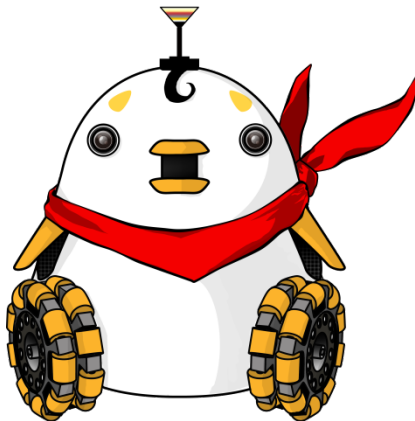


人工知能

第6回 確率モデル（2） 確率的生成モデルとナイーブベイズ

立命館大学 情報理工学部

谷口彰



STORY 確率的生成モデルとナীবベイズ

- ダンジョンの中は不確実な世界だ。さまざまなことが**確率的**に生じる。
 - 車輪を回転させて右に移動しようとしても、前に移動するかもしれない。
 - まっすぐ来そうな敵は、次のステップで気まぐれに左に移動するかもしれない。
- 確率の基礎を知ったホイールダック2号は、そんな不確実性に立ち向かうためにいろいろと考え出した。しかし**何が何の確率に影響を与えるのだろう**。
 - 2ステップ前に前進したことは、次ステップの停止に影響を与えるだろうか？
 - 目の前に壁があるのは、敵が右に行く確率に影響を与えるのだろうか？
 - 一昨日、博士が食べていたご飯は出口の場所に影響を与えるのだろうか！？
- 考え出すときりがない。そんな確率的な事象を整理して現実的な推論を可能にする枠組み——それが**確率的生成モデル**だった。



仮定 確率とベイズ理論の基礎

- ホイールダック2号は過去の経験から確率の計算ができるものとする.



図 7.1 さまざまな事象の間の関係に悩むホイールダック2号

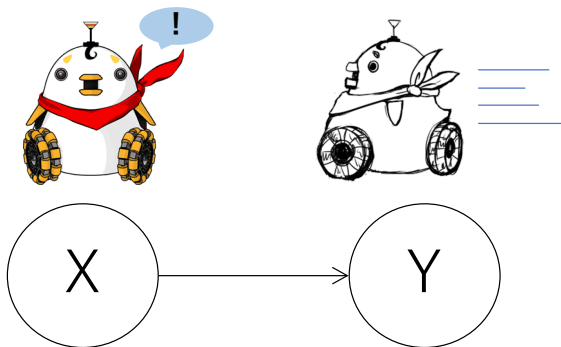
Contents

- 7.1 確率的生成モデルとグラフィカルモデル
- 7.2 確率システム：マルコフ決定過程
- 7.3 ナイーブベイズモデルによるスパムメールフィルタ

7.1.1 さまざまな確率変数と依存関係

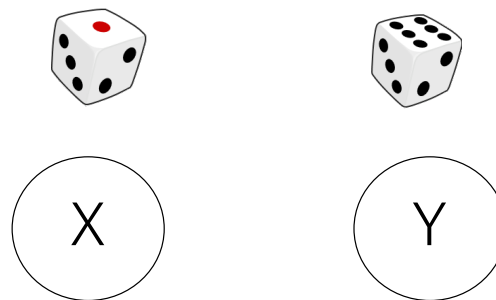
- ロボットを取り巻く環境では確率的に変化する様々な変数が存在する.
- このように対象とするシステムに「どのような変数があるのか？」また「それらがどのような関係にあるか？」を明らかにすることは確率に基づく人工知能を作る第一歩として重要.

依存関係 = 独立？ 従属？



(a) YはXに依存している

$$P(X, Y) = P(X)P(Y|X)$$

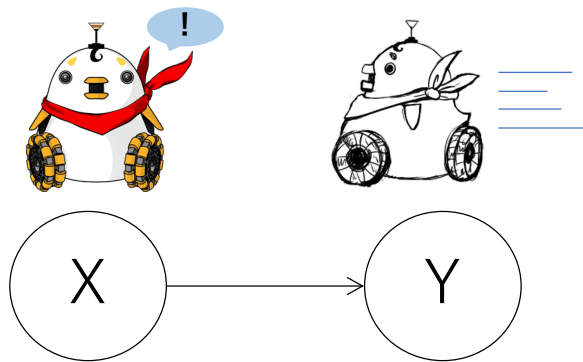


(b) XとYは独立である

$$P(X, Y) = P(X)P(Y)$$

7.1.2 グラフィカルモデルと生成過程

- さまざまな確率変数が具体的にどのように影響を与え合いながらその値を決めていくのかを具体的に表現するのが確率的生成モデルである。
- それを図式的に表現したのがグラフィカルモデルある。
- 確率的生成モデルは生成過程によって具体的に定義される。



