Tarea 6 Macroeconomía 1
Maestría en Ciencias Economicas

Profesor: Facundo Sepúlveda
Cristóbal Meneses

1.-Hualqui, un pueblo de la octava región, está poblado por individuos que viven T periodos. El individuo i recibe un ingreso estocástico y_{it}, con $E(y_it) = y$ y $var(y_{it}) = \sigma^2$. Los shocks de ingreso son independientes entre individuos. En Hualqui no hay banco, por lo que no se puede ahorrar ni tomar prestado, con lo que los individuos deben consumir su ingreso cada período. Cada individuo indexa su bienestar de acuerdo a la función de utilidad esperada

$$E(U) = E\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(ac_t - b_t^2)$$

a) Exprese la utilidad esperada en términos de y, σ^2 y T

$$\begin{aligned}
E(U) &= E\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(ac_t - bc_t^2) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(E(ac_t) - E(bc_t^2)) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(aE(y_t) - bE(c_t^2)) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(a\bar{y} - b(\sigma^2 + \bar{y}^2)) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2)
\end{aligned}$$

Hacemos una transformacion sobre la sumatoria (conviertiendo su rango de $t = [1, T]$ a $t = [0, T - 1]$ para convertirla a

$$(\frac{1-\beta^T}{1-\beta})((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2)$$

b) El gobierno de Hualqui propone un programa de impuestos y transferencias. Bajo este programa, el gobierno va a transferir cada período $b_{it} = \theta(yy_{it})$. Si b_{it} es negativo, entendemos que el gobierno cobra un impuesto.

1) Encuentre la esperanza de b_{it}, su varianza y su covarianza con y_{it}.

Con $c_{it} = y_i + \theta(\bar{y} - y_i)$,

$$\begin{aligned}
E(b_it) &= E(\theta(\bar{y} - y_i)) \\
&= \theta(\bar{y} - \bar{y}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo que $E(c_{it}) = \bar{y}$.

$$\begin{aligned} Var(b_{it}) &= Var(\theta(\bar{y} - y_i)) \\ &= \theta^2 Var(\bar{y} - y_i)) \\ &= \theta^2\sigma^2 \end{aligned}$$

La convarianza es:

$$\begin{aligned} Cov(y_i, c_{it}) &= E(\theta(\bar{y} - y_i)y_i) - E(\theta(\bar{y} - y_i))E(y_i) \\ &= \theta(E(y_i\bar{y}) - E(y_i^2)) \\ &= -\theta\delta^2 \end{aligned}$$

2) Encuentre la utilidad esperada bajo esta política, en términos de y, σ^2, T y θ.
La esperanza de la nueva utilidad es

$$E(u(c_t)) = E(\sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}(a(y_i + b_{it}) - b(y_i + b_{it})^2)$$

$$= E(\sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}(a(y_i + \theta(\bar{y} - y_i)) - b(y_i + \theta(\bar{y} - y_i))^2))$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}(a\bar{y} + E(b_{it}) - bE(y_i^2 + 2\theta(\bar{y} - y_i)y_i + \theta^2(\bar{y} - y_i)^2))$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}(a\bar{y} - b(E(\bar{y}^2 + \sigma^2) - 2\theta\sigma^2 + \theta^2\sigma^2))$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}(a\bar{y} - b(\bar{y}^2 + \sigma^2(1 - 2\theta + \theta^2)))$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \beta^{t-1}((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2(1 - 2\theta + \theta^2))$$

reemplazando la sumatoria exponencial,

$$E(u(y_{i,t} + b_{i,t})) = (\frac{1 - \beta^T}{1 - \beta})((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2(1 - 2\theta + \theta^2))$$

3) Mejora esta politica el bienestar de los Hualquinos? explique.
Si recordamos la utilidad antes de el impuesto $\_i, t$ era de

$$E(u(y_{i,t})) = (\frac{1 - \beta^T}{1 - \beta})((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2)$$

y con el impuesto es de

$$E(u(y_{i,t} + b_{i,t})) = (\frac{1 - \beta^T}{1 - \beta})((a - b\bar{y})\bar{y} - b\sigma^2(1 - 2\theta + \theta^2))$$

