

§ 5.2 贝努里试验

主 题

贝努里试验

n 重贝努里试验

1. 贝努里(Bernoulli,伯努利)试验

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

2. n 重贝努里试验 (n 次重复独立试验):

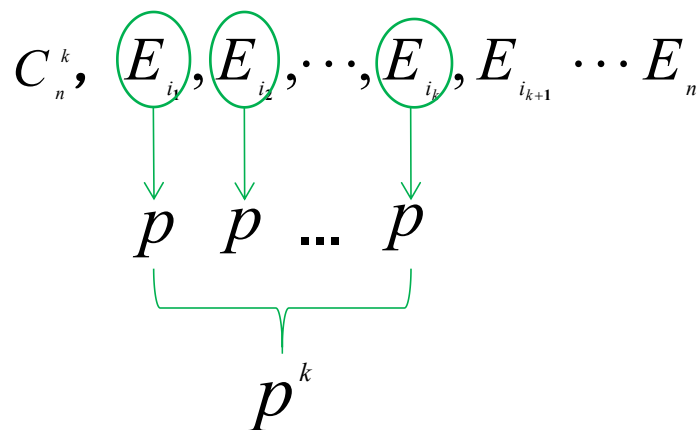
把贝努里试验重复独立的进行了 n 次。

随机试验的独立性:
各次试验结果互不影响

性质: 在 n 重贝努里试验中, 求事件 A 发生 k 次的概率

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

证



例 5 假设某次考试卷出了20道单项选择题，每道题都是4个备选答案，若某同学不学习，求他考试能及格的概率

解： $n = 20, p = \frac{1}{4}$, 设 $C = \{\text{及格}\} = \{\text{至少答对了12道题目}\} = \bigcup_{k=12}^{20} B_k$,

$B_k = \{\text{这位同学在这 20道题目中答对了 } k\text{道}\}, k = 0, \dots, 20,$

$$P(C) = \sum_{k=12}^{20} P(B_k) = \sum_{k=12}^{20} C_{20}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{20-k}$$

例6 甲、乙两人比赛，每局甲赢的概率为 p ，没有和局，比赛规则是3局2胜以及5局3胜，求甲最终获胜的概率。

解： 设 $C=\{3\text{局}2\text{胜规则下甲获胜}\}$ ， $B=\{5\text{局}3\text{胜规则下甲获胜}\}$ ，
则

$$P(\text{甲最终获胜}) = P(C) + P(B),$$

$$P(C) = p^2 + C_2^1 p(1-p)p \quad P(B) = p^3 + C_3^2 p^2(1-p)p + C_4^2 p^2(1-p)^2 p$$

比赛共进行了2次

比赛共进行了3次

$$P(\text{甲最终获胜}) = P(C) + P(B) = 6p^5 - 15p^4 + 8p^3 + 3p^2.$$

例7.甲、乙两人比赛，每局甲赢的概率为 p ，没有和局，比赛规则是：每局赢者得1分输的得0分，一人超过对方2分者胜出，求甲胜出的概率。

解：设 $C=\{\text{甲胜出}\}$ $B_i=\{\text{前两局中甲赢}i\text{次}\}, i=0, 1, 2$, 则

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_0)P(C | B_0) + P(B_1)P(C | B_1) + P(B_2)P(C | B_2) \\ &= (1-p)^2 \times 0 + C_2^1 p(1-p)P(C) + p^2 \times 1 \end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

例8 设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 是样本空间 Ω 的划分, 且 $P(A_m) = p_m > 0, m = 1, \dots, n$
求事件 A_i 比 A_j 先发生的概率。

解: 设 $C = \{A_i \text{ 比 } A_j \text{ 先发生}\}$, $C_1 = \{\text{第一次实验 } A_i \text{ 发生}\}$;

$C_2 = \{\text{第一次实验 } A_j \text{ 发生}\}$; $C_3 = \{\text{第一次实验 } A_i, A_j \text{ 先都不发生}\}$,

$$P(C) = \sum_{k=1}^3 P(C_k)P(C|C_k) \quad P(C_1) = p_i \quad P(C|C_1) = 1$$

$$= p_i + (1 - p_i - p_j)P(C) \quad P(C_2) = p_j \quad P(C|C_2) = 0$$

$$P(C) = \frac{p_i}{p_i + p_j} \quad P(C_3) = 1 - p_i - p_j \quad P(C|C_3) = P(C)$$

设 $D_k = \{A_i \text{ 在 } k \text{ 次试验中首次发生}\}$, $k = 1, 2, \dots$

D_1, D_2, \dots 两两不相容, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \Omega$,

$$D_k = \underbrace{\bar{A} \cdots \bar{A}}_{(k-1)\text{次}} \underbrace{A}_{\text{第 } k \text{ 次}}$$

$$P(C) = P(C\Omega) = P\left(C\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} CD_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(CD_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_i - p_j)^{k-1} p_i = p_i \times \frac{1}{1 - (1 - p_i - p_j)} = \frac{p_i}{p_i + p_j}$$