

第五章 插值与拟合方法

讲授：

用有限个函数值 去推断或表示函数 的方法；

重点论述：

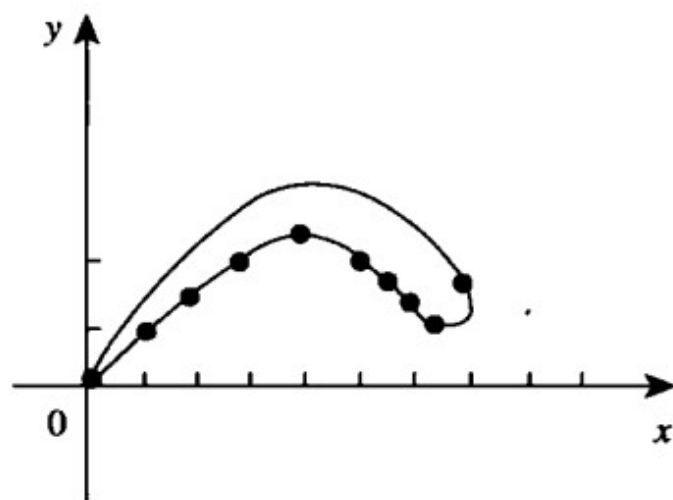
Lagrange插值、**Newton**插值、**Hermite**插值、分段插值、曲线拟合及对应的原理、构造、误差分析等。

通常待加工零件的外形按工艺要求由一组数据 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n$ 给出。由于程控铣床加工时每一刀只能沿 x 方向和 y 方向走很小的一步，因此需要利用所给的这组数据获得铣床进行加工时要求的行进步长坐标值。

现测得机翼断面的下轮廓线上（图 5-1）的一组数据如下所示。

x	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
y	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6

假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时 y 的坐标以决定加工路线，试给出加工所需要的数据。



某种合成纤维的强度与拉伸倍数有直接关系，为获得它们之间的关系，科研人员实际测定了 20 个纤维样品的强度和拉伸倍数，获得数据如下。

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拉伸倍数	1.9	2.0	2.1	2.5	2.7	2.7	3.5	3.5	4.0	4.0
强度 (MPa)	14	13	18	25	28	25	30	27	40	35
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
拉伸倍数	4.5	4.6	5.0	5.2	6.0	6.3	6.5	7.1	8.0	8.0
强度 (MPa)	42	35	55	50	55	64	60	53	65	70

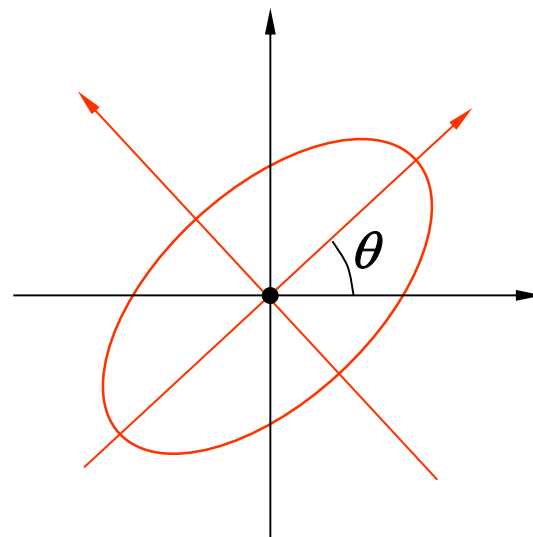
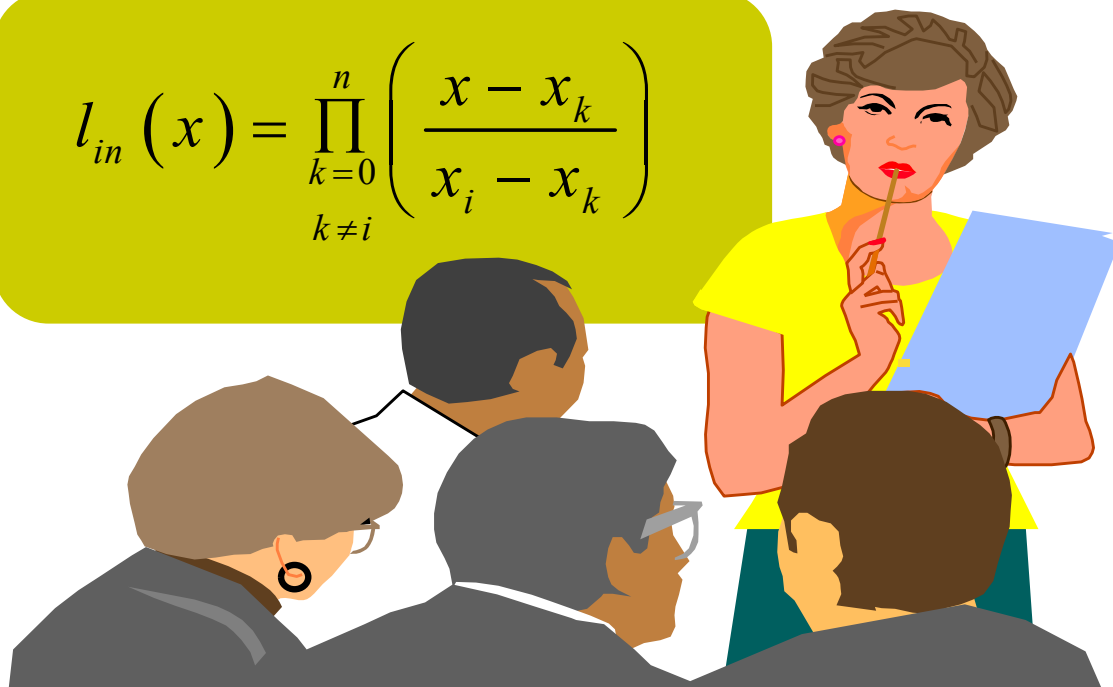
试确定这种合成纤维的强度与拉伸倍数的关系。

上述两个问题可以归结为用有限个函数值 $f(x_i), (i = 0, 1, \dots, n)$ 去推断函数 $f(x)$ 在某个定义范围内的所有其他值的问题，如何解决这类问题，在理论数学中提到的不多，本章将给出解决这类问题的方法。

第5章 插值与拟合方法

§ 5.2 基本概念

$$l_{in}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$



1、问题的描述

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值 $y_k = f(x_k)$

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

怎样依据如上数据构造一个函数 $P(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数?

这里介绍最常用的两种方法：
插值方法与拟合方法。

1) 插值概念

显然，插值有无穷个！

插值函数定义：

如果函数 $P(x)$ **满足**

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的一个插值函数, $f(x)$ 称被插函数.

