第二章 随机变量及分布

连续型随机变量

一. 连续型随机变量的概念与性质

定义 如果对于随机变量X的分布函数$F(x)$，存在非负函数$\boldsymbol{f(x)}$，使得对于任意实数$\boldsymbol{x}$，有

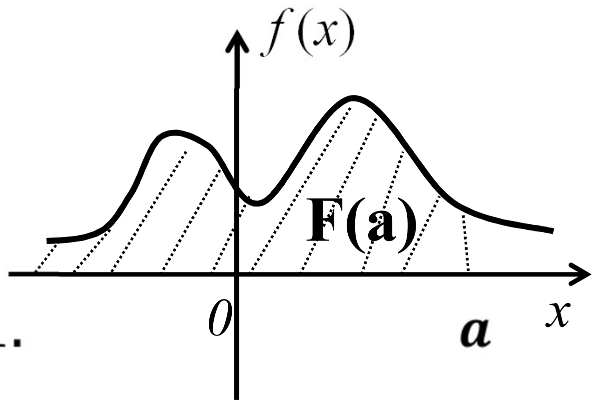
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

则称X为连续型随机变量. 其中函数$f(x)$称为X的概率密度函数,简称概率密度.

性质

1) 非负性：$f(x) \geq 0.$

2) 归一性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$



3) 连续型随机变量的分布函数是　连续的

若$f(x)$在点x处连续，则有 $F'(x) = f(x)$

4) $P(X = a) = F(a) - F(a-) = 0$

5) $P(x_1 < X \le \boldsymbol{x_2}) = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

$$= P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

$$= P(x_1 \le X < x_2)$$

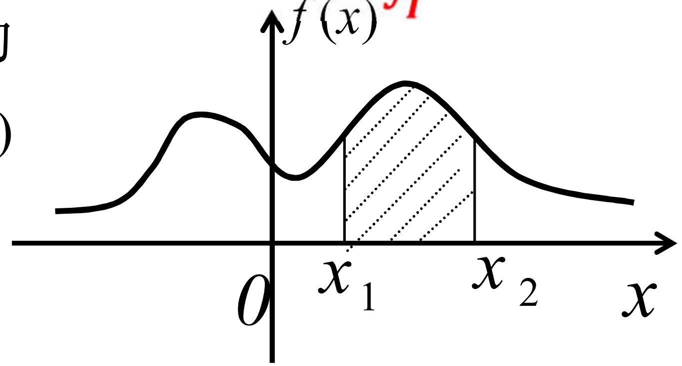
6) $P(x < X \le x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$

$$P(x < X \le x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)d\,t$$

$$= f(\xi)\Delta x, \qquad \xi \in (x, x + \Delta x)$$

$$\approx f(x)\Delta x, \qquad \Delta x \to 0.$$

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$



$$\boxed{F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

$$\boxed{p_i} \rightarrow \boxed{f(x)dx}$$

$$\boxed{\frac{p_i}{dx}} \rightarrow \boxed{f(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

例 1

设 X 是连续型随机变量，其密度函数为

1) X取值范围(0,2)

2) $P(X\in I)=\int_I f(x)dx$

$$f(x)=\begin{cases} c\left(4x-2x^2\right) & 0<x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1). 常数 c；　(2). $P(X>1)$

解： (1). 由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

得 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 c\left(4x-2x^2\right)dx=c\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}c$

所以，$c=\frac{3}{8}$

(2) $P(X>1)=\int_1^{+\infty}\boldsymbol{f(x)dx}=\int_1^2\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right)dx=\frac{1}{2}$

二、常用的连续型随机变量

1. 均匀分布

2. 指数分布

3. 正态分布

1. 均匀分布

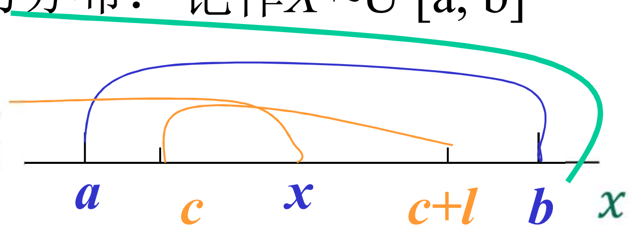
几何概型

定义 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称随机变量 X 服从区间$[a,\ b]$上的均匀分布．记作$X\sim U\ [a, b]$

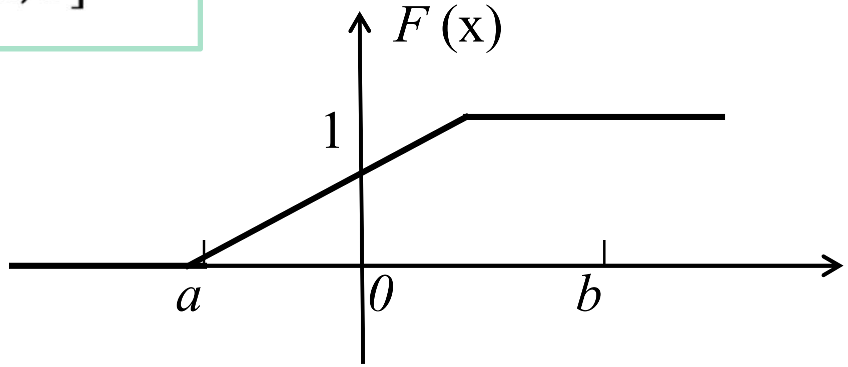
$$P(c<X\le c+l)=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}dx=\frac{l}{b-a}$$



