Vorlesungsskript

Mathematik 1

- WS 2016/2017 -

Prof. Dr. Gisela Köberle

Literatur

- Dietmaier, Christopher:
  Mathematik für Wirtschaftsingenieure
  Hanser, München, 2013

- Knorrenschild, Michael:
  Mathematik für Ingenieure 1
  Hanser, München, 2009

- Papula, Lothar:
  Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1
  Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011

- Papula, Lothar:
  Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2
  Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011

- Papula , Lothar:
  Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Anwendungsbeispiele
  Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2012

- Rießinger, Thomas:
  Mathematik für Ingenieure
  Springer Vieweg, Heidelberg, 2013

Hinweis:
Dieses Skript basiert auf diversen Fachbüchern. Es enthält zum Teil wörtlich übernommene Passagen, die nicht explizit als solche kenntlich gemacht wurden. Somit ist die Verwendung des Skripts zwar im Rahmen dieser Vorlesung erlaubt, nicht jedoch darüber hinaus.
Insbesondere ist dieses Skript *nicht zitierfähig!*

Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Definition 1.1: (Georg Cantor)
Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem dieser Objekte eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht. Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Mengen werden in der Mathematik meist mit $A, B, C, \cdots$ oder $M_1, M_2, M_3, \cdots$, ihre Elemente mit $a, b, c, \cdots$ oder $a_1, a_2, a_3, \cdots$ bezeichnet.

Definition 1.2:
Ist ein Objekt x Element der Menge A, so schreibt man $x \in A$.
Ist x nicht als Element in der Menge A enthalten, so schreibt man $x \notin A$.

Für die Beschreibung von Mengen gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Beschreibung einer Menge durch Aufzählung der Elemente

Beispiel:
Für die Menge der Zahlen $1, 2, 3, 4$ kann man schreiben:

(2) Beschreibung einer Menge durch eine Variable und Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft

Beispiele:
a) Für die Menge der Zahlen $1, 2, 3, 4$ kann man schreiben:

b) Die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.
Die Menge L der Lösungen wird als *Lösungsmenge* bezeichnet und kann in der Symbolik der Mengenlehre folgendermaßen geschrieben werden:

c) Für die Menge der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ kann man schreiben:

Definition 1.3:
Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* oder *Nullmenge* und wird mit $\varnothing$ oder $\{\ \}$ bezeichnet.

Definition 1.4:
Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, in Zeichen $A \subseteq B$, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist:
$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x \left(x \in A \Rightarrow x \in B \right)$
Ist dabei $A \neq B$, so heißt A auch *echte Teilmenge* von B.
Ist $A = B$, so ist A *unechte Teilmenge* von B.
Ist A *nicht* (echte) Teilmenge von B, so schreibt man $A \not\subset B$.

Beispiele:
a) Es sei $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Dann gilt:

b) Es sei wieder $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, aber $C = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. Dann gilt:

1.1.1 Mengenoperationen

Mengen lassen sich durch verschiedene Mengenoperationen miteinander verknüpfen. Die Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Differenz zweier Mengen können unter Verwendung ebener Punktmengen auch grafisch veranschaulicht werden (VENNsche Diagramme).
Eine Punktmenge ist die Menge aller Punkte innerhalb und auf einer Umrandung.

Definition 1.5:
Der *Durchschnitt (Schnittmenge)* $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören:
$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

Beispiel:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\Rightarrow$

Definition 1.6:
Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer, d.h. gilt $A \cap B = \varnothing$, so heißen A und B *punktfremd*, *elementfremd* oder *disjunkt*.

Definition 1.7:
Die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die wenigstens zu einer der Mengen A oder B gehören:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Beispiel:
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\quad B = \{2,4,6,8,10\} \qquad \Rightarrow$

Definition 1.8:
Die *Differenz* $A \backslash B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht gleichzeitig zu B gehören:
$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Beispiel:
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\quad B = \{2,4,6,8,10\} \qquad \Rightarrow$

Definition 1.9:
Es sei A eine echte Teilmenge von B $(A \subset B)$. Als *Komplement* $\overline{A}$ von A bezüglich B wird die Menge aller Elemente aus B bezeichnet, die nicht in A enthalten sind:
$\overline{A} := B \backslash A = \{x \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$

1.1.2 Mengenalgebra

Satz 1.1:
Es seien A, B und C Teilmengen der Menge Ω. Dann gelten:

i) Kommutativgesetze
a) $A \cup B = B \cup A$
b) $A \cap B = B \cap A$

ii) Assoziativgesetze
a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

iii) Distributivgesetze

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Satz 1.2:

Es seien A, B und C Teilmengen der Menge Ω. Dann gelten:

i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.2 Zahlenbereiche und Rechenregeln

Natürliche Zahlen (Symbol: $\mathbb{N}$): 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
(Oft wird auch die Zahl 0 mit zu $\mathbb{N}$ gezählt);
Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt möglich.

Ganze Zahlen (Symbol: $\mathbb{Z}$): ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...
Addition, Multiplikation und Subtraktion sind uneingeschränkt möglich.

Rationale Zahlen (Symbol: $\mathbb{Q}$): alle Zahlen, die sich als Bruch ganzer Zahlen, d.h. in der Form $z = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, darstellen lassen, wobei $n \neq 0$.
Alle vier Grundrechenarten inklusive der Division sind uneingeschränkt ausführbar.

Satz 1.3:

Für rationale Zahlen gelten die folgenden Regeln:

i) $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$

ii) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d}{b \bullet c}$, falls $b \neq 0, c \neq 0$ und $d \neq 0$

iii) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \bullet d+b \bullet c}{b \bullet d}$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$

Beispiele:

a) $\frac{5}{3}+\frac{7}{8}=$

b) $\frac{5}{3}+\frac{7}{9}=$

Reelle Zahlen (Symbol: $\mathbb{R}$): alle Zahlen die entweder rational oder *irrational* sind.
Irrationale Zahlen sind unendliche, nicht periodische und demzufolge nicht als Bruch darstellbare Zahlen.

Beispiele: $\sqrt{2}=1{,}41421\cdots$, $\pi=3{,}1415926\cdots$, $e=2{,}71828\cdots$.
Das Ziehen der Wurzel bei positivem Radikand kann nun eindeutig durchgeführt werden.

Komplexe Zahlen (Symbol: $\mathbb{C}$): Zahlen der Form $z=a+bi$, wobei $i=\sqrt{-1}$ die sogenannte *imaginäre* Einheit ist (für die $i^2=-1$ gilt) und $a,b \in \mathbb{R}$.

Vergleich der Zahlenbereiche
Die genannten Zahlenbereiche sind Erweiterungen des jeweils vorhergehenden: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Übungsblatt Kapitel 1: Mengenlehre

Aufgabe 1:
Schreiben Sie mit Hilfe der Symbolik der Mengenlehre die folgenden Mengen:

a) Die Menge A der ersten fünf Buchstaben des lateinischen Alphabets.

b) Die Menge B aller Studenten an der DHBW Bad Mergentheim, die Wirtschaftsingenieurwesen studieren und die Vorlesung zur Mathematik 1 besuchen. W sei die Menge aller Studenten der DHBW Bad Mergentheim, die Wirtschaftsingenieurwesen studieren.

c) Die Menge C aller reellen Zahlen zwischen $+1$ und -1 ($+1$ und -1 eingeschlossen) ohne die 0.

d) Die Menge D aller natürlichen Zahlen kleiner als 0.

e) Die Menge E aller natürlichen Zahlen zwischen 8 und 24

Aufgabe 2:
Geben seien $\varnothing,\ \{0\},\ \{\varnothing\},\ 0$. Erläutern Sie die Unterschiede.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Menge $A=\{x \mid x\in R \wedge 1<x<10\}$. Welche der folgenden Mengen sind in der Menge A als Teilmenge enthalten?

a) $B=\{x \mid x\in R \wedge 1<x<10\}$

b) $C=\left\{x \,\middle|\, x\in R \wedge x^3=8\right\}$

c) $D=\left\{x \,\middle|\, x\in R \wedge x^2=4\right\}$

d) $E=\left\{x \,\middle|\, x\in R \wedge x^2-7x+12=0\right\}$

Aufgabe 4:
Gegeben seien die folgenden Mengen $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x \mid x\in N \wedge x>5\}$, $D=\{3,4,5,6\}$.
Bestimmen Sie

a) $A\cap B$ b) $D\setminus A$ c) $B\cup D$ d) $\overline{B}_N$

e) $(A\cup B)\cap D$ f) $A\cap D$

Aufgabe 5:
Bilden Sie Durchschnitt, Vereinigung und Differenz der Mengen

a) $A=\{3,4,6,7,8\}$, $B=\{2,4,5,6,7\}$
b) $A=\{a,b,c\}$, $B=\varnothing$
c) $A=\varnothing$, $B=\{1,3,5,7\}$

Aufgabe 6:
Gegeben sind die Mengen $A=\{x \mid x\in N \wedge 2|x \wedge x\leq 20\}, B=\{x \mid x\in N \wedge 3|x \wedge x<20\}$ und $C=\{x \mid x\in N \wedge 5|x \wedge x\leq 30\}$. Bilden Sie

a) $A\cap B$, b) $A\cap C$, c) $B\cap C$, d) $A\cap B\cap C$

Aufgabe 7:
Gegeben sind die Mengen

$M_1=\{x|x\in N \wedge 3x|36\}$, $M_2=\{x|x\in N \wedge x<8 \wedge 2|x\}$
$M_3=\{x|x\in N \wedge x\leq 12\}$, $M_4=\{x|x\in N \wedge 4x|48\}$

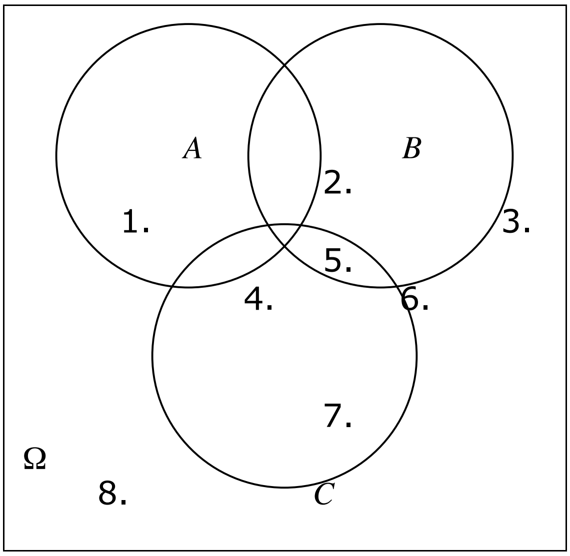
Geben Sie an, welche Relationen zwischen den einzelnen Mengen bestehen.
Hinweis: „Relationen" sind $=, \neq, \subset \ldots$

Aufgabe 8:
Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus

a) $a\in A\cap B$, b) $a\in A\cup B$, c) $a\in A\setminus B$,
d) $a\notin A\cap B$, e) $a\notin A\cup B$, f) $a\notin A\setminus B$

für die Relationen zwischen dem Element a und den Mengen A und B ziehen?

Aufgabe 9:
Gegeben sei das folgende VENNsche Diagramm. Kennzeichnen Sie jedes der acht Flächenstücke des Diagramms als mengentheoretischen Ausdruck von A, B, C, Ω



Aufgabe 10:
In einer Stadt erscheinen zwei Zeitungen A und B. Zeitung A wird von 50 % der Erwachsenen gelesen. 15 % der Erwachsenen lesen Zeitung A, aber nicht Zeitung B. 20 % lesen Zeitung B, aber nicht Zeitung A.

a) Wie viel Prozent der Erwachsenen lesen Zeitung B?

b) Wie viel Prozent der Erwachsenen lesen mindestens eine Zeitung?

c) Wie viel Prozent der Erwachsenen lesen höchstens eine Zeitung?

Aufgabe 11:
In einer Gruppe von 200 Studenten sind 156 Autofahrer, 60 Wirtschafts-ingenieure, 124 aus Baden-Württemberg, 46 Autofahrer und Wirtschafts-ingenieure, 100 Autofahrer und aus Baden-Württemberg, 40 Wirtschafts-ingenieure und aus Baden-Württemberg und 36 Autofahrer, Wirtschafts-ingenieure und aus Baden-Württemberg.

a) Stellen Sie diese Beziehungen in einem Venn-Diagramm dar.

b) Wie viele der Studenten sind weder Autofahrer noch Wirtschaftsingenieure noch aus Baden-Württemberg?

c) Wie viele der Studenten, die weder Wirtschaftsingenieurwesen studieren noch Auto fahren, sind aus Baden-Württemberg?

d) Wie viele der Studenten sind Autofahrer aus Baden-Württemberg, die nicht Wirtschaftsingenieurwesen studieren?

Aufgabe 12:
Von den 500 Gästen eines Kongresses sprechen 126 Spanisch, 380 Englisch und 206 Französisch. 6 Personen sprechen nur Spanisch, 140 sowohl Englisch als auch Französisch, 60 sowohl Französisch als auch Spanisch und 18 alle drei Sprachen.

a) Wie viele Personen sprechen keine der drei Sprachen?

b) Wie viele Personen sprechen Englisch und Spanisch, aber kein Französisch?

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe eines *Venn-Diagramms* und achten Sie darauf, dass Ihre Rechenwege nachvollziehbar sind!

Aufgabe 13:
Von den Studierenden des 1. Semesters Wirtschaftsingenieurwesen spielen 6 kein Instrument. 10 Studierende spielen Violine und 7 spielen Klavier. Ferner gibt es 12 Flötenspieler in diesem Semester, von denen alle mit Ausnahme von dreien noch mindestens ein weiteres Instrument spielen, nämlich 6 Violine und 5 Klavier. Von den Violinisten spielen 3 kein weiteres Instrument.

Wie viele Studierende

a) ... sind im 1. Semester Wirtschaftsingenieurwesen?

b) ... spielen nur Klavier?

c) ... spielen alle 3 Instrumente?

d) ... spielen Violine und Klavier?

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $A = \{a, b, c, d, e\}$

b) $B = \{x \mid x \in W \wedge x$ besucht die Vorlesung zur Mathematik 1 $\}$

c) $C = \{x \mid (x \in R) \wedge (-1 \leq x \leq +1) \wedge (x \neq 0)\}$

d) $D = \{x \mid (x \in N) \wedge (x < 0)\} = \varnothing$

e) $E = \{x \mid (x \in N) \wedge (8 < x < 24)\}$

Aufgabe 2:

$\varnothing$ ist die Nullmenge oder die leere Menge, d.h. die Menge, die kein Element enthält,
$\{0\}$ ist eine Menge mit nur einem Element, nämlich der Null,
$\{\varnothing\}$ ist ebenfalls eine Menge mit nur einem Element, und zwar der Nullmenge,
0 ist **keine** Menge, sondern eine reelle Zahl

Aufgabe 3:

a) $B \not\subset A, B \subseteq A$

b) $C = \{2\}; \quad C \subset A$

c) $D = \{-2, +2\}; \quad D \not\subset A$

d) $E = \{3, 4\}; \quad E \subset A$

Aufgabe 4:

a) $A \cap B = \varnothing$

b) $D \setminus A = \{5, 6\}$

c) $B \cup D = \{x \mid x \in N \wedge x > 2\}$

d) $\overline{B}_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $(A \cup B) \cap D = \{3, 4, 6\}$

f) $A \cap D = \{3, 4\}$

Aufgabe 5:

a) $A \cap B = \{4, 6, 7\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad A \setminus B = \{3, 8\}$

b) $A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = \{a, b, c\}, \quad A \setminus B = \{a, b, c\}$

c) $A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}, \quad A \setminus B = \varnothing$

Aufgabe 6:

a) $A \cap B = \{0, 6, 12, 18\}$

b) $A \cap C = \{0, 10, 20\}$

c) $B \cap C = \{0, 15\}$

d) $A \cap B \cap C = \{0\}$

Aufgabe 7:

$M_1 \neq M_2;\quad M_1 \subset M_3;\quad M_1 = M_4;\quad M_2 \neq M_1;\quad M_2 \subset M_3;\quad M_2 \neq M_4;$

$M_3 \supset M_1;\quad M_3 \supset M_2;\quad M_3 \supset M_4;\quad M_4 = M_1;\quad M_4 \neq M_2;\quad M_4 \subset M_3.$

Aufgabe 8:

a) $a \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad a \in A \wedge a \in B$

b) $a \in A \cup B \quad \Rightarrow \quad a \in A \wedge a \in B \quad \vee \quad a \notin A \wedge a \in B \quad \vee \quad a \in A \wedge a \notin B$

c) $a \in A \setminus B \quad \Rightarrow \quad a \in A \wedge a \notin B$

d) $a \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad a \notin A \wedge a \in B \quad \vee \quad a \in A \wedge a \notin B \quad \vee \quad a \notin A \wedge a \notin B$

e) $a \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad a \notin A \wedge a \notin B$

f) $a \notin A \setminus B \quad \Rightarrow \quad a \in A \wedge a \in B \quad \vee \quad a \notin A \wedge a \in B \quad \vee \quad a \notin A \wedge a \notin B$

Aufgabe 9:

1. $A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \setminus C$
3. $B \setminus (A \cup C)$
4. $(A \cap C) \setminus B$
5. $A \cap B \cap C$
6. $(B \cap C) \setminus A$
7. $C \setminus (A \cup B)$
8. $\Omega \setminus (A \cup B \cup C)$

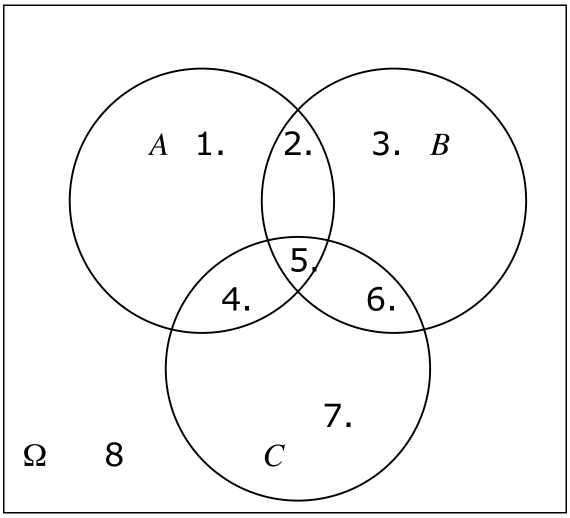
Aufgabe 10:

a) 55 % der Erwachsenen lesen Zeitung B.
b) 70 % der Erwachsenen lesen mindestens eine Zeitung.
c) 65 % der Erwachsenen lesen höchstens eine Zeitung.

Aufgabe 11:

a) Ω = Studenten
A = Autofahrer
B = Wirtschaftsingenieur
C = Baden-Württemberger

b) $\Omega \setminus (A \cup B \cup C)$ 8. = 10
c) $C \setminus (A \cup B)$ = 7. = 20
d) $(A \cap C) \setminus B$ = 4. = 64



Aufgabe 12:

a) 60 Personen sprechen nur Englisch und Spanisch.
b) 48 Personen sprechen keine der drei Sprachen.

Aufgabe 13:

a) 23 b) 1 c) 2 d) 3

2 Vektoralgebra

2.1 Definition

Definition 2.1:
Es seien A und B Punkte in der Ebene (bzw. im Raum). Als *Vektor* $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet man eine gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B.

Ein Vektor ist durch drei Größen bestimmt:
- Richtung,
- Orientierung und
- Länge.

Beispiele:
Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, magnetische Feldstärke.

Definition 2.2:
Eine Größe, die durch einen einzigen reellen Zahlenwert charakterisiert wird, heißt *Skalar*.

Beispiele:
Temperatur, Arbeit, Masse, Energie.

Der *Betrag* $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ eines Vektors ist die Länge des Vektors, also die Länge der Verbindungsstrecke $\overrightarrow{AB}$. Der Betrag ist eine nichtnegative reelle Zahl.

Beispiel:
Wirkt eine Kraft auf einen Massenpunkt, so ist der Betrag der Kraft die Länge eines Vektors, während ihre Richtung die Richtung des Vektors angibt.

Satz 2.1:
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie den gleichen Betrag und gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben. Vektoren dürfen daher parallel verschoben werden. Gleiche Vektoren gehen durch Parallelverschiebung ineinander über.

Im Unterschied zu diesen sogenannten freien Vektoren haben Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ einen festen Anfangspunkt O. Ortsvektoren können also nicht verschoben werden.

Spezielle Vektoren:

- Der Vektor, dessen Anfangspunkt mit seinem Endpunkt übereinstimmt, heißt *Nullvektor.* Er wir mit $\vec{O}$ bezeichnet, und hat den Betrag 0 und unbestimmte Richtung.
- Ein Vektor $\vec{e}$ mit dem Betrag $\left|\vec{e}\right| = 1$ heißt *Einheitsvektor*. Man bezeichnet Einheitsvektoren auch als *normierte Vektoren*.

2.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, dann erhält man einen Vektor $\lambda\vec{a}$ mit dem Betrag $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda| \bullet \left|\vec{a}\right|$.

- Für $\lambda > 0$ haben $\lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ gleiche Richtung und Orientierung,
- für $\lambda < 0$ haben $\lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ gleiche Richtung und entgegen gesetzte Orientierung.

Multiplikation mit $\lambda = -1$ ergibt den Vektor $-\vec{a}$. Dieser Vektor hat den gleichen Betrag und die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{a}$, jedoch die entgegen gesetzte Orientierung.

2.3 Addition und Subtraktion zweier Vektoren

Sollen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert werden, so bringt man durch Parallelverschiebung den Anfangspunkt des Vektors $\vec{b}$ in den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$. Die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ ist dann derjenige Vektor, der vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ führt.

Die Subtraktion zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als Addition von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

Legt man die Anfangspunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ übereinander, dann ist der Vektor $\vec{a}-\vec{b}$ der Vektor vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$.

Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Assoziativgesetz: $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Distributivgesetz: $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \quad \lambda\in\mathbb{R}$

2.4 Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene

Wählt man in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene einen Einheitsvektor $\overrightarrow{e_1}$ mit Richtung und Orientierung wie die positive x-Achse und einen Einheitsvektor $\overrightarrow{e_2}$ mit Richtung und Orientierung wie die positive y–Achse, dann lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ in der Ebene in eindeutiger Weise als Linearkombination der beiden sogenannten Basisvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ darstellen.

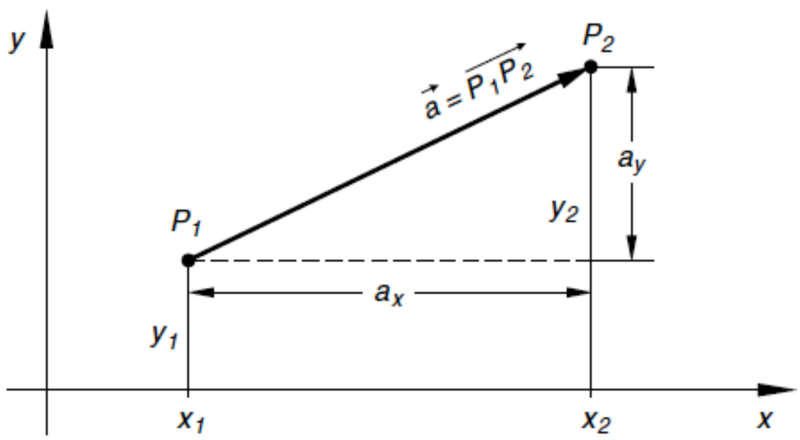
Der Vektor $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, wird identifiziert mit dem sogenannten Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Komponentendarstellung eines durch zwei Punkte festgelegten Vektors

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

mit $P_1 = (x_1; y_1)$: *Anfangspunkt* des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$

$P_2 = (x_2; y_2)$: *Endpunkt* des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$



Addition: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$

Subtraktion: $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: $\lambda \bullet \vec{a}=\lambda \bullet \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\end{pmatrix}$

Der Betrag $|\vec{a}|=|\overrightarrow{P_1P_2}|$ ist die Entfernung zwischen den Punkten P_1 und P_2:
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

2.5 Komponentendarstellung von Vektoren im Raum

Wählt man in einem kartesischen Koordinatensystem des Raums drei Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ mit Richtung und Orientierung wie die positive x-Achse, die positive y–Achse und die positive z–Achse, dann lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ im Raum in eindeutiger Weise als Linearkombination der drei Basisvektoren $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$ darstellen: $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3},\quad a_1,a_2,a_3\in R$

Der Vektor $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ wird identifiziert mit dem Spaltenvektor
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

Komponentendarstellung eines durch zwei Punkte festgelegten Vektors

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2} + (z_2 - z_1)\vec{e_3} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

mit $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$: *Anfangspunkt* des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$

$P_2 = (x_2; y_2; z_2)$: *Endpunkt* des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: $\lambda \bullet \vec{a} = \lambda \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Der Betrag $|\vec{a}| = |\overrightarrow{P_1P_2}|$ ist die Entfernung zwischen den Punkten P_1 und P_2:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

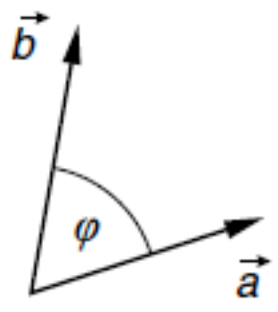
2.6 Skalarprodukt

Definition 2.3:

Unter dem *Skalarprodukt* $\vec{a} \bullet \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den Skalar $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \bullet \cos\varphi$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist ($0° \le \varphi \le 180°$).

Das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



Für den Winkel $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ gilt somit: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \bullet \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Rechenregeln:

1. *Kommutativgesetz:* $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
2. $\left(\lambda \bullet \vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(\lambda \bullet \vec{b}\right) = \lambda \bullet \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$
3. *Distributivgesetz:* $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$
4. $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$
5. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$

Das Skalarprodukt lässt sich entsprechend auch in der Ebene, also für Vektoren mit zwei Komponenten, definieren.

Beispiele:

1. Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist

2. Gesucht ist der Winkel φ, den die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ miteinander einschließen.

3. Für welchen Wert von c sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal?

Bemerkung:

Die Richtung eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im Raum wird u.a. dadurch

festgelegt, welche Winkel er mit den drei Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bildet: wenn man weiß, wie ein Vektor zu den drei Koordinatenachsen steht, kennt man auch seine Richtung. Es gilt:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{a} \bullet \vec{e_1}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{e_1}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\vec{a} \bullet \vec{e_2}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{e_2}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_3 = \frac{\vec{a} \bullet \vec{e_3}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{e_3}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Beispiel:
Es sei $\vec{a}$ ein Vektor im Raum, der mit der x–Achse einen Winkel von 60°, mit der y–Achse einen Winkel von 45° und mit der z–Achse einen Winkel von 60° bildet. Seine Länge beträgt $|\vec{a}| = 4$. Wie lauten seine Koordinaten?

2.7 Vektorprodukt

Definition 2.4:

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im Raum, so heißt der Vektor

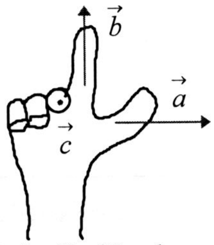
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* oder *äußeres Produkt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt ist im Unterschied zum Skalarprodukt nur im Raum definiert.

Eigenschaften:
1. $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$
2. $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$
3. $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
5. $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
6. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\bullet\sin\varphi = \left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\bullet\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b},$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ steht also senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$. Sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Definition 2.5:
Es seien drei Vektoren x, y, z im Raum. Man sagt x, y, z bilden ein *Rechtssystem*, wenn man die rechte Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in dieser Reihenfolge in die Richtung von x, y bzw. z zeigen. Auf analoge Weise ist ein *Linkssystem* definiert.



Rechte-Hand-Regel

Beispiel:

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ ergibt sich für das Vektorprodukt

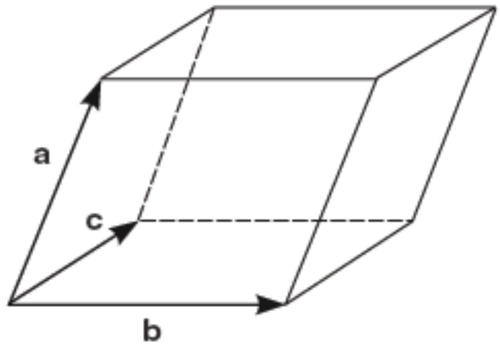
Probe:

2.8 Spatprodukt

Definition 2.6:
Sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ drei Vektoren im Raum, so heißt der Skalar $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$ *Spatprodukt*.

Aus der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts folgt, dass $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$ gleich dem Produkt aus der Länge von $\vec{a}\times\vec{b}$ und der Länge der Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a}\times\vec{b}$ ist.

Da $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist, stellt $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$ das Volumen des von den Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spates dar, falls die Vektoren eine Lage wie in der *ABBILDUNG* haben.



Abkürzende Schreibweise: $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$

Eigenschaften:

1.

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+c_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+c_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)$$

2. Eine zyklische (kreisförmige) Vertauschung der Vektoren ändert das Spatprodukt nicht: $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]$

3. Das Spatprodukt ändert das Vorzeichen (bei gleichem Betrag), falls zwei Vektoren miteinander vertauscht werden:
$\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]=\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]=-\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$

4. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer Ebene

5. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]>0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

6. Das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ gebildeten Tetraeders ist
$V=\frac{1}{6}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$

Beispiel:

Das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ aufgespannten

Tetraeders beträgt

2.9 Anwendungen in der Geometrie

2.9.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden

Vektorielle Punkt-Richtungs-Form einer Geraden

oder (in der Komponentenschreibweise): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Dabei bedeuten:

x, y, z:	Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Geraden
x_1, y_1, z_1:	Koordinaten des *vorgegebenen* Punktes P_1 der Geraden
a_x, a_y, a_z:	Skalare Komponenten des *Richtungsvektors* $\vec{a}$ der Geraden
λ:	Reeller Parameter $(\lambda \in R)$

Für $\lambda = 0$ erhält man den Punkt P_1, für $\lambda > 0$ werden alle Punkte *in Richtung* des Richtungsvektors $\vec{a}$ durchlaufen, für $\lambda < 0$ alle Punkte in der *Gegenrichtung* (jeweils vom Punkte P_1 aus betrachtet).

Beispiel:
Bestimmt werden soll die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt

$P_1 = (\ 3;\ \ -2;\ \ 1\ )$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft.

Vektorielle Zwei Punkte-Form einer Geraden

oder (in der Komponentenschreibweise): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Dabei bedeuten:

$x, y, z:$ Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Geraden

$x_1, y_1, z_1:$ Koordinaten des *vorgegebenen* Punktes P_1 der Geraden

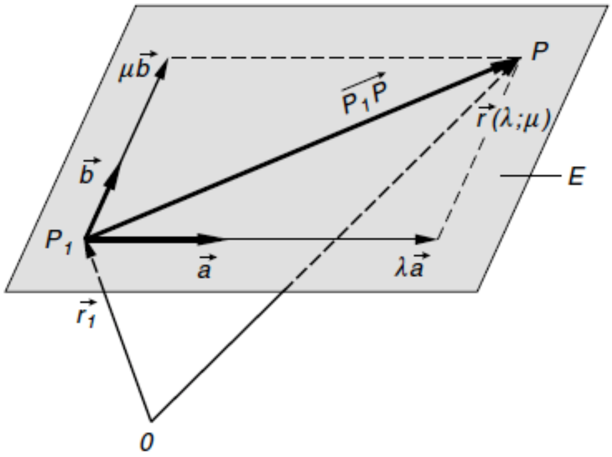
$x_2, y_2, z_2:$ Koordinaten des *vorgegebenen* Punktes P_2 der Geraden

$\lambda:$ Reeller Parameter $(\lambda \in R)$

Beispiel:
Wie lautet die Gleichung der Geraden g durch die beiden Punkte
$P_1 = (\ 1;\ \ 1;\ \ 1\ )$ und $P_2 = (\ 2;\ \ 0;\ \ 4\ )$?

2.9.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene

Vektorielle Punkt-Richtungsform einer Ebene



Eine Ebene E soll durch den Punkt P_1 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und *parallel* zu zwei *nichtkollinearen* Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (*Richtungsvektoren* genannt) verlaufen.
Wie lautet die Gleichung dieser Ebene in *vektorieller* Form?

$$\vec{r}(P) = \vec{r}(\lambda;\mu) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

oder (in der Komponentenschreibweise): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Dabei bedeuten:

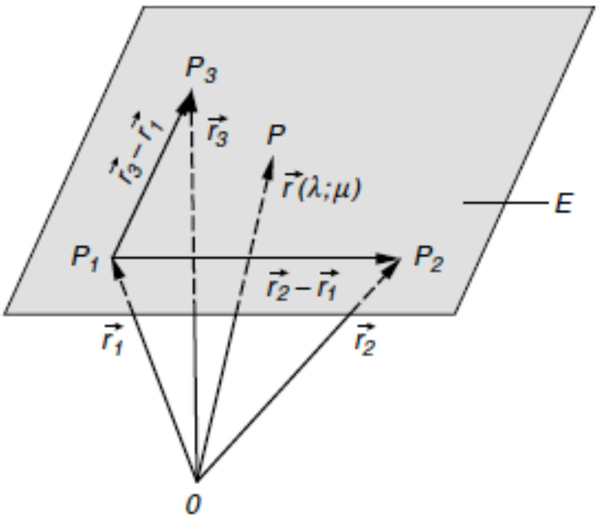
x, y, z:	Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Ebene
x_1, y_1, z_1:	Koordinaten des *vorgegebenen* Punktes P_1 der Ebene
$\left.\begin{matrix} a_x, a_y, a_z \\ b_x, b_y, b_z \end{matrix}\right\}$	Skalare Vektorkomponenten (Vektorkoordinaten) der *nicht-kollinearen Richtungsvektoren* $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Ebene $(\vec{a} \times \vec{b} \neq 0)$
λ, μ:	Voneinander *unabhängige* reelle Parameter $(\lambda, \mu \in R)$

Beispiel:

Die Ebene E verläuft durch den Punkt $P_1 = (\ 3;\ \ 5;\ \ 1\ )$, ihre Richtungs-vektoren sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wie lautet die Gleichung dieser Ebene in der Parameterform?

Vektorielle Drei Punkte-Form einer Ebene



Eine Ebene E soll durch drei (voneinander *verschiedene* und nicht in einer gemeinsamen Geraden liegende) Punkte P_1, P_2 und P_3 mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ verlaufen.
Wie lautet die Gleichung dieser Ebene in *vektorieller* Form?

$$\vec{r}(P) = \vec{r}(\lambda;\mu) = \vec{r}_1 + \lambda \bullet \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \bullet \overrightarrow{P_1P_3} = \vec{r}_1 + \lambda\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + \mu\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right)$$

oder (in der Komponentenschreibweise)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

Dabei bedeuten:

$x, y, z:$ Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Ebene

$\left.\begin{matrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{matrix}\right\}$ Koordinaten der *vorgegebenen* Punkte P_1, P_2 und P_3 der Ebene

$\lambda, \mu:$ Voneinander *unabhängige* reelle Parameter $(\lambda, \mu \in R)$

Beispiel:
Gegeben sind drei Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1; & 5; & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -2; & -1; & 8 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 2; & 0; & 1 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Gleichung der Ebene durch diese Punkte?

Übungsblatt Kapitel 2: Vektoren

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

a) $(-5)\begin{pmatrix}14{,}1\\-3{,}1\\2{,}3\end{pmatrix}=$ b) $12\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\\10\\12\end{pmatrix}=$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=$ b) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=$ c) $\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\3{,}7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\-3\\-0{,}4\end{pmatrix}=$ d) $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=$

Aufgabe 3:
Stellen Sie die Vektoren $\lambda\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ für die Werte $\lambda=1, \lambda=0{,}5, \lambda=2, \lambda=-1, \lambda=-0{,}5$ und $\lambda=-2$ in einem Koordinatensystem dar.

Aufgabe 4:
Stellen Sie die folgenden drei Vektoren in einem Koordinatensystem dar:

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 5:

a) Sind die Vektoren $(4,\ 5)^T$ und $(5,\ -4)^T$ orthogonal?

b) Sind die Vektoren $(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T$ und $(5,\ -6,\ -7,\ 6)^T$ orthogonal?

c) Gegeben sind die Vektoren $y^T=(1,\ 2,\ 3)$ und $z^T=(5,\ 5,\ z_3)$.
Bestimmen Sie die Komponente z_3 so, dass y und z orthogonal sind.

Aufgabe 6:
Berechnen Sie für $\vec{a} = (2,\ -1,\ 3)$ und $\vec{b} = (1,\ 2,\ -1)$ $\vec{a} \times \vec{b}$ sowie die Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 7:
Berechnen Sie das Volumen V des von $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (-2,\ 1,\ 3)$ und $\vec{c} = (-1,\ 0,\ -3)$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 8:
Untersuchen Sie, ob $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (-2,\ 1,\ 3)$ und $\vec{c} = (-1,\ 3,\ 6)$ in einer Ebene liegen.

Lösungen: (ohne Gewähr)

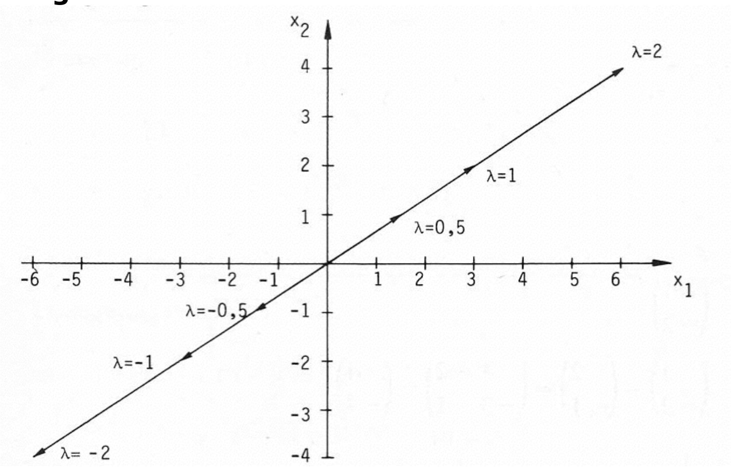
Aufgabe 1:

a) $\begin{pmatrix} -70{,}5 \\ 15{,}5 \\ -11{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 72 \\ 96 \\ 120 \\ 144 \end{pmatrix}$

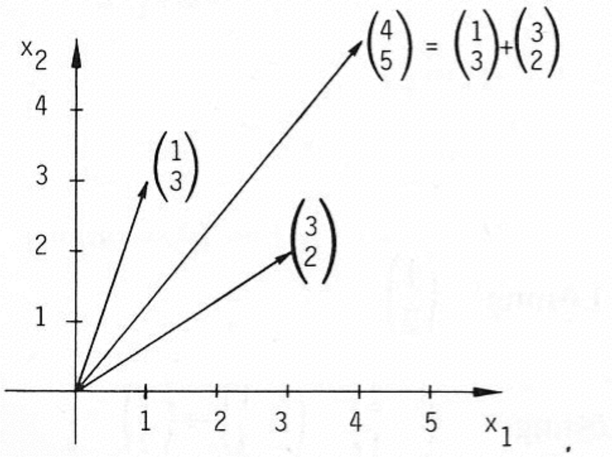
Aufgabe 2:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:



Aufgabe 4:



Aufgabe 5:

a) Die beiden Vektoren sind orthogonal.
b) Die beiden Vektoren sind nicht orthogonal.
c) $z_3 = -5$

Aufgabe 6:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5, & 5 & 5\end{pmatrix}$$

Fläche: $F = 5\sqrt{3}$

Aufgabe 7:

$$V = \left|\left\langle \vec{a}, \quad \vec{b}, \quad \vec{c} \right\rangle\right| = 18$$

Aufgabe 8:

Das Volumen des Spats ist gleich „0", d.h. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer Ebene.

3 Lineare Algebra

3.1 Matrixbegriff

Beispiel:
Ein Betrieb stellt 4 verschiedene Erzeugnisse aus 2 Materialarten her. Für die Erzeugnisse besteht ein unterschiedlicher spezifischer Materialverbrauch.

Materialart	Materialverbrauch in Materialeinheiten je Einheit des Erzeugnisses			
	E_1	E_2	E_3	E_4
M_1	3	1,5	-	2
M_2	-	4,5	2,4	6

Bezeichnet man die Erzeugnismenge der Erzeugnisart E_k mit $x_k,\ k=1,\cdots,4$, so lässt sich der Materialverbrauch m_i jeder Materialart $M_i\ (i=1,2)$ durch die linearen Beziehungen

darstellen.

Definition 3.1:
Ein rechteckiges Schema von $m \bullet n$ Zahlen mit m Zeilen und n Spalten heißt eine *Matrix*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen in der Matrix heißen ihre *Elemente*. Um die Stellung der Elemente in der Matrix zu charakterisieren, werden sie mit einem doppelten Index versehen.

Der 1. Index bezeichnet die Zeile, der 2. Index die Spalte, in der das Element steht.