(確率的) グラフィカルモデル
(Probabilistic graphical model)

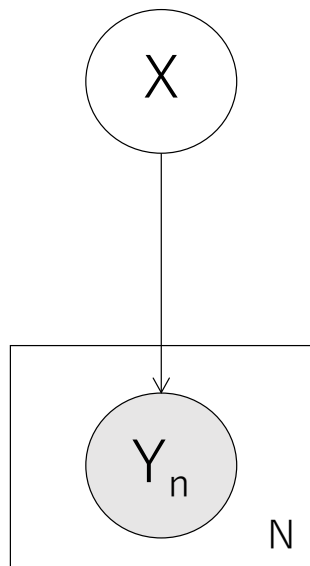
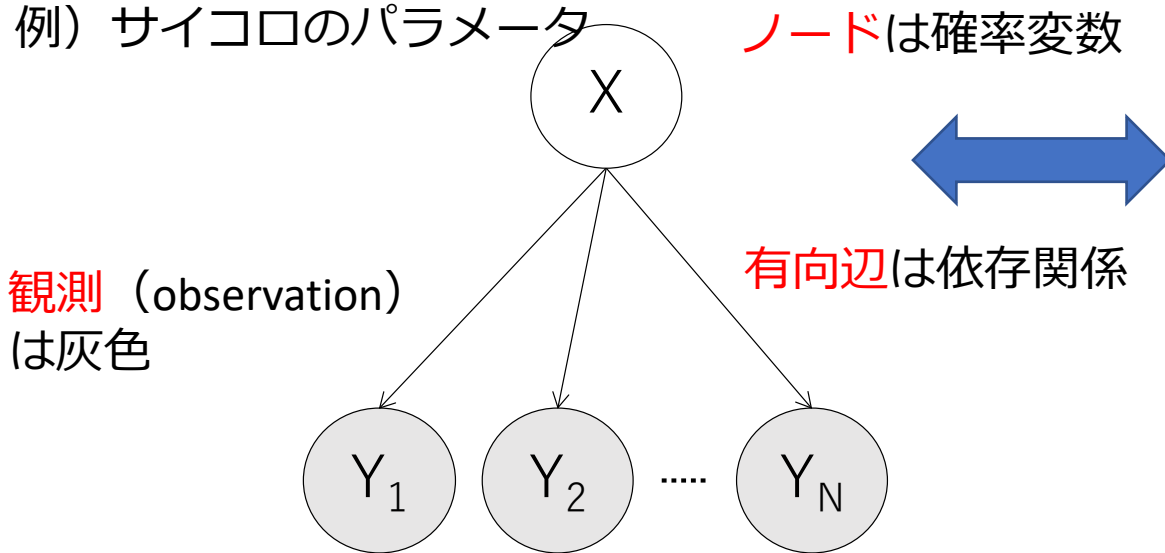
$$X \sim P(X)$$
$$Y \sim P(Y|X)$$

(確率的) 生成過程
(Probabilistic generative process)

7.1.3 観測とプレート

潜在変数 (latent variable) は白

例) サイコロのパラメータ



例) サイコロの目

(a) プレーンを用いない表現



(b) プレーンを用いた表現

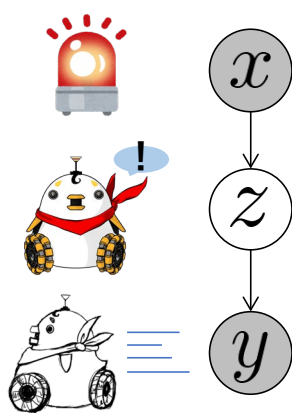
プレートは独立同分布 (i.i.d.)

