第三章　线性方程组解法

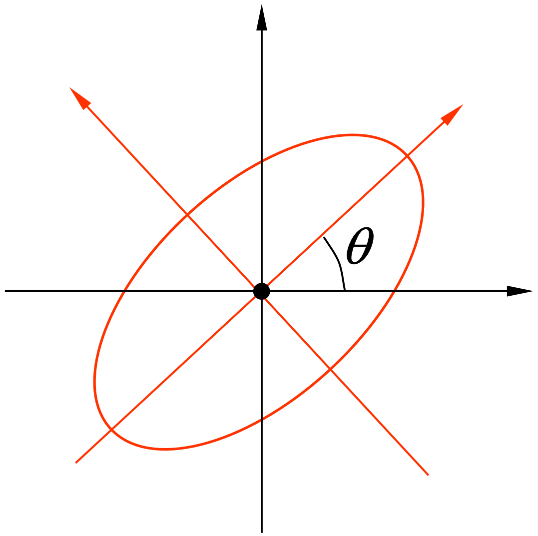
讲授：

　　大型线性方程组计算机求解的常用方法的构造和原理；

重点论述：

　　Jacobi迭代法、Seidel迭代法、Guass消元法及LU分解法的原理、构造、收敛性等。

§3.2 基本概念



*线性方程组的解

对于 n 个方程的 n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

式中a_{ij}称为系数，b_i 称为右端项，它们都是已知量；若有x_1^*，$x_2^*, \cdots, x_n^*$ 使方程组3.1成立，则称x_1^*，$x_2^*, \cdots, x_n^*$为方程组3.1的解。

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$

*线性方程组的行列式解法

对于 n 个方程的 n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

其系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & j\text{列} & \quad & \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$

如果 $|A| \neq 0$， 则方程组 $Ax = b$ 有唯一解

方法很优美，
但可行性不好！

且 $x_1 = \dfrac{|B_1|}{|A|}, \; x_2 = \dfrac{|B_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \dfrac{|B_n|}{|A|}.$

在数值计算中，解线性方程组的方法有**直接法**和**迭代法**两大类。

直接法

用计算公式直接计算出线性方程组的解的方法。

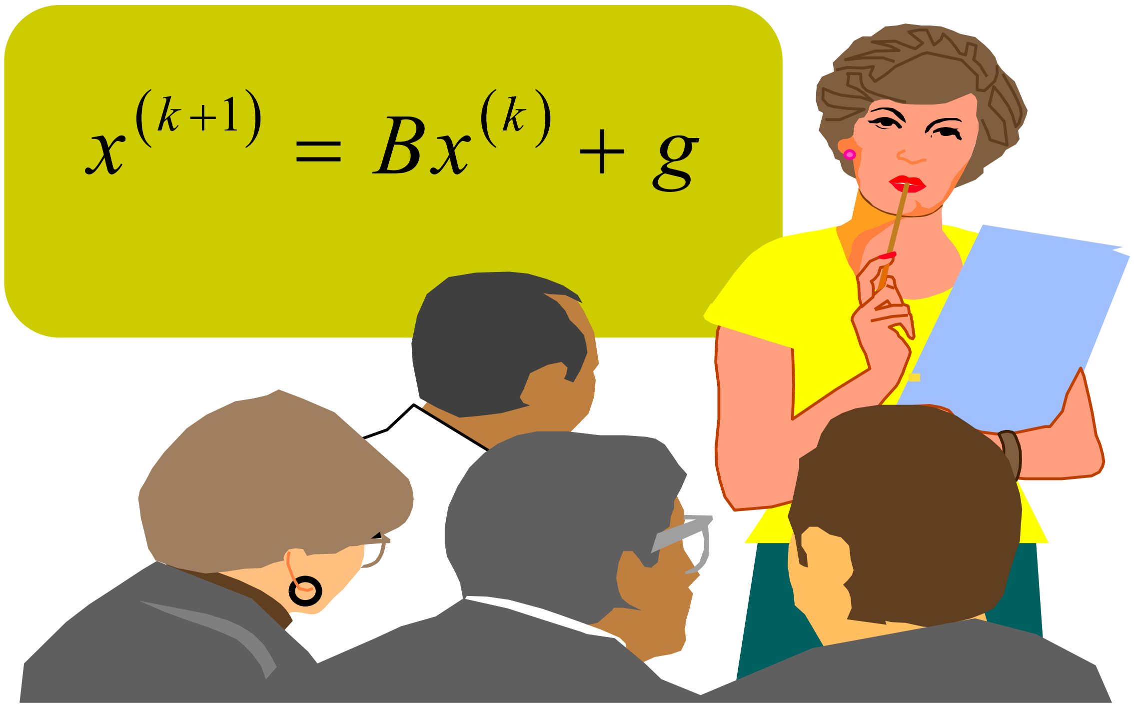
迭代法

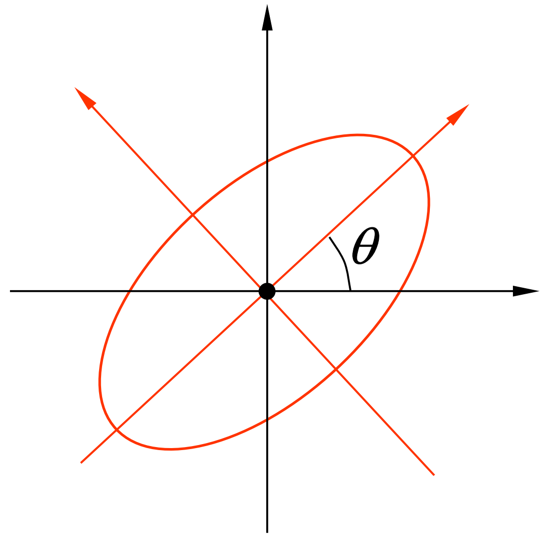
用迭代公式来求满足精度要求的近似解的方法。

- 迭代法是一种逐次逼近线性方程组解的方法。

§3.3 线性方程组的迭代解法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$





基本思想

$$Ax = b \qquad (4\text{-}1)$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}, b \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