- Besteht die Matrix nur aus einer Spalte, so wird sie *Spaltenvektor*,
- besteht sie nur aus einer Zeile, so wird sie *Zeilenvektor* genannt.

Die Elemente eines Vektors heißen seine *Komponenten*. Eine Zahl kann als Matrix mit einer Zeile und einer Spalte aufgefasst werden, man nennt sie *Skalar*. Matrizen besitzen keinen eigenen Zahlenwert.

Zeilenvektoren werden als transponierte Spaltenvektoren aufgefasst und werden dementsprechend durch ein hochgestelltes T gekennzeichnet:

Spaltenvektoren:
Zeilenvektoren:

Es ist auch möglich, eine Matrix durch Angabe ihres allgemeines Elementes zu charakterisieren:

Beispiel:
Im obigen Beispiel können die benötigten Materialmengen als Spaltenvektor aufgefasst werden:

Typ einer Matrix

Definition 3.2:
Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten heißt Matrix vom Typ (m,n).

Beispiel:
Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 4{,}5 & 2{,}4 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix vom Typ

3.2 Spezielle Matrizen

Definition 3.3:
Eine Matrix vom Typ (n,n), bei der die Zahl der Zeilen und die Zahl der Spalten übereinstimmt, heißt *quadratische Matrix* n*–ter Ordnung*.
Ihre Elemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex bilden die *Hauptdiagonale*.

Beispiel:
$\boldsymbol{A}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 3 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix Ordnung.

Ihre Hauptdiagonalelemente sind:

Definition 3.4:
Eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null und mindestens ein Element der Hauptdiagonalen von Null verschieden ist, heißt *Diagonalmatrix*.

Beispiel:

$\boldsymbol{D}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix Ordnung.

Definition 3.5:
Eine Diagonalmatrix, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente gleich eins sind, heißt *Einheitsmatrix*.

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \\ \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Zeilen bzw. Spalten einer Einheitsmatrix heißen *Einheitsvektoren*.

Definition 3.6:
Eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißt *obere (untere) Dreiecksmatrix*.

Beispiele:

$\boldsymbol{A}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist eine Dreiecksmatrix.

$\boldsymbol{B}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist eine Dreiecksmatrix.

Definition 3.7:
Eine Matrix, deren sämtliche Elemente gleich Null sind, heißt *Nullmatrix*.

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \\ \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Matrizenrelationen

Definition 3.8:
Zwei Matrizen ***A*** und ***B*** des gleichen Typs heißen *gleich*, wenn sie in den einander entsprechenden Elementen übereinstimmen.

Beispiele:

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & c \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Analog zur Gleichheitsrelation vereinbart man

3.4 Matrizenoperationen

3.4.1 Transponieren

Definition 3.9:
Vertauscht man in einer geordneten Matrix $\mathbf{A}_{(m,n)}$ die Zeilen und Spalten, so entsteht die *transponierte Matrix* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{(n,m)}$.

$$\mathbf{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\mathbf{A}_{(2,4)} = \begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 4{,}5 & 2{,}4 & 6 \end{pmatrix}$$

Beim Transponieren ändert sich der Typ der Matrix. Die Zahl der Zeilen wird zur Spaltenzahl und die Zahl der Spalten zur Zeilenzahl:

Die Transponierte der transponierten Matrix ist die Matrix selbst:

Beim Transponieren eines Vektors wird aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor und aus einem Zeilenvektor ein Spaltenvektor:

3.4.2 Matrizenaddition und –subtraktion

Beispiel:
Tabelle *A* gibt die Lieferungen eines zentralen Lagers an fünf Abnehmer in einem 1. Halbjahr an, Tabelle *B* die Lieferungen im 2. Halbjahr an die gleichen Abnehmer.

Tabelle A

Ab- nehmer	Liefergut in t 1	 2	 3
1	300	20	-
2	200	45	100
3	50	50	120
4	300	50	-
5	450	50	135

Tabelle B

Ab- nehmer	Liefergut in t 1	 2	 3	 4
1	330	0	100	20
2	200	45	90	5
3	40	45	120	5
4	300	50	200	-
5	400	40	110	3

Es sollen die Jahresmengen für jeden Abnehmer ermittelt werden. Dazu müssen die Lieferungen des 1. und 2. Halbjahres addiert werden. Da das Lieferprogramm für das 2. Halbjahr das Liefergut 4 umfasst, das im Lieferprogramm des 1. Halbjahres nicht enthalten ist, muss die Tabelle *A* für dieses Liefergut um eine Spalte ergänzt werden.
In Matrizenschreibweise erhält man:

Die Gesamtlieferung kann nunmehr als Summe der Matrizen ***A*** und ***B*** berechnet werden.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 630 & 20 & 100 & 20 \\ 400 & 90 & 190 & 5 \\ 90 & 95 & 240 & 5 \\ 600 & 100 & 200 & 0 \\ 850 & 90 & 245 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Addition von Matrizen ist nur für Matrizen des gleichen Typs möglich.

Definition 3.10:
Matrizen vom gleichen Typ werden addiert (subtrahiert), indem man ihre entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert).

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ik}+b_{ik}\right)$$

Die Summenmatrix ist vom gleichen Typ wie die Summanden.

Beispiel:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} =$

Beispiel:

$\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\qquad \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{b}^T =$

Die Nullmatrix spielt bei der Addition von Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl Null bei der Zahlenaddition:

Das gleiche gilt für den Nullvektor:

Wie aus der Berechnungsvorschrift für Matrizensummen hervorgeht, gilt für die Addition von Matrizen das *Kommutativgesetz*. Eine Vertauschung der Summanden führt lediglich zu einer Vertauschung der Summanden innerhalb der Elemente der Summenmatrix, deren Wert wird damit nicht geändert:

1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

Ebenso gilt das *Assoziativgesetz*:
2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

Des weiteren gelten für beliebige Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M$ und Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechengesetze und Aussagen:

3) $\lambda\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\,\boldsymbol{A} + \lambda\,\boldsymbol{B}$ *1. Distributivgesetz*

4) $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{A} = \lambda\,\boldsymbol{A} + \mu\,\boldsymbol{A}$ *2. Distributivgesetz*

5) $(\lambda * \mu)\,\boldsymbol{A} = \lambda\,(\mu\,\boldsymbol{A})$

6) $1 * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

7) Es gibt genau ein Element $\boldsymbol{X} \in M$, für das $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ für alle $\boldsymbol{A} \in M$ gilt (dieses Element ist die Nullmatrix $\boldsymbol{0}$ der Dimension $m \times n$ und wird *neutrales Element* bezüglich der Operation + genannt).

8) Für beliebiges $\boldsymbol{A} \in M$ existiert jeweils genau ein Element $\boldsymbol{X} \in M$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ (dieses Element wird als *additiv inverses Element* zu $\boldsymbol{A}$ bezeichnet und ist gerade die Matrix $(-1) * \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$).

Für Matrizen gleichen Typs gilt: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

3.5 Matrizenmultiplikationen

3.5.1 Multiplikation von Matrizen

Definition 3.11:
Die beiden Matrizen ***A*** und ***B*** heißen verkettbar, wenn die Spaltenzahl von ***A*** gleich der Zeilenzahl von ***B*** ist.

Hinweis: Es kommt auf die Reihenfolge der beiden Matrizen an: so können z.B. ***A*** und ***B*** verkettbar sein, ***B*** und ***A*** dagegen nicht.

Beispiel:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 3.12:
Eine Matrix ***C*** = [c_{ik}], deren Elemente c_{ik} als Skalarprodukte des i-ten Zeilenvektors einer Matrix ***A*** und des k-ten Spaltenvektors einer Matrix ***B*** gebildet werden, heißt *Produkt* der beiden (verkettbaren) Matrizen ***A*** und ***B***.

Bemerkung:
Unter der Annahme, dass ***A*** vom Typ (m,n) und ***B*** vom Typ (n,p), hat die Produktmatrix ***C*** die Dimension (m,p).

Darstellung als *Falksches Schema*:

C = ***A*** • ***B***

						b_{1j}
				B		b_{2j}
						…
A						b_{nj}
						…
a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}		…	c_{ij}

Beispiel:

Für die (2×3)-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und die (3×4)-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

erhält man mit dem *Falkschen Schema* als Produkt

Satz 3.1:
Ist einer der Matrizenfaktoren die Nullmatrix des entsprechenden Typs, dann ist das Ergebnis wieder eine Nullmatrix.

$\boldsymbol{A}_{(m,\, n)} \bullet \boldsymbol{O}_{(n,\, p)} = \boldsymbol{O}_{(m,\, p)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{O}_{(r,\, s)} \bullet \boldsymbol{B}_{(s,\, t)} = \boldsymbol{O}_{(r,\, t)}$

Beispiel:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 16 & 64 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} =$

Satz 3.2:
Das Produkt einer Matrix $\boldsymbol{A}$ mit der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ des entsprechenden Typs liefert wieder die Matrix $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}_{(m,\, n)} \bullet \boldsymbol{E}_{(n,\, n)} = \boldsymbol{A}_{(m,\, n)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{E}_{(m,\, m)} \bullet \boldsymbol{A}_{(m,\, n)} = \boldsymbol{A}_{(m,\, n)}$

In einem Matrizenprodukt $\boldsymbol{A}_{(m,\, n)} \bullet \boldsymbol{B}_{(n,\, p)}$ kann der erste Faktor ein Zeilenvektor oder der zweite Faktor ein Spaltenvektor sein.

$\boldsymbol{a}^{T}_{(1,\, n)} \bullet \boldsymbol{B}_{(n,\, p)} = \boldsymbol{c}^{T}_{(1,\, p)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}_{(m,\, n)} \bullet \boldsymbol{b}_{(n,\, 1)} = \boldsymbol{c}_{(m,\, 1)}$

Beispiele:

a) $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}_{(1,\,3)} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B}_{(3,\,4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B}$	
$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$	

$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} =$

b) $\boldsymbol{A}_{(2,\,3)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b}_{(3,\,1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{b}$	
$\boldsymbol{A}$	

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} =$

3.5.2 Gesetze der Matrizenmultiplikation

Satz 3.3:
Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

Beispiel:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

Quadratische Matrizen gleicher Ordnung, für die $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$ gilt, sind als Sonderfall zu betrachten. Sie heißen *kommutative Matrizen*.

Beispiel:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \qquad \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} =$

Assoziativgesetz: $\boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C}$

Distributivgesetze: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C}$

Des weiteren gilt: $(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \bullet \boldsymbol{A}^T$

3.5.3 Multiplikation von mehr als 2 Matrizen

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C}$

	$\boldsymbol{B}_{(n,\ p)}$	
		$\boldsymbol{C}_{(p,\ r)}$
$\boldsymbol{A}_{(m,\ n)}$	$\boldsymbol{AB}_{(m,\ p)}$	$\boldsymbol{ABC}_{(m,\ r)}$
S_A	S_{AB}	S_{ABC}

Bei dieser Reihenfolge der Matrizenmultiplikation ist es möglich, die Spaltensummenprobe auszuführen.

Oder: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C})$

		$\boldsymbol{C}_{(p,\ r)}$	Z_C
	$\boldsymbol{B}_{(n,\ p)}$	$\boldsymbol{BC}_{(n,\ r)}$	Z_{BC}
$\boldsymbol{A}_{(m,\ n)}$		$\boldsymbol{ABC}_{(m,\ r)}$	Z_{ABC}

Die Verkettung der Faktoren ist Voraussetzung für die Ausführbarkeit der mehrfachen Matrizenmultiplikation.

Beispiel:

$\boldsymbol{A}_{(2,\ 2)} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B}_{(2,\ 4)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{C}_{(4,\ 3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Es ist das Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$ zu bilden.

		C
	B	
A		

Für quadratische Matrizen ist es sinnvoll, die Potenzschreibweise als mehrfache Hintereinanderausführung von Multiplikationen einzuführen:
$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$, $\quad \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$, $\quad \ldots \quad \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A} \bullet \ldots \bullet \boldsymbol{A}$ (n-mal)

3.5.4 Anwendungen der Matrizenmultiplikation

Beispiel 1:
In einem Betrieb werden vier Erzeugnisse E_i (i = 1, ..., 4) aus den beiden Materialarten M_k (k = 1, 2) hergestellt. *Tabelle 1* gibt den Materialverbrauch je Erzeugniseinheit jeder Erzeugnisart an. *Tabelle 2* enthält die durchschnittlichen Stückzahlen der Produktion in den Schichten I, II und III. Es ist zu ermitteln, wie viel von jeder Materialart in jeder Schicht bereitgestellt werden muss.

Tabelle 1:

Material	Materialverbrauch je Einheit des E_i in kg/ME			
	E_1	E_2	E_3	E_4
M_1	1,5	1,7	0,5	2,0
M_2	3,3	2,5	4,8	3,3

Tabelle 2:

Erzeugnis	Stückzahlen in ME		
	Schicht I	Schicht II	Schicht III
E_1	400	380	450
E_2	410	320	350
E_3	350	300	320
E_4	250	150	200

Beispiel 2:
Es wird ein Produktionsprozess betrachtet, der aus zwei Stufen besteht:

- In der ersten Stufe werden aus vier Rohstoffen Zucker (R_1), Kakao (R_2), Sahne (R_3) und Nüsse (R_4) drei Halbfabrikate Vollmilch- (H_1), Zartbitterschokoladenmasse (H_2) sowie Nougatcreme (H_3) hergestellt,
- während in der zweiten Stufe aus den Halbfabrikaten zwei Endprodukte E_1 und E_2 (unterschiedlich gefüllte Schokoladenweihnachtsmänner) produziert werden.

In der folgenden Tabelle ist angegeben, welche Mengen (gemessen in Mengeneinheiten ME) an Rohstoffen (bzw. Halbfabrikaten) für jeweils eine ME von Halbfabrikaten (bzw. Endprodukten) benötigt werden:

	je ME		
	H_1	H_2	H_3
R_1	0,4	0,4	0,3
R_2	0,2	0,5	0,2
R_3	0,4	0,1	0,3
R_4	0	0	0,2

	je ME	
	E_1	E_2
H_1	50	0
H_2	0	50
H_3	40	40

Im betrachteten Zeitraum sollen 10.000 ME (Stück) der gefüllten Schokoladennikolause E_1 und 20.000 ME (Stück) von E_2 hergestellt werden.
Wie viele ME (g) an Rohstoffen werden dafür gebraucht?

Übungsblatt Kapitel 3.1 – 3.4: Matrizen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Matrix $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 9 & -6 \\ -2 & 5 & 2 & -8 & 5 \\ -1 & -3 & -3 & 7 & -8 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$

a) Wie lauten die Elemente $a_{15},\quad a_{34},\quad a_{43},\quad a_{52},\quad a_{41}$?

b) Bestimmen Sie $\sum_{i=1}^{5} a_{i2}$ und $\sum_{j=1}^{5} a_{2j}$.

Aufgabe 2:

Die Matrix $B_{m,n}=\left(b_{ij}\right)$ sei folgendermaßen definiert: $b_{ij}=i+j-1$ für $i=1,\ldots,m$ und $j=1,\ldots,n$.

a) Schreiben Sie die Matrix $B_{3,4}$ auf.

b) Bestimmen Sie $\sum_{i=1}^{3} b_{ij}$ für $j=1,\ldots,4$.

c) Bestimmen Sie $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} b_{ij}$

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch (d.h. $A^T=A$)?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Vervollständigen Sie die Matrizen ***A*** und ***B*** zu symmetrischen Matrizen.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 & 9 \\ . & 2 & 2 & 0 & 8 \\ . & . & 6 & 1 & 7 \\ . & . & . & 0 & 7 \\ . & . & . & . & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & . \\ 3 & 0 & . & . \\ 2 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Transponierten zu:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 17 & -2 & 29 \\ 6 & 12 & 3 & 18 \\ 2 & -9 & 14 & 32 \end{pmatrix}$, c) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:
Gegeben seien die Matrizen

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie: a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$; b) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$; c) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$; d) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$

Aufgabe 7:
Gegeben seien die Matrizen

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{C}$ so, dass gilt: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$, wobei $\boldsymbol{0}$ die Nullmatrix bezeichnet.

Aufgabe 8:
Gegeben seien die Vektoren

$\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T$, $\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}^T + \boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{d}^T$, $\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T + \boldsymbol{c}^T$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $a_{15} = -6, \quad a_{34} = 7, \quad a_{43} = 2, \quad a_{52} = -4, \quad a_{41} = 2$

b) $\sum_{i=1}^{5} a_{i2} = 7$, $\sum_{j=1}^{5} a_{2j} = 2$

Aufgabe 2:

a) $B_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\sum_{i=1}^{3} b_{i1} = 6$, $\sum_{i=1}^{3} b_{i2} = 9$, $\sum_{i=1}^{3} b_{i3} = 12$, $\sum_{i=1}^{3} b_{i4} = 15$

c) 42

Aufgabe 3:

Matrix ***C*** ist symmetrisch

Aufgabe 4:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 6 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 3 & 0 & d & b \\ 2 & a & b & c \end{pmatrix}$

a, b, c und d können beliebig gewählt werden

Aufgabe 5:

a) $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad$ b) $\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 17 & 12 & -9 \\ -2 & 3 & 14 \\ 29 & 18 & 32 \end{pmatrix}$, $\quad$ c) $\boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 10 \\ 14 & 4 & 2 & 9 \\ 10 & 10 & 12 & 11 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ -2 & 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$ ist nicht definiert

Aufgabe 7:

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{b}^T + \boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{d}^T$ sind nicht definiert

$\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T + \boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

3.6 Lineare Gleichungssysteme

3.6.1 Begriff des linearen Gleichungssystems

Definition 3.13:
Eine Gleichung in den Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$, die sich auf die Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \quad (a_i, b \in R)$ bringen lässt, heißt *Lineare Gleichung*. Jedes n-Tupel von reellen Zahlen für $x_1, x_2, \cdots, x_n$, das die Gleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Gleichung.

Definition 3.14:
Die *m* linearen Gleichungen mit *n* Variablen

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

bilden ein *Lineares Gleichungssystem (*kurz: *LGS).* Die Werte vor den Variablen heißen *Koeffizienten.*

Ausführliche Form eines LGS:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Matrixform eines LGS: $\boldsymbol{A}x = b$

Tabellenform eines LGS:

x_1	x_2	$\dots$	x_n	Rechte Seite
a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Vektorform eines LGS:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \bullet x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \bullet x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \bullet x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

3.6.2 Einfache Lösungsverfahren

Gleichsetzungsverfahren

Vorgehensweise:

1) Beide Gleichungen werden nach der gleichen Variablen aufgelöst.

2) Die anderen Seiten der Gleichungen werden einander gleichgesetzt.

3) Die so entstandene Gleichung wird nach der enthaltenen Variablen aufgelöst.

4) Die Lösung wird in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 eingesetzt und dadurch die andere Variable berechnet.

Beispiel:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 3x - 4y = 17 \\ \text{II:}\quad & 2x + 3y = 17 \end{aligned}$$

Aus (I):

Aus (II):

gleichsetzen:

(III) in (I'):

Lösung:

Einsetzungsverfahren

Vorgehensweise:

1) Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst.
   (Eventuell liegt eine gegebene Gleichung schon passend vor. Ansonsten ist so zu verfahren, dass möglichst keine oder zumindest "einfache" Brüche erhalten werden.)

2) Der Term für diese Variable wird in die andere Gleichung eingesetzt.

3) Die so entstandene Gleichung wird nach der enthaltenen Variablen aufgelöst.

4) Die Lösung wird in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 eingesetzt, wodurch die andere Variable berechnet werden kann.

Beispiel:

Gegeben sei das Gleichungssystem I: $5 - 4x = y$
II: $7x - 3y = 51{,}5$

Aus (I):

(I) in (II) einsetzen:

(III) in (I'):

Lösung:

Additionsverfahren

Vorgehensweise:

1) Beide Gleichungen werden so umgeformt, dass die Variablen (mit ihren Faktoren) auf einer Seite (links) vom Gleichheitszeichen stehen und auf der anderen Seite (rechts) eine einzelne Zahl.

2) Es ist jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren vor x und vor y zu suchen.

3) Die Variable auswählen, bei der das kleinere kgV auftritt, und beide Gleichungen so multiplizieren, dass vor dieser Variablen jeweils gleiche Faktoren stehen (das „kleinste gemeinsame Vielfache“).

4) Falls die (betragsmäßig gleichen) Faktoren das selbe Vorzeichen haben, sind die Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben, sind sie zu addieren.

5) Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen. Diese wird nun durch normale Äquivalenzumformungen nach der Variablen aufgelöst.

6) Der erhaltene Wert wird in eine der ursprünglichen Gleichungen für die jeweilige Variable eingesetzt, wodurch die andere Variable berechnet werden kann.

Beispiel:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 3x + 4y = -12 \\ \text{II:}&\quad 4x - 7y = 21 \end{aligned}$$

Subtrahieren:

(III) in (II):

Lösung:

3.6.3 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Definition 3.15:
Jedes *n*-Tupel von reellen Zahlen $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, das gleichzeitig jede Gleichung des linearen Gleichungssystems in eine wahre Aussage überführt, heißt *Lösung* des LGS. Die Menge aller Lösungen heißt *Lösungsmenge* des LGS: $L = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

Eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ein beliebiges der bekannten Lösungsverfahren (Einsetzungs-, Additions- Gleichsetzungsverfahren) liefert die einzige Lösung.

So ergibt sich z.B. beim Einsetzungsverfahren

Geometrische Interpretation:
Die Beziehungen $2x_1 - 3x_2 = -1$ und $x_1 + x_2 = 2$ stellen Geradengleichungen dar. Ein Vektor $x = (x_1, x_2)^T$, der Lösung des LGS ist, muss sowohl die erste als auch die zweite Beziehung erfüllen, somit auf beiden Geraden liegen. Diese Eigenschaft besitzt nur der (eindeutige) Schnittpunkt beider Geraden. Dessen Koordinaten sind gerade die beiden Komponenten der Lösung.

Keine Lösung

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Anwendung des Additionsverfahrens:

Unlösbare Systeme erhalten immer einen solchen Widerspruch.

Geometrische Interpretation:
Die den beiden Beziehungen entsprechenden Geraden verlaufen parallel.

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens:

Da x_2 nicht festgelegt ist, kann es jeden beliebigen Wert annehmen.
Hat man aber einmal x_2 gewählt, so ist auch x_1 bestimmt.
So bilden z.B. die Paare $(x_1; x_2) = (1; 0), (0{,}5; -0{,}5), (20{,}1; 19{,}1)$ Lösungen von $x_1 = 1 + x_2$ und damit vom Ausgangssystem.
Da $x_2 \in R$ unendlich viele Werte annehmen kann, gibt es für das betrachtete LGS unendlich viele Lösungen.

Geometrische Interpretation:
Die den Gleichungen entsprechenden Geraden sind deckungsgleich.

3.6.4 Eliminationsverfahren (Gaußscher Algorithmus)

Elementare Umformungen eines LGS:

1) Multiplikation (Division) einer Zeile mit einer (durch eine) Zahl $c \neq 0$

2) Addition (Subtraktion) einer Zeile zu (von) einer anderen Zeile

3) Vertauschen zweier Zeilen

4) Vertauschen zweier Spalten (beachten, welche Variablen gegeneinander ausgetauscht wurden!)

Durch geeignete Umformungen versucht man, eine Matrix in die Form

$$\begin{array}{ccccc}
*x_1 & +*x_2 & +*x_3 & +*x_4 & =* \\
 & *x_2 & +*x_3 & +*x_4 & =* \\
 & & *x_3 & +*x_4 & =* \\
 & & & *x_4 & =*
\end{array}$$

zu überführen. (Die Sternchen bedeuten irgendwelche Zahlen.)

Beispiel 1:

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\;\; 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

Lösung:

Tabellenform:	x_1	x_2	x_3	Rechte Seite

	x_1	x_2	x_3	Rechte Seite

Vertauschen der Spalten 2 und 3:

	Rechte Seite

Vertauschen der Zeilen 2 und 3:

	Rechte Seite

Dreiecksform: Jede Gleichung enthält eine Unbekannte weniger als die vorhergehende.

einsetzen in:

einsetzen in:

Lösung:

Beispiel 2:
Eine Mensa bietet als Hauptgerichte Seehecht, Rumpsteak oder Maislaibchen an. Dazu können die 500 am Mittagessen Teilnehmenden als Beilage Kartoffelpüree oder Naturreis wählen. Eine Befragung ergab, dass jeder genau ein Hauptgericht und genau eine Beilage wählte. Dabei entschieden sich 240 für Kartoffelpüree mit Rumpsteak oder Seehecht, insgesamt 260 aßen Fisch. Der allseits beliebte Naturreis wurde von 230 Personen bevorzugt, wobei ihn doppelt so viele mit Fisch wie mit Fleisch kombinierten. 80 Personen sind den Maislaibchen-Fans zuzurechnen.
Wie viele Besucherinnen und Besucher der Mensa entschieden sich für Maislaibchen mit Naturreis und wie viele für Rumpsteak mit Kartoffelpüree?
Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems, wobei als Variablen die Anzahl der Essensportionen für jede Kombination von Hauptgericht und Beilage angesetzt werden können.

Beispiel 3:
Ein Fondsmanager muss ein Kapital von 200.000 € anlegen. Bei den drei zur Verfügung stehenden Alternativen wird eine Rendite von 10, 7 bzw. 8% erwartet. Das Kapital soll dabei einen jährlichen Ertrag von 16.000 € erzielen. Außerdem soll genau ein Drittel der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fließenden Geldmenge in die erste Alternative investiert werden.
Wie kann unter diesen Umständen das Kapital auf die drei Fonds verteilt werden, ohne die gestellten Forderungen zu verletzen?

Übungsblatt Kapitel 3.5: Matrizenmultiplikation

Aufgabe 1:
Folgende Matrizen sind gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikationen durch, sofern sie definitionsgemäß durchführbar sind.

a) ***AB;*** b) ***BA;*** c) ***AC;*** d) ***BC;*** e) ***CB;*** f) ***CD;*** g) ***DC***

Aufgabe 2:
Gegeben seien folgende Vektoren und Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:
a) ***AB*** b) ***BA*** c) ***AE*** d) ***EA*** e) ***CD*** f) ***DC*** g) ***GA*** h) ***GB***
i) ***BG*** j) ***FC*** k) ***CF*** l) ***ED*** m) ***DE*** n) $\boldsymbol{A}^2$ o) $\boldsymbol{A}^4$

Aufgabe 3:
Ein zweistufiger Produktionsprozess wird durch die beiden folgenden Produktionsmatrizen beschrieben:

Zwischenprodukte

$$\text{Rohstoff} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

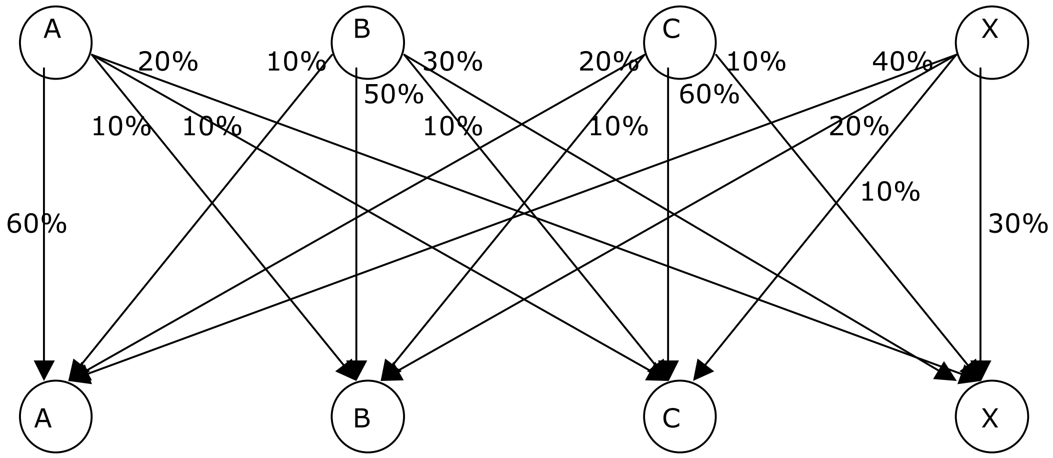
Endprodukt

$$\text{Zwischenprodukt} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Rohstoffpreise betragen $q_1 = 2,\ q_2 = 4$ und die Preise der Endprodukte $p_1 = 70,\ p_2 = 95$.

a) Bestimmen Sie die Matrix der Gesamtverarbeitung.
b) Welche Rohstoffkosten entstehen je Einheit des Endprodukts?
c) Welche Rohstoffmengen werden für 10 Einheiten des ersten und 5 Einheiten des zweiten Endprodukts benötigt?
d) Welcher Gesamtumsatz wird für die unter c) angegebenen Endproduktmengen erzielt?

Aufgabe 4:
Auf einem Markt konkurrieren die Güter A, B und C miteinander. Im Monat Januar eines Jahres haben die Güter Marktanteile von 40%, 20% und 10%. 30% der möglichen Käufer haben weder A noch B noch C gekauft. Das Verhalten der Käufer (einer Marke treu bleiben, überwechseln zu einer anderen Marke oder gar nicht kaufen) beim Übergang von einem Monat zum nächsten gibt die folgende Zeichnung an, wobei die Menge der Nichtkäufer mit X bezeichnet wurde.



Bestimmen Sie die Marktanteile und den Anteil der Nichtkäufer für die Monate Februar, März und April.

Aufgabe 5:
In einem Gemüseverarbeitungsbetrieb werden 5 verschiedene Sorten von Mischgemüse hergestellt. Ein Konservenglas der Sorte S_i enthält jeweils die untenstehenden Mengen an Gemüse G_j (in kg). Die tägliche Produktion beträgt 100, 100, 200, 300 bzw. 500 Gläser der Sorten S_1 bis S_5.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
S_1	0,1	0	0,2	0,5	0,2
S_2	0	0,3	0,3	0	0,4
S_3	0,4	0	0	0,6	0
S_4	0,2	0,7	0	0,1	0
S_5	0,6	0	0	0	0,4

a) Welche Mengen der einzelnen Gemüsearten werden täglich benötigt?

b) Welche Gesamtaufwendungen entstehen im Einkauf bei folgenden Preisen (in €/kg): $G_1 = 1{,}00; G_2 = 1{,}80; G_3 = 3{,}20; G_4 = 2{,}10; G_5 = 2{,}40$?

c) Welchen Gesamterlös erzielt das Unternehmen bei den nachstehenden Absatzpreisen (in €/Glas): $S_1 = 2{,}89; S_2 = 2{,}99; S_3 = 1{,}99; S_4 = 2{,}29; S_5 = 1{,}89$?

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) ***AB*** = nicht definiert

b) ***BA*** = $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \\ 3 & 9 & 15 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) ***AC*** = $\begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 & 28 \end{pmatrix}$

d) ***BC*** = nicht definiert

e) ***CB*** = $\begin{pmatrix} 34 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$

f) ***CD*** = $\begin{pmatrix} 25 & 26 & 34 \\ 17 & 17 & 23 \\ 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

g) ***DC*** = $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 & 20 \\ 10 & 15 & 20 & 30 \\ 9 & 12 & 15 & 24 \\ 5 & 8 & 11 & 16 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) ***AB*** = $\begin{pmatrix} -12 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) ***BA*** = nicht definiert

c) ***AE*** = $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$

d) ***EA*** = $\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$

e) ***CD*** = $\begin{pmatrix} -13 & 21 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

f) ***DC*** = $\begin{pmatrix} -1 & 15 & -1 \\ 10 & 4 & 24 \\ -7 & -5 & -17 \end{pmatrix}$

g) ***GA*** = $\begin{pmatrix} -25 & 22 \end{pmatrix}$

h) ***GB*** = -29

i) ***BG*** = $\begin{pmatrix} -15 & -21 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}$

j) ***FC*** = nicht definiert

k) ***CF*** = $\begin{pmatrix} 15 \\ -11 \end{pmatrix}$

l) ***ED*** = nicht definiert

m) ***DE*** = $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 14 & 16 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$

n) $\boldsymbol{A}^{2}$ = $\begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -15 & -14 \end{pmatrix}$

o) $\boldsymbol{A}^{4}$ = $\begin{pmatrix} -14 & -225 \\ 375 & 61 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

a) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 62 & 96 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 160 \\ 195 \end{pmatrix}$

d) 1.175

Aufgabe 4:

Februar: $a_2 = a_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 & 15 & 24 \end{pmatrix}$

März: $a_3 = a_2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 38{,}7 & 20{,}8 & 17{,}5 & 23{,}0 \end{pmatrix}$

April: $a_4 = a_3\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 38{,}0 & 20{,}6 & 18{,}8 & 22{,}6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:

a)
$$m = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array} \bullet \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} = \begin{pmatrix} 450 \\ 240 \\ 50 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix}\begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{array}$$

b) $$G = \langle p, m \rangle = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}80 & 3{,}20 & 2{,}10 & 2{,}40 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 450 \\ 240 \\ 50 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix} = 2.086\,[EUR]$$

c) $$E = \langle a, e \rangle = \begin{pmatrix} 2{,}89 & 2{,}99 & 1{,}99 & 2{,}29 & 1{,}89 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = 2.618\,[EUR]$$

3.7 Lineare Unabhängigkeit

3.7.1 Linearkombination

Gegeben seien k Spaltenvektoren mit jeweils n Komponenten

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \cdots, x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Ein (weiterer) Vektor $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^n$ wird Linearkombination der Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)} \in R^n$ genannt, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ gibt derart, dass

$$x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)} \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$$

d.h. wenn sich x aus den gegebenen Vektoren $x^{(i)}, i = 1, \cdots, k$ „kombinieren" lässt. Das ist nicht immer der Fall, denn sonst wäre der eingeführte Begriff inhaltsleer.

Beispiel 1:

Gegeben seien die beiden Vektoren $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Der Vektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, denn es gilt

b) Der Vektor $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, da offenbar gilt

Geometrische Interpretation:

Beispiel 2:

Gegeben seien die Vektoren $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ des Raumes R^2.

Der Vektor $\overline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ stellt keine Linearkombination von $x^{(3)}$ und $x^{(4)}$ dar,

denn es gibt keine Zahlen λ_3 und λ_4 mit der Eigenschaft $\overline{x} = \lambda_3 x^{(3)} + \lambda_4 x^{(4)}$.

Geometrische Interpretation:

3.7.2 Begriff der linearen Unabhängigkeit

Fragestellung:
Kann für k gegebene Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)} \in R^n$ der Nullvektor auch als Linearkombination dargestellt werden, in der nicht alle Koeffizienten λ_i gleich Null sind?

Definition 3.16:
Die Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)} \in R^n$ heißen *linear abhängig*, wenn es Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ gibt, die nicht alle Null sind und der Beziehung $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} = 0$ genügen.
Andernfalls werden die Vektoren $x^{(i)}, i = 1, \cdots, k$ *linear unabhängig* genannt.

Beispiel 1:
Gegeben seien die Vektoren $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2:

Für die Vektoren $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liefert das homogene lineare Gleichungssystem

Satz 3.4:
Ist der Vektor $x^* \in R^n$ eine Linearkombination der k Vektoren $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)} \in R^n$, so sind die $k+1$ Vektoren $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}, x^*$ linear abhängig.

Satz 3.5:

(i) Die n Einheitsvektoren $e_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)^T \in R^n, i = 1, \cdots, n$ sind stets linear unabhängig.

(ii) Im Raum R^n sind mehr als n Vektoren immer linear abhängig.

3.7.3 Basis und Rang

Fragestellung:
Unter welchen Voraussetzungen lässt sich ein fixierter Vektor als Linearkombination anderer Vektoren darstellen?

Definition 3.17:
Sind n (beliebige) Vektoren des Raumes R^n linear unabhängig, so werden sie als *Basis* des R^n bezeichnet; die einzelnen Vektoren selbst heißen *Basisvektoren*.

Bemerkung:
Koordinatensysteme müssen nicht rechtwinklig sein: offenbar erzeugen die beiden Vektoren $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ebenfalls ein Koordinatensystem, allerdings ein schiefwinkliges.

Welche Koordinaten hat z.B. der Vektor $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ in diesem System?

Satz 3.6:
Bilden die Vektoren $b^{(1)},\cdots,b^{(n)}$ eine Basis des Raums R^n, so lässt sich jeder Vektor $c \in R^n$ in eindeutiger Weise als Linearkombination aus den Basisvektoren darstellen, d.h. es existieren Zahlen $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, die eindeutig bestimmt sind und für die gilt $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b^{(i)}$.

Satz 3.7:
Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A.

Definition 3.18:
Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren einer Matrix A heißt *Rang* von A (geschrieben: $rang\, A$).

Beispiel:
Wie groß ist der Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$?

Satz 3.8:
Die im Gaußschen Algorithmus angewendeten elementaren Umformungen (Kap. 3.6.4) verändern den Rang einer Matrix nicht.

=> einfache Rangbestimmung einer gegebenen Matrix A:
Man wende auf A den Gaußschen Algorithmus an; die Dimension der entstehenden Einheitsmatrix ist dann gleich $rang\ A$

Beispiel:

Man bestimme den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Satz 3.9: Lösbarkeitskriterium für ein lineares Gleichungssystem
Das System $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $rang\ A = rang\left(A|b\right)$, wobei $\left(A|b\right)$ die (um die rechte Seite) *erweiterte Systemmatrix* genannt wird.
Speziell besagt dies, dass das betrachtete Gleichungssystem nicht lösbar ist, wenn $rang\ A \neq rang\ A|b$.

3.8 Matrizeninversion

3.8.1 Definition der inversen Matrix

Definition 3.19:
Eine quadratische Matrix vom Typ (n,n) heißt *regulär*, wenn ihre n Spalten linear unabhängig sind, d.h. wenn $rang\ A = n$.
Besitzt die Matrix weniger als n linear unabhängige Spalten, so dass also $rang\ A < n$ ist, wird sie *singulär* genannt.

Beispiel:
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ mit $rang\ A = 2 < 3$ ist

Definition 3.20:
Gegeben sei eine reguläre quadratische Matrix A. Gibt es eine Matrix X mit $A \bullet X = X \bullet A = E$, so wird X die zu A *inverse* Matrix genannt und mit A^{-1} bezeichnet. Sie ist eindeutig bestimmt. Eine Matrix, die eine Inverse besitzt, heißt *invertierbar*.

Rechenregeln für inverse Matrizen:

1. $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = E$
2. $(A \bullet B)^{-1} = B^{-1} \bullet A^{-1}$
3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
4. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Beispiel:
Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Man überprüfe, ob

- B invers zu A und
- A invers zu B ist.

3.8.2 Berechnung einer inversen Matrix

Berechnung einer inversen Matrix mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen (Gauß-Jordan-Verfahren)

Zu jeder regulären n–reihigen Matrix A gibt es genau eine inverse Matrix A^{-1}, die schrittweise wie folgt berechnet werden kann:

1. Zunächst wird aus der Matrix A und der n–reihigen Einheitsmatrix E die neue Matrix $(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$

   vom Typ $(n,2n)$ gebildet.

2. Diese Matrix wird nun mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen so umgeformt, dass die Einheitsmatrix E den ursprünglichen Platz der Matrix A einnimmt. Die gesuchte inverse Matrix A^{-1} befindet sich dann auf dem ursprünglichen Platz der Einheitsmatrix E.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) = \left(E \,\middle|\, A^{-1}\right)$$

Beispiel:

Zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ soll A^{-1} berechnet werden oder festgestellt werden, dass A nicht invertierbar ist.

A	E
E	A^{-1}

3.8.3 Anwendungen der Matrizeninversion

Definition 3.21:
Kommen in einer Gleichung eine oder mehrere Matrizen mit unbekannten Elementen vor, so spricht man von einer *Matrizengleichung*.

Beispiele:
Es seien A,B,C Matrizen geeigneter Dimension und z eine reelle Zahl.

1) $A+X-B=C$

2) $zX=A, \quad z\in R, \quad z\neq 0$

3) $AX=B$

4) $XA-XB=C$

3.9 Determinanten

3.9.1 Berechnung von Determinanten

Definition 3.22:

Gegeben sei die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vom Typ (n,n).

Als *Teilmatrix* A_{ij} bezeichnen wir diejenige $(n-1)\times(n-1)$–Matrix, die entsteht, wenn die i–te Zeile und die j–te Spalte von A gestrichen werden.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Definition 3.23:

Gegeben sei die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$. Die *Determinante* von A ($\det A$ oder $|A|$) ist eine Zahl, die der Matrix A wie folgt zugeordnet wird:

1) Für $n = 1$ wird $\det A = a_{11}$ gesetzt.

2) Für $n = 2$ ist $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

3) Für $n = 3$ ist $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right) \end{matrix}$

Regel von SARRUS gilt <u>nur</u> für 3-reihige Determinanten!