插值条件： $P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$

插值余项： $R(x) = f(x) - P(x)$

插值节点： $x_k, k = 0, 1, \dots, n, \text{互异}$

代数插值(多项式插值):

插值函数 $P(x)$ 是多项式时的插值。

一个代数插值函数 $P(x)$ 可写为

$$P(x) = P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (a_k \in R)$$

若它满足插值条件，则有线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_m x_0^m = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_m x_1^m = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_m x_n^m = y_n \end{cases}$$



当**m=n**，它的系数行列式为范德蒙行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

因为插值节点互异，有 $D \neq 0$

得线性方程组有唯一解，于是有

定理5.1 当插值节点互异时，存在一个满足插值条件的n次插值多项式。

不过，遗憾的是方程组是病态的！



定理 满足插值条件的**n**次插值多项式是唯一的。

证明： 设 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 是两个满足插值条件的
 n 次插值多项式，于是有

$$P(x_i) = Q(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

令 $H(x) = P(x) - Q(x) \Rightarrow H(x)$ 是次数 $\leq n$ 的多项式。且

$$H(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$\Rightarrow H(x)$ 有 $n+1$ 零点 $\xrightarrow{\text{代数基本定理}} \Rightarrow H(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$



2) 拟合概念

拟合函数定义:

如果函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\|\delta\| = \min$$

$\delta_k = \varphi(x_k) - f(x_k)$, $\|\cdot\|$ 是某种向量范数。

称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个拟合函数。

注意和插值的区别

残差:

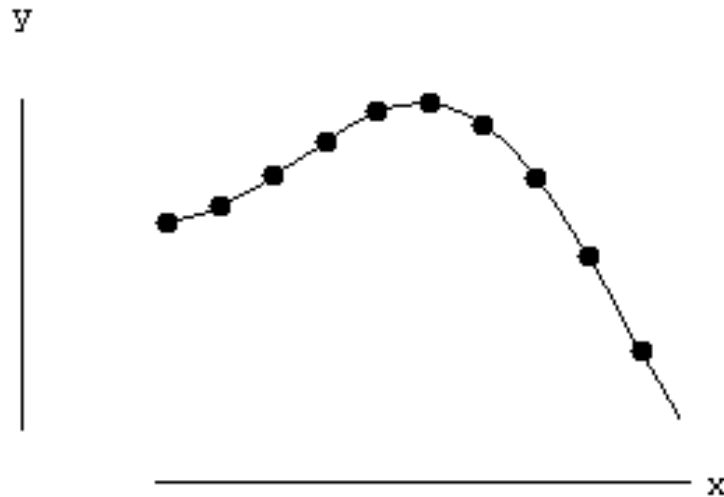
$$\delta_i = P(x_i) - f(x_i)$$

残差向量:

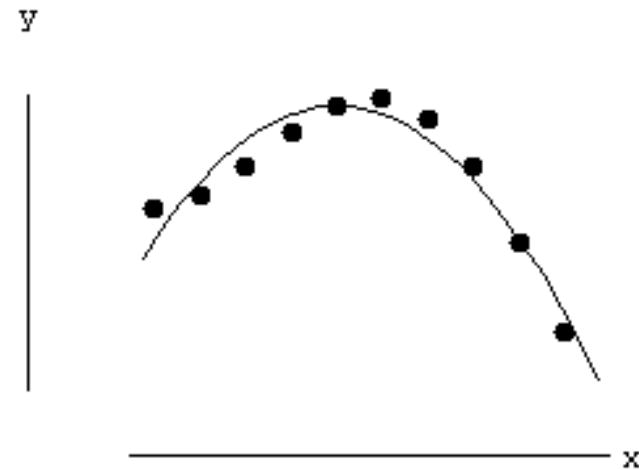
$$\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)^T$$

拟合点: $x_k, k = 0, 1, \dots, n$, 可以不互异

3) 插值函数和拟合函数的几何解释



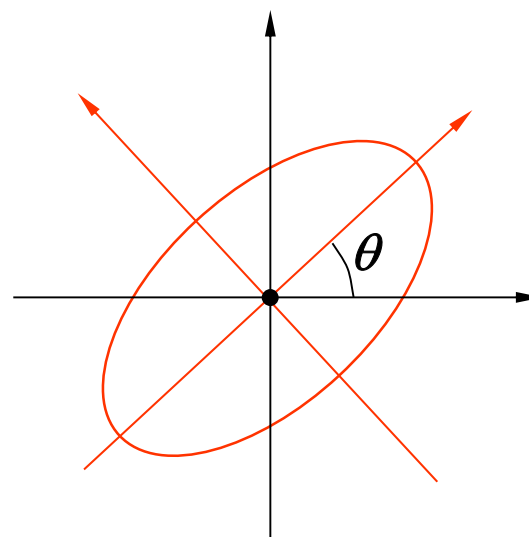
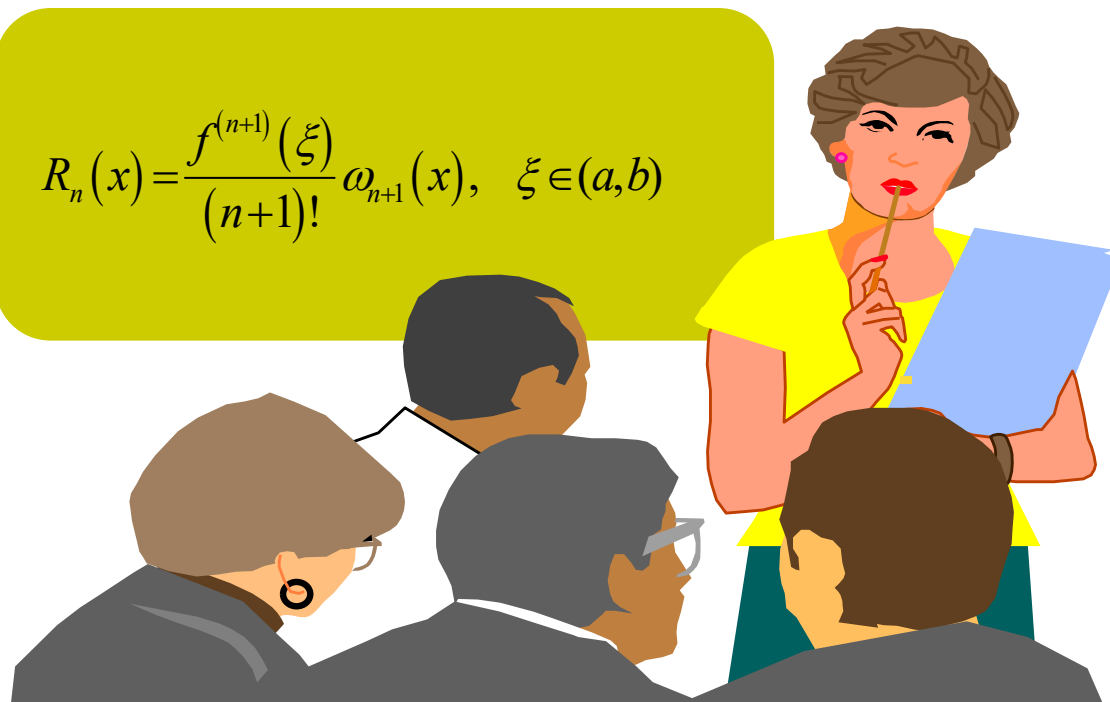
插值函数图示



拟合函数图示

§ 5.3 插值法

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \xi \in (a, b)$$



已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值：

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

即： $y_k = f(x_k)$, $k=0, 1, \dots, n$

要构造一个 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 。

对 $n=1$ 的插值多项式，称为**线性插值**；

$n=2$ 的插值多项式称为**抛物线插值**或**辛普森插值**。

若 $[a, b]$ 是包含 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 的最小闭区间，

用插值函数 $P_n(x)$ 来近似计算 x 在 $[a, b]$ 的函数值时，称为**内插计算**，否则称为**外插**或**外推计算**。



按规律填数都是错题

题目

按规律填数：1, 2, 4, 8, 16, \dots .