使用迭代法求解（4-1）时，首先要将它变形，变成如下形状的等价方程组

$$x = Bx + f \qquad （4\text{-}2）$$

其中 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}, f \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

即（4-1）的解是（4-2）的解，反之，（4-2）的解也是（4-1）的解。用不同的方法(构造)（4-2）就可得到不同的迭代法。

$$Ax = b \Longleftrightarrow$$

（4-2）中的矩阵B称为迭代矩阵。

如果已导出（4-1）的等价方程组（4-2）后，计算（4-1）的解就变成求序列的极限.

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$

代入（4-2）的右端. 其中，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ （4-2）

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{f}$$

其一般形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (4\text{-}3)$$

通常称使用（4-3）式求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式.

如果对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ ，都有当 $k \to \infty$ 时，$x^{(k)} \to x^*$ 。

其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{(k)})^T$， $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*)^T$

也可写成

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^* \qquad 即 \qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i^*, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散.

由于

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B} \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

所以收敛迭代法的极限向量 x^*，满足

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

即为方程组（4-2）的解，从而也是（4-1）的解。因此，使用迭代法求解就是求向量序列 $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots$ 的极限向量 $\boldsymbol{x}^*$。

4.1.1 简单迭代法

简单迭代法也称基本迭代法，有些迭代法可以通过对基本迭代法的加速或变形而得到。设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为非奇异，且 $a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$。

对上式移项和变形后可得等价的方程组：

Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}\right) \end{cases} \qquad (4\text{-}4)$$

将（4-4）写成迭代格式，即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (4\text{-}5)$$

Jacobi
迭代格式

也可写成

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad （3-6）$$

迭代法（4-5）或（4-6）称为**Jacobi迭代法**。

Jacobi 迭代格式

例1 将线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ x_2 &= \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(-2x_1 - x_2 + 12) \end{aligned}$$

解：写成Jacobi迭代格式（4-5）：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \text{（4-5）}$$

Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \quad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \quad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3\ ;$$

Jacobi 迭代格式

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \qquad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \qquad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3\ ;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}\left(20 + 3\times 3 - 2\times 3\right) \approx 2.875 \quad \dots, \quad x_1^{(10)} \approx 3.00032$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left(33 + 4\times\frac{20}{8} + 3\right) \approx 2.3636 \quad \dots, \quad x_2^{(10)} \approx 1.999838$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12 - 2\times\frac{20}{8} - 3\right) \approx 1 \qquad \dots, \quad x_3^{(10)} \approx 0.999881$$

终止条件为：$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon$。精确解为：$x^{*} = (\ 3, 2, 1\ )^{T}$。

Seidel 迭代格式

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，在计算 $x_2^{(k+1)}$时 $x_1^{(k+1)}$ 已经算出，计算 $x_i^{(k+1)}$时 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出。一般说来，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要精确些。 故对 Jacobi迭代法（4-5） 可作如下改进.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Seidel 迭代格式

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\vdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$， $x_2^{(5)}\approx 2.000072$， $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le 10^{-5}$

Seidel 迭代格式

将迭代格式可写成如下的分量形式，即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ k = 0, 1, 2, \cdots; \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad (4\text{−}9)$$

称为**Gauss-Seidel**迭代法。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Jacobi迭代

Sor法迭代格式

用Seidel迭代格式算出的$x^{(k+1)}$记为$\tilde{x}^{(k+1)}$得到

$\Delta x = \tilde{x}^{(k+1)} - x^{(k)}$,做加速处理:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \Delta x = (1-\omega) x^{(k)} + \omega \tilde{x}^{(k+1)}}$$

得到Sor法迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

Sor法是Seidel迭代法的推广!

例：写出如下程组的3种迭代格式

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

解：先写出不动点方程组：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{10}(7 + x_2 + 2x_3) = 0.7 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{10}(8 + x_1 + x_3) = 0.8 + 0.1x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{5}(4 + x_1 + x_2) = 0.8 + 0.2x_1 + 0.2x_2 \end{cases}$$

Jacobi迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.7 + 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 0.8 + 0.1x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.8 + 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} \end{cases}$$

Seidel迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.7 + 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 0.8 + 0.1x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.8 + 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Sor迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(0.7 + 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(0.8 + 0.1x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega(0.8 + 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

三种迭代法的向量迭格式

把$Ax=b$的A做分解：$A=D-L-U$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

观察**Jacobi**迭代法

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

则其矩阵的表示形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

注意：

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}} = \underset{D^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \underset{L+U}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix} = \underset{D^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \underset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

