimachen (-schneiden)

Nach [1]

„Das Wichtigste im Leben von MechanikerInnen fängt mit „F“ an und hört mit „n“ auf. Es ist etwas, an das man immer denken muss! Leider wird es viel zu selten und in den wenigsten Fällen mit der notwendigen Sorgfalt und Liebe gemacht und führt dadurch zu allerlei Problemen. Das muss nicht so sein, wenn man von Anfang an lernt, damit richtig umzugehen: die Rede ist vom Freischneiden.“

Beispiel

Hebebühne



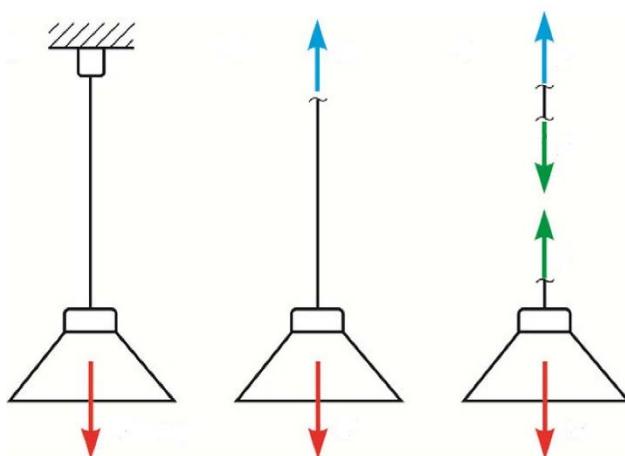
Übung

Skizzieren Sie die Konstruktion der Personenbühne am Eingang Schloss 10 entsprechend der obigen Abbildung.

Innere Kräfte

Durch Aufschneiden an einer beliebigen Stelle können die dort wirkenden Kräfte ermittelt werden.
-> Dimensionierung von Bauteilen

Methode: Schnitt (-methode): innere Kräfte werden zu äußeren Kräften



3.4 Axiome der Kraft

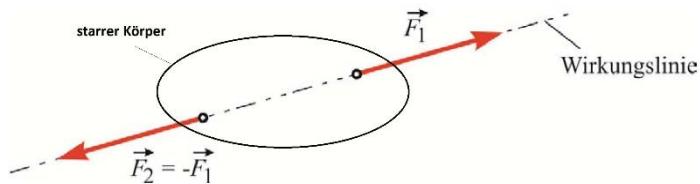
Annahme

Die im Rahmen dieser Vorlesungen betrachteten Körper werden als **starr** betrachtet („Starrer Körper“), d.h. Verformungen in Folge von Krafteinwirkungen werden vernachlässigt

Trägheitsaxiom

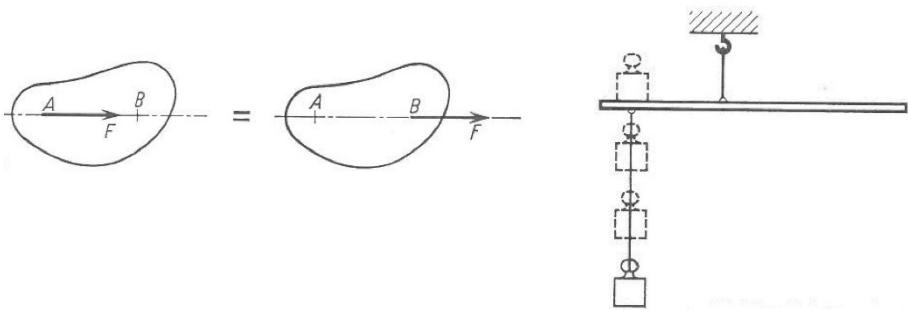
Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe (bzw. gleichförmige geradlinige Bewegung) solange er nicht durch eine angreifende Kraft zur Änderung des Zustands gezwungen wird.

Oft auch als Gleichgewichtsaxiom dargestellt:



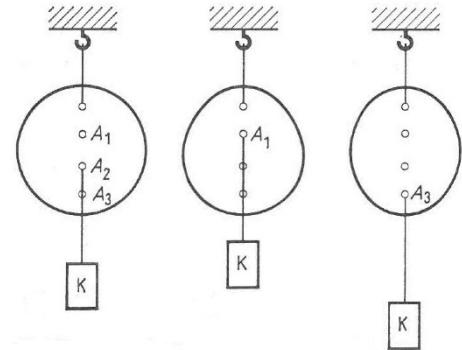
Verschiebungssatz

Der Angriffspunkt einer Kraft darf beim starren Körper entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der Wirkung auf den Körper etwas ändert



BEACHTE

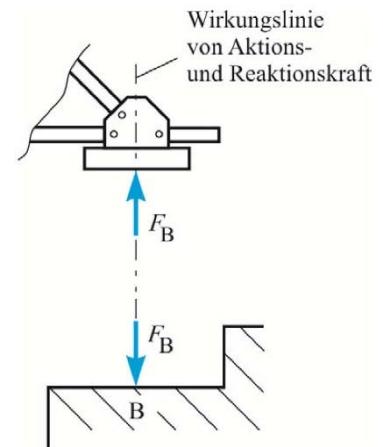
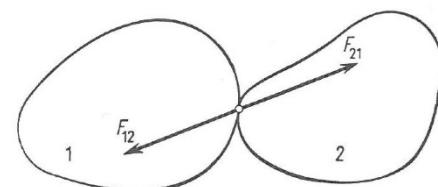
am **nicht starren** Körper kann Verschiebeaxiom nicht angewendet werden



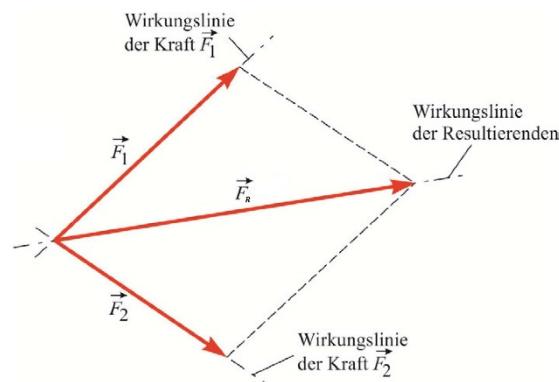
Reaktionsaxiom

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, liegen auf der gleichen Wirklinie, sind aber entgegengesetzt gerichtet

„actio = reactio“

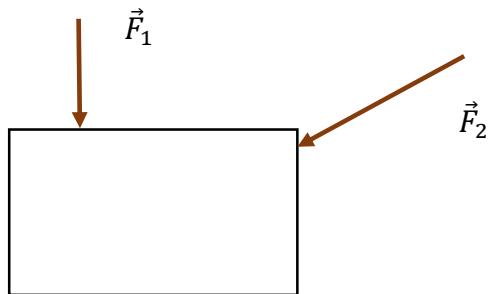


Parallelogrammaxiom Die Wirkung zweier Kräfte F_1 und F_2 mit einem gemeinsamen Angriffspunkt ist gleichwertig mit der Wirkung einer einzelnen Kraft F_R (Resultierende), deren Vektor sich als Diagonale des mit den Vektoren F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ergibt und die den gleichen Angriffspunkt hat wie F_1 und F_2 .



Beispiel

Bestimmen Sie den Angriffspunkt A, die Wirkrichtung bzw. die Größe der Resultierende Kraft F_R



4 Kräftesysteme

= Körper, Baugruppen, etc. an denen eine oder mehrere Kräfte angreifen.

Zunächst Betrachtung des Spezialfalls „Zentrales Ebenes Kräftesystem“ (auch „Kräftegruppe“) danach „Allgemeines ebenes Kräftesystem“.

Räumliche Kräftesysteme: Selbststudium bei Bedarf.

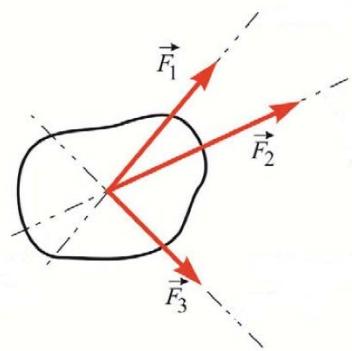
4.1 Zentrales ebenes Kräftesystem

= alle angreifenden Kräfte liegen in einer Ebene und haben einen gemeinsamen Angriffspunkt

Wichtige Aufgaben der Statik sind hier die Ermittlung der Resultierenden einer Kräftegruppe, die Zerlegung einer Kraft nach verschiedenen Richtungen und die Betrachtung des Gleichgewichts dieser Kräftegruppe

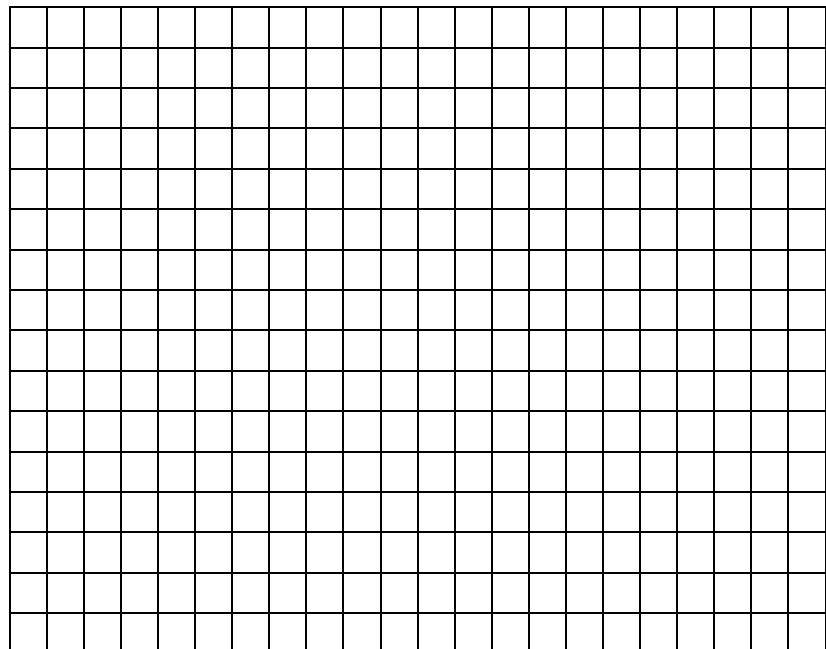
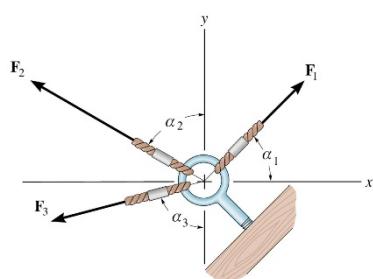
4.1.1 Zeichnerische Lösung

Zeichnerische Lösung mit Kräfteplan (Kräftemaßstab z.B. $1kN \equiv 1cm$)



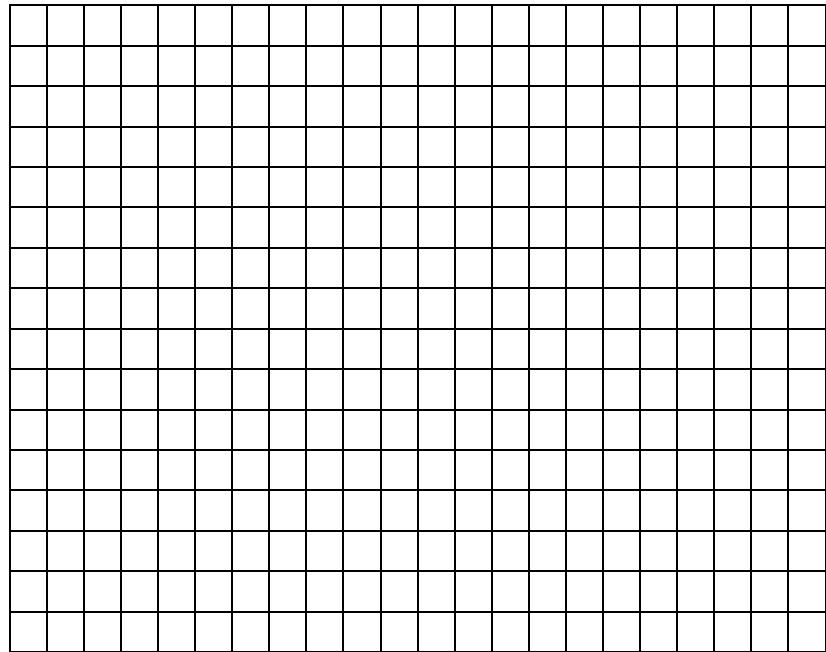
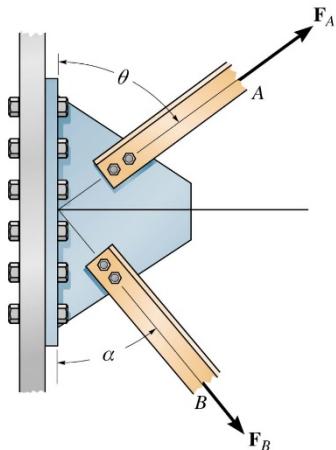
Beispiel

Bestimmen Sie zeichnerisch den Betrag und die Richtung der resultierenden Kraft F_R . Geg.: $F_1=300N$, $F_2=400N$, $F_3=200N$, $\alpha_1=45^\circ$, $\alpha_2=60^\circ$, $\alpha_3=75^\circ$



Beispiel

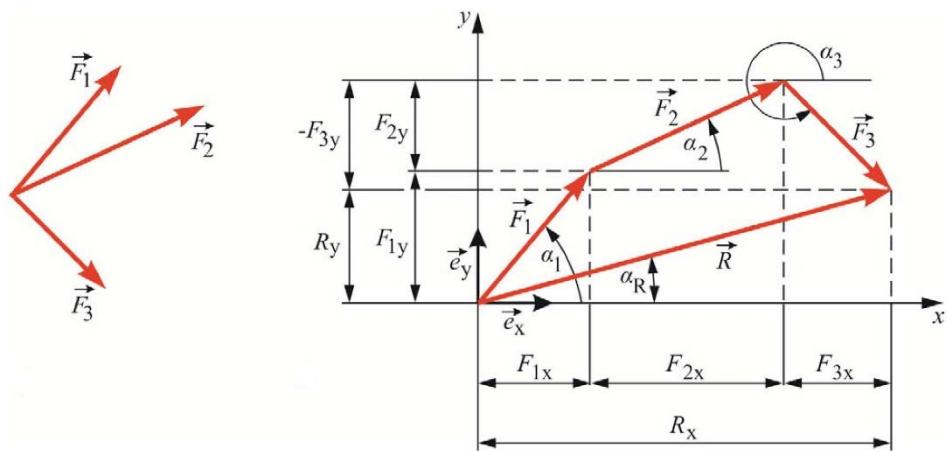
Man bestimme zeichnerisch den Winkel θ , wenn folgende Größen gegeben sind: $F_A=8\text{kN}$, $F_B=6\text{kN}$, $\alpha=40^\circ$, Wirklinie der resultierenden Kraft F_R soll horizontal sein.



- U.U. ist die zeichnerische Lösung nicht immer „komfortabel“ bzw. nicht hinreichend genau

4.1.2 Rechnerische Lösung

Rechnerische Lösung Zerlegung aller Kraftvektoren in x- und –Komponente
(Parallelogrammaxiom)



Die Einzelkraft F_i lässt sich mit den Basisvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y darstellen als

$$\vec{F}_i = \vec{e}_x \cdot F_{ix} + \vec{e}_y \cdot F_{iy}$$

Für die x-Komponente der Einzelkraft F_i gilt:

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

Für die y-Komponente der Einzelkraft F_i gilt:

$$F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$

Resultierende R

$$R_x = \sum_{n=1}^i F_{nx} = \sum_{n=1}^i F_n \cdot \cos \alpha_n$$

$$R_y = \sum_{n=1}^i F_{ny} = \sum_{n=1}^i F_n \cdot \sin \alpha_n$$

Betrag der Resultierenden

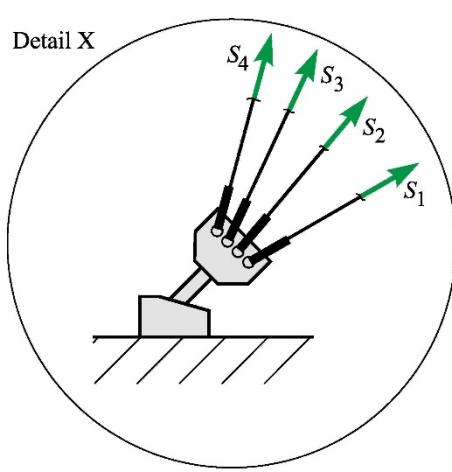
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Richtung der Resultierenden

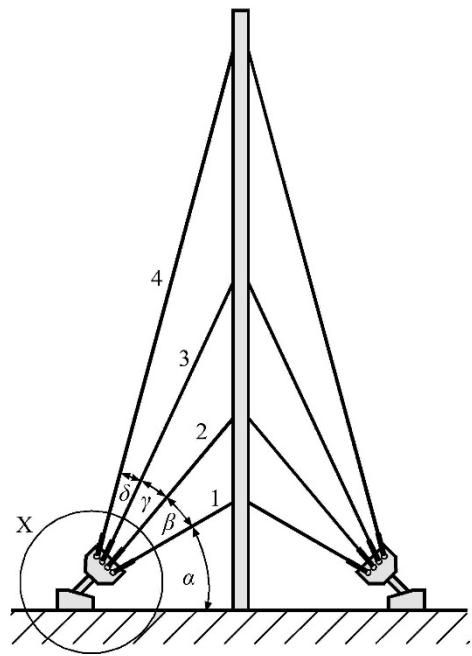
$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

Beispiel

Ein Funkmast wird durch mehrere Drahtseile gehalten. Je vier dieser Drahtseile sind mittels einer Halterung im Boden verankert. Wie groß ist die resultierende Kraft der Seile 1 bis 4 und in welche Richtung zeigt sie? (Lösung rechnerisch)



geg.: $S_1 = 10 \text{ kN}$, $S_2 = 15 \text{ kN}$, $S_3 = 20 \text{ kN}$,
 $S_4 = 25 \text{ kN}$
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 15^\circ$, $\delta = 10^\circ$



4.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

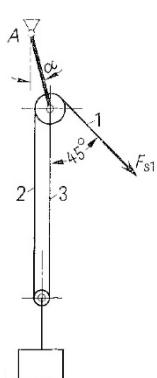
- Statik:
- = Körper befindet sich im Gleichgewicht
 - = Summe der an einem Körper angreifenden Kräfte ist Null
 - = Resultierende ist Null
 - = Kraftvektor am angreifenden Körper ist geschlossen

Greift an einer zentralen Kräftegruppe mindestens eine (mit Wirklinie und Betrag) gegebene Kraft F an, können mit dieser Gleichgewichtsbedingung max. zwei Unbekannte (Wirklinien und/oder Beträge von weiteren angreifenden Kräften) bestimmt werden:

- a) Beträge zweier Kräfte
- b) Wirkungslinien zweier Kräfte
- c) Betrag und Wirkungslinie einer Kraft
- d) Betrag einer Kraft und Wirkungslinie einer weiteren Kraft

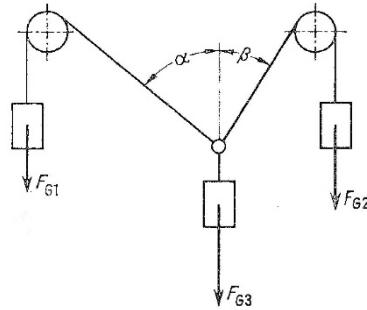
Zuordnung zu den o.g. Fällen:

Fall:



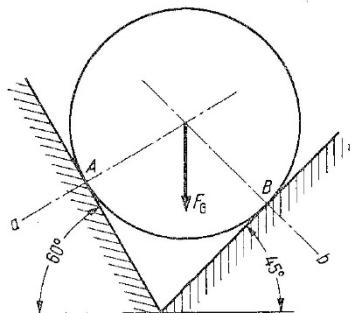
Geg.: F_{S1} , 45°

Fall:



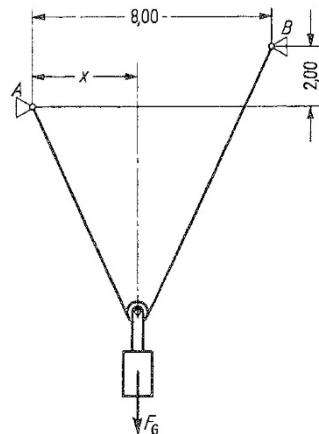
Geg.: F_{G1} , F_{G2} und F_G

Fall:



Geg.: F_G , 60° , 45°

Fall:

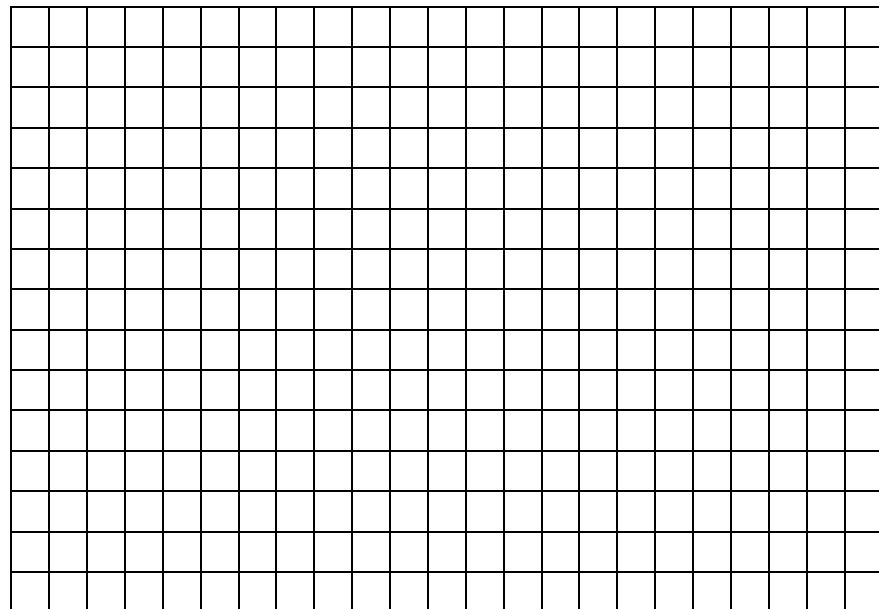
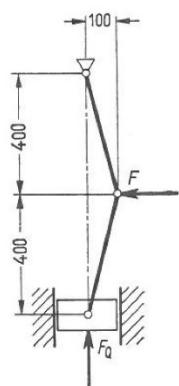


Geg.: F_G

Zeichnerische Gleichgewichtsbedingung: Krafteck am angreifenden Körper ist geschlossen

Beispiel

Welche Kraft F muss an der Kniehebelpresse aufgebracht werden, um eine Presskraft $F_Q=3\text{kN}$ zu erreichen?