I、Lagrange插值

1) 基本思想

将待求的 n 次多项式插值函数 改写成用已知函数值为系数的 $n+1$ 个待定 n 次多项式的线性组合型式，再利用插值条件和函数分解技术确定 $n+1$ 个待定 n 次多项式形式求出插值多项式。

Lagrange插值是 n 次多项式插值。



2) 构造原理

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值 $y_k = f(x_k)$

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

为构造一个 n 次插值多项式 $P_n(x)$, 令

$$L_n(x) = y_0 l_{0n}(x) + y_1 l_{1n}(x) + \dots + y_n l_{nn}(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_{in}(x)$$

式中

$l_{in}(x)$, $(i = 0, 1, \dots, n)$ 是与 $y_i = f(x_i)$ 无关的 n 次多项式



为获得其中的 **$n+1$** 个 **n** 次多项式，
由插值条件，有

$$L_n(x_k) = y_k l_{kn}(x_k) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n y_i l_{in}(x_k) = y_k, \quad \forall k$$

$\because y_k$ 与 $l_{in}(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 无关，可得

$$l_{in}(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$



$$\text{对 } l_{0n}(x) : l_{0n}(x_0) = 1, \quad l_{0n}(x_1) = l_{0n}(x_2) = \cdots = l_{0n}(x_n) = 0$$

注意到函数的零点分解特性：

$$\text{若 } f(x_k) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_k)g(x) \quad \text{可得}$$

$$l_{0n}(x) = \left[\prod_{k=1}^n (x - x_k) \right] g(x)$$

$$\because \partial l_{0n}(x) = n \Rightarrow g(x) = a \Rightarrow l_{0n}(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

$$\text{由 } l_{0n}(x_0) = 1 \Rightarrow l_{0n}(x_0) = a \prod_{k=1}^n (x_0 - x_k) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x_0 - x_k)} \Rightarrow l_{0n}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_0 - x_k} \right)$$



类似可得: **Lagrange插值基函数**

$$l_{in}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right), i = 0, 1, \dots, n$$

代入开始设定的函数

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

n 次Lagrange插值多项式



●Lagrange插值基函数的特点

1) 有几个插值节点就有几个基函数

2) $l_{in}(x)$ 有 n 个乘积因子 $\left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right), \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ i \neq k \end{pmatrix}$

3) $l_{in}(x)$ 的每个因子项的分母为对应的节点 x_i 减去其余所有节点，分子结构同分母，但要把被减数 x_i 换为 x

$$l_{in}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{\underline{x} - x_k}{\underline{x_i} - x_k} \right)$$

例1：给定数表

x	-1	2	5
y	3	6	8

有3个Lagrange插值基函数分别为

$$\begin{aligned} l_{02}(x) &= \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 5)}{(-1 - 2)(-1 - 5)} = \frac{(x - 2)(x - 5)}{18} \end{aligned}$$

$$l_{12}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 5)}{(2 + 1)(2 - 5)} = -\frac{(x + 1)(x - 5)}{9}$$

$$l_{22}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(5 + 1)(5 - 2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{18}$$



3) 分析

插值余项定理： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数， 则有 $\forall x \in [a,b]$ 成立

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

式中 $\xi \in (a,b)$, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$,

x_k 是 (a, b) 上插值节点；

$P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。

证明： $\because P_n(x_k) = f(x_k) \Rightarrow R_n(x_k) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$

由函数零点分解有

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = k(x) \omega_{n+1}(x)$$

做辅助函数

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - k(x) \omega_{n+1}(t)$$

当 $t = x_0, x_1, \dots, x_n, x \Rightarrow g(t) = 0$

说明 $g(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+2$ 个零点。由 Rolle 定理有

说明 $g'(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 个零点；同理有

说明 $g''(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 n 个零点 ...

$$g^{(n+1)}(t) \text{ 有一个零点, 设为 } \xi, \text{ 有 } g^{(n+1)}(\xi) = 0$$



对辅助函数求n+1阶导数

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - (P_n(t))^{(n+1)} - k(x) [\omega_{n+1}(t)]^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!k(x) \end{aligned}$$

$$\text{代入 } t = \xi \Rightarrow g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!k(x) = 0$$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\because R_n(x) = k(x) \omega_{n+1}(x) \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$



由 $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$ 可以得出：

$$1. \quad |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad x \in [a, b] \quad M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$2. \quad |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} T_{n+1}, \quad x \in [a, b] \quad T_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$3. \quad f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{in}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

$x \in [a, b]$, 只要 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数。

对 $n=1$ 的插值多项式，称为线性插值；



例2: 已知 $y = \ln x$ 的函数表为

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4
y	1.098612	1.131402	1.163151	1.193922	1.223775

试用线性插值和抛物线插值分别计算 $\ln(3.27)$ 的近似值，并估计相应的误差。

解: 线性插值需要两个节点，内插比外推好，这里选内插来做。

$$\because 3.27 \in (3.2, 3.3), \text{取 } x_0 = 3.2, x_1 = 3.3$$

$$\therefore L_1(x) = 1.163151 \times \frac{x-3.3}{3.2-3.3} + 1.193922 \times \frac{x-3.2}{3.3-3.2}$$

$$\therefore \ln 3.27 \approx L_1(3.27) = 1.1846907$$



同理，对抛物线插值，选取三个节点为

$x_0 = 3.2, x_1 = 3.3, x_2 = 3.4$, 有

$$\begin{aligned} L_2(x) = & 1.163151 \times \frac{(x-3.3)(x-3.4)}{(3.2-3.3)(3.2-3.4)} \\ & + 1.193922 \times \frac{(x-3.2)(x-3.4)}{(3.3-3.2)(3.3-3.4)} \\ & + 1.223775 \times \frac{(x-3.2)(x-3.3)}{(3.4-3.2)(3.4-3.3)} \end{aligned}$$

$$\therefore \ln 3.27 \approx L_2(3.27) = 1.18478709$$



误差讨论:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad x \in [a, b], M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\because x \in [3.2, 3.3] \Rightarrow |f''(x)| \leq \frac{1}{3.2^2} = M_2$$

有线性插值计算 的误差估计

$$|R_1(3.27)| \leq \frac{M_2}{2!} |(3.27 - 3.2)(3.27 - 3.3)|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3.2^2} \times 0.07 \times 0.03 = 0.103 \times 10^{-3}$$

同理有抛物线插值计算 的误差估计为

$$|R_2(3.27)| \leq 0.9 \times 10^{-5}$$



例3 在 $[-4,4]$ 上给出 e_x 的等距节点函数表, 若想用二次插值来计算 e_x 的近似值, 并要求截断误差不超过 10^{-6} , 问此函数表的步长 h 应为多少?