Beispiel:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

4) Für $n \geq 4$ werden Determinanten rekursiv definiert, indem eine Dimensionsreduzierung der zugehörigen Matrix erfolgt:

Definition 3.24:
Streicht man in einer Determinante n–ter Ordnung die i–te Zeile und k–te Spalte, so entsteht eine Unterdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung. Multipliziert man diese mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$, so entsteht die Adjunkte A_{ik} des Elementes a_{ik}.

Entwicklungssatz von LAPLACE:
Eine n–reihige Determinante lässt sich nach den Elementen einer *beliebigen* Zeile oder Spalte wie folgt entwickeln:

Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\quad D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

Entwicklung nach der k-ten Spalte: $\quad D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

Dabei bedeuten:

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \bullet D_{ik}$ — Adjunkte von a_{ik} in D

D_{ik} — $(n-1)$-reihige Unterdeterminante von D

Ermittlung des Vorzeichens nach der *Schachbrettregel:*

Allgemein gilt:
Es wird nach derjenigen Zeile oder Spalte entwickelt, die die meisten Nullen enthält (geringster Arbeitsaufwand!).

Beispiel:

Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden, indem nach der 1. Spalte entwickelt wird.

3.9.2 Eigenschaften von Determinanten

Satz 3.10:
Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Beispiel:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Satz 3.11:
Die Determinante einer Matrix A ist gleich der Determinante der zu A transponierten Matrix A^T: $\det A = \det A^T$.

Beispiel:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Unter Beachtung dieses Satzes werden die folgenden Eigenschaften von Determinanten nur bezüglich der Zeilen formuliert, für Spalten gelten sie in analoger Weise.

Satz 3.12:
Die Determinante einer Matrix A ändert ihren Wert nicht, wenn in A zu einer beliebigen Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert wird.

Beispiel:
Gegeben: $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

Satz 3.13:
Eine Determinante $\det A$ ändert ihr Vorzeichen, wenn in der zugehörigen Matrix A zwei Zeilen vertauscht werden.

Beispiel:
$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Satz 3.14:
Wird eine Zeile von A mit dem Faktor λ multipliziert, so wird $\det A$ mit λ multipliziert.

Beispiel:
$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 \bullet 3 & 5 \bullet 4 \end{vmatrix}$

Hinweis:
Verwechslungsgefahr! Bei der Operation „Multiplikation einer Matrix A mit einer reellen Zahl λ" werden alle Elemente von A mit λ multipliziert. In *Satz 3.14* geht es jedoch um die Multiplikation nur einer Zeile von A mit λ.

Satz 3.15:
Es gilt $\det A = 0$, wenn die Zeilen von A linear abhängig sind.

Beispiel:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Folgerung:

i) Sind in einer Matrix A zwei Zeilen gleich, so ist $\det A = 0$.

ii) Enthält die Matrix A eine Nullzeile, so ist $\det A = 0$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Satz 3.16:
Für zwei quadratische Matrizen A und B gleicher Ordnung gilt
$\det(A \bullet B) = \det(B \bullet A) = \det(A) \bullet \det(B)$

Folgerung: Ist A eine reguläre Matrix, so gilt $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.9.3 Anwendungen der Determinantenrechnung

Problem 1:
Ist es möglich, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}$$

nach x_1, x_2, x_3 aufzulösen?

Cramersche Regel
Ein lineares (n,n)-System $Ax = b$ mit regulärer Koeffizientenmatrix A

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $x_i = \dfrac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Dabei bedeuten
D: Koeffizientendeterminante
D_i: Hilfsdeterminante, die aus D hervorgeht, indem man die i–te Spalte durch die Absolutglieder $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ersetzt.

In allgemeiner Form für ein $(3,3)$-System:
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem in der Normalform:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

Dann erhalten wir die Lösungen für x_1 bis x_3 durch den Quotienten aus zwei Determinanten in der Form:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

Problem 2:

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig, so dass sie eine Basis des Raumes R^3 bilden (und als erzeugende Vektoren eines schiefwinkligen Koordinatensystems dienen könnten)?

Problem 3:

Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\5 & -8 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ invertierbar?

Problem 4 (Eigenwertproblem):
Gegeben sei eine quadratische Matrix A der Ordnung n. Für welche Zahlen λ gilt dann die Beziehung

$$Ax = \lambda x$$

für gewisse Vektoren $x \in R^n, x \neq 0$?

Solche Zahlen λ heißen *Eigenwerte* der Matrix A. Die zugehörigen Vektoren $x \neq 0$, die für einen fixierten Eigenwert λ Lösungen der Gleichung $Ax = \lambda x$ sind, werden *Eigenvektoren* genannt.

Umformung der Vektorgleichung $Ax = \lambda x$:

$Ax = \lambda Ex$ bzw. $Ax - \lambda Ex = 0$

Theorie der linearen Gleichungssysteme:
Wäre die Matrix $(A - \lambda E)$ regulär, so hätte das System $(A - \lambda E)x = 0$ die (eindeutige) triviale Lösung $x = 0$. Dieser Wert wurde in der obigen Problemstellung aber gerade ausgeschlossen.

Also lautet eine Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen von $(A - \lambda E)x = 0$, d.h. von Eigenvektoren:

$$\det(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0$$

Diese Beziehung wird als *charakteristische Gleichung* der Matrix A bezeichnet. Die darin auftretende Determinante enthält die unbekannte Größe λ.

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zusammenfassende Bemerkungen

Für jede $n \times n$–Matrix A sind in der folgenden Tabelle alle Aussagen auf jeweils einer Seite zueinander äquivalent:

	A ist regulär		A ist singulär
$\Leftrightarrow$	A ist invertierbar	$\Leftrightarrow$	A ist nicht invertierbar
$\Leftrightarrow$	$rang\ A = n$	$\Leftrightarrow$	$rang\ A < n$
$\Leftrightarrow$	$\det A \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\det A = 0$
$\Leftrightarrow$	$Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$	$\Leftrightarrow$	$Ax = 0$ besitzt unendlich viele Lösungen
$\Leftrightarrow$	$Ax = b$ besitzt für beliebiges $b \in R^n$ eine (eindeutige) Lösung	$\Leftrightarrow$	es gibt Vektoren $b \in R^n$, für die $Ax = b$ keine Lösung besitzt
$\Leftrightarrow$	$rang\left(A \middle| b\right) = n$ für beliebiges $b \in R^n$	$\Leftrightarrow$	Es gibt Vektoren $b \in R^n$ mit $rang\ A < rang\left(A \middle| b\right)$
$\Leftrightarrow$	die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von A sind linear unabhängig	$\Leftrightarrow$	die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von A sind linear abhängig
$\Leftrightarrow$	die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von A bilden eine Basis im R^n	$\Leftrightarrow$	die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von A bilden keine Basis im R^n

Übungsblatt Kapitel 3.6: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Matrizen X, die der Matrizengleichung $AX = B$ genügen, wenn $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ gegeben sind!

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender LGS:

a) $$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & -x_2 & +3x_3 & =15 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 \\ 6x_1 & -x_2 & +2x_3 & =16 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & =5 \\ 2x_1 & & -x_3 & +3x_4 & & =12 \\ & 2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -x_5 & =12 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +5x_4 & -3x_5 & =23 \\ 5x_1 & -4x_2 & +3x_3 & & +4x_5 & =-6 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =7 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ 4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =7 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & & =12 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & =10 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & -x_5 & =6 \\ x_1 & & -2x_3 & +3x_4 & -2x_5 & =p \end{array}$$
(abhängig vom Parameter p)

Aufgabe 3:
Von einer dreistelligen Zahl ist die Quersumme 12 (Summe aller Ziffern) und die alternierende Quersumme 0 (erste Ziffer minus zweite Ziffer plus dritte Ziffer) bekannt. Außerdem weiß man, dass eine um 396 größere Zahl entsteht, wenn man die Ziffern der gesuchten Zahl in umgekehrter Reihenfolge notiert.
Lässt sich aus diesen Angaben die Zahl eindeutig rekonstruieren? Wenn ja, bestimmen Sie die derart umschriebene Zahl.

Aufgabe 4:
Zement und Gips sollen, in Säcke zu 50 kg bzw. 40kg verpackt, von einem Lkw zu einer Baustelle gefahren werden. Die Belastbarkeit des Lkw von 3,5t soll möglichst voll ausgenützt werden. Wie viele Säcke Zement und Gips können geladen werden, wenn an der Baustelle doppelt so viele Säcke Zement wie Gips verarbeitet werden?

Aufgabe 5:
In einem Elektronikgeschäft gibt es in einem Sonderangebot drei Sorten von Beuteln (B_1, B_2 und B_3) mit jeweils unterschiedlicher Anzahl von drei Bauelementen E_1, E_2 und E_3:

	je Beutel B_1	B_2	B_3
Stück E_1	12	20	30
Stück E_2	6	10	25
Stück E_3	24	60	50

Durch ein kleines Versehen (die unternehmungslustige dreijährige Tochter des Ladeninhabers war für kurze Zeit unbeaufsichtigt) verschwanden alle Beutel unauffindbar, deren Inhalt lag dagegen verstreut auf dem Fußboden. Bei einer peinlich genauen Inventur wurden anschließend exakt 970 Bauelemente des Typs E_1, 635 von E_2 und 2.190 Bauelemente E_3 zusammengesucht.
Versuchen Sie aus diesen Angaben zu bestimmen, wie viele Beutel jeder Sorte ursprünglich im Sonderangebot gewesen sind.

Aufgabe 6:
Nach einem Erdbeben in Mittelamerika soll dorthin ein Flugzeug mit diversen Hilfsgütern entsandt werden, wobei die Kapazitäten in Bezug auf den Laderaum, das Abfluggewicht und die zur Verfügung stehenden Geldmittel voll ausgeschöpft werden sollen.

	Volumen (l)	Gewicht (kg) je Behälter	Kosten (€)
Blutkonserven	200	150	1.000
Medikamente	300	100	300
Nahrungsmittel	80	60	400
Frischwasser	60	70	200
Kapazitäten	60.000	40.000	150.000

Wie viele Container jeder Sorte sind unter diesen Umständen auf die Reise zu schicken, wenn außerdem bekannt ist, dass am dringendsten Frischwasser benötigt wird und deshalb genau doppelt so viele Wasserbehälter wie Container mit Blut und Medikamenten insgesamt verwendet werden sollen?

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Widerspruch, Lösungsmenge ist leer

b) Eindeutige Lösung $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = 3,\ x_5 = 0$

c) Eindeutige Lösung $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -3$

d) Fall $p = 8$: allgemeine Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}6 \\ -10 \\ 4{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \bullet \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \bullet \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -3 \\ 0{,}8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

t_1 und t_2 beliebig (unendlich viele Lösungen);
Fall $p \neq 8$: Widerspruch, Lösungsmenge ist leer

Aufgabe 3:
Gesucht ist die Zahl 165.

Aufgabe 4:
Es müssen 50 Säcke Zement und 25 Säcke Gips verladen werden.

Aufgabe 5:
Ursprünglich waren insgesamt 10 Beutel der Sorte S_1, 20 von S_2 und 15 von S_3 vorhanden.

Aufgabe 6:
Es sind insgesamt 50 Behälter mit Blutkonserven, 100 mit Medikamenten, 25 mit Nahrungsmittel sowie 300 Frischwassercontainer in das Flugzeug zu verladen.

Übungsblatt Kapitel 3.7: Lineare Unabhängigkeit, Basis, Rang

Aufgabe 1:

Überprüfen Sie, ob sich der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}$ darstellen lässt:

a) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

Überprüfen Sie, ob der Vektor $x = (1, \; 2, \; 1)^T$ als Linearkombination der Vektoren $x^{(k)}$

a) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

darstellbar ist.

Aufgabe 3:

Sind folgende Vektoren linear abhängig oder unabhängig:

a) $x^{(1)} = (1, \; 1, \; 1)^T$, $x^{(2)} = (1, \; 0, \; 0)^T$, $x^{(3)} = (0, \; 1, \; 0)^T$

b) $x^{(1)} = (1, \; 1, \; 1)^T$, $x^{(2)} = (1, \; 0, \; 0)^T$, $x^{(3)} = (0, \; 1, \; 0)^T$, $x^{(4)} = (0, \; 0, \; 1)^T$

c) $x^{(1)} = (1, \; 1, \; 1)^T$, $x^{(2)} = (1, \; 1, \; 0)^T$, $x^{(3)} = (0, \; 0, \; 2)^T$

d) $x^{(1)} = (1, \; 0, \; 0)^T$, $x^{(2)} = (0, \; 1, \; 1)^T$

e) $x^{(1)} = (2, \; 0)^T$, $x^{(2)} = (0, \; 3)^T$, $x^{(3)} = (1, \; 1)^T$?

Aufgabe 4:
Bilden die Vektoren $b^{(1)} = (1,\ \ 0,\ \ 0)^T,\ \ b^{(2)} = (0,\ \ 1,\ \ 0)^T,\ \ b^{(3)} = (1,\ \ 1,\ \ 1)^T$ eine Basis im R^3?
Falls ja, stellen Sie folgende Vektoren in dieser Basis dar:

a) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:
Wir betrachten die vier Vektoren $a = (1,\ \ 0,\ \ 1)^T,\ \ b = (1,\ \ 1,\ \ 0)^T,\ \ c = (2,\ \ 1,\ \ 1)^T$ $d = (0,\ \ -2,\ \ 1)^T$.

a) Welche davon bilden eine Basis im R^3?
b) Stellen Sie den verbleibenden Vektor in dieser Basis dar.

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
a) bis c) ja; d) nein

Aufgabe 2:
a) nein; b) ja

Aufgabe 3:
a) und d) linear unabhängig; b), c) und e) linear abhängig.

Aufgabe 4:
a) $x^{(1)} = -b^{(1)} - 2b^{(2)} + 2b^{(3)}$
b) $x^{(2)} = b^{(1)} + 2b^{(2)} + b^{(3)}$
c) $x^{(3)} = -b^{(1)} - b^{(2)} + b^{(3)}$
d) $x^{(4)} = 0 \bullet b^{(1)} - 0 \bullet b^{(2)} + 0 \bullet b^{(3)}$

Aufgabe 5:
a) $rang\ A = 2$; b) $rang\ B = 1$; c) $rang\ C = 2$; d) $rang\ D = 3$

Aufgabe 6:
$a, b, d\ (c = a + b)$ $a, c, d\ (b = -a + c)$ und $b, c, d\ (a = -b + c)$ bilden jeweils eine Basis.

Übungsblatt Kapitel 3.8: Matrizeninversion / Matrizengleichungen

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Inversen zu folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Bei Benutzung des Gaußschen Algorithmus dürfen nur Zeilenoperationen verwendet werden.

Aufgabe 2:
Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ soll für verschiedene rechte Seiten b mehrfach gelöst werden. Wie kann dies am effektivsten geschehen, wenn bekannt ist, dass die Matrix A regulär ist?

Aufgabe 3:
Lösen Sie die Matrizengleichungen nach X auf.

a) $X - A + B = C$
b) $C - X = X - A$
c) $A - X = BX$
d) $AX + C + DX = EX + F$
e) $AX - X + B = E$
f) $AXB - B = A - B - XB - E$
g) $A(X - 2E) + (2E - AX)B = A(3E - XB) + 2AB$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 16 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

f) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/2 & & & \\ & & 1/3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/n \end{pmatrix}$

e), h) und k) es existiert keine Inverse

Aufgabe 2:

Man berechnet ein einziges Mal die inverse Matrix A^{-1} und führt anschließend für jede rechte Seite nur noch die Multiplikation $x = A^{-1}b$ aus.

Aufgabe 3:

a) $X = A - B + C$

b) $X = \frac{1}{2}(A + C)$

c) $X = (B + E)^{-1} A$

d) $X = (A + D - E)^{-1}(F - C)$

e) $X = (A - E)^{-1}(E - B)$

f) $X = (A + E)^{-1}(AB^{-1} - B^{-1})$

g) $X = 5E - 2A^{-1}B + 2B$

Übungsblatt Kapitel 3.9: Determinanten / Eigenwerte

Aufgabe 1:
Wie ist die Unterdeterminante $|A_{ij}|$ einer Determinante $|A|$ definiert?

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen (z.B. mit Hilfe der *Regel von Sarrus*):

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & a & -2 \\ -3 & 3 & a \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mit Hilfe des Entwicklungssatzes, indem Sie z.B. Zeilen oder Spalten mit möglichst vielen Nullen verwenden und evtl. vorher durch geeignete Operationen Nullen erzeugen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mit Hilfe des Entwicklungssatzes, wobei es günstig ist, vorher gemeinsame Faktoren der Elemente einer Zeile oder Spalte auszuklammern:

a) $\begin{pmatrix} 63 & 81 & 45 & 54 \\ 52 & 65 & 91 & 78 \\ 30 & 75 & 90 & 90 \\ 60 & 60 & 72 & 72 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 50 & 0 & -1 & 49 \\ 20 & 1 & 1 & 42 \\ -10 & 3 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & 3 & 49 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 13 & 39 & 91 & 26 \\ 0 & 15 & 49 & 8 \\ 36 & 18 & 126 & 54 \\ 9 & 81 & 63 & 36 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:
Erstellen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6:
Erstellen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7:
Erstellen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
Die Unterdeterminante $|A_{ij}|$ erhält man, indem man in $|A|$ die i-te Zeile und die j–te Spalte streicht und die restlichen Elemente zu einer Determinante $(n-1)$–ter Ordnung „zusammenschiebt".

Aufgabe 2:
a) -1 b) 45 c) 1 d) $ad-bc$
e) -18 f) 0 g) a^3+11a

Aufgabe 3:
a) -68 b) 122

Aufgabe 4:
a) 1.516.320 b) 0 c) 678.132

Aufgabe 5:
Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$: $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}894 \\ -0{,}447 \end{pmatrix}$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$: $\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ -0{,}7071 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$: $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zum (doppelten) Eigenwert $\lambda_{2,3} = 5$:

$$\tilde{x}_{2,3} = \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta,\gamma \in R^2 \setminus \{0,0\}$$

Aufgabe 7:
Normierte Eigenvektoren zum (dreifachen) Eigenwert $\lambda_{1,2,3} = 2$:

$$\tilde{x}_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ 0 \\ -0{,}7071 \end{pmatrix}$$

Übungsblatt Kapitel 3: Lineare Algebra (Gemischte Übungsaufgaben)

Aufgabe 1:
Ein Energieversorgungsunternehmen hat in einer Aufstellung den für das Jahr 2005 ermittelten durchschnittlichen täglichen Energieverbrauch in drei Versorgungsregionen nach Energiearten aufgeschlüsselt. Eine analoge Tabelle liegt in Form von Schätzwerten auch für das Jahr 2015 vor:

		Jahr 2005		
		Region 1	Region 2	Region 3
Erdöl / Erdgas	[Barrel]	360	245	600
Strom	[MWh]	120	156	165

		Jahr 2015		
		Region 1	Region 2	Region 3
Erdöl / Erdgas	[Barrel]	480	335	760
Strom	[MWh]	165	200	215

Berechnen Sie anhand dieser Daten mit Hilfe einfacher Matrizenoperationen

a) die im Zeitraum 2005 – 2015 erwarteten Änderungen im durchschnittlichen täglichen Energieverbrauch;

b) die erwarteten durchschnittlichen jährlichen Änderungen;

c) den geschätzten Verbrauch im Jahr 2015, wenn man (als vereinfachende Annahme) von einer pauschalen 30%igen Steigerung der Energiemengen in allen Regionen und bei allen Energiearten ausgeht.

Aufgabe 2:
Ein Unternehmen produziert die drei Güter G_1, G_2 und G_3 aus den vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4. Folgende Mengen der Rohstoffe werden für die Produktion benötigt (ME = Mengeneinheit):

- Für eine ME von G_1: 3 ME R_1, 1 ME R_2, 1 ME R_3 und 2 ME R_4
- Für eine ME von G_2: 1 ME R_1, 0 ME R_2, 4 ME R_3 und 4 ME R_4
- Für eine ME von G_3: 2 ME R_1, 2 ME R_2, 2 ME R_3 und 0 ME R_4

a) Welche Rohstoffkosten entstehen für je eine ME jedes Gutes, wenn die Rohstoffe folgende Kosten haben (GE = Geldeinheit):
R_1: 2 GE, R_2: 1 GE, R_3: 4 GE, R_4: 2 GE ?

b) Wie viel Einheiten von jedem Rohstoff werden verbraucht, wenn die folgenden Mengen hergestellt werden:
G_1: 3 ME, G_2: 3 ME, G_3: 1 ME ?

Aufgabe 3:
Der Student Ben bekommt monatlich neben BAföG (Betrag x_1) einen festen Betrag x_2 von seiner Tante als Studienbeihilfe. Außerdem hebt er monatlich einen festen Betrag x_3 von seinem Sparbuch ab.

- 50% vom BAföG und 20% des Geldes von der Tante muss er für Miete in Höhe von 240 EUR/Monat aufwenden.

- Für das Mensaessen und für Bücher gibt er 180 EUR/Monat aus und muss dafür den Betrag, den er vom Sparbuch abhebt und 30% des BAföG aufwenden.

- Es verbleiben ihm noch 330 EUR für seine übrigen Ausgaben.

Berechnen Sie die Beträge, die Ben aus BAföG, von der Tante und vom Sparbuch bekommt.

Aufgabe 4:
Der Chemiestudent Egon Knallgas hat einen neuen, papierähnlichen Stoff entwickelt, der den bekannten „Schwalben" bessere Flugeigenschaften verleihen soll. Leider ist der Stoff ein Zufallsprodukt aus den Zutaten Zellstoff, Leim und zwei geheimnisvollen Lösungen A und B (deren Zusammensetzung der Öffentlichkeit vor der Anmeldung beim Patentamt nicht bekannt gegeben werden darf), und Egon weiß die Mengen der einzelnen Bestandteile nicht mehr. Er hat nur noch einen Schmierzettel mit den folgenden Bemerkungen gefunden:
Menge ergibt 100g! Zellstoff zu Leim wie 5 zu 1! Lösungen A und B zu gleichen Teilen! Halb so viel Leim wie Lösung A nehmen!
Wie kann man aus diesen Angaben die Mengen der einzelnen Zutaten errechnen?

Aufgabe 5:
Johannes Buteo, ein spätmittelalterlicher Rechenmeister, stellt in seinem Buch "Logistica" die folgende Aufgabe: "Drei Zahlen [sind] zu finden, deren erste mit einem Drittel der übrigen 14 macht. Die zweite mit einem Viertel der anderen macht 8. Die dritte ebenso mit dem fünften Teil der übrigen macht 8."
Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das dieses Problem beschreibt, und lösen Sie dieses Gleichungssystem mit dem Gaußalgorithmus.

Aufgabe 6:
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 42 \\
-x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 50 \\
-3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -14
\end{array}
$$

Aufgabe 7:
Ein Bauer will seine Kapazitäten Fläche, Stallraum und Arbeitszeit auf Milchkühe, Mastbullen und Schafe aufteilen. In der folgenden Tabelle finden Sie die Ansprüche und verfügbaren Gesamtkapazitäten.
Wie viel Stück Vieh von jeder Tierart kann er halten?
Geben Sie dazu auch das Gleichungssystem in der Matrixform an.

Ansprüche	Kühe	Bullen	Schafe	Verfügbarkeit
Fläche (ha/Tier)	0,65	0,45	0,10	65
Stallraum (m^3/Tier)	6,5	2,5	1,5	550
Arbeitszeit (AKh/Jahr)	91	42	12	7.850

Aufgabe 8:
Wenden Sie die Ihnen bekannten Rechengesetze zur Vereinfachung folgender Ausdrücke an (die Verkettbarkeit der Matrizen sei dabei gewährleistet):

a) $A(BA)^{-1}B$ b) $BA^T\left(BA^T\right)^{-1}C$ c) $AB^T\left(B^{-1}\right)^T + A^{-1}$

Aufgabe 9:
Lösen Sie unter Anwendung der Regeln zum Rechnen mit Matrizen die folgenden Matrizengleichungen nach X auf:

a) $A^T E + X^T = \left[A(E+B)\right]^T$ b) $\frac{1}{2}CX + 2X - B = 3A$

c) $5\left(BA^T\right)^T + 3A^T + X = 3A^T + E^T AB^T\left(A^T + 5E\right) + \frac{1}{2}XE$

d) $(XA + EX)^T = A^T + E$ e) $X(A+E) = E + A^{-1}$

Aufgabe 10:
Welche Matrix X ist mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauschbar, so dass $AX = XA$ gilt?

Aufgabe 11:
Überprüfen Sie, ob die Matrix X jeweils invers zu A ist:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12:
Zwei Abteilungen eines Unternehmens produzieren je ein Gut in bedarfsgerechten Mengen und liefern dieses zum Preis von 15 bzw. 35 GE/ME (Geldeinheiten pro Mengeneinheiten). Die Güter werden von der jeweils anderen Abteilung sowie externen Verbrauchern benötigt. Im betrachteten Zeitraum werden folgende Mengen (in ME) nachgefragt, wobei die erste Komponente der Vektoren die Nachfrage nach Gut 1 und die zweite die nach Gut 2 beschreibt:

Abteilung I:	n_I	=	$(0,20)$
Abteilung II:	n_{II}	=	$(15,0)$
Externer Verbrauch:	e	=	$(30,12)$

a) Welche Gesamtnachfrage besteht nach beiden Gütern?

b) Ermitteln Sie den Gewinn oder Verlust jeder Abteilung, wobei nur diejenigen Kosten berücksichtigt werden sollen, die durch die von der jeweils anderen Abteilung bezogenen Gütermengen entstehen.

Aufgabe 13: *(Papula Seite 144)*
Berechnen Sie den Wert der folgenden 4-reihigen Determinanten mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes:

a) $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\det \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

Hinweis: Entwickeln Sie nach derjenigen Zeile oder Spalte, die die meisten Nullen enthält.

Aufgabe 14: *(Papula Seite 145)*
Zeigen Sie mit Hilfe elementarer Umformungen, die den Wert der Determinante nicht verändern, dass die nachstehenden Determinanten verschwinden.

a) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Aufgabe 15: *(Papula Seite 146)*
Welche Matrizen sind regulär, welche singulär?

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 16: *(Papula Seite 155)*
Bestimmen Sie die Eigenwerte und (normierten) Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
Bezeichnet man den Inhalt der für das Jahr 2005 gültigen Tabelle als Matrix ***A*** und analog die für 2015 geltende Tabelle als Matrix ***B***, so erhält man

a) ***B*** − ***A*** = $\begin{pmatrix} 480 & 335 & 760 \\ 165 & 200 & 215 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 360 & 245 & 600 \\ 120 & 156 & 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 160 \\ 45 & 44 & 50 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{10}\bullet$ (***B*** − ***A***) = $\frac{1}{10}\bullet\begin{pmatrix} 120 & 90 & 160 \\ 45 & 44 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}0 & 9{,}0 & 16{,}0 \\ 4{,}5 & 4{,}4 & 5{,}0 \end{pmatrix}$

c) $1{,}3\bullet$ ***A*** = $1{,}3\bullet\begin{pmatrix} 360 & 245 & 600 \\ 120 & 156 & 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 468{,}0 & 318{,}5 & 780{,}0 \\ 156{,}0 & 202{,}8 & 214{,}5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) $\begin{pmatrix} 15 \\ 26 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 14, & 5, & 17, & 18 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
BaFöG: 350 EUR; Tante: 325 EUR; Sparbuch: 75 EUR

Aufgabe 4:
50 g Zellstoff, 10 g Leim, 20 g A, 20 g B

Aufgabe 5:
$L = \{11; 4; 5\}$

Aufgabe 6:
$L = \{2; 7; -2; -4\}$

Aufgabe 7:
Der Bauer kann 56 Milchkühe , 56 Mastbullen und 27 Schafe halten, um seine Kapazitäten auszulasten.

Aufgabe 8:
a) $A(BA)^{-1}B = E$

b) $BA^T\left(BA^T\right)^{-1}C = C$

c) $AB^T\left(B^{-1}\right)^T + A^{-1} = A + A^{-1}$

Aufgabe 9:

a) $X = AB$

b) $X = \left(\frac{1}{2}C + 2E\right)^{-1}(3A + B)$

c) $X = 2A(AB)^T$

d) $X = E$

e) $X = A^{-1}$

Bem: In b) muss die Matrix $\frac{1}{2}C + 2E$ als regulär vorausgesetzt werden, in d) sowie e) die Matrix $A + E$

Aufgabe 10:

Für $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$. Aus dem Vergleich $AX = XA$ erhält man die Bedingungen $c = 0, a = d$ (beliebig), während b beliebig sein kann.

Aufgabe 11:

a) ja
b) nein
c) ja
d) nein

Aufgabe 12:

a) $n = n_I + n_{II} + e = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 32 \end{pmatrix}$

b) $g_I = q_I \bullet p_I = \begin{pmatrix} 45 \\ 20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 15 \\ -35 \end{pmatrix} = -25,\quad g_{II} = q_{II} \bullet p_{II} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -15 \\ 35 \end{pmatrix} = 895$,

Abteilung I erleidet also einen Verlust von 25 GE, Abteilung II erzielt einen Gewinn von 895 GE.

Aufgabe 13:

a) Entwicklung nach der *4. Zeile*: det ***A*** = $2 \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{28} - 2 \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{-43} = 142$

b) Entwicklung nach der *2. Spalte*: det ***B*** = $2 \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{-27} - 1 \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{9} = -63$

Aufgabe 14:

a) Zur 1. Zeile wird das -2-fache der 2. Zeile addiert. Die neue Determinante enthält dann zwei *gleiche* Zeilen (1. und 3. Zeile): |***A***|= $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Zur 4. Spalte addieren wir das 2-fache der 1. Spalte und erhalten eine neue Determinante mit zwei zueinander *proportionalen* Spalten (3. und 4. Spalte; die 4. Spalte ist das 3-fache der 3. Spalte): | ***B*** | = $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Aufgabe 15:

a) det ***A***= $-9 \neq 0 \quad \Rightarrow$ ***A*** ist *regulär*

b) det ***B*** $= 0 \quad \Rightarrow$ ***B*** ist *singulär*

c) det ***C*** $= 0$ (Entwicklung nach der 2. Spalte) $\quad \Rightarrow$ ***C*** ist *singulär*

Aufgabe 16:

a) $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 3$

Eigenvektoren: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

Eigenvektoren: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -3, \lambda_3 = 5$$

Eigenvektoren: $\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\det\left(D-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3-8\lambda^2+20\lambda-16=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=2, \lambda_3=4$$

Eigenvektoren: $\tilde{x}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\det\left(X-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0, \lambda_{2,3}=1$$

Eigenvektoren: $\tilde{x}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 Komplexe Zahlen

4.1 Grundbegriffe

Definition 4.1:
Unter einer *komplexen Zahl* versteht man eine formale Summe der Gestalt $z = x + jy = x + y \bullet \sqrt{-1}$ mit reellen Zahlen x und y. $x = \mathrm{Re}(z)$ heißt der *Realteil*, $y = \mathrm{Im}(z)$ heißt *Imaginärteil* der komplexen Zahl z.
Insbesondere wird $\sqrt{-1}$ *imaginäre Einheit* genannt und mit dem Buchstaben j bezeichnet.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit C bezeichnet.

Sonderfälle: für $y = 0$ die reelle Zahl x
für $x = 0$ die *rein imaginäre* Zahl jy.

Definition 4.2:
Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ heißen *gleich* ($z_1 = z_2$), wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen, d.h. wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

Definition 4.3:
Als die zu $z = x + jy$ *konjugiert komplexe Zahl* bezeichnet man die komplexe Zahl z^*, die sich von z nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheidet: $z^* = x - jy$

4.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Allgemeine Darstellung komplexer Zahlen:

Beispiele:

a) $z_1 = 2 + 4\,j$

b) $z_2 = 4 + j$

c) $z_3 = 3\,j$

d) $z_4 = -3$

Allgemeine Darstellung einer konjugiert komplexen Zahl:

Definition 4.4:
Der (absolute) *Betrag* $|z|$ einer komplexen Zahl z ist eine nichtnegative Zahl und wird definiert durch $|z| = \sqrt{z \bullet z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Beispiele:
a) $z_1 = 3 - 4\,j$ hat den Betrag

b) $z_2 = 6\,j$ hat den Betrag

c) $z_3 = -3 - 5\,j$ hat den Betrag

4.3 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

Algebraische oder kartesische Form: $z = x + j\,y$

$x = \mathrm{Re}(z)$, *Realteil* von z
$y = \mathrm{Im}(z)$, *Imaginärteil* von z.

Trigonometrische Form:

Transformationsgleichungen: $x = r \bullet \cos\varphi, \quad y = r \bullet \sin\varphi$

Trigonometrische Form: $z = x + j\,y = r \bullet \cos\varphi + j \bullet r \bullet \sin\varphi = r(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)$

mit: r: Betrag von z
φ: Argument (Winkel) von z ($\arg(z)$)

Beispiele:

a) $z_1 = 2\left(\cos 30^o + j \bullet \sin 30^o\right)$

b) $z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j \bullet \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

c) $z_3 = 5\left(\cos \pi + j \bullet \sin \pi\right)$

Exponentialform:

Eulersche Formel: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

Exponentialform: $z = r \bullet e^{j\varphi}$

mit: r: Betrag von z

φ: Argument (Winkel) von z ($\arg(z)$)

Konjugiert komplexe Zahl: $z^* = \left[r \bullet e^{j\varphi}\right]^* = r \bullet e^{-j\varphi}$

Beispiele:

a) $z_1 = 3 \bullet e^{j45^o}$

b) $z_2 = 4 \bullet e^{j\frac{2}{3}\pi}$

c) $z_3 = 5 \bullet e^{j\frac{3}{2}\pi}$

Umrechnung: Polarform -> Kartesische Form

Eine in der *Polarform* $z = r(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)$ oder $z = r \bullet e^{j\varphi}$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$x = r \bullet \cos\varphi, \quad y = r \bullet \sin\varphi$$

in die *kartesische Form* $z = x + j\,y$ überführen.

Zunächst wird die komplexe Zahl von der Exponentialform in die trigonometrische Form gebracht, dann wird „ausmultipliziert“:

$$z = r \bullet e^{j\varphi} = r(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi) = \underbrace{(r \bullet \cos\varphi)}_{x} + j\underbrace{(r \bullet \sin\varphi)}_{y} = x + j\,y$$

Umrechnung: Kartesische Form -> Polarform

Eine in der *kartesischen* Form $z = x + j\,y$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

und unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem der zugehörige Bildpunkt liegt, in die *trigonometrische Form* $z = r(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)$ bzw. in die *Exponentialform* $z = r \bullet e^{j\varphi}$ überführen.

Beim Bilden der *trigonometrischen Form* ist die Bestimmung des Winkels φ das Schwierigste. Hierbei ist zu beachten:

x	y	z liegt im	φ liegt zwischen	tan φ
pos.	pos.	1. Quadr.	0^0 und 90^0	pos.
neg.	pos.	2. Quadr.	90^0 und 180^0	neg.
neg.	neg.	3. Quadr.	180^0 und 270^0 oder -90^0 und -180^0	pos.
pos.	neg.	4. Quadr.	270^0 und 360^0 oder 0^0 und -90^0	neg.

4.4 Grundrechenarten für komplexe Zahlen

Allgemein gilt: $x + jy = jy$, falls $x = 0$
$x + jy = x$, falls $y = 0$
$j^2 = -1$

Addition und Subtraktion

Allgemein gilt: $(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) - (x_3 + jy_3) = (x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3)j$

Beispiele:
a) $(3 + 2j) + (6 + 4j)$

b) $(4 - 5j) - (2 + 3j)$

c) $(-9 + 6j) - (3 - 2j)$

Konjugiert komplexe Zahlen ergeben
bei der Addition eine reelle Zahl: $(x + jy) + (x - jy) = 2x$
bei der Subtraktion eine imaginäre Zahl: $(x + jy) - (x - jy) = 2yj$

Beispiele:
a) $\left(3 + 2j\sqrt{2}\right) + \left(3 - 2j\sqrt{2}\right)$

b) $(4 + 3j) - (4 - 3j)$

Multiplikation

Allgemein gilt: $(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)j$

Beispiele:
a) $(3 + 5j)(2 + 4j)$

b) $(1 + 2j)(3 - j)$

c) $(3 + 2j)(2 + 3j)$

d) $(x + yj)(y + xj)$

e) $(4+2j)(4-2j)$

f) $\left(\sqrt{2}-j\right)\left(\sqrt{2}+j\right)$

Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell: $(x+jy)(x-jy)=x^2+y^2$

Division

durch eine reelle Zahl: $(x+jy):c=\frac{x}{c}+\frac{y}{c}j$

Beispiel:

$\frac{8-3j\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

durch eine imaginäre Zahl: $\frac{x+jy}{cj}=\frac{xj^3+yj^4}{cj^4}=\frac{-xj+y}{c}=\frac{y}{c}-\frac{x}{c}j$

Beispiel:

$\frac{6-4j}{2j}$

durch eine komplexe Zahl:

$$\frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2}=\frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{(x_2+jy_2)(x_2-jy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2-(x_1y_2-y_1x_2)j}{x_2^2+y_2^2}$$

Beispiele:

a) $\frac{3-2j}{2-3j}$

b) $\frac{4+j\sqrt{5}}{\sqrt{5}-4j}$

Division konjugiert komplexer Zahlen

Allgemein gilt: $\frac{x+jy}{x-jy} = \frac{(x+jy)(x+jy)}{(x-jy)(x+jy)} = \frac{(x+jy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,j$

Beispiel:

$\frac{6-2j}{6+2j}$

Der reziproke Wert einer komplexen Zahl

Allgemein gilt: $\frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{\textit{konjugiert komplexe Zahl}}{\textit{Norm}}$

Beispiel:

$\frac{1}{2-j\sqrt{5}}$

Zu unterscheiden sind

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ und $(x+y\,j)^2 = x^2-y^2+2xy\,j$

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ und $(x-y\,j)^2 = x^2-y^2-2xy\,j$

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$ und $x^2+y^2 = (x+y\,j)(x-y\,j)$

4.5 Die vier Grundrechenarten in der Gaußschen Zahlenebene

Addition: $z_1 + z_2 = z_3$

Beispiel:
$z_1 = 6 + 3j, \quad z_2 = 2 + 5j \quad \Rightarrow \quad z_3 =$

Addition von zwei komplexen Zahlen *Addition von mehr als zwei komplexen Zahlen (Polygonzug)*

Subtraktion: $z_1 - z_2 = z_3$

Subtraktion
$$\begin{array}{rl} z_1 = 6 + 3j & + \\ z_2 = 2 + 5j & - \\ \hline \end{array}$$
wird Addition
$$\begin{array}{rl} z_1 = 6 + 3j & + \\ -z_2 = -2 - 5j & + \\ \hline z_3 = 4 - 2j & \end{array}$$

Addition und Subtraktion zweier konjugiert komplexer Zahlen:

Multiplikation:

Es sei $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j \bullet \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j \bullet \sin\varphi_2)$, dann ist

$z_3 = z_1 \bullet z_2 =$

Unter Anwendung eines Additionstheorems folgt:
$z_3 = z_1 \bullet z_2 =$

Komplexe Zahlen können so multipliziert werden, dass man ihre absoluten Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

Beispiel:
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3\left(\cos 45^0 + j \bullet \sin 45^0\right)$ und $z_2 = 1{,}5\left(\cos 15^0 + j \bullet \sin 15^0\right)$, gesucht ist $z_3 = z_1 \bullet z_2$

Einige Sonderfälle

- Multipliziert man eine komplexe Zahl (z_1) mit $z_2 = -1$, so bleibt der absolute Betrag erhalten, denn $r_3 = r_1 \bullet r_2 = r_1 \bullet 1$. Das Argument $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + 180^0$. Das bedeutet eine Drehung um 180^0 (positiver Drehsinn), d.h. das Ergebnis ist die „entgegengesetzte" Zahl $z_3 = -z_1$.

- Entsprechend bedeutet eine Multiplikation mit j nur eine Drehung um 90^0 (positiver Drehsinn), da das Argument von j 90^0 beträgt. Der absolute Betrag bleibt auch hier derselbe.

Division:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} =$$

$$z_3 =$$

Komplexe Zahlen können so dividiert werden, dass man ihre absoluten Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

Beispiel:

Gegeben sind $z_1 = 5\left(\cos 120^0 + j \bullet \sin 120^0\right)$ und $z_2 = 2{,}5\left(\cos 45^0 + j \bullet \sin 45^0\right)$,

gesucht ist der Quotient $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

Einige Sonderfälle

- Die Division einer komplexen Zahl durch -1 bedeutet geometrisch eine Drehung um 180^0 im Uhrzeigersinn, d.h. man erhält als Ergebnis die entgegengesetzte Zahl, also wie bei der Multiplikation mit -1.

