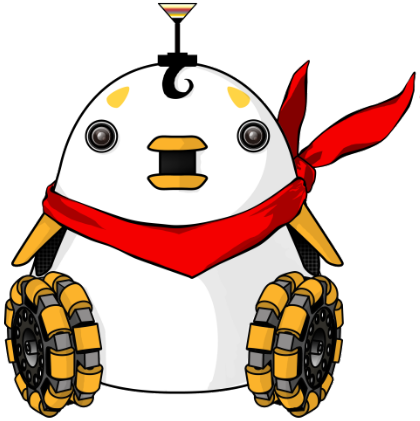
人工知能

第6回　確率とベイズ理論の基礎

立命館大学 情報理工学部 知能情報学科
萩原良信



STORY 確率とベイズ理論の基礎

- これまでホイールダック2号は自分が「左に行こう」と望めば必ず左に行けるし，「前に進もう」と望めば前に進めると思っていた．また，宝箱を発見するときも，宝箱の見た目は常に同じで，宝箱がありさえすれば，「あ，宝箱だ！」と確実に認識できるものだと思っていた．
- しかし，現実はそうではなかった．ホイールダック2号が前進したつもりでも，オムニホイールがスリップして前に進めなかったり，左に移動しようとしても，地面のゴミを踏んでしまい車輪の一つが空転し方向がずれてしまったりした．
- 宝箱の画像も光の当たり方や宝箱の向きなどによって毎回異なっていた．ただ宝箱の画像を持ち，その画像とピッタリ一致するものを宝箱と思えばいいと考えるのは大きな誤りだった．甘かった．
- そうだ．世の中は不確実性に満ちていたのだ．現実は秩序立った確定システムではなく，未来は確率的にしか予測できず，間違いの可能性に満ちた確率システムだったのだ．

仮定 確率とベイズ理論の基礎

- ホイールダック2号は過去の経験から確率の計算ができるものとする.

Contents

6.1.1 実世界の不確実性と確率

- 実世界の不確実性
  - 実世界とコンピュータ・シミュレーションの世界の違い
  - 例）
    - ボールの放物運動
    - 電子メールにおけるスパムメール
- ベイズ理論(Bayes' theory)
  - ベイズの定理を活用しながら確率論の枠組みに基づき，データからの推定や決定，解析を行う広範な理論枠組みのこと.

トーマス・ベイズ
（Thomas Bayes）
1702年 - 1761年
イギリスの長老派の
牧師・数学者、哲学者

Contents

6.2.1 ホイールダック2号の不確実な前進

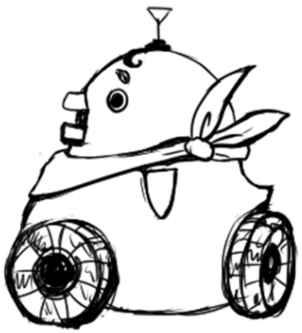
- 事象(event)
- 確率(probability)
  - 全ての事象について足し合わせると1になる.

$$\sum_{A} P(A) = 1 \qquad (6.1)$$

((20+8)+(12+60)) /(20+8+12+60) = 1

表 6.1 ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止
命令：前進	20 回	8 回
命令：停止	12 回	60 回



6.2.3 同時確率(joint probability)

- 事象Aと事象Bがともに起こる確率
- ? P(“命令：前進”，“結果：前進”)

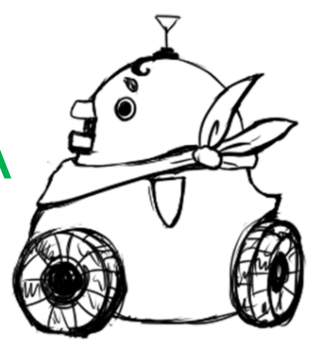
＝ 20/(20+8+12+60)

表 6.1 ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止
命令：前進	$\boxed{20\text{ 回}}$	8 回
命令：停止	12 回	60 回

A

B



6.2.4 条件付き確率 (conditional probability)

- 事象*A* のもとで事象*B* が起こる確率
- ? P(“結果：前進” | “命令：前進”)

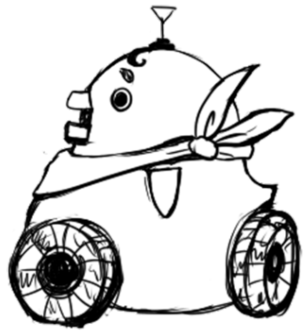
= 20/(20+8)

表 6.1 ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止
命令：前進	20 回	8 回
命令：停止	12 回	60 回