解 设 $x_k (k=0,1,\cdots,n)$ 是 $[-4,4]$ 上要求的等距数表。

二次插值需要三个节点, 为满足一般性, 这里取三个相邻的节点构造二次插值函数: x_i, x_{i+1}, x_{i+2}

$$\forall x \in [x_i, x_{i+2}] \Rightarrow x = x_i + th, \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$x_{i+1} = x_i + h, x_{i+2} = x_i + 2h$$

利用 $n=2$ 的 Lagrange 余项定理, 有

$$x \in [x_i, x_{i+2}] \Rightarrow R_2(x) = \frac{e^\xi}{3!} t(t-1)(t-2)h^3, \quad t \in [0,2], \xi \in [-4,4]$$



$$\because T_3 = \max_{0 \leq t \leq 2} |t(t-1)(t-2)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}, M_3 = \max_{-4 \leq x \leq 4} |e^x| = e^4 < 3^4$$

$$|R_2(x)| < 10^{-6} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}h^3 \leq 10^{-6} \Leftrightarrow h \leq \frac{10^{-2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{3}} \approx 0.00578$$

**取 $h=0.0057$ 可满足要求。
由**

$$h = \frac{8}{n} \Rightarrow n = 1405$$

故造表时取1405个等距节点来计算函数值即可。



2、Newton 插值

1) 基本思想

将待求的 n 次多项式插值函数 改写成其他基函数形式的多项式的线性组合型式，再利用插值条件确定 $n+1$ 个待定的线性组合系数求出插值多项式。

Newton插值是 n 次多项式插值。



2) 构造原理

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值 $y_k = f(x_k)$

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

为构造一个 n 次插值多项式 $P_n(x)$, 令

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$a_i, (i = 0, 1, \dots, n)$ 为待定系数;

$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1),$

$\dots, (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$ 为多项式基函数



利用插值条件，有

$$\text{当 } x = x_0 \Rightarrow N_n(x_0) = a_0 = y_0 \Rightarrow \underline{a_0 = y_0}$$

$$x = x_1 \Rightarrow N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow \underline{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

依次取 x_2, x_3, \dots, x_n 可以得出 a_2, a_3, \dots, a_n

于是最后可以得出 n 次Newton插值多项式 $N_n(x)$

为将解出的系数 用公式表示出来，引进差商的概念。



记 $f[x_i] = f(x_i)$, **一阶差商定义为:**

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$$

k 阶差商定义为:

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

这里 x_0, x_1, \dots, x_n 要互异。 k 为正整数。

为方便讨论, 称 $f[x]$ 为零 阶差商。



于是我们有：

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

***n*次Newton插值多项式：**



表.1 差商表

x	$y=f(x)$	1阶差商	2阶差商	...	n 阶差商
x_0	y_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
x_1	y_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
:	:	:	:		
x_{n-2}	y_{n-2}	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	y_n				

例1.给定数表

x	1	2	4	5
y	3	6	2	1

1.给出差商表;

2.试用一次和二次Newton插值多项式计算 $f(2.4)$ 的近似值。

解: 1.差商表;

x	y	$f[?,?]$	$f[?,?,?]$	$f[?,?,?,?]$
1	3	3	$-5/3$	$1/2$
2	6	-2	$1/3$	
4	2	-1		
5	1			

用一次Newton插值近似计算 $f(2.4)$ ，应选与2.4最近的2个节点： $x_0 = 2, x_1 = 4$

由表中 行数据有

$$N_1(x) = 6 - 3(x - 2) = -3x + 12$$

$$\therefore f(2.4) \approx N_1(2.4) = 4.8$$

用二次Newton插值近似计算 $f(2.4)$ ，应选与2.4最近的3个节点： $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$

由表中 行数据有

$$N_2(x) = 3 + 3(x - 1) - \frac{5}{3}(x - 1)(x - 2) = -\frac{10}{3} + 8x - \frac{5}{3}x^2$$

$$\therefore f(2.4) \approx N_2(2.4) = 6.26667$$



3) 分析

定理： 满足插值条件的 n 次Newton插值多项式 的余项为

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$

证明 设 $\forall x \in [a, b]$, 且 $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$

对 x_0, x_1, \dots, x_n, x , 有 $n+1$ 次Newton插值多项式 $N_{n+1}(x)$

$$N_{n+1}(t) = N_n(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(t)$$

$$\because N_{n+1}(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$

$$\therefore f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$



利用插值的唯一性，有

$$f(x) - N_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

可以得到差商与微商之间的关系

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$



3、Hermite插值

1) 基本思想

仿照Lagrange插值函数的构造方法，先设定函数形式，再利用插值条件求出插值函数。

Hermite插值是 Lagrange的推广。

Hermite插值提法提法见书。



2) 构造原理

用具体案例说明：

例：设 $f(x)$ 有四阶导数，且有

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f(2) = 0.6, f'(2) = 0.5$$

- 1) 求函数 $f(x)$ 的一个插值多项式，并用此插值函数来计算 $f(1.5)$ 的近似值
- 2) 给出你所得插值多项式的误差关系式，估计近似计算 $f(1.5)$ 的误差。

解：仿照**Lagrange**插值函数的构造来做之。

给定4个数据信息，选择3次多项式 $H(x)$ 作为 $f(x)$ 的插值多项式。令

$$H(x) = f(1)\alpha_1(x) + f(2)\alpha_2(x) + f'(1)\alpha_3(x) + f'(2)\alpha_4(x)$$

式中 $\alpha_k(x)$, $\forall k$ 是与 $f(1)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'(2)$ 无关的3次多项式。

令插值条件为：

$$H(1) = f(1), H'(1) = f'(1), H(2) = f(2), H'(2) = f'(2)$$

得出 $\alpha_k(x)$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1(1) = 1, \alpha_2(1) = 0, \alpha_3(1) = 0, \alpha_4(1) = 0 \\ \alpha_1(2) = 0, \alpha_2(2) = 1, \alpha_3(2) = 0, \alpha_4(2) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0, \alpha'_2(1) = 0, \alpha'_3(1) = 1, \alpha'_4(1) = 0 \\ \alpha'_1(2) = 0, \alpha'_2(2) = 0, \alpha'_3(2) = 0, \alpha'_4(2) = 1 \end{cases}$$



对 $\alpha_1(x)$ 有: $\alpha_1(1)=1, \alpha_1(2)=0, \alpha_1'(1)=0, \alpha_1'(2)=0$

注意到函数的零点分解特性:

$$\text{若 } f(x_k) = f'(x_k) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_k)^2 g(x)$$

$$\text{由 } \alpha_1(2) = \alpha_1'(2) = 0 \Rightarrow \alpha_1(x) = [a(x-1) + b](x-2)^2$$

$$\text{由 } \alpha_1(1) = 1, \alpha_1'(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1(x) = (2x-1)(x-2)^2$$

同理可得

$$\alpha_2(x) = (5-2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_3(x) = (x-1)(x-2)^2$$

$$\alpha_4(x) = (x-2)(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore H(x) = & 0.6(5-2x)(x-1)^2 \\ & + (x-1)(x-2)^2 \\ & + 0.5(x-2)(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1.5) \approx H(1.5) = 0.3625$$



为求其余项，令

$$R(x) = f(x) - H(x), x \in [1, 2]$$

$$\because R(1) = R(2) = R'(1) = R'(2) = 0$$

$$\therefore R(x) = k(x) \omega_4(x), \quad \omega_4(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$$