- Die Division durch j bedeutet dagegen eine Drehung um 90^0 im Uhrzeigersinn, gibt also ein anderes Ergebnis als die Multiplikation mit j.

4.6 Lehrsatz von Moivre

Potenzieren einer komplexen Zahl

Man setzt in der Multiplikationsformel
$z = z_1 \bullet z_2 = r_1 \bullet r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \bullet \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$

$z_1 = z_2 = z$, dann ist $r_1 = r_2 = r$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

Anwendung der Additionstheoreme:

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + j \bullet \sin 2\varphi)$$
$$z^3 = r^2(\cos 2\varphi + j \bullet \sin 2\varphi) \bullet r(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi) = r^3(\cos 3\varphi + j \bullet \sin 3\varphi)$$

Allgemein gilt: $z^n = r^n(\cos n\varphi + j \bullet \sin n\varphi)$

Eine komplexe Zahl wird potenziert, indem man den absoluten Betrag mit dem Exponenten potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Lehrsatz von MOIVRE:
Für $r = 1$: $(\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j \bullet \sin n\varphi$

Beispiele:
1. Man berechne $(1 + j)^6$

2. Man berechne $\left(1 - j\sqrt{3}\right)^5$

3. Man berechne $z = \left(\cos 20^0 + j\sin 20^0\right)^6$

4. Man berechne $z = \left(-\cos 60^0 - j\sin 60^0\right)^5$

5. Die zwei Formeln aus der Trigonometrie

$\sin 2\alpha = 2 \bullet \sin\alpha \, \cos\alpha$ und $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

sollen mit Hilfe des Satzes von MOIVRE hergeleitet werden.

Radizieren komplexer Zahlen

Nach dem Satz von MOIVRE muss gelten: $\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$

$$\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}$$

$$\Rightarrow \quad (\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\varphi + j\bullet\sin\frac{m}{n}\varphi$$

$\Rightarrow$ Der Satz von MOIVRE gilt auch für positive und negative ganze und gebrochene Exponenten.

$\Rightarrow$ Es können sämtliche n Wurzeln aus einer beliebigen Zahl berechnet werden.

Da $x + jy = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ ist, folgt mit $\sqrt[n]{\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}$:

$$\sqrt[n]{x + jy} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Um sämtliche Wurzeln zu bekommen, muss man die Periodizität der Winkelfunktionen berücksichtigen:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi)^n &= \left[\cos\left(\varphi + k\bullet 360^0\right) + j\sin\left(\varphi + k\bullet 360^0\right)\right]^n \\ &= \cos\left(n\varphi + nk\bullet 360^0\right) + j\sin\left(n\varphi + nk\bullet 360^0\right)\end{aligned}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

Im Falle des Potenzierens ist n eine ganze Zahl, also auch nk eine ganze Zahl:

$$(\cos\varphi + j\bullet\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$$

d.h., das Ergebnis des Potenzierens einer komplexen Zahl ist eindeutig.

Radizieren komplexer Zahlen:

$$\sqrt[n]{x + jy} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\bullet 360^0}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\bullet 360^0}{n}\right)\right]$$

Gibt man k die Werte $0,1,2,\cdots,(n-1)$, so erhält man n verschiedene Wurzelwerte, z.B.

für $k=0:\quad z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{n}+j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}\right]$

$$k=1:\quad z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^0}{n}\right)+j\bullet\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^0}{n}\right)\right]$$

$$k=2:\quad z_3=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\bullet\frac{360^0}{n}\right)+j\bullet\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\bullet\frac{360^0}{n}\right)\right]$$

Für $k=n$ würde man denselben Wert wie für $k=0$ erhalten. Ebenso würde man für $k>n$, aber auch für $k=-1,-2,-3,\cdots$ keine neuen Werte gewinnen.

Die n–te Wurzel aus einer komplexen Zahl hat n Werte.

Fundamentalsatz der Algebra:
Eine algebraische Gleichung n-ten Grades $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0=0$ besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen stets genau n Lösungen.

Definition:
Den Wurzelwert, der für $k=0$ erhalten wird, nennt man *Hauptwert* von

$$\sqrt[n]{x+j\,y}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+j\bullet\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Beispiele:
Man berechne $z=\sqrt[4]{\cos 120^0+j\sin 120^0}$

Allgemein gilt:
Für $\sqrt[n]{x+jy}$ liegen die Bildpunkte der n Wurzelwerte auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n–Ecks. Dabei ist der Bestimmungswinkel des Vielecks gegeben durch $\frac{360^0}{n}$ (im Beispiel durch $\frac{360^0}{4}=90^0$).

Beispiel:
Man berechne alle Werte von $\sqrt[3]{1}$

4.7 Bedeutung der Exponentialform in der Elektrotechnik

Die Exponentialform der komplexen Zahl spielt besonders in der Elektrotechnik eine große Rolle. Hinsichtlich der Schreibweise ist dabei einiges zu beachten:

- Um eine Verwechslung mit der Stromstärke i zu vermeiden, bezeichnet man die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ mit j.

- Statt $x + i\,y$ verwendet man die Form $x + j\,y$.

- Den Winkel φ gibt man ausschließlich in Grad an und schreibt z.B. $e^{j\,45^0}$.

- Als Formelzeichen wählt man kursive Buchstaben mit Unterstreichung. So bedeutet z.B. $\underline{U}$ die Spannung und $\underline{I}$ die Stromstärke.

- Die Größen bezeichnet man nicht als „Vektoren", sondern als „Zeiger".

Eine Zeigerdarstellung ist immer da möglich, wo der Zahlenwert einer physikalischen Größe in seiner *zeitlichen* Veränderung mathematisch ausdrückbar ist, wie z.B. Spannung und Stromstärke beim sinusförmigen Wechselstrom.

Will man mit solchen „zeitvariablen" Größen rechnen, so muss man die Zeiger für einen Moment festhalten. Einen solchen in der Zeichenebene feststehenden Zeiger nennt man „Strahl" und man spricht darum z.B. von Spannungs- bzw. Stromstrahlen. Die Strahlen symbolisieren also Augenblickswerte von Spannung bzw. Stromstärke.
Wie bei einer komplexen Zahl unterscheidet man auch bei einem Strahl eine reelle und eine imaginäre Komponente.

In Wirklichkeit gibt es natürlich nur reelle Spannungen, Stromstärken und Widerstände, doch spricht man in der Wechselstromtechnik von „komplexen" Spannungen, Strömen und Widerständen, da man mit ihnen rechnet wie mit komplexen Zahlen.

Ganz entsprechend der Exponentialform $r \bullet e^{j\varphi}$ einer komplexen Zahl schreibt man für

- die komplexe Spannung $\underline{U}$
- den komplexen Strom $\underline{I}$
- den komplexen Widerstand $\underline{Z}$

Hierin bedeuten $U = |\underline{U}|, I = |\underline{I}|$ und $Z = |\underline{Z}|$ die absoluten Beträge der komplexen Größen; φ ist der Winkel zwischen der reellen Achse (Bezugsachse) und dem zugehörigen Strahl.

Bei Darstellung in der kartesischen Form nennt man die reelle Komponente den „Wirkteil" und die imaginäre Komponente den „Blindteil".

Beispiel:
Der komplexe Widerstand $\underline{Z}$ lässt sich auf auf die Form $\underline{Z} = R + jX$ bringen; hierin ist R der „Wirkwiderstand" und X der „Blindwiderstand".

Das Ohmsche Gesetz, das für den Gleichstrom durch $I = \frac{U}{R}$ gegeben ist, lässt sich mit Hilfe der oben aufgeführten Formelzeichen für den Wechselstrom durch die einfache Gleichung $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ ausdrücken.

Beispiele:
1. Gegeben sei $\underline{U} = 120V \bullet e^{j0^0}$ und $\underline{Z} = 300\Omega \bullet e^{j30^0}$

2. Gegeben sei ein Strom $\underline{I} = 20A \bullet e^{j45^0}$ und ein Widerstand $\underline{Z} = 11\Omega \bullet e^{j30^0}$.
Gesucht ist die anzulegende Wechselspannung $\underline{U}$.

Benutzt man die Exponentialform, so lassen sich folgende Rechenregeln kürzer schreiben:

Multiplikation: $z_3 = z_1 \bullet z_2 = r_1 \bullet e^{j\varphi_1} \bullet r_2 \bullet e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 \bullet e^{j\varphi_1 + j\varphi_2} = r_1 r_2 \bullet e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division: $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \bullet e^{j\varphi_1}}{r_2 \bullet e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \bullet e^{j\varphi_1} \bullet e^{-j\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \bullet e^{j\varphi_1 - j\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \bullet e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Potenzieren: $z^n = \left(r \bullet e^{j\varphi}\right)^n = r^n \bullet e^{jn\varphi}$

Übungsblatt Kapitel 4.1 – 4.4: Komplexe Zahlen

Aufgabe 1:
Bringen Sie die komplexen Zahlen auf die trigonometrische Form.
a) $z = 3 + 4j$
b) $z = 3 - j\sqrt{3}$

Aufgabe 2:
Bringen Sie die komplexen Zahlen auf die Form $x + jy$.
a) $z = 6\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right)$
b) $z = 4\left(\cos 225^0 + j\sin 225^0\right)$

Aufgabe 3:
a) $-3(-2+6j)$
b) $j\sqrt{2}\left(3 - j\sqrt{3}\right)$
c) $(5+2j)(3+4j)$
d) $(2+3j)(4-5j)$
e) $\left(1+\sqrt{-3}\right)\left(3-\sqrt{-2}\right)$

Aufgabe 4:
a) $\dfrac{16 + j\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
b) $\dfrac{4 - j\sqrt{3}}{2j}$
c) $\dfrac{2+3j}{3-4j}$
d) $\dfrac{1}{1+j}$
e) $\dfrac{22}{2 - j\sqrt{7}}$
f) $\dfrac{8+7j}{3+4j}$
g) $\dfrac{1+j}{1-j} - \dfrac{1-j}{1+j}$
h) $\dfrac{\left(5 + j\sqrt{3}\right)\left(5 - j\sqrt{3}\right)}{2 - j\sqrt{3}}$
i) $\dfrac{5+10j}{2+4j}$

Aufgabe 5:
a) $(5+3j)+(5-3j)$
b) $(5+3j)-(5-3j)$
c) $(5+3j)(5-3j)$
d) $(5+3j):(5-3j)$
e) $\left(1+j\sqrt{2}\right)^2$
f) $\left(3-j\sqrt{5}\right)^2$

Aufgabe 6:
Verwandeln Sie folgende Summen in Produkte:
a) $4x^2 + 9y^2$
b) $x + y$
c) $17\ (=16+1)$

Aufgabe 7:
Gegeben sind die konjugiert komplexen Zahlen

$z_1 = 2 + 3j$ und $z_1^* = 2 - 3j$

$z_2 = 4 - 2j$ und $z_2^* = 4 + 2j$

a) Berechnen Sie $z_1 \bullet z_2$ und $z_1^* \bullet z_2^*$ und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
b) Berechnen Sie $\dfrac{z_1}{z_2}$ und $\dfrac{z_1^*}{z_2^*}$ und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $z = 5\left(\cos 53^0 08' + j \sin 53^0 08'\right)$

b) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos 330^0 + j \sin 330^0\right)$

Aufgabe 2:

a) $z = 3 + 3j\sqrt{3}$

b) $z = -2\sqrt{2} - 2j\sqrt{2}$

Aufgabe 3:

a) $6 - 18j$

b) $\sqrt{6} + 3j\sqrt{2}$

c) $7 + 26j$

d) $23 + 2j$

e) $3 + \sqrt{6} + \left(3\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)j$

Aufgabe 4:

a) $4\sqrt{2} + \frac{1}{2}j$

b) $-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2j$

c) $-0{,}24 + 0{,}68j$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$

e) $4 + 2j\sqrt{7}$

f) $2{,}08 - 0{,}44j$

g) $2j$

h) $8 + 4j\sqrt{3}$

i) $2{,}5$

Aufgabe 5:

a) 10

b) $6j$

c) 34

d) $\frac{8}{17} + \frac{15}{17}j$

e) $-1 + 2j\sqrt{2}$

f) $4 - 6j\sqrt{5}$

Aufgabe 6:

a) $(2x + 3y\,j)(2x - 3y\,j)$

b) $\left(\sqrt{x} + j\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - j\sqrt{y}\right)$

c) $(4 + j)(4 - j)$

Aufgabe 7:

a) $z_1 \bullet z_2 = 14 + 8j$ $\qquad z_1^* \bullet z_2^* = 14 - 8j$

b) $\frac{z_1}{z_2} = 0{,}1 + 0{,}8j$ $\qquad \frac{z_1^*}{z_2^*} = 0{,}1 - 0{,}8j$

Übungsblatt Kapitel 4.5 – 4.6: Rechnen mit Komplexen Zahlen

Aufgabe 1:
Berechnen Sie $z = z_1 \bullet z_2$, wenn

a) $z_1 = 2\left(\cos 15^0 + j\sin 15^0\right)$ und $z_2 = 3\left(\cos 45^0 + j\sin 45^0\right)$

b) $z_1 = \sqrt{5}\left(\cos 80^0 + j\sin 80^0\right)$ und $z_2 = \sqrt{5}\left(\cos 40^0 + j\sin 40^0\right)$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie $z = \frac{z_1}{z_2}$, wenn

a) $z_1 = \cos 70^0 + j\sin 70^0$ und $z_2 = \cos 25^0 + j\sin 25^0$

b) $z_1 = 6\left(\cos 225^0 + j\sin 225^0\right)$ und $z_2 = 3\left(\cos 75^0 + j\sin 75^0\right)$

c) $z_1 = 4$ und $z_2 = 4\left(\cos 30^0 + j\sin 30^0\right)$
(*Hinweis:* Setzen Sie $4 = 4\left(\cos 360^0 + j\sin 360^0\right)$)

Aufgabe 3:
Was bedeutet geometrisch die Multiplikation (Division) einer komplexen Zahl mit $-j$? (*Hinweis:* Setzen Sie $-j = (-1) \bullet j$)

Aufgabe 4:
Der Vektor $3\sqrt{3} + 3j$ ist

a) um 45^0 zu drehen und auf das Doppelte zu strecken,
b) um 120^0 zu drehen und auf die Hälfte zu reduzieren.

Wie heißt der neue Vektor?

Aufgabe 5:
Unter welcher Bedingung stellen die Ausdrücke $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)$ und $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right)$ konjugiert komplexe Zahlen dar?

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $z = 6\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right) = 3 + 3j\sqrt{3}$

b) $z = 5\left(\cos 120^0 + j\sin 120^0\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}j\sqrt{3}$

Aufgabe 2:

a) $z = \cos 45^0 + j\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{j}{2}\sqrt{2}$

b) $z = 2\left(\cos 150^0 + j\sin 150^0\right) = -\sqrt{3} + j$

c) $z = \cos 330^0 + j\sin 330^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j$

Aufgabe 3:

Die Multiplikation (Division) mit $-j$ bedeutet eine positive (negative) Drehung um 270^0.

Aufgabe 4:

a) $z = 12\left(\cos 75^0 + j\sin 75^0\right) = 3{,}1058 + 11{,}5912\,j$

b) $z = 3\left(\cos 150^0 + j\sin 150^0\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}j$

Aufgabe 5:

Bedingung: $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 + \varphi_2 = 360^0$

5 Reelle Funktionen

5.1 Definition und Darstellung einer Funktion

5.1.1 Definition einer Funktion

Definition 5.1:
Eine Vorschrift (Abbildung), die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet, heißt auch *Funktion*.

Definition 5.2:
Gegeben sei die Funktion $y = f(x)$. y heißt *abhängige Variable*, *abhängige Veränderliche* oder *Funktionswert*. x heißt *unabhängige Variable*, *unabhängige Veränderliche* oder *Argument* der Funktion.

Definition 5.3:
Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$. Die Menge der Werte, die für die unabhängige Variable x zugelassen werden, heißt *Definitionsbereich* D *der Funktion.*
Die Menge der Werte, die die abhängige Variable y annimmt, heißt *Wertevorrat* oder *Wertebereich* W *der Funktion.*

Beispiele:
1) Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t : $v = g \bullet t$

2) Parabel $y = x^2$

5.1.2 Darstellung einer Funktion

Analytische Darstellung
Funktionsgleichung:

$y = f(x)$: *Explizite* Darstellung (die Funktion ist nach einer Variablen – hier y - aufgelöst.

$F(x;y) = 0$: *Implizite* Darstellung (die Funktion ist nicht nach einer der beiden Variablen aufgelöst).

Beispiele:
Die folgenden Funktionen sind *explizit* dargestellt:

Die folgenden Funktionen sind *implizit* dargestellt:

Darstellung durch eine Wertetabelle (*Funktionstafel*)

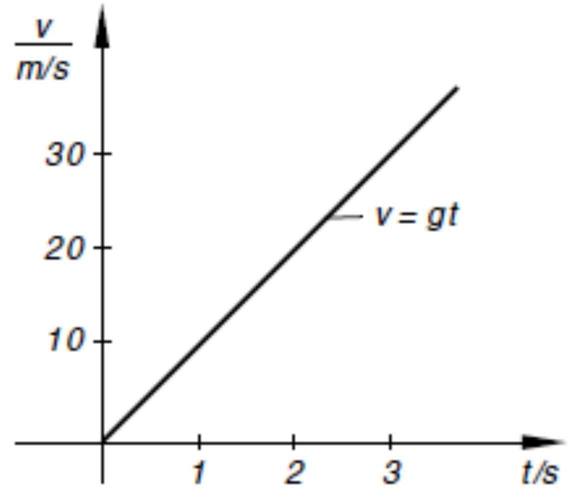
Beispiel:
In einem Versuch wird der Spannungsabfall U an einem ohmschen Widerstand in Abhängigkeit von der Stromstärke I gemessen. Die Wertetabelle hat dabei das folgende Aussehen:

$I\,/\,mA$	50	100	150	200	250	...
$U\,/\,V$	2,0	3,9	6,0	7,9	10,1	...

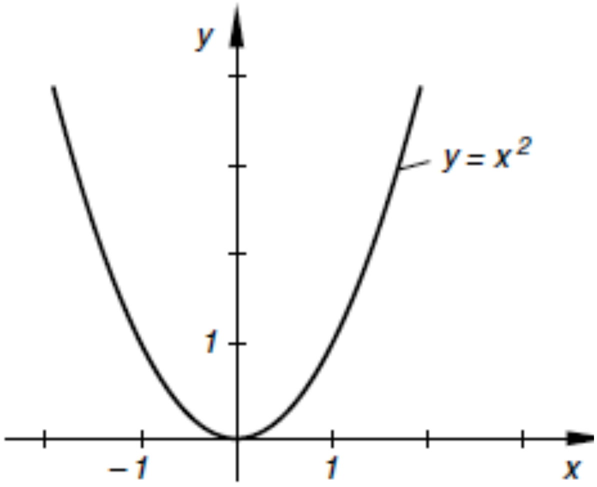
Graphische Darstellung
Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ ordnet jedem x–Wert in *eindeutiger* Weise einen y–Wert zu: $x_0 \to y_0 = f(x_0)$. Das Wertepaar $(x_0\,;y_0)$ kann dann als ein *Punkt* P der Ebene mit einem *rechtwinkligen* Koordinatensystem gedeutet werden.

Für jedes Wertepaar $(x_0\,;y_0)$ erhalten wir genau einen Punkt. Die Menge aller Punkte $(x\,;y = f(x))$ bildet die *Funktionskurve* (auch *Schaubild* oder *Funktionsgraph* genannt).

Beispiele:



Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit



Normalparabel $y = x^2$

Parameterdarstellung
Bei der mathematischen Beschreibung eines Bewegungsablaufs ist es oft zweckmäßig, die augenblickliche Lage des Körpers durch kartesische Koordinaten $(x\,;y)$ zu beschreiben, die sich aber mit der Zeit t verändern, d.h. *Funktionen der Zeit* sind: $x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (t_1 \le t \le t_2)$

Beispiel:
Waagrechter Wurf: Ein Körper wird aus einer gewissen Höhe *waagrecht* mit der *konstanten* Geschwindigkeit vom Betrage v_0 abgeworfen und bewegt sich dabei auf einer *Parabelbahn* (sog. *Wurfparabel*).
Die *Parametergleichungen* dieser Bewegung lauten wie folgt:

$$x = v_0\, t, \quad y = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (t \text{ : Zeitparameter mit } t \geq 0)$$

Wurfparabel beim waagrechten Wurf

Gleichung der *Wurfparabel* in expliziter Form:

Rechenbeispiel: $v_0 = 15 \,{}^{m}\!/_{s}\,, \quad g = 10 \,{}^{m}\!/_{s^2}$

5.2 Allgemeine Funktionseigenschaften

5.2.1 Nullstellen

Definition 5.4:
Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, wenn $f(x_0) = 0$ ist.

Beispiele:
1) Die lineare Funktion (Gerade) $y = x - 2$ schneidet die x–Achse an der Stelle $x_1 = 2$.

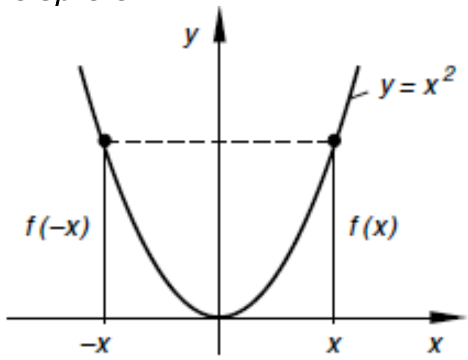
2) Die Parabel $y = (x-1)^2$ besitzt in $x_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle, d.h. einen Berührpunkt.

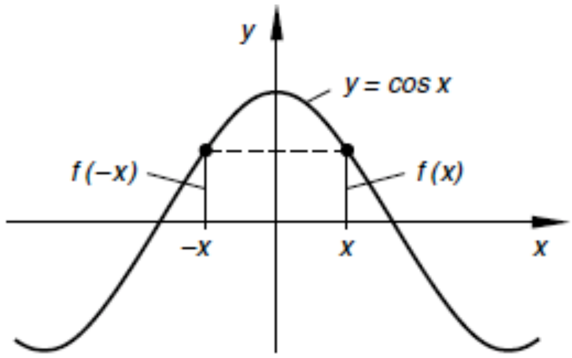
3) Funktion mit unendlich vielen Nullstellen: $y = \sin x$. Sie liegen bei $x_k = k \bullet \pi$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.2.2 Symmetrieverhalten

Definition 5.5:
Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem symmetrischen Definitionsbereich D heißt *gerade*, wenn sie für jedes $x \in D$ die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt.

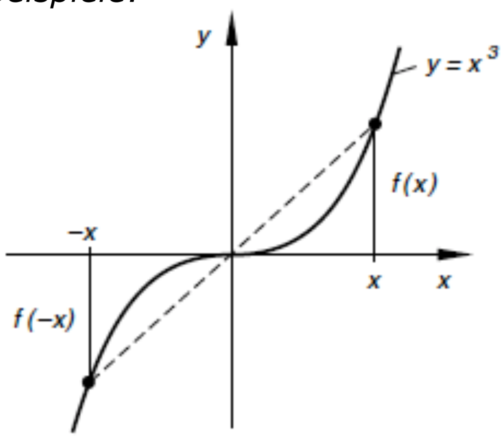
Beispiele:

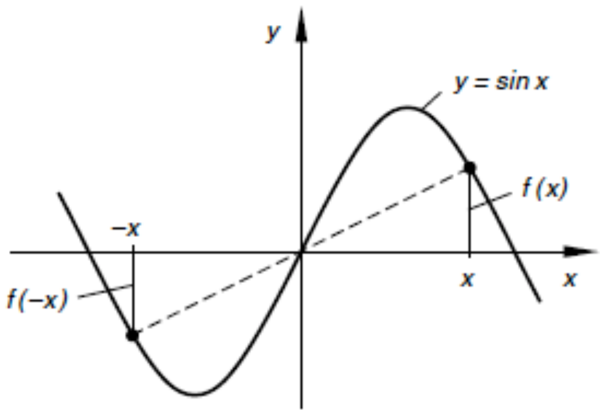




Definition 5.6:
Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem symmetrischen Definitionsbereich D heißt *ungerade*, wenn sie für jedes $x \in D$ die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt.

Beispiele:





Beispiele:
1) Die Potenzfunktionen $y = x^n$ (mit $n = 1, 2, 3, \ldots$) sind entweder *spiegelsymmetrisch* zur y–Achse , also *gerade* Funktionen (für n = gerade) oder *punktsymmetrisch* und damit *ungerade* Funktionen (für n = ungerade).

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in R$

3) $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\,, \quad -1\le x\le 1$

5.2.3 Monotonie

Definition 5.6:
x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y=f(x)$, die der Bedingung $x_1<x_2$ genügen. Dann heißt die Funktion

- *monoton wachsend*, falls $f(x_1)\le f(x_2)$
- *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1)<f(x_2)$
- *monoton fallend*, falls $f(x_1)\ge f(x_2)$
- *streng monoton fallend*, falls $f(x_1)>f(x_2)$

ist.

Beispiele:

1) *Streng monoton wachsende* Funktionen sind:

   a. Jede Gerade mit positiver Steigung.

   b. *Aufladung eines Kondensators* über einen ohmschen Widerstand auf die Endspannung u_0 ($u=u(t)$)

   c. *Wachstumsprozesse* in der Natur wie z.B. die Vermehrung von Bakterien verlaufen meist exponentiell ansteigend

2) *Streng monoton fallende* Funktionen sind:

   a. Jede Gerade mit *negativer* Steigung.

   b. *Radioaktiver Zerfall*: beim natürlichen radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl n der Atomkerne nach einem *Exponential-gesetz* mit der Zeit t ab (n_0: Anzahl der Atomkerne zu Beginn, d.h. zur Zeit $t=0$)

   c. *Entladung eines Kondensators*: Entlädt man einen Kondensator über einen ohmschen Widerstand, so klingt die Kondensatorspannung u *exponentiell* mit der Zeit t ab (u_0: Anfangsspannung zur Zeit $t=0$)

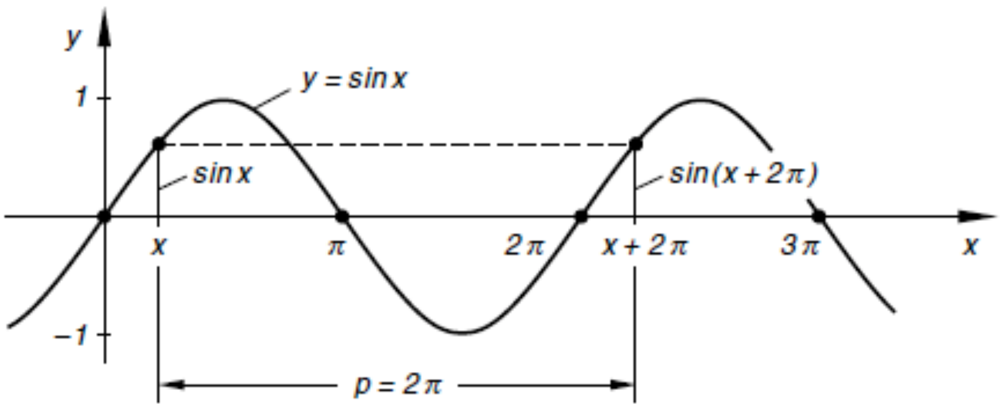
3) Die Normalparabel $y=x^2,\ x\in R$ ist in R *weder* monoton fallend *noch* monoton wachsend.

5.2.4 Periodizität

Definition 5.7:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *periodisch* mit der Periode p , wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich der Funktion gehört und $f(x \pm p) = f(x)$ ist.

Anmerkungen:
1) Mit der Periode p ist auch $\pm k \bullet p$ eine Periode der Funktion $\left(k \in N^*\right)$.
2) Die *kleinste* positive Periode p heißt auch *primitive Periode*.

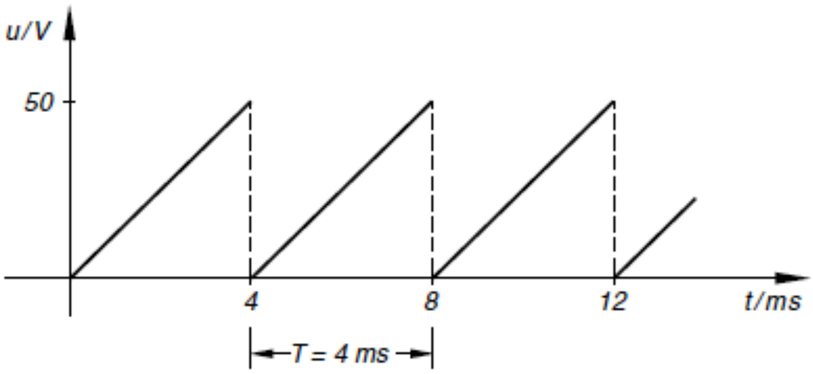
Beispiel:
Ein wichtiges Beispiel liefert die Sinusfunktion $y = \sin x$. Sie ist *periodisch* mit der (primitiven) Periode $p = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad (x \in R)$
Aber auch $-2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ sind Perioden der Sinusfunktion.



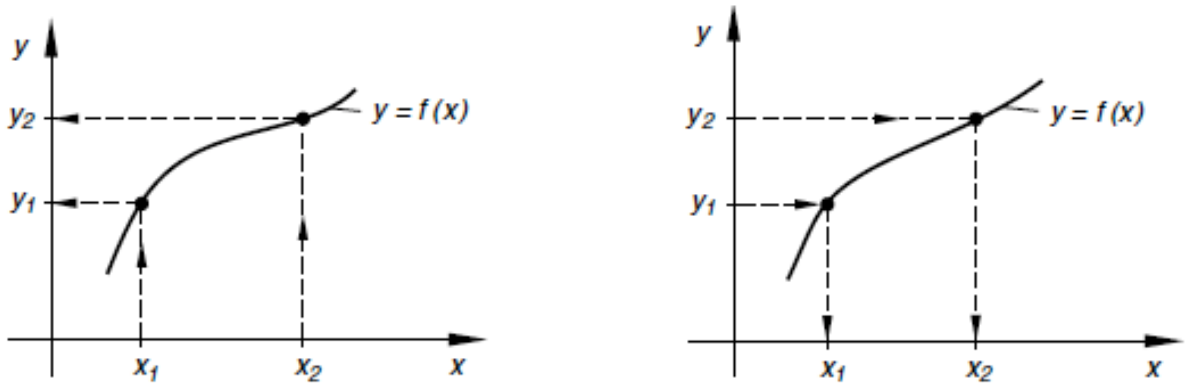
Periodische Funktionen durchlaufen somit ihren *gesamten* Wertevorrat in jedem *Periodenintervall*, d.h. in jedem Intervall der Länge p .

Beispiele:
1) Die vier trigonometrischen Funktionen:
   $y = \sin x$, $y = \cos x$: Periode $p = 2\pi$
   $y = \tan x$, $y = \cot x$: Periode $p = \pi$

2) *Kippspannung*:



5.2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion



Definition 5.8:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *umkehrbar*, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

Bestimmung der Funktionsgleichung einer Umkehrfunktion

1. Man löst zunächst die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der Variablen x auf (diese Auflösung muss natürlich möglich und eindeutig sein!) und erhält so *„die nach der Variablen x aufgelöste Form $x = g(y)$"*:
   $y = f(x) \quad \to \quad x = g(y)$

2. Durch formales Vertauschen der beiden Variablen x und y gewinnt man hieraus schließlich die Umkehrfunktion $y = g(x)$:
   $x = g(y) \quad \to \quad y = g(x)$

Beispiele:
1) $y = 2x + 1 \qquad (x \in R)$
Auflösen der Geradengleichung nach x:

Vertauschen der beiden Variablen:

2) $y = x^2 \qquad (x \geq 0)$
Auflösen der Funktionsgleichung nach x

Vertauschen der beiden Variablen:

Übungsblatt Kapitel 5.2: Allgemeine Funktionseigenschaften

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie Nullstelle und Umkehrfunktion der folgenden Funktionen. Zeichnen Sie die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.

a) $f: y = 2x - 3$ b) $f: y = -3x + 6$ c) $f: y = -\frac{3}{2}x + 9$

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen gerade bzw. ungerade Funktionen sind.

a) $f(x) = -0,25x^6 - 0,25x^4 + x^2 + 1$ b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ d) $f(x) = 0,3x^3 - x$

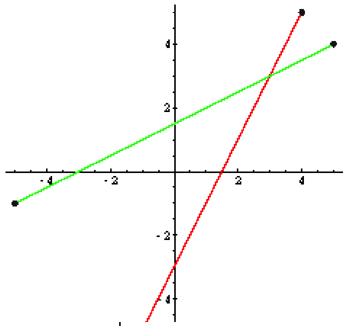
e) $f(x) = |x|$ f) $f(x) = x e^{-x^2}$

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie, ob und ggfs. auf welchem Intervall die folgenden Funktionen monoton steigend bzw. fallend sind.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

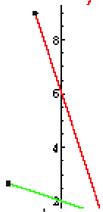
Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
Der Graph von f ist jeweils rot, der Graph von f^{-1} grün dargestellt!



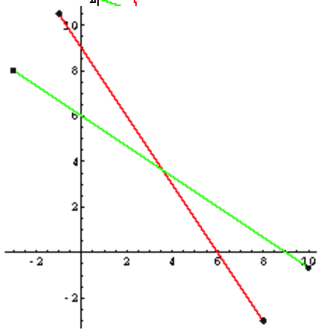
a) Nullstelle: $P(1{,}5;\,0)$

Umkehrfunktion: $f^{-1}: y = 0{,}5x + 1{,}5$



b) Nullstelle: $P(2;\,0)$

Umkehrfunktion: $f^{-1}: y = -\frac{1}{3}x + 2$



c) Nullstelle: $P(6;\,0)$

Umkehrfunktion: $f^{-1}: y = -\frac{2}{3}x + 6$

Aufgabe 2:

a) $f(-x) = -0{,}25(-x)^6 - 0{,}25(-x)^4 + (-x)^2 + 1 = -0{,}25x^6 - 0{,}25x^4 + x^2 + 1 = f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

b) $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

c) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+3} = \dfrac{-x}{x^2+3} = -\dfrac{x}{x^2+3} = -f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

d) $f(-x) = 0{,}3(-x)^3 - (-x) = -0{,}3x^3 + x = -\left(0{,}3x^3 - x\right) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

e) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

f) $f(-x) = x e^{-x^2} = (-x)e^{-(-x)^2} = -\left(x e^{-x^2}\right) = -f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie, ob und ggfs. auf welchem Intervall die folgenden Funktionen monoton steigend bzw. fallend sind.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

Monotonieuntersuchung: $f'(x) = x^2 - 4x - 5$

$f(x)$ steigt, wenn $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \quad f'(x) = x^2 - 4x - 5 = 0$

Satz 5.1:

1) Jede *streng monoton wachsende* oder *fallende* Funktion ist *umkehrbar*.

2) Bei der Umkehrung einer Funktion werden Definitionsbereich und Wertebereich miteinander vertauscht.

3) Zeichnerisch erhält man das Schaubild der Umkehrfunktion durch *Spiegelung* der Funktionskurve an der Geraden $y = x$ (Voraussetzung: *gleicher* Maßstab auf *beiden* Koordinatenachsen).

5.3 Koordinatentransformationen

5.3.1 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems

Das kartesische x, y–Koordinatensystem gehe durch *Parallelverschiebung der Koordinatenachsen* in das ebenfalls rechtwinklige u, v–Koordinatensystem über. Ein beliebiger Punkt P besitze im „alten" x, y-System die Koordinaten $(x\,;y)$ und im „neuen" u, v–System die Koordinaten $(u\,;v)$. Zwischen diesen Koordinaten bestehen dann die folgenden linearen *Transformationsgleichungen*:

$x = u + a$ bzw. $u = x - a$

$y = v + b$ bzw. $v = y - b$

Dabei bedeuten:

(a, b): *Koordinatenursprung* des *neuen* u, v–Koordinatensystems, bezogen auf das *alte* x, y-System.

Die Konstanten a und b besitzen die folgende geometrische Bedeutung:

$|a|$: Abstand der beiden *vertikalen* Koordinatenachsen

$|b|$: Abstand der beiden *horizontalen* Koordinatenachsen

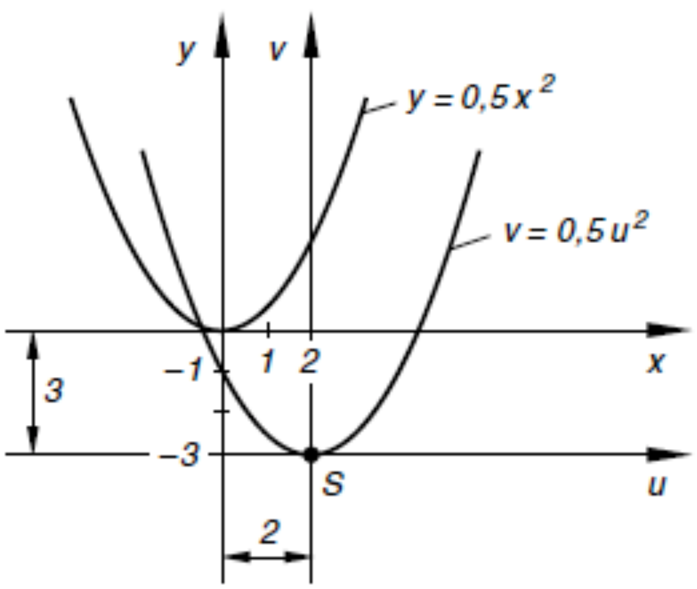
$a > 0$: Verschiebung der y–Achse nach *rechts* (sonst nach *links*)

$b > 0$: Verschiebung der x–Achse nach *oben* (sonst nach *unten*)

Wie verändert sich bei einer solchen Koordinatentransformation die Gleichung einer Funktion $y = f(x)$?

Beispiele:
1) Die Parabel $y = x^2 + 2x + 3$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in die folgende Gestalt bringen:

2) Die Parabel $y = 0{,}5x^2$ soll um zwei Einheiten in Richtung der *positiven* x–Achse und gleichzeitig um drei Einheiten in Richtung der *negativen* y–Achse verschoben werden. Wie lautet die Gleichung der *verschobenen* Parabel im x, y–Koordinatensystem?



5.3.2 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten

Definition 5.9:
Die *Polarkoordinaten* $(r\,;\varphi)$ eines Punktes P der Ebene bestehen aus einer *Abstandskoordinate* r und einer *Winkelkoordinate* φ :

r : *Abstand* des Punktes P vom Koordinatenursprung

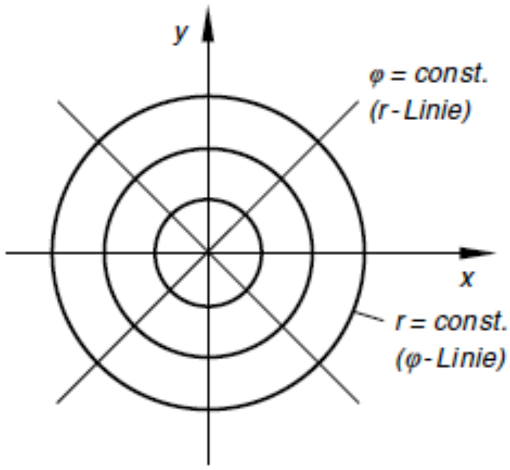
φ : *Winkel* zwischen der *positiven* x–Achse und dem vom Koordinatenursprung O zum Punkt P gerichteten Radiusvektor (Ortsvektor)

Anmerkungen:

1) Für die Abstandskoordinate r gilt *definitionsgemäß* stets $r \geq 0$, d.h. *negative* r–Werte sind *nicht* zugelassen!

2) Der Winkel φ wird positiv gezählt bei Drehung im *Gegenuhrzeigersinn* (mathematisch *positiver* Drehsinn), *negativ* dagegen bei Drehung im *Uhrzeigersinn* (mathematisch *negativer* Drehsinn).
Er ist jedoch nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° (bzw. 2π im Bogenmaß) bestimmt. Man kann sich daher bei der Winkelangabe auf den im Intervall $0° \leq \varphi < 360°$ (bzw. $0° \leq \varphi < 2\pi$) gelegenen *Hauptwert* beschränken.

