Sistema de Inferencia Difusa

Carlos Rafael Ortega Lezcano
Grupo C411

Introducción

El sistema de inferencia difusa implementado presentará funciones de pertenencia triangulares, trapezoidales, gaussianas y sigmoidales ademas cuenta con los metodos de agregacion de Mamdani y Larsen, con entrada de valores *singleton* o sea valores precisos o como entrada conjuntos difusos, los metodos de desfusificación empleados son el Centroide (COA), Bisección (BOA) y en el caso de los Máximos, el MOM o Media de los Máximos.

Para validar dicho sistema se resolverá un problema cuya solución necesita de un Sistema de Inferencia y se analizaran los resultados obtenidos.

Características del Sistema de Inferencia

El sistema implementado se compone primeramente por las reglas *if-then* que definen el problema a resolver, los métodos de agregación de Mamdani y Larsen y los métodos de desfusicificación.

Funciones de Pertenencia

Las funciones de pertenencia más conocidas las cuales fueron implementadas para comodidad a la hora de emplear el sistema fueron:

1. **Triangulares**: Es un conjunto difuso representado por 3 puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y su función de pretenencia es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}$$

2. **Trapezoidales**: Es un conjunto difuso representado por 4 puntos, $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y su función de pretenencia es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases}$$

3. **Gaussiana**: Es un conjunto difuso cuya función de pertenecia es una función exponencial definida por dos valores k y m, su representacion corresponde con la campana de Gauss:

$$\mu_A(x) = e^{-k(x-m)^2}$$

4. **Sigmoidal**: Es un conjuto difuso cuya función de pertenencia presenta un crecimiento más lento que una parte de una función triangular o trapezoidal, esta definida por dos valores a, b y el valor m, el cual usualmente es $m = \dfrac{a+b}{2}$, su función de pertenencia es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2\left[\dfrac{x-a}{b-a}\right]^2, & a < x \leq m \\ 1 - 2\left[\dfrac{x-b}{b-a}\right]^2, & m < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Métodos de Agregación y Desfusificación

El sistema emplea los métodos de Mamdani y Larsen para determinar una agregación, se determinan los valores de los α_i dependiendo del tipo de entrada y luego se determina la función de pertenencia para la agregación C':

Mamdani: $\mu_{C'}(z) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge \mu_{C_i}(z)]$

Larsen: $\mu_{C'}(z) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \cdot \mu_{C_i}(z)]$

Para la desdifusificación del conjunto resultante se implementarón 3 variantes:

Media de los Máximos: Representa el promedio de aquellos valores de control z_j donde se alcanza el máximo:

$$z_0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{z_j}{k}$$

Centroide: Esta estrategia genera el centro de gravedad de los conjuntos que conforman la agregación y se define como:

$$z_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_C(z_j) \cdot z_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_C(z_j)}$$

Bisector del Área: Este método genera el valor z_0 tal que particione el área en dos regiones iguales:

$$\int_{\alpha}^{z_0} \mu_C(z)\, dz = \int_{z_0}^{\beta} \mu_C(z)\, dz$$

donde α y β son los extremos del dominio

Implementación del Sistema

Expondremos a continuación las principales ideas seguidas para la implementación del sistema y como se realiza la creación del mismo. La implementación fue realizada en Python, se representó entidades importantes tales como la definición de conjunto difuso junto a los mencionados anteriormente, la función encargada de resolver la agregación en el sistema acepta entrada tanto de valores precisos como de valores difusos.

FuzzySet:
  $\mu_C : R \rightarrow [0, 1]$
  U : Dominio del conjunto preciso

La definición de conjunto difuso esta compuesta por la función de pertenencia, la cual puede ser cualquier función cuya imagen se encuentre en $[0, 1]$, y el dominio del conjunto preciso sobre el cual definimos nuestro conjunto difuso.

FuzzyInferenceSystem:
  Rules ← $(A_{1i},\ A_{2i},\ \dots,\ C_i)$
  Aggregation (input):
    α_i ← MatchingDegrees (input)
    return $\mu_{C'}(\mathbf{z}) = \bigvee_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} [\alpha_i \oplus \mu_{\mathbf{C_i}}(\mathbf{z})]$

Para determinar una agregación se procede a calcular los grados de coincidencia dependiendo del tipo de entrada para ello es necesario establecer un parametro `input_type` el cuales puede ser `singleton` o `fuzzy` y acorde a este se empleará la función correspondiente para el cálculo de los grados. El símbolo $\oplus$ representa el operador que estamos usando acorde al método seleccionado, para ello debemos establecer el parámetro `method` el cual puede ser `mamdani` o `larsen`, empleando entonces los operadores R_c y R_p respectivamente a la hora de calcular la agregación.