演習7-1 グラフィカルモデルとプレート

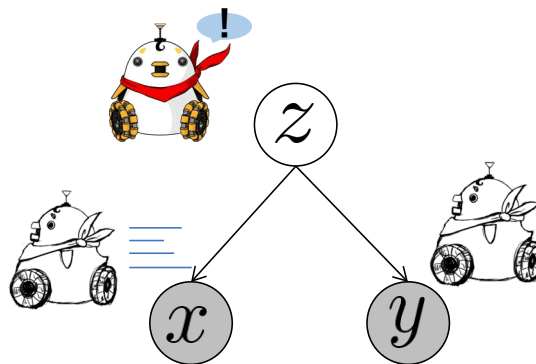
- 1円玉でコイントスを M 回を行う．それぞれにつき表が出れば10円玉を，裏が出れば100円玉を N 回コイントスする．
 - 結果的に合計 $M \times N$ 回の10円玉か100円玉の表もしくは裏の観測が得られる．
 - 1円玉を m 回目に振った際に表が出たか裏が出たかという事象を X_m ，表が出るか裏が出るかを支配する確率分布のパラメータを Z とする．また X_m に従ってされたコイントスの内 n 回目の結果を Y_{mn} とする．
 - なお見ている側には $\{Y_{mn}\}$ だけが告げられるものとする．
1. これらの事象 $Z, \{X_m\}, \{Y_{mn}\}$ の関係をプレートを用いないグラフィカルモデルで表現せよ．
 2. 1.をプレートを用いて表現せよ．

7.1.4 ノードの関係性

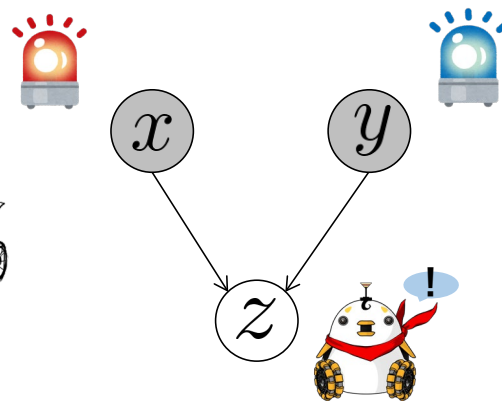
ノードの関係性は以下の3つの基本的な接続から構成される。



(a) head-to-tail



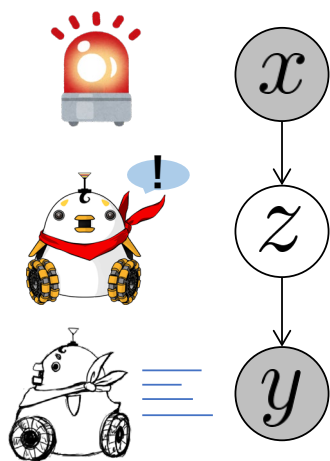
(b) tail-to-tail



(c) head-to-head

説明のための設定：実はホイールダック2号には目の前で光が点灯すれば前進しようとする傾向があるとする。

(a) head-to-tail



(a) head-to-tail

□はあるノードに矢印の先 (head) と矢印の根本(tail) が刺さっている状態をさす.

□伝承サンプリング: $P(X)$ から x をサンプリングし, その x に基づいて $P(Z|x)$ から z をサンプリングして, 最後に $P(Y|z)$ から y をサンプリングする.

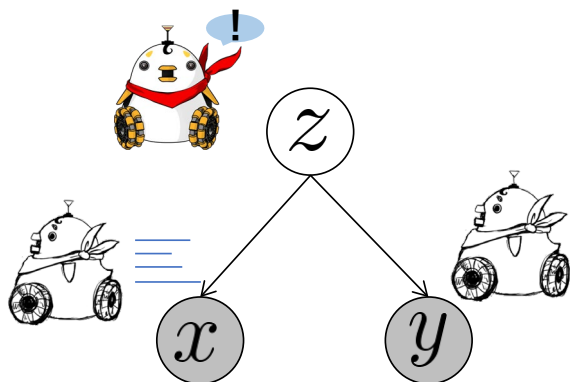
□真ん中の z が観測されると, y の確率は x に全く依存しなくなる. (**ブロッキング**)

$$P(X, Y, Z) = P(Y|Z)P(Z|X)P(X)$$

$$P(X, Y|Z) = \frac{P(X, Y, Z)}{P(Z)} = \frac{P(Y|Z)P(Z|X)P(X)}{P(Z)} = P(Y|Z)P(X|Z) \quad (21)$$

