

第二章：随机变量及其分布



分布函数

1. 分布函数的概念

定义 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数.

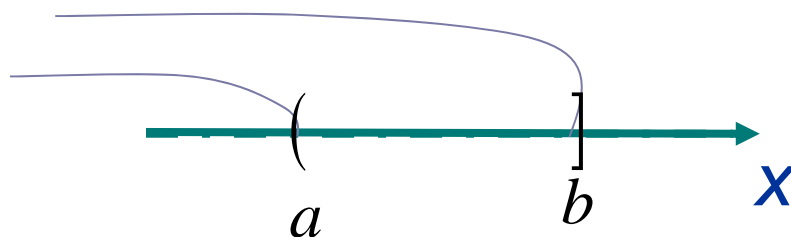


$$F(x) = P(X \in (-\infty, x])$$

2. 分布函数的应用

对于任意的实数 $a, b (a < b)$, 有:

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a).$$



证明:

因为 $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$,

$$\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \emptyset,$$

所以 $P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$,

故 $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a).$

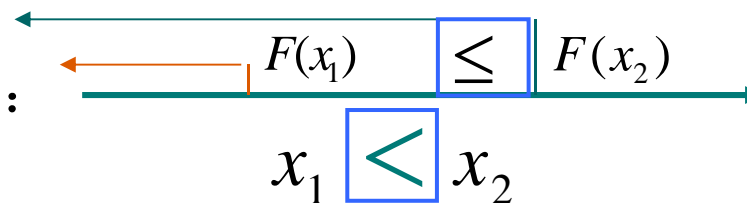
3. 分布函数的性质

1) $x \in R, 0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F(x)$ 是一个不减的函数.

对于任意的实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有:

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0.$$



3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = P(X \leq -\infty) = 0$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X \leq x) = P(X \leq +\infty) = 1$$

4) $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是右连续的.

例 设 X 是一个随机变量, 分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} A - Be^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求 1) 参数 A, B

2) $P\{-1 < X \leq 5\}$

解

$$F(-\infty) = 0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = A - B$$

$$F(+\infty) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$$

得 $A = 1, \quad B = 1$

$$P\{-1 < X \leq 5\} = F(5) - F(-1) = 1 - e^{-10}.$$

3. 利用分布函数计算某些事件的概率

前面已讲: $P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$

设 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 是随机变量 X 的分布函数, 则

$$P\{X < a\} = F(a-0) \quad (-\infty, x] \xrightarrow{x \rightarrow a^-} (-\infty, a)$$

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a \leq X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b-0) - F(a-0)$$

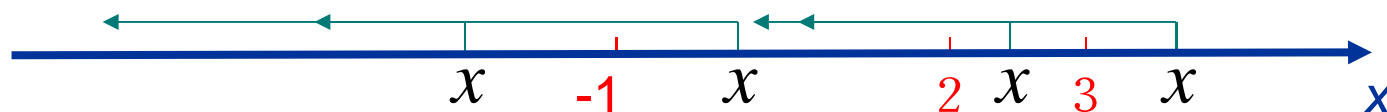
$$P\{X \geq b\} = 1 - P\{X < b\}$$

$$P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X < x\} = F(x) - F(x-0)$$

例 已知随机变量 X 的分布律如下, 求 X 的分布函数.

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

解:



当 $x < -1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P(\phi) = 0$$

当 $-1 \leq x < 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$

当 $2 \leq x < 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1$$

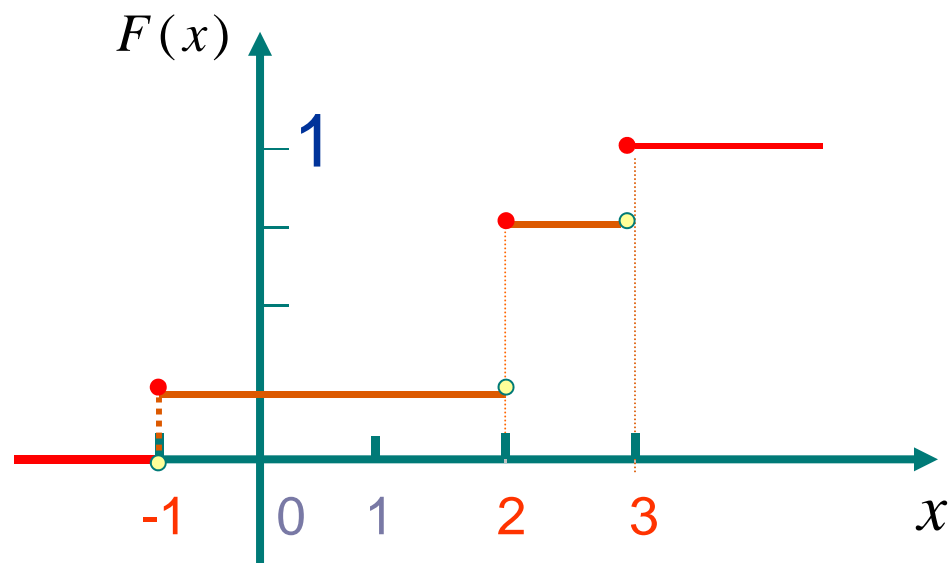
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

可以看出：（以 $x=2$ 处为例）

$P\{X=2\} = F(x)$ 在 $x=2$ 处的跳跃值

$P\{X < 2\} = F(2-0)$

$P\{X \leq 2\} = F(2+0) = F(2)$



说明

- 1) 离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是阶梯型跳跃函数。
- 2) 分布函数 $F(x)$ 在 $X = x_k (k=1, 2, \dots)$ 处有跳跃，跳跃值 p_k 为

$$p_k = P\{X = x_k\}.$$
- 3) 分布律与分布函数相互确定。

X	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	\cdots	$x_{(n)}$	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ p_1, & x_{(1)} \leq x < x_{(2)} \\ \dots\dots\dots & \\ p_1 + \dots + p_k & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \\ \dots\dots\dots & \end{cases} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

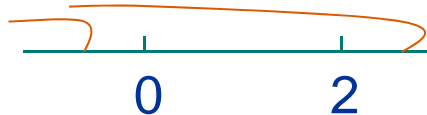
例

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ 1/6, & -5 \leq x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 3 \\ 2/3, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

x	-5	0	3	5
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

例 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，假设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并假设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离。试求随机变量 X 的分布函数。

解： X 的取值范围为 **【0,2】**



(1) 若 $x < 0$, $F(x) = P\{X \leq x\} = 0$.

(2) 若 $x \geq 2$, $F(x) = P\{X \leq x\} = 1$.

(3) 若 $0 \leq x \leq 2$, 由题意, $F(x) = P\{X \leq x\} = k \pi x^2$

取 $x = 2$, 由已知得 $P\{X \leq 2\} = 1 = 4 \pi k$ 得 $k = \frac{1}{4\pi}$, 即 $F(x) = \frac{x^2}{4}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

