デジタル信号処理

第9回　離散時間信号系

立命館大学
情報理工学部
岩居　健太
(Iwai Kenta)

本日の講義内容

- 離散時間信号系
  - 系とは
  - 線形時不変系
  - インパルス応答

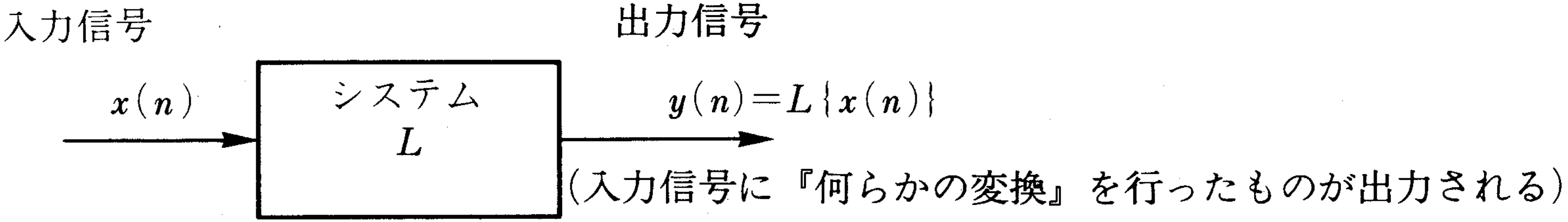
離散時間信号系

- 系とは
  - 英語表記はsystem (システム)
  - 「様々な要素を持つ体系」

- 身近な系
  - 例えばスピーカ
    - 音楽信号 (電圧) を入力すると、信号電圧に応じた音量で、音を空気中に出力するシステム

線形系 (線形システム)

- 信号$x(n)$をシステム L に入力したときの出力を$y(n)$とする



- このシステムが「重ね合わせの原理」を満たすとき、線形系(線形システム) と呼ぶ

$$\begin{cases} L\{x_1(n)+x_2(n)\} = L\{x_1(n)\} + L\{x_2(n)\} \\ L\{ax(n)\} = aL\{x(n)\} \end{cases}$$