Rechnerische Gleichgewichtsbedingungen: Summe aller x- und y-Komponenten ist gleich Null

$$\sum F_x = 0$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

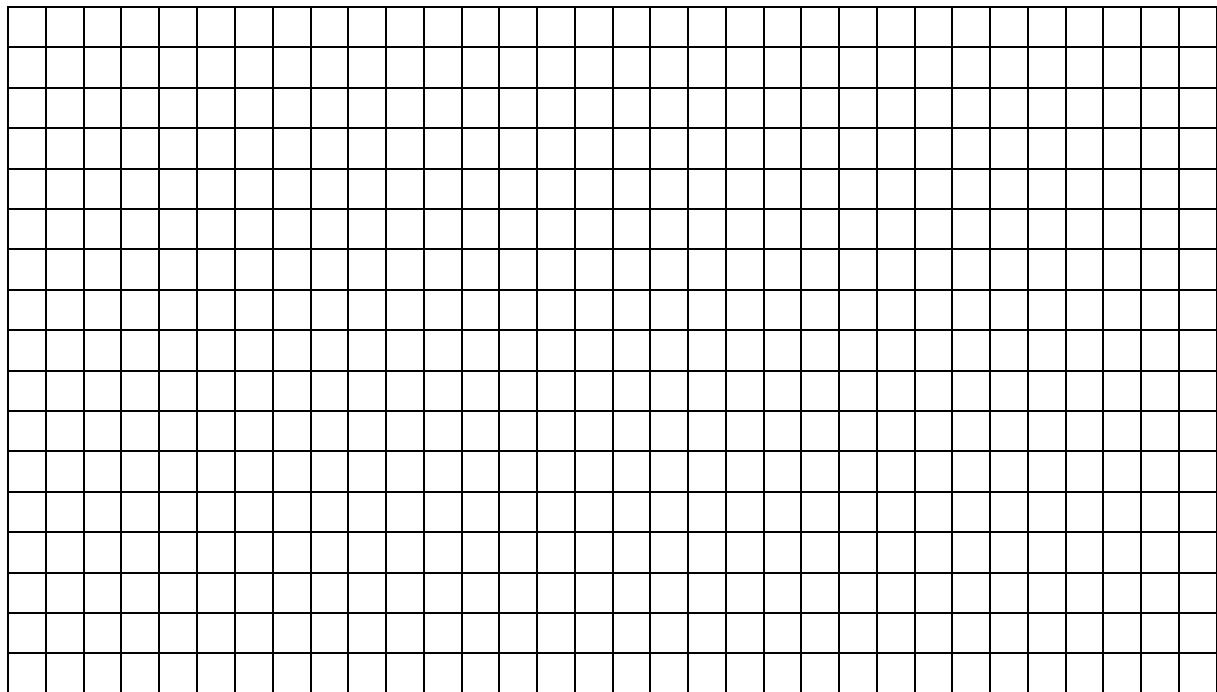
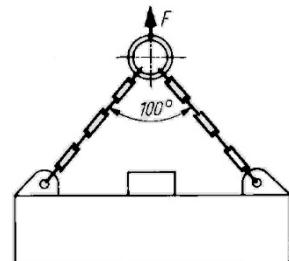
Gleichgewichtskraft: Betrag und Richtung (Quadrant durch Überlegung!)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \alpha_r = \frac{F_y}{F_x}$$

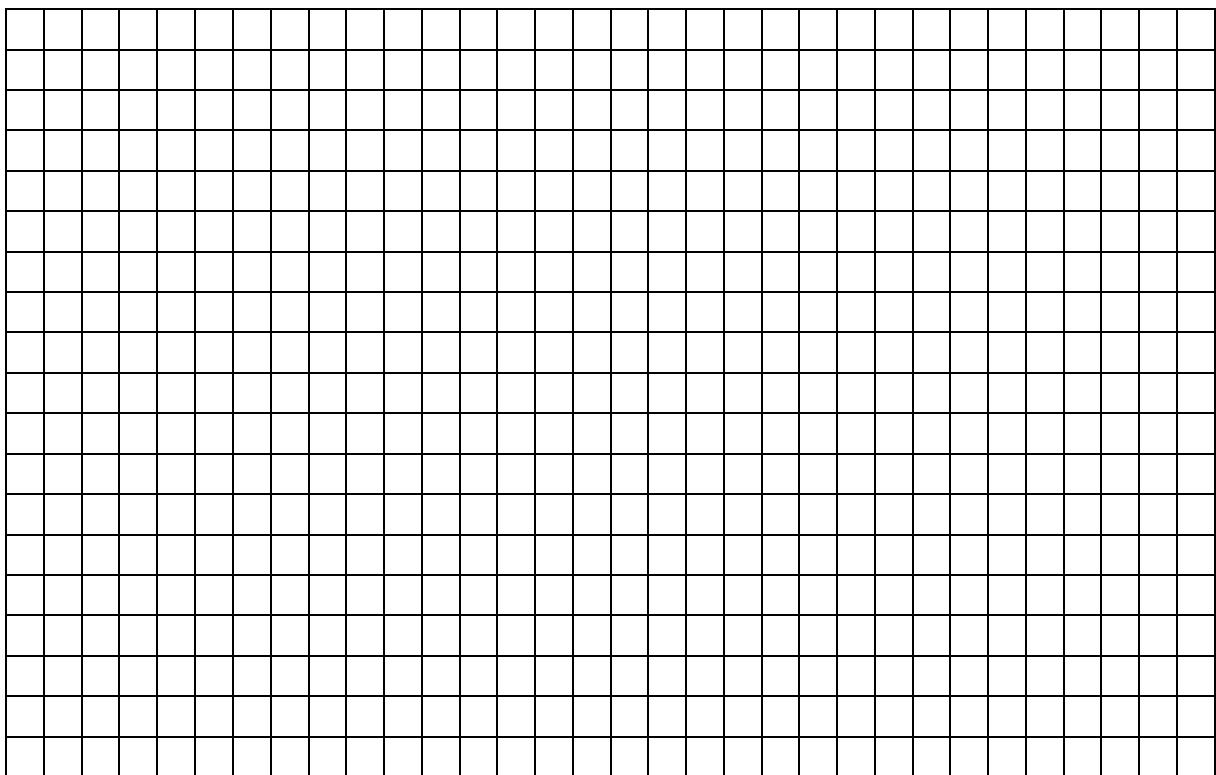
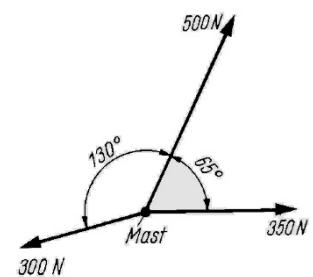
Beispiel

Die max. Kettenlast beträgt $F_k=10\text{kN}$. Welche max. Last darf der Magnet anheben?
(zeichnerisch und rechnerisch)



Beispiel:

Unter welchem Winkel muss ein Seil angebracht werden, um den Masten im Gleichgewicht zu halten? Wie groß ist die Seilkraft? (zeichnerisch und rechnerisch)



So und nun verstehen Sie auch, wie solche Programme (z.B. www.tm-interaktiv.de) funktionieren. Rechnen Sie die o.g. Beispiele mit dem Programm doch einmal nach!

4.2 Allgemeines ebenes Kräftesystem

= alle angreifenden Kräfte liegen in einer Ebene, die Wirklinien schneiden sich aber nicht in einem gemeinsamen Punkt

⇒ Die Lage der resultierenden Kraft ist (erst einmal) nicht bekannt

4.2.1 Zeichnerische Lösung

Bei Kräftesystemen mit mehr als zwei angreifenden Kräften stehen verschiedene Verfahren für eine zeichnerische Lösung zur Verfügung (z.B. Seileckverfahren, Schlusslinienverfahren, siehe Literatur), welche in Zeiten von (Hochleistungs-)Rechnern i.d.R. nicht mehr eingesetzt und daher hier auch nicht behandelt werden.

Vorüberlegung

Holzmann S. 34

Resultierende zweier Kräfte soll bestimmt werden

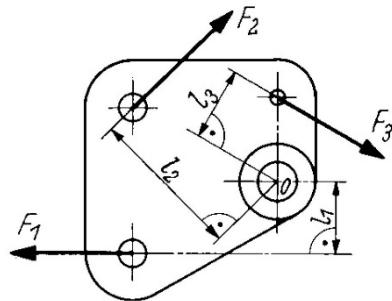
- a) Wirklinien schneiden sich
- b) Wirklinien fallen zusammen
- c) Wirklinien parallel, Beträge unterschiedlich
(kann auf a) zurückgeführt werden)
- d) Wirklinien parallel, Beträge gleich groß, Wirkrichtung
entgegengesetzt (kann nicht auf a) zurückgeführt
werden)
-> Kräftepaa

4.2.2 Rechnerische Lösung

Die Größe und Richtung der resultierenden Kraft eines beliebigen Kräftesystems wird analog zur Vorgehensweise des zentralen Kräftesystems bestimmt (zwei Gleichungen für zwei Unbekannte). Allerdings kann die Wirklinie/der Richtungssinn (dritte Unbekannte) mit den bisher zur Verfügung stehenden beiden Gleichungen nicht bestimmt werden. Daher zunächst Einführung von

Moment und Kräftepaar

Lagebestimmung der Einzelkräfte: senkrechter Abstand l der Wirklinie zu einem Bezugspunkt O (**Hebelarm**)



Statisches Moment M

Produkt aus Kraft und senkrechtem Abstand er Wirklinie zu einem Bezugspunkt

$$M = F \cdot l \quad \text{in Nm}$$

Vereinbarung

Linksdrehende Momente sind positiv (+)
Rechtsdrehende Momente sind negativ (-)

Darstellung von Momenten

Pfeil mit Doppelspitze oder
Kreisbogen mit Richtungssinn

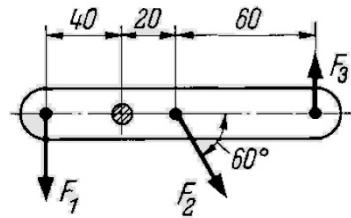
Momentensatz Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte

$$M_R = \sum M_i = M_1 + M_2 + \dots + M_n = F_R \cdot l_R$$

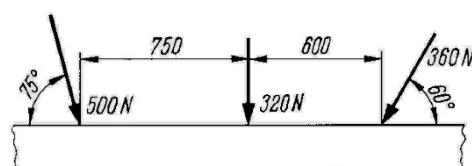
$$M_R = \sum (F_i \cdot l_i) = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + \dots + F_n \cdot l_n$$

Beispiel Hebel Das an der Welle angreifende resultierende Moment und dessen Drehsinn sind zu bestimmen.

Geg.: $F_1 = 60\text{N}$, $F_2 = 100\text{N}$, $F_3 = 20\text{N}$

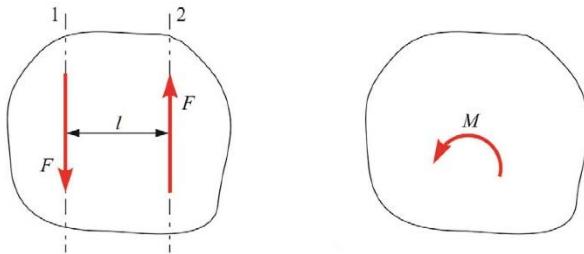


Beispiel Balken An einem Träger wirken drei Kräfte. Es sind die Resultierende F_R , ihr Abstand zur mittleren Kraft sowie ihr Winkel zur Horizontalen zu bestimmen.



Kräftepaar

Zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte mit parallelen Wirklinien bilden ein **Kräftepaar**



BEACHTE

Resultierende Kraft = Null, jedoch übt das Kräftepaar ein Moment M auf den Körper aus

Allgemein gilt

Ohne Kräftepaar keine Drehbewegung

Gleichgewichtsbestimmung

Ein beliebiges Kräftesystem ist im Gleichgewicht (=Statik), wenn weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Drehmoment vorhanden sind.

Mathematische Formulierung

$$\sum F_x = 0$$

Summe aller Kräfte in x-Richtung = Null

$$\sum F_y = 0$$

Summe aller Kräfte in y-Richtung = Null

$$\sum M_{i,O} = 0$$

Summe aller Momente um einen Punkt O = Null

Diese Gleichungen werden eingesetzt, um z.B. Auflager oder Schnittreaktionen zu bestimmen.

Vorgehensweise

① Freimachen: Skizze des Bauteils/der Bauteile erstellen mit allen angreifenden Kräften, Dimensionen, etc.

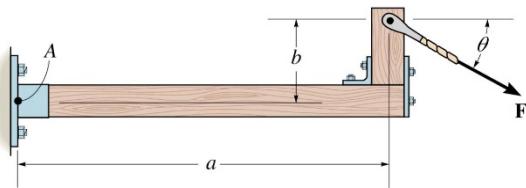
② u.U. x- und y-Komponenten der schräg wirkenden Kräfte bestimmen

③ Gleichgewichtsbedingungen (s.o.) aufstellen und nach den gesuchten Größen umstellen und lösen

④ u.U. gesuchte Kräfte bzw. deren Richtungswinkel aus deren x- und y-Komponenten bestimmen

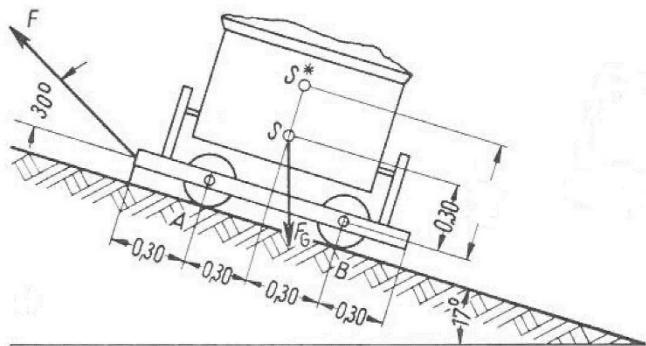
Beispiel

Bestimmen Sie das im Punkt A angreifende Drehmoment M sowie die Auflagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay} , wenn folgende Größen gegeben sind:
 $F=200\text{N}$, $a=2\text{m}$, $b=0,5\text{m}$, $\theta=35^\circ$



Beispiel

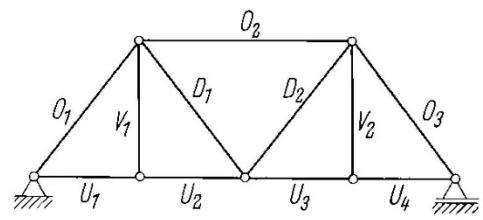
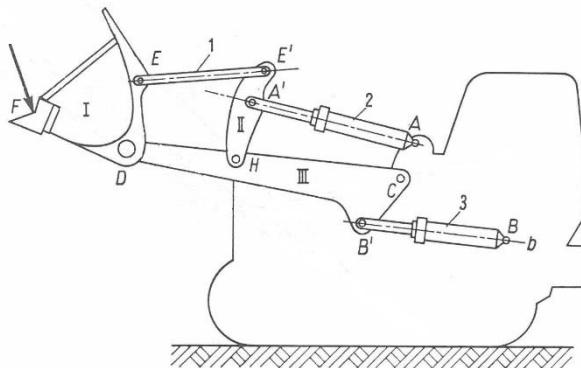
Eine Lore wird von einem Seil auf einer geneigten Fahrbahn festgehalten. Die Gewichtskraft $F_G=3\text{kN}$ greift im Schwerpunkt S an. Zu bestimmen sind die Seilkraft F sowie die Auflagerkräfte F_A und F_B .



5 Systeme aus starren Scheiben und ebene Fachwerke

Ziel

Bestimmung von Auflagerkräften, Zwischenreaktionen und Kräften in den Stäben



Statische Bestimmtheit

= Voraussetzung zur Bestimmung der Auflagerreaktionen

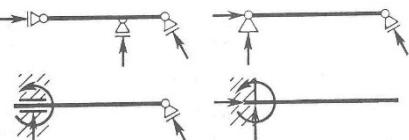
Eine (starre) Scheibe

3 Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_{i,O} = 0$)

3 unabhängige Lagerreaktionen

drei Kräfte oder

zwei Kräfte und ein Moment



Mehrere Scheiben

Anwendung der Schnittmethode: Zwischenreaktionen als zusätzliche Unbekannte

Dann gilt

n Anzahl der Teile, in die das System zerlegt wird

a Anzahl der unabhängigen Lagerreaktionen

z Anzahl der unabhängigen Zwischenreaktionen

$$a + z = 3 \cdot n$$

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt

$$a + z > 3 \cdot n$$

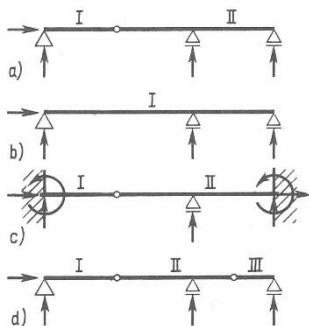
System ist statisch unbestimmt mit $k = (a + z) - 3 \cdot n$
als Grad der Unbestimmtheit: einfache, zweifach, ...

$$a + z < 3 \cdot n$$

Das System ist verschieblich

Beispiel

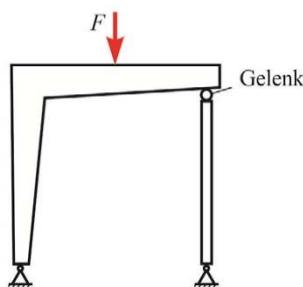
Auf ihre statische Bestimmtheit sind folgende Tragwerke zu untersuchen



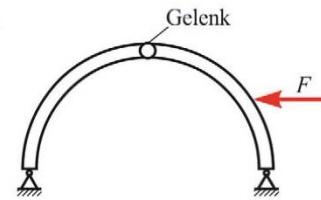
Beispiel

Die statische Bestimmtheit ist nachzuweisen

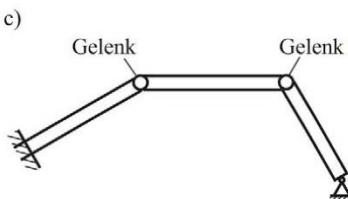
a)



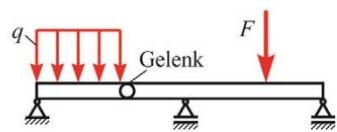
b)



c)



d)

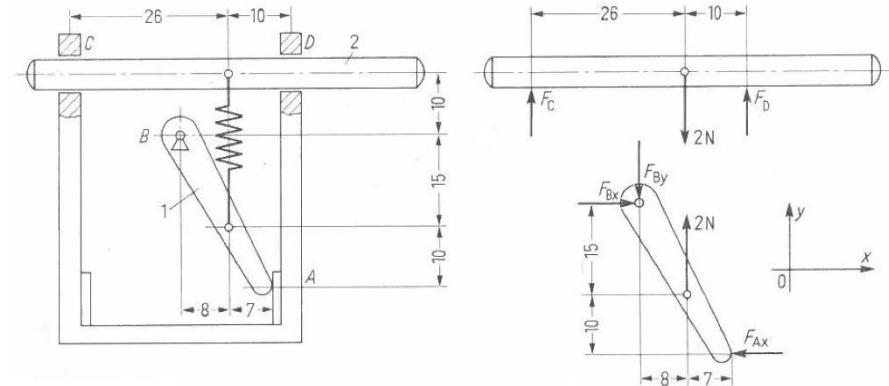


5.1 Rechnerische Behandlung von Systemen aus starren Scheiben

- Überprüfung der statischen Bestimmtheit
- Zerlegen des Systems in einzelne Scheiben (Schnitte in Gelenken)
- Eintragen von allen von außen angreifenden Kräften, Auflager- und Zwischenreaktionen an den einzelnen Scheiben
- Erstellen des linearen Gleichungssystems
- Lösen des Gleichungssystems (hier kommt die Mathematik ins Spiel...)

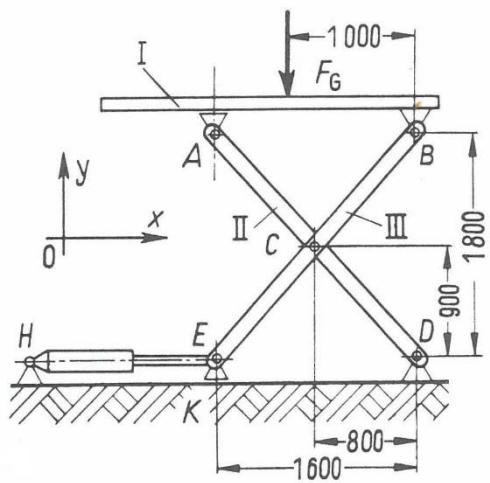
Beispiel

Der Hebel wird von einer Feder mit der Kraft $F=2N$ belastet. Zu bestimmen sind die Anpresskraft F_A , die Auflagerkräfte F_{Bx} und F_{By} sowie die Auflagerkräfte F_C und F_D sowie



Beispiel

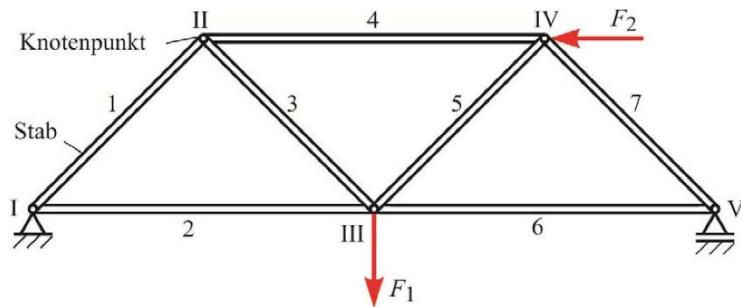
Zu bestimmen sind die Auflagerkräfte in den Punkten A bis D sowie die Kraft im Hydraulikzylinder. Geg.: $F_G = 6\text{kN}$



5.2 Rechnerische Behandlung von Ebenen Fachwerken

Fachwerke = Konstruktionen aus geraden starren Stäben

- Merkmale**
- Stäbe sind miteinander durch (reibungsfreie) Gelenke (=Knoten) verbunden
 - Jeder Stab ist nur an zwei Knoten angeschlossen
 - Äußere Kräfte greifen nur an Knotenpunkten an
 - In den Stäben treten nur Normalkräfte (=Kräfte entlang des Stabes) auf



Äußere statische Bestimmtheit

Behandlung des Fachwerks wie eine Scheibe (siehe Abschnitt 5)

Innere statische Bestimmtheit

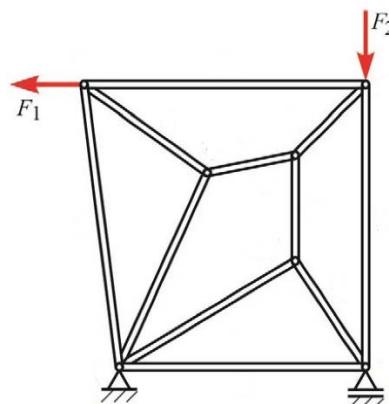
Unbekannte sind
s Stabkräfte und 3 Auflagerkräfte: $s+3$

Bekannt sind
2 Gleichungen pro Knoten k (Knoten=zentrales Kräftesystem mit $\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$)

$$s + 3 = 2 \cdot k \quad \text{oder} \quad s = 2 \cdot k - 3$$

Beispiel:

Überprüfen Sie die Äußere und innere statische Bestimmtheit des oben abgebildeten Fachwerks.