Esto ocurre por que en una funcion de utilidad cuadratica los consumidores son fuertemente aversos al riesgo hasta tener un descuento dada la varianza. Entonces, el aparato repartidor de la politica puede multiplicar la incertidumbre de estar mal calibrado. Los consumidores estarán indiferentes a los cambios en la politica si $(1 - 2\theta + \theta^2) = 1$, que ocurre solo en $\theta = [0, 2]$. Cualquier valor distributivo θ entre estos dos puntos aumenta la utilidad.

4) Que nivel de θ deberia usar el gobierno de Hualqui? Encuentre el nivel óptimo de θ. Para encontrar el valor optimo de θ podemos encontrar el minimo de el efecto multiplicador $(1 - 2\theta + \theta^2)$, que sabemos que existe pues es una ecuación cuadratica. Este mínimo se encuentra en nada mas y nada menos que en $\theta = 1$, causando que $(1 - 2\theta + \theta^2) = 0$. En este punto, el gobierno te quita todo lo que tengas por encima del promedio para darselo a aquellos que estén debajo del mismo. Esto elimina completamente el efecto negativo de la varianza en la utilidad esperada, dandole un ingreso asegurado a todos los miembros de la economía de $\bar{y}$ y una utilidad esperada de

$$E(u(y_{i,t} + b_{i,t})) = (\frac{1 - \beta^T}{1 - \beta})(a - b\bar{y})\bar{y}$$

c) En Quilacoya, al lado de Hualqui, las familias están compuestas cada una por n miembros que trabajan en las mismas condiciones que los Hualquinos. Los integrantes de cada familia ponen susingresos individuales en un fondo común y lo dividen en partes iguales, con lo que cada quien recibe $\hat{y_i}t = \frac{\sum_{i=1}^n y_{it}}{n}$. Muestre que los habitantes de Quilacoya viven mejor (tienen mayor utilidad esperada) que los de Hualqui, en ausencia de políticas redistributivas (b_{it}). La utilidad esperada en Quilacoya es de

$$E(U_Q) = E(\sum_{t=1}^T \beta^{t-1}(ac_{it} - bc_{it}^2))$$

$$= E(\sum_{t=1}^T \beta^{t-1}(a\frac{\sum_{i=1}^n y_{it}}{n} - b(\frac{\sum_{i=1}^n y_{it}}{n})^2))$$

$$= \sum_{t=1}^T \beta^{t-1}(aE(\frac{\sum_{i=1}^n y_{it}}{n}) - bE((\frac{\sum_{i=1}^n y_{it}}{n})^2))$$

$$= \sum_{t=1}^T \beta^{t-1}(a\frac{n}{n}\hat{\hat{y}} - \frac{b}{n^2}(nE(y_{it})^2))$$

$$= \sum_{t=1}^T \beta^{t-1}(a\hat{\hat{y}} - \frac{b}{n}(\hat{\hat{y}}^2 + \sigma^2))$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t((a - \frac{b}{n}\hat{\hat{y}})\hat{\hat{y}} - \frac{b}{n}\sigma^2)$$

$$= ((a - \frac{b}{n}\hat{\hat{y}})\hat{\hat{y}} - \frac{b}{n}\sigma^2)(\frac{1 - \beta^T}{1 - \beta})$$

Asuminedo que el promedio de todos los promedios de hogares es igual al de todos los ingresos($\hat{\hat{y}} = \bar{y}$), la utilidad va a ser mayor en Quilacoya respecto a Hualqui siempre que el hogar tenga mas de un integrante. En la practica, repartir de esta manera el ingreso del hogar disminuye la inseguridad del hogar. La aversión al riesgo de un individuo con utilidad cuadratica es de

$$ARA = \frac{b}{a - b\bar{y}}$$

Con este sistema redistrubutivo, el valor de b se convierte en $b^* = \frac{b}{n}$. Así la aversión al riesgo con este sistema redistributivo es

$$\frac{\frac{b}{n}}{a - \frac{b}{n}\bar{y}} = \frac{b}{an - b\bar{y}} < \frac{b}{a - b\bar{y}}$$

Por lo que este sistema distributivo vuelve a los individuos menos aversos al riesgo.