3) Das Polarkoordinatensystem ist ein *krummliniges* Koordinatensystem. Die Koordinatenlinien bestehen aus *konzentrischen* Kreisen um den Koordinatenursprung O (sog. φ –Linie) und Strahlen, die radial von O nach außen verlaufen (sog. r –Linien).
Koordinatenursprung O und x–Achse werden in diesem Zusammenhang auch wie folgt bezeichnet:
Koordinatenursprung O : Pol
x–Achse: Polarachse

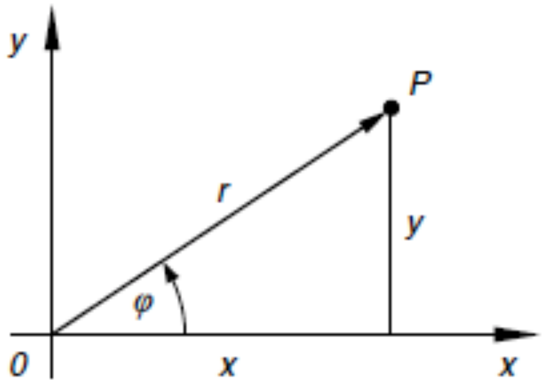


4) Der Koordinatenursprung (Pol) O hat die Abstandskoordinate $r = 0$, die Winkelkoordinate φ dagegen ist *unbestimmt*.

Koordinatentransformation

Polarkoordinaten
→ Kartesische Koordinaten
$x = r \bullet \cos\varphi, \quad y = r \bullet \sin\varphi$

Kartesische Koordinaten
→ Polarkoordinaten
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$



Weiter siehe Kapitel 4.3 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

5.4 Grenzwert und Stetigkeit

5.4.1 Reelle Zahlenfolgen

Definition 5.10:
Eine *Folge* liegt dann vor, wenn jeder natürlichen Zahl n eine bestimmte Zahl a_n zugeordnet werden kann.
Der *Index* „n" stellt die „Platzziffer" dieses Gliedes innerhalb der Folge dar. a_5 ist das fünfte, a_{12} das 12. Glied einer Folge.
Den meisten Folgen liegt ein *Bildungsgesetz* zugrunde, das jedem $n \in N$ über eine Funktion ein bestimmtes Glied a_n zuordnet.

Beispiele:
1.) Der Folge $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \cdots$ liegt das Bildungsgesetz $a_n = \frac{1}{n}$ zugrunde.

2. Der Folge der natürlichen Zahlen $1;\ 2;\ 3 \cdots$ liegt das Bildungsgesetz $a_n = n$ zugrunde.

3. Die Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = 2n + 3$ ergibt die Glieder:

Definition 5.11:
Wenn die Zahl der Glieder begrenzt ist, spricht man von einer *endlichen* Folge. Ist die Zahl der Glieder unbeschränkt, so liegt eine *unendliche* Folge vor.

Definition 5.12:
Eine Folge ist *streng monoton steigend*, wenn jedes nachfolgende Glied immer größer ist als sein Vorgänger, wenn also für alle Glieder gilt:
$a_{n+1} > a_n$.
Sie ist *streng monoton fallend*, wenn $a_{n+1} < a_n$.

Beispiel:
4; 2; 0; -2; -4 ...

Wechselt das Vorzeichen der Glieder, bezeichnet man eine Folge als *alternierend.*

Beispiel:
$\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{3}; \quad +\frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{5}; \quad +\frac{1}{6}\ldots$

5.4.2 Grenzwert einer Folge

Definition 5.13:
Die reelle Zahl g heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Zahlenfolge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - g| < \varepsilon$ ist.

Definition 5.14:
1) Eine Folge (a_n) heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert g besitzt. Symbolische Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$
2) Eine Folge (a_n), die *keinen* Grenzwert besitzt, heißt *divergent*.

Beispiele:
1) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

2) $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

3) $(a_n) = n^3$

5.4.3 Grenzwert einer Funktion

Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Definition 5.15:
Eine Funktion $y = f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Gilt dann für *jede* im Definitionsbereich der Funktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ stets

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

so heißt g der *Grenzwert* von $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Die symbolische Schreibweise lautet:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Beispiele:

1) $y = \sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Linksseitiger Grenzwert:

Rechtsseitiger Grenzwert:

2) $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x-2}$

3) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Definition 5.16:
Besitzt eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)$ für *jede* über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \in D$ gegen eine Zahl g strebt, so heißt g der *Grenzwert der Funktion für* $x \to \infty$.
Die symbolische Schreibweise lautet: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right)$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right)$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$

5.4.4 Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 5.2:
Unter der Voraussetzung, dass die Grenzwerte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ existieren, gelten die folgenden Regeln:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[C \bullet f(x)\right] = C \bullet \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \qquad (C : Konstante)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \bullet g(x)\right] = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \bullet \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)\right]^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(a^{f(x)}\right) = a^{\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)}$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\log_a f(x)\right] = \log_a \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$

Anmerkungen:

1) Die Regeln gelten entsprechend auch für Grenzwerte vom Typ $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
2) Grenzwerte, die zu einem sog. *unbestimmten Ausdruck* vom Typ $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$ führen, können nach der Regel von *Bernoulli-L'Hospital* weiterbehandelt werden.

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3\left(x^2 - 1\right)}{x + 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{\cos x}$

5.4.5 Stetigkeit einer Funktion

Einführendes Beispiel:

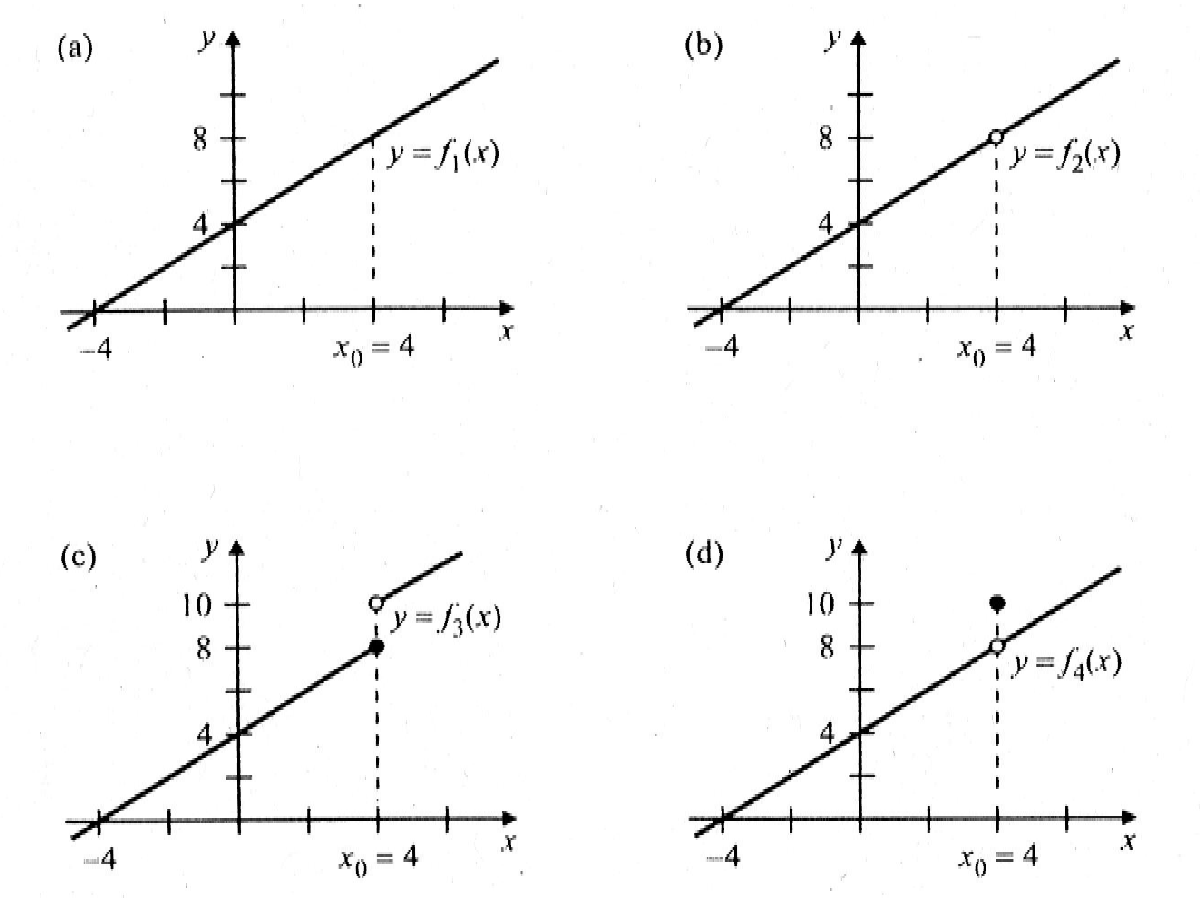
$f_1(x) = x + 4, \quad x \in R$

$f_2(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, \quad x \in R \setminus \{4\}$

$f_3(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{für } -\infty < x \le 4 \\ x + 6 & \text{für } \quad 4 < x < \infty \end{cases}$

$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{für } x \in R \text{ ohne } \{4\} \\ 10 & \text{für } x = 4 \end{cases}$

Worin unterscheidet sich das Verhalten der Funktionswerte an der Stelle $x_0 = 4$?



Definition 5.17:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 (oder in x_0) *stetig*, wenn

1) die Funktion an der Stelle $x = x_0$ definiert ist: $x_0 \in D_f$,
2) der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und eine endliche Zahl g ist:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$,
3) der Funktionswert an der Stelle $x = x_0$ gleich dem Grenzwert g ist:
$f(x_0) = g$.

Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, heißt die Funktion an dieser Stelle *unstetig.*

5.4.6 Unstetigkeiten (Lücken, Pole, Sprünge)

Definition 5.18:
Stellen, in denen eine Funktion die Stetigkeitsbedingung *nicht* erfüllt haben, heißen *Unstetigkeitsstellen*.

Satz 5.3:
Eine Funktion $f(x)$ ist an einer Stelle x_0 *unstetig*, wenn *mindestens eine* der folgenden Aussagen zutrifft:

1. $f(x)$ ist an der Stelle x_0 *nicht* definiert, hat also dort eine Definitionslücke;
2. der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist *nicht* vorhanden;
3. Funktionswert $f(x_0)$ und Grenzwert g sind zwar vorhanden, jedoch voneinander *verschieden*, d.h. es gilt: $f(x_0) \neq g$.

1) Hebbare Lücke

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Nennerpolynom:

Grenzwert:

2) Unendlichkeitsstelle (Pol)

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

Nennerpolynom:

Grenzwert:

3) Endlicher Sprung (Sprungstetigkeit)

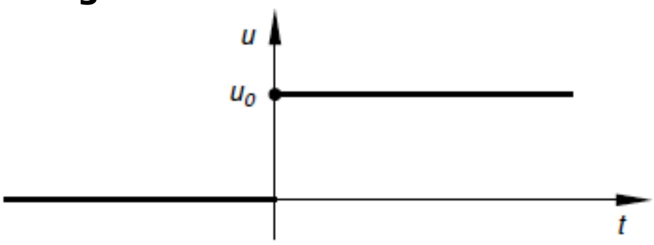
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert:

Rechtsseitiger Grenzwert:

4) Sprungfunktion der Regelungstechnik

$$u = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Linksseitiger Grenzwert:

Rechtsseitiger Grenzwert:

Übungsblatt Kapitel 5.4: Grenzwert und Stetigkeit

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie jeweils das 2. und das 5. Glied der Folge mit dem Bildungsgesetz

   i) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

   ii) $a_n = n^2 - 6$

   iii) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b) Vorgegeben seien einige Glieder einer Folge. Geben Sie das Bildungsgesetz an:

   i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

   ii) $10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$

Aufgabe 2:

a) Wie lautet das Bildungsgesetz der Folgen?

   i) $28, 20, 12, 4, -4, -12, \ldots$

   ii) $1, -1, 3, -1, 5, -1, \ldots$

b) Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder der rekursiv definierten Folge
   $a_1 = 3, a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$
   (Es reichen drei Stellen hinter dem Komma.)

Aufgabe 3:

a) Bilden Sie aus $(a_n) = (n^2)$ und $(b_n) = \left(\frac{3}{n}\right)$ die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolge. Geben Sie jeweils die ersten drei Glieder und das Bildungsgesetz an.

b) Fassen Sie die Folgen $(a_n) = \left(n^2 + \frac{2n^4 + 1}{n^3}\right)$ bzw. $(b_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ als Summen- bzw. Produktfolgen auf, und schreiben Sie sie in der Form $(c_n + d_n)$ bzw. $(e_n \bullet f_n)$ mit passenden Folgen $(c_n), (d_n), (e_n)$ und (f_n).

Aufgabe 4:
Welche der folgenden Folgen sind (streng) monoton steigend oder (streng) monoton fallend?

a. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

b. (a_n) mit $a_n = \begin{cases} n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

c. (a_n) mit $a_n = 2n - \frac{1}{n}$

Aufgabe 5:

a) Ist die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

- eine Nullfolge oder
- eine divergente Folge?

b) Ist die Folge $2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2\frac{1}{1000}, 2\frac{1}{1000}, 2\frac{1}{1000}, \ldots$

- eine Nullfolge,
- eine (konvergente) Folge mit von 0 verschiedenem Grenzwert,
- eine divergente Folge?

Aufgabe 6:
Berechnen Sie – wenn möglich – den Grenzwert der Folge (a_n) für:

a) $a_n = \frac{5n}{2n-1}$ b) $a_n = \frac{8+n}{3n-5}$ c) $a_n = \frac{3-2n^2}{n^2}$

d) $a_n = \frac{3-2n^2}{n^3}$ e) $a_n = \frac{3-2n^3}{n^2}$ f) $a_n = \frac{n^2+3}{n^3+1}$

Hinweis: Vorsicht beim Umgang mit den Grenzwertregeln!

Aufgabe 7:
Zeigen Sie, dass f mit $f(x) = x - 2$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, dass f mit $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 2 & \text{für } x < 2 \\ 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig ist.

Aufgabe 9:
Zeigen Sie: $f(x) = |x|,\ x \in R$ ist eine stetige Funktion.

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) i) $a_2 = \frac{3}{2}, a_5 = \frac{6}{5}$ oder $a_2 = 1\frac{1}{2}, a_5 = 1\frac{1}{5}$

ii) $a_2 = -2, a_5 = 19$

iii) $a_2 = \frac{9}{4}, a_5 \approx 2{,}4883$

b) i) $a_n = \frac{n}{n+1}$

ii) $a_n = 12 - 2n$

Aufgabe 2:

a) i) $a_n = a_{n-1} - 8$ für $n = 2, 3, \ldots$ bzw. $a_n = a_1 - (n-1) \bullet 8, n \in N$

ii) $a_n = \begin{cases} -1 & \textit{für n gerade} \\ n & \textit{für n ungerade} \end{cases}$

b) $a_1 = 3, a_2 = 1{,}833, a_3 = 1{,}462, a_4 = 1{,}415, a_5 = 1{,}414$

Aufgabe 3:

a) *Summenfolge:* $(c_n) = (a_n + b_n)$

$c_1 = 1 + \frac{3}{1} = 4, \quad c_2 = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}, \quad c_3 = 9 + 1 = 10$ Bildungsgesetz: $c_n = n^2 + \frac{3}{n}$

Differenzfolge: $(c_n) = (a_n - b_n)$

$c_1 = 1 - \frac{3}{1} = -2, \quad c_2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \quad c_3 = 9 - 1 = 8$ Bildungsgesetz: $c_n = n^2 - \frac{3}{n}$

Produktfolge $(c_n) = (a_n \bullet b_n)$

$c_1 = 1 \bullet \frac{3}{1} = 3, \quad c_2 = 4 \bullet \frac{3}{2} = 6, \quad c_3 = 9 \bullet 1 = 9$ Bildungsgesetz: $c_n = n^2 \bullet \frac{3}{n} = 3n$

Quotientenfolge $(c_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, $b_n \neq 0$ für alle $n \in N$

$c_1 = \frac{1}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}, \quad c_3 = \frac{27}{3} = 9$ Bildungsgesetz: $c_n = \frac{n^2}{\frac{3}{n}} = \frac{n^3}{3}$

b) (a_n) ist Summenfolge aus $(c_n) = (n^2)$ und $(d_n) = \left(\frac{2n^4 + 1}{n^3}\right)$;

(d_n) ist Quotientenfolge aus $(2n^4 + 1)$ und (n^3).

Entsprechend gilt: $(b_n) = (e_n \bullet f_n)$ mit $(e_n) = \left((-1)^n\right)$ und $(f_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$

Aufgabe 4:

a. Die Folgenglieder haben abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, die Folge ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

b. $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots\right)$ ist weder monoton steigend noch monoton fallend, also nicht monoton.

c. $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - \frac{1}{n+1} - 2n + \frac{1}{n} = 2n + 2 - \frac{1}{n+1} - 2n + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 2$

für alle $n \in N$ (da $n+1 > n$, ist $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$), die Folge ist also streng monoton steigend.

Aufgabe 5:

a) Die Folge ist divergent.

b) Die Folgenglieder „bleiben bei $2\frac{1}{1000}$ stehen", die Folge ist somit keine Nullfolge (0 ist nicht Grenzwert), eine konvergente Folge mit Grenzwert $2\frac{1}{1000}$, nicht divergent (denn sie ist ja konvergent).

Aufgabe 6:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{2}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8+n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n}+1}{3-\frac{5}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2} - 2\right) = -2$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3} - \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 - 0 = 0$$

e) Es ist $a_n = \frac{3-2n^3}{n^2} = \frac{3}{n^2} - 2n$, die Folgenglieder werden betragsmäßig beliebig groß, der Grenzwert der Folge existiert nicht.

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Aufgabe 7:

i) $x_0 \in D_f$

ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0$

iii) $f(2) = 0$

Alle Bedingungen sind erfüllt, also ist $f(x) = x - 2$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 8:

i) $x_0 \in D_f$

ii) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht

iii) $f(2) = 2$

Bedingung i) ist nicht erfüllt, also ist $f(x) = x - 2$ an der Stelle 2 nicht stetig.

Aufgabe 9:

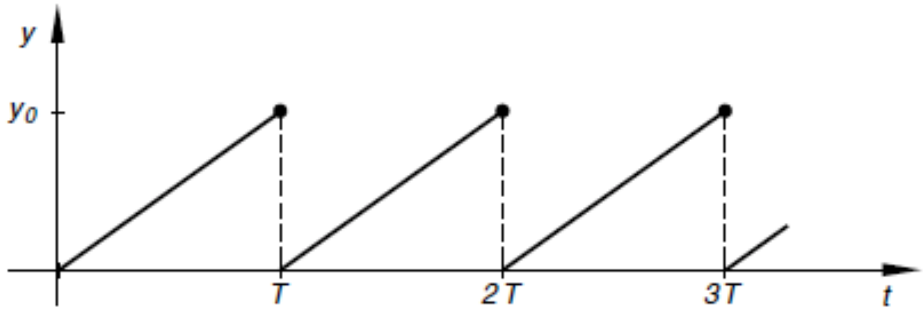
$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0 \\ -x & \textit{für } x < 0 \end{cases}$$

i) $D_f = R$, $f(x)$ ist in jedem $x_0 \in D_f$ stetig

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} x = \begin{cases} x_0 & \textit{für } x > x_0 \\ -x_0 & \textit{für } x < x_0 \end{cases}$ iii) $f(x_0) = |x_0|$ für alle $x_0 \in R$

Alle Bedingungen sind erfüllt, also ist $f(x)$ global stetig.

5) Periodische Funktion mit unendlich vielen Sprungstellen
Der in der *ABBILDUNG* skizzierte „Sägezahnimpuls" besitzt an den Stellen $T, 2T, 3T, \ldots$ jeweils eine *Sprungunstetigkeit*. An diesen Stellen fällt der Impuls von seinem *Maximalwert* y_0 auf den Wert 0.



5.5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Definition 5.19:
Funktionen vom Typ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ werden als *ganzrationale Funktionen* oder *Polynomfunktionen* bezeichnet $(x \in R)$.
Die (reellen) Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen *Polynomkoeffizienten* $(a_n \neq 0)$, der höchste Exponent n in der Funktionsgleichung bestimmt den *Polynomgrad*.

5.5.1 Konstante und lineare Funktionen

Definition 5.20:
Polynomfunktionen vom Grade 0 bezeichnet man als *konstante Funktionen*: $y = const. = a$
Polynomfunktionen vom Grade 1 bezeichnet man als *lineare Funktionen*:
$y = a_1 x + a_0$ oder $y = mx + b$, $m, b \in R, m \neq 0$
Eine spezielle lineare Funktion ist die *identische Funktion*: $y = f(x) = x$

Beispiel:
Es ist das Bild der Funktion $3y - 2x = 3$ zu zeichnen.

Normalform:

Geradengleichung durch zwei Punkte
Sind zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben mit $x_1 \neq x_2$, so beschreiben diese eindeutig eine *lineare Funktion*.

Zum Bestimmen der Parameter m und b müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$y_1 = m \bullet x_1 + b$$
$$y_2 = m \bullet x_2 + b$$

lösen. Es ergeben sich $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und $b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \bullet x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$.

Beispiel:
Gesucht ist die Geradengleichung für die *lineare Funktion* durch $P_1 = (1,1)$ und $P_2 = (3,5)$.

Das Gleichungssystem lautet:

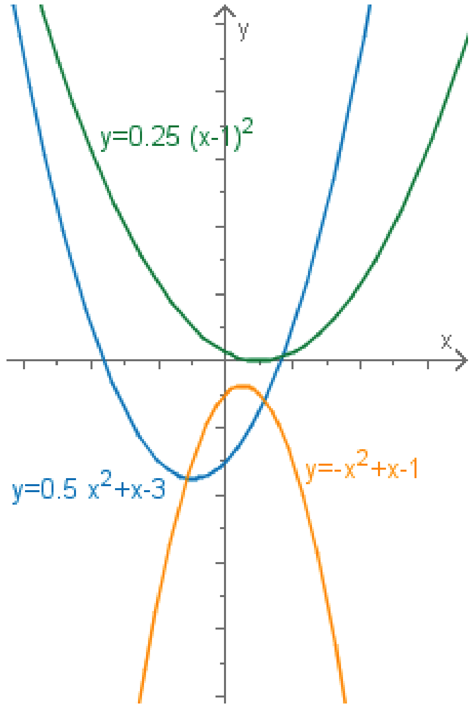
Einsetzen ergibt:

Nullstellen:
Eine konstante Funktion besitzt keine Nullstelle oder unendlich viele (wenn die Funktion die x-Achse ist), einzige Nullstelle einer linearen Funktion ist
$x_0 = -\frac{b}{m}$

Beispiel:
$f(x) = 2x - 1$

5.5.2 Quadratische Funktionen

Definition 5.21:
Polynomfunktionen vom Grade 2 bezeichnet man als *quadratische Funktionen*: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ oder $y = ax^2 + bx + c$



Nullstellen:
Je nach Lösungsverhalten der zugehörigen quadratischen Gleichung hat die Funktion keine, eine oder zwei Nullstellen.

Beispiel:
$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

5.5.3 Polynomfunktionen höheren Grades

Abspaltung eines Linearfaktors
Besitzt die Polynomfunktion $f(x)$ vom Grade n an der Stelle x_1 eine Nullstelle, ist also $f(x_1)=0$, so ist die Funktion auch in der Form
$f(x)=(x-x_1)\bullet f_1(x)$
darstellbar. Der Faktor $(x-x_1)$ heißt *Linearfaktor*, $f_1(x)$ ist das sog. *1. reduzierte Polynom* vom Grade $n-1$.

Polynomdivision

Beispiel:
Das Polynom $x^3+6x^2+3x-10$ soll durch $x+5$ geteilt werden:

Nullstellen einer Polynomfunktion

Satz 5.4: Fundamentalsatz der Algebra:
Eine Polynomfunktion n–ten Grades besitzt höchstens n (reelle) Nullstellen.

Beispiele:
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad n = 3$
Drei (reelle) Nullstellen in $x_1 = -2, x_2 = 1$ und $x_3 = 3$

(2) $f(x) = x^3 + 0{,}1x^2 - 4{,}81x - 4{,}225, \quad n = 3$
Drei (reelle) Nullstellen in $x_1 = x_2 = -1{,}3$ und $x_3 = 3$

Produktdarstellung einer Polynomfunktion

Produktdarstellung einer Polynomfunktion
Besitzt eine Polynomfunktion n-ten Grades genau n (reelle) Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so lässt sich die Funktion auch in Form eines *Produktes* wie folgt darstellen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$
Die n Faktoren $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_n$ werden als *Linearfaktoren* der Produktdarstellung bezeichnet.

Ist die Anzahl k der (reellen) Nullstellen kleiner als der Polynomgrad n, so besitzt die Produktdarstellung die folgende spezielle Form:
$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k) \bullet f^*(x)$
Dabei ist $f^*(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade $n - k$ ohne (reelle) Nullstellen.

Beispiele:
1) $f(x) = 2x^2 + 7x - 22$
Nullstellen: $x_1 = 2, \quad x_2 = -5{,}5$
Produktdarstellung: $f(x) = 2(x - 2) \bullet (x + 5{,}5)$

2) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$
Nullstellen: $x_1 = -1$ *(doppelte Nullstelle),* $x_2 = 1$
Produktdarstellung: $f(x) = 3(x + 1)(x + 1)(x - 1) = 3(x + 1)^2(x - 1)$

3) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$
Nullstellen: $x_1 = 3$ *(Einfache (reelle) Nullstelle)*
Produktdarstellung: $f(x) = 2(x - 3) \bullet f^*(x)$
$f^*(x)$ ist dabei eine Polynomfunktion 2. Grades ohne reelle Nullstellen.
Durch Polynomdivision findet man $f^*(x) = x^2 + 1$
Somit gilt: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6 = 2(x - 3)(x^2 + 1)$

5.5.4 Horner-Schema und Nullstellenberechnung

Beispiel:
$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 7;\ x \in R$

umformen:

Berechnung für $x = 5$:

Horner-Schema:

$x = 5$					$= f(5)$

Aufgabe:
Bestimmen Sie für $f(x) = x^3 + x - 1$ mit Hilfe des Horner-Schemas $f(3)$.

Horner-Schema:

Man beachte: Tritt in $f(x)$ die Potenz x^k nicht auf, so ist im Schema der Faktor $a_k = 0$ zu setzen.

Das Horner-Schema bei der Polynomdivision

Polynomdivision: Berechnen Sie $\left(2x^3-3x^2+x+3\right):(x-3)$

Es gilt also: $\left(2x^3-3x^2+x+3\right):(x-3)$

Satz 5.5:
Bei der Darstellung eines Polynoms $f(x)$ in der Form $f(x)=(x-x_0)g(x)+r$ liefert das Horner-Schema die Koeffizienten von $g(x)$ und die Zahl $r=f(x_0)$.

Nullstellenberechnung mit dem Horner-Schema

Beispiel:
Bestimmung der Nullstellen der Funktion $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$

Durch Probieren findet man die Nullstelle:

Horner-Schema:

also
Die restlichen Nullstellen sind nun leicht durch Lösen der quadratischen Gleichung zu berechnen:

5.6 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 5.22:
Funktionen, die als Quotient zweier Polynomfunktionen $g(x)$ und $h(x)$ darstellbar sind, heißen *gebrochen rationale Funktionen*:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

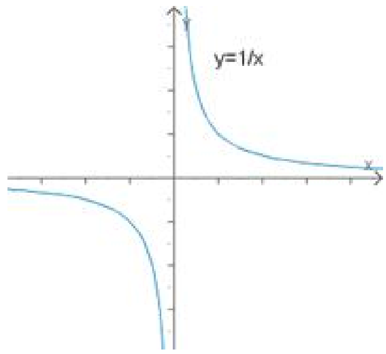
Eine gebrochen rationale Funktion ist für jedes $x \in R$ definiert mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms.

Man unterscheidet

$n > m$: *echt* gebrochen rationale Funktion
$n \leq m$: *unecht* gebrochen rationale Funktion

Beispiele:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ *(Einheitshyperbel)*

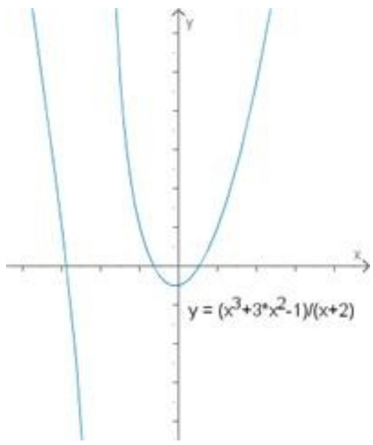


2) $f(x) = \frac{\sqrt{2}x^2 + 1}{x - \sqrt{7}}$

Jede unecht gebrochene *rationale Funktion* kann mittels Polynomdivision als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenen *rationalen Funktion* dargestellt werden.

Beispiel:

$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x + 2}$



Nach der Polynomdivision von Zähler durch Nenner erhalten wir:

5.7 Potenz- und Wurzelfunktionen

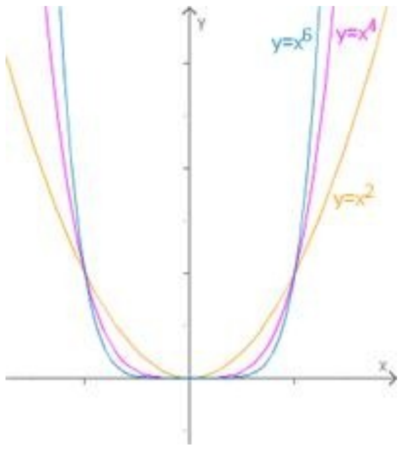
5.7.1 Potenzfunktionen

Definition 5.23:
Funktionen der Form $y = x^n, n \in N$ bezeichnet man als *Potenzfunktionen*.
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

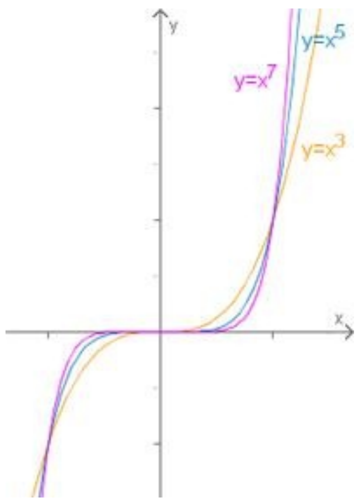
Fall 1: n ist gerade

Dann gilt für ein $n = 2k$: $(-x)^{2k} = \left((-x)^2\right)^k = x^{2k}$.

Damit ist die Funktion in diesem Fall gerade.
Sie ist
streng monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0]$ und
streng monoton wachsend im Intervall $[0, \infty)$.



Fall 2: n ist ungerade
Dann ist auch die Potenzfunktion ungerade.
Sie ist streng monoton wachsend für alle $x \in R$.



Nullstellen:
Die einzige Nullstelle der *Potenzfunktion* ist $x_0 = 0$.

Übungsblatt 5.5 Ganzrationale Funktionen – Teil 1

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 geht.
a) $P_1(1;1),\ P_2(3;5)$ b) $P_1(-2;4),\ P_2(2;2)$ c) $P_1(1;2),\ P_2(-1;-3)$

Aufgabe 2:
Eine Taxifahrt kostet 2,50 € Grundgebühr und 0,96 € pro gefahrenem Kilometer.
a) Stellen Sie den Fahrpreis $f(x)$ als Funktion der Strecke x dar.
b) Wie viel kostet eine 6 km lange Fahrt?
c) Wie weit kann man mit 10 EUR fahren?

Aufgabe 3:
Ein Öltank enthält 1000 l Heizöl. Pro Tag werden 35 l verbraucht.
a) Stellen Sie die Restmenge $R(t)$, die nach t Tagen übrig ist, als Funktion von t dar.
b) Wie viel Öl ist nach 14 Tagen noch im Tank?
c) Wann ist der Tank leer?

Aufgabe 4:
Zeichnen die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall mithilfe einer Wertetabelle und berechnen Sie die Nullstellen.
a) $f(x)=x^2-2\quad [-2;2]$
b) $f(x)=x^2-4x\quad [-1;5]$
c) $f(x)=-2x^2-3x-2\quad [-3;1]$

Aufgabe 5:
Die Faustregel für die Berechnung des Anhaltewegs (Fahrschulformel) lautet:
$$a=\frac{3\bullet v}{10}+\left(\frac{v}{10}\right)^2$$
(v: Geschwindigkeit in km/h, a: Anhalteweg in m).
Erstellen Sie eine Wertetabelle für v = 0, 10, 20, ... 100 km/h und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
Wie schnell darf man höchstens fahren, wenn der Anhalteweg 100 m betragen darf?

Aufgabe 6:
Der Benzinverbrauch eines Autos wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit. Bei einer bestimmten Fahrzeugtype wurden im höchsten Gang folgende Werte gemessen (v: Geschwindigkeit in km/h, $B(v)$: Benzinverbrauch in l/100 km):

v	60	80	100
$B(v)$	5,0	5,8	7,4

Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Funktion $B(v)$. Wie viel Benzin verbraucht das Auto bei einer Geschwindigkeit von 130 km/h?

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -0{,}5x + 3$

c) $y = 2{,}5x - 0{,}5$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = 0{,}96x + 2{,}50$

b) $8{,}26\ EUR$

c) ca. $7{,}8\ km$

Aufgabe 3:

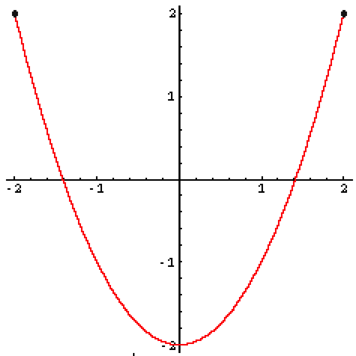
a) $R(t) = 1.000 - 35t$

b) $510\ l$

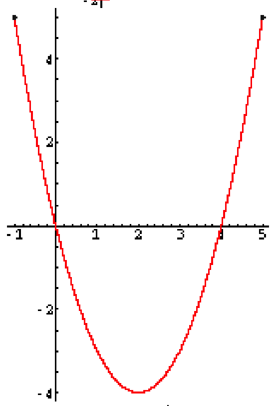
c) nach ca. 29 Tagen

Aufgabe 4:

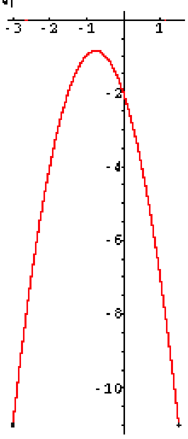
a) Nullstelle: $P_1\left(-\sqrt{2};\, 0\right);\quad P_2\left(\sqrt{2};\, 0\right)$



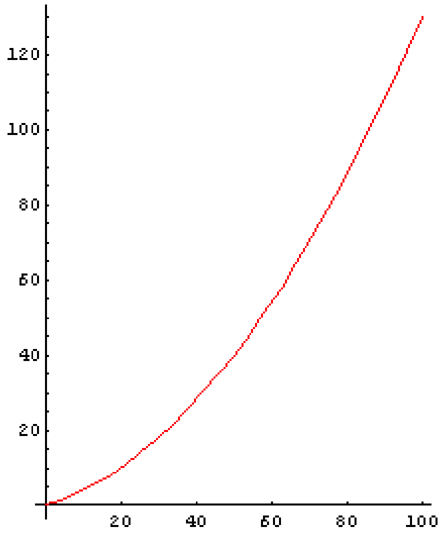
b) Nullstelle: $P_1(0;\, 0);\quad P_2(4;\, 0)$



c) keine Nullstelle



Aufgabe 5:
a)



b) ca. 86 km/h

Aufgabe 6:
$B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 7{,}4; \quad B(130) = 11{,}3l$

a_2	a_1	a_0	R.S.		
3600	60	1	5	$\bullet 6.400$	$\bullet 1.000$
6400	80	1	5,8	$\bullet(-3.600)$	
10000	100	1	7,4		$\bullet(-360)$

a_2	a_1	a_0	R.S.	
3600	60	1	5	
0	9.600	280	1.112	$\bullet$ 240
0	24.000	640	2.336	$\bullet(-96)$

a_2	a_1	a_0	R.S.
3600	60	1	5
0	9.600	280	1.120
0	0	5.760	42.624

$$5.760\,a_0 = 42.624 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{42.624}{5.760} = 7{,}40$$

$$9.600\,a_1 + 280 \bullet 7{,}40 = 1.112 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1.120 - 280 \bullet 7{,}4}{9.600} = -0{,}10$$

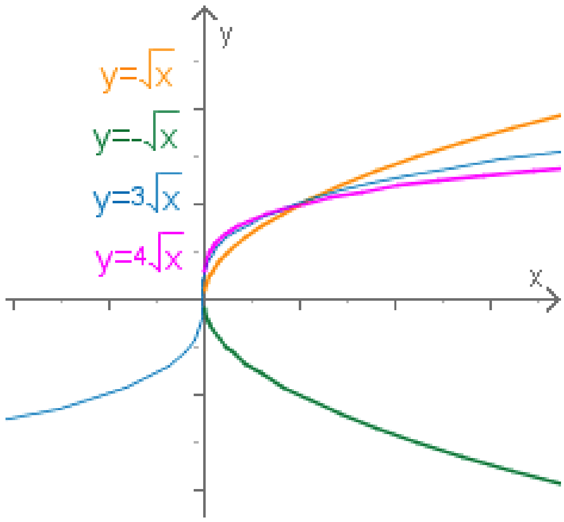
$$3.600\,a_2 - 60 \bullet (-0{,}10) + 7{,}4 = 5$$

$$\Rightarrow \quad 3.600\,a_2 = 5 + 5{,}95 - 7{,}4$$

$$a_2 = \frac{3{,}55}{3.600} = 0{,}001$$

5.7.2 Wurzelfunktionen

Definition 5.24:
Die Umkehrfunktion zur Potenzfunktion $y = x^n$ ist die *Wurzelfunktion* $f(x) = \sqrt[n]{x}$.



Ist n gerade, so ist die Potenzfunktion nicht eindeutig umkehrbar.

Falls n ungerade, so ist die *Wurzelfunktion* auf ganz R umkehrbar.

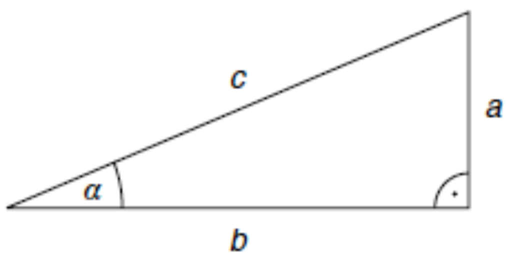
Eigenschaften der Wurzelfunktion:
Für n gerade:
Die *Wurzelfunktion* ist streng monoton wachsend und wächst unbeschränkt für $x \to \infty$.
Für n ungerade handelt es sich wegen $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ um eine ungerade Funktion.

Nullstellen:
Die einzige Nullstelle der *Wurzelfunktion* liegt bei $x_0 = 0$.

5.8 Trigonometrische Funktionen

5.8.1 Grundbegriffe

Definition der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck



a: *Gegenkathete*
b: *Ankathete*
c: *Hypotenuse*

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Beispiele:

1) Der obere Rand eines zylinderförmigen Gasometers ($h = 30m$) erscheint einem Beobachter A unter einem Winkel von $\alpha = 23^o$ zur Horizontalen (Erhebungswinkel). Wie weit ist der obere Rand vom Beobachter entfernt? (Augenhöhe vernachlässigen)

Lösung:

2) Eine 10 m lange Leiter ist an eine Hauswand gelehnt. Das untere Ende ist 2,5 m von der Mauer entfernt. Wie groß ist der Neigungswinkel?

Lösung:

3) Jemand erblickt die Spitze eines Schornsteins aus 125 m Entfernung unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 24^o 20'$. Wie hoch ist der Schornstein, wenn die Augenhöhe 1,4 m beträgt?

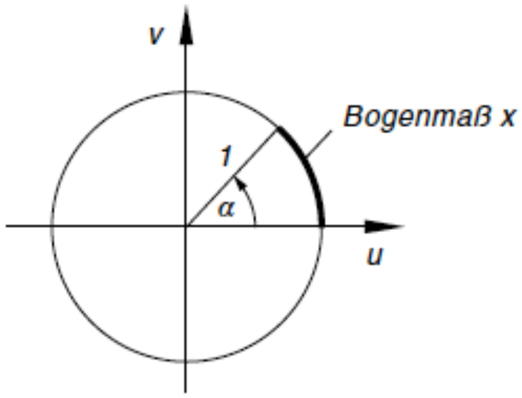
Lösung:

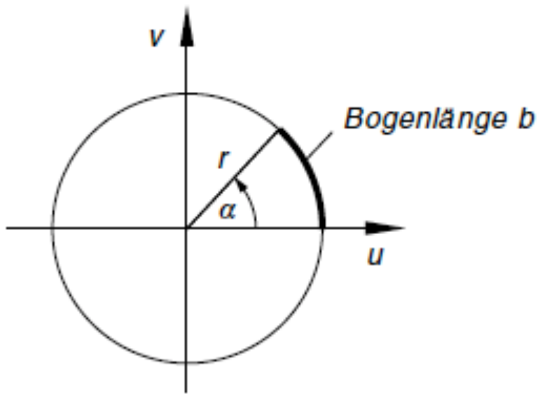
4) Ein Beobachter B steht am Strand 6 m über dem Wasserspiegel und sieht die Spitze eines 45 m hohen Leuchtturmes unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 3^o 20'$. Wie weit ist der Beobachter vom Leuchtturm entfernt?