Beispiel:

Überprüfen Sie die äußere und die innere statische Bestimmtheit der abgebildeten Fachwerke

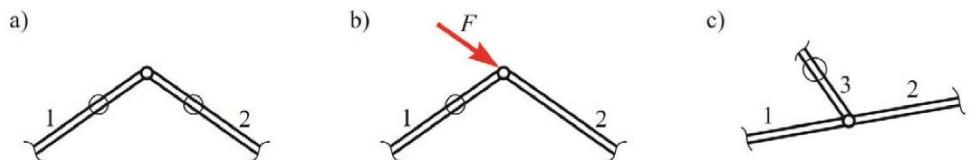
Holzmann S. 138, Abb 138.1

Nullstäbe

In diesen Stäben treten keine Kräfte auf, dienen jedoch der Stabilität von realen (d.h. mit Verformungen belasteten) Fachwerken
-> vor Berechnung des Fachwerks werden die Nullstäbe identifiziert

Erkennung:

- a) bei einem zweistäbigen unbelasteten Knoten sind beide Stäbe Nullstäbe.
- b) ist ein zweistäbiger Knoten in Richtung des einen Stabes belastet, ist der andere Stab ein Nullstab.
- c) Ein Nullstab tritt bei einem dreistäbigen unbelasteten Knoten auf, wenn die beiden anderen Stäbe in dieselbe Richtung zeigen.



Beispiel

Bestimmen Sie die Nullstäbe in dem abgebildeten Fachwerk

Holzmann, S. 142 Abb 142.2

Knotenpunktverfahren

Voraussetzung: äußere und innere statische Bestimmtheit

Verfahren

- 1) Für jeden Knoten werden die Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$) erstellt; x- und y-Komponenten der Stabkräfte aus Geometrie
- 2) Kräfte werden prinzipiell als Zugkräfte (d.h. vom Knoten weggerichtet) betrachtet.
- 3) Lösen des linearen Gleichungssystems (Matrizen-Rechnung)

Beispiel

Mathematische Lösung mit Matrizenrechnung (Darstellung hier mit 3 Unbekannten):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Aufgelöst nach den Unbekannten x

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

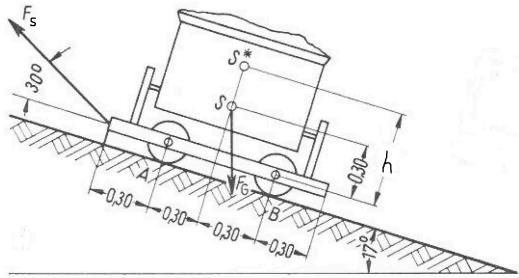
Lösungsverfahren

- GAUßsches Eliminationsverfahren Matrix-Funktion DHBW-Taschenrechner (max. 3 Unbekannte)
- WolframAlpha: =solve(Eingabe lineares Gleichungssystem; getrennt mit „;“)
- Excel =MMULT bzw. MINV-Funktion, Eingabe von Matrix A bzw. Matrix b

6 Literaturverzeichnis

- [1] O. Romberg und N. Hinrichs, Keine Panik vor Mechanik, Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlag, 2006.
- [2] H. A. Richard und M. Sander, Technische Mechanik. Statik, 5 Hrsg., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016.
- [3] G. Schumpich, G. Holzmann und H. Meyer, Technische Mechanik Teil 1 Statik, Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1990.
- [4] K. Kabus, Mechanik und Festigkeitslehre, 7. Auflage Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2012.
- [5] W. Kulisch, Technische Mechanik für Dummies, 2. Hrsg., Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2015.
- [6] J. Dankert und H. Dankert, Technische Mechanik, 7. Hrsg., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [7] M. Mayr, Technische Mechanik, 8. Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2015.
- [8] U. Gabbert und I. Raeke, Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure, 7. Hrsg., München: Carl Hanser Verlag, 2013.
- [9] A. Böge, Technische Mechanik, 30. Hrsg., Wiesbaden: Springer Verlag, 2013.

Frage: Welchen Abstand h darf der Schwerpunkt S^* von der Bezugslinie max. aufweisen, ohne dass sich das Vorderrad (im Auflagerpunkt A) unter dem Einfluss der Seilkraft F_S abhebt?



Zunächst: Koordinatensystem um 17° drehen (d.h. x -Achse in Richtung der Bahn)

Gleichgewichtsbedingung in x -Richtung:

$$\sum F_{ix} = 0 = F_G \cdot \sin 17 - F_s \cdot \cos 30$$

Damit wird die Seilkraft F_S :

$$F_S = F_G \cdot \frac{\sin 17}{\cos 30} = 3kN \cdot \frac{\sin 17}{\cos 30} = 1,013kN$$

Gleichgewichtsbedingung in y -Richtung:

$$\sum F_{iy} = 0 = F_A + F_B - F_G \cdot \cos 17 + F_s \cdot \sin 30$$

Wird nach der Frage nach x nicht benötigt!

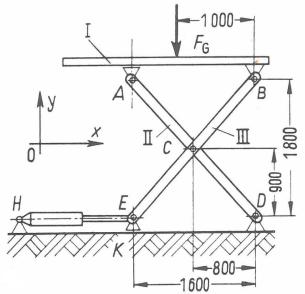
Gleichgewichtsbedingung Drehmomente um einen Punkt:

Geschickte Wahl des Drehpunktes: Auflager in B , zudem wird beim Anheben des Vorderrades die Auflagerkraft $F_A = 0$, dann gilt (mit h als Abstand des Schwerpunktes S^* zur Bezugsebene):

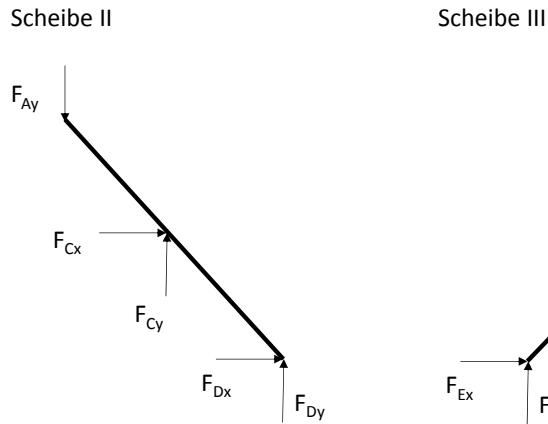
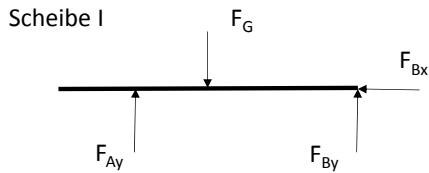
$$\sum M_{iB} = 0 = F_G \cdot \cos 17 \cdot 0,3m - F_s \cdot \sin 30 \cdot 0,9m - F_G \cdot \sin 17 \cdot h$$

aufgelöst nach h :

$$\begin{aligned} h &= \frac{F_G \cdot \cos 17 \cdot 0,3m - F_s \cdot \sin 30 \cdot 0,9m}{F_G \cdot \sin 17} \\ &= \frac{3kN \cdot \cos 17 \cdot 0,3m - 1,013kN \cdot \sin 30 \cdot 0,9m}{3kN \cdot \sin 17} = 0,46m \end{aligned}$$



Scheiben freischneiden und Kräfte einzeichnen (Hydraulikzylinder überträgt nur Kräfte in x-Richtung, daher kann Lager in Punkt E wie ein Festlager betrachtet werden):



Gleichgewichtsbedingungen für alle Scheiben aufstellen:

Scheibe I

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Bx} \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} - F_G + F_{By} \quad (2)$$

$$\sum M_{iB} = 0 = F_G \cdot 1m - F_{Ay} \cdot 1,6m \quad (3)$$

Scheibe II

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Cx} + F_{Dx} \quad (4)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = -F_{Ay} + F_{Cy} + F_{Dy} \quad (5)$$

$$\sum M_{iD} = 0 = F_{Ay} \cdot 1,6m - F_{Cx} \cdot 0,9m - F_{By} \cdot 0,8m \quad (6)$$

Scheibe III

$$\sum F_{ix} = 0 = -F_{Bx} - F_{Cx} + F_{Ex} \quad (7)$$

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ey} - F_{Cy} - F_{By} \quad (8)$$

$$\sum M_{iE} = 0 = F_{Cx} \cdot 0,9m - F_{Cy} \cdot 0,8m - F_{By} \cdot 1,6m \quad (9)$$

Lösung:

aus (3)

$$F_{Ay} = \frac{F_G}{1,6} = \frac{6kN}{1,6} = 3,75kN$$

in (2)

$$F_{By} = F_G - F_{Ay} = 6kN - 3,75kN = 2,25kN$$

aus (6)

$$0,8 \cdot F_{Cy} = 1,6 \cdot F_{Ay} - 0,9 \cdot F_{Cx} \quad (10)$$

(10) in (9)

$$0 = 0,9F_{Cx} - 1,6F_{By} - (1,6F_{Ay} - 0,9F_{Cx})$$

aufgelöst nach F_{Cx}

$$F_{Cx} = \frac{1,6F_{By} + 1,6F_{Ay}}{1,8} = \frac{1,6 \cdot 2,25kN + 1,6 \cdot 3,75kN}{1,8} = 5,33kN$$

in (6) (aufgelöst nach F_{Cy})

$$F_{Cy} = \frac{1,6F_{Ay} - 0,9F_{Cx}}{0,8} = \frac{1,6 \cdot 3,75kN - 0,9 \cdot 5,33kN}{0,8} = 1,5kN$$

aus (8)

$$F_{Ey} = F_{Cy} + F_{By} = 1,5kN + 2,25kN = 3,75kN$$

aus (7)

$$F_{Ex} = F_{Cx} = 5,33kN$$

aus (4)

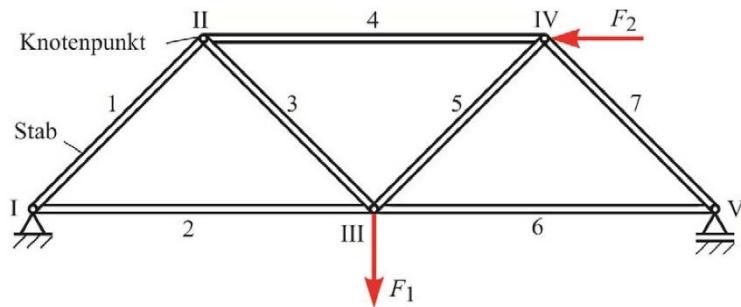
$$F_{Dx} = -F_{Cx} = -5,33kN$$

d.h. die eingezeichnete Richtung für F_{Dx} in der Freimachungsskizze ist falsch.

5.2 Rechnerische Behandlung von Ebenen Fachwerken

Fachwerke = Konstruktionen aus geraden starren Stäben

- | | |
|----------|--|
| Merkmale | Stäbe sind miteinander durch (reibungsfreie) Gelenke (=Knoten) verbunden
Jeder Stab ist nur an zwei Knoten angeschlossen
Äußere Kräfte greifen nur an Knotenpunkten an
In den Stäben treten nur Normalkräfte (=Kräfte entlang des Stabes) auf |
|----------|--|



Äußere statische Bestimmtheit

Behandlung des Fachwerks wie eine Scheibe (siehe Abschnitt 5)

Innere statische Bestimmtheit

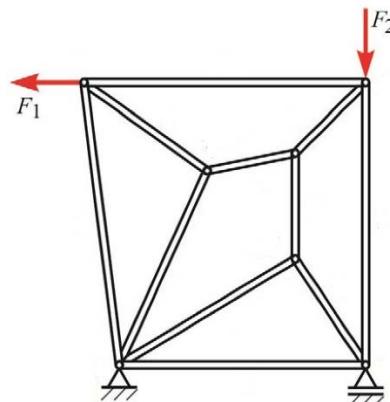
Unbekannte sind
s Stabkräfte und 3 Auflagerkräfte: $s+3$

Bekannt sind
2 Gleichungen pro Knoten k (Knoten=zentrales Kräftesystem mit $\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$)

$$s + 3 = 2 \cdot k \quad \text{oder} \quad s = 2 \cdot k - 3$$

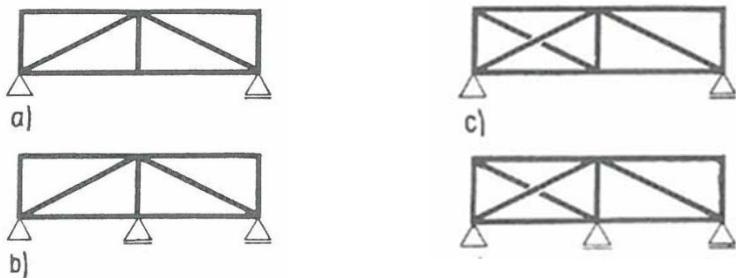
Beispiel:

Überprüfen Sie die Äußere und innere statische Bestimmtheit des oben abgebildeten Fachwerks.



Beispiel:

Überprüfen Sie die äußere und die innere statische Bestimmtheit der abgebildeten Fachwerke

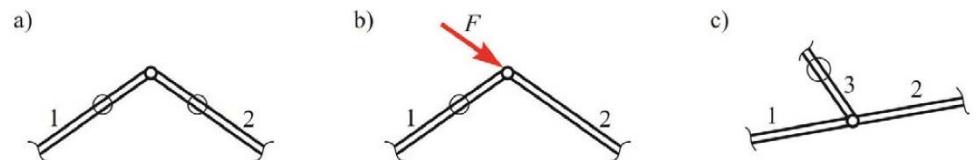


Nullstäbe

In diesen Stäben treten keine Kräfte auf, dienen jedoch der Stabilität von realen (d.h. mit Verformungen belasteten) Fachwerken
-> vor Berechnung des Fachwerks werden die Nullstäbe identifiziert

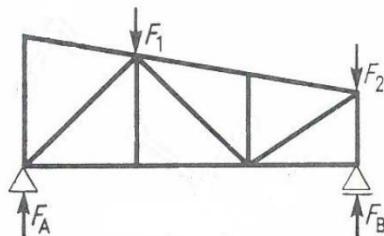
Erkennung:

- a) bei einem zweistäbigen unbelasteten Knoten sind beide Stäbe Nullstäbe.
- b) ist ein zweistäbiger Knoten in Richtung des einen Stabes belastet, ist der andere Stab ein Nullstab.
- c) Ein Nullstab tritt bei einem dreistäbigen unbelasteten Knoten auf, wenn die beiden anderen Stäbe in dieselbe Richtung zeigen.



Beispiel

Bestimmen Sie die Nullstäbe in dem abgebildeten Fachwerk



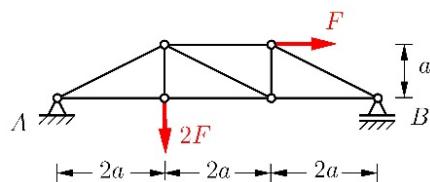
Knotenpunktverfahren

Voraussetzung: äußere und innere statische Bestimmtheit

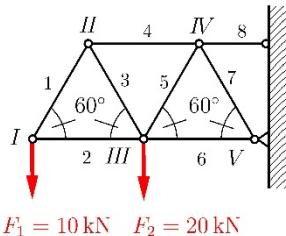
Verfahren

- 1) Für jeden Knoten werden die Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$) erstellt; x- und y-Komponenten der Stabkräfte aus Geometrie
- 2) Kräfte werden prinzipiell als Zugkräfte (d.h. vom Knoten weggerichtet) betrachtet.
- 3) Lösen des linearen Gleichungssystems (Matrizen-Rechnung)

Beispiel



Beispiel



Mathematische Lösung

Aufstellung eines linearen Gleichungssystems:
für jeden Knoten Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und in tabellarischer Form darstellen

Matrizenrechnung (Darstellung hier mit 3 Unbekannten):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Aufgelöst nach den Unbekannten x

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Lösungsverfahren

- GAUßsches Eliminationsverfahren
- Matrix-Funktion DHBW-Taschenrechner (max. 3 Unbekannte)
- WolframAlpha: =solve(Eingabe lineares Gleichungssystem; getrennt mit „;“)
- Excel =MMULT bzw. MINV-Funktion, Eingabe von Matrix A bzw. Matrix b

Beispiel

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für das letzte Beispiel auf

Zwei Verfahren kommen zum Einsatz:

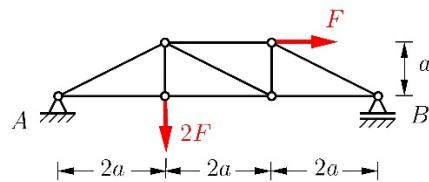
Knotenpunktverfahren

Voraussetzung: äußere und innere statische Bestimmtheit

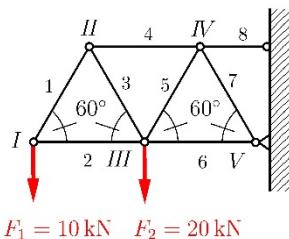
Verfahren

- 1) i.a. Bestimmung der Auflagerkräfte
- 2) Für jeden Knoten werden die Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$) erstellt; x- und y-Komponenten der Stabkräfte aus Geometrie
- 3) Kräfte werden prinzipiell als Zugkräfte (d.h. vom Knoten weggerichtet) betrachtet.
- 4) Lösen des linearen Gleichungssystems (Matrizen-Rechnung)

Beispiel: Brücke



Beispiel_Wandkonstruktion



Mathematische Lösung

Aufstellung eines linearen Gleichungssystems:
für jeden Knoten Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und in tabellarischer Form darstellen
Auflagerreaktionen bzw. äußere Kräfte „auf die andere Seite“

Lösungsverfahren

GAUßsches Eliminationsverfahren
Matrix-Funktion DHBW-Taschenrechner (max. 3 Unbekannte)
WolframAlpha: =solve(Eingabe lineares Gleichungssystem;
getrennt mit „;“)
Excel=MMULT bzw. MINV-Funktion, Eingabe von Matrix A bzw.
Matrix b

Matrizenrechnung (Darstellung hier mit 3 Unbekannten):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Aufgelöst nach den Unbekannten x

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$-S1 \cdot \cos \alpha + S2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$S1 \cdot \sin \alpha + S2 \cdot \sin \beta = 10kN$$

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Umgestellt (d.h. lösbar mit Rechnern)

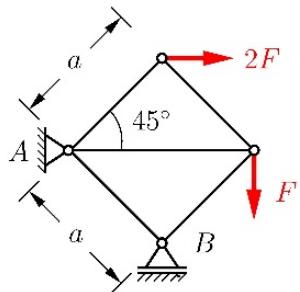
$$\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für das Beispiel „Wandkonstruktion“ auf

Selbststudium:

Die Stab- und Auflagerkräfte sind mit Hilfe der Matrizenrechnung bzw. EXCEL zu bestimmen.



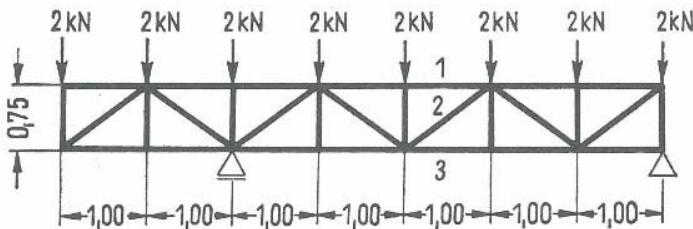
Lösung:

$$F_{Ax} = -2F, F_{Ay} = -3F, F_B = 4F$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline S_i & \sqrt{2}F & 3F & -2\sqrt{2}F & -\sqrt{2}F & -2\sqrt{2}F \end{array}$$

Schnittverfahren nach Ritter

Verfahren zum Berechnen von ausgesuchten Stabkräften



- Verfahren:
- 1) Bestimmung der Auflagerkräfte (allg. ebenes Kräftesystem)
 - 2) Schnitt durch max. drei Stäbe, deren Wirklinien sich nicht in einem Punkt kreuzen
 - 3) Eintragen der Stabkräfte als Zugkräfte, negatives Ergebnis bedeutet Druckstab
 - 4) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen für den „einfacheren Teil“: allg. ebenes Kräftesystem ($\sum F_{i,x} = 0$, $\sum F_{i,y} = 0$, $\sum M_{i,o} = 0$)

Beispiel: Bestimmen Sie die Stabkräfte 1 bis 3 in der Brückenkonstruktion

Beispiel: Für die Wandkonstruktion sind die Stabkräfte S6 bis S8 nach dem Ritterschnitt-Verfahren zu bestimmen

6 Schnittgrößen am Balken

Dimensionierung von Bauteilen: innere Belastungen (Spannungen) dürfen die Materialkennwerte nicht überschreiten

⇒ Bestimmung der im Bauteil wirkenden Kräfte und Momente

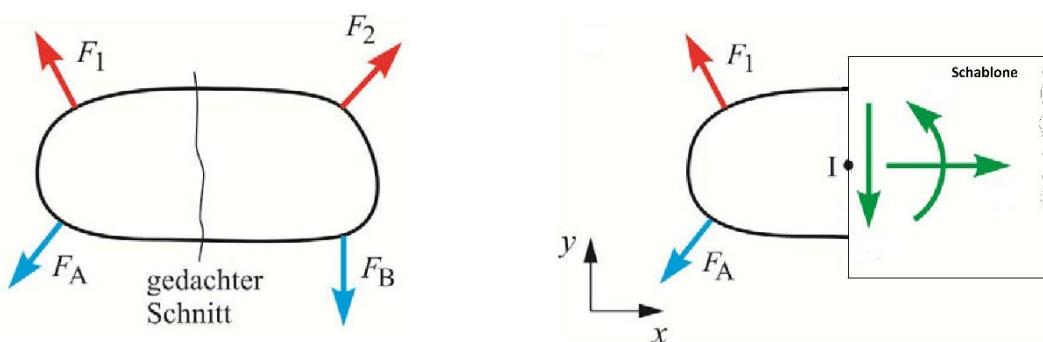
6.1 Normalkraft, Querkraft, Biegemoment

Mit dem Schnittprinzip nach EULER/LAGRANGE werden die Schnittgrößen:

- **Normalkraft F_n**
- **Querkraft F_q**
- **Biegemoment M_b**

bestimmt

Vorgehensweise: 1) (gedachter) Schnitt durch das Bauteil
 2) Annahme der auftretenden Schnittgrößen (Schablone)
 3) Erstellen der Gleichgewichtsbedingungen eines allg. ebenes Kräftesystems



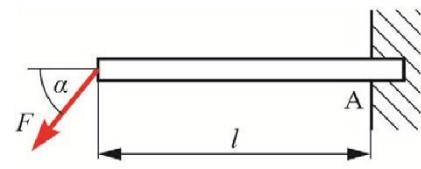
Übung am Balken (Einbereichsproblem)

Gleichungen:

$$\sum F_{ix} = 0 = -F_x + F_n \quad \rightarrow \quad F_n = F_x$$

$$\sum F_{iy} = 0 = -F_y - F_q \quad \rightarrow \quad F_q = -F_y$$

$$\sum M_{i0} = 0 = M_b + F_y \cdot x \quad \rightarrow \quad M_b = -F_y \cdot x$$



Darstellung in Diagrammen:

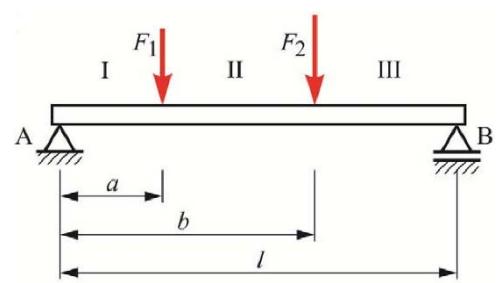
Normalkraft

Querkraft

Biegemoment

Übung am Balken (Mehrbereichsproblem)

Bereich I ($0 < x < a$)



Bereich II ($a < x < b$)

Bereich ($b < x < l$)

Darstellung in Diagrammen

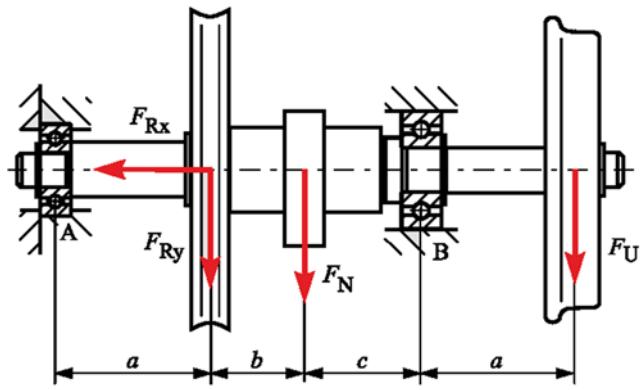
Querkraft

Biegemoment

Beispiel

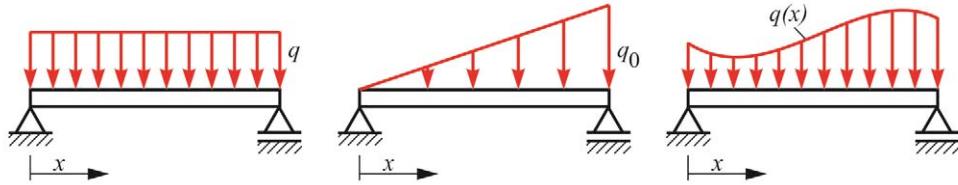
Für die dargestellte Welle sollen die Auflagerkräfte sowie die Schnittgrößen entlang der Welle bestimmt werden.

