

카르노 맵 (Karnaugh Map)

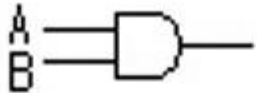
이윤경

부울 대수

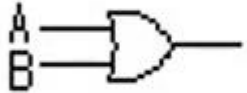
0과 1의 입력신호로 수학적인 계산을 하기 위해서 만들어진 수학

부울 대수의 기본 게이트


명칭 그래픽 기호 함수식 진리치표

AND  $X = AB$


A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR  $X = A+B$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

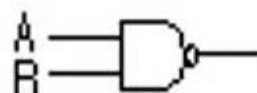
NOT  $X = A'$

A	X
0	1
1	0


Buffer  $X = A$

A	X
0	0
1	1


명칭 그래픽 기호 함수식 진리치표

NAND  $X = (AB)'$


A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR  $X = (A+B)'$

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

XOR  $X = (A \oplus B)$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR  $X = (A \odot B)$

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

부울 대수의 기본 법칙

변수 X와 0, 1과 연산

$$X + 0 = X$$

$$X * 1 = X$$

$$X + 1 = 1$$

$$X * 0 = 0$$

동일 법칙

$$X + X = X$$

$$X * X = X$$

다중 부정

$$(X')' = X$$

상보 법칙

$$X + X' = 1$$

$$X * X' = 0$$

교환 법칙

$$XY = YX$$

$$X + Y = Y + X$$

결합 법칙

$$(XY)Z = X(YZ) = XYZ$$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$$

분배 법칙

$$X(Y + Z) = XY + XZ$$

$$X + YZ = (X + Y)(X + Z)$$

드모르간의 법칙

$$(X + Y)' = X'Y'$$

$$(XY)' = X' + Y'$$

부울 식의 간략화 정리

$$XX + XY' = X$$

$$(X + Y)(X + Y') = X$$

$$X + XY = X$$

$$X(X + Y) = X$$

$$(X + Y')Y = XY$$

$$XY' + Y = X + Y$$

x	y	z	최소항	최대항	F
0	0	0	$x'y'z' (m_0)$	$x + y + z (M_0)$	1
0	0	1	$x'y'z (m_1)$	$x + y + z' (M_1)$	0
0	1	0	$x'yz' (m_2)$	$x + y' + z (M_2)$	0
0	1	1	$x'yz (m_3)$	$x + y' + z' (M_3)$	0
1	0	0	$xy'z' (m_4)$	$x' + y + z (M_4)$	0
1	0	1	$xy'z (m_5)$	$x' + y + z' (M_5)$	0
1	1	0	$xyz' (m_6)$	$x' + y' + z (M_6)$	0
1	1	1	$xyz (m_7)$	$x' + y' + z' (M_7)$	1

Q. x, y, z 숫자가 전부 같을 때만 1인 식,

$$F = m_0 + m_7 = M_1 * M_2 * M_3 * \dots * M_6$$

$$= x'y'z + xyz$$

$$= (x+y+z')(x+y'+z) \dots (x'+y'+z)$$

- 최소항 전개(논리곱의 합)

- 최대항 전개(논리합의 곱)

냉장고 문이 닫힌 상태 내부 등이 켜져있거나, 새벽에 문이 열리면 벨이 울리는 기계

X : 냉장고 문이 닫힘(0) / 열림(1)

Y : 새벽이 아님(0) / 새벽(1)

Z : 내부 등이 꺼진 상태(0) / 켜진 상태(1)

F : 벨x(0) / 벨o(1)

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}F &= X'Y'Z + X'YZ + XYZ' + XYZ \\&= X'Z(Y' + Y) + XY(Z' + Z) \\&= X'Z + XY\end{aligned}$$

체계적인 방법을 적용하기 어렵다.
완전한 최소식을 얻지 못할 수도 있다

카르노맵(Karnaugh Map)

부울 함수를 visual diagram을 통하여 간소화 시키는 방법!!

특히 변수가 3변수 4변수로 이루어져 있을 때 유용

2변수 카르노맵

A \ B	0	1
0	A=0 B=0	A=1 B=0
1	A=0 B=1	A=1 B=1

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A \ B	0	1
0	1	0
1	1	0

$$\begin{aligned} F &= A'B' + A'B \\ &= A' \end{aligned}$$

3변수 카르노맵

3변수 카르노맵 (Karnaugh Map)의 초기 상태. 변수 A, B, C가 표시되어 있으며, 1의 위치가 표시되어 있다. \star 표시는 BC=11을 가리킨다.