A

B



6.2.5 乗法定理

- 乗法定理

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) \tag{6.2}$$

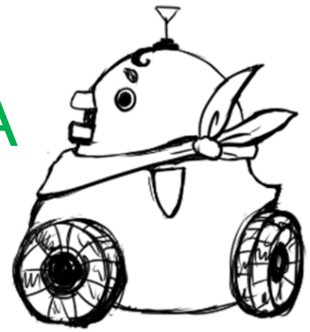
= 20/(20+12)×(20+12)/(20+8+12+60)

表 6.1　ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止
命令：前進	20 回	8 回
命令：停止	12 回	60 回

A

B



6.2.6 加法定理

- 加法定理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (6.4)$$

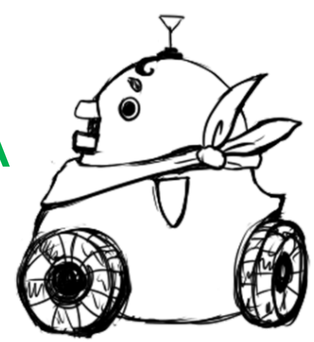
$= 28/100 + 32/100 - 20/100$

表 6.1 ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止
命令：前進	20 回	8 回
命令：停止	12 回	60 回

A

B



6.2.7 周辺化

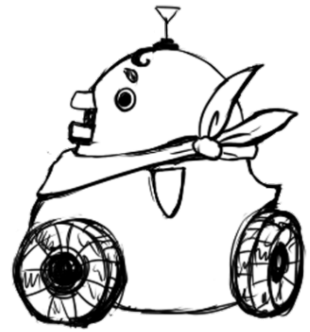
- 周辺化

$$P(A) = \sum_B P(A, B) \tag{6.7}$$

= 20/100 + 8/100

表 6.1 ホイールダック 2 号の前進の履歴

出した命令 \ 実現した結果	結果：前進	結果：停止	
命令：前進	20 回	8 回	A
命令：停止	12 回	60 回	
	B	B	



演習6-1

- ２つの袋があり，皮の袋が2/3の確率で選ばれる．布の袋が1/3の確率で選ばれる．それぞれの袋には下記の玉がそれぞれ入っており，袋が選ばれるとその後は全ての玉が等確率で取り出される．以下を求めよ．

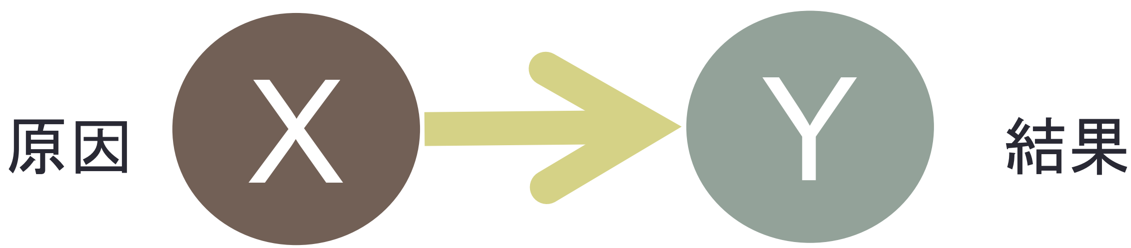
	Y1：赤い玉	Y2：青い玉	Y3：黄色い玉
X1：皮の袋	15個	5個	0個
X2：布の袋	15個	1個	4個