做辅助函数

$$g(t) = f(t) - H(t) - k(x) \omega_4(t)$$

$$\text{当 } t = 1, 2, x \Rightarrow g(t) = 0$$

说明 $g(t)$ **在** $[1, 2]$ **上有3个零点。由Rolle定理有** $g'(t)$ **在** $[1, 2]$ **上有2个零点。**



另一方面，有 $g'(1)=g'(2)=0$ ，故 $g'(t)$ 在 $[1,2]$ 上有4个零点，由Rolle定理有 $g''(t)$ 在 $[1,2]$ 上有3个零点。同理有 $g'''(t)$ 在 $[1,2]$ 上有2个零点， $g^{(4)}(t)$ 有一个零点，设为 ξ ，有 $g^{(4)}(\xi)=0$

对辅助函数求4阶导数

$$g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - 0 - 4!k(x)$$

$$\text{代入 } t = \xi \Rightarrow g^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!k(x) = 0 \quad \Rightarrow k(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

$$\because R(x) = k(x)\omega_4(x) \Rightarrow R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2 \quad \xi \in [1,2]$$

$$\therefore R(1.5) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(1.5-1)^2(1.5-2)^2 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4^3 \cdot 3!} \quad \xi \in [1,2]$$



例5：已知 $f(x)$ 的4个函数值

$$f(1), f'(1), f''(1), f(2)$$

1) 求函数 $f(x)$ 的一个插值多项式 $P(x)$, $P(x)$ 满足插值条件

$$P(1) = f(1), P'(1) = f'(1), P''(1) = f''(1), \\ P(2) = f(2)$$

2) 写出 $f(x)-P(x)$ 的误差估计式

仿照Lagrange插值函数的构造来做之。



解： 给定4个数据信息， $P(x)$ 选为3次多项式，令

$$P(x) = f(1)h_1(x) + f'(1)h_2(x) + f''(1)h_3(x) + f(2)h_4(x)$$

式中 $h_k(x)$, $\forall k$ 是与 $f(1), f'(1), f''(1), f(2)$ 无关的3次多项式。

由插值条件得出 $h_k(x)$ 满足

$$h_1(1) = 1, h_2(1) = 0, h_3(1) = 0, h_4(1) = 0$$

$$h_1'(1) = 0, h_2'(1) = 1, h_3'(1) = 0, h_4'(1) = 0$$

$$h_1''(1) = 0, h_2''(1) = 0, h_3''(1) = 1, h_4''(1) = 0$$

$$h_1(2) = 0, h_2(2) = 0, h_3(2) = 0, h_4(2) = 1$$



对 $h_1(x)$ 有: $h_1(1)=1, h_1'(1)=0, h_1''(1)=0, h_1(2)=0$

注意到函数的零点分解特性:

$$\text{若 } f(x_k) = f'(x_k) = f''(x_k) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_k)^3 g(x)$$

$$\text{由 } h_1(2) = 0 \Rightarrow h_1(x) = [a(x-1)^2 + b(x-1) + c](x-2)$$

$$\text{由 } h_1(1) = 1 \Rightarrow c = -1; h_1'(1) = 0 \Rightarrow b = -1; h_1''(1) = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\therefore h_1(x) = [-(x-1)^2 - (x-1) - 1](x-2) = (x^2 - x + 1)(2-x)$$

类似地, 有

$$h_2(x) = [a(x-1) + b](x-1)(x-2)$$

$$h_3(x) = a(x-1)^2(x-2), \quad h_4(x) = a(x-1)^3$$



利用插值条件，可得

$$h_2(x) = -x(x-1)(x-2),$$

$$h_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2), h_4(x) = (x-1)^3$$

观察余项在 $x=1$, $x=2$ 的信息，可写出误差关系为

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^3 (x-2) \quad \xi \in (1, 2)$$

怎样证明？



4、分段多项式插值

1) 基本思想

将被插函数 的插值节点由小到大排序，以每对相邻的两个节点为端点获得若干个小区间，然后在每个小区间上都用 的 m 次插值多项式作为 的近似函数。

分段插值是分段函数。

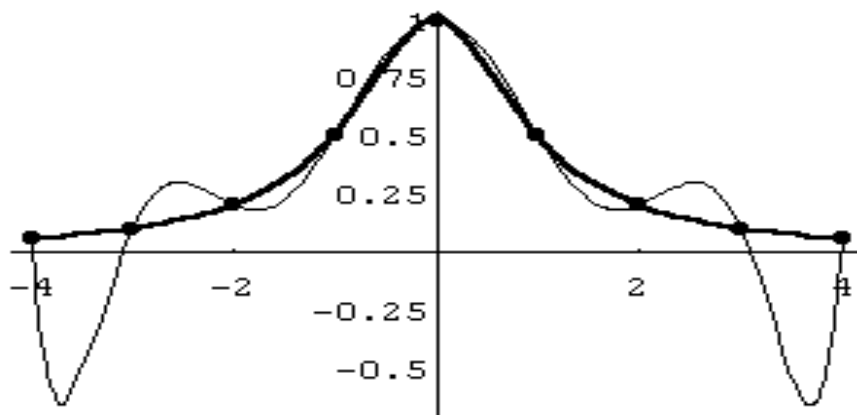


问题的提出 (Runge现象)

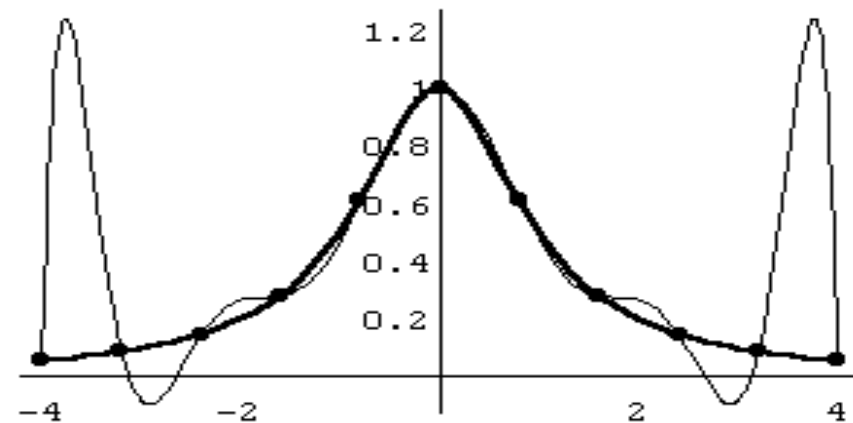
选取函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$ **$n+1$ 个等距节点**

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ?$$

观察 $f(x)$ 对应的 $lagrange$ 多项式 $L_n(x)$:



$L_8(x)$



$L_{10}(x)$

$n \uparrow \Rightarrow$ 插值余项 $|R_n(x)| \uparrow$, 称为 $Runge$ 现象。



定义:

设 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个点 x_k : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和 $f(x_k)$

若有函数 $\varphi(x)$ 满足:

- 1) $\varphi(x) \in C[a, b];$
- 2) $\varphi(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \cdots, n;$
- 3) $\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是 m 次多项式