2.-Tenemos una economia donde los individuos viven tres períodos, y reciben ingresos estocásticos y_t , con $E(y_t) = \bar{y}$. Existe la misma cantidad, que normalizamos a 1, de individuos de cada edad: jóvenes (j), adultos(m), y viejos (v). Los individuos indexan su bienestar de acuerdo a la función de utilidad esperada

$$E(U) = E(\sum_{t=1}^{3} ac_{it} - bc_{it}^2)$$

Donde $i \in j, m, v$. El factor de descuento es portanto igual a 1, y la tasa de interés es cero.

a) Defina el problema que resuelve el individuo y encuentre las condiciones de primer orden.

Los individuos intentarán maximizar su utilidad intertemporal sujeta a una serie de restricciones presupuestarias:

$$c_j \leq y_j - A_j$$

$$c_m \leq y_m + A_j - A_m$$

$$c_v \leq y_v + A_m$$

$$c_j + c_m + c_v = y_j + y_m + y_v$$

Si notamos que la función de utilidad es cuadratica con un elemento cuadrado negativo, vemos que hay un optimo en cada periodo. Si pensamos que ese consumo optimo esta cerca del $\bar{y}$ y notamos que, al no dejar descendencia, el individuo no tiene elección en (v), tenemos que

$$E(c_j) = E(y_j - A_j)$$

$$E(c_m) = E(y_m + (A_j - A_m))$$

$$E(c_v) = E(y_v - A_m)$$

Donde los ahorros A_j, A_m son la desición de los individuos de periodo a periodo. Luego tenemos que la esperanza de la utilidad es

$$E(U) = aE(y_j - A_j) - bE((y_j - A_j)^2) + aE(y_m + (A_j - A_m)) - bE((y_m +$$

$$(A_j - A_m))^2) + aE(y_v - A_m) - bE((y_v - A_m)^2)$$

$$= a\bar{y} - aA_j - b(E(y_j^2 - 2y_jA_j + A_j^2))+$$

$$a\bar{y} + aA_j - aA_m - b(E(y_m^2 - 2y_m(A_j - A_m) + (A_j^2 - 2A_jA_m + A_m^2))) +$$
$$a\bar{y} - aA_m - b(E(y_v^2 - 2y_vA_m + A_m^2))$$

Si eliminamos los valores repetidos, tenemos que:

$$E(U) = 3a\bar{y} - b(3\bar{y}^2 + 3\sigma^2 + 2(A_j^2 - 2A_jA_m + A_m^2))$$

$$E(U) = 3(a\bar{y} - b(\bar{y}^2 + \sigma^2)) - b(2(A_j^2 - 2A_jA_m + A_m^2))$$

Que es equivalente a la esperanza de consumir el ingreso medio todos los periodos menos una correlación entre los ahorros en la juventud y en la mediana edad. Para darle matiz al analisis pondremos una condicion de no negatividad de los ahorros. Si estas condiciones no se cumplen ,esto es, $y_i < c_i$, el ingreso en un periodo es menor que lo que le gustaria al individuo haber consumido en ese periodo. Así, el consumo esperado se maximiza en

$$Max_{A_j,A_m}\Lambda : 3(a\bar{y} - b(\bar{y}^2 + \sigma^2)) - b(2(A_j^2 - 2A_jA_m + A_m^2)) + A_j\lambda_j + A_m\lambda_m$$