	A		
	0	1	
BC	00	000	100
	01	001	101
	11	011	111
	10	010	110

참고: \star 표시는 BC=11을 가리킨다. \uparrow 와 \downarrow 표시는 1의 위치를 가리킨다.

0점
하고
있다!

3변수 카르노맵 (Karnaugh Map)의 첫 번째 단계. BC=11의 경우를 그룹화하여 b로 표시한다.

	A	
	0	1
BC	00	
	01	
	11	1
	10	1

그룹화 결과: b

3변수 카르노맵 (Karnaugh Map)의 두 번째 단계. BC=10의 경우를 그룹화하여 bc'로 표시한다.

	A	
	0	1
BC	00	
	01	
	11	
	10	1

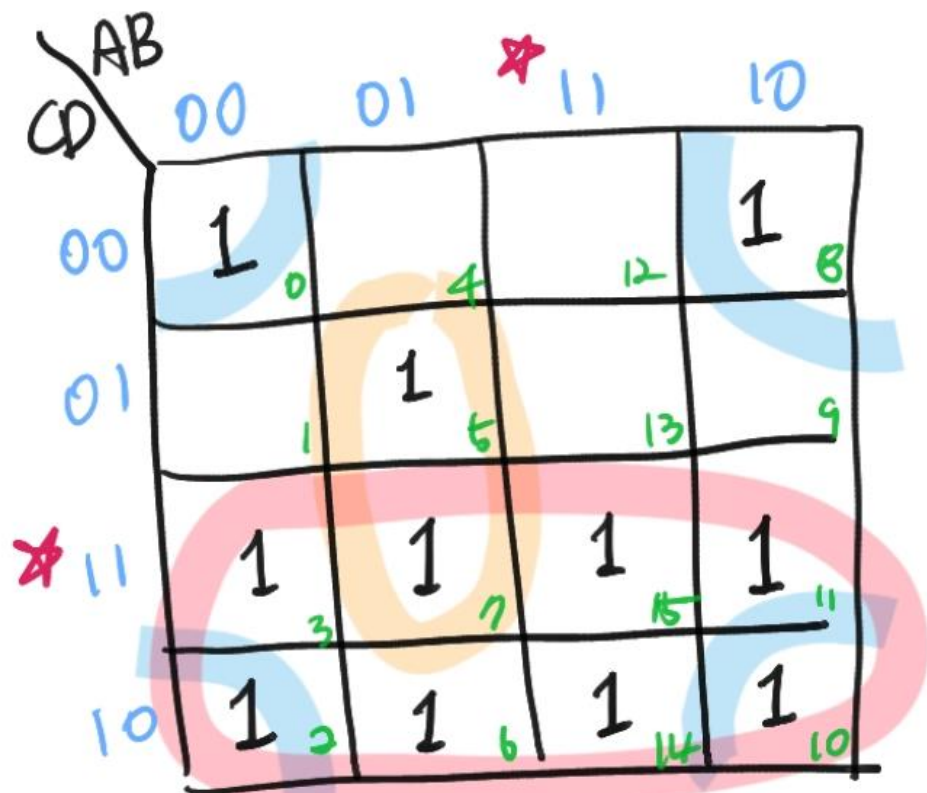
그룹화 결과: bc'

3변수 카르노맵 (Karnaugh Map)의 세 번째 단계. BC=01의 경우를 그룹화하여 ac' 로 표시한다.

	A	
	0	1
BC	00	
	01	1
	11	
	10	1

그룹화 결과: ac'

4변수 카르노맵



$$F = \sum m(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$$

$$\Rightarrow \underline{C + a'bd + b'd'}$$

냉장고 문이 닫힌 상태 내부 등이 켜져있거나, 새벽에 문이 열리면 벨이 울리는 기계

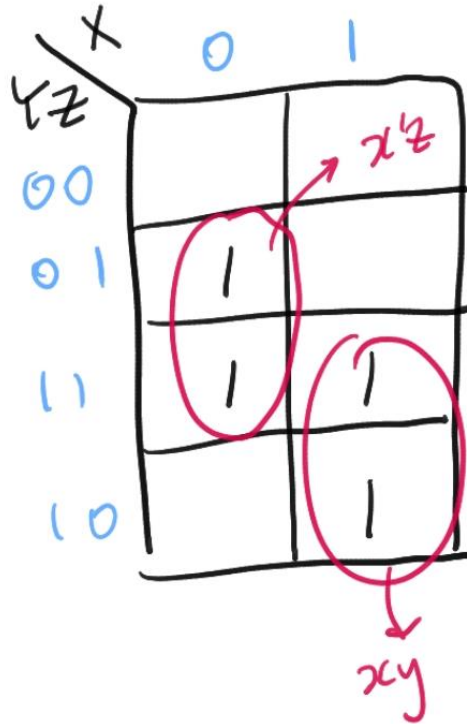
X : 냉장고 문이 닫힘(0) / 열림(1)