(b) tail-to-tail

- あるノードに矢印の根本(tail) が複数刺さっている状態



$$P(X, Y, Z) = P(Y|Z)P(X|Z)P(Z)$$

- tail-to-tail でもブロッキングが起きる。

(b) tail-to-tail

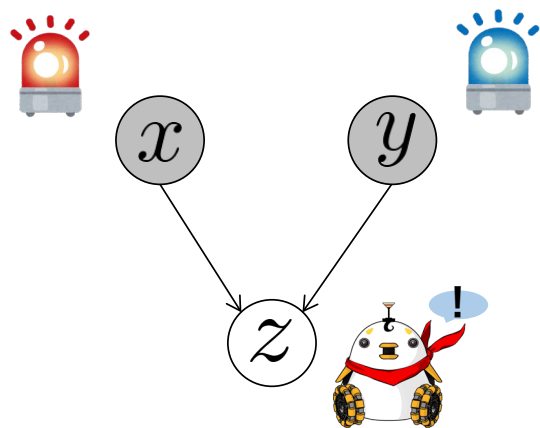
$$P(X, Y|Z) = \frac{P(X, Y, Z)}{P(Z)} = \frac{P(Y|Z)P(X|Z)P(Z)}{P(Z)} = P(Y|Z)P(X|Z) \quad (23)$$

(c) head-to-head

- あるノードに矢印の先(head) が複数刺さっている状態

$$P(X, Y, Z) = P(X)P(Y)P(Z|X, Y)$$

- ここで x と y は z が観測されていない状況で既に独立である（観測されていない z が x と y の間の経路をブロックしている）。
- z が観測されることで x と y の間に依存関係が生まれる。