Geg.: $F_{Rx}=5\text{kN}$, $F_{Ry}=20\text{kN}$, $F_N=1\text{kN}$, $F_U=5\text{kN}$, $a=400\text{mm}$, $b=250\text{mm}$, $c=300\text{mm}$



6.1.2 Balken mit Streckenlast

Streckenlasten durch Eigengewicht, Füllungen in Rohrleitungen, Schichten, Windlasten, etc.



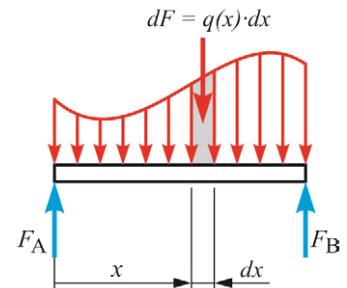
Berechnung der Streckenlast (hier: vertikale Last):

$$F = \int_{x=0}^l q(x) dx$$

Auflagerreaktionen (Gleichgewichtsbedingungen)

$$\sum F_{iy} = 0 = F_A + F_B - \int_{x=0}^l q(x) dx$$

$$\sum M_{i,B} = 0 = F_A \cdot l - \int_{x=0}^l q(x) \cdot (l - x) dx$$



Daraus folgt für die Auflagerreaktionen:

$$F_A = \frac{1}{l} \int_{x=0}^l q(x) \cdot (l - x) dx$$

$$F_B = \frac{1}{l} \int_{x=0}^l q(x) \cdot x dx$$

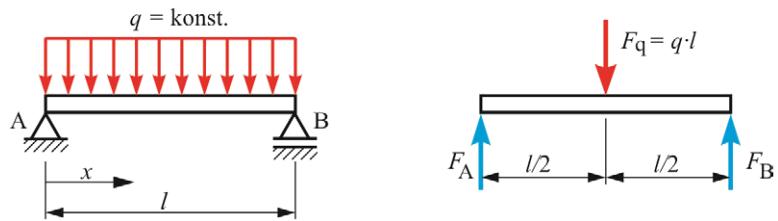
Hier in Vorlesung: konstante Streckenlast: $q(x) = q = \text{konst.}$

Mathematische Lösung

$$F_A = \frac{1}{l} \int_{x=0}^l q(x) \cdot (l-x) dx = \frac{q}{l} \left[lx - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^l = \frac{q}{l} \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{q \cdot l}{2}$$

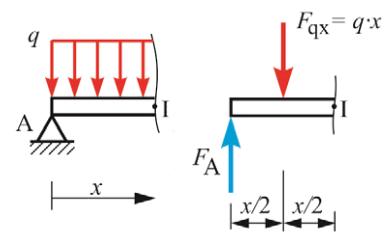
$$F_B = \frac{1}{l} \int_{x=0}^l q(x) \cdot x dx = \frac{q}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^l = \frac{q}{l} \left(\frac{l^2}{2} \right) = \frac{q \cdot l}{2}$$

Ingenieurtechnische Methode (Darstellung der konstanten Streckenlast als Einzelkraft durch den Schwerpunkt)



$$F_A = F_B =$$

Bestimmung der Schnittgrößen mit der ingenieurtechnischen Methode



$$\sum F_{iy} = 0 =$$

$$\sum M_{i0} = 0 =$$

Verläufe der Querkraft und des Biegemoments:

7 Schwerpunkt

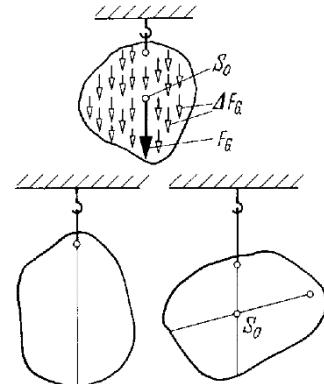
Massen-, Volumen und Flächenschwerpunkte zum Lösen von Aufgabenstellungen der technischen Mechanik

7.1 Begriffe und Grundlagen

Angriffspunkt aller Teilgewichtskräfte ΔF_G im **Schwerpunkt S_0**

Schwerlinien gehen durch Schwerpunkt

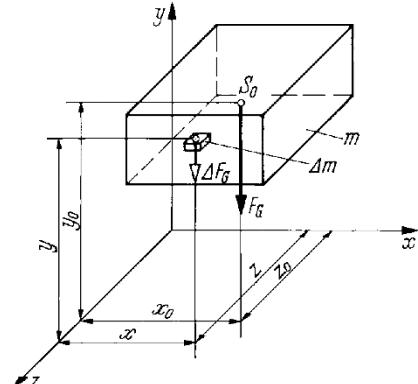
Symmetrielinien sind Schwerlinien



7.2 Rechnerische Schwerpunktsbestimmung

Das Moment der Gewichtskraft F_G mit dem Hebelarm x_0 entspricht der Summe aller Momente der sehr kleinen Teilgewichtskräfte ΔF_G mit dem jeweiligen Hebelarm x .

$$F_G \cdot x_0 = \sum (\Delta F_G \cdot x) = \int x \cdot dF_G$$



Daraus folgt für die Schwerpunktskoordinaten (auch Massenmittelpunkt) bzw. für **homogene** Körper auch Volumenmittelpunkt

$$x_0 = \frac{\sum (\Delta F_G \cdot x)}{F_G} = \frac{\sum (\Delta m \cdot x)}{m} = \frac{\sum (\Delta V \cdot x)}{V}$$

$$y_0 = \frac{\sum (\Delta F_G \cdot y)}{F_G} = \frac{\sum (\Delta m \cdot y)}{m} = \frac{\sum (\Delta V \cdot y)}{V}$$

$$z_0 = \frac{\sum (\Delta F_G \cdot z)}{F_G} = \frac{\sum (\Delta m \cdot z)}{m} = \frac{\sum (\Delta V \cdot z)}{V}$$

Für mathematisch einfache Geometrien: siehe [4], Tab. 5

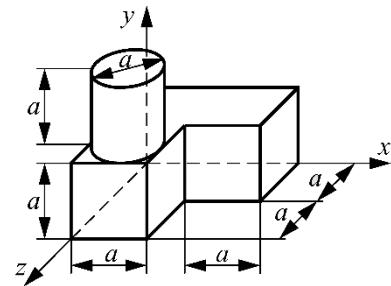
Zusammengesetzte Körper

Zerlegen in i (mit $i=1 \dots n$) einfache Geometrien mit bekannten Schwerpunkten. Dann gilt:

$$x_0 = \frac{\sum(V_i \cdot x_i)}{V} \quad y_0 = \frac{\sum(V_i \cdot y_i)}{V} \quad z_0 = \frac{\sum(V_i \cdot z_i)}{V}$$

Beispiel:

Die Lage des Schwerpunktes
Bauteil ist zu bestimmen

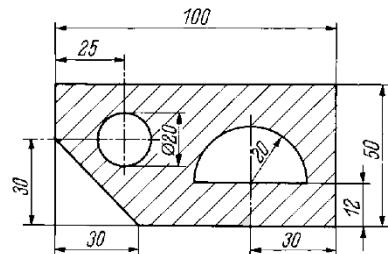


Abgeleitet von den Gleichungen für Körper ergeben sich die Gleichungen für
Flächenschwerpunkte (bzw. [4], Tab. 6)

$$x_0 = \frac{\sum(A_i \cdot x_i)}{A} \quad y_0 = \frac{\sum(A_i \cdot y_i)}{A} \quad z_0 = \frac{\sum(A_i \cdot z_i)}{A}$$

Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des
Flächenschwerpunkts für
abgebildetes Werkstück.



8 Festigkeitslehre

Statik	Normal- und Querkräfte
Festigkeitslehre	Normalspannung σ und Schubspannung τ
Spannung	Innere Kraft bezogen auf die Querschnittsfläche in N/mm ²

8.1 Beanspruchungsarten

In der Praxis meistens zusammengesetzte Beanspruchung

Normalkräfte (Zug/Druck) und Biegemomente erzeugen Normalspannungen

Querkräfte und Torsionsmomente erzeugen Schubspannungen

8.2 Zug- und Druckbeanspruchung

Festigkeitsbedingung

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{zul} \quad \text{mit } \sigma_{zul} = \frac{\text{Werkstoffkennwert}}{\text{Sicherheit}}$$

Ruhende (statische) Belastung			
Werkstoff	Versagensart	Werkstoffkennwert	Sicherheitsbeiwert
zäh	Fließen	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$v_F=1,2\dots\mathbf{1,5}\dots 2$
spröde	Bruch	R_m	$v_B=2\dots\mathbf{3}\dots 4$

8.2.1 Stabförmige Bauteile

Statisch bestimmt wie bisher lösbar durch Gleichgewichtsbedingungen

Statisch unbestimmt Gleichgewichtsbedingungen + „geometrische Verträglichkeit“

Beispiel:

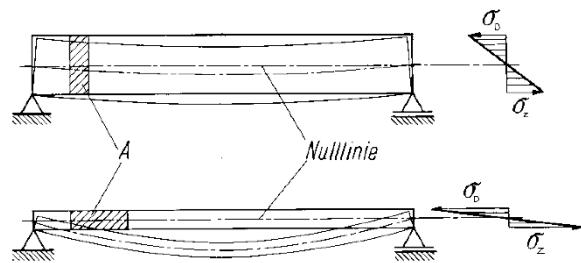
Geg.: F , a , E_1 , E_2 , A_1 , A_2 , l_1 , l_2

Ges.: Kräfte in A, B, C $\rightarrow F_{AX}, F_{AY}, F_B, F_C$

8.3 Biegebeanspruchung

Annahmen

- Vernachlässigbare Durchbiegung (keine Längenänderung, Querschnittsfläche immer senkrecht zur Längs-Achse)
- Querschnitte klein gegenüber Länge
- Hooksches Gesetz



Herleitung für die auftretenden Biegespannungen

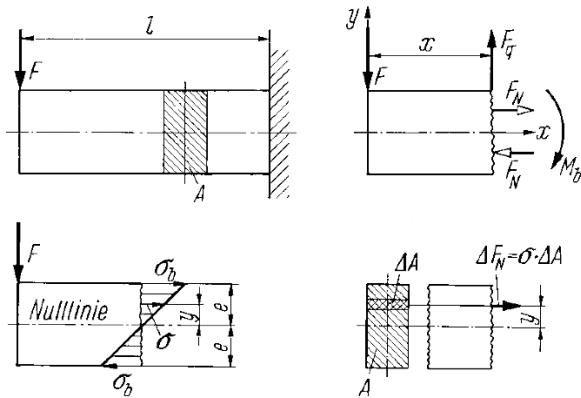
Man erkennt:

$$\sigma = f(y) = \sigma(y)$$

Biegemoment

$$M_b = F \cdot x$$

wirkt durch das Kräftepaar $F_N(y)$



Für $\Delta F_N(y)$ gilt:

$$\Delta F_N = \sigma(y) \cdot \Delta A$$

Für die Spannung $\sigma(y)$ gilt (Strahlensatz) mit e =Randabstand

$$\sigma(y) = \sigma_b \cdot \frac{y}{e}$$

und damit

$$\Delta F_N = \sigma_b \cdot \frac{y}{e} \cdot \Delta A$$

Für das innere Teilmoment ΔM_i gilt

$$\Delta M_i = \Delta F_N \cdot y = \sigma_b \cdot \frac{y}{e} \cdot \Delta A \cdot y = \sigma_b \cdot \Delta A \cdot \frac{y^2}{e}$$

Die Summe aller Teilmomente ergibt das angreifende Biegemoment M_b :

$$M_b = \sum \Delta M_i = \sum \sigma_b \cdot \Delta A \cdot \frac{y^2}{e}$$

Mit den konstanten Größen e und σ_b :

$$M_b = \frac{\sigma_b}{e} \cdot \sum y^2 \cdot \Delta A$$

Der Summand ist nur von der Geometrie der Fläche abhängig und wird
axiales Flächenmoment 2. Grades I (früher auch Flächenträgheitsmoment) genannt

$$I = \sum y^2 \cdot \Delta A$$

Dadurch:

$$M_b = \sigma_b \cdot \frac{I}{e}$$

mit der Definition des **Widerstandsmoments gegen Biegung W_b**

$$W_b = \frac{I}{e}$$

erhält man die am Flächenrand auftretende Biegespannung

$$\sigma_b = M_b \cdot \frac{e}{I} = \frac{M_b}{W_b}$$

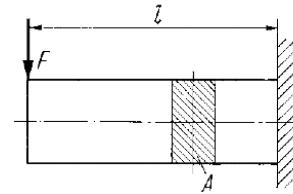
Die Normalspannung $\sigma(y)$ in einem beliebigen Abstand y von der Nulllinie beträgt

$$\sigma(y) = \frac{M_b}{I} \cdot y$$

Werte für gängige Querschnittsgeometrien findet man in Tabellen (vgl. [4], Tab. 22, 30-34)

Beispiel:

Ein Stahl-Träger aus S235JR ($h=100\text{mm}$, $b=50\text{mm}$, $l=1000\text{mm}$) wird mit einer Kraft $F=100\text{kN}$ belastet.



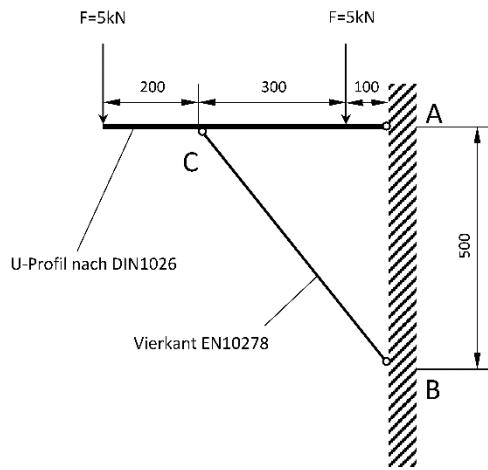
- Bestimmen Sie das axiale Flächenmoment 2. Grades für den Träger.
- Zu bestimmen ist die max. auftretende Biegespannungen σ_b .
- Welche Biegespannung tritt auf, wenn der Träger flach eingespannt ist?
- Welche Biegespannung tritt bei einem I-Träger I100 nach DIN1025 auf?

Tabelle 34. Warmgewalzte I-Träger nach DIN 1025 (Auszug)

Kurz-zeichen	h mm	b mm	s mm	t mm	r_1 mm	r_2 mm	A cm^2	I_x cm^4	I_y cm^4	W_y cm^3	W_z cm^3	m' kg/m
I 80	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,57	77,8	6,29	19,5	3,00	5,94
I 100	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	171	12,2	34,2	4,88	8,34
I 120	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	328	21,5	54,7	7,41	11,1
I 140	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,2	573	35,2	81,9	10,7	14,3

Beispiel Konsole

Geg.: Konstruktion gemäß Skizze
 Auflager als Festlager anzunehmen
 beide Profile aus S235JR
 das U-Profil (Auflagefläche oben) ist auf
 Biegung, die Pendelstütze auf Druck bzw.
 Knickung zu berechnen



Aufgaben

- Machen Sie das U-Profil frei und tragen alle angreifenden Kräfte ein (5P)
- Bestimmen Sie die Auflagerkräfte in den Punkten A und B (8P)
- Bestimmen Sie den Biegemomentverlauf in dem U-Profil (8P)
 falls b) nicht gelöst: $F_{By} = 8,75\text{kN}$
- Welche Größe (Abmessung des Vierkant) ist für die Pendelstütze erforderlich, wenn für die zulässige Druckspannung $p_{zul} = \frac{R_e}{1,2}$ gilt?
 falls b) nicht gelöst: $F_B = 11,2\text{kN}$
- Welche Größe ist für das U-Profil notwendig, wenn für die zulässige Biegespannung $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{1,2}$ gilt?
- Welche max. Spannung herrscht dann im gewählten Profil, welche Sicherheit ist dann gegeben?
- Welche Spannung herrscht in der Auflagefläche des U-Profils?
- Welches Profil muss aufgrund der Versagensart Knickung gewählt werden?

Lösung:

- Siehe Vorlesung
- $F_{Ay} = 1,25\text{kN}, F_{Ax} = F_{Bx} = 7\text{kN}, F_{By} = 8,75\text{kN}$
- Siehe Vorlesung
- Vierkant 8x8mm
- U80
- $\sigma_b = 157,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- $\sigma = 74,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Vierkant 16x16mm

2.4 Aufgaben zu Abschnitt 2

1. Drei Zylinder mit glatten Oberflächen und den Radien $r_1 = 40 \text{ mm}$, $r_2 = 25 \text{ mm}$ und $r_3 = 15 \text{ mm}$ sind in der dargestellten Weise angeordnet. Man zeichne das Freikörperbild.

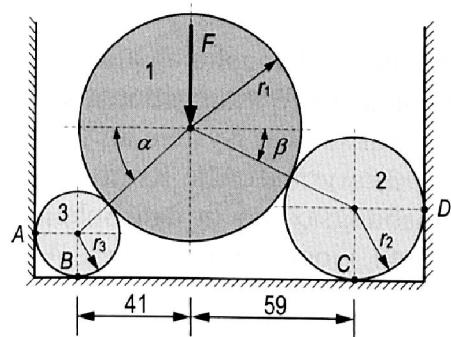


Bild 2.21: Abgestützte Zylinder

2. Man bestimme die Wirkungslinien der Auflagerkräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B für das dargestellte Dreigelenkstabwerk.

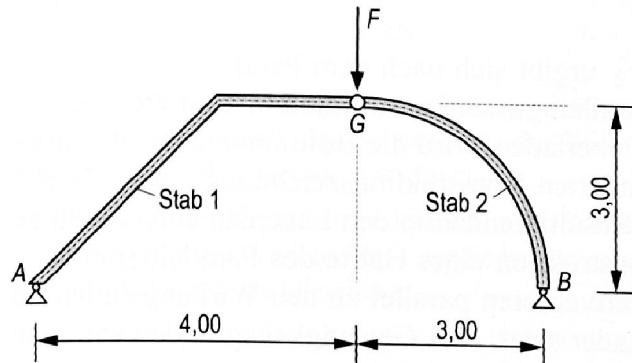


Bild 2.22: Dreigelenkstabwerk

3. Ein Zylinder mit der Masse $m_z = 30 \text{ kg}$ hängt an einem Seil, das über zwei reibungsfrei gelagerte Rollen umgelenkt wird. Die Rolle 1 wird im Punkt B durch eine Pendelstange gehalten. Die Rolle 2 ist im Punkt C frei drehbar, aber unverschieblich gelagert.

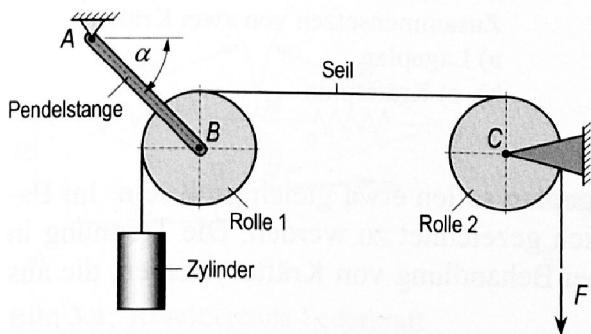


Bild 2.23: Seilumlenkung

- Mit welcher Kraft F muss am freien Ende des Seils gezogen werden, um den Zylinder im Gleichgewicht zu halten?
- Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Rolle 1 und der Pendelstange. Geben Sie den Neigungswinkel α der Pendelstange im belasteten Zustand an.

3.3 Aufgaben zu Abschnitt 3

- Wie groß sind die Kräfte in den Stäben 1 und 2 des Wandkrans (**Bild 3.17**), wenn auf ihn eine Last mit der Gewichtskraft $F_G = 9,6 \text{ kN}$ wirkt?
- Für die Kniehebelpresse (**Bild 3.18**) in der gezeichneten Lage bestimme man den Betrag der auf sie in waagerechter Richtung wirkenden Kraft \vec{F} , die eine Presskraft $F_Q = 12 \text{ kN}$ hervorruft.
- Man bestimme die Kräfte in den Stäben 1 und 2 der in **Bild 3.19** skizzierten Ladevorrichtung ($F_G = 4,5 \text{ kN}$). Wie groß ist die Kraft F_A , die die Rolle auf ihr Lager ausübt?
- Ein im Punkt A gelenkig gelagerter Ladebaum (**Bild 3.20**, $AB = 8 \text{ m}$) wird durch eine Seilwinde in der gezeichneten Lage gehalten und durch die Gewichtskraft $F_G = 4 \text{ kN}$ beansprucht. In welchem Mindestabstand a vom Punkt A muss die Winde aufgestellt werden, damit die Seilkraft F_{s1} im Seil 1 nicht größer als $3,5 \text{ kN}$ ist?