向$[a,b]$等可能的投点，落点$X\sim U[a,b]$

显然

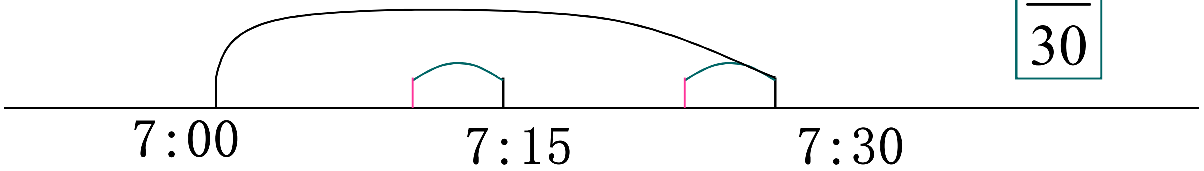
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}$$



$$F(x)=P(X\le x)=P(a\le X\le x)=\frac{x-a}{b-a}$$

例1　设公共汽车站从上午7时起每隔15分钟来一班车，如果某乘客到达此站的时刻是 7:00 到7:30之间的均匀随机变量．试求该乘客候车时间不超过5分钟的概率．

$$\boxed{\frac{10}{30}}$$



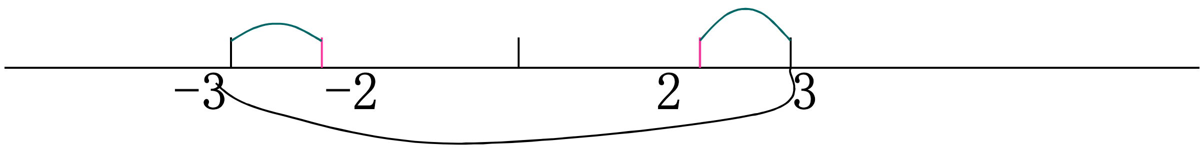
解：　设乘客的到达时刻为***X***，则 $X \sim U[0,30]$

例2　$X \sim U[-3,3]$，求二次方程 $t^2 - Xt + 1 = 0$ 有实数根的概率

解：　方程有实根的条件是 $\Delta = X^2 - 4 \geq 0$

$$P(X^2 - 4 \geq 0) = P(|X| \geq 2)$$

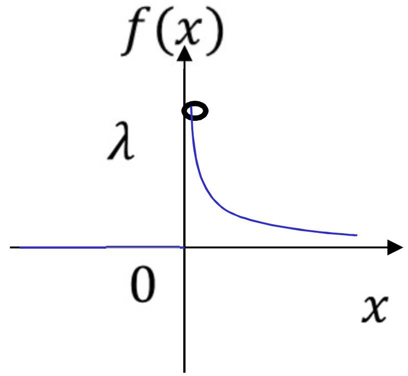
$$\boxed{\frac{2}{6}}$$



2. 指数分布

定义:如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$



其中$\lambda>0$为常数，则称随机变量服从参数为λ的指数分布.

记为 $X\sim e(\lambda)$

密度函数的验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=1.$

指数分布的分布函数

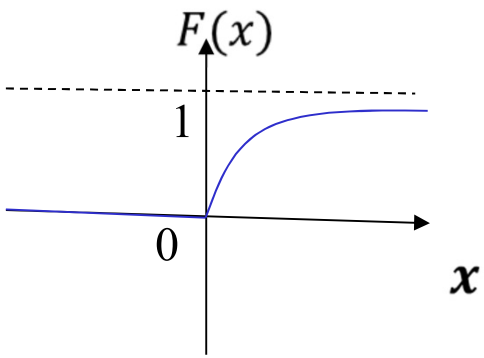
$x\le 0$时,

$$F(x)=0;$$

$x>0$时,

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

$$P(X>x)=1-F(x)=e^{-\lambda x}\quad (x>0)$$



指数分布的无记忆性

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

若 $X \sim e(\lambda)$ ，则有 $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t), (s, t > 0)$

证明： $P(X > s+t \mid X > s) = \dfrac{P(X>t+s, X>s)}{P(X>s)}$

$$= \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

※ 无记忆性是指数分布非常重要的性质，这条性质决定了指数分布在理论和实践中都有重要的应用，通常用指数分布描述电子元件的寿命和等待时间等指标。

- 指数分布可以看作是等待某个事件首次发生的等待时间。

- 几何分布的无记忆性

若$Y \sim G(p)$,则$P(Y > m+n | Y > n) = P(Y > m), (m, n \in Z^{+})$

- 几何分布可以看作是等待某个事件首次发生的等待次数。

例3 电子元件的寿命服从参数为**1/100**的指数分布（单位：小时）

求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率.

解：已知 $X \sim e(1/100)$.

设 A={元件在使用的前 150 小时内需要更换} $=\{X \leq 150\}$

设Y为 5 个元件中使用寿命不超过150小时的个数.

每次使用一个元件，相当于做了一次独立性试验，使用5个元件，相当于做了5次独立重复性试验。 $Y \sim B(5, P(A))$

则 $P(A) = P\{X \leq 150\} = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

$$P(Y=2) = C_5^2 \times \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \times \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^3$$

$Y \sim B(n, p)$

独立重复性试验的次数

A在每次试验中发生的概率