(c) head-to-head

マルコフブランケット

□グラフィカルモデルが有用なのは、確率モデルの式変形を行う際に、どこまでの変数を無視してよいかが明確にわかることにある。

□マルコフブランケット(Markov blanket) ∂A

$$P(A|\partial A, B) = P(A|\partial A)$$

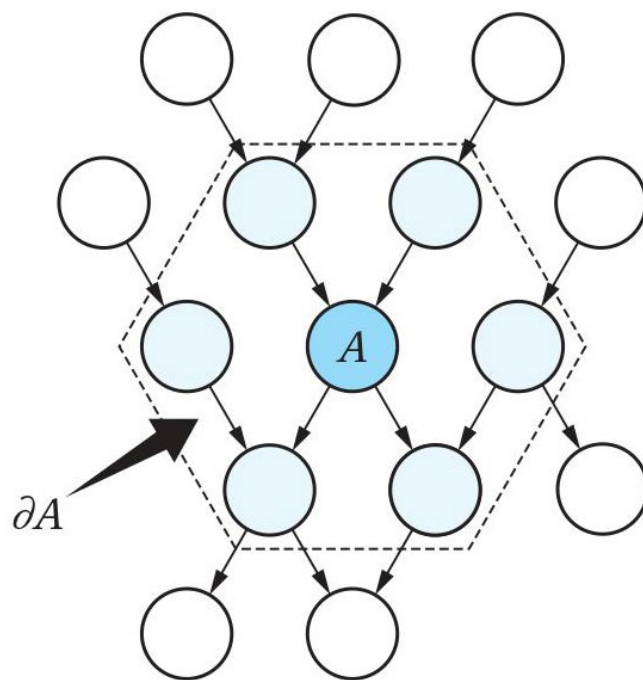


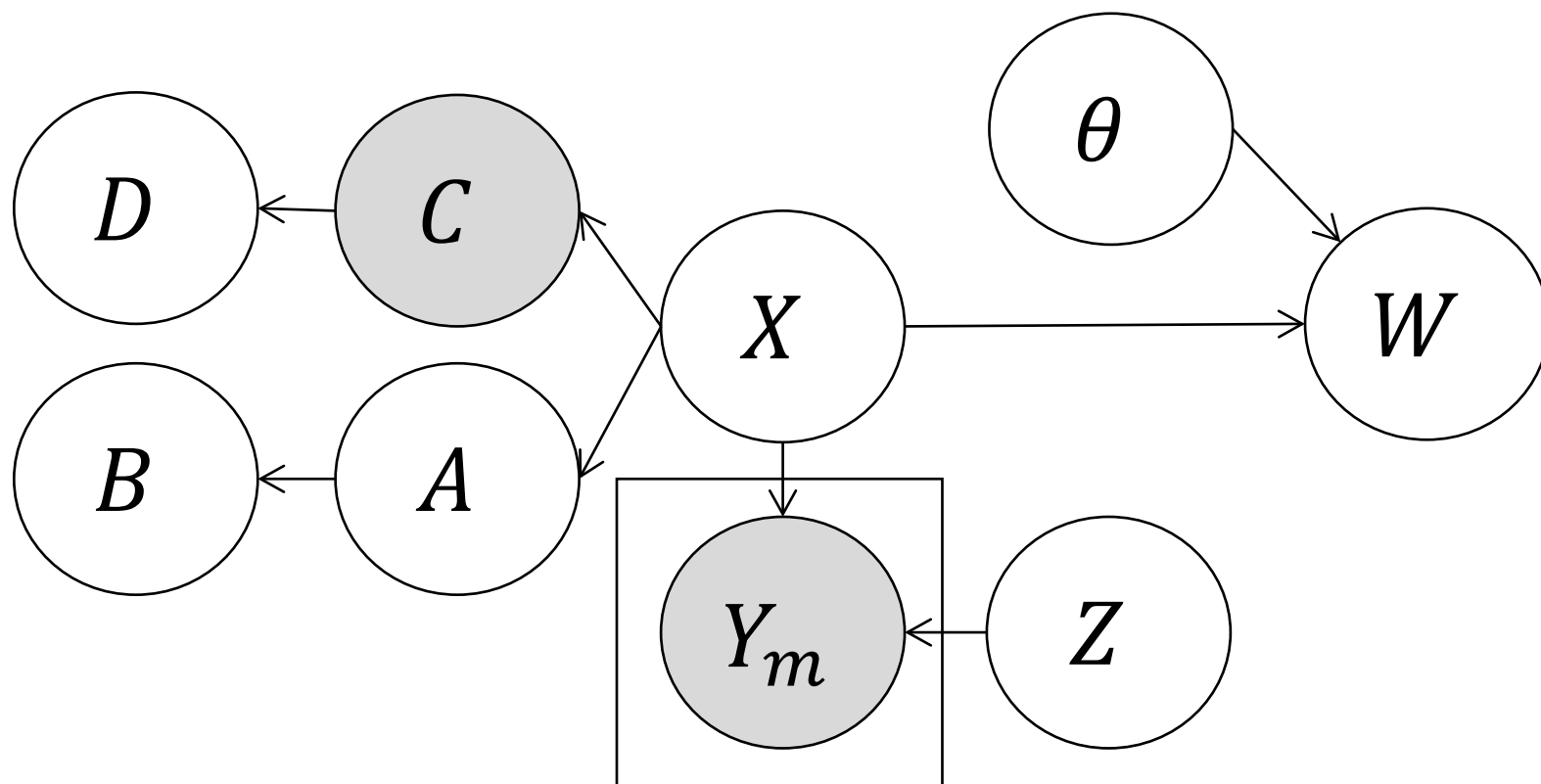
図 7.5 マルコフブランケット

妻／夫と子供と親以外は消せる！



演習7-2 グラフィカルモデルと独立性

- 以下のグラフィカルモデルにおいて X と独立な潜在変数を全て述べよ。なお灰色のノードは観測可能な確率変数を表す。



Contents

- 7.1 確率的生成モデルとグラフィカルモデル
- 7.2 確率システム：マルコフ決定過程
- 7.3 ナイーブベイズモデルによるスパムメールフィルタ

7.2.1 マルコフ過程：状態のみの確率システム

7.2.2 グラフィカルモデルとマルコフ性

□マルコフ性

$$P(s_{t+1}|s_{1:t}) = P(s_{t+1}|s_t) \quad (6.25)$$

□マルコフ過程



図 7.6 マルコフ過程のグラフィカルモデル

□マルコフ決定過程

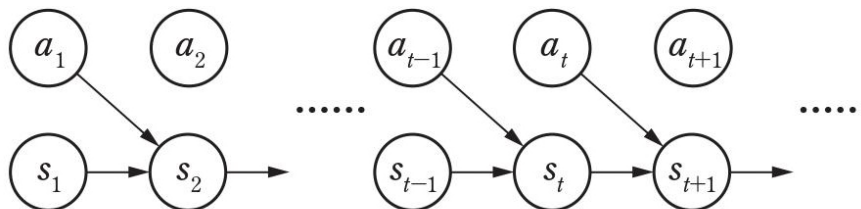


図 7.8 マルコフ決定過程のグラフィカルモデル

7.2.2 状態遷移確率

□状態遷移確率 (transition probability)