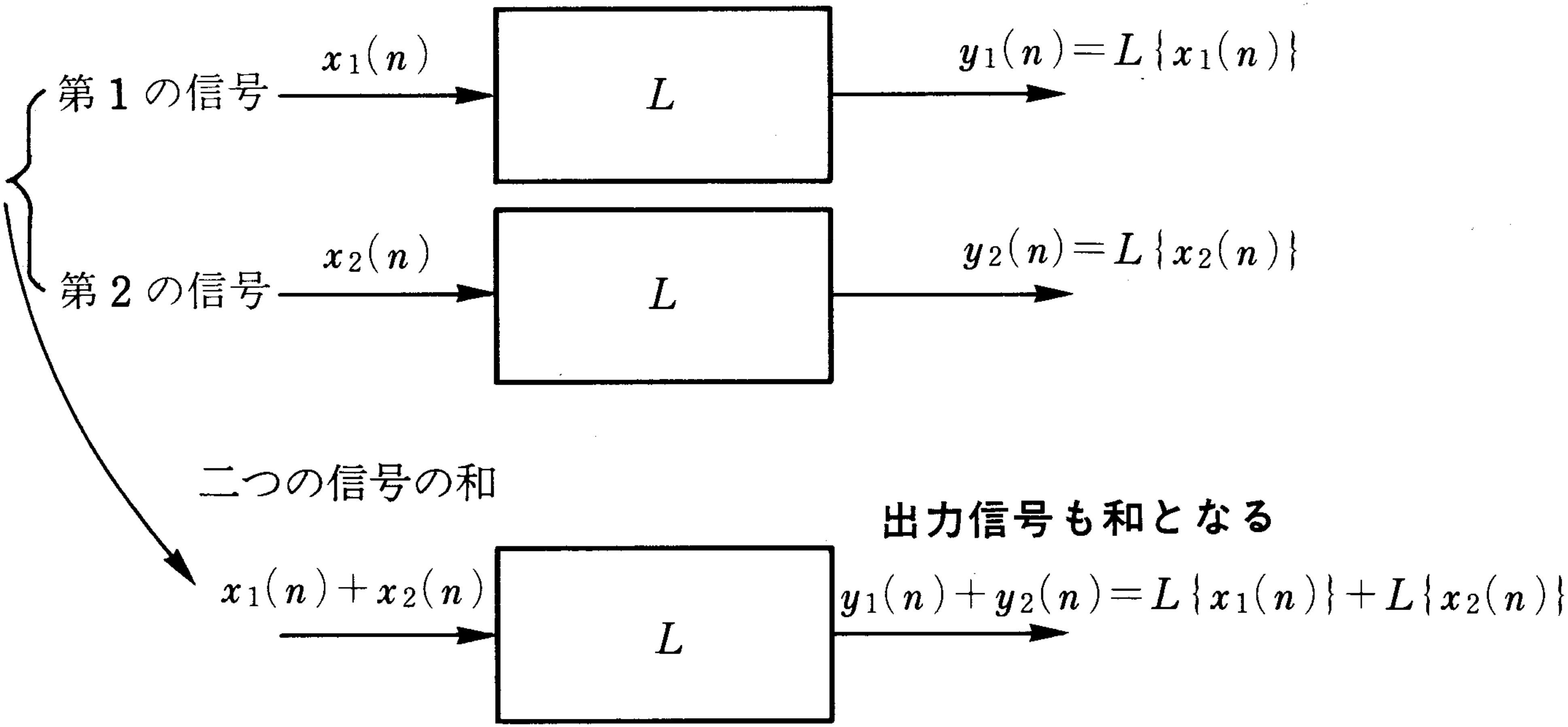
上記2つをまとめると

$$\boxed{L\{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\} = a_1L\{x_1(n)\} + a_2L\{x_2(n)\}}$$

重ね合わせの原理 (1)

- 2つの信号の和を入力したとき

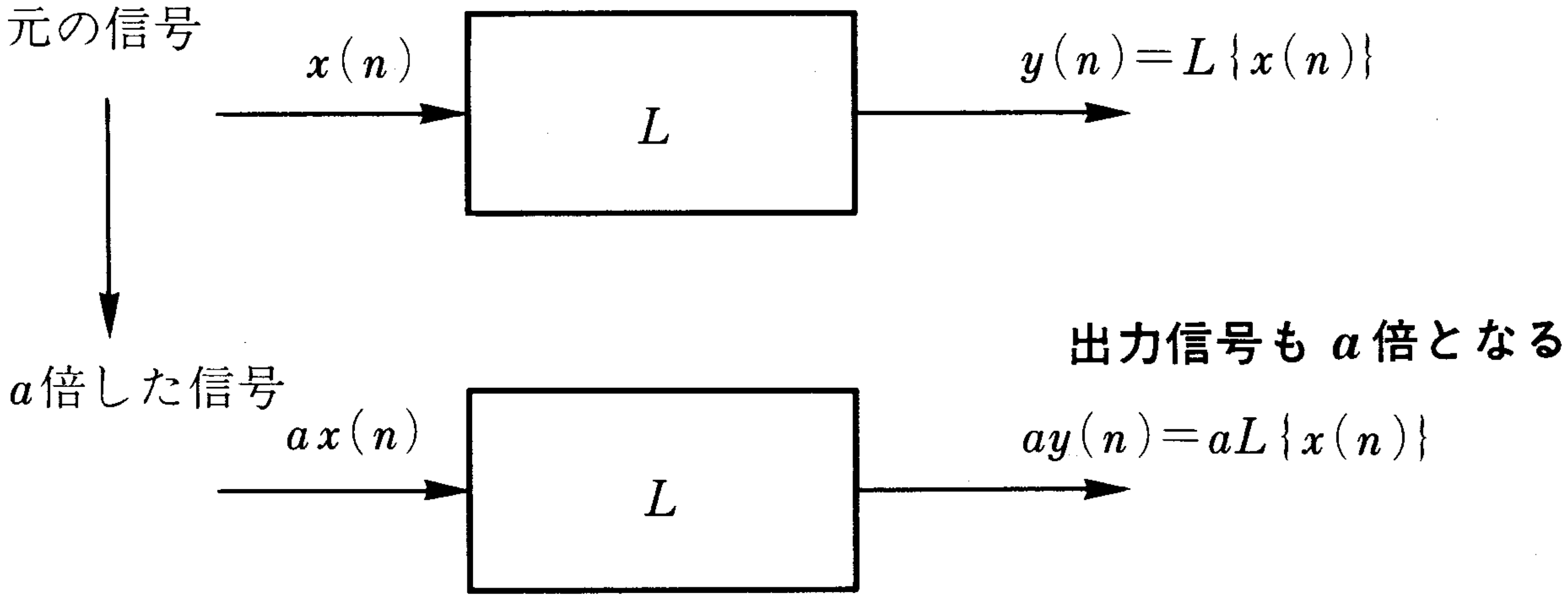
$$\boxed{L\{x_1(n)+x_2(n)\}=L\{x_1(n)\}+L\{x_2(n)\}}$$