1. P(X1)
2. P(Y2|X2)
3. P(X1,Y2)
4. P(Y1)

Contents

確率の取り扱いとベイズ理論

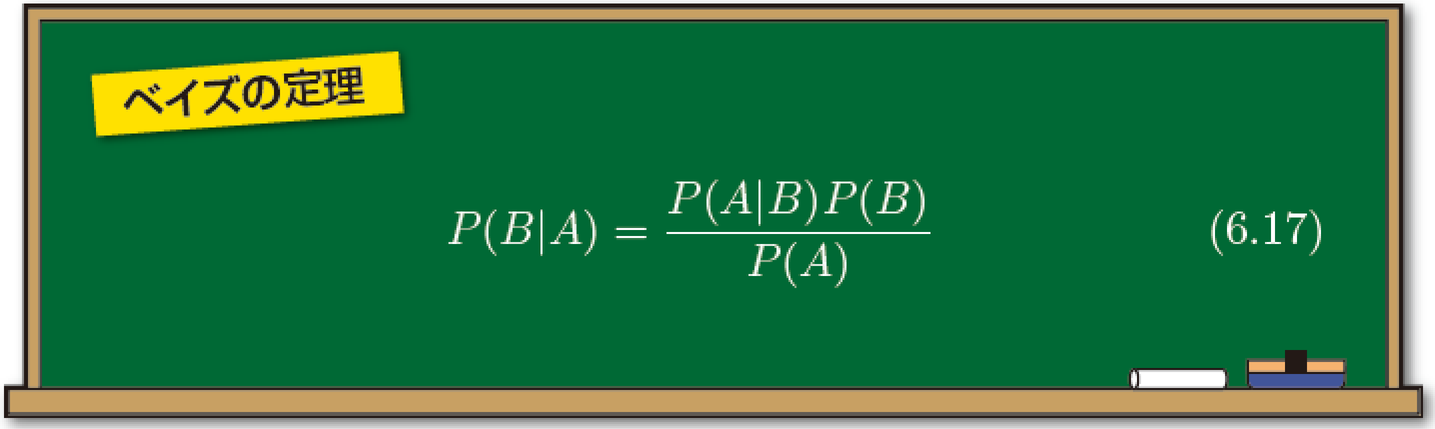
- ある事象が起こり，その原因としていくつかの事象が考えられ，それらは互いに独立な事象であり，それぞれがある確率をもって起こるとする．
- このときベイズ理論では結果として起こった事象に対する原因がどれであったかという確率を求める事ができる．



非常に柔軟な枠組みであり，機械学習，自然言語処理，パターン認識，音声認識はじめ，多くのデータを扱う情報処理で一般的に用いられるようになっている．

6.3.1 ベイズの定理の導出

- 実際のところは条件付き確率の性質から自然と導かれる基本的な式



$$P(B|A)P(A) = P(A, B) = P(A|B)P(B) \qquad (6.18)$$

隠れた事象の推定とベイズの定理

- 例えば, $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_K\}$ のいずれかの事象が生じる場合を考える.

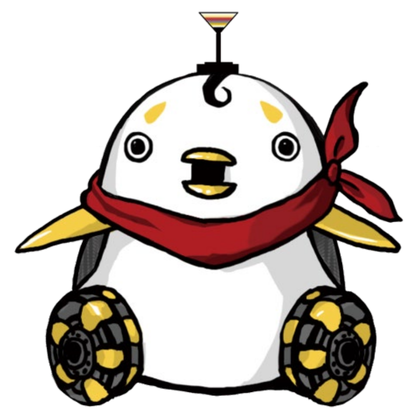
$$\overbrace{P(C_j|A)}^{\text{事後確率}} = \frac{P(A, C_j)}{P(A)} = \frac{P(A, C_j)}{\sum_k P(A, C_k)} \tag{6.19}$$

$$= \frac{\overbrace{P(A|C_j)}^{\text{尤度}}\overbrace{P(C_j)}^{\text{事前確率}}}{\sum_{C_k} P(A|C_k)P(C_k)} \tag{6.20}$$

$$\propto P(A|C_j)P(C_j) \tag{6.21}$$

C_1: 罠

C_2: 宝



6.3.2 ベイズの定理の意味

- 原因と結果の関係を逆転させることができるのがベイズの定理の主要な機能である.
  - 例）濡れている地面（結果：観測）を見て雨が降ったか（原因：隠れた事象）どうかを考える
  - 例）ホイールダック2 号が前進したの（結果）を見て「果たしてホイールダック2 号は前進命令を出した（原因）のか？」と考える

表 6.2　確定システムと不確実を有するシステムにおける原因結果の捉え方の違い

確定システム	不確実性を有するシステム
$B \rightarrow A$	$P(A\|B)$

演習 6-2

- ２つの袋があり，皮の袋が2/3の確率で選ばれる．布の袋が1/3の確率で選ばれる．それぞれの袋には下記の玉がそれぞれ入っており，袋が選ばれるとその後は全ての玉が等確率で取り出される．

	Y1：赤い玉	Y2：青い玉	Y3：黄色い玉
X1：皮の袋	15個	5個	0個
X2：布の袋	15個	1個	4個

1. $P(X1|Y2)$を求めよ．
2. $P(X2|Y3)$を求めよ．
3. 赤い玉が取り出された時（結果），取り出した袋はどちらだった（原因）可能性が高いか？

Contents

6.4.1 確率システムの表現

- 次状態が現在の状態と行動に依存して確率的に決定するシステムのことを，**確率システム (stochastic system)**と呼ぶ.
- 確率システムの場合は状態遷移則が確率的になるため関数での表記が不可能になる.
- 確率分布による表現を用いる.