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

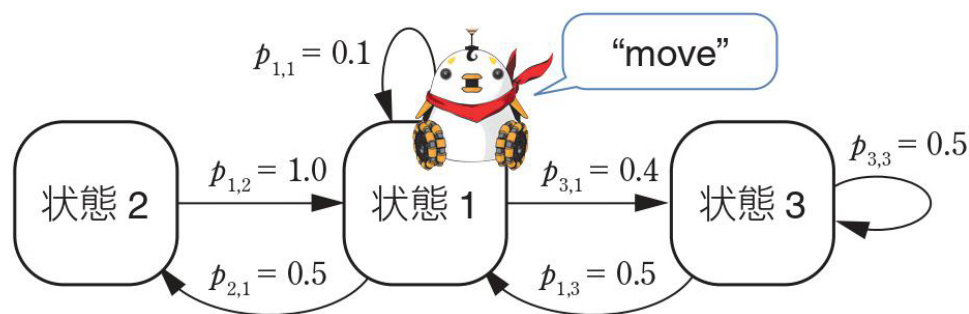


図 7.7

状態遷移確率を表すグラフ

7.2 確率システムの表現

- 次状態が現在の状態と行動に依存して確率的に決定するシステムのことを、**確率システム(stochastic system)**と呼ぶ.
- 確率システムの場合は状態遷移則が確率的になるため、**確率分布**による表現を用いる.

マルコフ決定過程
(離散)確率システム

$$\text{状態遷移則} \quad P(s_{t+1}|s_t, a_t) = p_{s_{t+1}, s_t, a_t} \quad (7.17)$$

$$\text{状態集合} \quad s_t \in S = \{1, 2, \dots, \#(S)\} \quad (7.18)$$

$$\text{行動集合} \quad a_t \in A = \{1, 2, \dots, \#(A)\} \quad (7.19)$$

7.2.3 行動選択に依存した状態遷移確率

- 例えば行動として, $A = \{\text{"stop"}, \text{"move"}\}$ の2種類があり, $a_t = \text{"stop"}$ の際にロボットは動かないとする.

$$\mathbf{P} = \left(\overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\text{move}} & p_{1,2,\text{move}} & p_{1,3,\text{move}} \\ p_{2,1,\text{move}} & p_{2,2,\text{move}} & p_{2,3,\text{move}} \\ p_{3,1,\text{move}} & p_{3,2,\text{move}} & p_{3,3,\text{move}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{"move"}}, \overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\text{stop}} & p_{1,2,\text{stop}} & p_{1,3,\text{stop}} \\ p_{2,1,\text{stop}} & p_{2,2,\text{stop}} & p_{2,3,\text{stop}} \\ p_{3,1,\text{stop}} & p_{3,2,\text{stop}} & p_{3,3,\text{stop}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{"stop"}} \right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\mathbf{P}_{\text{move}}, \mathbf{P}_{\text{stop}}) \quad (7.20)$$

ここで $p_{s_{t+1}, s_t, a_t} = P(s_{t+1} | s_t, a_t)$ とする.