或者 $$Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b$$

解出向量 x 得不动点方程组

$$x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

由此得 Jacobi迭代的向量迭代格式：

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b \quad (*)$$

记： $B_J=D^{-1}(L+U), g_J=D^{-1}b$ **(*）式可以写为：**

$$\boxed{x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g_J}$$

B_J称为Jacobi迭代矩阵

将Gauss-Seidel公式改写成

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而可写成矩阵形式为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{L}} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

从而有 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$

整理后可得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{f}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_G \quad (k = 0,1,\cdots)$ **(4-10)**

（4-10）就是Gauss-Seidel迭代法。

即有Seidel向量迭代格式：

$$\boxed{\begin{aligned}&x^{(k+1)}=B_S x^{(k)}+g_s\\&B_S=(D-L)^{-1}U,\quad g_S=(D-L)^{-1}b\end{aligned}}$$

B_S为Seidel迭代矩阵

Sor法向量迭代格式：

$$\boxed{\begin{aligned}&x^{(k+1)}=B_\omega x^{(k)}+g_\omega\\&B_\omega=(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right],g_\omega=(D-\omega L)^{-1}b\end{aligned}}$$

上面三种向量迭代格式可以写成一种：

$$\boxed{x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g}$$

$,B$为迭代矩阵

迭代法的收敛性

我们要考虑如下问题：

① 如何判断迭代过程是否收敛呢?
② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么?
③ 决定迭代收敛速度的因素是什么?

定义3. 1：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, \forall i,$ 称向量序列 $x^{(k)}$ 收敛于向量 x^*,

简记为 $$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

这里 $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\right)^T$， $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)^T$

设某种迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

两式相减，得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*) = \cdots = B^{k+1}\left(x^{(0)} - x^*\right)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$

故当 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{0}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right) = \boldsymbol{0}$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*$ 是一个非零的常向量，因此只有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{k+1} = \boldsymbol{O}_{n\times n} \quad \text{（零矩阵）}$$

为研究收敛，分析向量、矩阵及其运算的性质，引入刻画的“距离”的概念---范数

定义3.2 设L是数域K上的一个线性空间，如果定义在L上的实值函数 P(x) 满足:

$1)\forall x \in L \Rightarrow P(x) \geq 0$ 、$P(x)=0 \Leftrightarrow x=0;$ 非负性

$2)\forall x \in L, \lambda \in K \Rightarrow P(\lambda x)=|\lambda| P(x);$ 齐次性

$3)\forall x, y \in L \Rightarrow P(x+y) \leq P(x)+P(y)$ 三角不等式

则称P(.) 是L上的一个范数，称 P(*x*)为*x*的一个范数。

记 $P(x)=\|x\|_p=\|x\|$，定义的3条可以写为

$1)\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0;$	与绝对值比较	$1)\lvert x\rvert \geq 0$ 且 $\lvert x\rvert=0 \Leftrightarrow x=0;$
$2)\|\lambda x\|=\lvert\lambda\rvert\|x\|;$		$2)\lvert\lambda x\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert x\rvert;$
$3)\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$		$3)\lvert x+y\rvert \leq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$

数值分析中常用的线性空间

1、 n维向量空间

$$R^n=\{a\mid a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),a_k\in R\}$$

2、矩阵空间

$$R^{m\times n}=\{A_{m\times n}\mid A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},a_{ij}\in R\}$$

3、连续函数空间

$$C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$$

线性运算定义：

$$f+g:\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$\lambda f:\quad (\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x),\lambda\text{为数}$$

数值分析中常用的范数

1、 R^n 中的向量范数 $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$

1) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

3) $\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$

$x = (1, 2, -3)^T$，则有

$\|x\|_1 = |1| + |2| + |-3| = 6;$

$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + |-3|^2} = \sqrt{14};$

$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-3|\} = 3$

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < +\infty}$$

分别称为 1，**2**，∞范数和***p***–范数。

前面三种范数都为**p**−范数，当 $p = 1$，**2**，∞时的范数。

注意，当时 $p \to \infty$，$\|\boldsymbol{x}\|_p \to \|x\|_\infty$。事实上，

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p = \max_{1 \le i \le n} |\boldsymbol{x}_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le n \cdot \max_{1 \le i \le n} |\boldsymbol{x}_i|^p = n \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\infty^p$$