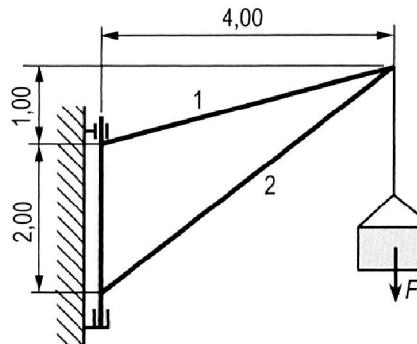


Bild 3.17: Wandkran

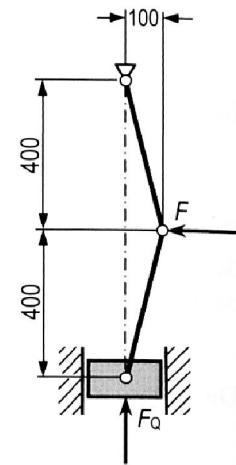


Bild 3.18: Kniehebelpresse

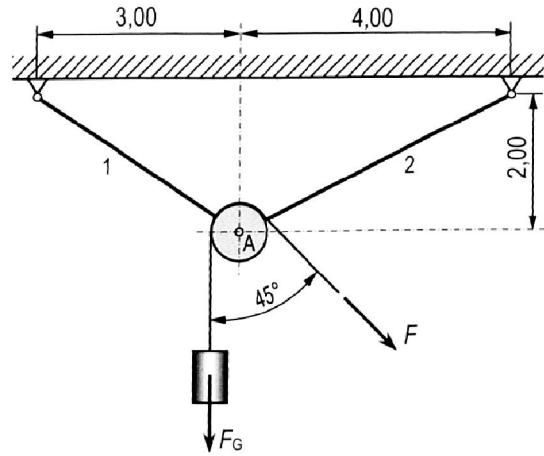


Bild 3.19: Ladevorrichtung

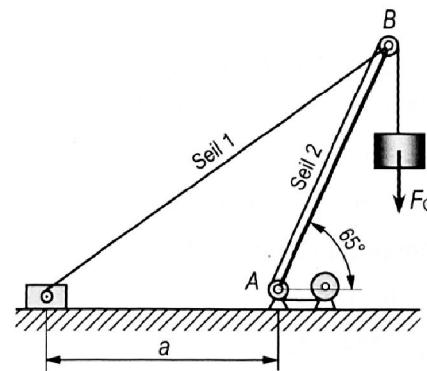


Bild 3.20: Ladebaum

- Ein Seil der Länge 15 m ist an den Stellen A und B befestigt (**Bild 3.21**). Auf das Seil wird eine mit der Gewichtskraft $F_G = 700 \text{ N}$ belastete Rolle gesetzt. Welche Gleichgewichtslage stellt sich ein? ($x = ?$) Wie groß ist die Seilkraft F_s ?
- Man bestimme die Resultierende der 5 Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt, deren Beträge F_i und Richtungswinkel φ_i bezüglich der x -Achse in der nebenstehenden Tabelle angegeben sind.

i	$\frac{F_i}{\text{N}}$	$\frac{\varphi_i}{\circ}$
1	74	27
2	30	136
3	52	170
4	23	242
5	94	305

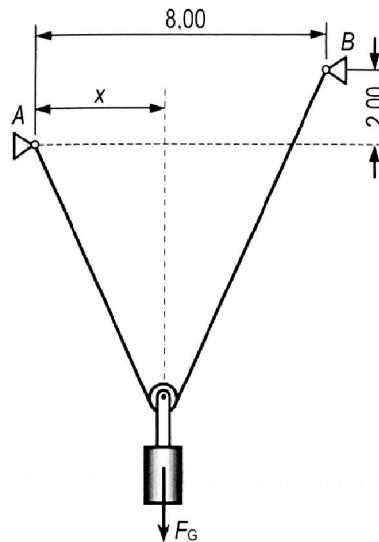


Bild 3.21: Seil mit belasteter Rolle

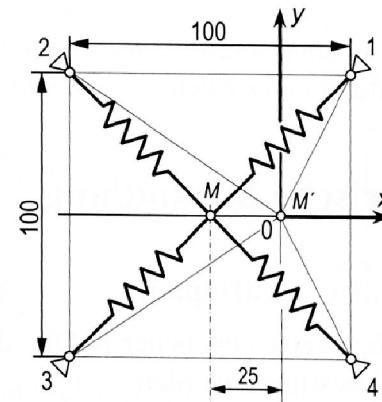


Bild 3.22: Federsystem

7. Vier Federn mit der Federkonstanten $c_1 = 200 \text{ N/cm}$, $c_2 = 400 \text{ N/cm}$, $c_3 = 500 \text{ N/cm}$ und $c_4 = 600 \text{ N/cm}$ sind mit ihren Enden im Punkt M (Bild 3.22) gelenkig zusammengeschlossen. Ihre anderen Enden sind an den Ecken eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 100 \text{ mm}$ gelenkig befestigt. Bei symmetrischer Anordnung des Systems mit dem Mittelpunkt M sind die Federn entspannt. Der Mittelpunkt des Federsystems wird aus der Lage M in die Lage M' gebracht. Welche Kraft \vec{F} ist erforderlich, um ihn in der ausgelenkten Lage festzuhalten?

8. Zwei Zylinder mit den Durchmessern $d_1 = 5 \text{ cm}$, $d_2 = 3 \text{ cm}$ und den Gewichten $F_{G1} = 8 \text{ N}$, $F_{G2} = 3 \text{ N}$ liegen in einer Rinne, deren Seitenebenen mit der Horizontalebene die Winkel $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = 30^\circ$ einschließen (Bild 3.23). a) Man ermittle die Auflagerkräfte in den Punkten A , B und C und die Kräfte, die die Zylinder im Punkt D aufeinander ausüben. b) Wie groß müsste die Gewichtskraft F_{G2} mindestens sein, damit der Zylinder 1 angehoben wird?

9. Drei Rohre mit den Durchmessern $d_1 = 40 \text{ cm}$, $d_2 = d_3 = 20 \text{ cm}$ und den Gewichten $F_{G1} = 1000 \text{ N}$, $F_{G2} = F_{G3} = 250 \text{ N}$ hängen entsprechend Bild 3.24 in einer Seilschleife. Mit welchen Kräften werden sie aneinander gepresst, und wie groß ist die Seilkraft F_s ?

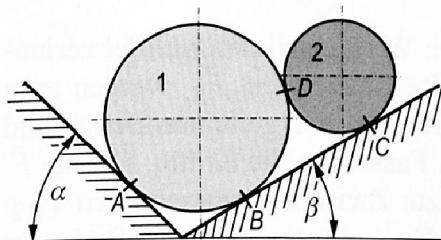


Bild 3.23: Zwei Zylinder in einer Rinne

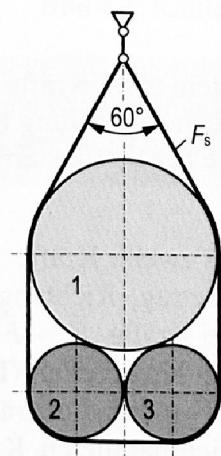


Bild 3.24: Rohre in einer Seilschleife

4.4 Aufgaben zu Abschnitt 4

1. Ein Balken ist nach **Bild 4.29** belastet. $F_1 = F_3 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$, $F_4 = 10 \text{ kN}$, $F_5 = 6 \text{ kN}$. Man berechne

- die Resultierende der gegebenen fünf Kräfte. Wie groß ist ihr Betrag und in welchem Abstand a vom Auflager A schneidet ihre Wirkungslinie die Balkenachse?
- die Auflagerkräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B .

2. Eine Schubkarre wird eine Böschung hinaufgeschoben (**Bild 4.30**). Welche Handkraft ist erforderlich, um sie in der gezeichneten Lage zu halten und wie groß ist dann die Belastung der Achse? $F_G = 900 \text{ N}$.

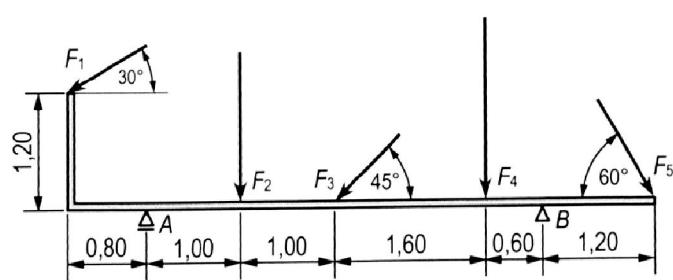


Bild 4.29: Balken

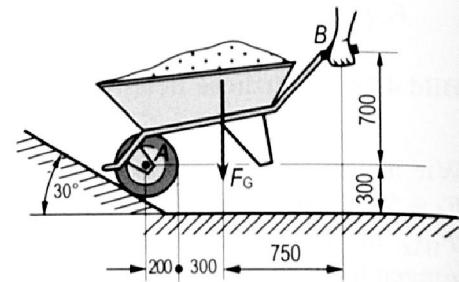


Bild 4.30: Schubkarre

3. a) Man bestimme die Gelenkkraft \vec{F}_A und die Federkraft \vec{F}_B für die Radaufhängung in **Bild 4.31**, wenn die Radaufhängerkraft $F = 3,4 \text{ kN}$ beträgt.
b) Welche Kräfte \vec{F}_A^* und \vec{F}_C^* erhält man, falls das eine Ende der Feder statt im Punkt B im Punkt C befestigt wird?

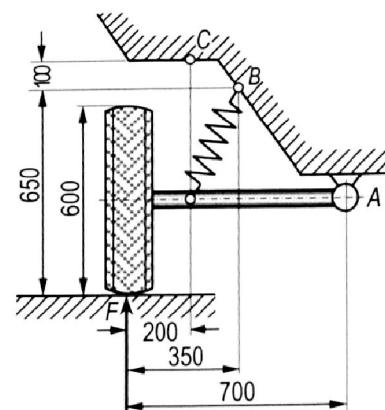


Bild 4.31: Radaufhängung

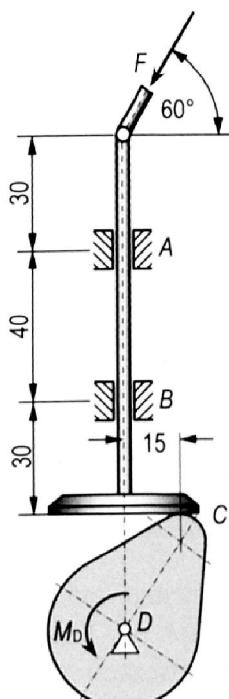


Bild 4.32:
Tellerstößel mit Kreisbogennockenantrieb

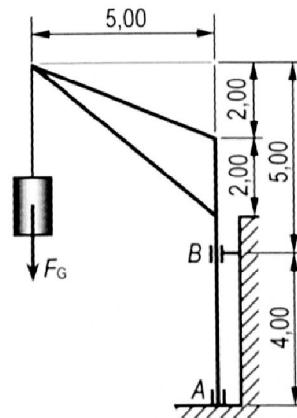


Bild 4.33: Drehkran

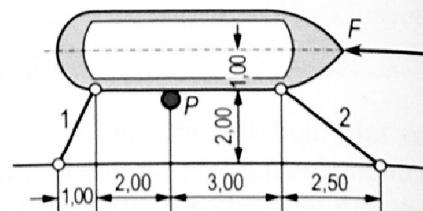


Bild 4.34: Festgemachtes Boot

4. Auf den Tellerstöbel mit Kreisbogennockenantrieb wirkt die Kraft $F = 85 \text{ N}$ (**Bild 4.32**). Man bestimme für die gezeichnete Stellung die Kraft \vec{F}_C , die vom Nocken auf den Stöbel ausgeübt wird, die Führungskräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B sowie das Antriebsmoment M_D .

5. Man bestimme die Auflagerkräfte des Drehkranes in **Bild 4.33** infolge der Last $F_G = 6 \text{ kN}$.

6. Ein Boot wird durch zwei Seile und einen Pfahl P am Ufer festgemacht (**Bild 4.34**).

a) Man bestimme die Seilkräfte und die Kraft, die der Pfahl auf das Boot ausübt, wenn die Kraft auf das Boot infolge der Strömung $F = 250 \text{ N}$ beträgt.

b) Bleibt das Boot in der gezeichneten Lage, wenn sich die Strömungsrichtung umkehrt?

7. Welche hydraulische Kraft \vec{F}_H ist erforderlich, um das Kraftfahrzeug mit dem Gewicht $F_G = 12 \text{ kN}$ auf der Reparaturbühne in der dargestellten Stellung (**Bild 4.35**) zu halten? Wie groß ist dabei die Gelenkkraft \vec{F}_A ?

8. Auf ein Konstruktionsteil (**Bild 4.36**) werden durch gleichzeitiges Anziehen von zwei Muttern die Momente (Kräftepaare!) $M_1 = 100 \text{ Nm}$ und $M_2 = 60 \text{ Nm}$ ausgeübt. Man bestimme die Auflagerkräfte.

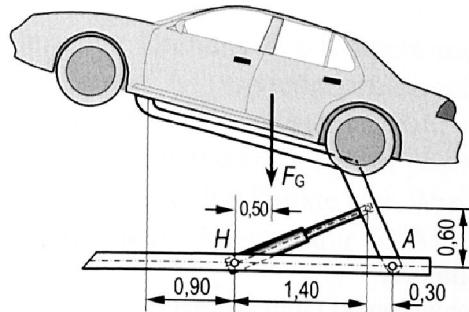


Bild 4.35: Hydraulische Reparaturbühne

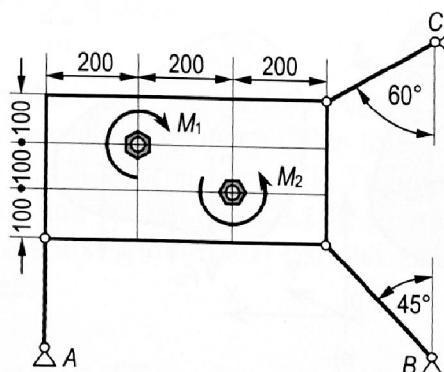


Bild 4.36: Konstruktionsteil mit Momentbelastung

9. Der Retorten-Beschickungskübel (**Bild 4.37a**) kann beim Fahren nicht umkippen, da der in Punkt A drehbar gelagerte Hängearm am Anschlagwinkel B anliegt.

a) Man bestimme die Gelenkkraft \vec{F}_A und die Kraft \vec{F}_B , mit der der Anschlagwinkel auf den Hängearm wirkt, die während des Förderns infolge der Gewichtskraft $F_G = 13 \text{ kN}$ auftreten.

b) Entleert wird dadurch, dass die beiden Kübelnasen in eine feststehende Stange D eingreifen (**Bild 4.37b**). Man bestimme die Kräfte \vec{F}_D auf die Kübelnasen und die Seilkraft für die gezeichnete Kipplage.

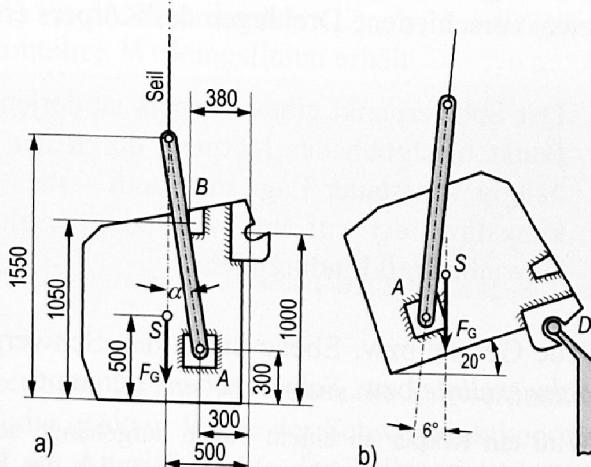


Bild 4.37: Retorten-Beschickungskübel

c) Welchen Winkel α' würde der Hängearm mit der lotrechten Richtung beim Fördern bilden, wenn sich der Schwerpunkt infolge einer ungleichmäßigen Beladung um 100 mm aus dem Punkt S nach links (**Bild 4.37a**) verschiebt?

6.4 Aufgaben zu Abschnitt 6

1. Der fahrbare Hydraulikuniversalkran (**Bild 6.10**) trägt die Last $F_{G1} = 4,5 \text{ kN}$. Sein Eigengewicht ist $F_{G2} = 1,7 \text{ kN}$. Man bestimme

a) die Kolbenkraft \vec{F}_D und die Gelenkkraft \vec{F}_C ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes.

b) die Radauflagerkräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B mit Berücksichtigung des Eigengewichtes.

2. In **Bild 6.11** ist die Radaufhängung an einem Kfz dargestellt. Die Radauflagerkraft beträgt $F = 4,5 \text{ kN}$. Man bestimme die Gelenkkräfte \vec{F}_A , \vec{F}_B , \vec{F}_C , \vec{F}_D und die Federkraft \vec{F}_E .

3. Für die gezeichnete Stellung des Getriebes zum Antrieb eines Werkzeugschlittens (**Bild 6.12**) bestimme man die Schnittkraft \vec{F} und die Lagerkräfte an den Stellen A , B und C , wenn das Antriebsmoment an der Kurbel $M = 120 \text{ Nm}$ beträgt.

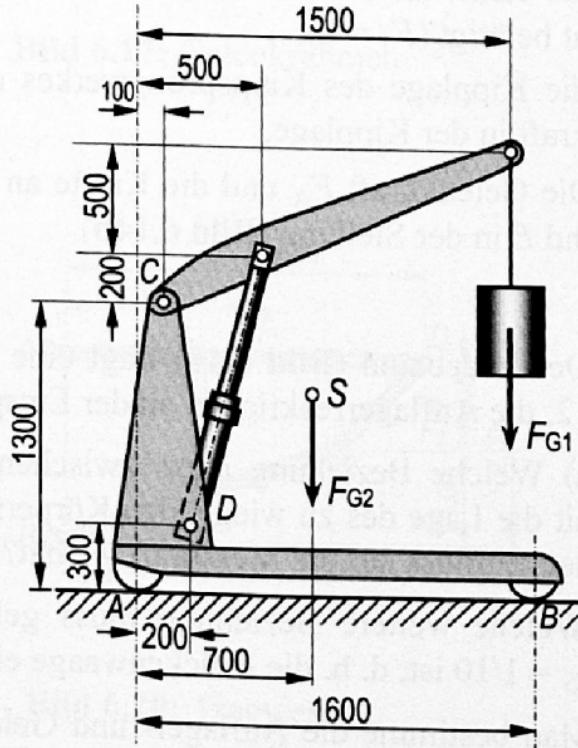


Bild 6.10: Hydraulikuniversalkran

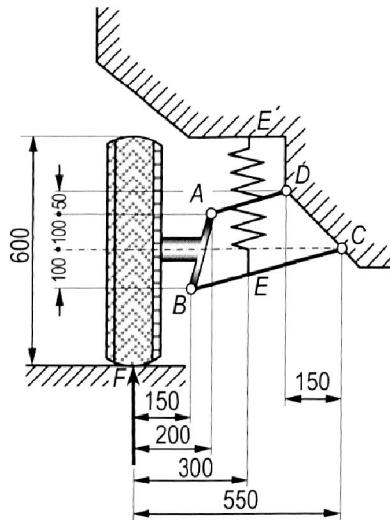


Bild 6.11: Aufhängung eines Kfz-Rades

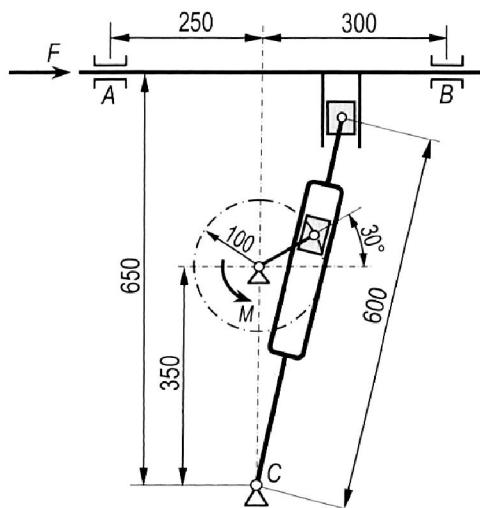


Bild 6.12: Getriebe zum Antrieb einer Werkzeugmaschine

4. Man bestimme die Kolbenkraft und die Kräfte zwischen den Bauteilen des Scherenhubtisches (**Bild 6.13**), der eine Last $2 F_G = 14 \text{ kN}$ trägt. Der Hubtisch hat zwei symmetrisch angeordnete Kolben.

5. Um den Hebel des Kippsprungwerkes (**Bild 6.14a**) von der Stelle *B* abzuheben, benötigt man eine Kraft $F_1 = 8 \text{ N}$, und um ihn in der Stellung (**Bild 6.14b**) zu halten, eine Kraft $F_2 = 12 \text{ N}$.

Man bestimme

- die Vorspannkraft der Feder,
- die Federkonstante,
- die Kraft an der Stelle *B*, wenn man den Hebel nicht betätigt ($F_1 = 0$),
- die Kipplage des Kippsprungwerkes und die Federkraft in der Kipplage,
- Die Gelenkkraft F_A und die Kräfte an den Stellen *D* und *E* in der Stellung (**Bild 6.14b**).

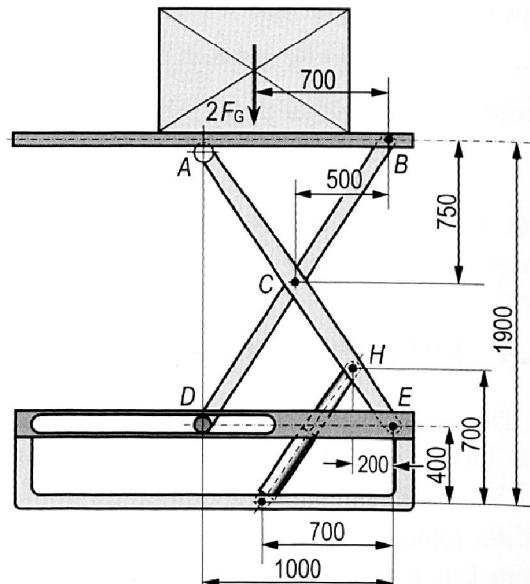


Bild 6.13: Scherenhubtisch

6. Der Ladebaum (**Bild 6.15**) trägt eine Last $F_G = 7,5 \text{ kN}$. Man bestimme die Kräfte in den Seilen 1 und 2, die Auflagerreaktionen an der Einspannstelle *A* und die Kraft im Gelenk *B*.