状態遷移の確率計算

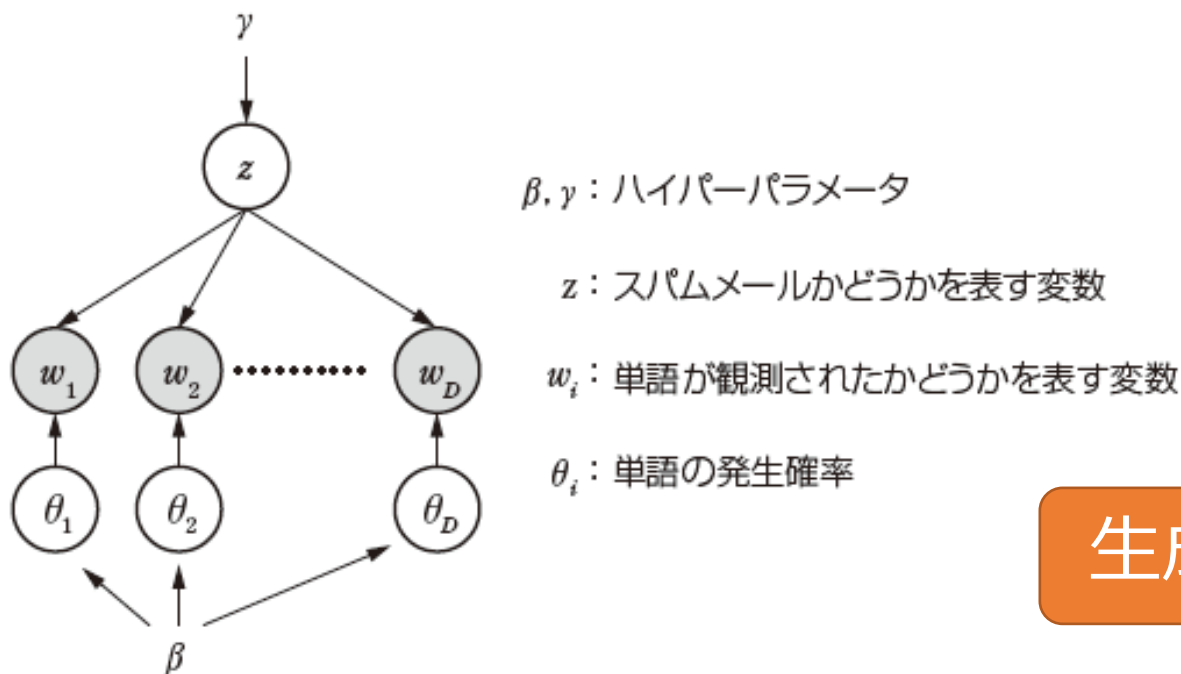
$$P(s_{t+1} | a_t) = \sum_{s_t} P(s_{t+1}, s_t | a_t) = \sum_{s_t} P(s_{t+1} | s_t, a_t) P(s_t) \quad (7.21)$$

Contents

- 7.1 確率的生成モデルとグラフィカルモデル
- 7.2 確率システム：マルコフ決定過程
- 7.3 ナイーブベイズモデルによるスパムメールフィルタ

ナイーブベイズモデル

- ナイーブベイズモデル(naive Bayes model) は生成モデルに基づき分類を行うために用いられる最も単純なモデルの一つである.



生成モデル

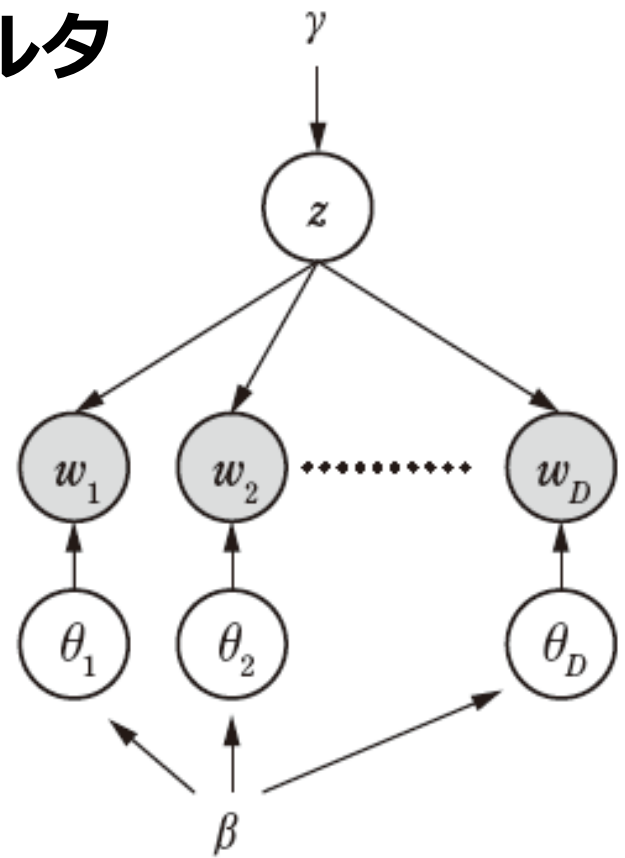
図 11.9 ナイーブベイズモデルのグラフィカルモデル

スパムメールのナイーブベイズフィルタ

□メールがスパムメールかどうかを判定する
分類問題を考える.