重ね合わせの原理 (2)

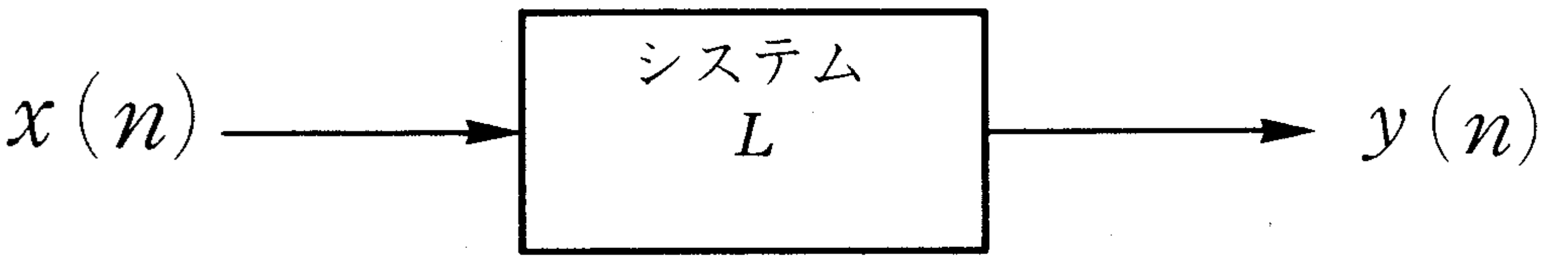
- a倍した信号を入力したとき

$$\boxed{L\{ax(n)\} = aL\{x(n)\}}$$



演習課題 (1/4) (5分間)

- 次のシステムは線形システムか? 線形システムである場合はその理由も考えよ。
  - 1. システムLが5を足す系の場合
    - 例えば入力に2を入れると出力は7になる系
  - 2. システムLが3をかける系の場合
    - 例えば入力に2を入れると出力は6になる系
  - 3. システムLが入力値の2乗を行う系の場合
    - 例えば入力に3を入れると出力は9になる系



ヒント: 線形システムの条件は?

演習課題 (2/4) (5分間)

- フーリエ変換は線形システムか? 線形システムの場合、その理由も考えよ。

ヒント:

信号 $x(n)$ $\{n=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ N-1\}$ の離散フーリエ変換 (DFT) は次のように定義されていた.

入力信号(時間領域) $x(n)$ → 離散フーリエ変換 (DFT) → 出力信号(周波数領域) $X(k) = F\{x(n)\}$

離散フーリエ変換の式 $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

この式に対して線形システムの条件を当てはめると?