状態遷移則（離散） $P(s_{t+1}|s_t, a_t) = p_{s_{t+1}, s_t, a_t}$ (6.22)

6.4.2 状態遷移確率

- 状態遷移確率 (transition probability)

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

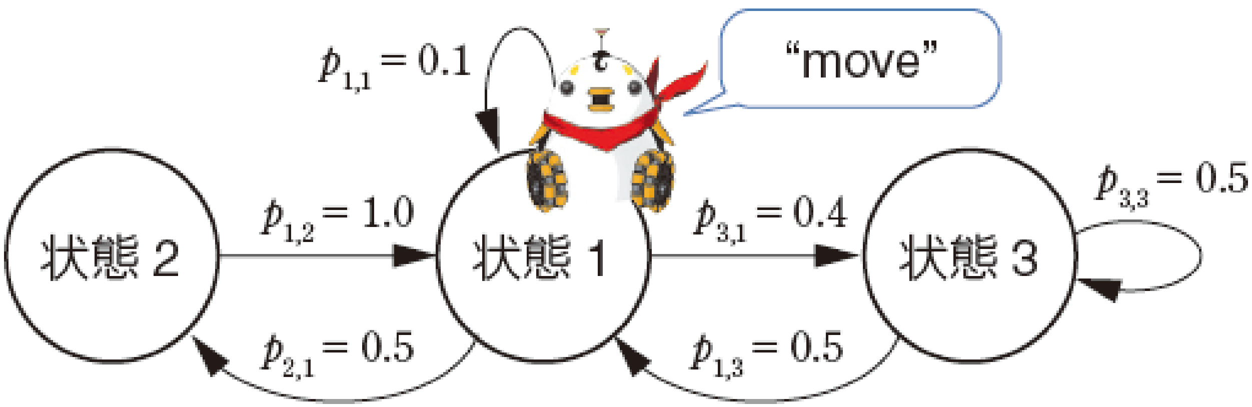


図 6.2 状態遷移確率を表すグラフ

6.4.3 行動選択に依存した状態遷移確率

- 例えば行動として，A = {“stop”,“move”} の2 種類があり，a_t = “stop” の際にロボットは動かないとする．

$$
P = \left(\overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\mathrm{move}} & p_{1,2,\mathrm{move}} & p_{1,3,\mathrm{move}} \\ p_{2,1,\mathrm{move}} & p_{2,2,\mathrm{move}} & p_{2,3,\mathrm{move}} \\ p_{3,1,\mathrm{move}} & p_{3,2,\mathrm{move}} & p_{3,3,\mathrm{move}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{“move”}}, \overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\mathrm{stop}} & p_{1,2,\mathrm{stop}} & p_{1,3,\mathrm{stop}} \\ p_{2,1,\mathrm{stop}} & p_{2,2,\mathrm{stop}} & p_{2,3,\mathrm{stop}} \\ p_{3,1,\mathrm{stop}} & p_{3,2,\mathrm{stop}} & p_{3,3,\mathrm{stop}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{“stop”}} \right)
$$

$$
= \left(\begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \tag{6.24}
$$

ここで $p_{s_{t+1}, s_t, a_t} = P(s_{t+1} | s_t, a_t)$ とする．

6.4.4 グラフィカルモデルとマルコフ性

- マルコフ性

$$P(s_{t+1}|s_{1:t}) = P(s_{t+1}|s_t) \quad (6.25)$$

- マルコフ過程

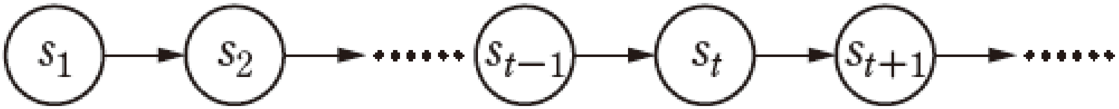


図 6.3 マルコフ過程のグラフィカルモデル

- マルコフ決定過程

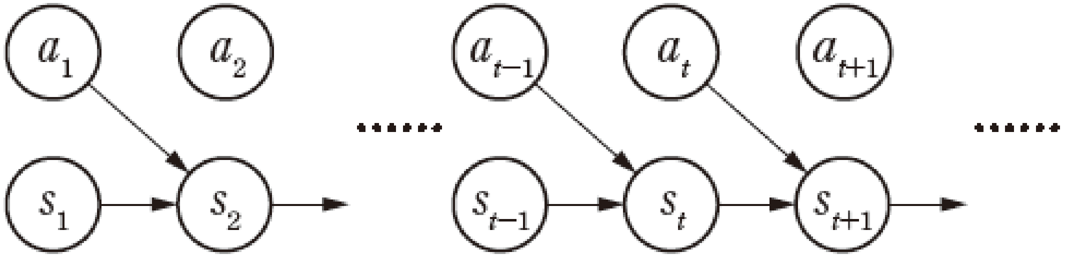


図 6.4 マルコフ決定過程のグラフィカルモデル

マルコフブランケット

- グラフィカルモデルが有用なのは，確率モデルの式変形を行う際に，どこまでの変数を無視してよいかが明確にわかることにある．
- **マルコフブランケット** (Markov blanket)∂A
- Bは∂Aを省くノード集合