Lösung:

Winkelmaße (Grad- und Bogenmaß)

Definition 5.25:
Unter dem *Bogenmaß* x eines Winkels α (im Gradmaß) verstehen wir die Maßzahl der Länge des Bogens, der dem Winkel α im Einheitskreis (Radius $r=1$) gegenüberliegt.





Anmerkung:
Das *Bogenmaß* x lässt sich auch etwas allgemeiner definieren.
Ist b die Länge des Bogens, der in einem Kreis mit Radius r dem Winkel α gegenüberliegt, so gilt: $x = \frac{Bogenlänge}{Radius} = \frac{b}{r}$

Zwischen dem Bogenmaß x und dem Gradmaß α besteht die lineare Beziehung $\frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360^0} = \frac{\pi}{180^0}$

Beispiele:

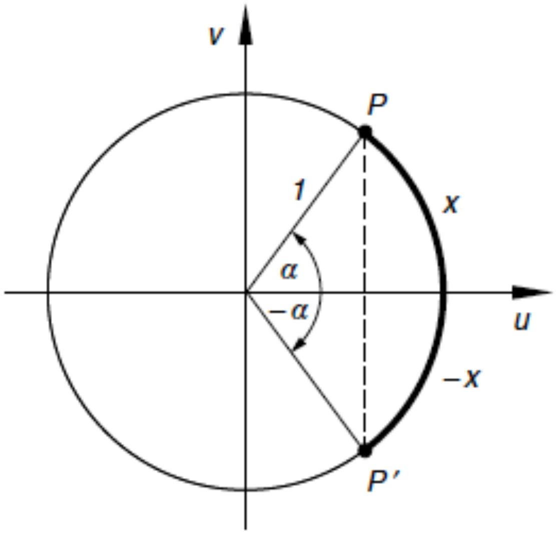
1) Umrechnung vom Gradmaß α ins Bogenmaß $x = \frac{\pi}{180^0}\alpha$:

α	$30°$	$45°$	$90°$	$127{,}5°$	$180°$	$225°$	$310°$
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$2{,}2253$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$5{,}4192$

2) Umrechnung vom Bogenmaß x ins Gradmaß $\alpha = \frac{180^0}{\pi}x$:

x	$0{,}43$	$0{,}98$	$1{,}61$	$2{,}08$	π	$4{,}12$
α	$26{,}64°$	$56{,}15°$	$92{,}25°$	$119{,}18°$	$180°$	$236{,}06°$

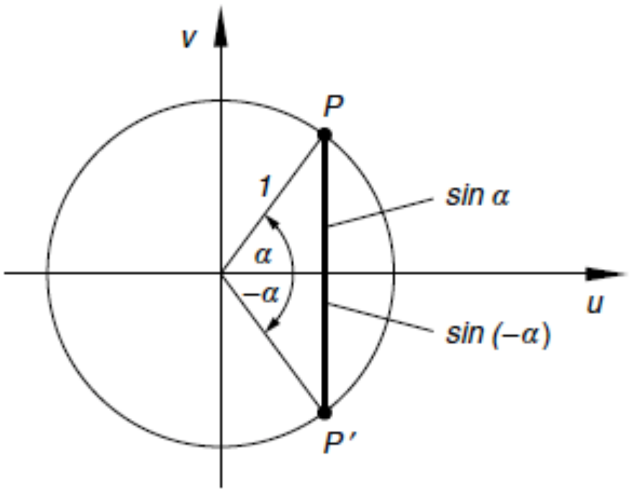
Drehsinn eines Winkels



Darstellung der Sinusfunktion im Einheitskreis

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Ordinate\ von\ P}{1} = Ordinate\ von\ P$$

Definition 5.26:
Unter dem *Sinus* eines beliebigen Winkels α versteht man den Ordinatenwert des zu α gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.



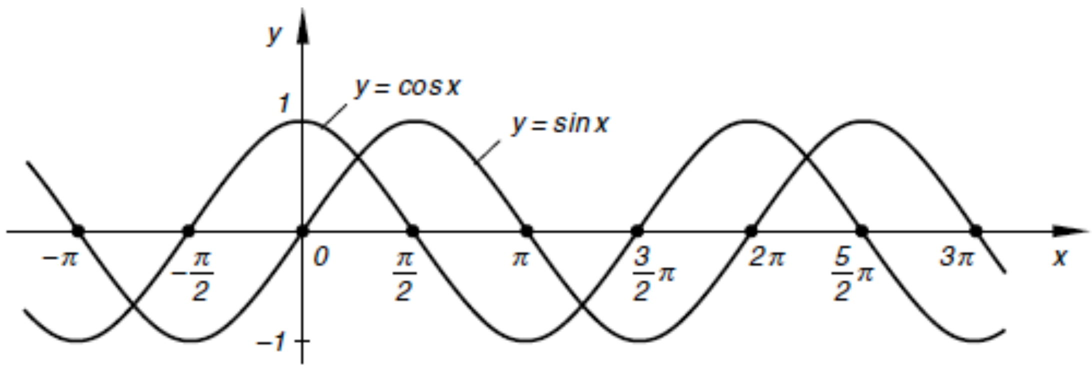
Darstellung der Kosinusfunktion im Einheitskreis

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Abszisse\ von\ P}{1} = Abszisse\ von\ P$$

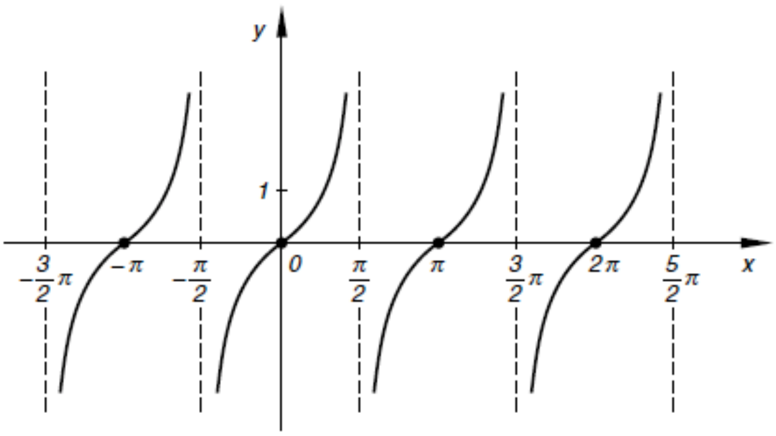
5.8.2 Sinus und Kosinusfunktion

Eigenschaften:

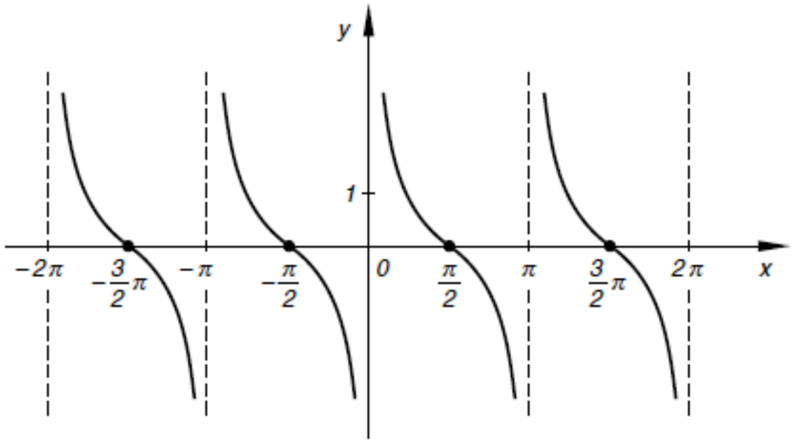
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \le y \le 1$	$-1 \le y \le 1$
Periode	2π	2π
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_k = k \bullet \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$
Relative Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \bullet 2\pi$	$x_k = k \bullet 2\pi$
Relative Minima	$x_k = \frac{3}{2}\pi + k \bullet 2\pi$	$x_k = \pi + k \bullet 2\pi$



5.8.3 Tangens und Kotangensfunktion



Tangensfunktion: $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \; x \in D_{\tan}$



Kotangensfunktion: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \in D_{\cot}$

Eigenschaften:

	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Definitionsbereich	$x \in R$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$	$x \in R$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = k \bullet \pi$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Periode	π	π
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_k = k \bullet \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$	$x_k = k \bullet \pi$
Senkrechte Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$	$x = k \bullet \pi$

5.8.3 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

„*Trigonometrischer Pythagoras*" im Bogenmaß

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ für alle } x \in R$$

***Additionstheoreme* für die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \qquad \text{für alle } x, y \in R$$

$\Rightarrow$ (zusammen mit dem *„trigonometrischen Pythagoras"*):

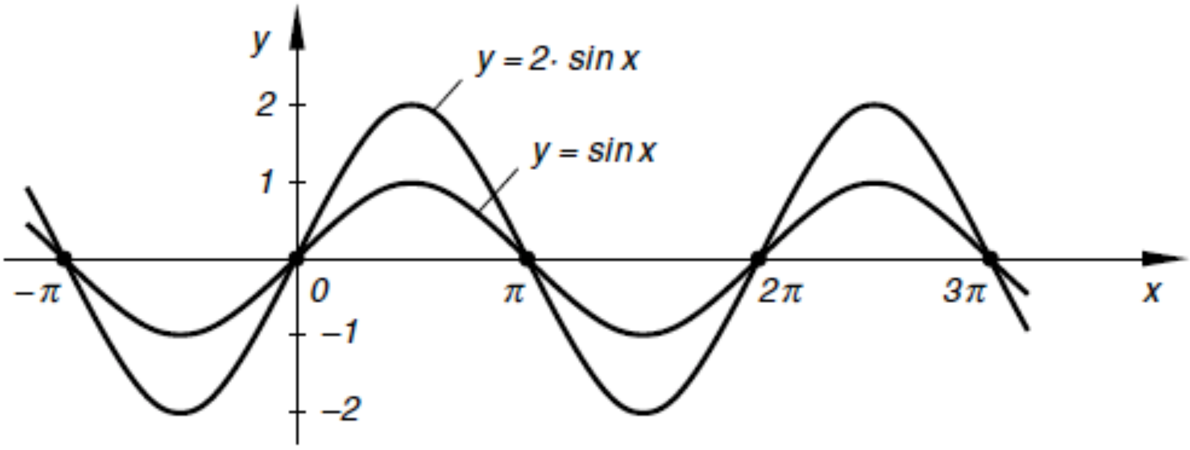
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right] \qquad \text{und} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2x)\right]$$

5.8.4 Anwendung: Harmonische Schwingung

Bedeutung der Konstanten a $\quad (y = \sin x \rightarrow y = a \bullet \sin x)$

Der Faktor a in der Funktion $y = a \bullet \sin x$ bewirkt eine Veränderung der *Funktionswerte* gegenüber der Ausgangsfunktion $y = \sin x$. Der *neue* Wertebereich lautet: $-a \leq y \leq a$. Die Sinuskurve wird also in der y–Richtung gedehnt (falls $a > 1$) oder gestaucht (falls $a < 1$).

Beispiel:
$y = 2 \bullet \sin x$: Die Ordinatenwerte haben sich verdoppelt.
Wertebereich: $-2 \leq y \leq 2$



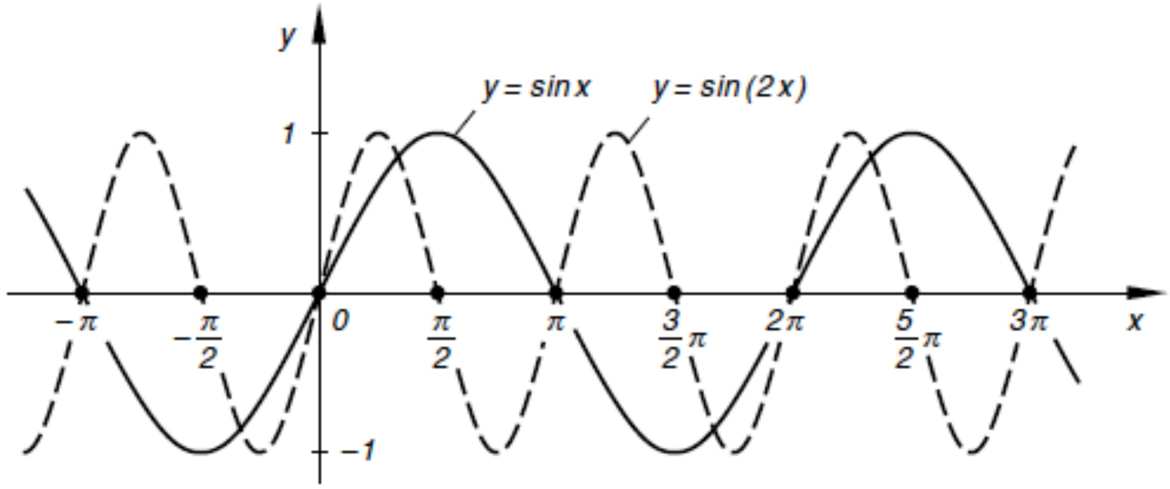
Bedeutung der Konstanten b $\quad (y = \sin x \rightarrow y = \sin(bx))$

Der Faktor b im Argument der Sinusfunktion $y = \sin(bx)$ verändert gegenüber der Ausgangsfunktion $y = \sin x$ die Periode:

$y = \sin(bx)$: $\qquad$ Periode $p = \dfrac{2\pi}{b}$ $\qquad$ (vorher: $p = 2\pi$)

Beispiel:

$y = \sin(2x)$: Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$



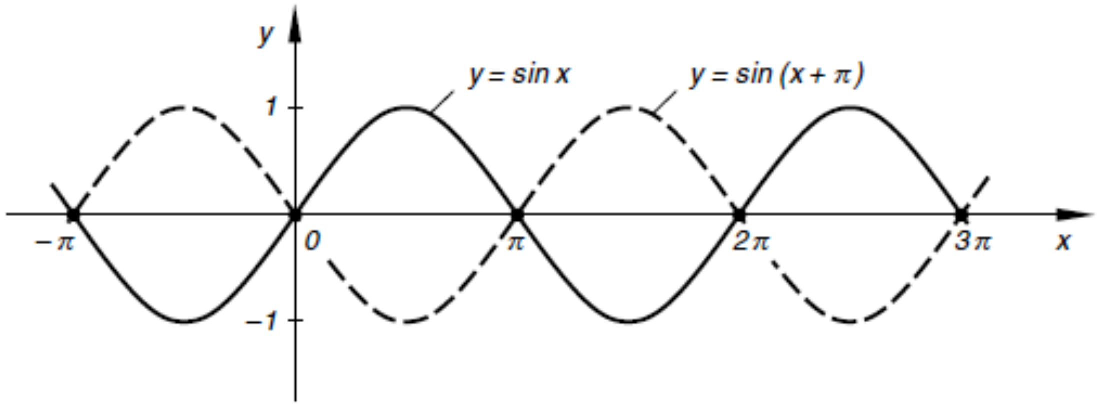
Bedeutung der Konstanten c $\left(y = \sin x \rightarrow y = \sin(x+c)\right)$

Der Faktor c in der Sinusfunktion $y = \sin(x+c)$ bewirkt eine *Verschiebung* der Sinuskurve $y = \sin x$ längs der x–Achse. Während die erste *nicht-negative* Nullstelle von $y = \sin x$ bekanntlich an der Stelle $x_0 = 0$ liegt, befindet sich die entsprechende Nullstelle von $y = \sin(x+c)$ an der Stelle $x_0 = -c$ (man setzt das Argument der Funktion gleich Null):

$$y = \sin\underbrace{(x+c)}_{0} = \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -c$$

Beispiele:

1) $y = \sin(x+\pi)$: Die Funktion ist gegenüber der Sinusfunktion $y = \sin x$ um π Einheiten nach *links* verschoben (die Kurve „beginnt" an der Stelle $x_0 = -\pi$). Sie lässt sich auch durch die Funktionsgleichung $y = -\sin x$ beschreiben (an der x–Achse *gespiegelte* Sinusfunktion). Dies folgt auch unmittelbar aus dem *Additionstheorem* der Sinusfunktion mit $x_1 = x$ und $x_2 = \pi$): $y = \sin(x+\pi) = \sin x \bullet \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \cos x \bullet \underbrace{\sin\pi}_{0} = -\sin x$



Übungsblatt 5.5 Ganzrationale Funktionen – Teil 2

Aufgabe 1:

a) Das Polynom $x^3 + 3x^2 - x - 3$ soll durch
   i) $x + 3$
   ii) $x + 1$ geteilt werden.

b) Das Polynom $x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 54x - 45$ soll durch
   i) $x + 1$ und
   ii) $x + 5$ geteilt werden.

c) Das Polynom $x^7 - 1$ soll durch $x - 1$ geteilt werden.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 3$ mit Hilfe des Horner-Schemas $f(-2)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ durch Probieren und berechnen Sie dann alle übrigen Nullstellen:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 11x - 9$

b) $f(x) = 2x^3 - 16x^2 + 42x - 36$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme

(1) $\sin(x + \pi) = -\sin x$

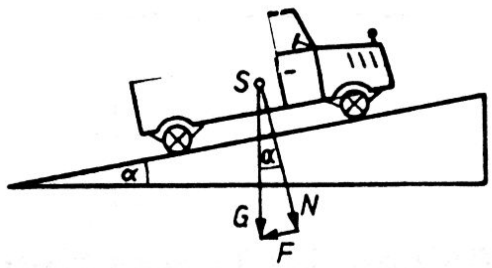
(2) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

b) Geben Sie die Definitionslücken der Tangens- bzw. Kotangensfunktion an.

Aufgabe 5:

Ein Lastwagen steht auf einer ansteigenden Straße. Der Steigungswinkel beträgt $\alpha = 9^o 30'$. Das Gewicht (Gewichtskraft) des Wagens beträgt $G = 45.000 N$.

1. Wie groß ist der Normaldruck N auf die Straße?
2. Wie groß ist die Kraft F, die längs der Straße wirkt?



Aufgabe 6:
Berechnen Sie

1. $\left(-a^2\right)\left(-a\right)^3\left(-a^3\right)\left(-a\right)^2$

2. $a^2 \bullet a^3 \bullet a^{(-5)}$

3. $\left[\left(-a\right)^3\right]^{-2}$

4. $-a^2 \bullet \dfrac{a^n + a^n}{\left[-a^2 - \left(-a\right)^3\right] \bullet a^n}$

5. $\left(\dfrac{a^4 b^6}{c^2 d^3}\right)^2 \bullet \left(\dfrac{a^3 b^2}{c^5 d^6}\right) : \left(\dfrac{a^{10} b^{10}}{c^{10} d^{15}}\right)$

6. $\left[\left(-a^{-1}\right)^3\right]^{-5}$

7. $2a^2\left(a^6\right)^3 \bullet \dfrac{e\left(e^n\right)}{e^{n+1}}$

8. $\dfrac{a^n - 16a^{n-2}}{a^{n+1} - 8a^n + 16a^{n-1}}$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie

1. $x = \log_5 25$

2. $(\ln x)^2 = 1$

3. $x^{\ln x} = 10$

4. $\log_a x = \dfrac{1}{2}\left(\log_a 24 - \log_a 8 - \log_a 3\right)$

5. $\ln x = \dfrac{1}{3}\left(\ln 132 - \ln 6 - \ln 11 + \ln 2\right)$

6. $e^{-\ln x^2} = 100$

7. $5^{2\lg\left(x^2-1\right)} = 10$

8.

9. $\log_b \sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) i) $\left(x^3+3x^2-x-3\right):\left(x+3\right)=x^2-1$

ii) $\left(x^3+3x^2-x-3\right):\left(x+1\right)=x^2+2x-3$

b) i) $\left(x^4+6x^3-4x^2-54x-45\right):\left(x+1\right)=x^3+5x^2-9x-45$

ii) $\left(x^4+6x^3-4x^2-54x-45\right):\left(x+5\right)=x^3+x^2-9x-9$

c) $\left(x^7-1\right):\left(x-1\right) \quad =x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Aufgabe 2:

	1	-2	1	-5	-3	
	0	-2	8	-18	46	
$x=-2$	1	-4	9	-23	43	$=f(-2)$

Aufgabe 3:

a) $x_0=-1$

	1	-1	-11	-9	
	0	-1	+2	+9	
$x=-1$	1	-2	-9	0	$=f(-1)$

$f(x)=(x+1)\left(x^2-2x-9\right)$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad =+\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2+9} \qquad x_1=1+\sqrt{10}, \qquad x_2=1-\sqrt{10}$$

b) $x_0=2$

	2	-16	42	-36	
	0	4	-24	36	
$x=2$	2	-12	18	0	$=f(2)$

$f(x)=(x-2)\left(2x^2-12x+18\right)$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad =+\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2-9} \qquad x_1=x_2=3$$

Aufgabe 4:

a) (1) $\sin(x+\pi)=\sin x\cos\pi+\cos x\sin\pi=\sin x\bullet(-1)+\cos x\bullet 0=-\sin x$

(2) $\cos(x+\pi)=\cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=\cos x\bullet(-1)+\sin x\bullet 0=-\cos x$

b) Die Definitionslücken der Tangens- und Kotangensfunktion sind die Nullstellen der zugehörigen Nennerfunktion, also die Nullstellen der Kosinus- bzw. Sinusfunktion:

$\sin x=0$ für $x=k\bullet\pi, \quad k\in Z$

$\cos x=0$ für $x=\frac{2k+1}{2}\bullet\pi, \quad k\in Z$

Aufgabe 5:

1. Mit der Kosinusfunktion kann man den Normaldruck berechnen. Bei einer Gewichtskraft $G = 45.000N$ ist $N = 44.383N$:

$$\cos\alpha = \frac{N}{G} \quad \Rightarrow \quad N = G \bullet \cos\alpha = 45.000N \bullet \cos 9^o 30^I = 45.000N \bullet 0{,}9863 = 44.383N$$

2. Mit der Sinusfunktion kann man die Kraft F ausrechnen, die längs der Straße wirkt:

$$\sin\alpha = \frac{F}{G} \quad \Rightarrow \quad F = G \bullet \sin\alpha = 45.000N \bullet \sin 9^o 30^I = 45.000N \bullet 0{,}1650 = 7.427N$$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie

1. $\left(-a^2\right)\left(-a\right)^3\left(-a^3\right)\left(-a\right)^2 \quad = \left(-a\right)^2\left(-a\right)^3\left(-a\right)^3\left(-a\right)^2 \quad = \left(-a\right)^{2+3+3+2} \quad = -a^{10}$

   Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis und verschiedenen Exponenten

2. $a^2 \bullet a^3 \bullet a^{(-5)} \quad = a^{2+3-5} \quad = a^0 \quad = 1$

   Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis und verschiedenen Exponenten; die Potenz „0"

3. $\left[\left(-a\right)^3\right]^{-2} \quad = \left(-a\right)^{-3\bullet 2} \quad = \left(-a\right)^{-6} \quad = \dfrac{1}{a^6}$

4. $-a^2 \bullet \dfrac{a^n + a^n}{\left[-a^2 - \left(-a\right)^3\right] \bullet a^n} \quad = -a^2 \bullet \dfrac{2a^n}{\left[-a^2 + a^3\right] \bullet a^n} \quad = -a^2 \bullet \dfrac{2}{-a^2\left(1-a\right)} \quad = \dfrac{2}{1-a}$

5. $\left(\dfrac{a^4 b^6}{c^2 d^3}\right)^2 \bullet \left(\dfrac{a^3 b^2}{c^5 d^6}\right) : \left(\dfrac{a^{10} b^{10}}{c^{10} d^{15}}\right) \quad = \left(\dfrac{a^8 b^{12}}{c^4 d^6}\right) \bullet \left(\dfrac{a^3 b^2}{c^5 d^6}\right) : \left(\dfrac{a^{10} b^{10}}{c^{10} d^{15}}\right) \quad = \left(\dfrac{a^{11} b^{14}}{c^9 d^{12}}\right) \bullet \left(\dfrac{c^{10} d^{15}}{a^{10} b^{10}}\right)$

   $= a \bullet b^4 \bullet c \bullet d^3$

6. $\left[\left(-a^{-1}\right)^3\right]^{-5} \quad = \left(-a^{-1}\right)^{3\bullet(-5)} \quad = \left(-a^{-1}\right)^{-15} \quad = -a^{(-1)\bullet(-15)} \quad = -a^{15}$

   Potenzieren von Potenzen

7. $2a^2\left(a^6\right)^3 \bullet \dfrac{e\left(e^n\right)}{e^{n+1}} \quad = 2a^2 \bullet a^{6\bullet 3} \bullet \dfrac{e^1 \bullet e^n}{e^{n+1}} \quad = 2a^{2+18} \bullet \dfrac{e^{n+1}}{e^{n+1}} \quad = 2a^{20}$

   Potenzieren und Multiplikation von Potenzen

8. $\dfrac{a^n - 16a^{n-2}}{a^{n+1} - 8a^n + 16a^{n-1}} \quad =$ Binomische Formeln

$(a-b)(a+b) \quad = a^2 - b^2$

$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

mit $a = a, b = 4$:

$\left(a-4\right)\left(a+4\right) = a^2 - 16$

$\left(a-4\right)^2 = a^2 - 8a + 16$

$$= \frac{a^{n-2}\left(a-4\right)\left(a+4\right)}{a^{n-1}\left(a-4\right)\left(a-4\right)} \quad = \frac{1}{a} \bullet \frac{a+4}{a-4}$$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie

1. $x = \log_5 25 \quad = \log_5(5 \bullet 5) \quad = \log_5 5 + \log_5 5 \quad = 2\log_5 5 \quad = 2 \bullet 1 \quad = 2$
   Multiplikation von Logarithmen, allgemeine Beziehungen

2. $(\ln x)^2 = 1 \quad => \ln x = \sqrt{1} \quad => \ln x = \pm 1 \quad => x_1 = e; x_2 = \frac{1}{e}\ bzw.\ e^{-1}$

3. $x^{\ln x} = 10 \quad => \left(e^{\ln x}\right)^{\ln x} = 10 \quad => e^{\ln x \bullet \ln x} = 10 \quad => \ln x \bullet \ln x = \ln 10$
   $(\ln x)^2 = \ln 10 \quad => \ln x = \sqrt{\ln 10} \quad => x = e^{\sqrt{\ln 10}}$

4. $\log_a x = \frac{1}{2}(\log_a 24 - \log_a 8 - \log_a 3) \quad = \quad \frac{1}{2}\log_a \frac{24}{8 \bullet 3} \quad = \frac{1}{2}\log_a 1$
   $=> \quad \log_a x - \frac{1}{2}\log_a 1 = 0 \quad => \log_a x^2 - \log_a 1 = 0 \quad => \log_a x^2 = 0 \quad => x = 1$

5. $\ln x = \frac{1}{3}(\ln 132 - \ln 6 - \ln 11 + \ln 2) \quad = \frac{1}{3}\ln\frac{132 \bullet 2}{6 \bullet 11} \quad = \frac{1}{3}\ln\frac{264}{66} \quad = \frac{1}{3}\ln 4$
   $=> \ln x = \frac{1}{3}\ln 4 \quad => x = e^{\frac{1}{3}\bullet \ln 4} \quad => x = \sqrt[3]{4}$

6. $e^{-\ln x^2} = 100 \quad => \quad \frac{1}{e^{\ln x^2}} = 100 \quad => \quad e^{\ln x^2} = 0{,}01$
   $=> \ln x^2 = \ln(0{,}01) \quad => x^2 = 0{,}01 \quad => x = 0{,}1$

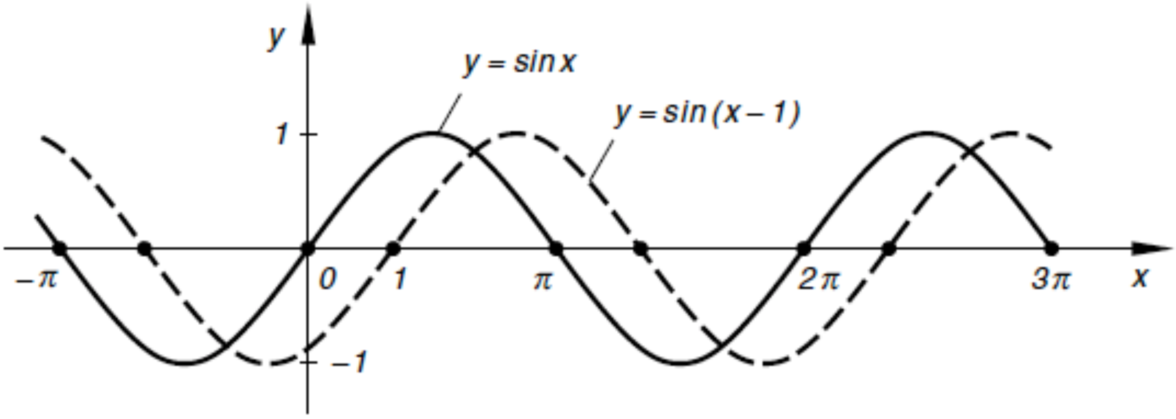
7. $5^{2\lg\left(x^2-1\right)} = 10 \quad => \left(10^{\lg 5}\right)^{2\lg\left(x^2-1\right)} = 10 \quad => 10^{2\lg 5 \bullet \lg\left(x^2-1\right)} = 10$
   $=> 2\lg 5 \bullet \lg\left(x^2-1\right) = \lg 10 = 1 \quad => \lg\left(x^2-1\right) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{\lg 5}$
   $x^2 - 1 = 10^{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lg 5}} \quad => x^2 = 1 + 10^{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lg 5}} \quad => x^2 = \sqrt{1 + 10^{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lg 5}}} \quad => x_{1,2} = \pm 2{,}4884$

8. $\log_b \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$ Radizieren von Logarithmen, allgemeine Beziehungen:

   $\log_b \sqrt[n]{\frac{1}{b}} \quad = \frac{1}{n} \bullet \log_b \frac{1}{b} \quad = \frac{1}{n} \bullet (-1) = -\frac{1}{n}$

2) $y = \sin(x-1)$

Diese Funktion ist gegenüber der elementaren Sinusfunktion $y = \sin x$ um eine Einheit nach rechts verschoben, die „1. Nullstelle" liegt also bei $x_0 = -1$.



Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion $y = a \cdot \sin(bx + c)$

Die drei Kurvenparameter $a > 0, b > 0$ und c in der *allgemeinen* Sinusfunktion $y = a \cdot \sin(bx + c)$ bewirken insgesamt gegenüber der *elementaren* Sinusfunktion $y = \sin x$ die folgenden *Veränderungen*:

Periode:	$p = 2\pi / b$	(vorher: $p = 2\pi$)
1.Nullstelle:	$x_0 = -c / b$	(vorher: $x_0 = 0$)
Wertebereich:	$-a \le y \le a$	(vorher: $-1 \le y \le 1$)

Beispiel:

$y = 2 \cdot \sin(0{,}5x + 0{,}5\pi)$

Periode:

1.Nullstelle:

Wertebereich:

5.9 Exponentialfunktionen

Definition 5.27:
Eine Funktion vom Typ $y = a^x$ mit positiver Basis $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt *Exponentialfunktion*.

5.9.1 Eigenschaften der Exponentialfunktionen

	$y = a^x \quad (0 < a < 1)$	$y = a^x \quad (a > 1)$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$0 < y < \infty$	$0 < y < \infty$
Monotonie	Streng monoton fallend	Streng monoton steigend
Asymptoten	$y = 0$ für $x \to +\infty$	$y = 0$ für $x \to -\infty$
Nullstellen	Keine	Keine
Extrema	Keine	Keine

Exponentialfunktionskurven schneiden die y-Achse immer bei $y = 1$ unabhängig von a.
In der Praxis tritt die *e-Funktion* besonders häufig auf: $y = e^x \quad e = 2{,}718281\ldots$ *Eulersche Zahl.*
Die e-Funktion hat die nützliche Eigenschaft, dass sie ihrer Ableitung gleich ist: $\frac{de^x}{dx} = e^x$ und $\int e^x dx = e^x + C$

5.9.2 Rechenregeln für Potenzen

a) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis und verschiedenen Exponenten: $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$

b) Multiplikation von Potenzen mit ungleicher Basis und gleichem Exponenten: $a^x \bullet b^x = (a \bullet b)^x$

c) Potenzieren von Potenzen: $\left(a^x\right)^y = a^{x \bullet y}$

d) Division von Potenzen mit gleicher Basis: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

e) Division von Potenzen mit gleichem Exponenten: $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

f) Potenzen mit negativer Basis: $(-1)^{2x} = +1; \quad (-1)^{2x+1} = -1; \quad (-1)^{2x-1} = -1$

g) Potenzen mit negativem Exponenten: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

h) Die Potenz „0": $a^0 = 1$

Beispiele:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

2) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} =$

3) $(a+b)^{-2} =$

4) $7 \bullet 7^3 =$

5) $\left(x^2\right)^5 =$

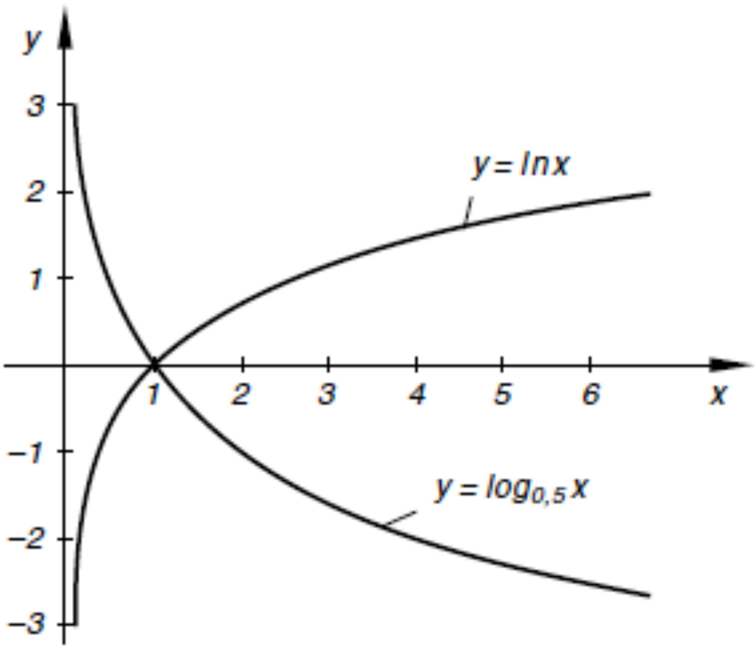
6) $\frac{\left(9a^2 \bullet b^3\right)^3}{\left(3a \bullet b^2\right)^3} =$

5.10 Logarithmusfunktionen

Definition 5.28:
Unter der *Logarithmusfunktion* $y = \log_a x$ versteht man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

5.10.1 Eigenschaften

	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$0 < x < \infty$
Wertebereich	$0 < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Monotonie	$0 < a < 1$: Streng monoton fallend $a > 1$: Streng monoton steigend	
Asymptoten	$y = 0$ für $x \to +\infty$ (x-Achse)	$x = 0$ für $x \to 0$ (y-Achse)
Nullstellen	Keine	$x_0 = 1$
Extrema	Keine	Keine



5.10.2 Verschiedene Logarithmus- bzw. Basissysteme

Beispiele:

$10^3 = 1.000 \Rightarrow 3 = \log_{10} 1.000$ (häufige Abkürzung $\log_{10} x = \lg x$)

$2^3 = 8 \Rightarrow 3 = \log_2 8$

$3^3 = 27 \Rightarrow 3 = \log_3 27$

Für das praktische Arbeiten mit Logarithmen haben sich nur zwei Systeme durchgesetzt:

a) Die natürlichen Logarithmen mit der Basis $e = 2{,}71828\ldots$ (Abk.: $\ln x$) und

b) die dekadischen (10er-) Logarithmen mit der Basis 10 (Abkürzung häufig $\lg x$, seltener $\log x$)

5.10.3 Rechenregeln für Logarithmen

Allgemein gilt:

$\log_a a = 1$ für beliebiges a

$\log_a 1 = 0$ für beliebiges a

$\log_a (a)^n = n$ für beliebiges a

a) Multiplikation von Logarithmen: $\log_a (b \bullet c) = \log_a b + \log_a c$

b) Division von Logarithmen: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

c) Potenzieren von Logarithmen: $\log_a b^n = n \bullet \log_a b$

d) Radizieren von Logarithmen: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \bullet \log_a b$

Beispiel:
Die *Halbwertszeit* τ einer *radioaktiven* Substanz ist der Zeitraum, in dem genau die *Hälfte* der ursprünglich vorhandenen Atomkerne (n_0) zerfallen ist. Aus dem *Zerfallsgesetz* $n(t) = n_0 \bullet e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$ folgt

$$n(t) = n_0 \bullet e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} n_0 \quad \text{und somit} \quad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

Durch *Logarithmieren* auf beiden Seiten erhält man schließlich

Die Halbwertszeit τ einer radioaktiven Substanz ist somit zur Zerfalls-konstanten λ *umgekehrt proportional*.

6 Differentialrechnung

6.1 Differenzierbarkeit

6.1.1 Die Steigung von Funktionen

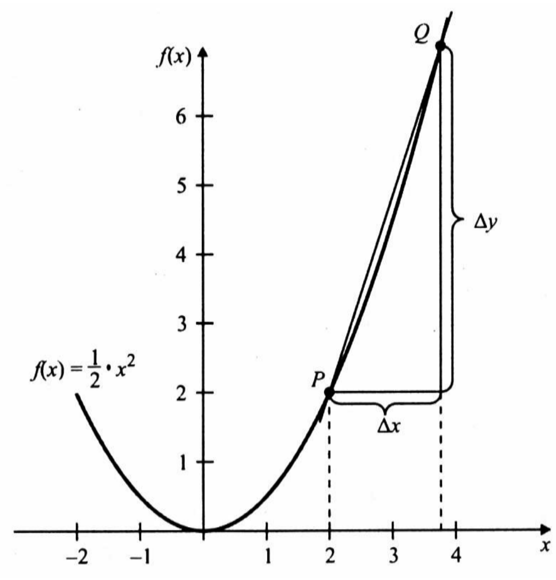
Definition 6.1:
Eine Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle definiert, d.h. für alle Werte der Form $x_0 + \Delta x$, wobei Δx eine Variable ist, deren Betrag hinreichend klein ist. Die Größe Δx heißt der *Zuwachs der unabhängigen Variablen* x. Der entsprechende Zuwachs der Funktionswerte ist dann $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Der Quotient dieser beiden Größen $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ heißt *Differenzenquotient.*

Besitzt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$ einen Grenzwert, dann heißt dieser Grenzwert die *Ableitung der Funktion* f an der Stelle x_0. Man benutzt das Symbol $f^I(x_0)$: $f^I(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Definition 6.2.:
Die Funktion f besitze an der Stelle x_0 die Ableitung $f^I(x_0)$. Dann heißt die Gerade t mit $t(x) = f(x_0) + f^I(x_0)(x - x_0)$ die *Tangente an* f *im Punkt* $(x_0, f(x_0))$.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Zu bestimmen seien die Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 2$ und die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkte $P = (2, f(2))$.



6.1.2 Definition der Differenzierbarkeit

Definition 6.3:
Gegeben sei die Funktion $f: D_f \to R$ und $x_0 \in D_f$. f sei auf einer Umgebung von x_0 definiert, d.h. es existiert $U(x_0) \subset D_f$.
Die Funktion f heißt dann an der Stelle x_0 *differenzierbar*, wenn

$$f^I(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Dabei ist der Grenzwert $f^I(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nicht existiert, heißt die Funktion f an der Stelle x_0 *nicht differenzierbar.*

6.1.3 Beispiele für differenzierbare Funktionen

Beispiele:
1) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^2, x \in D_f = R$.
Differenzenquotient von f an einer beliebigen Stelle $x_0 \in D_f$:

Übergang zum Grenzwert:

2) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3, x \in D_f = R$.
Differenzenquotient von f an einer beliebigen Stelle $x_0 \in D_f$:

Übergang zum Grenzwert:

3) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}, x \in D_f = R \setminus \{0\}$.
Differenzenquotient:

Übergang zum Grenzwert:

6.1.4 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 6.1:
Ist eine Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Beispiele:
1) Gegeben sei f_1 mit $f_1(x) = |x|, x \in D_f = R$
Differenzenquotient von f_1 an der Stelle 0:

2) Gegeben sei f_2 mit $f_2(x) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$
Differenzenquotient von f_2 an der Stelle 0:

6.1.5 Die Ableitungsfunktion

Definition 6.4:

a) Ist f eine auf $D_f \in R$ definierte Funktion, so bezeichnet man die Menge A aller derjenigen $x \in D_f$, an denen f differenzierbar ist – also die Ableitung $f^I(x)$ an der Stelle x existiert – als *Differenzierbarkeitsbereich* von f; also:
$A = \{x \mid x \in D_f \wedge f \text{ ist differenzierbar an der Stelle } x\}$

b) Ist f eine Funktion mit dem Differenzierbarkeitsbereich A, so heißt die auf $A = D_{f^I}$ definierte Funktion $f^I : x \to f^I(x)$ die *Ableitungsfunktion* zu f.

c) Ist f eine auf dem offenen Intervall $(a,b) \in R$ definierte Funktion, so heißt f *auf* (a,b) *differenzierbar*, wenn f an jeder Stelle $x \in (a,b)$ differenzierbar ist.