線形時不変システム

- 線形時不変システムとは
  - 線形システムの特性が時間によって変わらないシステム

$$y(n) = L\{x(n)\}$$

  - 信号$x(n)$の時間をmサンプル分シフトした信号$x(n-m)$を入力したとき、システム出力が

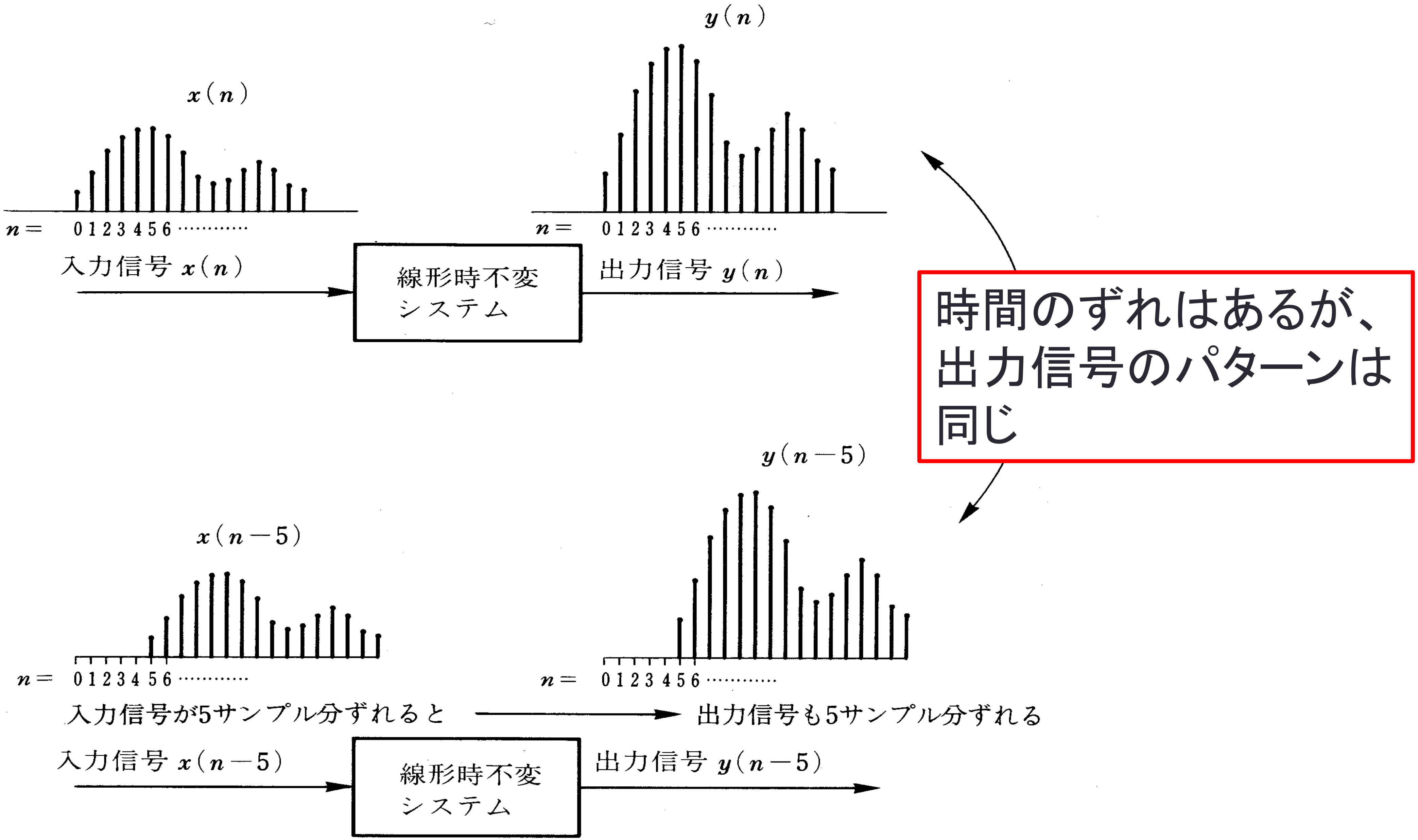
$$y(n-m) = L\{x(n-m)\}$$

となれば線形時不変システムである

  - 身近な例: スピーカのパワーアンプなど

もしパワーアンプが線形時不変でないと、ボリュームの大きさが時間とともに変化してしまい、自分でボリュームの大きさを制御できなくなる。

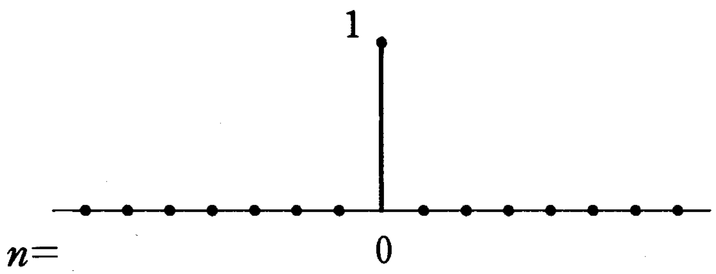
線形時不変システムの条件



インパルス信号 (1)

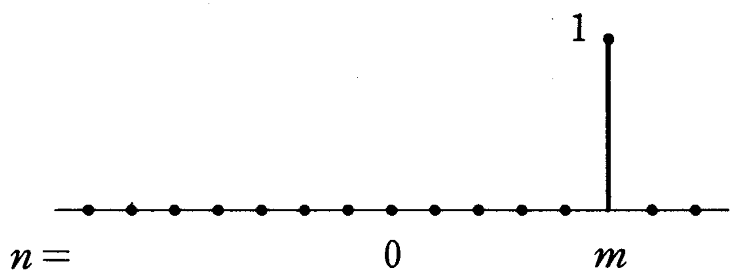
- システムの表現方法としてインパルス応答を使うのが一般的
  - インパルスとは (離散時間系)