7. a) Welche Beziehung muss zwischen den Abmessungen der Brückenwaage (**Bild 6.16**) bestehen, damit die Lage des zu wiegenden Körpers auf der Brückenwaage (Angriffsstelle der Gewichtskraft \vec{F}_G) keinen Einfluss auf die Messkraft \vec{F} hat?

b) Welche weitere Beziehung muss gelten, damit im Gleichgewichtsfall das Verhältnis der Kräfte $F/F_G = 1/10$ ist, d. h. die Brückenwaage eine *Dezimalwaage* ist?

8. Man bestimme die Auflager- und Gelenkkräfte der in den **Bildern 6.17 bis 6.20** dargestellten Tragwerke. Bei dem in **Bild 6.20** dargestellten Tragwerk betrachte man zwei Belastungsfälle: 1. Belastung durch die Kraft $F_1 = 30 \text{ kN}$; 2. Belastung durch die Kraft $F_2 = 20 \text{ kN}$

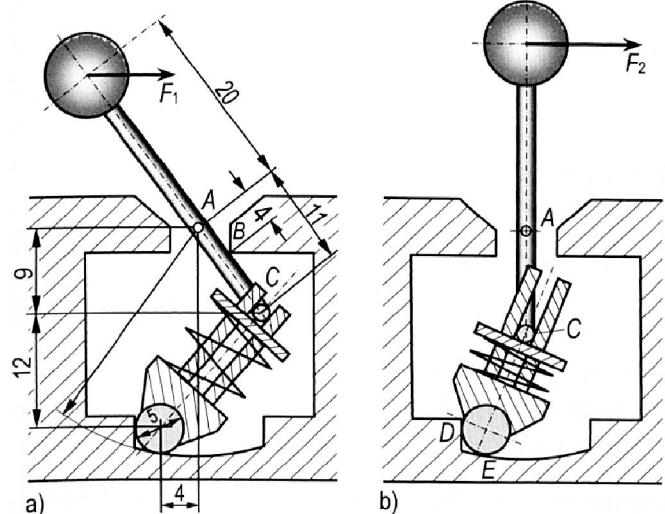


Bild 6.14: Kippsprungwerk

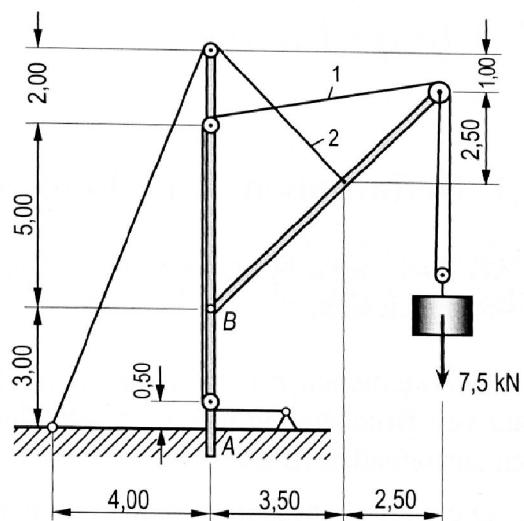


Bild 6.15: Ladebaum

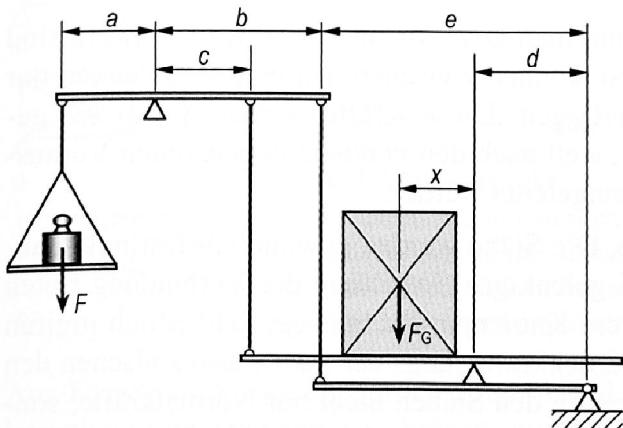


Bild 6.16: Brückenwaage

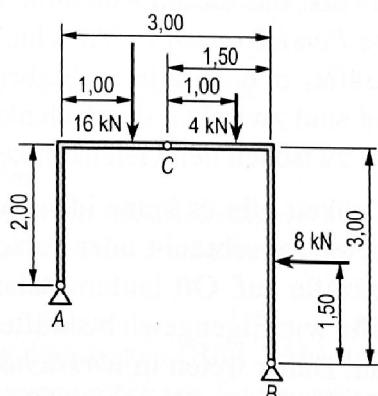


Bild 6.17: Gelenkrahmen

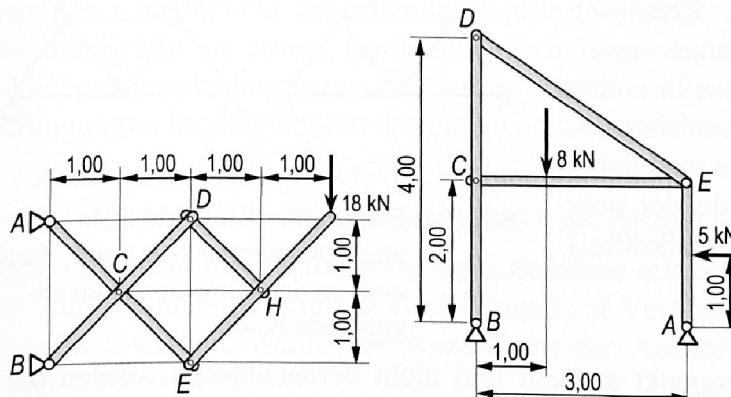


Bild 6.18: Tragkonstruktion

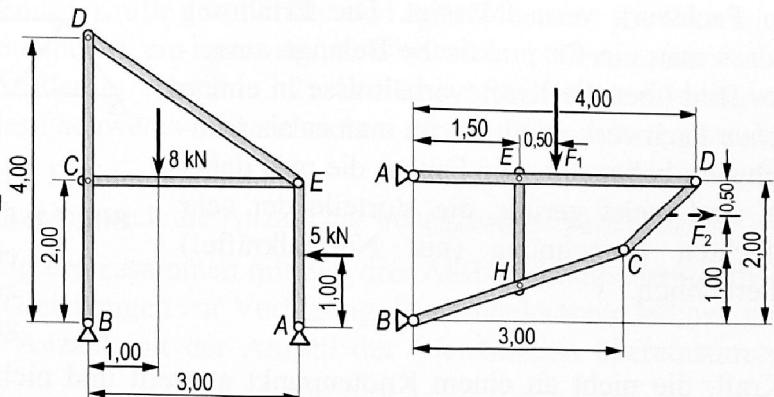


Bild 6.19: Tragwerk

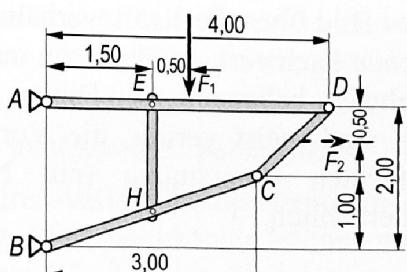


Bild 6.20: Tragwerk

7.4 Aufgaben zu Abschnitt 7

In den Aufgaben 1 bis 6 sollen alle Stabkräfte der gegebenen Fachwerke nach verschiedenen Verfahren bestimmt werden, in Aufgabe 7 nur die Kräfte in den Stäben 1, 2 und 3 nach dem Schnittverfahren von Ritter.

1. Kran in **Bild 5.19** (s. Abschn. 5.5, Aufgabe 4) mit der Last $F_G = 15 \text{ kN}$ am Lasterhaken. Das Eigengewicht des Kranes wird nicht berücksichtigt.
2. Fachwerkträger (**Bild 7.12**).
3. Fachwerkbrücke (**Bild 7.13**).
4. Fachwerkträger (**Bild 7.14**).

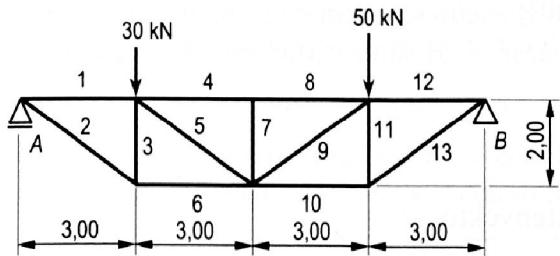


Bild 7.12: Fachwerkträger

5. Fachwerktragwerk (**Bild 7.15**).
6. Dachbinder (**Bild 7.16**).
7. Man bestimme die Stabkräfte in den Stäben 1, 2 und 3 des Fachwerkträgers (**Bild 7.17**) nach dem Schnittverfahren von Ritter.

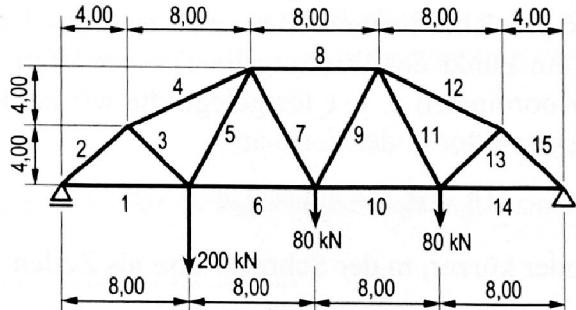


Bild 7.13: Fachwerkbrücke

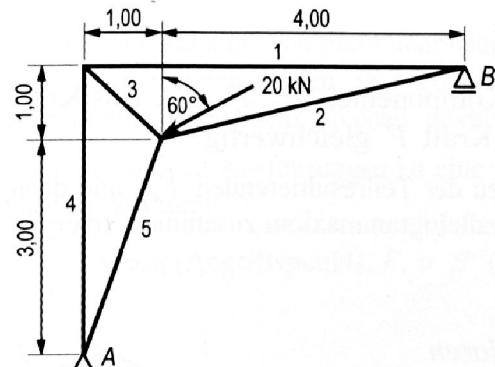


Bild 7.14: Fachwerkträger

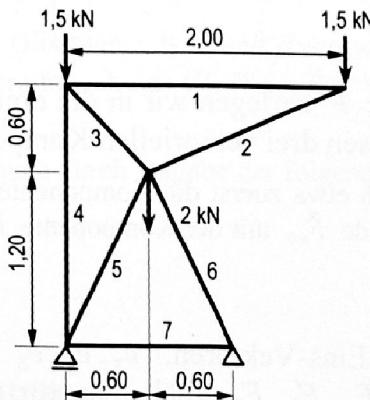


Bild 7.15: Fachwerktragwerk

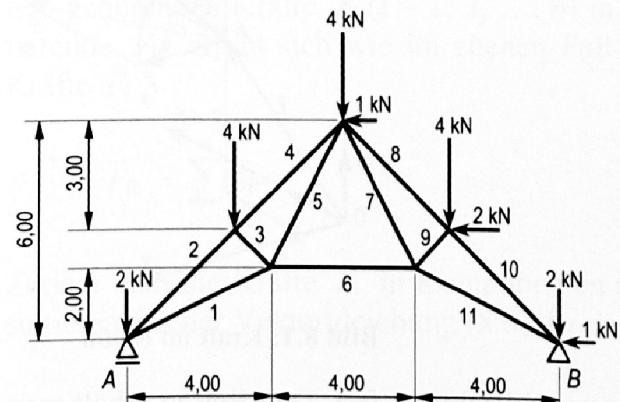


Bild 7.16: Dachbinder

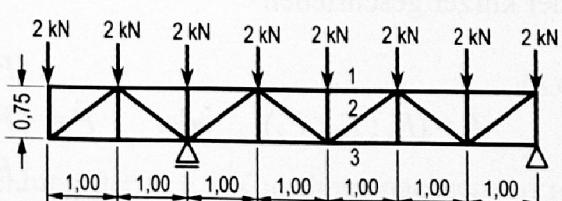


Bild 7.17: Fachwerkträger

9.5 Aufgaben zu Abschnitt 9

In den nachstehenden Aufgaben ist jeweils für das angegebene Tragwerk oder Bauteil der Schnittgrößenverlauf zu ermitteln.

1. Balken mit Einzellasten (**Bild 9.21**).
2. Kransäule in Aufgabe 5, S. 65 (**Bild 4.33**).
3. Stößel in Aufgabe 4, S. 65 (**Bild 4.32**).
4. Waagerechter Balken des Tragwerkes (**Bild 9.22**).
5. Träger mit Streckenlast (**Bild 9.23**).
6. Kragbalken mit Dreieckslast und Einzelkraft (**Bild 9.24**).

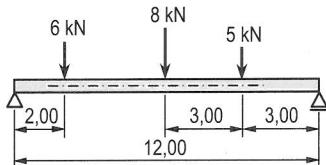


Bild 9.21: Balken

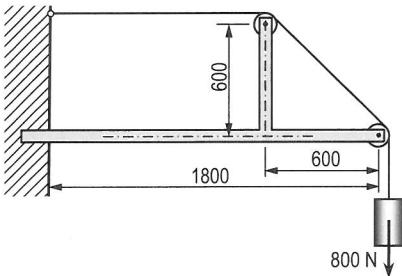


Bild 9.22: Tragwerk

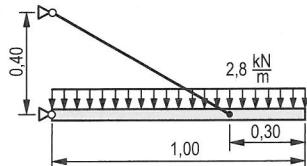


Bild 9.23: Träger

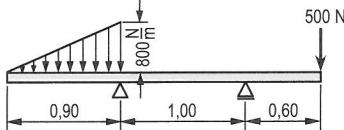


Bild 9.24: Kragbalken

7. Träger mit Streckenlasten (**Bild 9.25**).
8. Waagerechter Balken des Rahmenträgers (**Bild 9.26**).
9. Kragbalken mit Einzellasten (**Bild 9.27**) für folgende drei Belastungsfälle:
a) $F = 100 \text{ N}$, b) $F = 200 \text{ N}$, c) $F = 400 \text{ N}$
10. Gelenkträger mit Einzellasten (**Bild 9.28**).
11. Gelenkbrückenträger (**Bild 9.29**).
12. Rahmen mit Streckenlast und Einzellasten (**Bild 9.30**).
13. Gelenkrahmen in Aufgabe 8, S. 90 (**Bild 6.17**).
14. Sicherungsring (Seegerring) für Bohrungen (**Bild 9.31**), der zur Verhinderung der Längsverschiebung einer lose gelagerten Welle dient. $F = 120 \text{ N}$.
15. Balken AB in Aufgabe 5, S. 118 (**Bild 8.16**).
16. Getriebewelle in Aufgabe 7, S. 119 (**Bild 8.18**).

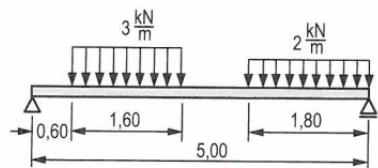


Bild 9.25: Träger mit Streckenlasten

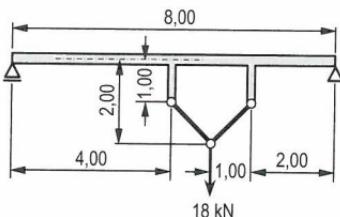


Bild 9.26: Rahmenträger

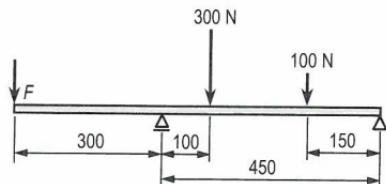


Bild 9.27: Kragbalken

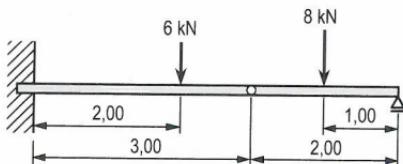


Bild 9.28: Gelenkträger

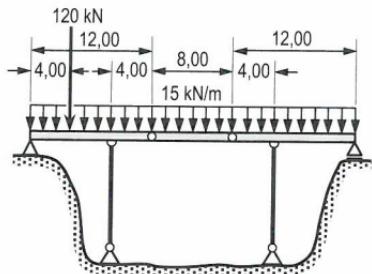


Bild 9.29: Gelenkbrückenträger

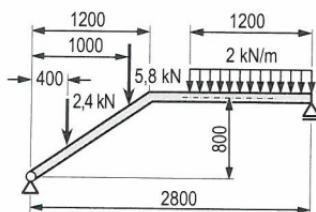


Bild 9.30: Rahmen

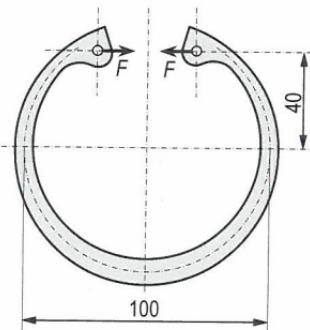


Bild 9.31: Sicherungsring

5. $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ (\vec{n} steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} und bildet mit \vec{a} und \vec{b} ein Rechtssystem)

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Einsvektor in Richtung von \vec{n}

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(-4; -4; 6)}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{1}{\sqrt{68}} \cdot (-4; -4; 6) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{17}} \cdot (-4; -4; 6)$$

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{e}_n = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{17}} \cdot (-4; -4; 6) = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (-4; -4; 6)$$

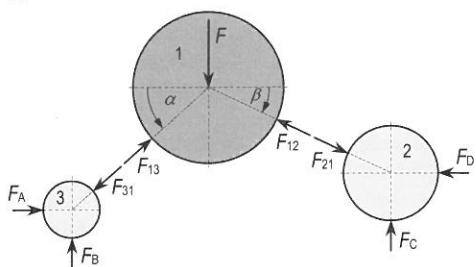
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma ; \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 ; \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$$

Mit $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{n}| = \sqrt{68}$ ergibt sich

$$\sin \gamma = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{68}}{3 \cdot 6} = 0,4581 \quad \gamma = 27,27^\circ$$

Abschnitt 2

1.

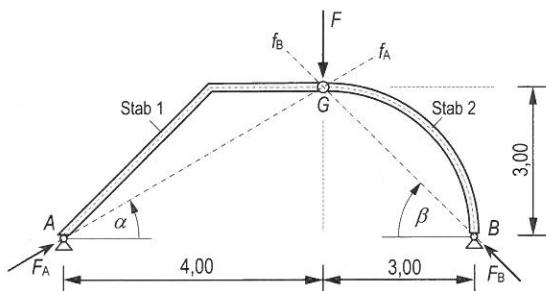


$$\alpha = \arccos\left(\frac{41 \text{ mm}}{r_1 + r_3}\right) = \arccos\left(\frac{41 \text{ mm}}{55 \text{ mm}}\right) = 41,8^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{59 \text{ mm}}{r_1 + r_2}\right) = \arccos\left(\frac{59 \text{ mm}}{65 \text{ mm}}\right) = 24,8^\circ$$

Bild A.2: Freikörperbild

2.



$$\alpha = \arctan\left(\frac{3 \text{ m}}{4 \text{ m}}\right) = 36,9^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{3 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right) = 45,0^\circ$$

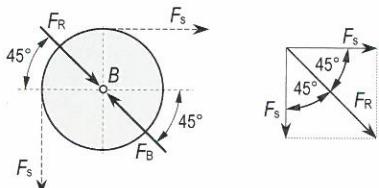
Bild A.3: Gelenkstabwerk

Die Stäbe 1 und 2 sind Pendelstäbe. Die Wirkungslinien der von ihnen übertragenen Kräfte und damit auch der Auflagerkräfte gehen jeweils durch die Gelenkpunkte.

3. a) Bei der Umlenkung um die Rollen 1 und 2 bleibt sie Seilkraft unverändert. Damit gilt:

$$F = F_{GZ} = m_z \cdot g = 30 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 294,3 \text{ N}$$

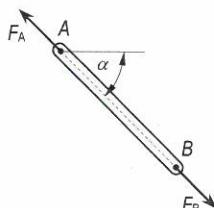
b)



$$F_R = F_s = \sqrt{2} = m_z \cdot g \cdot \sqrt{2} = 416,2 \text{ N}$$

$$F_B = F_R = 416,2 \text{ N}$$

Bild A.4: Freikörperbild Rolle 1



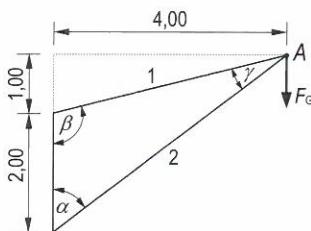
$$F_A = F_B = 416,2 \text{ N}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

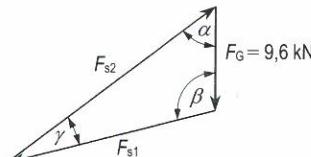
Bild A.5: Freikörperbild Pendelstange

Abschnitt 3

1.



a)



b)

Bild A.6: Wandkran a) System b) Kräftedreieck

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4,00}{3,00}\right) = 53,13^\circ$$

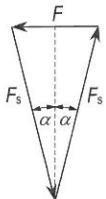
$$F_{s1} = 9,6 \text{ kN} \cdot \frac{\sin 53,13^\circ}{\sin 22,83^\circ} = 19,8 \text{ kN} \quad (\text{Zug})$$

$$\beta = 180^\circ - \arctan\left(\frac{4,00}{1,00}\right) = 104,04^\circ$$

$$F_{s2} = 9,6 \text{ kN} \cdot \frac{\sin 104,04^\circ}{\sin 22,83^\circ} = 24,0 \text{ kN} \quad (\text{Druck})$$

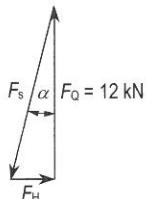
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 22,83^\circ$$

2.



$$\alpha = \arctan\left(\frac{100}{400}\right) = 14,04^\circ$$

$$F_s = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = 2,06 \cdot F$$



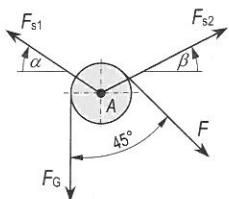
$$F_s = \frac{F_Q}{\cos \alpha} = 2,06 \cdot F$$

$$F = \frac{12 \text{ kN}}{2,06 \cdot \cos 14,04^\circ} = 6,0 \text{ kN}$$

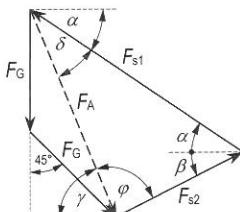
Bild A.7: Kräftedreieck am Mittelgelenk

Bild A.8: Kräftedreieck am Fußgelenk

3.



a)



b)

Bild A.9: Ladevorrichtung

a) Freigeschnittenes System b) Kräfteplan

$$F = F_G = 4,5 \text{ kN} \quad (\text{Umlenkung um eine Rolle})$$

$$F_A = 4,5 \text{ kN} \cdot \sqrt{\sin^2 45^\circ + (1 + \cos 45^\circ)^2} = 8,31 \text{ kN}$$

Die Wirkungslinie von \vec{F}_A geht durch den Rollenmittelpunkt A. Die Kräfte \vec{F}_A , \vec{F}_{s1} und \vec{F}_{s2} bilden ein zentrales Kräftesystem im Punkt A.