Beispiele:

1) Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist auf R differenzierbar: $D_{f^I} = R$

Die Ableitungsfunktion von f ist f^I mit $f^I(x) = 2x$.

Wir erhalten hier als Ableitung keine Zahl, sondern einen Funktionsterm. Setzt man in die Variable dieses Terms eine Zahl ein, so erhält man die Ableitung von f an der betreffenden Stelle, z.B. $f^I(3) = 6, f^I(-4) = -8$ usw.

2) Für f mit $f(x) = x^3$ gilt: $D_{f^I} = R$ und $f^I(x) = 3x^2$

3) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist definiert und differenzierbar auf $R \setminus \{0\}$

und es gilt: $f^I(x) = -\frac{1}{x^2}$

6.1.6 Höhere Ableitungen

Definition 6.5:
Ist eine Funktion f auf einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in D_{f^I}$ differenzierbar und besitzt die auf $U(x_0)$ definierte Ableitungsfunktion f^I ihrerseits an der Stelle x_0 eine Ableitung $\left(f^I\right)^I(x_0) = f^{II}(x_0)$, so heißt diese Zahl $f^{II}(x_0)$ die *zweite Ableitung von f an der Stelle x_0*; man sagt in diesem Fall: f ist an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar.
Durch $\left(f^I\right)^I$ ist eine neue Funktion gegeben, deren Definitionsbereich die Menge aller Elemente $x \in D_{f^I}$ ist, an denen f differenzierbar ist. Die Funktion $\left(f^I\right)^I$ wird der Einfachheit halber mit f^{II} bezeichnet und heißt die *zweite Ableitungsfunktion von f.*

Beispiele:
a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = 2x$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in R \setminus \{0\}$)

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

6.2 Berechnung von Ableitungen

6.2.1 Differentiationsregeln

Konstantenregel:
Es sei f eine konstante Funktion mit $f(x)=c$ für alle $x \in R$. Dann ist f auf R differenzierbar und es gilt: $f^{I}(x)=0$ *für alle* $x \in R$

Beispiel:
Die Funktion f mit $f(x)=-10$ für alle $x \in R$ ist eine konstante Funktion.
Also gilt: $f^{I}(x)=$

Potenzregel:
Es sei f mit $f(x)=x^{n}, x \in D_f = R, n \in R$. Dann ist f auf R differenzierbar und es gilt: $f^{I}(x)=n \bullet x^{n-1}$ *für alle* $x \in R$

Beispiele:
a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=x^{5}, x \in D_f = R$

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x}, x \in D_f = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$

Summen- und Differenzregel:
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x differenzierbar.
Dann ist auch $f+g$ und $f-g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \pm g)^{I}(x)=f^{I}(x) \pm g^{I}(x)$$

Für den Differenzierbarkeitsbereich D^{I} von $f \pm g$ gilt dann:

$$D^{I} = D_{f^{I}} \cap D_{g^{I}}$$

Beispiele:
a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=x^{3}+\sqrt{x}, x>0$.

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}, x>0$.

Produktregel:
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x differenzierbar.
Dann ist auch $f \bullet g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \bullet g)^I(x) = f^I(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g^I(x)$$

Für den Differenzierbarkeitsbereich D^I von $f \bullet g$ gilt dann:

$$D^I = D_{f^I} \cap D_{g^I}$$

Beispiele:
a) Gegeben sei die Funktion h mit $h(x) = x^3\sqrt{x}$.

b) Gegeben sei die Funktion h mit $h(x) = \left(x + x^n\right)\left(\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Konstanter Faktor:
Die Funktion g sei an der Stelle x differenzierbar, $c \in R$. Dann ist auch $h = c \bullet g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(c \bullet g)^I(x) = c \bullet g^I(x)$$

Für den Differenzierbarkeitsbereich D^I von h gilt:

$$D^I = D_{g^I}$$

Folgerung:
Jedes Polynom P_n vom Grade $n, n \in N$ mit $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, D_{P_n} = R$ ist an jeder Stelle $x \in R$ differenzierbar.
Die Ableitung von P_n ist das Polynom P_{n-1} vom Grade $n-1$ mit $P_{n-1}(x) = n \bullet a_n x^{n-1} + (n-1) \bullet a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Quotientenregel:
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$.
Dann ist auch $h = \frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{I}(x) = \frac{f^{I}(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g^{I}(x)}{(g(x))^{2}}$$

Für den Differenzierbarkeitsbereich D^I von h gilt dann:

$$D^{I} = D_{f^{I}} \cap \left(D_{g^{I}} \setminus \{x \mid x \in D_{g} \wedge g(x) = 0\}\right)$$

Beispiele:

a) $h(x) = \frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}$

b) $h(x) = \frac{x}{x^{3}+1}$

Reziprokregel:
Die Funktion g sei an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$. Dann ist auch $\frac{1}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{I}(x) = \frac{-g^{I}(x)}{(g(x))^{2}}$$

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{2x + \sqrt{x}}$

Kettenregel:
Die Funktion f sei an der Stelle x und die Funktion g an der Stelle $f(x)$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(g(f(x))\right)^{I} = f^{I}(x) \bullet g^{I}(f(x))$$

Ableitung der Gesamtfunktion	=	„innere" Ableitung	•	„äußere" Ableitung
$h^{I}(x)$	=	$f^{I}(x)$	•	$g^{I}(f(x))$

Der Differenzierbarkeitsbereich D^I der Funktion h ist die Menge

$$D^{I} = \{x \mid x \in D_{f^{I}} \wedge f(x) \in D_{g^{I}}\}$$

Beispiele:

a) $h_1(x) = (x+5)^{100}$

b) $h_2(x) = \sqrt{5x}$

c) $h_3(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$

6.2.2 Die erste Ableitung häufig vorkommender Funktionen

1.	$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
2.	$y = c = const.$	$y' = 0$
3.	$y = ax + b$	$y' = a$
4.	$y = ax^2 + bx + c$	$y' = 2ax + b$
5.	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
6.	$y = \frac{1}{x^n}$	$y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
7.	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = \frac{-f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$
8.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9. $y = \sqrt[n]{x}$ $\qquad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

10. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

11. $y = \sqrt{f(x)}$ $\qquad y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

12. $y = \ln x$ $\qquad y' = \frac{1}{x}$

13. $y = \ln\left(x^n\right)$ $\qquad y' = \frac{n}{x}$

14. $y = \ln\left(f(x)\right)$ $\qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

15. $y = \log_a x$ $\qquad y' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}$

16. $y = \log_a f(x)$ $\qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

17. $y = e^x$ $\qquad y' = e^x$

18. $y = a^x$ $\qquad y' = a^x \ln a$

19. $y = x^x$ $\qquad y' = x^x(1+\ln x)$

20. $y = e^{f(x)}$ $\qquad y' = f'(x)e^{f(x)}$

21. $y = a^{f(x)}$ $\qquad y' = f'(x)a^{f(x)}\ln a$

22. $y = \sin x$ $\qquad y' = \cos x$

23. $y = \cos x$ $\qquad y' = -\sin x$

24. $y = \tan x$ $\qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

25. $y = \cot x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Übungsblatt Kapitel 6.1: Differenzierbarkeit

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie wie im *Beispiel zu Definition 6.2* die Ableitung der Funktion f und die Gleichung der Tangente an den Graphen von f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ in den Punkten $(-1,f(-1)),(3,f(3)),(x_0,f(x_0))$.

b) Ermitteln Sie für die Funktion f mit $f(x)=-2x^2$ die Ableitung von f an der Stelle x_0. Geben Sie ferner die Funktionsgleichung der Tangente für die folgenden Punkte an:

i) $P=(2,f(2))$,

ii) $P=(-1,f(-1))$,

iii) $P=(0,f(0))$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}, x\in D_f=R\setminus\{0\}$. Berechnen Sie den Differenzenquotienten von f an einer beliebigen Stelle $x_0\in D_f$, den Limes des Differenzenquotienten und die Tangente an den Graphen von f im Punkte $P=(x_0,f(x_0))$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen nicht differenzierbar sind, d.h. zeigen Sie, dass der Limes des Differenzenquotienten dort jeweils nicht existiert.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \textit{für } x\le 1 \\ (x-2)^2 & \textit{für } x>1 \end{cases}, \quad x_0=1$

b) $f(x)=|x+1|, \quad x_0=-1$

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(x_0+\Delta x)^2-\frac{1}{2}x_0^2}{\Delta x} = x_0+\frac{1}{2}\Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x_0+\frac{1}{2}\Delta x\right) = x_0$

Also ist $f^I(x_0)=x_0$; $f^I(-1)=-1$; $f^I(3)=3$

Tangentengleichung: $t(x)=f(x_0)+f^I(x_0)(x-x_0)=\frac{1}{2}x_0^2+x_0(x-x_0)=x_0\bullet x-\frac{1}{2}x_0^2$

d.h. für $x_0=-1$: $t(x)=-x-\frac{1}{2}$; für $x_0=3$: $t(x)=3x-\frac{9}{2}$

b) Ableitung: $f^I(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2(x_0+\Delta x)^2+2x_0^2}{\Delta x} = -4x_0$

Tangentengleichung: $t(x)=-2x_0^2+(-4x_0)(x-x_0)=-4x_0\bullet x+2x_0^2$

i) $P=(2,f(2))$: $t(x)=-8x+8$

ii) $P=(-1,f(-1))$: $t(x)=4x+2$

iii) $P=(0,f(0))$: $t(x)=0$

Aufgabe 2:

Differenzenquotient: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{\frac{x_0-x}{x\bullet x_0}}{x-x_0} = \frac{-1}{x\bullet x_0}, (x\neq x_0)$

Übergang zum Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{-1}{x\bullet x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$

Also ist f an der Stelle x_0 ($x_0\in D_f=R\setminus\{0\}$) differenzierbar; $f^I(x_0)=\frac{-1}{x_0^2}$.

Tangentengleichung: $t(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$

Aufgabe 3:

a) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 & \textit{für } x<1\\ \frac{(x-2)^2-1}{x-1}=x-3 & \textit{für } x>1\end{cases}$

f ist an der Stelle $x_0=1$ nicht differenzierbar, da $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ nicht existiert.

b) $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{|x+1|}{x+1} = \begin{cases}1 & \textit{für } x>-1\\ -1 & \textit{für } x<-1\end{cases}$

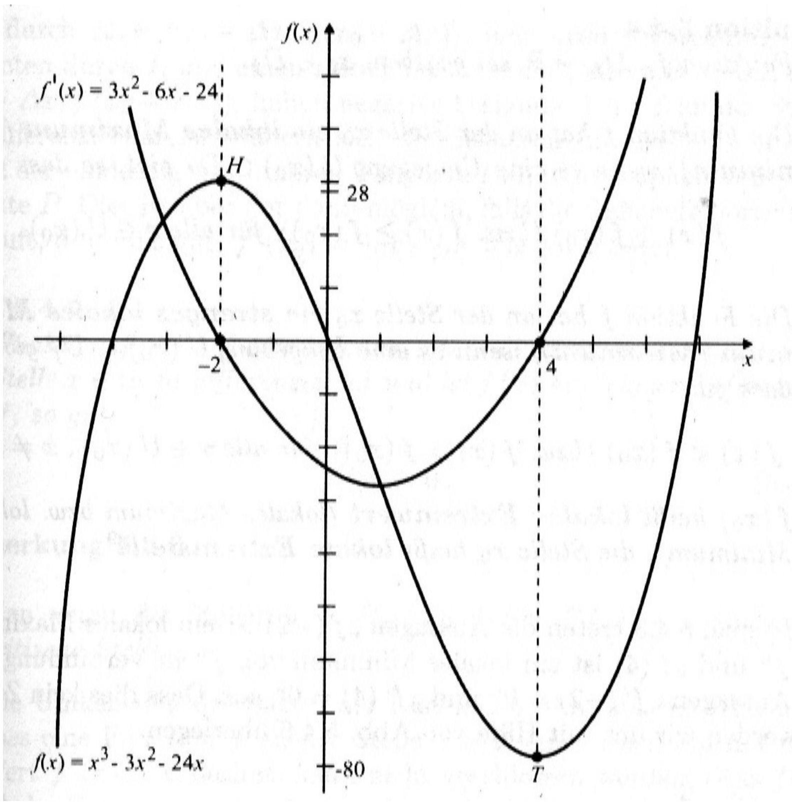
f ist an der Stelle $x_0=-1$ nicht differenzierbar, da $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$ nicht existiert.

6.3 Anwendungen der Differentialrechnung

6.3.1 Monotonie und Extremwerte

Satz 6.2: Monotoniekriterium
Die Funktion $f: D_f \to R$ sei auf $(a,b) \subset D_f$ differenzierbar. Dann gilt:
a) $f^I(x) > 0$ für alle $x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ auf (a,b) streng monoton steigend;
b) $f^I(x) < 0$ für alle $x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ auf (a,b) streng monoton fallend;
c) $f^I(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ auf (a,b) konstant.

Beispiel:
Die Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$
ist hinsichtlich ihres Monotonieverhaltens auf R zu untersuchen.



Definition 6.6:
Gegeben sei die Funktion $f: D_f \to R$ und $x_0 \in D_f$.
a) Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn es eine Umgebung $U(x_0) \subset D_f$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \ge f(x_0)\text{) für alle } x \in U(x_0)$$

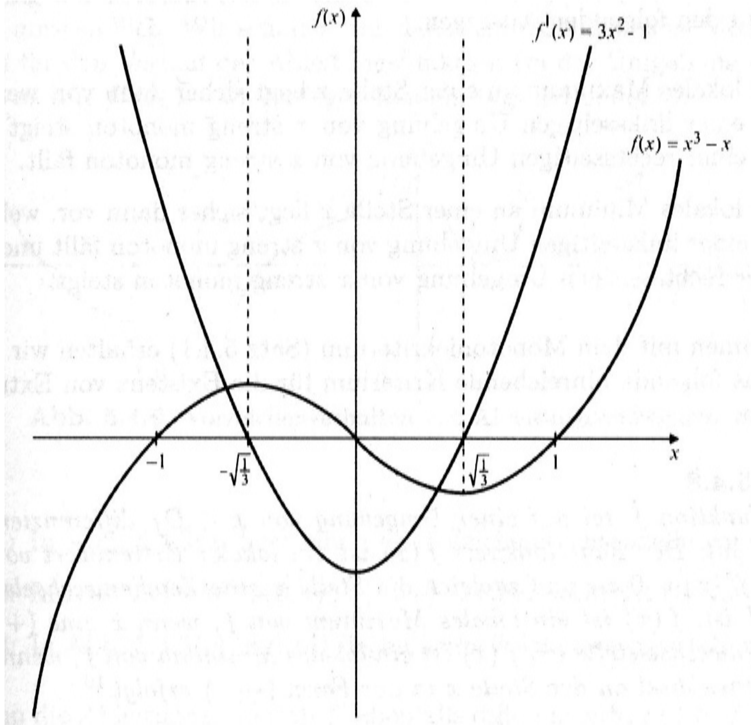
b) Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein *strenges lokales Maximum (Minimum)*, wenn es eine Umgebung $U(x_0) \subset D_f$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) > f(x_0)\text{) für alle } x \in U(x_0), x \ne x_0.$$

$f(x_0)$ heißt *lokaler Extremwert* (lokales Maximum bzw. lokales Minimum), die Stelle x_0 heißt *lokale Extremstelle*.

Satz 6.3:
Die Funktion f sei auf dem offenen Intervall (a,b) definiert. Ist f an der Stelle $x \in (a,b)$ differenzierbar und ist $f(x)$ ein lokaler Extremwert von f, so gilt: $f^{I}(x) = 0$

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.



Intervall	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left\{\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$	$\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right)$
$f^{I}(x)$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
f	Steigt streng monoton	Mögliche Extrem-stelle	Fällt streng monoton	Mögliche Extrem-stelle	Steigt streng monoton

Satz 6.4:
Die Funktion f sei auf einer Umgebung von $x \in D_f$ differenzierbar.
Dann gilt: Der Funktionswert $f(x)$ ist ein lokaler Extremwert von f, wenn $f^{I}(x) = 0$ ist und zugleich die Stelle x eine Zeichenwechselstelle von f^{I} ist.

- $f(x)$ ist ein lokales Maximum von f, wenn x eine $(+|-)$-Zeichenwechselstelle ist;

- $f(x)$ ist ein lokales Minimum von f, wenn der Zeichenwechsel an der Stelle x in der Form $(-|+)$ erfolgt.

Die Zeichenwechselstellen lassen sich folgendermaßen beschreiben:

Wenn	$\wedge$	$f^{I}(x_0)=0$ $f^{II}(x_0)<0$	$\wedge$	$f^{I}(x_0)=0$ $f^{II}(x_0)>0$
dann		x_0 ist $(+\mid -)$-Zeichenwechselstelle		x_0 ist $(-\mid +)$-Zeichenwechselstelle

Satz 6.5: (Kriterium für Extremwerte)
Die Funktion $f: D_f \to R$ sei an der Stelle $x \in D_f$ zweimal differenzierbar.
Dann gilt: Ist $f^{I}(x)=0$ und $f^{II}(x)\neq 0$, so ist $f(x)$ ein lokaler Extremwert von f, und zwar ein lokales Minimum im Falle $f^{II}(x)>0$, ein lokales Maximum im Falle $f^{II}(x)<0$.

Beispiel:
Betrachtet man die Funktion f mit $f(x)=x^6$ an der Stelle 0, so lässt *Satz 6.5* wegen $f^{II}(0)=0$ keine Aussage über die Existenz eines Extremwertes zu.
Dagegen liefert das Kriterium des Vorzeichenwechsels (*Satz 6.4*) wegen $f^{I}(x)=6x^5<0$ für $x<0$ und $6x^5>0$ für $x>0$ eine Entscheidung:
Bei $x=0$ besitzt f ein Minimum.

Definition 6.7:
Die Funktion $f: D_f \to R$ besitzt an einer Stelle $x_0 \in D_f$ ein *globales Maximum* (bzw. *Minimum*), falls gilt: $f(x_0)\geq f(x)$ (bzw. $f(x_0)\leq f(x)$) für alle $x \in D_f$.
Gilt: $f(x_0)>f(x)$ (bzw. $f(x_0)<f(x)$) für alle $x \in D_f$, so spricht man von einem *strengen globalen Maximum* (bzw. von einem *strengen globalen Minimum*).

Beispiele:

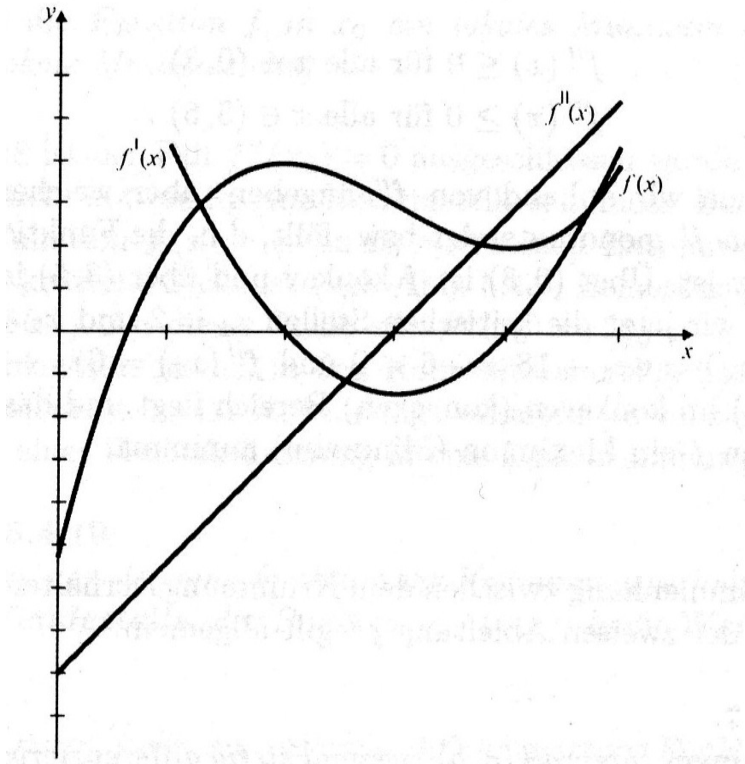
a) Die Funktion $f(x)=x^3-x$ besitzt weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum, da $f(x)\to -\infty$ für $x\to -\infty$ und $f(x)\to\infty$ für $x\to\infty$. Die Ableitungsfunktion f^{I} besitzt ein strenges globales Minimum bei $x=0$, aber kein globales Maximum, da $f^{I}(x)\to\infty$ für $x\to\pm\infty$.

b) Die Sinus- und Kosinusfunktion besitzen unendlich viele lokale Maxima und Minima, aber keine strengen globalen Extremwerte.

6.3.2 Krümmungsverhalten einer Funktion

Definition 6.8:
Der Graph einer Funktion f heißt *rechtsgekrümmt* (oder *konkav*) über einem Intervall $[a,b]$, wenn für je zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 aus $[a,b]$ gilt: $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\ 0\leq\lambda\leq 1$

Beispiel:
Die Funktion f mit $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$ über dem Intervall $[0,5]$.



Satz 6.6:
Der Graph einer über einem Intervall (a,b) differenzierbaren Funktion ist genau dann konvex (konkav), wenn die Ableitung f^{I} in (a,b) monoton steigt (fällt).

Anwendung der Monotoniekriterien auf die Funktionen f^{I} und f^{II}:
f^{I} ist auf (a,b) monoton steigend (fallend) genau dann, wenn für alle $x\in(a,b)$ gilt: $f^{II}(x)\geq 0$ (bzw. $f^{II}(x)\leq 0$)

Satz 6.7:
Eine über einem Intervall (a,b) zweimal stetig differenzierbare Funktion f ist über (a,b) konvex (konkav) genau dann, wenn für alle $x\in(a,b)$ gilt: $f^{II}(x)\geq 0$ (bzw. $f^{II}(x)\leq 0$)

Satz 6.8:
Ist eine Funktion f über einem Intervall (a,b) zweimal differenzierbar und gilt für eine Stelle x_0 aus (a,b):

$$f^{I}(x_0)=0 \text{ und } f^{II}(x_0)<0,$$

dann besitzt die Funktion f in x_0 ein lokales Maximum (x_0 ist die zugehörige lokale Maximalstelle). Gilt für eine Stelle x_0 aus (a,b):

$$f^{I}(x_0)=0 \text{ und } f^{II}(x_0)>0,$$

dann besitzt die Funktion f in x_0 ein lokales Minimum (x_0 ist die zugehörige lokale Minimalstelle).

Definition 6.9:
Jede Stelle x_W, an der eine Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert, heißt eine *Wendestelle*, der Punkt $(x_W, f(x_W))$ heißt *Wendepunkt*.

Satz 6.9: (notwendiges Kriterium für die Existenz einer Wendestelle)
Hat eine an einer Stelle x_W zweimal differenzierbare Funktion f eine Wendestelle, so gilt $f^{II}(x_W)=0$

Ein Sonderfall einer Wendestelle x_W liegt vor, wenn in x_W auch die erste Ableitung verschwindet, d.h. falls $f^{I}(x_W)=0$ gilt. In diesem Fall heißt der Punkt $(x_W, f(x_W))$ *Sattelpunkt* oder auch *horizontaler Wendepunkt*, x_W heißt *Sattelstelle*.

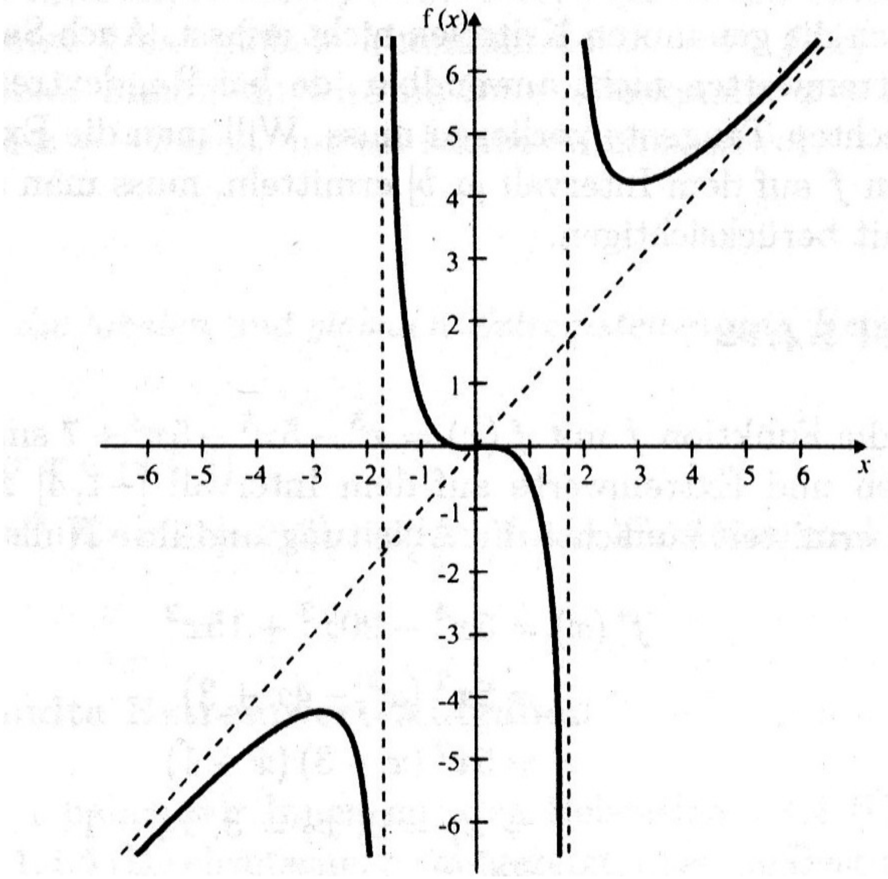
Satz 6.10: (hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Wendestelle)
Ist eine Funktion f an einer Stelle x_W dreimal differenzierbar und gilt $f^{II}(x_W)=0$ und $f^{III}(x_W)\neq 0$, so liegt in x_W eine Wendestelle vor.

6.3.3 Systematische Kurvendiskussion

(1) Festlegung des maximalen Definitionsbereichs,
(2) Festlegung des Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereichs,
(3) Bestimmung der (ersten drei) Ableitungen von f,
(4) Untersuchung der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs, und zwar
a) an den äußeren Rändern,
b) an den evtl. unter (1) gefundenen Polstellen,
(5) Bestimmung der Nullstellen von f,
(6) Bestimmung der Extremstellen und zugehörigen Extrema von f,
(7) Bestimmung der Wendestellen und der zugehörigen Wendepunkte von f,
(8) Untersuchung des Monotonieverhaltens von f,
(9) Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f,
(10) Berechnung spezieller Funktionswerte,
(11) Zeichnen des Funktionsgraphen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$



6.3.4 Extrema von Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

Beispiele:

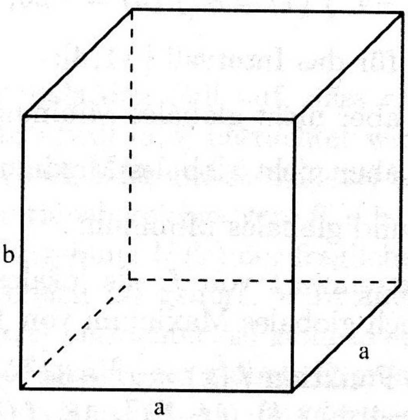
a) Für die Funktion f mit $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+7$ sind die Extremstellen und Extremwerte auf dem Intervall $[-1,4]$ zu bestimmen.

b) Für die Funktion f mit $f(x)=x^3-3x^2-24x$ sind die Extremstellen und Extremwerte auf dem Intervall $[-3,8]$ zu bestimmen.

6.3.5 Angewandte Extremwertaufgaben

Beispiele:

a) Eine Firma produziert zum Transport von Massengütern quaderförmige Container mit quadratischer Grundfläche und mit dem Volumen $V=1$ $[\mathit{Volumeneinheiten}]$. Da bei der Herstellung der Container für die Schweißnähte an den Kanten des Quaders besonders hohe Kosten auftreten, ist derjenige Quader mit quadratischer Grundfläche gesucht, für den die Summe aller Kantenlängen minimal ist.



Sei a die Länge der Kanten der quadratischen Grundfläche des Quaders und b die Höhe des Quaders:

Summe S der Kantenlängen des Quaders:

Nebenbedingung:

Definitionsbereich von S:

Nullstellen der Ableitung S^I:

b) Eine Firma produziert zylindrische Blechbüchsen mit einem Volumen von $V = 1\ [Volumeneinheiten]$. Boden und Deckel werden aus einem Material hergestellt, das 50 € pro Flächeneinheit kostet, während die Seiten aus einem Blech hergestellt werden, das 30 € pro Flächeneinheit kostet.
Zu ermitteln sind die Maße für die Blechbüchse mit den geringsten Materialkosten.

Fläche des Zylindermantels:

Materialkosten:

Ableitungen:

Übungsblatt Kapitel 6.2: Berechnung von Ableitungen

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der gegebenen Funktionen und den Wert von y^I bzw. y^{II} an den angegebenen Stellen:

a) $f(x)=x^{17}$ an den Stellen: $x_0, -1, 1$
b) $f(x)=x^{-1}$ an den Stellen: $x_0, 2$
c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ an den Stellen: $x_0, 3, 5$
d) $f(x)=x^{12}-x^2$ an den Stellen: $x_0, -1, 1$
e) $f(x)=\sqrt{x}-x$ an den Stellen: $x_0, 4, 9$
f) $f(x)=3x^6-7x^5+2x^2+12$ an den Stellen: $-1, 2$
g) $f(x)=5x^7-3x^2+2$ an den Stellen: $1, 4$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$
b) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
c) $f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$
d) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^3-64}$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion h:

a) $h(x)=\left(4x^2+2\right)^2$
b) $h(x)=\left(2\sqrt{x}-5\right)^2$
c) $h(x)=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+2}$
d) $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
e) $h(x)=\left(4+\frac{2}{x}\right)^2$
f) $h(x)=\frac{15}{\sqrt{x^2-2}}$
g) $h(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$
h) $h(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{1-x^2}$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f:

a) $f(x)=\sin\left(x+x^2\right)$
b) $f(x)=\sin(\cos x)$
c) $f(x)=\sin\left(\frac{\cos x}{x}\right)$
d) $f(x)=\sqrt{\sin\left(2x^2+1\right)}$
e) $f(x)=e^{2x^2+5x}$
f) $f(x)=\frac{2e^{3x}}{2\bullet\ln x}$
g) $f(x)=\left(\frac{1}{e^x-2}\right)^2$
h) $f(x)=\ln\left(2-x^2\right)$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

a) $f^{I}(x) = 17x^{16}$

$f^{I}(x_0) = 17x_0^{16}$

$f^{I}(-1) = 17 \bullet (-1)^{16} = 17$

$f^{I}(1) = 17 \bullet 1^{16} = 17$

$f^{II}(x) = 17 \bullet 16x^{15} = 17 \bullet 16x^{15} = 272x^{15}$

$f^{II}(x_0) = 272x_0^{15}$

$f^{I}(-1) = 272 \bullet (-1)^{15} = -272$

$f^{I}(1) = 272 \bullet 1^{15} = 272$

b) $f^{I}(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f^{I}(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

$f^{I}(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$f^{II}(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f^{II}(x_0) = \frac{2}{x_0^3}$

$f^{II}(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$

c) $f^{I}(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$f^{I}(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}$

$f^{I}(3) = -\frac{1}{2\sqrt{3^3}} = -\frac{1}{6\sqrt{3}}$

$f^{I}(5) = -\frac{1}{2\sqrt{5^3}} = -\frac{1}{10\sqrt{5}}$

$f^{II}(x) = -\frac{1}{2} \bullet \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

$f^{II}(x_0) = \frac{3}{4x_0^2\sqrt{x_0}}$

$f^{II}(3) = \frac{3}{4 \bullet 3^2\sqrt{3}} = \frac{3}{36\sqrt{3}} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$

$f^{II}(5) = \frac{3}{4 \bullet 5^2\sqrt{5}} = \frac{3}{100\sqrt{5}}$

d) $f^{I}(x) = 12x^{11} - 2x$

$f^{I}(x_0) = 12x_0^{11} - 2x_0$

$f^{I}(-1) = 12 \bullet (-1)^{11} - 2 \bullet (-1) = -10$

$f^{I}(1) = 12 \bullet 1^{11} - 2 \bullet 1 = 10$

$f^{II}(x) = 12 \bullet 11x^{10} - 2 = 132x^{10} - 2$

$f^{II}(x_0) = 132x_0^{10} - 2$

$f^{II}(-1) = 132 \bullet (-1)^{10} - 2 = 130$

$f^{II}(1) = 132 \bullet 1^{10} - 2 = 130$

e) $f^{I}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

$f^{I}(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - 1$

$f^{I}(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2 \bullet 2} - 1 = -\frac{3}{4}$

$f^{I}(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} - 1 = \frac{1}{2 \bullet 3} - 1 = -\frac{5}{6}$

$f^{II}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f^{II}(x_0) = -\frac{1}{4x_0\sqrt{x_0}}$

$f^{II}(4) = -\frac{1}{4 \bullet 4\sqrt{4}} = -\frac{1}{32}$

$f^{II}(9) = -\frac{1}{4 \bullet 9\sqrt{9}} = -\frac{1}{108}$

f) $f^{I}(x) = 18x^5 - 35x^4 + 4x$

$f^{I}(-1) = 18 \bullet (-1)^5 - 35 \bullet (-1)^4 + 4 \bullet (-1) = -57$

$f^{I}(2) = 18 \bullet 2^5 - 35 \bullet 2^4 + 4 \bullet 2 = 24$

$f^{II}(x) = 18 \bullet 5x^4 - 35 \bullet 4x^3 + 4 = 90x^4 - 140x^3 + 4$

$f^{II}(-1) = 90 \bullet (-1)^4 - 140 \bullet (-1)^3 + 4 = 234$

$f^{II}(2) = 90 \bullet 2^4 - 140 \bullet 2^3 + 4 = 324$

g) $f^{I}(x) = 35x^6 - 6x$

$f^{I}(1) = 35 \bullet 1^6 - 6 \bullet 1 = 29$

$f^{I}(4) = 35 \bullet 4^6 - 6 \bullet 4 = 143.336$

$f^{II}(x) = 35 \bullet 6x^5 - 6 = 210x^5 - 6$

$f^{II}(1) = 210 \bullet 1^5 - 6 = 204$

$f^{II}(4) = 210 \bullet 4^5 - 6 = 215.034$

Aufgabe 2:

a) $f^{I}(x) = \dfrac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

b) $f^{I}(x) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x} - 2x}$

c) $f^{I}(x) = \dfrac{\frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}} (1 + x^2) - x^{\frac{10}{3}} \bullet 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{\frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{13}{3}}}{(1 + x^2)^2}$

d) $f^{I}(x) = \dfrac{2x(x^3 - 64) - (x^2 - 9) \bullet 3x^2}{(x^3 - 64)^2} = \dfrac{-x^4 + 27x^2 - 128x}{(x^3 - 64)^2}$

Aufgabe 3:

a) $h^I(x) = 2 \bullet \left(4x^2+2\right) \bullet 8x \quad = \quad 64x^3 + 32x$

b) $h^I(x) = 2 \bullet \left(2\sqrt{x}-5\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{x}} = 4 - \frac{10}{\sqrt{x}}$

c) $h^I(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^2+2}} \bullet \frac{2}{3}x = \frac{x}{3\sqrt{\frac{1}{3}x^2+2}}$

d) $h^I(x) = -\frac{1}{2} \bullet x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

e) $h^I(x) = 2\left(4+\frac{2}{x}\right)(-2)x^{-2} = -\frac{8}{x^2}\left(2+-\frac{1}{x}\right)$

f) $h^I(x) = -\frac{1}{2} \bullet 15\left(x^2-2\right)^{-\frac{3}{2}} \bullet 2x = \frac{-15x}{\left(x^2-2\right)^{\frac{3}{2}}}$

g) $h^I(x) = 2x\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$

h) $h^I(x) = \frac{\frac{5}{2}x\sqrt{x}}{1-x^2} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{\left(1-x^2\right)^2}$

Aufgabe 4:

a) $f^I(x) = \left(\cos\left(x+x^2\right)\right) \bullet (2x+1)$

b) $f^I(x) = (\cos(\cos x)) \bullet (-\sin x)$

c) $f^I(x) = -\cos\left(\frac{\cos x}{x}\right) \bullet \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right)$

d) $f^I(x) = 2x\frac{\cos\left(2x^2+1\right)}{\sqrt{\sin\left(2x^2+1\right)}}$

e) $f^I(x) = e^{2x^2+5x}(4x+5)$

f) $f^I(x) = \frac{3e^{3x}}{\ln x} - \frac{e^{3x}}{x \bullet (\ln x)^2}$

g) $f^I(x) = -\frac{2e^x}{\left(e^x-2\right)^3}$

h) $f^I(x) = \frac{1}{2-x^2}(-2x)$

Übungsblatt Kapitel 6.3: Anwendungen der Differentialrechnung

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich ihres Monotonieverhaltens auf R. Gehen Sie dabei analog zum Beispiel zum Monotoniekriterium vor.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 5x - 3$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie (soweit existent) die lokalen Extremstellen der folgenden Funktionen mit Hilfe von Satz 6.4:

a) $f: R \to R$ mit $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f: R \to R$ mit $f(x) = x^5 + x + 1$

c) $f: R \to R$ mit $f(x) = 4 - x^2$

Aufgabe 3:
Ermitteln Sie die Extremstellen und Extremwerte der folgenden Funktionen. Wenden Sie dabei Satz 6.5 an.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \sin^2 x$

d) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

f) $f(x) = x^6 - x + 2$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = x^{17} + 3x^5 + x$ keine lokalen Extremwerte besitzt.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Graphen konkav bzw. konvex sind:

a) $f(x) = x^3, x \in R$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in R, x \neq 0$

Aufgabe 6:
Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$ die Wendestellen an.

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

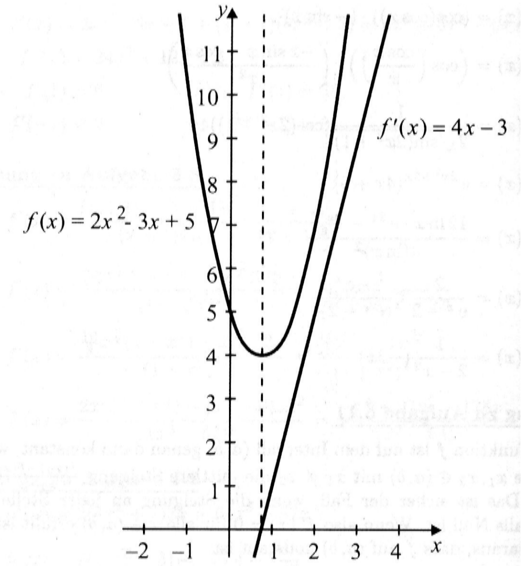
a) $f(x)=2x^2-3x+5$

$\Rightarrow \quad f^I(x)=4x-3$

$f^I(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{3}{4}$

$f^I(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{4}$

$f^I(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{3}{4}$



Intervalle	$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$	$\left\{\frac{3}{4}\right\}$	$\left(\frac{3}{4},\infty\right)$
$f^I(x)$ f	<0 Fällt streng monoton	$=0$	>0 Steigt streng monoton

b) $f(x)=-x^3+6x^2+5x-3$

$\Rightarrow \quad f^I(x)=-3x^2+12x+5$

$f^I(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^2+12x+5<0$

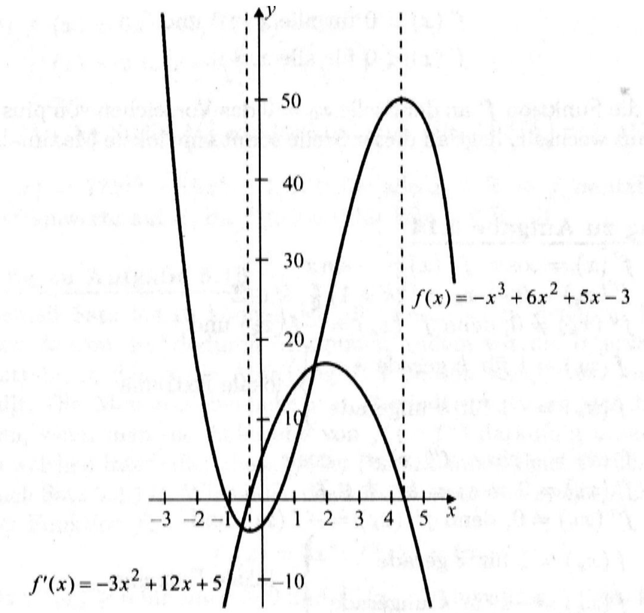
$\Leftrightarrow \quad x^2-4x-\frac{5}{3}>0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x>2+\sqrt{\frac{17}{3}}\approx 4{,}38\right) \vee \left(x<2-\sqrt{\frac{17}{3}}\approx -0{,}38\right)$

$f^I(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(2-\sqrt{\frac{17}{3}},2+\sqrt{\frac{17}{3}}\right)$

$f^I(x)=0$

$\Leftrightarrow \quad x=2+\sqrt{\frac{17}{3}} \quad \vee \quad x=2-\sqrt{\frac{17}{3}}$



Intervalle	$\left(-\infty,2-\sqrt{\frac{17}{3}}\right)$	$\left\{2-\sqrt{\frac{17}{3}}\right\}$	$\left(2-\sqrt{\frac{17}{3}},2+\sqrt{\frac{17}{3}}\right)$	$\left\{2+\sqrt{\frac{17}{3}}\right\}$	$\left(2+\sqrt{\frac{17}{3}},\infty\right)$
$f^I(x)$ f	<0 fällt streng monoton	$=0$	>0 steigt streng monoton	$=0$	<0 fällt streng monoton

Aufgabe 2:

a) $f^I(x) = 4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = -1$

$f^I(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1)$ oder $x \in (0, -1)$

$f^I(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, 0)$ oder $x \in (1, \infty)$

Also ist -1 eine $(-\mid +)$-Zeichenwechselstelle von f^I,

0 eine $(+\mid -)$-Zeichenwechselstelle von f^I und

1 eine $(-\mid +)$-Zeichenwechselstelle von f^I.