インパルス　$\delta(n)$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

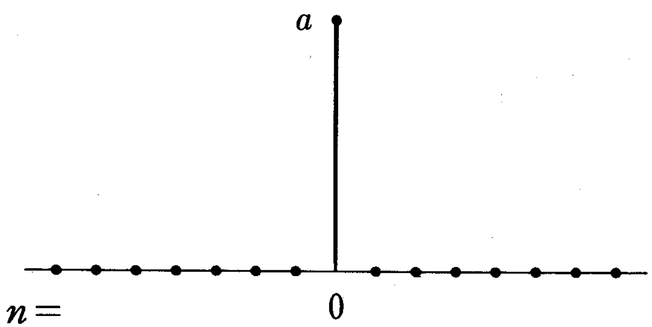
mサンプル分シフトしたインパルス$\delta(n-m)$



$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & (n=m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases}$$

インパルス信号 (2)

a 倍されたインパルス　$a\delta(n)$



$$a\delta(n) = \begin{cases} a & (n=0\ のとき) \\ 0 & (n \neq 0\ のとき) \end{cases}$$

単位インパルス信号のまとめ:

離散時間系でのインパルス$\delta(n)$は

$n = 0$ でのみ、高さが1となる関数

インパルス信号を用いた信号の表現 (1)

- インパルス信号を用いた信号の表現
  - 信号$x(n)$ $\{n = \cdots, 0, 1, 2, \cdots\}$ をインパルスを用いて表すと

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)x(m)$$

式を分解すると

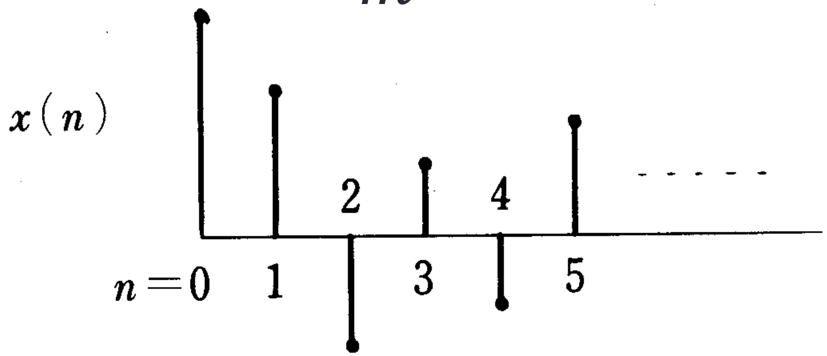
$$x(n) = \cdots + \delta(n-0)x(0) + \delta(n-1)x(1) + \cdots$$
$$+\delta(n-N+2)x(N-2) + \delta(n-N+1)x(N-1) + \cdots$$