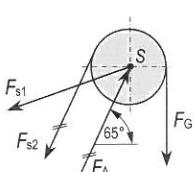
$$\tan \gamma = \frac{F_G \cdot (1 + \cos 45^\circ)}{F_G \cdot \sin 45^\circ} = 2,4142 \quad \gamma = 67,5^\circ$$

$$\delta = 67,5^\circ - \alpha = 33,81^\circ \quad \varphi = 180^\circ - \beta - \gamma = 85,93^\circ$$

$$\frac{F_{s1}}{\sin \varphi} = \frac{F_A}{\sin(\alpha + \beta)} \quad F_{s1} = 8,31 \text{ kN} \cdot \frac{\sin 85,93^\circ}{\sin(33,69^\circ + 26,57^\circ)} = 9,55 \text{ kN} \quad (\text{Zug})$$

$$\frac{F_{s2}}{\sin \delta} = \frac{F_A}{\sin(\alpha + \beta)} \quad F_{s2} = 8,31 \text{ kN} \cdot \frac{\sin 33,81^\circ}{\sin(33,69^\circ + 26,57^\circ)} = 5,33 \text{ kN} \quad (\text{Zug})$$

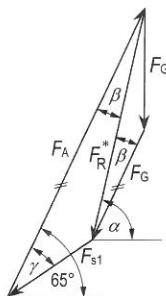
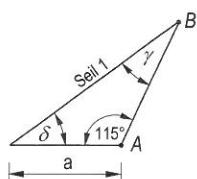
4.



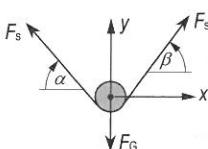
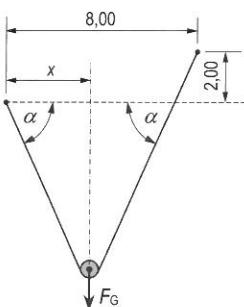
$$F_{s2} = F_G \quad (\text{Umlenkung um eine Rolle})$$

Die Wirkungslinie der Resultierenden \vec{F}_R^* aus \vec{F}_{s2} und \vec{F}_G geht durch den Schwerpunkt S der Rolle. Die Kräfte \vec{F}_R^* , \vec{F}_{s1} und \vec{F}_A bilden ein zentrales Kräftesystem im Punkt S.

Bild A.10: Freigeschnittene Rolle


Bild A.11: Kraftvektortriangle im Punkt B

Bild A.12: Geometrie

5.


Bild A.13: Gleichgewicht an der Rolle

Bild A.14: Geometrie

$$F_R^* = F_G \cdot \sqrt{\cos^2 65^\circ + (1 + \sin 65^\circ)^2} = 7,81 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_G \cdot (1 + \sin 65^\circ)}{F_G \cdot \cos 65^\circ} = 4,5107; \quad \alpha = 77,5^\circ$$

$$\beta = \alpha - 65^\circ = 12,5^\circ$$

$$\frac{\sin \gamma}{F_R^*} = \frac{\sin \beta}{F_{s1}}; \quad \sin \gamma = \frac{F_R^*}{F_{s1}} \cdot \sin \beta$$

Mit $F_{s1} \leq 3,5 \text{ kN}$ nach Voraussetzung ergibt sich

$$\sin \gamma = \frac{7,81 \text{ kN}}{3,5 \text{ kN}} \cdot \sin 12,5^\circ = 0,4830; \quad \gamma = 28,88^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 115^\circ - 28,88^\circ = 36,12^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{\overline{AB}}{\sin \delta}; \quad a = \overline{AB} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = 8 \text{ m} \cdot \frac{\sin 28,88^\circ}{\sin 36,12^\circ} = 6,55 \text{ m}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_s \cdot \cos \beta - F_s \cdot \cos \alpha \quad \Sigma F_{iy} = 0 = 2 \cdot F_s \cdot \sin \alpha - F_G$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$F_s = \frac{F_G}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$\alpha = \beta$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{8 \text{ m} - x}{\cos \alpha} = 15 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0,53; \quad \alpha = 57,8^\circ; \quad F_s = \frac{700 \text{ N}}{2 \cdot \sin 57,8^\circ} = 413,6 \text{ N}$$

$$x \cdot \tan \alpha = (8 \text{ m} - x) \cdot \tan \alpha - 2 \text{ m}$$

$$2 \cdot x \cdot \tan \alpha = 8 \text{ m} \cdot \tan \alpha - 2 \text{ m}$$

$$x = 4 \text{ m} - \frac{1 \text{ m}}{\tan \alpha} = 3,37 \text{ m}$$

6.

Kraft	$\frac{F_i}{N}$	$\frac{\varphi_i}{\circ}$	$\frac{F_{ix} = F_i \cdot \cos \varphi_i}{N}$	$\frac{F_{iy} = F_i \cdot \sin \varphi_i}{N}$
\vec{F}_1	74	27	65,9	33,6
\vec{F}_2	30	136	-21,6	20,8
\vec{F}_3	52	170	-51,2	9,0
\vec{F}_4	23	242	-10,8	-20,3
\vec{F}_5	94	305	53,9	-77,0
\vec{F}_R			36,2	-33,9

$$F_R = \sqrt{36,2^2 + (-33,9)^2} \text{ N} = 49,6 \text{ N} \quad \tan \Phi = \frac{-33,9 \text{ N}}{36,2 \text{ N}} = -43,1^\circ = 316,9^\circ$$

7. $l_{01} = l_{02} = l_{03} = l_{04} = 50 \cdot \sqrt{2} \text{ mm} = 70,7 \text{ mm}$

$$l_1 = l_4 = \sqrt{25^2 + 50^2} \text{ mm} = 55,9 \text{ mm}$$

$$l_2 = l_3 = \sqrt{75^2 + 50^2} \text{ mm} = 90,1 \text{ mm}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_4 = 70,7 \text{ mm} - 55,9 \text{ mm} = 14,8 \text{ mm} \text{ (Verkürzung)}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = 90,1 \text{ mm} - 70,7 \text{ mm} = 19,4 \text{ mm} \text{ (Verlängerung)}$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{50 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right) = 33,7^\circ$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{50 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} \right) = 63,4^\circ$$

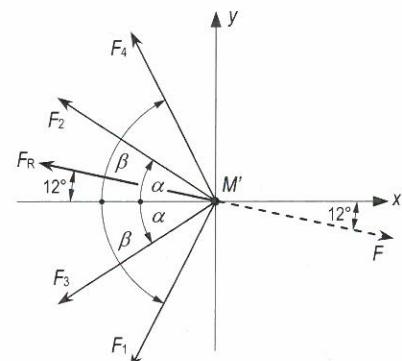


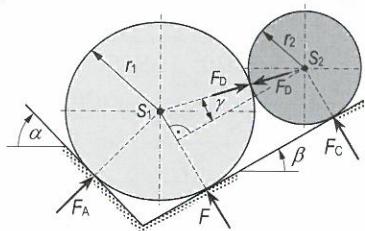
Bild A.15: Zentrales Kräftesystem im Punkt M'

Kraft	$\frac{F_i = c_i \cdot \Delta l_i}{N}$	$\frac{\varphi_i}{\circ}$	$\frac{F_{ix} = F_i \cdot \cos \varphi_i}{N}$	$\frac{F_{iy} = F_i \cdot \sin \varphi_i}{N}$
\vec{F}_1	296	243,4	-132,5	-264,7
\vec{F}_2	776	146,3	-645,6	430,6
\vec{F}_3	970	213,7	-807,0	-538,2
\vec{F}_4	888	116,6	-397,6	794,0
\vec{F}_R			-1982,7	421,7

$$\tan \Phi = \frac{421,7 \text{ N}}{-1982,7 \text{ N}} = -0,2127 ; \quad \Phi = 180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$$

$$F_R = \sqrt{(-1982,7)^2 + 421,7^2} \text{ N} = 2027 \text{ N} ; \quad \vec{F} = -\vec{F}_R$$

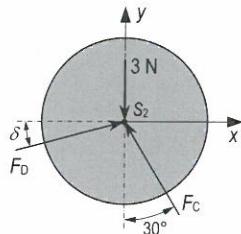
8. a)



$$\sin \gamma = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2,5\text{cm} - 1,5\text{cm}}{2,5\text{cm} + 1,5\text{cm}} = 0,25$$

$$\gamma = 14,5^\circ$$

Bild A.16: System und Geometrie



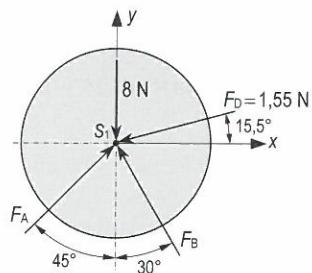
$$\delta = 30^\circ - \gamma = 30^\circ - 14,5^\circ = 15,5^\circ$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = -F_C \cdot \sin 30^\circ + F_D \cdot \cos 15,5^\circ \quad \textcircled{1}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_C \cdot \cos 30^\circ + F_D \cdot \sin 15,5^\circ - 3 \text{ N} \quad \textcircled{2}$$

aus $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ ergibt sich:

$$F_C = 2,99 \text{ N}; \quad F_D = 1,55 \text{ N}$$

Bild A.17: Zentrales Kräftesystem im Punkt S_2 

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_A \cdot \sin 45^\circ - F_D \cdot \cos 15,5^\circ - F_B \cdot \sin 30^\circ \quad \textcircled{3}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_A \cdot \cos 45^\circ + F_B \cdot \cos 30^\circ - F_D \cdot \sin 15,5^\circ - 8 \text{ N} \quad \textcircled{4}$$

aus $\textcircled{3}$ und $\textcircled{4}$ ergibt sich mit $F_D = 1,55 \text{ N}$:

$$F_A = 5,70 \text{ N}; \quad F_B = 5,07 \text{ N}$$

Bild A.18: Zentrales Kräftesystem im Punkt S_1

b) Mit $F_B = 0$ ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht am Punkt S_1 :

$$F_D = \frac{8 \text{ N}}{\cos 15,5^\circ - \sin 15,5^\circ} = 11,49 \text{ N}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht am Punkt S_2 erhält man damit:

$$F_C = \frac{11,49 \text{ N} \cdot \cos 15,5^\circ}{\sin 30^\circ} = 22,14 \text{ N}$$

$$F_{G2} = 22,14 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ + 11,49 \text{ N} \cdot \sin 15,5^\circ = 22,25 \text{ N}$$

9.

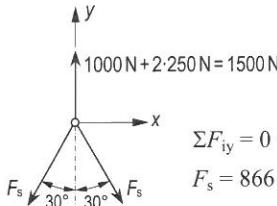
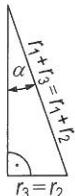


Bild A.19: Kräftegleichgewicht am Aufhängepunkt

$$\frac{F_N}{\sin 30^\circ} = \frac{F_s}{\sin 75^\circ}$$

$$F_N = 866\text{ N} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = 448\text{ N}$$

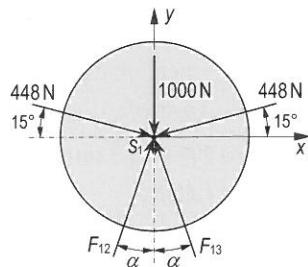


$$r_1 = \frac{d_1}{2}; \quad r_2 = \frac{d_2}{2}; \quad F_{12} = F_{13}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right) = \arcsin\left(\frac{10\text{ cm}}{10\text{ cm} + 20\text{ cm}}\right)$$

$$\alpha = 19,5^\circ$$

Bild A.21: Geometrie



$$\Sigma F_{iy} = 0 = 2 \cdot F_{13} \cdot \cos 19,5^\circ - 2 \cdot 448\text{ N} \cdot \sin 15^\circ - 1000\text{ N}$$

$$F_{13} = F_{12} = 653\text{ N}$$

Bild A.22: Kräftegleichgewicht Rohr 1

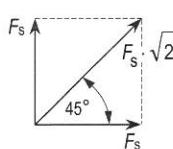


Bild A.23: Seilumlenkung Rohr 2

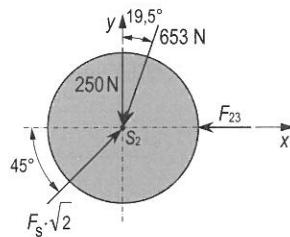


Bild A.24: Kräftegleichgewicht Rohr 2

$$\Sigma F_{ix} = 0 = -F_{23} + 866\text{ N} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - 653\text{ N} \cdot \sin 19,5^\circ$$

$$F_{23} = F_{32} = 648\text{ N}$$

Abschnitt 4

1. a)

<i>i</i>	F_i kN	F_{ix} kN	F_{iy} kN	x_i m	y_i m	$x_i \cdot F_{iy}$ kN·m	$y_i \cdot F_{ix}$ kN·m	M_{iA} kN·m
1	5	-4,3	-2,5	-0,8	1,2	2,0	-5,2	7,2
2	8	0	-8,0	1,0	0	-8,0	0	-8,0
3	5	-3,5	-3,5	2,0	0	-7,0	0	-7,0
4	10	0	-10,0	3,6	0	-36,0	0	-36,0
5	6	3,0	-5,2	5,4	0	-28,1	0	-28,1
		-4,8	-29,2					-71,9

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-4,8)^2 + (-29,2)^2} \text{ kN} = 29,6 \text{ kN}$$

$$a' = \frac{\sum M_{iA}}{F_{Ry}} = \frac{-71,9 \text{ kN} \cdot \text{m}}{-29,2 \text{ kN}} = 2,46 \text{ m}$$

b)

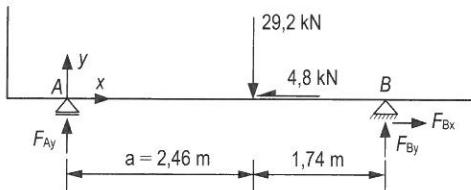


Bild A.25: Auflagerkräfte

$$F_{ix} = 0: F_{Bx} = 4,8 \text{ kN} \quad \sum M_{iB} = 0: F_{Ay} = 29,2 \text{ kN} \cdot \frac{1,74 \text{ m}}{4,2 \text{ m}} = 12,1 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{By} = 29,2 \text{ kN} - 12,1 \text{ kN} = 17,1 \text{ kN}$$

$$F_A = F_{Ay} = 12,1 \text{ kN} \quad F_B = \sqrt{4,8^2 + 17,1^2} \text{ kN} = 17,8 \text{ kN}$$

2. $\sum F_{ix} = 0: F_{Bx} = F_A \cdot \cos 60^\circ \quad ①$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{By} = 900 \text{ N} - F_A \cdot \sin 60^\circ \quad ②$$

$$\sum M_{iA} = 0 = F_{By} \cdot 1250 \text{ mm} - 900 \text{ N} \cdot 500 \text{ mm} + F_{Bx} \cdot 700 \text{ mm}$$

mit ① und ②

$$F_A = 921 \text{ N} \quad F_{Bx} = 461 \text{ N} \quad F_{By} = 102 \text{ N}$$

$$F_B = \sqrt{461^2 + 102^2} \text{ N} = 472 \text{ N}$$

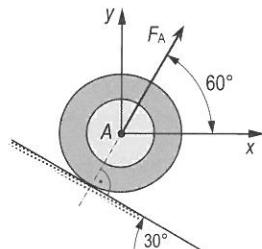


Bild A.26: Schubkarre

3. a) $\alpha = \arctan\left(\frac{350 \text{ mm}}{150 \text{ mm}}\right) = 66,8^\circ$

$$\Sigma M_{iA} = 0 = F_B \cdot \sin 66,8^\circ \cdot 500 \text{ mm} - 3,4 \text{ kN} \cdot 700 \text{ mm}$$

$$F_B = 5,18 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_{Ax} - F_B \cdot \cos 66,8^\circ$$

$$F_{Ax} = 2,04 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_{Ay} - F_B \cdot \sin 66,8^\circ + 3,4 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 1,36 \text{ kN} \quad F_A = \sqrt{2,04^2 + 1,36^2} \text{ kN} = 2,45 \text{ kN}$$

b) $\alpha = 90^\circ \quad F_C^* = 4,76 \text{ kN} \quad F_{Ax}^* = 0 \quad F_{Ay}^* = F_A^* = 1,36 \text{ kN}$

Bild A.27: Radaufhängung

$F = 85 \text{ N}$

4. $\Sigma F_{iy} = 0 = F_C - 85 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ$

$$F_C = 73,6 \text{ N}$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 = 73,6 \text{ N} \cdot 15 \text{ mm} - F_B \cdot 40 \text{ mm} + 85 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ \cdot 30 \text{ mm}$$

$$F_B = 59,5 \text{ N}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_A - 85 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ - 59,5 \text{ N}$$

$$F_A = 102,0 \text{ N}$$

$$M_D = F_C \cdot 15 \text{ mm} = 73,6 \text{ N} \cdot 15 \text{ mm} = 1104 \text{ N mm} = 1,104 \text{ N m}$$

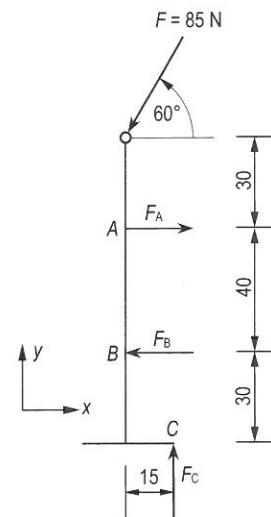


Bild A.28: Tellerstöbel

5. $\Sigma F_{iy} = 0 = F_{Ay} - 6 \text{ kN}$

$$F_{Ay} = 6,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 = 6 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - F_{Bx} \cdot 4 \text{ m}$$

$$F_{Bx} = 7,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = 7,5 \text{ kN} - F_{Ax}$$

$$F_{Ax} = 7,5 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{7,5^2 + 6,0^2} \text{ kN} = 9,6 \text{ kN}$$

$$F_B = F_{Bx} = 7,5 \text{ kN}$$

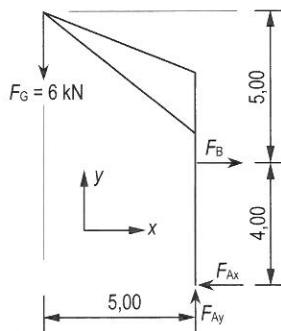


Bild A.29: Drehkran

$$6. \text{ a) } \alpha = \arctan \left(\frac{2 \text{ m}}{1 \text{ m}} \right) = 63,43^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{2 \text{ m}}{2,5 \text{ m}}\right) = 38,66^\circ$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_2 \cdot \cos 38,66^\circ - F_1 \cdot \cos 63,43^\circ - 250 \text{ N}$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot \cos 38,66^\circ - 250 \text{ N}}{\cos 63,43^\circ} \quad ①$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 = F_1 \cdot \sin 63,43^\circ \cdot 2 \text{ m} - F_2 \cdot \sin 38,66^\circ \cdot 3 \text{ m} + 250 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

mit ①

$$F_2 \cdot (\cos 38,66^\circ \cdot \tan 63,43^\circ \cdot 2 \text{ m} - \sin 38,66^\circ \cdot 3 \text{ m}) = 250 \text{ N} \cdot (\tan 63,43^\circ \cdot 2 \text{ m} - 1 \text{ m})$$

$$F_2 = 600 \text{ N} \quad \text{aus ①} \quad F_1 = 489 \text{ N}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_p - F_1 \cdot \sin 63,43^\circ - F_2 \cdot \sin 38,66^\circ$$

$$F_P = 489 \text{ N} \cdot \sin 63,43^\circ + 600 \text{ N} \cdot \sin 38,66^\circ = 812 \text{ N}$$

- b) Nein, denn alle Kräfte würden dann ihre Richtungen umkehren; die Seile können aber keine Druckkräfte übertragen, und der Pfahl kann nicht am Boot ziehen.

$$7. \quad \alpha = \arctan \left(\frac{0,60 \text{ m}}{1,40 \text{ m}} \right) = 23,2^\circ$$

$$\sum M_{iA} = 0:$$

$$12 \text{ kN} \cdot 1,2 \text{ m} - F_H \cdot \cos 23,2^\circ \cdot 0,6 \text{ m} - F_H \cdot \sin 23,2^\circ \cdot 0,3 \text{ m} = 0$$

$$F_H = \frac{12 \text{ kN} \cdot 1,2 \text{ m}}{\cos 23,2^\circ \cdot 0,6 \text{ m} + \sin 23,2^\circ \cdot 0,3 \text{ m}} = 21,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0 = F_H \cdot \cos 23.2^\circ - F_{Ax}$$

$$F_{Ax} = 19,8 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{iv} = 0 = F_{Av} + F_H \cdot \sin 23.2^\circ - 12 \text{ kN}$$

$$F_{Av} = 3.5 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{19,8^2 + 3,5^2} \text{ kN} = 20,1 \text{ kN}$$

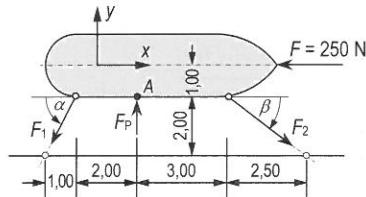


Bild A.30: Boot

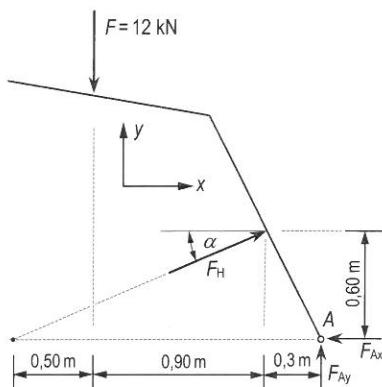


Bild A.31: Reparaturbühne

$$8. \quad \Sigma F_{ix} = 0 = F_C \cdot \cos 30^\circ - F_B \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_B = \frac{F_C \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} \quad ①$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_{Ay} + F_B \cdot \sin 45^\circ + F_C \cdot \sin 30^\circ$$

$$F_{Ay} = -F_B \cdot \sin 45^\circ - F_C \cdot \sin 30^\circ \quad ②$$

$$\Sigma M_{iD} = 0:$$

$$-F_{Ay} \cdot 0,6 \text{ m} - F_C \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,3 \text{ m} + 60 \text{ Nm} - 100 \text{ Nm} = 0$$

mit ② und ①

$$F_C \cdot (\cos 30^\circ \cdot 0,3 \text{ m} + \sin 30^\circ \cdot 0,6 \text{ m}) = 40 \text{ Nm}$$

$$F_C = 71,5 \text{ N}$$

$$F_B = \frac{71,5 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = 87,5 \text{ N}$$

$$F_{Ay} = -87,5 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ - 71,5 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ = -97,6 \text{ N} \quad F_{Ax} = 0 \quad F_A = 97,6 \text{ N}$$

$$9. \quad \text{a) } \alpha = \arctan \left(\frac{200 \text{ mm}}{1250 \text{ mm}} \right) = 9,1^\circ$$

$$\Sigma M_{iA} = 0:$$

$$13 \text{ kN} \cdot 200 \text{ mm} - F_B \cdot \sin 9,1^\circ \cdot 80 \text{ mm} - F_B \cdot \cos 9,1^\circ \cdot 750 \text{ mm} = 0$$

$$F_B = 3,45 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_{Ax} - F_B \cdot \cos 9,1^\circ$$

$$F_{Ax} = 3,45 \text{ kN} \cdot \cos 9,1^\circ = 3,41 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = 13 \text{ kN} - F_{Ay} - F_B \cdot \sin 9,1^\circ$$

$$F_{Ay} = 13 \text{ kN} - 3,45 \text{ kN} \cdot \sin 9,1^\circ = 12,45 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{3,41^2 + 12,45^2} \text{ kN} = 12,91 \text{ kN}$$