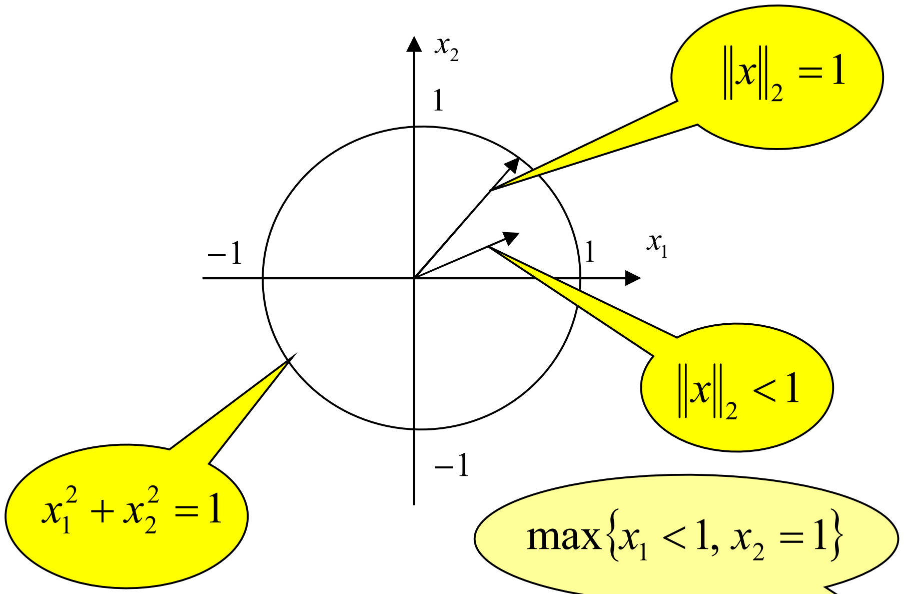
两边开**p**次方得

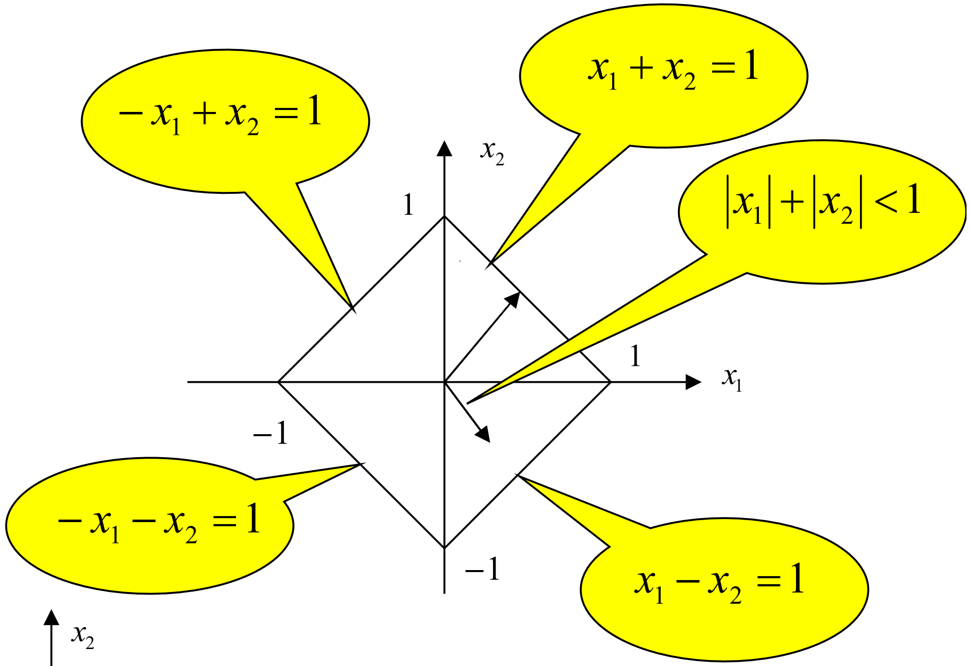
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le n^{\frac{1}{p}} \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$ 由于 $\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{n} = 1$, 故 $\|\boldsymbol{x}\|_p \to \|x\|_\infty$

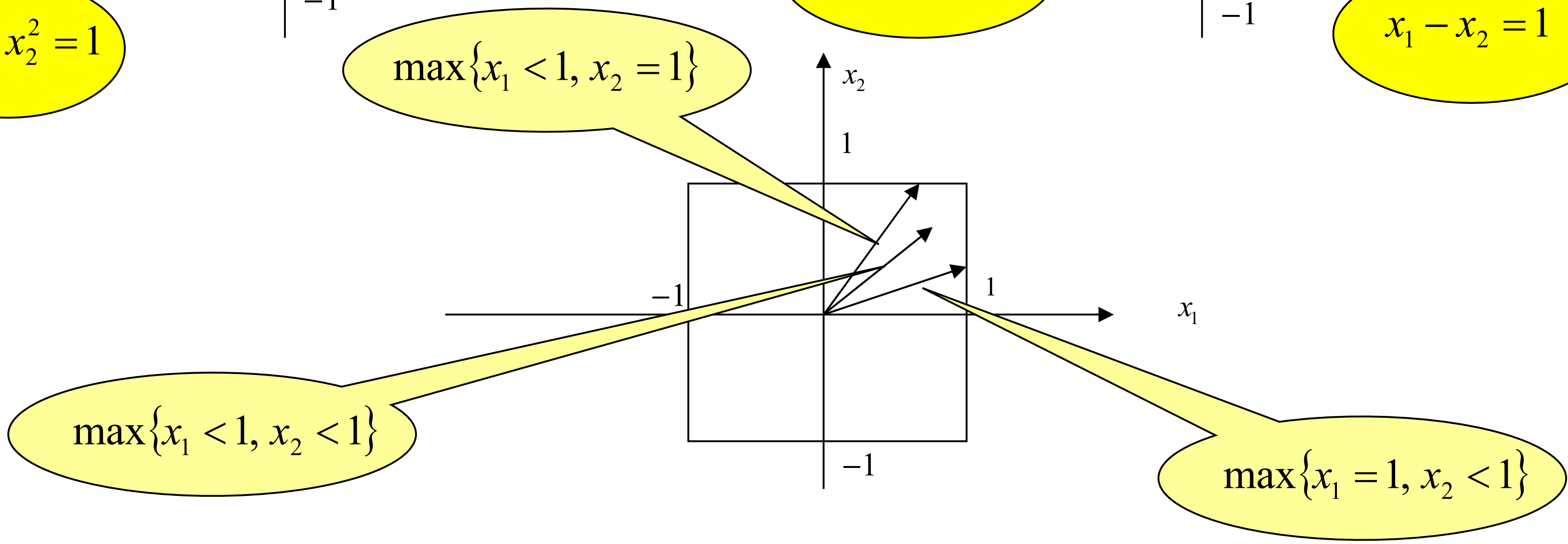
容易验证以上三种范数均满足范数定义中的三个条件。

下面我们分析向量的１，2和∞−范数的几何意义，

为此，不妨设 $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$, $\|x\|_2 \le 1$、$\|x\|_\infty \le 1$ 和 $\|x\|_1 \le 1$ 。