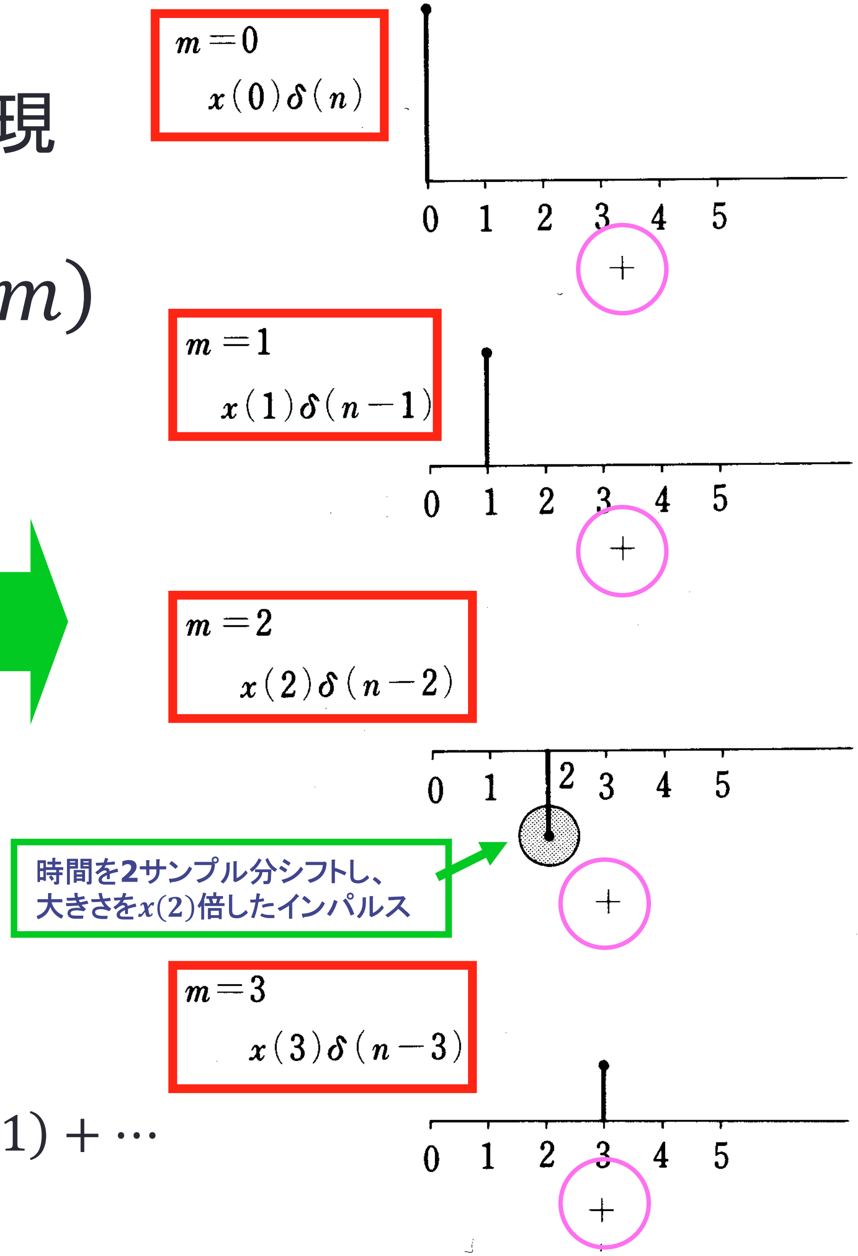
デジタル信号は加重係数$x(m)$と、シフトされた
インパルス信号$\delta(n-m)$の線形結合として表現できる

インパルス信号を用いた信号の表現 (2)

インパルス信号を用いた信号の表現

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)x(m)$$





もとの信号$x(n)$を時間シフトし係数倍した
インパルス信号の和に分解して表現可能

$$x(n) = \cdots + \delta(n-0)x(0) + \delta(n-1)x(1) + \cdots$$
$$+\delta(n-N+2)x(N-2) + \delta(n-N+1)x(N-1) + \cdots$$

インパルス応答

- インパルス応答とは
  - 線形時不変システムにインパルス信号$\delta(n)$を入力したとき、その出力$h(n)$をインパルス応答と呼ぶ

$$\boxed{h(n) = L\{\delta(n)\}}$$

- よってmサンプル分シフトしたインパルス信号に対する出力は、線形時不変系の性質より

$$\boxed{h(n-m) = L\{\delta(n-m)\}}$$

線形時不変システムの表記法 (1)

線形時不変システムの入出力関係

$$
\begin{aligned}
y(n) &= L\{\boxed{x(n)}\} \\
&= L\left\{\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)}\right\} \\
&= \boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}} L\{x(m)\delta(n-m)\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boxed{x(m)} L\{\delta(n-m)\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \boxed{h(n-m)}
\end{aligned}
$$

$x(n)$をインパルス信号を用いて表現

重ね合わせの原理 (1) を適用

重ね合わせの原理 (2) を適用

インパルス応答の定義を適用

これをたたみこみ和と呼ぶ

線形時不変システムの表記法 (2)

たたみ込み和の表現

$$\boxed{y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)}$$

*をたたみ込み演算子と呼ぶ
(ただの掛け算ではないので要注意)

