Examen Macroeconomía 1

Maestría en Ciencias Economicas

Profesor: Facundo Sepúlveda
Cristóbal Meneses

1.-En una economía de Ramsey, la producción se lleva a cabo con trabajo L, capital físico K, y capital humano H. La función de producción es

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\gamma} L_t^{1-\alpha-\gamma}.$$

Denotamos I_{ht} a los recursos invertidos en capital humano en el período t. El capital humano evoluciona de acuerdo a

$$H_{t+1} = (1-\delta_h)H_t + b\sqrt{L_t I_{ht}}$$

Donde δ_h es la tasa de depreciación del capital humano, y b es un parámetro. La ley de movimiento del capital físico es estándar:

$$K_{t+1} = (1-\delta_k)K_t + I_{kt}$$

De esta forma, los individuos pueden invertir sus recursos físicos en acumular capital humano, acumular capital físico, y consumir. La función de utilidad es

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t lnC_t$$

a) Escriba la restricción de recursos físicos de esta economía

La economia esta sujeta a la restriccion de que, en el tiempo t, lo que se produce debe ser mayor o igual a todo lo que se consume y lo que se acumula como capital humano y material. Esto es

$$C_t + I_{ht} + I_{kt} \leq Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\gamma} L_t^{1-\alpha-\gamma}$$

Podemos obtener valores para la inversión reordenando las ecuaciones de acumulación de capital:

$$I_{kt} = K_{t+1} - (1-\delta_k)K_t$$

y la funcion de acumulacion de capital humano:

$$I_{ht} = \frac{1}{L_t}\left(\frac{H_{t+1} - (1-\delta_h)H_t}{b}\right)^2$$

por lo que en terminos de stock, el limite fisico de la economia es

$$C_t + \frac{1}{L_t}\left(\frac{H_{t+1} - (1-\delta_h)H_t}{b}\right)^2 + K_{t+1} - (1-\delta_k)K_t \leq Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\gamma} L_t^{1-\alpha-\gamma}$$

b) Exprese todas las ecuaciones, incluyendo la restricción de recursos, en términos per cápita. Suponga que L_t crece a la tasa g

Para obtener los valores per capita dividimos las expresiones por L_t. La primera y mas simple transformación será la de C_t a c_t, el consumo per capita. Ya que asumimos que todos los consumidores de la economía tienen la misma función de utilidad, el proceso de volver el consumo per capita es una transformación lineal que no cambiará la ecuación.

$$U(c_t) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t lnc_t$$

Luego, al crear las tasas de crecimiento del capital per capita tenemos que

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{K_{t+1}L_{t+1}}{L_{t+1}L_t} = gk_{t+1} = (1-\delta_k)k_t + i_{kt}$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{g}((1-\delta_k)k_t + i_{kt})$$

y para el capital humano

$$\frac{H_{t+1}}{L_t} = \frac{H_{t+1}L_{t+1}}{L_{t+1}L_t} = g * h_{t+1} = (1-\delta_h)h_t + b\sqrt{\frac{I_{ht}}{L_t}}$$

$$h_{t+1} = \frac{1}{g}((1-\delta_h)h_t + b\sqrt{i_{ht}})$$

El producto se vuelve

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K^\alpha}{L_t^\alpha}\frac{H_t^\gamma}{L_t^\gamma}\frac{L_t^{1-\alpha-\gamma}}{L_t^{1-\alpha-\gamma}}$$

$$y_t = k_t^\alpha h_t^\gamma$$

Por ultimo, el limite material de producción es de

$$c_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) \leq y_t$$

c) Defina el problema del planificador, y obtenga las condiciones de primer orden.
El planificador maximizará la utilidad de todos los individuos sujeto a la restricción material de la economia. Esto significa, en terminos per capita que maximiza la función

$$Max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t ln(c_t)$$

$$s.a \;\; c_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - y_t$$

Construiremos un lagrangeano

$$L = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t ln(c_t) - \Lambda_t(c_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - y_t)$$

En la que aplicamos una ligera transfromación para obtener

$$L = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (ln(c_t) - \lambda_t(c_t + (\frac{g^2h_{t+1}^2 - 2g(1-\delta_H)h_th_{t+1} + (1-\delta_h)^2h_t^2}{b^2}) + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - k_t^\alpha h_t^\gamma))$$

El organizador central es capaz de cambiar las dotaciones de los factores productivos, por lo que maximizaremos respecto a ellos, produciendo las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_c} - \lambda_t = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t 2g \frac{(gh_{t+1} - (1-\delta_H)h_t)}{b^2} - \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(2(1-\delta_H)\frac{-gh_{t+2} + (1-\delta_H)h_{t+1}}{b^2} - \gamma \frac{k_{t+1}^{\alpha}}{h_{t+1}^{1-\gamma}})$$