Con las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_j} = -b(4A_j - 2A_m) + \lambda_j = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_m} = -b(-2A_j + 4A_m) + \lambda_m = 0$$

$$A_j\lambda_j = 0$$

$$A_m\lambda_m = 0$$

Reordenamos y tenemos que

$$\partial\Lambda_j : E(A_m) = \frac{4bE(A_j) - \lambda_j}{2b}$$

$$\partial\Lambda_m : E(A_m) = \frac{2bE(A_j) + \lambda_m}{4b}$$

Esto se podria interpretar como dos restricciones que obedece el consumidor pues intenta equilibrar su consumo presente con su consumo pasado cada vez que ahorra. Igualando ambas esperanzas:

$$\frac{4bE(A_j) - \lambda_j}{2b} = \frac{2bE(A_j) + \lambda_m}{4b}$$

obteniendo que $E(A_m) = \frac{2\lambda_m + \lambda_j}{6b}$ y $E(A_j) = \frac{\lambda_m + 2\lambda_j}{6b}$ A continuacion exploramos los 4 casos con estas condiciones

- 1. $\lambda_j = \lambda_m = 0$ En este caso deberá ser cierto que $A_m = 0{,}5A_j$ y $A_j = 0{,}5A_m$, que solo puede ocurrir cuando $A_j = A_m = 0$ por lo que en los periodos j, m $c_i = y_i$. Esto ocurriria si el ingreso estocastico coincide con el consumo deseado.

- 2. $\lambda_j = 0; \lambda_m \neq 0$: significa que $A_j = 0{,}5A_m$ y que $\lambda_m = -b(3A_m)$. En este caso, al individuo le "le fue biençuando joven hasta poder ahorrar una cantidad de ingreso que luego reparte mitad y mitad para sus periodos medio y viejo. Luego, en su periodo medio se tiene problemas financieros y se recibe menos del dinero esperado. λ_m es la tasa a la que el individuo perdería utilidad por cada unidad negativa.
- 3.$\lambda_j \neq 0; \lambda_m = 0$: Cuando joven no se tuvo la capacidad de ahorro pero cuando adulto si. En el optimo $A_m = 0{,}5A_j$ y $\lambda_j = -b(6A_m)$. Ya que no se puede enviar dinero al pasado, la interpretacion de este problema solo se puede entender como que, al tener menor ingreso en la juventud aumentará el ahorro en la edad media para gastar mas en la vejez, intentando compensar.
- 4. $\lambda_j \neq 0; \lambda_m \neq 0$ significa que $A_j, A_m < 0$ pues durante dos periodos consecutivos ve su ingreso por debajo de lo esperado y no consigue ahorrar.

b) Encuentre las funciones de consumo para los tres periodos Ya que los individuos quieren homogeneizar su consumo intertemporal, se ve que

$$c_j = E_j(c_m) = E_j(E_m(c_v))$$

Por lo que podemos empezar a buscar el valor desde el final:

$$c_v = y_v + A_m$$

$$E_m(c_v) = E_m(y_v) + E_m(A_m)$$

que ya que buscamos homogeneizar consumo, es

$$c_m = \bar{y} + A_m$$

$$c_m = \bar{y} + y_m + A_j - c_m$$

$$c_m = \frac{\bar{y} + y_m + A_j}{2}$$

Con esto podemos pasar a ver el consumo en c_j

$$E_j(c_m) = E(\frac{\bar{y} + y_m + A_j}{2})$$

$$c_j = \frac{\bar{y} + E(y_m) + E(A_j)}{2}$$

$$c_j = \frac{2\bar{y} + E(A_j)}{2}$$

Recordando la definición de A_j, tenemos que:

$$c_j = \frac{2\bar{y} + y_j - c_j}{2}$$

$$c_j = \frac{2\bar{y} + y_j}{3}$$

Esto representa la función de consumo de ingreso permanente:

$$c_t = \frac{1}{T-t+1}(A_{t-1} + y_t + (T-t)\bar{y})$$

Donde los tiempos $t = [1, 2, 3]$ corresponden a $[j, m, v]$.
c)El estado quiere incentivar el consumo, y para esto asigna, de forma no anticipada, un bono B a los más jóvenes (j). Como no puede emitir deuda, financia este bono cobrando impuestos iguales a $B/2$ tanto a los individuos de edad m como a los mas viejos (v).

