Lecture 12: More Examples of 2-Dimensional Random Variable Function

【例】(差的分布) 设 (X,Y) 的密度为 $p(x,y)$，考虑 $Z=X-Y$ 的分布：

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P(X-Y\le z)&=\iint_{\{(x,y):x-y\le z\}}p(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{x-z}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx\\&\overset{y=x-v}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z}^{-\infty}p(x,x-v)d(-v)dx\\&=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-v)dx\right)dv\end{aligned}$$

因此 Z 的密度函数为

$$p_Z(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-v)dx$$

如果先积 x，可以类似地得到另一种表达式：$p_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y+u,y)dy$。

【例题】(习题 3.27) 设 (X,Y) 的密度为 $p(x,y)=\begin{cases}3x & ,0<y<x<1\\0 & ,otherwise\end{cases}$，求 $Z=X-Y$ 的密度。

> 解：画图容易得出 $p(x,y)$ 的有效区域是一个三角形。
>
> $$F_Z(z)=P(X-Y\le z)=\iint_{\{(x,y):x-y\le z\}}p(x,y)dxdy$$
>
> 用直线 $x=y+z$ 滑过平面，关注直线的左侧。容易看出 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$，$z\ge 1$ 时 $F_Z(z)=1$。这两中情况下 $p_Z(z)=0$。$0\le z<1$ 时，区域不太规则，要分成两个部分：
>
> $$\begin{aligned}F_Z(z)&=\int_0^z\int_0^x 3xdydx+\int_z^1\int_{x-z}^x 3xdydx\\&=\int_0^z 3x^2dx+\int_z^1 3zxdx\\&=-\frac{1}{2}z^3+\frac{3}{2}z\end{aligned}$$
>
> 从而 $p_Z(z)=F_Z'(z)=-\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{2}$。

【例】(积和商的分布) 设 (X,Y) 的密度为 $p(x,y)$，考虑两者积和商的分布：

- $Z=XY$
- $Z=\frac{X}{Y}$。

对于积的分布，

$$F_Z(z)=P(XY\le z)=\iint_{\{(x,y):xy\le z\}}p(x,y)dxdy$$

我们要小心 x 的符号对积分上下限的影响，因此要分类讨论 $x<0$ 和 $x>0$ 的情况：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{z/x}^{+\infty} p(x,y)dy\right)dx + \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z/x} p(x,y)dy\right)dx \\
&\overset{y=\frac{v}{x}}{=} \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{z}^{-\infty} p(x,\frac{v}{x})d\frac{v}{x}\right)dx + \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} p(x,\frac{v}{x})d\frac{v}{x}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} -p(x,\frac{v}{x})\frac{1}{x}dxdv + \int_{-\infty}^{z}\int_{0}^{+\infty} p(x,\frac{v}{x})\frac{1}{x}dxdv \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\frac{v}{x})\frac{1}{|x|}dx\right)dv
\end{aligned}
$$

因此密度函数

$$
p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\frac{v}{x})\frac{1}{|x|}dx
$$

当然，如果先积 y 再积 x，我们可以得到对称的形式：$p_Z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\frac{u}{y},y)\frac{1}{|y|}dy$。

对于商的分布，

$$
F_Z(z) = P(X/Y \le z) = \iint_{\{(x,y):\frac{x}{y}\le z\}} p(x,y)dxdy
$$

类似地，考虑 $y<0$ 和 $y>0$，

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{yz}^{+\infty} p(x,y)dx\right)dy + \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{yz} p(x,y)dx\right)dy \\
&\overset{x=yu}{=} \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{z}^{-\infty} p(yu,y)d(yu)\right)dy + \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} p(yu,y)d(yu)\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{0} p(yu,y)(-y)dy\right)du + \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{0}^{+\infty} p(yu,y)ydy\right)du \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(yu,y)|y|dy\right)du
\end{aligned}
$$

因此密度函数

$$
p_Z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(yu,y)|y|dy
$$

【例题】(习题 3.28) (X,Y) 的密度为 $p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,0\le x\le 2, 0\le y\le 1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$，求 $Z=XY$ 的密度。

> 解：用反比例函数曲线 $z=xy$ 滑过平面，考虑曲线下方的部分。显然当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$，$z\ge 2$ 时 $F_Z(z)=1$。下面考虑 $0\le z<2$ 的部分：
>
> $$F_Z(z) = \int_0^z\int_0^1 \frac{1}{2}dydx + \int_z^2\int_0^{\frac{z}{x}} \frac{1}{2}dydx = \frac{z}{2}(\ln 2 + 1 - \ln z)$$
>
> 从而 $p_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln z)$。