Y : 새벽이 아님(0) / 새벽(1)

Z : 내부 등이 꺼진 상태(0) / 켜진 상태(1)

F : 벨x(0) / 벨o(1)

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

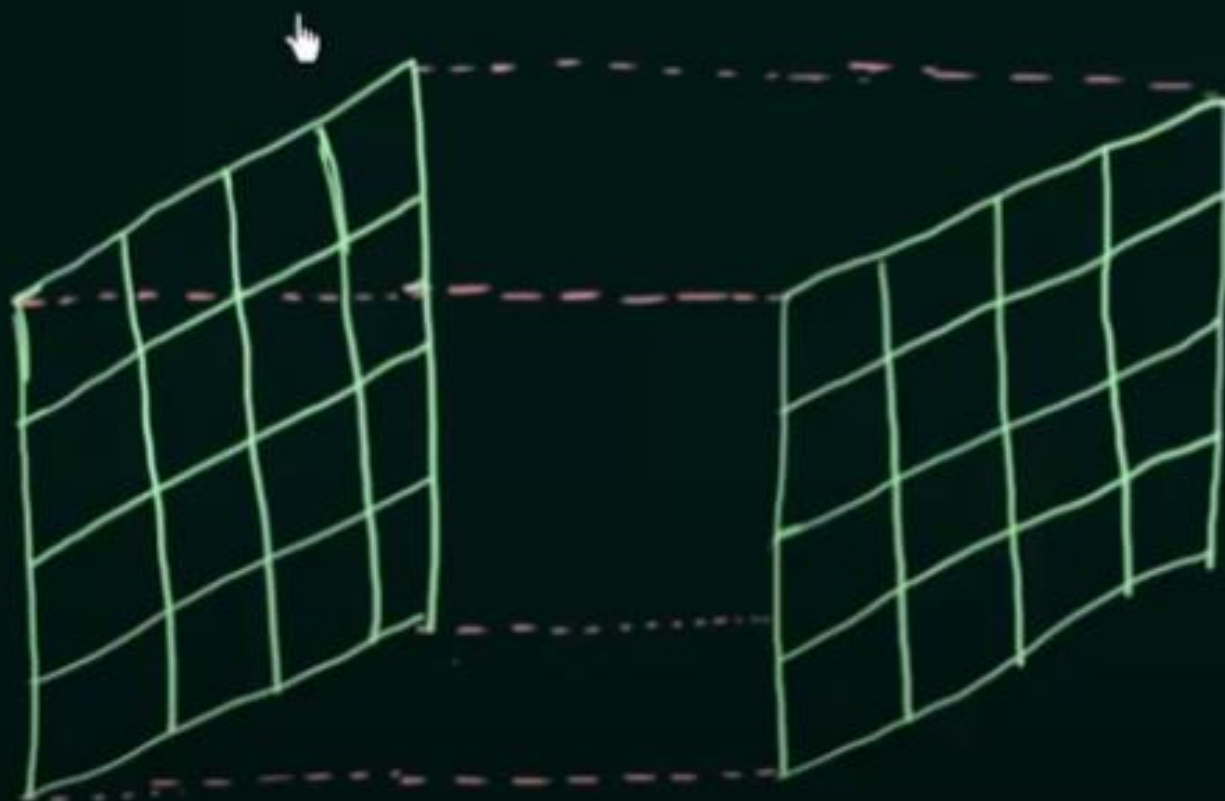


$$\Rightarrow F = X'Z + XY$$

5변수 카르노맵

K' MAP With 5 variables

$$F(A, B, C, D, E) \quad 2^5 = \underline{\underline{32}}$$



	A	B	C	D	E
16 {	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1
	⋮				
	0	1	1	1	1
16 {	1	0	0	0	0
	1	0	0	0	1
	⋮				
	1	1	1	1	1

감 사 합 니 다 !