$$P(z|W) = P(z|w_1, w_2, \dots, w_D)$$
$$\propto P(w_1, w_2, \dots, w_D|z)P(z)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^D P(w_i|z) \right) P(z)$$

スパムメール
が届く確率



問：メールに「お得」「女子高生」が含まれていたときのスパムメール確率はいくらか？

➡ スпамフィルタが
つくれます！

表 7.1 スпамメール分類問題における単語の発生確率の例

	w_1 : “お世話”	w_2 : “お得”	w_3 : “女子高生”
$P(w_i z = 1)$: スпам	0.05	0.60	0.30
$P(w_i z = 0)$: 正常	0.30	0.10	0.01

$$P(z = 1) = 0.1$$
$$P(z = 0) = 0.9$$

スパムフィルタの計算

あるメールに「お得」「女子高生」が含まれていたとする.

$$\begin{aligned}P(z = 1|w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 1) &\propto P(w_1 = 0|z = 1) \times P(w_2 = 1|z = 1) \\&\quad \times P(w_3 = 1|z = 1) \times P(z = 1) \\&= (1 - 0.05) \times 0.60 \times 0.30 \times 0.1 \\&= 1.7 \times 10^{-2}\end{aligned}\tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}P(z = 0|w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 1) &\propto P(w_1 = 0|z = 0) \times P(w_2 = 1|z = 0) \\&\quad \times P(w_3 = 1|z = 0) \times P(z = 0) \\&= (1 - 0.30) \times 0.10 \times 0.01 \times 0.9 \\&= 6.3 \times 10^{-4}\end{aligned}\tag{7.26}$$

となり, スパムメールである確率が, スパムメールでない確率よりも 27 倍ほど大きいことがわかる. このようにナイーブベイズフィルタは観測データである単語集合が「生成される」過程を生成モデルのナイーブベイズモデルによってモデル化し, 「スパムであるかどうか」を表す潜在変数 z を推定することで分類を行っている.

どうやってテーブルを学習するか？

- 簡単にはユーザが「迷惑メールフォルダ」に移動させたメールのデータから簡単に計算できる.



表 7.1 スпамメール分類問題における単語の発生確率の例

	w_1 : “お世話”	w_2 : “お得”	w_3 : “女子高生”
$P(w_i z = 1)$: スпам	0.05	0.60	0.30
$P(w_i z = 0)$: 正常	0.30	0.10	0.01

$$P(z = 1) = 0.1$$

$$P(z = 0) = 0.9$$

演習7-3 スпамフィルタ

□ 「お世話」「女子高生」がメールに含まれて、「お得」が含まれていなかった場合、届いたメールがスパムメールである確率をナイーブベイズモデルに基づき計算せよ.

- $P(z = 1) = 0.1$
- $P(z = 0) = 0.9$

表 7.1 スпамメール分類問題における単語の発生確率の例

	w_1 : “お世話”	w_2 : “お得”	w_3 : “女子高生”
$P(w_i z = 1)$: スпам	0.05	0.60	0.30
$P(w_i z = 0)$: 正常	0.30	0.10	0.01

第6回のまとめ

- 確率的生成モデルとグラフィカルモデルとは何かに関して学んだ.
- 観測と潜在変数の色分けやプレート表現などグラフィカルモデルの基本的な表記ルールについて学んだ.
- ノードの関係性とそれに基づく条件付き独立性, およびマルコフブランケットについて学んだ.
- マルコフ過程とマルコフ決定過程について学んだ.
- ナイーブベイズモデルについてスパムメールフィルタの事例を交えて学んだ.

次回の講義

- 第7回 多段決定(2)：強化学習
 - 7.1 強化学習とは何か？
 - 7.2 マルコフ決定過程
 - 7.3 割引累積報酬
 - 7.4 価値関数
 - 7.5 学習方法の例：Q学習