たたみ込み和のもう一つ表現

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$n - m = k$とおく

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

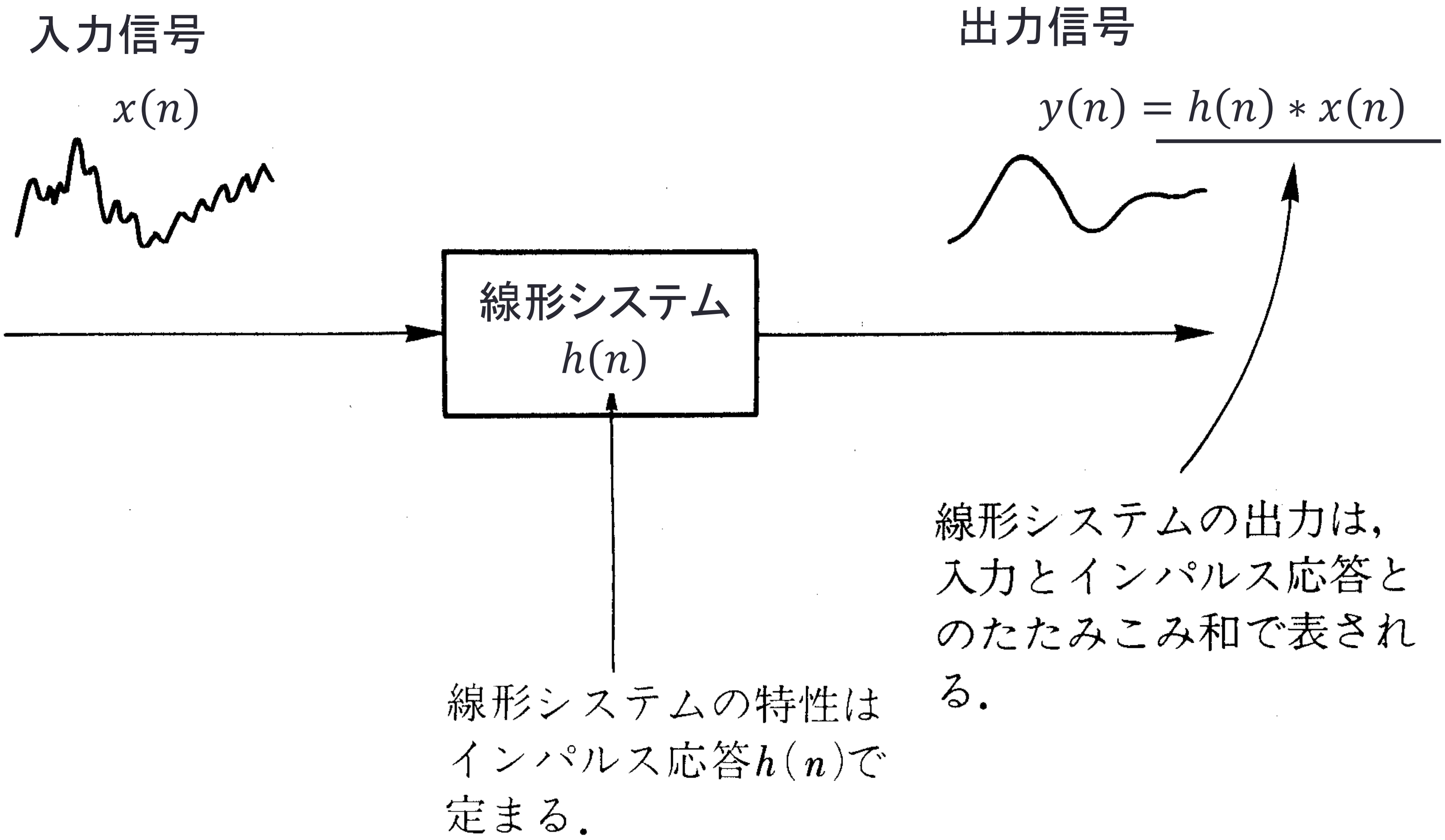
$x(n-k)$と$h(k)$の
順序を入れ替え,
改めてkをmとおく

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n)}$$

「インパルス応答$h(n)$
を持つシステムに
信号を入力する」
と説明できる

線形時不変システムの表記法 (3)