1)Calcule el cambio en los niveles de consumo para los individuos de cada edad
Al ocurrir de manera tan subita el bono, es percibido como si un mes hubiese tenido un ingreso extraordinariamente bueno para los jovenes. Asimismo, los pertenecientes a los grupos m, v sienten el impuesto como un gasto impredecible que les prohibe ahorrar. Para los jovenes, el consumo aumentará segun la regla

$$c_j = \frac{2\bar{y} + y_j + B}{3}$$

y ,ya que podemos asumir que se saciará el deseo de consumo del individuo, en j,

$$E(A_j) = \frac{A_m}{2}$$

Esto significa que tomará a B y lo dividirá en tres pedazos iguales, los cuales consumirá durante el resto de su vida.
Para alguien que estaba en el periodo m de su vida cuando se ejecutó el impuesto, esto es un gasto impredecible, su consumo se vuelve

$$c_m = \frac{\bar{y} + y_m + A_j - 0{,}5B}{2}$$

que podria dejar a los que estaban en m en un deficit financiero, disminuyendo su ahorro. y así su utilidad tanto en m como v en $0{,}25B$.
Si recibe el impuesto en v, simplemente tendrá una disminucion de $0{,}5B$ de su consumo.

2)Defina el consumo agregado como $C_t = c_{jt} + c_{mt} + c_{vt}$. Como cambia C_t?
La utilidad en el periodo t antes del impuesto es de

$$\frac{2\bar{y} + y_j}{3} + \frac{\bar{y} + y_m + A_j}{2} + y_v + A_m$$

Y despues del impuesto se vuelve

$$\frac{2\bar{y} + y_j + B}{3} + \frac{\bar{y} + y_m + A_j - 0{,}5B}{2} + y_v + A_m - 0{,}5B$$

Si restamos ambas utilidades tenemos que

$$E(U(c^b_{jt}, c^b_{mt}, c^b_{vt}) - U(c_{jt}, c_{mt}, c_{vt})) = B(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2})$$

$$= -B(\frac{5}{12})$$

Esto es solo en el periodo mismo en que se aplica la politica. Si seguimos viendo en el tiempo, llegaremos a que el efecto de la politica se vuelve nulo. Esto se explica por la Equivalencia Ricardiana. Una transferencia directa temporal no es capaz de cambiar permanentente el comportameinto de los individuos.
3)Suponga ahora que el gobierno entrega B a cada individuo en t, y lo financia con impuestos de B -también a cada individuo en $t+1$. Como cambian en este caso los consumos individuales?

Si el bono fuese depositado a cada joven y luego financiado por personas de mediana edad y personas viejas cada periodo, el valor del bono se volverá estandar en el consumo esperado. La función de consumo agregado sería de

$$E(U(c^b_{jT}, c^b_{mT}, c^b_{vT}) = \frac{2\bar{y} + y_j + B}{3} + \frac{\bar{y} + y_m + A_j - \frac{B}{2} + \frac{B}{3}}{2} + y_v + A_m - 0{,}5B + 0{,}33B$$

La diferencia entre el caso sin politica y el caso con politica a largo plazo, tenemos que

$$E(U(c^b_{jT}, c^b_{mT}, c^b_{vT}) - U(c_{jt}, c_{mt}, c_{vt})) = B(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{B}{12}$$

Esto significa que los individuos están mejor con esta distribución de politica que si no la tuvieran a largo plazo. Este efecto puede ser por un grado de seguridad en la vida de los individuos pues saben desde el periodo joven que tienen un colchón de $\frac{B}{3}$. Esto tambien significa que es mucho mas probable que se esté en el caso 2 de ahorro, en que el excedente de la juventud alcanza para equilibrar cualquier periodo malo en el tiempo posterior.