则称 $\varphi(x)$ 是 $[a, b]$ **上的分段 m 次插值多项式。**



2) 构造原理

1) 分段线性插值的构造原理(m=1)

x	x_k	x_{k+1}
y	y_k	y_{k+1}

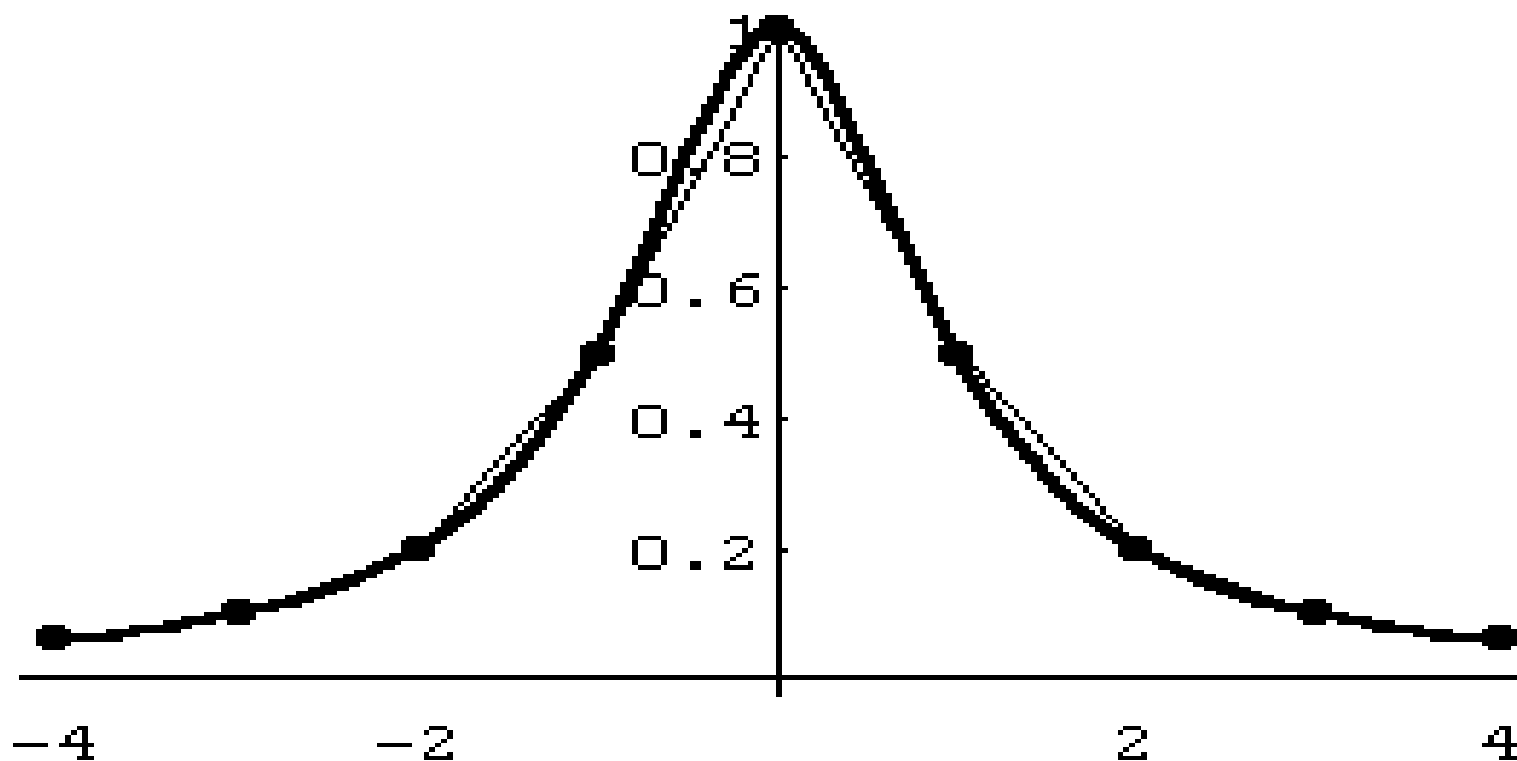
$$y_k = f(x_k)$$

$\because \varphi(x)$ 是 $[x_k, x_{k+1}]$ 的一次插值多项式, 因此有

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_k(x) = y_k l_{01}(x) + y_{k+1} l_{11}(x) \\ &= \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \\ &\quad k = 0, 1, \dots, n-1\end{aligned}$$



$\varphi(x)$ 就是所求的分段线性多项式插值。



*Runge*现象案例中9个点的分段线性插值多项式



2) 分段三次Hermite插值构造原理

x	x_k	x_{k+1}
y	y_k	y_{k+1}
y'	y'_k	y'_{k+1}

$$y_k = f(x_k),$$

$$y'_k = f'(x_k),$$

$\because \varphi(x)$ 是 $[x_k, x_{k+1}]$ 的3次多项式, 选2点的3次hermite插值:

$$\varphi(x) = \varphi_k(x) = y_k \alpha_{03}(x) + y_{k+1} \alpha_{13}(x) + y'_k \beta_{03}(x) + y'_{k+1} \beta_{13}(x)$$

$$x \in [a, b], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\alpha_{03}(x) = \left[1 + \frac{2}{h_k}(x - x_k)\right] \left(\frac{x - x_{k+1}}{h_k}\right)^2, \quad \alpha_{13}(x) = \left[1 - \frac{2}{h_k}(x - x_{k+1})\right] \left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2,$$

$$\beta_{03}(x) = (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{h_k}\right)^2, \quad \beta_{13}(x) = (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2$$



3) 分析

定理 8 假设出现在如下不等式中的函数的高阶导数存在, 则有

1、分段线性插值的误差估计为

$$|R_1(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad x \in [a, b]$$

2、分段三次Hermite插值函数的误差估计为

$$|R_3(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{4! \times 2^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad x \in [a, b]$$

$$h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$$



证明：（第2问）

由两点Hermite插值余项可知

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &= |f(x) - \varphi(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{4!} \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} [(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2] \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

$$\because \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} [(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2] = \frac{1}{2^4} (x_{k+1} - x_k)^4 = \frac{h_k^4}{2^4} \leq \frac{h^4}{2^4}$$

$$\therefore |R_3(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{4! \times 2^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|, x \in [a, b]$$



5、三次样条插值

1) 概念

样条 (Spline) 是一种细长有弹性的软木条，常用来做工程设计中的绘图工具绘出一条光滑曲线。将它进行数学描述，就得到如下三次样条函数的定义。

样条插值是分段插值。

定义： 设 $S(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上，

$[a, b]$ 的一个划分 Δ 为： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

若有函数 $S(x)$ 满足：

1) $S(x) \in C^2[a, b];$

2) $S(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是3次多项式

则称 $S(x)$ 是 $[a, b]$ **上的一个3次样条函数。**

若同时还满足

3) $S(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$

则称 $S(x)$ 是 $[a, b]$ **上的3次样条插值函数。**



2) 基本思想

利用三次样条插值函数定义的条件及在内节点的函数和导数的连续性质，建立关系式来确定样条插值函数。

3) 构造原理

分析

- 1) 三次样条插值函数 在每个小区间 上都是三次多项式, 故在每个小区间 上有4个待定系数;
- 2) 共有 n 个小区间, 有 $4n$ 个待定系数要确定;
- 3) 在 $n-1$ 个内结点有直到二阶的连续导数, 可以得到 $3(n-1)$ 个条件;
- 4) 由插值条件可有 $n+1$ 个条件