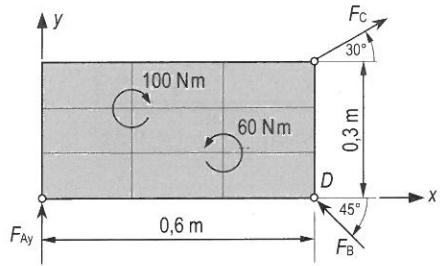


Bild A.32: Konstruktionsteil

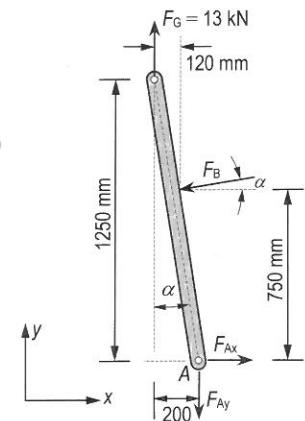


Bild A.33: Hängearm

$$\text{b) } \Sigma F_{ix} = 0 = F_{D\bar{x}} - 13 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ + F_s \cdot \sin 26^\circ$$

$$F_{D\bar{x}} = 13 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ - F_s \cdot \sin 26^\circ \quad ①$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_{D\bar{y}} - 13 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ + F_s \cdot \cos 26^\circ$$

$$F_{D\bar{y}} = 13 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ - F_s \cdot \cos 26^\circ \quad ②$$

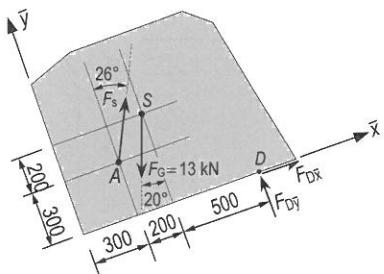


Bild A.34: Kübelentleerung

$$\Sigma M_{iA} = 0 = F_{D\bar{x}} \cdot 0,3m + F_{D\bar{y}} \cdot 0,7m + 13 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ \cdot 0,2m - 13 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ \cdot 0,2m = 0$$

mit ① und ②:

$$F_s = \frac{13 \text{ kN} \cdot 0,5m \cdot (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)}{\sin 26^\circ \cdot 0,3m + \cos 26^\circ \cdot 0,7m} = 10,95 \text{ kN}$$

$$F_{D\bar{x}} = 13 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ - 10,95 \text{ kN} \cdot \sin 26^\circ = -0,35 \text{ kN}$$

$$F_{D\bar{y}} = 13 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ - 10,95 \text{ kN} \cdot \cos 26^\circ = 2,37 \text{ kN}$$

$$F_D = \sqrt{(-0,35)^2 + 2,37^2} = 2,40 \text{ kN}$$

- c) Die Wirkungslinie der vertikal gerichteten Seilkraft \vec{F}_s geht durch den verschobenen Schwerpunkt S'

$$\varphi = \arctan \left(\frac{100 \text{ mm}}{1050 \text{ mm}} \right) = 5,4^\circ$$

$$\alpha' = 5,4^\circ + 9,1^\circ = 14,5^\circ$$

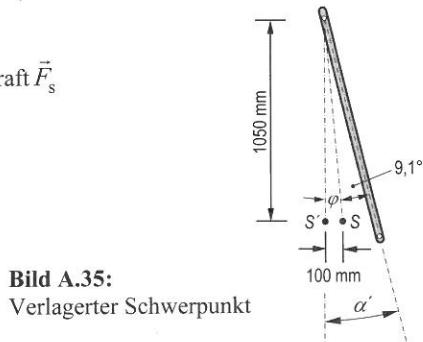


Bild A.35:
Verlagerter Schwerpunkt

Abschnitt 5

1.

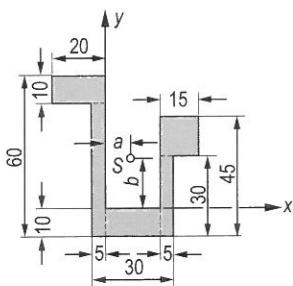


Bild A.36: Querschnitt Aufgabe 1 a)

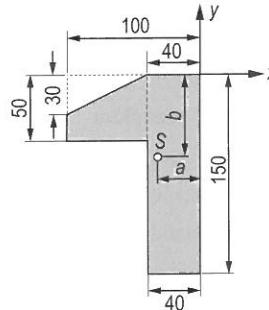


Bild A.37: Querschnitt Aufgabe 1 b)

a)

$$x_S = a = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 10 \cdot (-10) + 5 \cdot 50 \cdot (-2,5) + 20 \cdot 10 \cdot 10 + 5 \cdot 30 \cdot 22,5 + 15 \cdot 15 \cdot 27,5}{20 \cdot 10 + 5 \cdot 50 + 20 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 15 \cdot 15} = 8,7 \text{ mm}$$

$$y_S = b = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 45 + 5 \cdot 50 \cdot 15 + 20 \cdot 10 \cdot (-5) + 5 \cdot 30 \cdot 5 + 15 \cdot 15 \cdot 27,5}{20 \cdot 10 + 5 \cdot 50 + 20 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 15 \cdot 15} = 18,2 \text{ mm}$$

$$b) \quad x_S = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{50 \cdot 60 \cdot (-70) - \frac{30 \cdot 60}{2} \cdot \left[-(40 + \frac{2}{3} \cdot 60) \right] + 40 \cdot 150 \cdot (-20)}{50 \cdot 60 - \frac{30 \cdot 60}{2} + 40 \cdot 150}$$

(Schwerpunkt des Dreiecks vgl. Bild 5.10)

Abschnitt 6

1. a) $F_C = 14,23 \text{ kN}$ $F_D = 18,55 \text{ kN}$
 b) $F_A = 1,24 \text{ kN}$ $F_B = 4,96 \text{ kN}$
2. $F_A = F_D = 3,71 \text{ kN}$ $F_B = F_C = 5,09 \text{ kN}$ $F_E = 7,20 \text{ kN}$
 3. $F = 1246 \text{ N}$ $F_A = F_B = 144,1 \text{ N}$ und $\vec{F}_A = -\vec{F}_R$ $\vec{F}_C = 626 \text{ N}$
 4. $F_A = 4,9 \text{ kN}$ $F_B = 2,1 \text{ kN}$ $F_C = 4,2 \text{ kN}$ $F_D = 2,1 \text{ kN}$ $F_E = 14,4 \text{ kN}$ $F_H = 20,8 \text{ kN}$
 5. a) $12,3 \text{ N}$
 b) $c = 13,06 \text{ N/mm}$
 c) $F_B = 32,7 \text{ N}$
 d) Punkte A, C und E liegen auf einer Geraden, Federkraft $83,5 \text{ N}$
 e) $F_A = 85,6 \text{ N}$ $F_D = 15,2 \text{ N}$ $F_E = 74,1 \text{ N}$
 6. $F_{S1} = 3,75 \text{ kN}$ $F_{S2} = 5,36 \text{ kN}$ $F_B = 8,65 \text{ kN}$ $F_A = 12,60 \text{ kN}$ $M_{EA} = 27,0 \text{ kNm}$
 7. a) $c/b = d/e$
 b) $c/a = 1/10$
 8. a) $F_A = 14,62 \text{ kN}$ $F_B = 6,96 \text{ kN}$ $F_C = 6,57 \text{ kN}$
 b) $F_A = 40,2 \text{ kN}$ $F_B = 36 \text{ kN}$ $F_C = 56,9 \text{ kN}$ $F_D = F_H = 25,5 \text{ kN}$ $F_E = 18 \text{ kN}$
 c) $F_A = 2,69 \text{ kN}$ $F_B = 7,43 \text{ kN}$ $F_C = 7,31 \text{ kN}$ $F_D = 3,01 \text{ kN}$ $F_E = 5,67 \text{ kN}$
 (\vec{F}_E ist die Kraft, die an der Gelenkstelle E auf den mit der Kraft 8 kN belasteten Balken wirkt.)
 d) Belastungsfall 1: $F_A = 50 \text{ kN}$ $F_B = 31,6 \text{ kN}$ $F_C = F_D = 42,4 \text{ kN}$ $F_E = F_H = 40 \text{ kN}$
 Belastungsfall 2: $F_A = 17,16 \text{ kN}$ $F_B = 9,72 \text{ kN}$ $F_C = 7,07 \text{ kN}$ $F_D = 15,81 \text{ kN}$
 $F_E = F_H = 13,33 \text{ kN}$

Abschnitt 7Die Stabkräfte F_{Si}/kN sind:

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Stab i							
1	60	-52,5	210	33,6	3,50	15,65	-3,2
2	-61,8	63,1	-297	-34,6	-3,81	-19,80	-2,0
3	-33,5	-35,0	99,0	-47,5	-4,95	-2,83	4,8
4	-42,4	-60	-313	33,6	2,00	-16,97	
5	-16,8	9,01	145,3	-54,8	-3,91	10,06	
6	-50,3	52,5	215		-3,91	7,50	
7	30	0	11,2		1,75	12,30	
8		-60	-220			-16,97	
9		-9,01	78,3			-4,24	
10		67,5	185			-18,38	
11		-45	33,5			17,89	
12		-67,5	-224				
13		81,1	70,7				
14			150				
15			-212				

Abschnitt 8

$$1. \quad F_{s1} = 2,45 \text{ kN} \quad F_{s2} = 1,00 \text{ kN} \quad F_{s3} = 2,59 \text{ kN}$$

$$2. \quad F_{s1} = 183 \text{ N} \quad F_{s2} = 106 \text{ N} \quad F_{s3} = 211 \text{ N}$$

$$3. \quad F_{s1} = 25,6 \text{ kN} \quad F_{s2} = 39 \text{ kN} \quad F_{s3} = 72 \text{ kN} \quad F_{s4} = 51,4 \text{ kN}$$
$$F_{s5} = 66,1 \text{ kN} \quad F_{s6} = 134,7 \text{ kN}$$

Die Stäbe 3, 4 und 6 sind auf Zug, die Stäbe 1, 2 und 5 auf Druck beansprucht.

$$4. \quad \vec{F}_A = (-106 ; 184 ; -212) \text{ N} \quad F_A = 300 \text{ N}$$
$$\vec{M}_A = (-21,2 ; 50,9 ; 54,7) \text{ Nm} \quad M_A = 77,7 \text{ Nm}$$

$$5. \quad \vec{F}_A = (-30 ; 20 ; 10) \text{ kN} \quad F_A = 37,4 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_C = (0 ; 10 ; 0) \text{ kN} \quad F_C = F_{s1} = 10 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_D = (15 ; -30 ; -30) \text{ kN} \quad F_D = F_{s2} = 45 \text{ kN}$$

$$6. \quad \vec{F}_Z = (0 ; -2,93 ; 1,067) \text{ kN} \quad F_Z = 3,12 \text{ kN}$$
$$F_{zu} = 2,93 \text{ kN}$$
$$F_{zr} = 1,067 \text{ kN}$$

$$\vec{F}_A = (0 ; -2,83 ; -1,137) \text{ kN} \quad F_A = 3,05 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_B = (0 ; 1,401 ; 0,403) \text{ kN} \quad F_B = 1,458 \text{ kN}$$

$$7. \quad \vec{F}_1 = (0 ; 1,5 ; 0,546) \text{ kN} \quad F_1 = 1,596 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_2 = (1,400 ; -1,205 ; -3) \text{ kN} \quad F_2 = 3,52 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_A = (0 ; -1,361 ; -0,778) \text{ kN} \quad F_A = 1,567 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_B = (-1,400 ; 1,065 ; 3,23) \text{ kN} \quad F_B = 3,68 \text{ kN}$$

$$8. \quad \vec{F}_A = (0 ; 2,53 ; 4,43) \text{ kN} \quad F_A = 5,10 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_B = (-3,57 ; -3,83 ; 0,366) \text{ kN} \quad F_B = 5,25 \text{ kN}$$
$$\vec{F}_C = (0 ; 0 ; -11,20) \text{ kN} \quad F_C = 11,20 \text{ kN}$$

Abschnitt 9

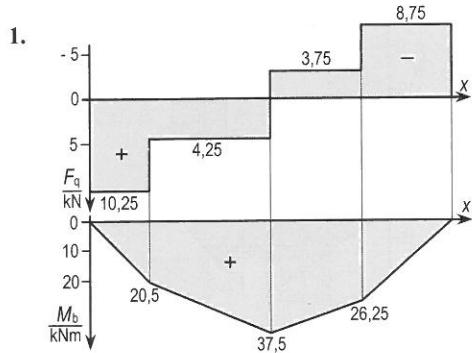


Bild A.52: Schnittgrößenverlauf im Balken

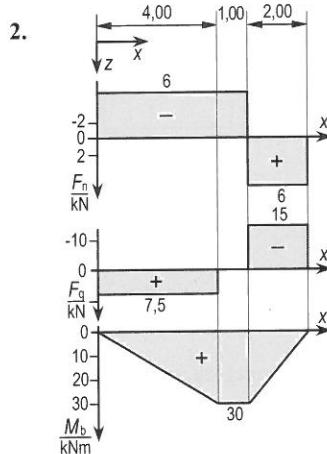


Bild A.53: Schnittgrößenverlauf in der Kransäule

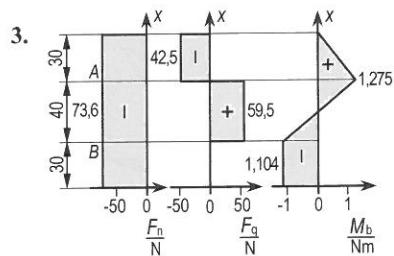


Bild A.54: Schnittgrößenverlauf im Stoßel

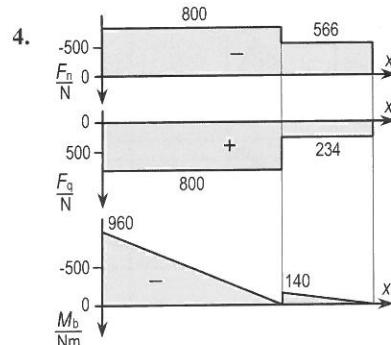


Bild A.55: Schnittgrößenverlauf im waagerechten Balken

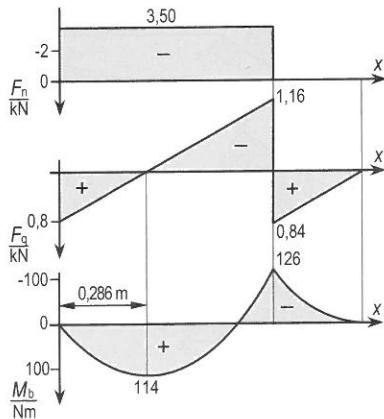


Bild A.56: Schnittgrößenverlauf im Träger

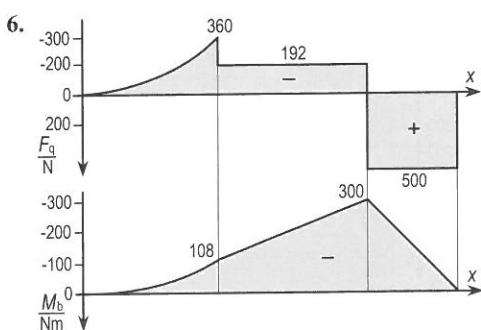


Bild A.57: Schnittgrößenverlauf im Kragbalken

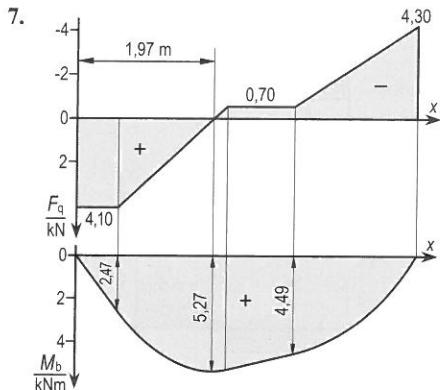


Bild A.58: Schnittgrößenverlauf im Träger

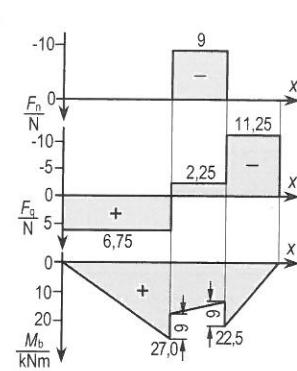


Bild A.59: Schnittgrößenverlauf im waagerechten Balken

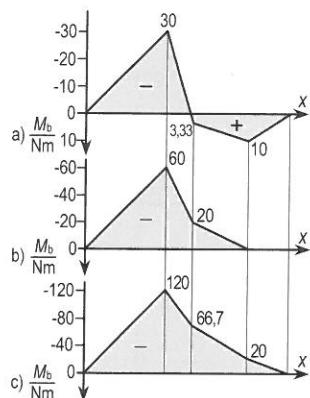


Bild A.60: Momentlinien für den Kragbalken

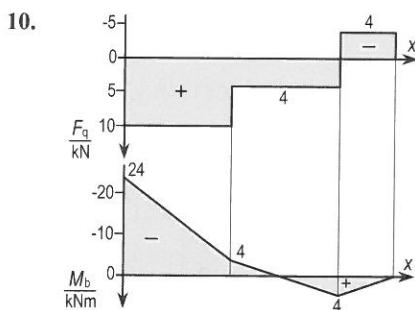


Bild A.61: Schnittgrößenverlauf im Gelenkträger

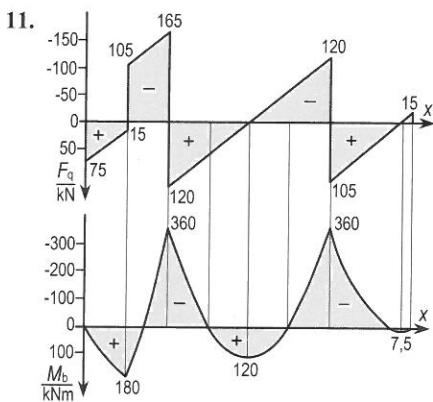


Bild A.62: Schnittgrößenverlauf im Gelenkbrückenträger

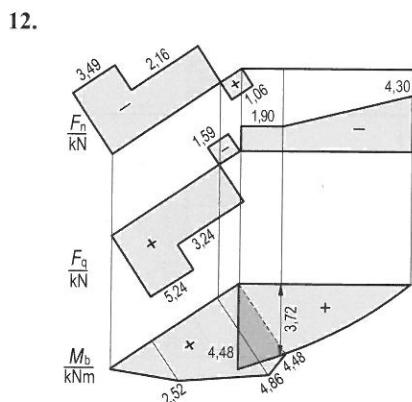


Bild A.63: Schnittgrößenverlauf im Rahmen

13.

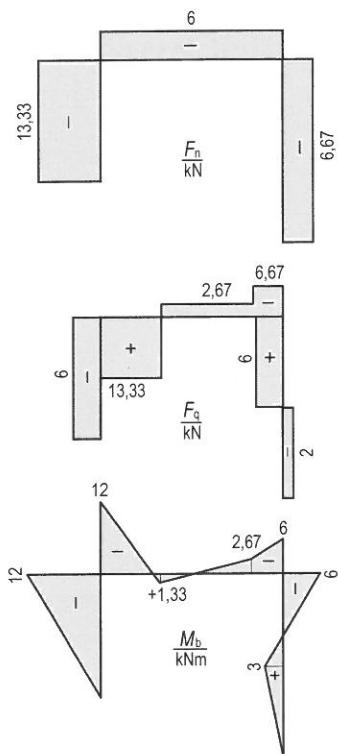
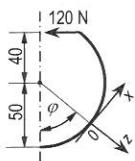


Bild A.64: Schnittgrößenverlauf im Gelenkrahmen

14.



$$F_n = 120 \text{ N} \cdot \cos\varphi$$

$$F_q = 120 \text{ N} \cdot \sin\varphi$$

$$M_b = (480 + 600 \cdot \cos\varphi) \text{ Ncm}$$

Bild A.65: Schnittgrößenverlauf im Sicherungsring

15.

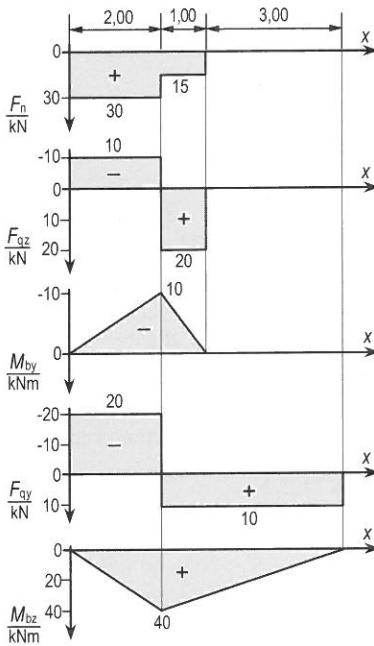


Bild A.66: Schnittgrößenverlauf im Balken

16.

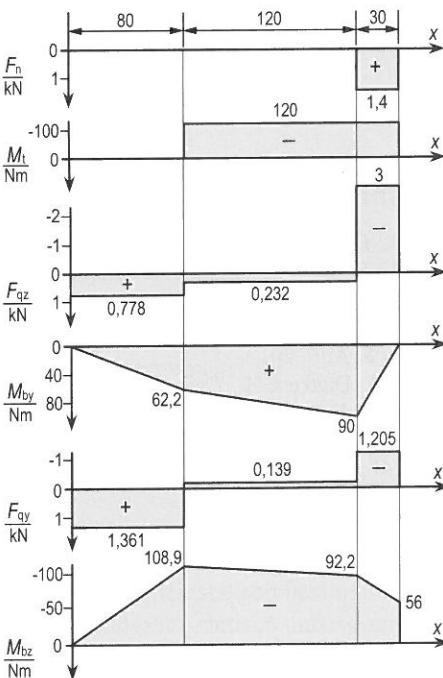


Bild A.67: Schnittgrößenverlauf in der Getriebewelle