線形時不変システムの出力は
入力とインパルス応答のたたみこみ和で求められる

コンピュータで扱える式に修正

無限の長さの信号をコンピュータで表すことはできないため、
実用上は下記の表現を用いる

たたみ込み和

$$\boxed{y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n)}$$

システムのインパルス応答$h(n)$を有限の長さNで表現している

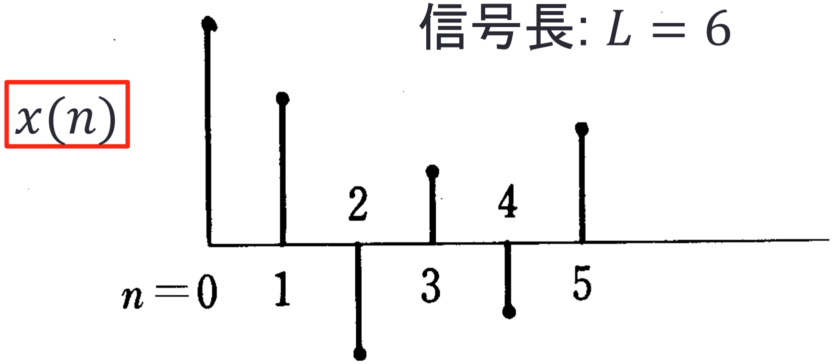
なぜなら、インパルス応答$h(n)$の長さは事前にわかることがあるから
(電気回路なら回路素子、音響分野なら部屋の大きさなどがわかれば、
インパルス応答の長さを見積もることができる)

＊信号$x(n)$の長さを事前に知ることはできない
(例: オーディオデータ。各オーディオファイルで長さがバラバラ)

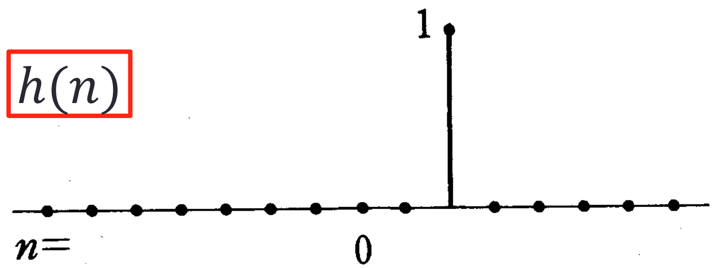
演習課題 (3/4) (10分間)

- 線形時不変システムにおいて入力$x(n)$、インパルス応答$h(n)$が下記のように与えられたときの出力$y(n)$を求めよ。

信号長: $L = 6$



インパルス応答長: $N = 3$



$x(0) = 4 \quad x(1) = 3$
$x(2) = -2 \quad x(3) = 1$
$x(4) = -1 \quad x(5) = 2$

$$\delta(n-2) = \begin{cases} 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

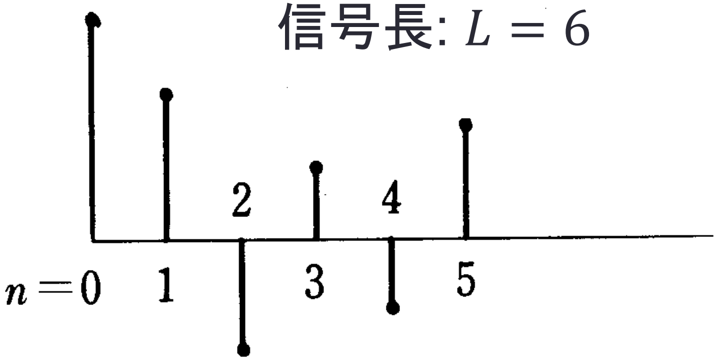
ヒント： 畳み込み和の式に当てはめるだけ

演習課題 (4/4) (10分間)

- 線形時不変システムにおいて入力$x(n)$、インパルス応答$h(n)$が下記のように与えられたときの$y(n)$を求めよ。

信号長: $L = 6$

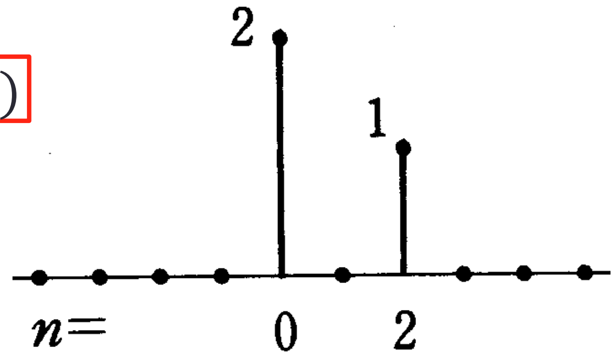
$\boxed{x(n)}$



$$x(0) = 4 \quad x(1) = 3$$
$$x(2) = -2 \quad x(3) = 1$$
$$x(4) = -1 \quad x(5) = 2$$

インパルス応答長: $N = 3$

$\boxed{h(n)}$



$$h(0) = 2, \quad h(2) = 1$$
$n = 0{,}2$ 以外 $h(\mathrm{n}) = 0$

ヒント: 畳み込み和の式に当てはめるだけ