x_2
1
-1
1
x_1
-1
$\|x\|_2 = 1$
$\|x\|_2 < 1$
$x_1^2 + x_2^2 = 1$


$-x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + x_2 = 1$
$|x_1| + |x_2| < 1$
x_2
1
1
x_1
-1
-1
$-x_1 - x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 1$


$\max\{x_1 < 1, x_2 = 1\}$
x_2
1
-1
1
x_1
-1
$\max\{x_1 < 1, x_2 < 1\}$
$\max\{x_1 = 1, x_2 < 1\}$

一般情况下，对给定的任意一种向量范数$\|\cdot\|$， 可定义出加权的范数：$\|\boldsymbol{x}\|_W = \|\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|$ 其中$\boldsymbol{W}$为对角矩阵， 其对角元素是它的每一个分量的权系数。例如, 对任 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{C}^3$

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times3},$$

加权的1-范数为：

$$\|\boldsymbol{x}\|_W = \|W\boldsymbol{x}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|$$

加权的2-范数为：

$$\|\boldsymbol{x}\|_w = \|Wx\|_2 = \left(|\boldsymbol{x}_1|^2 + 9|\boldsymbol{x}_2|^2 + 4|\boldsymbol{x}_3|^2 \right)^{1/2}$$

例 对任给 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T\in\boldsymbol{C}^3$, 试问如下实值函数是否构成向量范数？

1. $|x_1|+|2x_2+x_3|$, ✘
2. $|x_1|+|2x_2|-5|x_3|$, ✘
3. $|x_1|^4+|x_2|^4+|x_3|^4$, ✘
4. $|x_1|+3|x_2|+2|x_3|$ √

答： 1. 中取 $x_1=0,\ x_3=-2x_2$ 2. 中取 $x_1=0,\ x_3=\dfrac{2}{5}x_2$

故，1. 和2. 不满足非负性条件。

3. 不满足齐次性条件；

$$f(\alpha\boldsymbol{x})=|\alpha x_1|^4+|\alpha x_2|^4+|\alpha x_3|^4$$
$$=|\alpha|^4\left(|x_1|^4+|x_2|^4+|x_3|^4\right),$$

4. 满足加权向量范数的定义，故构成向量范数。

矩阵范数

若我们取

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & \text{第}j\text{列} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \longrightarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

则$\boldsymbol{E}_{ij}$线性无关，而且任意一个$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$都可表为：

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

这也就是说，全体$m\times n$ 矩阵构成的空间的维数是mn。因此，$\mathbf{R}^{m\times n}$亦可看作一个mn维的向量空间。 这样，我们自然想到将向量范数的概念直接推广到矩阵上。 然而这种推广应考虑到矩阵的乘法运算。 因而使用的矩阵范数的定义是按如下方式。

定义1.5 定义在$\mathbf{C}^{m\times n}$上的一个非负实值函数，记为 $f(A)=\|A\|$，若该函数满足以下条件：

即对任意矩阵A、B以及任意复常数 $\alpha\in\mathbf{C}$

（1）非负性 $\|A\|\geqslant 0$ 当且仅当$A=\mathbf{0}_{m\times n}$时$\|A\|=0$

（2）**齐次性** $\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$

（3）**三角不等式** $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

（4）**相容性** $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$ $A\in C^{m\times l}$，$B\in C^{l\times n}$

则称函数$\|\cdot\|$为$\mathbf{C}^{m\times n}$上的一个矩阵范数。

便于分离变量，
缩放估计，
瓶子能装多少东西？
单独装沙或装水
或混合装

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \qquad (1\text{-}23)$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{F} \stackrel{\Delta}{=} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}24)$$

显然上述两个函数均满足矩阵范数定义中的（1）—（3）我们分别称由（1-23）和（1-24）所定义的范数为矩阵的 m_1-范数和Frobenius范数（简称$\boldsymbol{F}$-范数）。

性质：

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\|_1 \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\|_2^2\right)^{1/2}$$

$$\|A\|_F = \left(\operatorname{tr}(A^H A)\right)^{1/2}$$

其中 $\boldsymbol{a}_i$为 A 的 i 列

下面证明(1-23)满足相容条件，证： 由定义

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{AB}\|_{m_1} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\left|a_{i1}b_{1j}\right| + \left|a_{i2}b_{2j}\right| + \cdots + \left|a_{il}b_{lj}\right| \right) \\
&\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\left|a_{i1}\right| + \left|a_{i2}\right| + \cdots + \left|a_{il}\right| \right) \cdot \left(\left|b_{1j}\right| + \left|b_{2j}\right| + \cdots + \left|b_{lj}\right| \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} \left|a_{ik}\right| \right) \left(\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{kj}\right| \right) = \|\boldsymbol{A}\|_{m_1} \|\boldsymbol{B}\|_{m_1}
\end{aligned}
$$