=0 (2)

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t g - \beta^{t+1}(\lambda_{t+1}((1-\delta_k) - \alpha \frac{h_t^{\gamma}}{k_t^{1-\alpha}})) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c_t + (\frac{g^2 h_{t+1}^2 - 2g(1-\delta_H)h_t h_{t+1} + (1-\delta_h)^2 h_t^2}{b^2}) + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - k_t^{\alpha} h_t^{\gamma} \tag{4}$$

Reordenando (1), tenemos que

$$c_t = \frac{\beta^t}{\lambda_t}$$

o

$$\lambda_t = \frac{\beta^t}{c_t} \tag{5}$$

Por lo que el consumo depende directamente de la holgura en que se cumple la restricción presupuestaria y la paciencia en el periodo t.

Podemos ordenar (2) para obtener

$$\beta^t \lambda_t 2g \frac{(gh_{t+1} - (1-\delta_H)h_t}{b^2} = \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(2(1-\delta_H)\frac{(gh_{t+2} - (1-\delta_H)h_{t-1})}{b^2} + \gamma \frac{k_{t+1}^{\alpha}}{h_{t+1}^{1-\gamma}})$$

Notando que las fracciones $\frac{(gh_{t+1}-(1-\delta_H)h_t}{b^2}$ y $\frac{(gh_{t+2}-(1-\delta_H)h_{t-1})}{b^2}$ son equivalentes a la raiz de la inversion en capital humano sobre b, podemos generar

$$\beta^t \lambda_t \frac{2g}{b}\sqrt{i_{Ht}} = \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(\frac{2(1-\delta_H)}{b}\sqrt{i_{H,t+1}} + \gamma \frac{k_{t+1}^{\alpha}}{h_{t+1}^{1-\gamma}})$$

$$\lambda_t = \frac{\beta}{g}\lambda_{t+1}((1-\delta_H)\sqrt{\frac{i_{H,t+1}}{i_{H,t}}} + \gamma \frac{\gamma b}{2\sqrt{i_{Ht}}}\frac{k_{t+1}^{\alpha}}{h_{t+1}^{1-\gamma}}) \tag{6}$$

Por ultimo, podemos reemplazar (5) en (3) y (6) para obtener las ecuaciones de Euler:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{\beta^2}{g}(\alpha \frac{h_t^{\gamma}}{k_t^{1-\alpha}} - (1-\delta_H)) \tag{7}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{\beta^2}{g}((1-\delta_H)\sqrt{\frac{i_{H,t+1}}{i_{H,t}}} + \frac{\gamma b}{2\sqrt{i_{H,t}}}\frac{k_{t+1}^{\alpha}}{h_{t+1}^{1-\gamma}}) \tag{8}$$

Ambas ecuaciones muestran el crecimiento del consumo de un perido al siguiente. (7) muestra como este aumento de consumo depende de lo productivo que es el capital físico respecto a la tasa de depreciación. (8) por el otro lado da una mucho mayor oportunidad para hacer una analisis matizado de como crece el consumo respecto de la inversión. Se ve que el capital humano tiene una especie de factor pegajoso en que su efecto positivo depende de varios periodos consecutivos.

d) Defina el problema del individuo, y obtenga las condiciones de primer orden

El individuo intentará maximizar su utilidad en el tiempo sujeta a su sueldo y el precio de los bienes de consumo. Planteremos el vector de pagos **P** exógeno respecto al cual el individuo maximiza.

$$Max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t ln(c_t)$$

$$s.a \;\; pc_t + i_h + i_k = w + r_h h_t + r_k k_t$$

Generando el lagrangeano

$$\Lambda_c = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t ln(c_t) - \lambda(pc_t + i_h + i_k - w - r_h h_t - r_k k_t)$$

reemplazando los valores de las inversiones, tenemos

$$\Lambda_c = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t ln(c_t) - \lambda(pc_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - w - r_h h_t - r_k k_t)$$

y sus CPO

$$\frac{\partial \Lambda_c}{\partial c_t} = \beta^t \frac{1}{c_t} - \lambda p = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \Lambda_c}{\partial h_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t (\frac{\partial i_t}{\partial h_{t+1}}) - \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(\frac{\partial i_{t+1}}{\partial h_{t+1}} + r_H) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Lambda_c}{\partial k_{t+1}} = -\beta^t(\lambda_t(g) + \lambda_{t+1}(r_K + (1-\delta_K))) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \Lambda_c}{\partial \lambda_t} = pc_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) - w - r_h h_t - r_k k_t = 0 \tag{12}$$