$$P(A|\partial A, B) = P(A|\partial A)$$

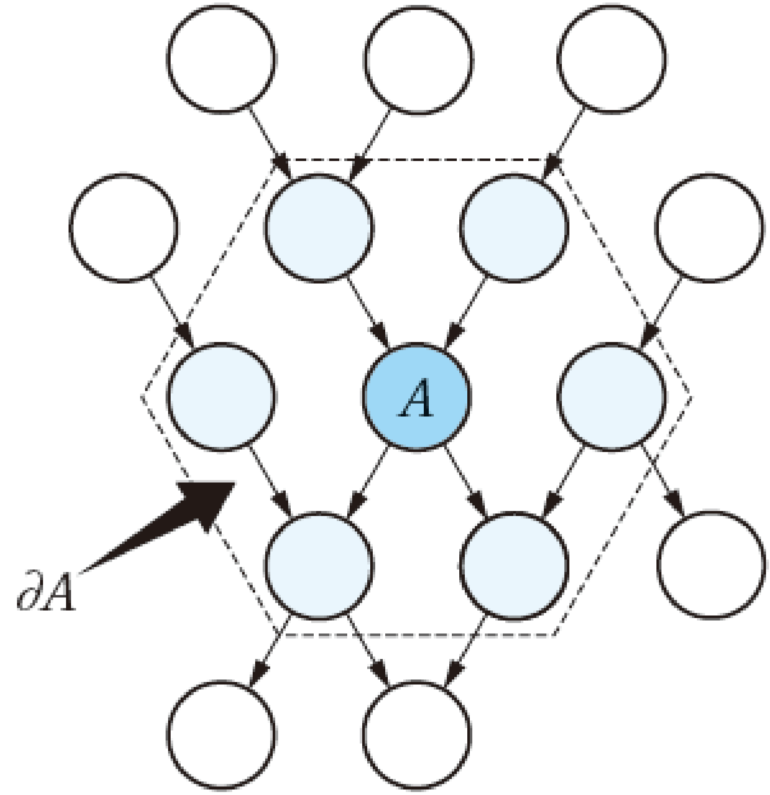


図 6.5　マルコフブランケット

6.4.5 確率変数の期待値

- 関数fの期待値

$$E[f] = \sum_A f(A)P(A) \tag{6.27}$$

- 関数fの条件付き期待値

$$E[f|B] = \sum_A f(A)P(A|B) \tag{6.28}$$

  - 関数f(A)は事象Aが決まった際に値を返す関数
  - 確定システムではこのようなことを考えなくても，s_tとa_tが定まれば次状態も利得も1 通りに決まっていたので，期待値を考える必要はなかった．しかし，不確実性を持つ実世界ではこのような確率を考えることが重要となる．

演習 6-3 期待値

- 2つの袋があり，皮の袋が2/3の確率で選ばれる．布の袋が1/3の確率で選ばれる．それぞれの袋には下記の玉がそれぞれ入っており，袋が選ばれるとその後は全ての玉が等確率で取り出される．

	Y1：赤い玉	Y2：青い玉	Y3：黄色い玉
X1：皮の袋	15個	5個	0個
X2：布の袋	15個	1個	4個

- 取り出した玉が赤い玉なら1 点，青い玉なら2 点，黄色い玉なら3点得られる．

1. 得られる得点の期待値を求めよ．
2. 皮の袋から取り出したということがわかっている場合，玉を一つ取り出した場合に得られる得点の条件付き期待値を求めよ．

第6章のまとめ

- 環境の不確実性を取り扱うために確率を用いることの重要性を学んだ.
- ベイズの定理を導入し，その意味について学んだ.
- 確率変数の依存関係の表現としてのグラフィカルモデルについて学んだ.
- マルコフ過程とマルコフ決定過程を導入し，グラフィカルモデルから確率変数間の依存関係を見出すマルコフブランケットについて学んだ.

次回の講義

- 第7回 多段決定(2):強化学習
  - 7.1 強化学習とは何か？
  - 7.2 マルコフ決定過程
  - 7.3 割引累積報酬
  - 7.4 価値関数
  - 7.5 学習方法の例:Q学習