故共有 $4n-2$ 个条件, 要想唯一确定3次样条插值函数, 还应另加两个条件才行。

常用的边界条件有如下三类

I : 已知 $f''(x_0), f''(x_n)$, 令 $S''(x_0) = f''(x_0), S''(x_n) = f''(x_n)$

当 $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ 时, 称为自然边界条件

II : 已知 $f'(x_0), f'(x_n)$, 令 $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$

III : 已知 $S(x_0) = S(x_n), S'(x_0) = S'(x_n), S''(x_0) = S''(x_n)$

第 III 类边界条件称为周期性边界条件, 周期函数的样条插值。



构造三次样条插值函数 的M方法推导过程

记 $h_k = x_{k+1} - x_k$, $M_k = S''(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

\therefore 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $S(x)$ 是3次多项式,

\therefore 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $S''(x)$ 是1次多项式.

$$\therefore S''(x) = M_k \frac{x_{k+1} - x}{h_k} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{h_k}, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

做两次积分: 求出 M_k 就得到3次样条插值函数。

$$\begin{aligned} S(x) = & M_k \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} + \left(f(x_k) - \frac{M_k h_k^2}{6}\right) \frac{x_{k+1} - x}{h_k} \\ & + \left(f(x_{k+1}) - \frac{M_{k+1} h_k^2}{6}\right) \frac{x - x_k}{h_k} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$



求出 M_k 的方法

\therefore 在每个内节点 x_k 处, $k=1,2,\cdots,n-1$, 有 $S'(x_k^+) = S'(x_k^-)$

$$\therefore S'(x_k^+) = -\frac{h_k}{2}M_k + f[x_k, x_{k+1}] - \frac{M_{k+1} - M_k}{6}h_k$$

$$S'(x_k^-) = \frac{h_{k-1}}{2}M_k + f[x_{k-1}, x_k] - \frac{M_k - M_{k-1}}{6}h_{k-1}$$

$$\Rightarrow \mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k, (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} + h_k}, \quad \lambda_k = 1 - \mu_k, d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$



对II型边界条件，可得另外两个方程为

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'(x_0))$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'(x_n) - f[x_{n-1}, x_n])$$

若令

$$\lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'(x_0))$$

$$\mu_n = 1, d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'(x_n) - f[x_{n-1}, x_n])$$



则 M 关系式可写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

类似可得其余两个边界条件的M方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 f''(x_0) \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f''(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$



求三次样条插值函数的算法

- 1) 计算 $\mu_k, \lambda_k, d_k, k = 0, 1, \dots, n$
- 2) 对不同的边界条件选择相应的M关系式, 并进行求解, 得到M值;
- 3) 求三次样条插值函数

三次样条插值函数的结论

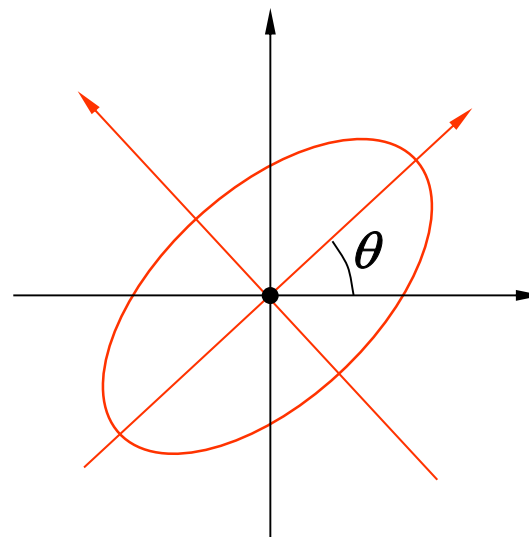
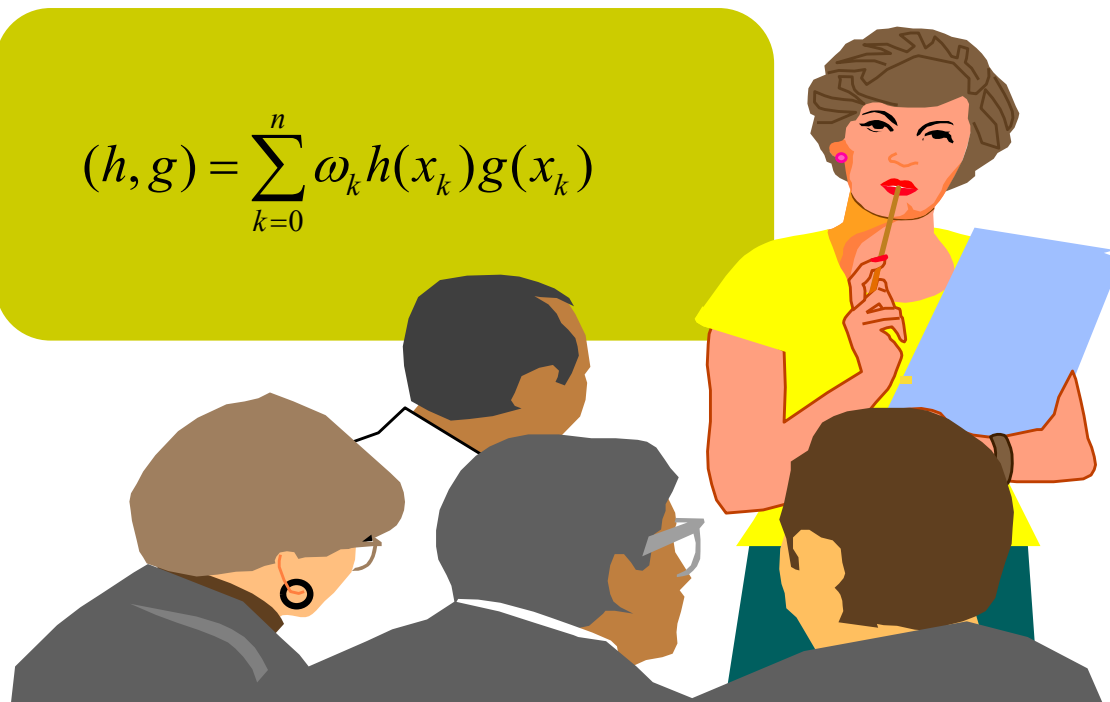
$$1) \|f - S\| \leq \frac{5h^4}{384} \|f^{(4)}\| \quad 2) \|f' - S'\| \leq \frac{h^3}{24} \|f^{(4)}\|$$

$$3) \|f'' - S''\| \leq \frac{h^2}{8} \|f^{(4)}\|, h = \max_{0 \leq k \leq n-1} h_k$$



§ 5.4 曲线拟合法

$$(h, g) = \sum_{k=0}^n \omega_k h(x_k) g(x_k)$$



描述:

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值:

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

即: $y_k = f(x_k)$, $k=0, 1, \dots, n$

选形如 $\varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$ $a_k \in R$, $\varphi_k(x)$ 已知, 满足

$$\|\delta\| = \min$$

$\delta_k = \varphi(x_k) - f(x_k)$, $\|\cdot\|$ 是某种向量范数。



概念

拟合函数类:

$$M = \text{Span} \{ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \}$$
$$= \left\{ \varphi(x) \left| \varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x), a_k \in R \right. \right\}$$