FuzzyInferenceSystem:
  MOM (fs):
    $mx \leftarrow [\,]$
    for $z_j \in U$
      if $z_j$es máximo **then** $mx.add(z_j)$
      endif
    endfor
    return mean(mx)

  COA (fs):
    $n \leftarrow 0$
    $d \leftarrow 0$
    for $z_j \in U$
      $n \leftarrow n + \mu_{C'}(z_j) \cdot z_j$
      $n \leftarrow n + \mu_{C'}(z_j)$
    endfor
    return n/d

  BOA (fs):
    $\alpha \leftarrow \min U$
    $\beta \leftarrow \max U$
    $z_0 \leftarrow$ BinarySearch $(\alpha,\ \beta,\ \mu_{C'})$
    returnz$_0$

Los métodos de difusión reciben como entrada un conjunto difuso y devuelven el resultado desfusificado, el MOM y COA ya cuentan con una forma de realizarse mientras que para el BOA se empleo búsqueda binaria para determinar el valor z_0 tal que bisecciona el área formada por $\mu_{C'}$

FuzzySet:
  ∟ Triangular (a_1, a_2, a_3)
  ∟ Trapezoidal (a_1, a_2, a_3, a_4)
  ∟ Gaussian (k, m)
  ∟ Sigmoidal (a, b)

Para trabajar de forma sencilla con las funciones de pertenencia vistas anteriormente se definieron conjuntos difusos, de forma que para su creación solo sea necesario introducir los valores que definen dichas funciones

Problema Propuesto

Para comprobar la implementación del sistema realizada resolveremos el siguiente problema

Problema

Se desea desarrollar un sistema de frenado automático para un automóvil con transmisión automática. En dicho vehículo contamos con un sensor de proximidad que permite determinar la distancia entre el auto y otro que se encuentre delante de él además sabemos de forma precisa la velocidad del automóvil el cual contiene el sistema. Adicionalmente podemos sensar la velocidad con la que se mueve el vehículo que se encuentra delante. Se desea saber dadas estas condiciones cual debe ser aproximadamente el ángulo que debe ser presionado el pedal del freno, considerando que 0 indica que no es necesario pisar el pedal y 60 pisar el pedal a fondo.

Las reglas que definen el sistema de frenado son las siguientes:

R1: Si estamos lejos del vehículo, vamos lento y este no se mueve entonces no pisamos el freno

R2: Si estamos a distancia media del vehículo, vamos lento y este no se mueve entonces pisamos un poco el freno

R3: Si estamos a distancia media del vehículo, vamos a velocidad normal y este no se mueve entonces pisamos mas o menos el freno

R4: Si estamos cerca del vehículo, vamos a velocidad normal y este no se mueve entonces pisamos bastante el freno

R5: Si estamos cerca del vehículo, vamos rápido y este no se mueve entonces pisamos bastante el a fondo el freno

R6: Si estamos cerca del vehículo, vamos rápido y este se mueve poco entonces pisamos bastante el freno

R7: Si estamos a distancia media del vehículo, vamos a velocidad normal y este se mueve poco entonces pisamos mas o menos el freno

R8: Si estamos lejos del vehículo, vamos a velocidad normal y este se mueve poco entonces pisamos poco el freno

R9: Si estamos cerca del vehículo, vamos a velocidad normal y este se mueve rápido entonces pisamos poco el freno

R10: Si estamos a distancia media del vehículo, vamos lento y este se mueve rápido entonces no pisamos el freno

Definamos las variables lingüisticas que encontramos en el problema y los conjuntos difusos que las componen con sus respectivas funciones de pertenencia:

Distancia:

$T(\text{Distancia}) : \{\text{ lejos, normal, cerca }\}$

$U = [0, 30]$

$G(\text{Distancia}) : \{\text{lejos}\} \cup \{\text{normal}\} \cup \{\text{cerca}\}$

$$M = \begin{cases} (\ u, \mu_{\text{cerca}}(u)\ ), & u \in [0, 10] \\ (\ u, \mu_{\text{normal}}(u)\ ), & u \in [10, 20] \\ (\ u, \mu_{\text{lejos}}(u)\ ), & u \in [20, 30] \end{cases}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \mu_{\text{cerca}}(u) = \overline{\text{Sigmoidal}}(0, 10) \\ \mu_{\text{normal}}(u) = \text{Gaussian}(0.05,\ 15) \\ \mu_{\text{lejos}}(u) = \text{Sigmoidal}(20, 30) \end{cases}$$

Velocidad:

$T(\text{Velocidad}) : \{\text{ lento, constante, rápido }\}$

$U = [10, 90]$

$G(\text{Velocidad}) : \{\text{lento}\} \cup \{\text{constante}\} \cup \{\text{rápido}\}$

$$M = \begin{cases} (\ u, \mu_{\text{lento}}(u)\ ), & u \in [10, 30] \\ (\ u, \mu_{\text{constantel}}(u)\ ), & u \in [30, 60] \\ (\ u, \mu_{\text{rápido}}(u)\ ), & u \in [60, 90] \end{cases}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \mu_{\text{lento}}(u) = \overline{\text{Sigmoidal}}(10, 30) \\ \mu_{\text{constantel}}(u) = \text{Gaussian}(0.05,\ 45) \\ \mu_{\text{rápido]}}(u) = \text{Sigmoidal}(60, 90) \end{cases}$$

Variación de Velocidad:

$T(\text{VV}) : \{\text{ detenido, poco movimiento, mucho movimiento }\}$

$U = [0, 20]$

$G(\text{VV}) : \{\text{detenido}\} \cup \{\text{poco movimiento}\} \cup \{\text{mucho movimiento}\}$

$$M = \begin{cases} (\ u, \mu_{\text{detenido}}(u)\ ), & u \in [0, 10] \\ (\ u, \mu_{\text{movimiento}}(u)\ ), & u \in [10, 20] \end{cases}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \mu_{\text{detenido}}(u) = \text{Trapezoidal}(-1, 0, 10, 20) \\ \mu_{\text{movimiento}}(u) = \text{Sigmoidal}(10,\ 20) \end{cases}$$

Grado de Frenado:

$T(\text{Grado}) : \{\text{ nada, pequeño, medio, grande, todo}\}$

$U = [0, 60]$

$G(\text{Grado}) : \{\text{nada}\} \cup \{\text{pequeño}\} \cup \{\text{medio}\} \cup \{\text{grande}\} \cup \{\text{todol}\}$

$$M = \begin{cases} (\ u, \mu_{\text{nada}}(u)\ ), & u = 0 \\ (\ u, \mu_{\text{pequeño}}(u)\ ), & u \in [1, 20] \\ (\ u, \mu_{\text{mediano}}(u)\ ), & u \in [20, 40] \\ (\ u, \mu_{\text{grande}}(u)\ ), & u \in [40, 59] \\ (\ u, \mu_{\text{todo}}(u)\ ), & u = 60 \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_{\text{nada}}(u) = 1, \quad if\ u = 0 \\ \mu_{\text{pequeño}}(u) = \text{Triangular}(1, 10, 20) \\ \mu_{\text{mediano}}(u) = \text{Triangular}(21, 30, 40) \\ \mu_{\text{grande}}(u) = \text{Triangular}(40, 50, 59) \\ \mu_{\text{todo}}(u) = 1, \quad if\ u = 60 \end{cases}$$

Antes de pasar a la construcción del sistema, se debe recalcar que en la variable **Variación de Velocidad** que representa la velocidad del vehículo que se encuentra delante, se considera el conjunto difuso *movimiento* y a la hora de referirnos a la velocidad del auto se emplea los modificadores poco y mucho los cuales tienen función de pertenencia $\mu_{poco}(z) = \sqrt{\mu(z)}$ y $\mu_{mucho}(z) = \mu(z)^2$ respectivamente.

Los valores de grado que representan no pisar el freno o pisarlo por completo son valores precisos por lo tanto se aplica la fusificación para valores *singleton*.

El conjunto detenido representa aquellos valores de velocidad el auto que se tiene delante para los cuales podemos considerar que este detenido, por lo tanto se emplea un conjunto con función trapezoidal para representalo donde los valores a_2 y a_3 definen el intervalo de velocidad para el cual se considerará como detenido, el valor $a_1 = -1$ ya que en este caso los valores son mayores que 0 y se necesita realizar la representación de una función trapezoidal con un valor infinito.