下面证明(1-24)满足相容条件，证：记

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_n\\A_2B_1 & A_2B_2 & & A_2B_n\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_n\end{pmatrix}$$

其中 $A_i=\left(a_{i1},a_{i2},,\cdots,a_{in}\right)\quad i=1,2,\cdots,m$

$$B_j=\left(b_{1j},b_{2j},,\cdots,b_{nj}\right)^T\quad j=1,2,\cdots,n$$

$$\left(A_i^TB_j\right)=A_iB_j=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

$$\|\boldsymbol{AB}\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|A_iB_j\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\|A_i\|_2^2\|B_j\|_2^2\right)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|A_i\|_2^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|B_j\|_2^2}=\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{B}\|_F$$

例　设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$f(A)=\max\limits_{ij}|a_{ij}|$，问是否构成***A***的一种范数？

解：取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，那么，$AB=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

则可得出

$$f(A)=f(B)=1,\qquad f(AB)=2$$，从而有

$$f(AB)>f(A)\cdot f(B)$$，故不构成***A***的一种范数。

若定义实值函数：$\|A\|=\sqrt{m\cdot n}\cdot\max\limits_{ij}|a_{ij}|$，则可验证其构成***A***的一种范数。

定理1.2（**向量范数的等价性定理**）设 $\|\cdot\|_\beta$和 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 $\mathbf{C}^n$ 上的任意两种向量范数，则存在两个与向量无关的正常数 $c_1>0$和$c_2>0$，使得下面的不等式成立

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_\beta \le \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \le c_2\|\boldsymbol{x}\|_\beta \tag{1-6}$$

并称 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 为 $\mathbf{C}^n$ 上的**等价范数**。

利用定理1.1可证如下的重要的结果

定理（**向量序列收敛性定理**）设 $\boldsymbol{x}_k\in\mathbf{C}^n$，则

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\left|x_i^{(k)}-x_i\right|=0,\quad i=1,2,\cdots,n \quad \left(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}\right)$$

其中 $\boldsymbol{x}_k=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^T$，$\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$。

矩阵范数具有向量范数的一切性质

定理（**矩阵范数的等价性定理**）设 $\|\cdot\|_\beta$和 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 上的任意两种矩阵范数， 则存在两个与矩阵无关的正常数 $C_1>0$和$C_2>0$，使得下面的不等式成立

$$c_1\|\boldsymbol{A}\|_\beta \le \|\boldsymbol{A}\|_\alpha \le c_2\|\boldsymbol{A}\|_\beta$$

并称 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 上的**等价范数**。

定理（**矩阵序列收敛性定理**）设 $\boldsymbol{A}_k\in\mathbf{C}^{m\times n}$， 则

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{A}\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=0,\ \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{array} \quad \left(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}\right)$$

其中 $\boldsymbol{A}_k=\left(a_{ij}^{(k)}\right), \boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathbf{C}^{m\times n}$。

矩阵与向量的乘积在矩阵计算中经常出现，所以我们自然希望矩阵范数与向量范数之间最好有某种协调性。若将向量看作矩阵的特殊情形，那么由矩阵范数的相容性，我们便得到了这种协调性，即矩阵范数与向量范数的相容性。

定义1.6 对于一种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 和一种向量范数 $\|\cdot\|_V$ 如果对任意 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和任意 $\boldsymbol{n}$ 维向量 $\boldsymbol{x}$，满足

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_V \le \|\boldsymbol{A}\|_M \|\boldsymbol{x}\|_V$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 是相容的。

矩阵 $\boldsymbol{m}_1$ 范数与向量的 $\boldsymbol{p}$-范数是相容的，即 $\|\boldsymbol{Ax}\|_p \le \|\boldsymbol{A}\|_{m_1} \|\boldsymbol{x}\|_p$

而矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的，即 $\|\boldsymbol{Ax}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_F \|\boldsymbol{x}\|_2$

算子范数

定理 $\mathbb{C}^n$ 上的任何向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$ 均为$\boldsymbol{x}$的连续函数。

定理 已知 $\mathbf{C}^m$ 和 $\mathbf{C}^n$上的同类向量范数 $\|\cdot\|_V$，$A_{m\times n}$

若定义

$$\|\boldsymbol{A}\|_M=\max_{\boldsymbol{x}\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V}=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_V=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_V \tag{1-25}$$

则 $\|\boldsymbol{A}\|_M$是一种矩阵范数,且与已知的向量范数相容

我们称由关系式（**1-25**）定义的矩阵范数为**从属向量范数的矩阵范数**简称**从属范数**或算子范数.

算子范数$\Rightarrow$矩阵范数,

反之不可!