Que podemos ordenar para tener las siguientes tasas de Euler:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{p_t}{p_{t+1}}\frac{\beta^2}{g}(r_K + (1-\delta_K)) \tag{13}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{p_t}{p_{t+1}}\frac{\beta^2}{g}((1-\delta_H)\sqrt{\frac{i_{H,t+1}}{i_{H,t}}} + \frac{b}{2\sqrt{i_{H,t}}}r_H) \tag{14}$$

e) Defina el problema de la firma, y obtenga las condiciones de primer orden La firma maximizará sus beneficios sujetos a la restricción deposibilidad de producción

$$Max_{c_t,h_t,k_t} p * c_t - r_H h_t - r_K k_t$$

$$s.a \;\; c_t \leq h^\gamma k^\alpha$$

que podemos plantear como el lagrangeano

$$\Lambda_f = p * c_t - r_H h_t - r_K k_t - \lambda(c_t \leq h^\gamma k^\alpha)$$

para obtener las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \Lambda_f}{\partial c_t} = p - \lambda_t c_t = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Lambda_f}{\partial h_t} = -r_H + \lambda_t(\gamma\frac{k_t^\alpha}{h_t^{1-\gamma}}) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Lambda_f}{\partial k_t} = -r_K + \lambda_t(\alpha\frac{h^\gamma}{k^{1-\alpha}}) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Lambda_f}{\partial \lambda_t} = c_t - h^\gamma k^\alpha = 0 \tag{18}$$

que podemos ordenar en la tasa marginal de sustitución entre capital y ahorro

$$TMS_{HK} = \frac{r_H}{r_K}$$

De esto, podemos obtener que en el equilibrio de la firma, la cantidad optima de capital material es

$$k_t^* = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{r_H}{r_K}h_t$$

f) Defina en que consiste un equilibrio en esta economía: que objetos componen el equilibrio, y que características cumplen estos objetos.

En la economia todos los agentes responden a estimulos a partir de otros agentes. En equilibrio, estos agentes tomarán desiciones que sean consistentes con las de los demás. Cada firma será tomadora de un precio de mercado

$$PRMg_h(f(h,k)) = r_H$$

$$PRMg_k(f(h,k)) = r_K$$

Que dependen de la economía agregada. Los hogares a su vez resuelven los problemas dinamicos (13) y (14) junto a la restricción presupuestaria

$$pc_t + (\frac{gh_{t+1} - (1-\delta_h)h_t}{b})^2 + (gk_{t+1} - (1-\delta_k)k_t) = w + r_h h_t + r_k k_t$$

Para todos los agentes se aplica un mismo precio $r(k) = r(K)$.
Con el problema deifnido, definimos un equilibrio como la situacion en que, dado un vector de precios $\mathbf{P} = \{r_{h,t}, r_{k,t}, w_t\}_{t=1}^{\infty}$ y una asignación $\{c_t, k_{t+1}, K_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}$, se cumplan las condiciones:

- Dado $\{r(k_t), w(K_t)\}_{t=1}^{\infty}$ y la secuencia $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}$ se resuelve el problema del consumidor.
- Dado $\{r(k_t), w(K_t)\}_{t=1}^{\infty}$, la firma resuelve para $\{K_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}$ maximizando beneficios.
- Los mercados quedan en enquilibrio tal que no haya diferencia entre lo demandado y lo consumido.

g) Muestre que las CPO asociadas al equilibrio son equivalentes a las CPO del planificador. Interprete.

El problema del planificador maximiza la utilidad de los agentes en funcion de la produccion material posible de la economia. El agente, por otro lado, maximiza su utilidad sujeto al ingreso que puede tener dados los precios, que no puede controlar. El segundo teorema fundamental del bienestar dice , si los agentes presentan insaciabilidad local y utilidades convexas, y el conjunto de posibilidad de producción es convexo, se puede pasar de un estado pareto eficiente a otro a traves de un cambio en precios. Así, existe un vector de precios que hace calzar el equilibrio de mercado con el equilibrio teorico del organizador.

Este equilibrio se puede ver claramente al comparar las funciones de crecimiento del consumo respecto al capital humano((8),(14)) y fisico((7),(13)) en ambos modelos. Al igualar ambos crecimientos, los precios óptimos son

$$r_K = \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{\gamma}$$
$$r_H = \gamma k_t^{\alpha} h_t^{\gamma-1}$$

Que coincide con el valor óptimo del mercado cuando se considera la firma según (16) y (17). La ventaja de convocar el equilibrio del productor es que la estructura burocratica de la empresa puede crear distorciones que no necesariamente permitirían llegar a este equilibrio.
h) El archivo `pep_incompleta.m` contiene un código para resolver este problema de forma numérica. El programa está incompleto,en el sentido que algunas líneas, o parte de ellas, ha sido borrado. Complete el programa de forma que corra.