An den Stellen -1 und 1 liegt ein lokales Minimum, an der Stelle 0 ein lokales Maximum vor.

b) $f^I(x) = 5x^4 + 1 > 0$ für $x \in R$; die Funktion f kann also keine Extremwerte besitzen, da sie auf R streng monoton steigend ist.

c) $f^I(x) = -2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$f^I(x) > 0$ für alle $x < 0$

$f^I(x) < 0$ für alle $x > 0$

Da die Funktion f^I an der Stelle 0 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, liegt an dieser Stelle somit eine lokale Maximalstelle vor.

Aufgabe 3:

a) $f^I(x) = \cos x, \quad f^{II}(x) = -\sin x$

$f^I(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow x_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

$f^{II}(x_k) \neq 0$, denn $f^{II}(x_k) = -f(x_k)$ und

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_k) = 1 & \textit{für k gerade} \\ f(x_k) = -1 & \textit{für k ungerade} \end{array}\right\} \textit{lokale Extrema}$$

b) $f^I(x) = -\sin x, \quad f^{II}(x) = -\cos x$

$f^I(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow x_k = k\pi, k \in Z$

$f^{II}(x_k) \neq 0$, denn $f^{II}(x_k) = -f(x_k)$ und

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_k) = 1 & \textit{für k gerade} \\ f(x_k) = -1 & \textit{für k ungerade} \end{array}\right\} \textit{lokale Extrema}$$

c) $f^I(x) = 2\sin x \cos x, \quad f^{II}(x) = 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$f^I(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x_k = 0 \quad \vee \quad \cos x_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k = k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

$f^{II}(x_k) \neq 0$, denn für kein $x \in R$ sind $\sin x$ und $\cos x$ beide „gleichzeitig" gleich 0,

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_k) = 1 & \textit{für k ungerade} \\ f(x_k) = 0 & \textit{für k gerade} \end{array}\right\} \textit{lokale Extrema}$$

d) $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, $f''(x)=\dfrac{3x-4}{4\sqrt{(1-x)^3}}$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$f''\left(\dfrac{2}{3}\right)<0 \quad \Rightarrow$ An der Stelle $\dfrac{2}{3}$ lokales Maximum, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)\approx 0{,}455$

e) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow (x=1) \quad \vee \quad (x=-1)$

$f''(1)>0,\quad f''(-1)<0 \quad \Rightarrow$ An der Stelle 1 lokales Minimum, $f(1)=2$

an der Stelle -1 lokales Maximum, $f(-1)=-2$

Hinweis: Für die Funktion f ist die y–Achse eine (senkrechte) Asymptote:

$f(x)\to\infty$ für $x\to 0^+$, $f(x)\to-\infty$ für $x\to 0^-$

f) $f'(x)=6x^5-1$, $f''(x)=30x^4$ $\qquad f^{I}(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$, $f^{II}\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}\right)>0$

also: An der Stelle $\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$ lokales Minimum mit $f\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}\right)\approx 1{,}417$

Aufgabe 4:

$f'(x)=17x^{16}+15x^4+1>0$ für alle $x\in R \quad \Rightarrow \quad f$ besitzt keine Extremwerte auf R, da $f'(x)=0$ für kein $x\in R$ gilt.

Aufgabe 5:

a) $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$

Da $f''(x)\geq 0$ für alle $x\geq 0$ und $f''(x)\leq 0$ für alle $x\leq 0$ ist:

Auf $(-\infty,0]$ ist f konkav, auf $[0,\infty)$ ist f konvex.

b) $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$, $f''(x)=\dfrac{6}{x^4}$

Da f'' (und f) an der Stelle $x=0$ nicht definiert ist und der Term $\dfrac{6}{x^4}$ für alle $x\in R\setminus\{0\}$ positiv ist, folgt: Die Funktion f ist auf $(-\infty,0)$ und auf $(0,\infty)$ konvex.

Aufgabe 6:

$f'(x)=3x^2-18x+24 \qquad f''(x)=6x-18 \qquad f'''(x)=6$

Gesucht ist x_W mit $f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$

$f''(x_W)=6x_W-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_W=3$ ist einzig mögliche Wendestelle und wegen $f'''(3)=6\neq 0$ liegt in $x_W=3$ tatsächlich eine Wendestelle vor. Weitere Wendestellen besitzt die Funktion f nicht (denn als lineare Funktion besitzt f'' keine weiteren Nullstellen).

Übungsblatt Kapitel 6.3.3: Kurvendiskussion

Aufgabe 1:
Führen Sie eine systematische Kurvendiskussion für die folgenden Funktionen durch. Zeichnen Sie den Graphen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen und Extremwerte:

a) $f(x) = \frac{x}{2}$ für $x \in [-1, 1]$

b) $f(x) = 4 - x^2$ für $x \in [-2, 3]$

Lösungen: (ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
a) (1) f ist ein Polynom, also auf ganz R definiert.

(2) Als Polynom ist f auf ganz R stetig und differenzierbar.

(3) $f^{I}(x) = 3x^2 - 4x - 1, \quad f^{II}(x) = 6x - 4, \quad f^{III}(x) = 6$

(4) Da die Funktion keine Polstellen besitzt, haben wir f nur an den Rändern des Definitionsbereichs, d.h. für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, zu untersuchen. Es ist

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(x^2 - 2x - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(x-2)$$

da die Konstanten im Funktionsterm für $x \to \pm\infty$ keine Rolle mehr spielen.
Also gilt: Für $x \to \infty$ strebt $f(x) \to \infty$, für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to -\infty$.

(5) Wegen $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x+2)$ besitzt f die drei (reellen) Nullstellen
$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

(6) Extremstellen: $f^{I}(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}, x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

Beide Stellen liegen im Definitionsbereich und sind somit kritische Stellen.
$f^{II}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 6\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 4 + 3\sqrt{7} > 0$, d.h. f besitzt an der Stelle x_1 ein Minimum;
$f^{II}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 6\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 4 - 3\sqrt{7} < 0$, d.h. f besitzt an der Stelle x_2 ein Maximum.

(7) Wendestellen: $f^{II}(x) = 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$

$f^{III}(x) = 6 \neq 0$

also ist $x_W = \frac{2}{3}$ Wendestelle ($x_W = \frac{2}{3}$ ist keine Sattelstelle, da $f^{I}(x_W) \neq 0$.)

(8) Aus (6): Es existieren eine lokale Maximalstelle und eine lokale Minimalstelle.
Aus (2): f ist stetig
$\Rightarrow$ Auf den sich ergebenden Teilintervallen ist f streng monoton steigend bzw. fallend.

$I_1 = \left(-\infty, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)$: sei $x = -2$: $f^I(-2) = 19 > 0$, d.h. f ist auf I_1 streng mon. steigend.

$I_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)$: sei $x = 1$: $f^I(1) = -2 < 0$, d.h. f ist auf I_2 streng mon. fallend.

$I_3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}, \infty\right)$: sei $x = 2$: $f^I(2) = 3 > 0$, d.h. f ist auf I_3 streng monoton steigend.

(9) Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f:

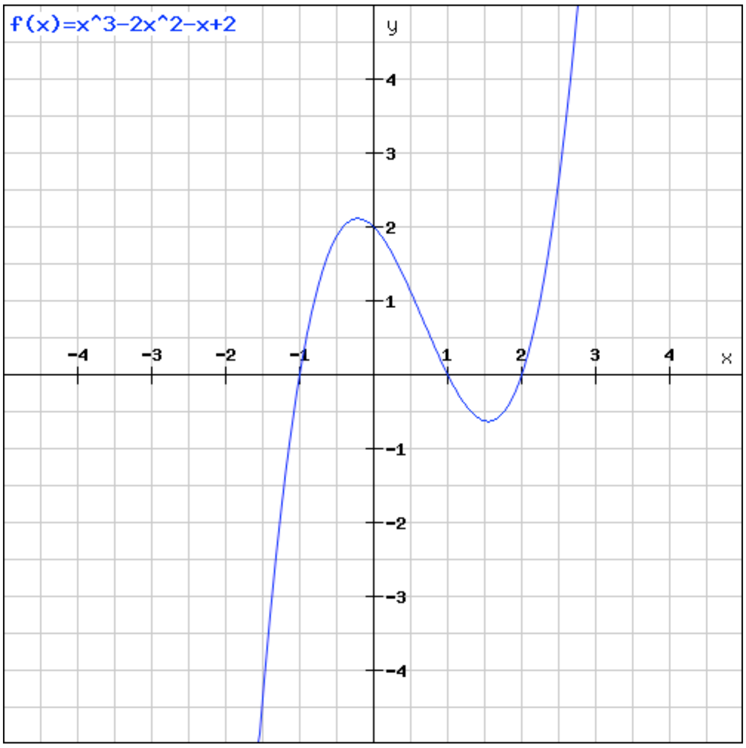
Aus (7): Wendestelle bei $x_W = \frac{2}{3}$

Da, wie die Bezeichnung „Wendestelle" schon ausdrückt, sich dort das Krümmungsverhalten der Funktion ändert, brauchen wir z.B. nur für das Intervall $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ zu ermitteln, um welche Art von Krümmung es sich handelt: $f^{II}(x) = 6x - 4 < 0$ für alle $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, also ist f auf diesem Intervall konkav. Da nur eine Wendestelle vorliegt, folgt: Auf $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ ist f konvex.

(10) Berechnung spezieller Funktionswerte:

x	$f(x)$	Ausgezeichnete Stelle
- 2	-12	
- 1	0	Nullstelle
$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$	$\approx 2{,}11$	Lokale Maximalstelle
$\frac{2}{3}$	2	Wendestelle
1	0	Nullstelle
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$	$\approx -0{,}63$	Lokale Minimalstelle
2	0	Nullstelle
3	8	

(11) Graph der Funktion:



b) (1) Wegen $f(x)=\frac{x^2-4}{1-x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(1+x)(1-x)}$ erhält man $D_f=R\setminus\{-1,1\}$.
An den Stellen $x_1=-1$ und $x_2=1$ befinden sich Polstellen

(2) Da f eine (gebrochen) rationale Funktion ist, ist f über D_f stetig und beliebig oft differenzierbar.

(3) $f^{I}(x)=\frac{-6x}{\left(1-x^2\right)^2}$, $f^{II}(x)=\frac{-18x^2-6}{\left(1-x^2\right)^3}$, $f^{III}(x)=\frac{-72x\left(x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^4}$

(4) a) an den äußeren Rändern: $\frac{x^2-4}{1-x^2}=-1-\frac{3}{1-x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, Asymptote ist somit die Gerade zu $y=-1$

b) an den Polstellen: $f(x)=\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}$

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2-4}{1-x^2}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2-4}{1-x^2}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-4}{1-x^2}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-4}{1-x^2}=+\infty$

(5) An den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ befinden sich Nullstellen

(6) Extremstellen: $f^{I}(x) = \dfrac{-6x}{\left(1-x^2\right)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$f^{II}(0) = -6 \quad \Rightarrow \quad f$ hat an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum mit $f(0) = -4$

(7) Wendestellen: $f^{II}(x) = \dfrac{-18x^2-6}{\left(1-x^2\right)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -18x^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 1 = 0$

Diese Gleichung hat in R keine Lösung, daher hat f keine Wendestellen.

(8) Aufteilung von D_f in vier Intervalle:
$I_1 = (-\infty, -1)$: sei $x = -2$: $f^{I}(-2) > 0$, d.h. f ist auf I_1 monoton steigend.
$I_2 = (-1, 0]$: sei $x = -0{,}5$: $f^{I}(-0{,}5) => 0$, d.h. f ist auf I_2 monoton steigend.
$I_3 = [0, 1)$: sei $x = 0{,}5$: $f^{I}(0{,}5) < 0$, d.h. f ist auf I_3 monoton fallend.
$I_4 = (1, \infty)$ sei $x = 2$: $f^{I}(2) < 0$, d.h. f ist auf I_4 monoton fallend.

(9) $f(x)$ ist auf dem Intervall I konkav genau dann, wenn $f^{II}(x) \leq 0$ für $x \in I$ gilt. Wegen $f^{II}(x) \neq 0$ auf D_f folgt: $f^{II}(x) = \dfrac{-18x^2-6}{\left(1-x^2\right)^3} = \dfrac{-6\left(3x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^3} < 0$

$\Leftrightarrow \quad (1) \quad \left(3x^2+1\right) > 0$ und $\left(1-x^2\right)^3 > 0$ oder

$\qquad (2) \quad \left(3x^2+1\right) < 0$ und $\left(1-x^2\right)^3 < 0$

Da $\left(3x^2+1\right) > 0$ für $x \in R$ ist, kann (2) nicht erfüllt werden.

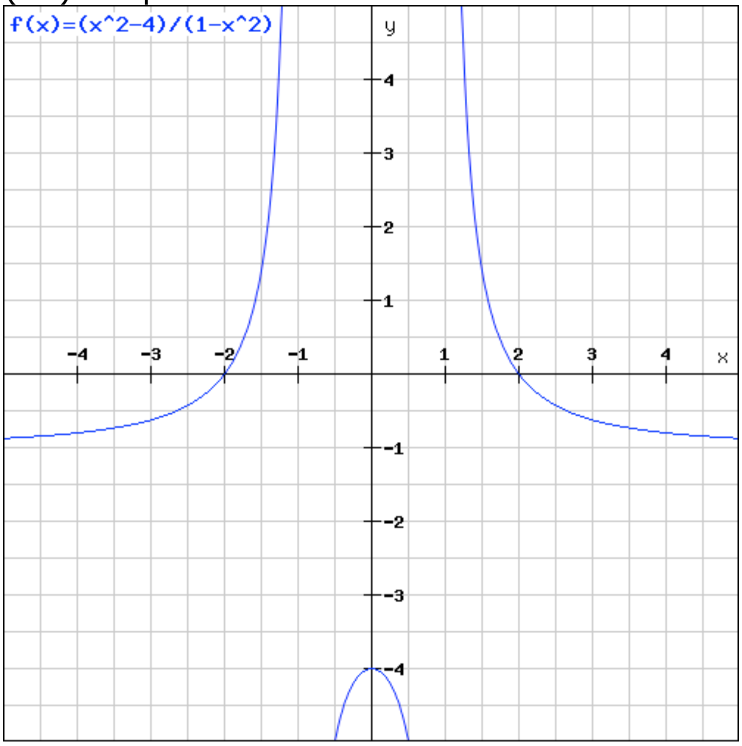
$f^{II}(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1-x^2\right)^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, 1)$

Somit ist f auf $(-1,1)$ konkav. Da keine Wendestellen existieren, muss f dann auf dem restlichen Definitionsbereich konvex sein, d.h. f ist auf $(-\infty, -1)$ und auf $(1, \infty)$ konvex.

(10) Berechnung spezieller Funktionswerte (auf die Angabe einer Wertetabelle verzichte ich hier)

x	$f(x)$	Ausgezeichnete Stelle
-3	$-5/8$	
- 2	0	Nullstelle
- 1		Pol
0	-4	Lokale Maximalstelle
1		Pol
2	0	Nullstelle
3	$-5/8$	

(11) Graph der Funktion:



Aufgabe 2:

a) $f^I(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [-1,1]$, d.h. es gilt für alle $x \in [-1,1]$: $f^I(x) \neq 0$. Somit besitzt f in $[-1,1]$ keine lokale Extremstelle. Die globalen Extrema sind an den Rändern zu suchen: Wegen $f(-1) = -\frac{1}{2}$ und $f(1) = \frac{1}{2}$ besitzt f an der Stelle -1 ein globales Minimum und an der Stelle 1 ein globales Maximum (betrachtet auf dem Intervall $[-1,1]$!).

b) In Aufgabe 2c, Üb.blatt 6c, haben Sie gezeigt, dass $f(x) = 4 - x^2$ in $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle besitzt. Die Untersuchung der Ränder des Intervalls $[-2,3]$ ergibt: $f(-2) = 0$ und $f(3) = -5$; mit $f(0) = 4$ lässt sich schließen: Bezogen auf $[-2,3]$ besitzt f in $x_0 = 0$ ein globales Maximum und in $x_1 = 3$ ein globales Minimum.

7 Integralrechnung

7.1 Das unbestimmte Integral

Definition 7.1:
Es sei eine auf einem Intervall $I \subset R$ definierte Funktion $f : I \to R$ gegeben. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to R$ heißt *Stammfunktion* von f auf I, falls $F^I(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Hierbei bezeichnet man die Funktion f auch als den *Integranden*.
Es ist auch üblich, die Funktion F als *unbestimmtes Integral* von f zu bezeichnen. Als Schreibweise für die Funktion F verwendet man:
$F(x) = \int f(x)\,dx$

Beispiele:
a) $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = e^x$

Definition 7.2:
Wenn eine Funktion $f : I \to R$ eine Stammfunktion $F : I \to R$ besitzt, heißt f *unbestimmt integrierbar* auf I.

Menge der Stammfunktionen von f:

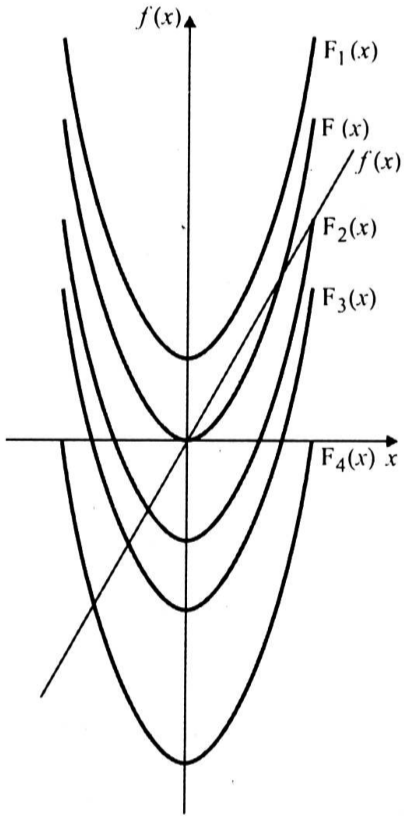
$$\left\{ F^*(x) \middle| F^*(x) = F(x) + c \wedge F^I(x) = f(x) \wedge c \in R \right\}$$

Beispiele:
a) Sei $f(x) = 3x^2$, dann ist $F(x) = x^3$ Stammfunktion von f, denn $\left(x^3\right)^I = 3x^2$.
Aber auch $F_c(x) = x^3 + c$ für beliebiges $c \in R$ ist Stammfunktion von f, denn
$F_c^I(x) = \left(x^3 + c\right)^I = 3x^2$

b) Sei $f(x) = \frac{-1}{x^2}$, dann ist $F(x) = \frac{1}{x}$ Stammfunktion von f, denn $\left(\frac{1}{x}\right)^I = \frac{-1}{x^2}$.
Aber auch $F_c(x) = \frac{1}{x} + c$ für beliebiges $c \in R$ ist Stammfunktion von f, denn
$F_c^I(x) = \left(\frac{1}{x} + c\right)^I = \frac{-1}{x^2}$

Weitere Stammfunktionen von f:

Beispiel:
$f(x) = 2x$



Satz 7.1:
Es sei f eine unbestimmt integrierbare Funktion mit dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$ und $a \in R$. Dann ist auch die Funktion $a \bullet f$ unbestimmt integrierbar und es gilt: $\int (a \bullet f(x))dx = a \bullet \int f(x)dx$. (*)
Die Gleichung (*) heißt die *Faktorregel* der Integration.

Beispiel:
$\int 10x\,dx$

Satz 7.2:
Es seien f_1 und f_2 unbestimmt integrierbare Funktionen mit den unbestimmten Integralen $\int f_1(x)dx$ und $\int f_2(x)dx$. Dann ist auch die Funktion $f_1 + f_2$ unbestimmt integrierbar und es gilt:
$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$. (**)
Die Gleichung (**) heißt die *Summenregel* der Integration.

Beispiel:
$\int (\cos x + \sin x)dx$

Tabelle Grundintegrale

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
c	$c \bullet x$	e^x	e^x
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \neq -1$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ für $a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$ für $x > 0$		
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

Beispiel:

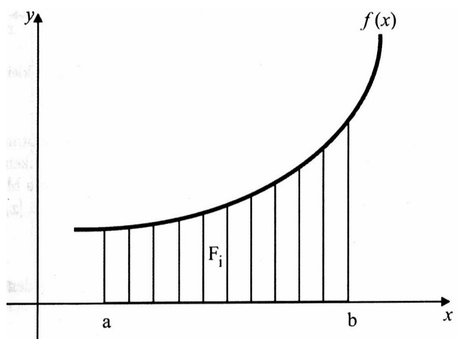
$$\int \left(2e^x - \frac{1}{3}x^3\right)dx$$

7.2 Das Flächeninhaltsproblem und das bestimmte Integral

Bestimmung von Flächeninhalten bei nicht konstanten Funktionsgraphen-verläufen

(der Einfachheit halber zunächst folgende) *Voraussetzungen:*

(1) Das Intervall $[a,b]$ wird in n gleich große Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ zerlegt: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$
mit der Intervall-Länge
$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}(b-a)$ für
$i = 1, \ldots, n-1$
Dadurch wird die Fläche F_a^b in n Teilflächen F_i zerlegt.



(2) Die Funktion f sei stetig auf $[a,b]$ und somit dort auch beschränkt.

(3) Es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beispiel:
Für $f(x) = x^2$ soll der Flächeninhalt F_a^b (für $0 \leq a < b$) berechnet werden.

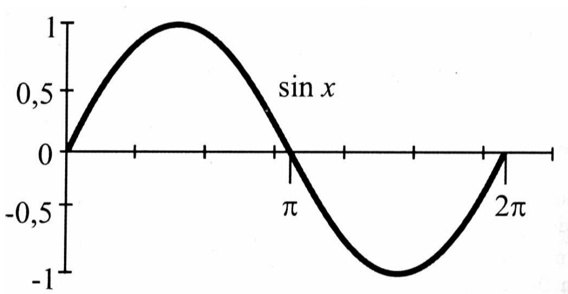
Definition 7.3:
Eine reelle Funktion f sei auf einem Intervall $[a;b]$ beschränkt ($a<b$). Ferner seien $a=x_o^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq \ldots \leq x_{n-1}^{(n)} \leq x_n^{(n)} = b$ Zerlegungen von $[a;b]$ in n Teilintervalle $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$ mit der jeweiligen Länge $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$ für $i=1,\ldots,n$ definiert worden, wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i^{(n)} = 0$ gelte. Falls für beliebige Stellen $\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$ derselbe Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \Delta x_i^{(n)}$ existiert, und zwar unabhängig von der gewählten Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a;b]$, so heißt die Funktion f *Riemann-integrierbar* oder *bestimmt integrierbar* (oder kurz auch nur *integrierbar*) im Intervall $[a;b]$.
Dabei heißt dieser Grenzwert das *bestimmte Integral* oder das *Riemann-Integral* von f in den Grenzen a und b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \Delta x_i^{(n)}$$

Die Funktion f heißt der *Integrand*, $[a;b]$ das *Integrationsintervall* mit den *Integrationsgrenzen* a und b.

Satz 7.3:
Falls eine Funktion $f:[a,b] \to R$ stetig ist, so ist f Riemann-integrierbar, d.h. es existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beispiel:
Das bestimmte Integral der Funktion $f(x)=\sin x$ über dem Intervall $[0;2\pi]$ ergibt sich zu Null: $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$



7.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 7.4:
Die zu einer stetigen Funktion $f:[a,b] \to R$ gemäß $F_a^x = \int_a^x f(u)\,du$ gebildete reelle Funktion $F_a:[a,b] \to R$ heißt die *Flächenfunktion* oder *Integral-funktion* von f über $[a,b]$.

Satz 7.4: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Es sei f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Dann ist die Flächenfunktion F_a gemäß $F_a^x = \int_a^x f(u)\,du$ an jeder Stelle $x \in (a,b)$ differenzierbar und es gilt:
$F_a^I(x) = f(x)$

Berechnung (und Schreibweisen) von bestimmten Integralen:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b F^I(x)\,dx \quad = \quad [F(x)]_a^b \quad = \quad F(x)\Big|_a^b \quad = \quad F(b) - F(a)$$

7.4 Berechnung und Interpretation von bestimmten Integralen

<u>1. Schritt:</u> Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ auf $[a,b]$
<u>2. Schritt:</u> Ermittlung des bestimmten Integrals gemäß der Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

Es sei das bestimmte Integral $\int_a^b x^2\,dx$ in den Grenzen a und $b\ (a < b)$ zu bestimmen.

<u>1. Schritt:</u> Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ gegeben.

<u>2. Schritt:</u> Gemäß der Formel gilt: $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$

Speziell für $a = 1$ und $b = 3$ ergibt sich:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Satz 7.5:
Es sei $f:[a,b] \to R$ eine integrierbare Funktion und $\alpha \in R$. Dann ist auch die Funktion $\alpha \bullet f$ integrierbar und es gilt die

Faktorregel: $\int_a^b (\alpha \bullet f(x))\,dx = \alpha \bullet \int_a^b f(x)\,dx$

Es seien f_1 und f_2 zwei integrierbare Funktion. Dann ist auch die Funktion $f_1 + f_2$ integrierbar und es gilt die

Summenregel: $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$

Beispiele:

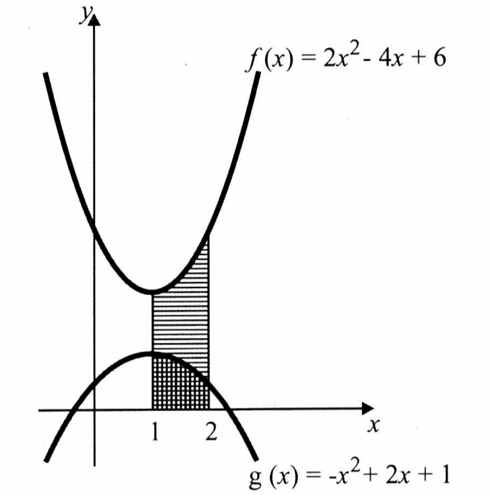
a) $\int_0^{\pi} 2 \bullet \sin x \, dx$

b) $\int_0^{\pi} (\cos x + \sin x) \, dx$

c) $\int_1^{2} \left(2x^2 - 4x + 6\right) dx$

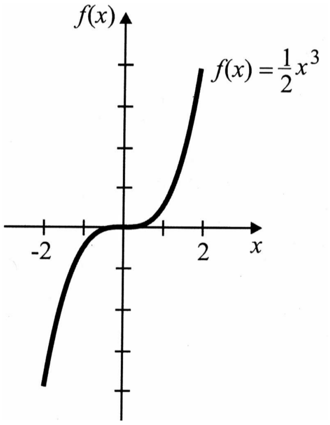
d) $\int_{-1}^{+1} \frac{x^2+1}{e^x} dx + \int_{-1}^{+1} \frac{1-x^2}{e^x} dx$

Flächeninhaltsproblem: $\int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 \left(f(x) - g(x)\right) dx$



Beispiel:

Zu untersuchen ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ auf dem Intervall $[-2,2]$.

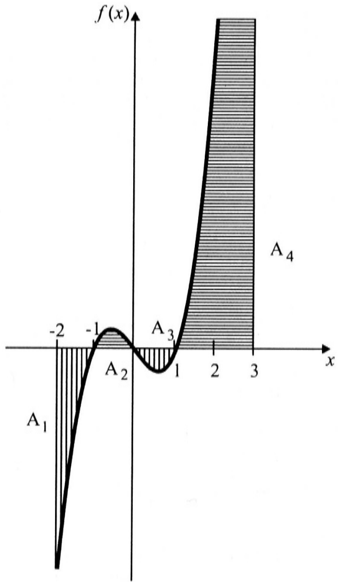


Satz 7.6:

Es seien f und g auf $[a,b]$ integrierbare Funktion. Falls $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $a<b$ gilt, ergibt sich: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Beispiel:

Zu untersuchen ist die Funktion f mit $f(x)=x^3-x$ auf dem Intervall $[-2,3]$.



Übungsblatt Kapitel 7: Integralrechnung

Aufgabe 1:
Veranschaulichen Sie die Menge aller Stammfunktionen der folgenden Funktionen f geometrisch:

a) $f(x) = 2x - 2$ (z.B. mit $c = 3, c = 5$)

b) $f(x) = x^2$ (z.B. mit $c = 1, c = 3$)

Aufgabe 2:
Berechnen Sie den Flächeninhalt F_a^b unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen den Grenzen $a = 2, b = 4$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$

b) $\int_1^2 \frac{\sin x + 1}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{1 - \sin x}{x^2} dx$.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie den Inhalt der von den Graphen der Funktionen f und g zwischen den Graphen a und b eingeschlossenen Flächen. Skizzieren Sie das jeweilige Flächeninhaltsproblem.

a) $f(x) = 2x + 4$,	$g(x) = x^2 + 2x + 3$,		$a = -1$,	$b = 1$
b) $f(x) = x^2 + 2$,	$g(x) = x^2$,		$a = 0$,	$b = 1$
c) $f(x) = x^2$,	$g(x) = x^3$,		$a = 0$,	$b = 1$
d) $f(x) = x^2$,	$g(x) = x^2 - 4x + 4$,			
		1)	$a = 1$,	$b = 2$
		2)	$a = 0$,	$b = 1$

Aufgabe 5:
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, den der Graph der Funktion f mit der x–Achse zwischen den angegebenen Grenzen einschließt.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$,	$a = -2$	$b = 2$
b) $f(x) = \sin x$,	$a = -\pi$,	$b = 2\pi$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$,	$a = -4$,	$b = 1$
d) $f(x) = x^2 - 2$,	$a = -2$,	$b = 3$

Lösungen: (ohne Gewähr)

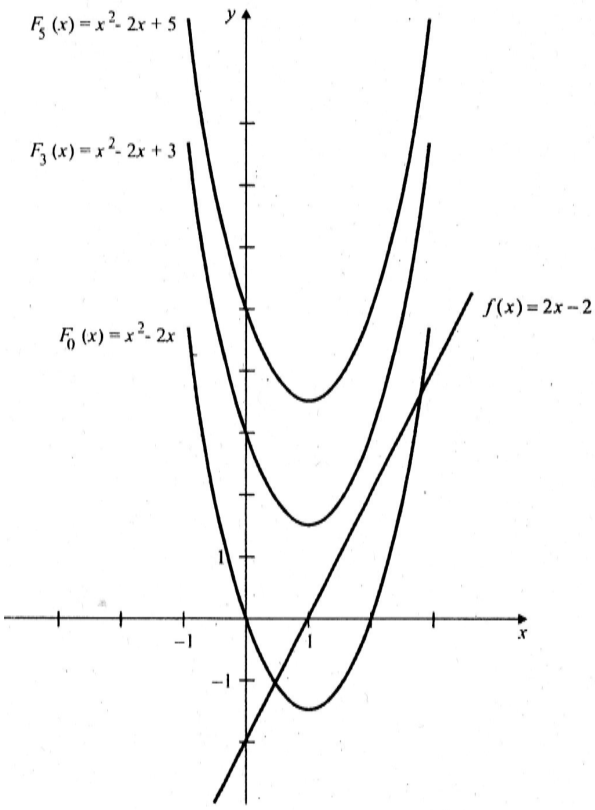
Aufgabe 1:

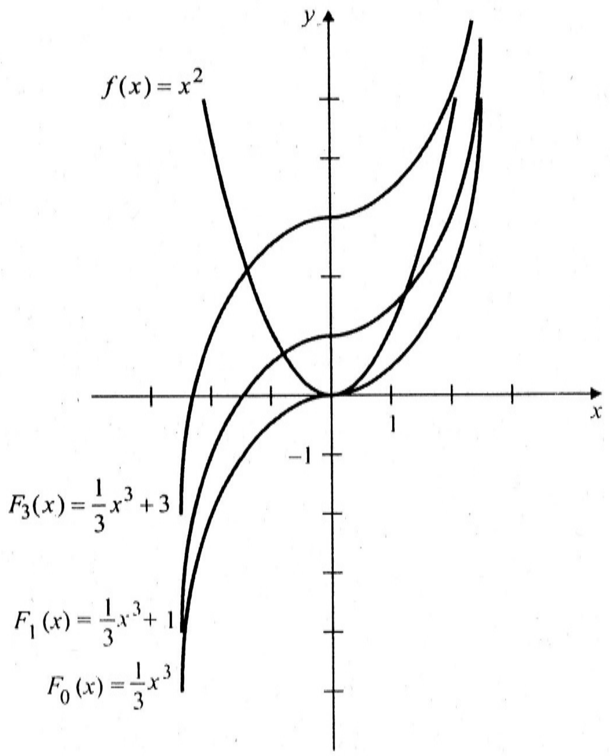
a) $f(x) = 2x - 2$

$\Rightarrow \quad \int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x + c = F_c(x)$

b) $f(x) = x^2$

$\Rightarrow \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c = F_c(x)$





Aufgabe 2:

Wegen $F_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ folgt: $F_2^4 = \frac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) = \frac{56}{3} = 18 + \frac{2}{3}$

Aufgabe 3:

a) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \quad = \int_1^2 2x\,dx \quad = \left[x^2\right]_1^2 \quad = 3$

b) $\int_1^2 \frac{\sin x + 1}{x^2}dx + \int_1^2 \frac{1 - \sin x}{x^2}dx \quad = \int_1^2 \frac{2}{x^2}dx \quad = \left[\frac{-2}{x}\right]_1^2 \quad = 1$

Aufgabe 4:

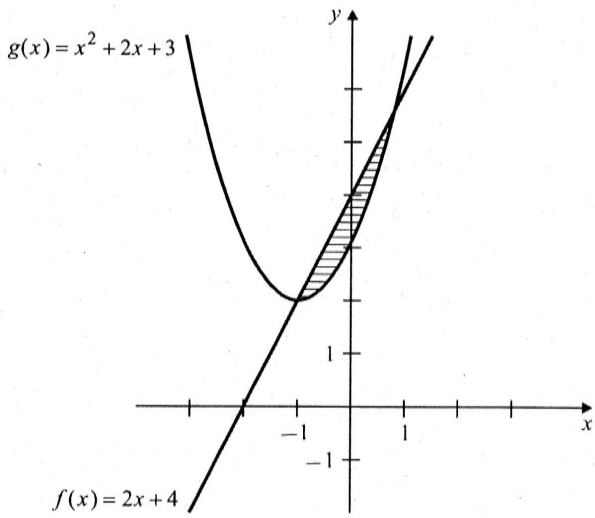
a) $f(x)=2x+4$, $g(x)=x^2+2x+3$

$$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\left(2x+4\right)-\left(x^2+2x+3\right)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{1}^{1} \quad =\frac{4}{3}$$

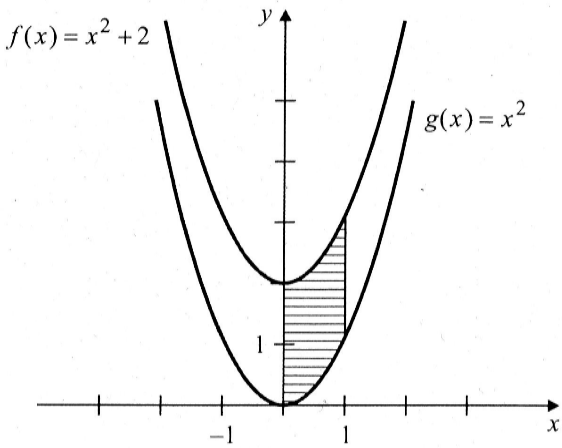


b) $f(x)=x^2+2$, $g(x)=x^2$

$$\int_{0}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}2\,dx$$

$$=\left[2x\right]_0^1 \quad =2$$

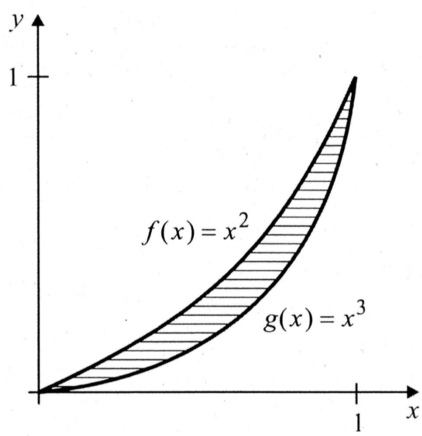


c) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$

$$\int_{0}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(x^2-x^3\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \quad =\frac{1}{12}$$

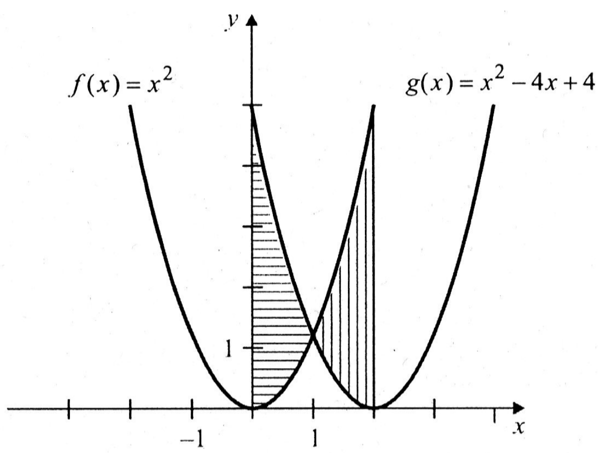


d) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-4x+4$

(1) $\int_{1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx$

$$=\int_{1}^{2}\left(4x-4\right)dx$$

$$=\left[2x^2-4x\right]_1^2 \quad =2$$



(2) $\int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right) dx$

$= \int_0^1 (-4x+4)\,dx$

$= \left[-2x^2 + 4x\right]_0^1 \quad = 2$

Aufgabe 5:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 = 0$ für $x = 0$

$F_{-2}^{2} \quad = \quad \left|\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^3\,dx\right| + \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx \quad = \quad \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2 \quad = 2 + 2 = 4$

b) $f(x) = \sin x = 0$ für $x \in [-\pi, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\pi, x_2 = 0, x_3 = \pi, x_4 = 2\pi$

$F_{-\pi}^{2\pi} \quad = \quad \left|\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx\right| + \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right|$

$= \quad \left|\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{0}\right| + \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right| \quad = 2 + 2 + 2 = 6$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -3$, aber

$f(x) \le 0$ für $x \le 0$, da $x_2 = -3$ eine sog. doppelte Nullstelle ist;

$f(x) > 0$ für $x > 0$, also:

$F_{-4}^{1} \quad = \quad \left|\int_{-4}^{0} \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right) dx\right| + \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right) dx$

$= \quad \left|\left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-4}^{0}\right| + \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 \quad = \quad \frac{8}{3} + \frac{9}{4} \quad = \quad \frac{59}{12}$

d) $f(x) = x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

$F_{-2}^{3} \quad = \quad \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right) dx + \left|\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right) dx\right| + \int_{\sqrt{2}}^{3} \left(x^2 - 2\right) dx \quad = \frac{16}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}$