1) 列范数：$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ （列和范数）

2) 行范数：$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ （行和范数）

3) F范数：$\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

4) 2范数：$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$ ，$\lambda_{\max}$是A^TA的最大特征值

（谱范数）

F范数,m1范数都不是算子范数，列和范数，行和范数，谱范数是算子范数。

常用的有p=1, 2, ∞,对应有$\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$

显然有 $\|Ax\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p$

推论 对任何算子范数，单位矩阵 $\boldsymbol{I} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ 的范数值为1，即

$$\|\boldsymbol{I}\| = 1 \text{。}$$

事实上，

$$\|\boldsymbol{I}\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 1$$

特别地，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$、$\|\boldsymbol{A}\|_F$ 不是算子范数。

事实上，

$$\|\boldsymbol{I}\|_{m_1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \neq 1 \quad \|\boldsymbol{I}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n} \neq 1$$

例：证明范数不等式

若$\|B\|<1, \|\cdot\|$为算子算数 $\Rightarrow I+B$可逆，且

$$\left\|(I+B)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

证明：（反证法）假设I+B不可逆，易知对应齐次方程组 $(I+B)x=0$ 有非零解，设为$\overline{x}$，有

$$(I+B)\overline{x}=0 \quad \Rightarrow B\overline{x}=-\overline{x}$$

两边取范数，并利用范数定义

$$\|B\|\cdot\|\overline{x}\| \geq \|B\overline{x}\| = \|-\overline{x}\| = \|\overline{x}\|$$

$\because \|\overline{x}\| \neq 0 \Rightarrow \|B\| \geq 1$　　**矛盾！故I+B可逆。**

$$\because (I+B)(I+B)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow (I+B)^{-1} = I - B(I+B)^{-1}$$

两边取范数，并利用算子范数定义

$$\left\|(I+B)^{-1}\right\| \le \|I\| + \left\|B(I+B)^{-1}\right\|$$

$$\le 1 + \|B\|\left\|(I+B)^{-1}\right\|$$

$$\therefore \left\|(I+B)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|B\|}$$

可以证明：

1.任意给定的矩阵范数必然存在与之相容的向量范数；任意给定的向量范数必然存在与之相容的矩阵范数（如从属范数）。

2. 一个矩阵范数可以与多种向量范数相容（矩阵的m_1−范数与向量的p−范数相容）；多种矩阵范数可以与一个向量范数相容（矩阵的F−范数、2−范数与向量的2−范数相容）。

3. 从属范数一定与所定义的向量范数相容，但是矩阵范数与向量范数相容却未必有从属关系。（矩阵的F−范数与向量的2−相容，但无从属关系）。

4. 并非任意的矩阵范数与任意的向量范数相容。

矩阵范数与向量范数不相容的例子：

取 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 则有 $\|A\|_1=1$, $\|x\|_\infty=1$,

而 $$\|Ax\|_\infty=2>\|A\|_1\cdot\|x\|_\infty$$

故矩阵的 $\|\cdot\|_1$ 与向量的 $\|\cdot\|_\infty$ 不相容。

谱半径及其与范数的关系

矩阵A的谱半径： $\boxed{\rho(A)=\max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k|}$

λ_k是复数时，$|\lambda_k|$是复数模；

$A\in R^{n\times n},\lambda_k,k=1,2,\cdots,n$是$A$的$n$个特征值。

注

当A为对称矩阵时，有

$$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

事实上，当A为对称矩阵时，即当 $A=A^T$ 时，

由矩阵2-范数的定义，得

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^2\right)}=\left|\lambda_{\max}\left(A\right)\right|=\rho(\boldsymbol{A})$$

定理3.3

$$\rho(A) \le \|A\|，\ \|\cdot\|\text{是任意的矩阵算子范数。}$$

证明

设λ_k是A的任意特征值，$x^{(k)}$是对应的特征向量，则有

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}$$

两边取算子范数有

$$\|A\|\left\|x^{(k)}\right\| \ge \left\|Ax^{(k)}\right\| = \left\|\lambda_k x^{(k)}\right\| = \left|\lambda_k\right|\left\|x^{(k)}\right\|$$

$\because\ \left\|x^{(k)}\right\| \ne 0$,同除$\left\|x^{(k)}\right\|$，有 $\|A\| \ge \left|\lambda_k\right|$

由λ_k的任意性，有 $\|A\| \ge \max\left|\lambda_k\right| = \rho(A)$

问实值函数 $\rho(\boldsymbol{A})$ 可不可以作为A的一种范数?

取 $A = B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则有 $\rho(\boldsymbol{A}) = 0$, $\rho(\boldsymbol{B}) = 0$，而

$\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 1$ ，即有 $\rho(\boldsymbol{A}) + \rho(\boldsymbol{B}) = 0$；从而

$$\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) > \rho(\boldsymbol{A}) + \rho(\boldsymbol{B}) = 0$$

故不可以作为A的一种范数。

四、迭代法的收敛条件与误差估计

1、收敛条件

$\boxed{\text{定理：} x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + g \text{ 对任意 } x^{(0)} \text{都收敛} \Leftrightarrow \rho(B) < 1}$

引理： $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho\left(A\right) < 1$

定理证明：必要性

设$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，在迭代式$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + g$ 令$k \to \infty$,有

$$x^* = B\,x^* + g$$

于是有：$x^{(k)} - x^* = \left(Bx^{(k-1)} + g\right) - \left(Bx^* + g\right)$

$$= B\left(x^{(k-1)} - x^*\right) = B^2\left(x^{(k-2)} - x^*\right) = \cdots = B^k\left(x^{(0)} - x^*\right)$$

由$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$及$x^{(0)}$和$x^*$的任意性，有 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

在由引理，得出$\rho(B) < 1$;

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + g \ \updownarrow \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