基函数: $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$, 都是已知函数。

m次多项式函数类:

$$\varphi_k(x) = x^k \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

函数线性无关与相关:

$$k_1 \varphi_1(x) + k_2 \varphi_2(x) + \dots + k_s \varphi_s(x) \equiv 0$$



1) 基本思想

根据给定的数据点，选择合适的拟合函数类 M ，再利用最小二乘法确定具体的拟合函数。

由离散数据获得的曲线拟合函数称为经验公式。



2) 构造原理

设拟合函数 $\varphi(x) \in M = \text{Span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$

则有

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x) \quad a_k \in R$$

为确定系数 a_0, a_1, \dots, a_m

考虑加权残差和:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n \omega_k (f(x_k) - \varphi(x_k))^2$$

ω_k ($k = 0, 1, \dots, n$) 已知



$$\because S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n \omega_k (f(x_k) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k))^2$$

由极值必要条件有

$$(h, g) = \sum_{k=0}^n \omega_k h(x_k) g(x_k)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \sum_{k=0}^n \omega_k (f(x_k) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k)) \varphi_j(x_k) = 0 \quad (j=0, 1, \dots, m)$$

可得
$$\sum_{i=0}^m a_i \sum_{k=0}^n \omega_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k) \varphi_j(x_k) \quad (j=0, 1, \dots, m)$$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix}$$

法方程组



$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ 线性无关时,
法方程组是对称正定的, 因此有唯一解:

$$a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*$$

所要的曲线拟合函数为:

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=0}^m a_k^* \varphi_k(x)$$

讨论的问题归为求解法方程组问题。



定义 $M = \text{Span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, 给定 $x_k, (k = 0, 1, \dots, n)$

若有函数 $\varphi^*(x) \in M$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \omega_k (f(x_k) - \varphi^*(x_k))^2 = \min_{\varphi \in M} \sum_{k=0}^n \omega_k (f(x_k) - \varphi(x_k))^2$$

称 $\varphi^*(x)$ 为 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上关于权 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ 的最小二乘解。

所用的方法称为最小二乘法。

曲线拟合的误差

$$S(a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*) = \sum_{i=0}^n \omega_i (f(x_i) - \varphi^*(x_i))^2$$



求曲线拟合的算法

1)画出 $(x_k, f(x_k))(k = 0, 1, \dots, n)$ 的散点图

2)选择合适的拟合函数类M;

3) 构造对应的法方程组，并求解得到具体的拟合函数。



3) 分析

$$(1) \text{当 } \varphi_k(x) = x^k \text{ 时 } \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

对应的法方程组为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \omega_i & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^m \\ \sum_{i=0}^n \omega x_i & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^m & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^n \omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

当 $\varphi(x)$ 是 m 次多项式时，称为 m 次拟合曲线。



线性拟合：m=1的法方程组

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \omega_i & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i \\ \sum_{i=0}^n \omega_i x_i & \sum_{i=0}^n \omega_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^n \omega_i x_i y_i \end{pmatrix}$$

特别 $\omega_i = 1$

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$



例：给定数据表

x	-3	-1	0	1	3
y	-1.2	1.3	1.5	1.9	2

求二次拟合曲线。

解： 求二次拟合曲线就是求2次最小二乘多项式，由于没给出权系数，可选权为1.所求拟合函数类型为

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\therefore \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$$



$\because n = 4$, 计算得法方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 10.2 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$

解之得

$$a_0^* = 1.6524, a_1^* = 0.51, a_2^* = -0.1381$$

$$\therefore \varphi^*(x) = 1.6524 + 0.51x - 0.1381x^2$$



4) 可用求解的非线性拟合类型

1) 指数曲线拟合

$$\varphi(x) = ae^{bx}$$

取对数 $\ln \varphi(x) = \ln a + bx$

令 $P(x) = \ln \varphi(x)$, $A = \ln a$

转化为 $P(x) = A + bx$

求出最小二乘解: $P^*(x) = A^* + b^*x$

$$\text{回代得 } \varphi^*(x) = e^{A^* + b^*x} = e^{A^*} e^{b^*x}$$



例:为试验某种新药的疗效，医生对某人用快速静脉注射方式一次注入该药300mg后，在一定的时期采取血样，测得血药浓度 数据如下

t	0.25	0.5	1	1.5	2	3	4	6	8
c	19.21	18.15	15.36	14.10	12.89	9.32	7.45	5.24	3.01

试确定血药浓度 c 与时间 t 的关系。

解：画出散点图发现其呈现负指数曲线特点，故选择拟合模型为

$$c = c(t) = ae^{-bt}, a, b > 0$$



取对数 $\ln c(t) = \ln a - bt$, 令 $P(t) = \ln c(t)$, $A = \ln a$, $B = -b$

转化为 $P(t) = A + Bt$

本题没有强调某次注射具有不同的重要程度, 因此可以认为权=1, 得法方程组

$$\begin{pmatrix} 9 & \sum_{i=0}^8 t_i \\ \sum_{i=0}^8 t_i & \sum_{i=0}^8 t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^8 P(c_i) \\ \sum_{i=0}^8 t_i P(c_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^8 \ln c_i \\ \sum_{i=0}^8 t_i \ln c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \prod_{i=0}^8 c_i \\ \ln \prod_{i=0}^8 c_i^{t_i} \end{pmatrix}$$

解得 $a = e^{2.9943} \approx 19.9714$, $b = 0.2347$

$$\therefore c = 19.9714 e^{-0.2347t}$$



(2) 多变量线性拟合

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$$

这里 a_0, a_1, \dots, a_m 是待定常数,

x_1, x_2, \dots, x_m 是自变量。

注意到第 k 个自变量 在第 j 次试验的取值

$$x_{kj} = \varphi_k(x_j)$$

可令 $\varphi_0 = 1, \quad \varphi_k(x) = x_k \quad k = 1, 2, \dots, m$

则原问题就是讨论过的线性拟合问题了。



5) 曲线拟合法的推广

最佳平方逼近

$$\int_a^b \rho(x)(f(x) - \varphi(x))^2 dx = \min$$

这里 $\varphi(x)$ 是拟合函数, $\rho(x)$ 是权函数
 $\rho(x)$ 和 $f(x)$ 都是已知函数。

方法 $\{f(x_k)\} \rightarrow f(x); \sum \rightarrow \int_a^b$

$$(h, g) = \int_a^b \rho(x)h(x)g(x)dx$$

过程不变!



例：求 $f(x)=x^4$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=1$ 的二次最佳平方逼近多项式。

解

由题意有 $M = \text{Span}\{1, x, x^2\}$

$$\therefore \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$$

设所求最佳平方逼近多项式为

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2$$

对应的法方程组为

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_0, \varphi_2) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) \\ (\varphi_2, \varphi_0) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ (\varphi_2, f) \end{pmatrix}$$



用内积公式： $(h, g) = \int_{-1}^1 h(x)g(x)dx$ 得

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-1}^1 dx = 2, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_0) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}, \quad (\varphi_0, f) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$$

$$(\varphi_1, f) = \int_{-1}^1 x^5 dx = 0, \quad (\varphi_2, f) = \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{2}{7}$$



得法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

解得

$$b = 0, a = -\frac{3}{35}, c = \frac{6}{7}$$

$$\therefore \varphi(x) = -\frac{3}{35} + \frac{6}{7}x^2$$