Para empezar a definir el sistema, debemos identificar las variables las cuales corresponden con las expuestas anteriormente, también decidir el método de inferencia a usar por el sistema, comúnmente se emplea el método de Mamdani aunque para realizar las pruebas del sistema emplearemos tambien el de Larsen. La fusificación de los datos ya se encuentra representada para cada una de las variables lingüsticas expuestas anteriormente, con respecto a la normalización de los datos se decide no aplicar ninguna técnica para que exista un mayor entendimiento a la hora de interpretar los resultados, además los dominios de las variables lingüisticas estan bien definidos. El espacio de las variables queda compuesto por los conjuntos disjuntos que forman las variables lingüisticas antecedentes para el problema y sus dimensiones ya son conocidas.

Las reglas definidas para la construccion del sistema pasan a escribirse de la siguiente forma:

if lejos, lento **and** detenido **then** nada

Asi sucesivamente construimos las reglas empleando las divisiones realizadas en el espacio de las variables y obtendremos la entrada para nuestro sistema de inferencia.

Debemos para obtener un resultado preciso decidir el método de desfusificación, uno de los más usado es COA pero para realizar las pruebas emplearemos todos los implementados.

Pruebas realizadas al sistema

Para probar el sistema emplearemos la entrada $(10, 40, 1)$, probaremos los 2 métodos de agregación en conjunto con los 3 métodos de difusificación, la salida del programa será:

```
--- Test Mamdani - COA ---
Grado: 20.443779372233646

--- Test Mamdani - MOM ---
Grado: 20.5

--- Test Mamdani - BOA ---
Grado: 11.25

--- Test Larsen - COA ---
Grado: 20.333333333333336

--- Test Larsen - MOM ---
Grado: 20.0

--- Test Larsen - BOA ---
Grado: 10.0048828125
```

Los valores obtenidos entran dentro de pisar poco el freno, lo cual es acertado si vemos que los datos corresponden con la regla **R2**. Los valores de COA y MOM son muy similares mientras que el de BOA difiere debido a que este valor no es central sino que realiza la bisección del área de la función de pertenencia. Ahora probemos otras entradas al sistema empleando diversas combinaciones de los métodos del sistema

```
--- Using Mamdani - COA ---
In: (30, 15, 15)
Grado: 0.004914457256137396
Esperado: No pisar el freno

--- Using Larsen - MOM ---
In: (6, 64, 7)
Grado: 55.0
Esperado: Pisar bastante el freno

--- Using Mamdani - BOA ---
In: (12, 67, 10)
Grado: 30.0
Esperado: Pisar mas o menos el freno
```

Hasta ahora hemos usado como entrada al sistema valores precisos, pero es posible que nuestro sensor de distancia no siempre de un valor correcto o que no sea posible determinar de forma precisa la velocidad del auto que este delante nuestro podriamos entonces representar en ocasiones estas mediciones como un conjunto difuso. Supongamos que si conocemos la velocidad de nuestro auto la cual es 65, pero no de forma segura las otras dos variables las cuales las representaremos con dos conjuntos difuso $D = \text{Triangular}(5, 11, 18)$ y $S = \text{Trapezoidal}(-1, 0, 5, 15)$, representamos el valor de la velocidad de nuestro auto como un conjunto difuso V y construimos la entrada al sistema (D, V, S), para ello establecemos que nuestra entrada será conjuntos difusos y obtenemos:

```
    Fuzzy Sets as Input
--- Using Mamdani - COA ---
Grado: 50.555553325387486
```

Consideraciones

Al observar las pruebas realizadas primeramente nos percatamos que para conjuntos de valores de entrada se obtendrá el mismo valor de salida, algo que no sería lo ideal tomando en cuenta que tal vez en determindas situaciones no intesera obtener un valor medio sino algo más preciso, esto podría resolverse si en lugar de funciones de pertenencia triangulares para los grados de frenado empleamos gaussianas u otro tipo de función con un comportamiento más curvado.

Repositorio

https://github.com/CRafa97/fuzzy-logic-system

References

[1] **First Course on Fuzzy Theory and Applications**. Prof. Kacprzyk, Janusz. Systems Research Institute