定理证明：充分性

$$\because \rho(B) < 1 \Rightarrow I - B\text{非奇异} \Rightarrow \text{线性方程组}(I - B)x = g\text{有唯一解}x^*$$

$$\text{于是有}(I - B)x^* = g \Rightarrow x^* = B\,x^* + g$$

$$\text{因此有：}x^{(k)} - x^* = \left(Bx^{(k-1)} + g\right) - \left(Bx^* + g\right)$$

$$= B\left(x^{(k-1)} - x^*\right) = B^2\left(x^{(k-2)} - x^*\right) = \cdots = B^k\left(x^{(0)} - x^*\right)$$

$$\because \rho(B) < 1 \Rightarrow \text{由}\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

$$\text{取极限，利用引理，得出}\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

2、收敛的判别条件（充分条件）

定理：$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + g \updownarrow \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

判别条件I

若$\|B\| < 1 \Rightarrow \forall x^{(0)} \in R^n$,

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + g$$

都收敛其不动点x^*,这里$\|B\|$是B的某种算子范数。

证明要点：$\because \rho(B) \le \|B\| < 1$,由定理得。

注意，该条件是充分条件，且范数有一个即可。

判别条件II

若A为严格对角占优矩阵，则线性方程组Ax=b的Jacobi和Seidel迭代对任何$x^{(0)}$都收敛。（证明见书）

*严格行对角占优矩阵$\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$满足:

$$\left|a_{kk}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right| \quad ,\forall k$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}?$$

*严格列对角占优矩阵$\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$满足:

$$\left|a_{kk}\right| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \left|a_{ik}\right| \quad ,\forall k$$

严格行和严格列对角占优矩阵统称严格对角占优矩阵！

定理：严格对角占优矩阵是奇异的。（证明见书）

判别条件III

若 A 为正定矩阵，则线性方程组 Ax=b 的 Seidel 迭代对任何 $x^{(0)}$ 都收敛。

正定矩阵：A的k阶主子式$\Delta_k > 0, k = 1, 2, \cdots, n$

$$\because 6 > 0, \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} > 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{是正定矩阵!}$$

定理3.7

Sor法收敛的必要条件是松弛因子ω满足0<ω<2

证明 $\because$ Sor法的迭代矩阵为

$$B_\omega = (D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right]$$

$$\therefore \det B_\omega = \det(D-\omega L)^{-1}\cdot\det\left[(1-\omega)D+\omega U\right]$$

$$=\det D^{-1}\cdot\det(1-\omega)D=(1-\omega)^n$$

设$\lambda_k, k=1,2,\cdots,n$是$B_\omega$的$n$个特征值

$$\Rightarrow \det B_\omega=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(1-\omega)^n$$

$$\text{收敛}\Leftrightarrow \rho(B_\omega)<1$$

由$(1-\omega)^n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\le\left[\rho(B_\omega)\right]^n<1\Rightarrow 0<\omega<2$

2、误差估计

定理3.8 设矩阵B的某种矩阵范数 $\|B\|<1$,则有

$$1、\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

$$2、\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

证明参照非线性方程求根定理的证明，
将：绝对值换成范数、函数换成矩阵，注意范数关系的使用，

例3.1　**用Jacobi 迭代法解线性方程组**

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3=-12 \\ x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

解

$$\because Jacobi\text{迭代格式为:}\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-2.4-0.4x_2^{(k)}-0.6x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=\quad 5+0.25x_1^{(k)}-0.5x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=0.3-0.2x_1^{(k)}+0.3x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\therefore Jacobi\text{迭代矩阵}\ B_J=\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.6 \\ 0.25 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\because \|B_J\|_F=0.981071<1$　　**Jacobi迭代收敛!**

取$x^{(0)}=(0,0,0)^T$计算

$$x^{(1)}=(-2.4,5,0.3)^T, \quad \left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty=5>10^{-4},$$

$$x^{(2)}=(-4.58,4.25,2.28)^T, \quad \left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_\infty=2.06>10^{-4}$$

$$\vdots$$

$$x^{(18)}=(-4.,2.99997,2.)^T, \quad \left\|x^{(18)}-x^{(17)}\right\|_\infty=0.41\cdots\times10^{-4}<10^{-4}$$

故所求近似解为 $x_1=-4, x_2=2.9997, x_3=2$

准确解: $x_1=-4, x_2=3, x_3=2$

例3.2：已知方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1、写出Jacobi和Seidel迭代格式；

2、判别两种迭代格式的收敛性。

解：1、

$$Jacobi\text{迭代格式:}\begin{cases} x^{(k+1)} = -2y^{(k)} + 2z^{(k)} + 1 \\ y^{(k+1)} = -x^{(k)} - z^{(k)} + 2 \\ z^{(k+1)} = -2x^{(k)} - 2y^{(k)} + 3 \end{cases}$$

$$Seidel\text{迭代格式:}\begin{cases} x^{(k+1)} = -2y^{(k)} + 2z^{(k)} + 1 \\ y^{(k+1)} = -x^{(k+1)} - z^{(k)} + 2 \\ z^{(k+1)} = -2x^{(k+1)} - 2y^{(k+1)} + 3 \end{cases}$$

2、

$$\because \det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \rho(B_J) = 0 < 1, Jacobi$迭代收敛；

对$Seidel$迭代，其对应的特征方程为

$$\det(\lambda(D-L)-U) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

得特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow \rho(B_J) = 2 > 1$

Seidel迭代发散。