§ 2.4 随机变量函数的分布

离散型随机变量函数的分布

例18 已知随机变量X的分布列为

X	-1	0	1	2
P_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求(1).$Y=2X+1$,（2）.$Z = X^2$的分布列。

解:(1).Y的可能取值为 $-1,1,3,5$， Y的分布列为:

Y	-1	1	3	5
P_k	0.1	0.2	0.3	0.4

(2).Z的可能取值为 0,1,4，Z的分布列为：

$$P(Z=1)=P(X^2=1)$$

$$=P(X=1)+P(X=-1)$$

$$=0.1+0.3=0.4$$

$$P(Z=4)=P(X^2=4)$$

$$=P(X=2)=0.4$$

Z	0	1	4
P_k	0.2	0.4	0.4

例19 已知随机变量 $X \sim G(\frac{1}{2})$, 求随机变量 $Y = \sin(\frac{\pi}{2} X)$的分布列。

X	1	2	3	4	5	6	…	n	…
p_k	1/2	1/4	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	…	$1/2^n$	…
Y	1	0	-1	0	1	0	…		

解： Y的可能取值为 $-1,0,1,$

$$P(Y=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}$$

$$P(Y=0)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=-1)=1-\frac{8}{15}-\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

Y的分布列为：

Y	0	1	4
P_k	0.2	0.4	0.4

连续型随机变量函数的分布

一、当g(x)为严格单调函数时

定理1　设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，

$y = g(x)$ 是一个处处可导的严格 单调函数

（即恒有 $g'(x) > 0$ 或恒有 $g'(x) < 0$），

则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\cdot|h'(y)|, & \alpha\le y\le\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

α是$y=g(x)$的最小值， β是$y=g(x)$的最大值。

其中 $x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数。

证明：不妨设$y=g(x)$是一个严格单调增函数，

此时其反函数$x=h(y)$也是一个严格单调增函数，

$h'(y)>0$. 设 $Y=g(X)$的$d.f.$为$F_Y(y)$,

$Y = g(X)$的取值范围为 $[\alpha, \beta]$,

当$y < \alpha$时,$F_Y(y) = P(Y \le y) \quad = 0$

当$y > \beta$时,$F_Y(y) = 1$

当$\alpha \le y < \beta$时,$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$

$$= P(X \le h(y))$$

$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

Y的密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot h'(y), \alpha \le y \le \beta \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

当$y=g(x)$是一个严格单调减函数时，

$$\text{当}\alpha \le y < \beta\text{时},F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$= P(X \ge h(y))$$

$$= \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$Y\text{的密度函数为}\quad f_Y(y) = \begin{cases} -f_X(h(y)) \cdot h'(y), \alpha \le y \le \beta \\ 0, \qquad\qquad \text{其他} \end{cases}$$

例20 设$r.v.X \sim N(\mu,\sigma^2)$,证明:当$a \neq 0$时,

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

证明: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$

$y = ax + b$的反函数为$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$,

$|h'(y)| = \frac{1}{|a|}$, 由公式（2.4.1）得

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{|a|},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot|\mathrm{a}|\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}$$

即$Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

例：若$X\sim N(10,2^2)$，则$2X+5\sim N(\underline{25}\,,\underline{\;4^2\;})$。

例21 设$r.v. X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$Y = e^X$的密度函数。

解： Y的取值范围为$(0, +\infty)$,

当$y > 0$, $f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot (\ln y)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当$y < 0$, $f_Y(y) = 0$.

例22 设$r.v.X \sim U[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，求$Y=\sin X$的密度函数。

解： Y的取值范围为$[-1,1]$， $y=\sin x$的反函数为

$x=\arcsin y$，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot(\arcsin y)', & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

一般方法

例23 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

求随机变量 $Y=X^2+1$ 的密度函数。

解： (1).Y 的取值范围为 $[1,2]$,

(2).设 Y 的 $d.f.$ 为 $F_Y(y)$, 当 $y<1$ 时, $F_Y(y)=0$,

当$y > 2$时，$F_Y(y) = 1$,

当$1 \le y < 2$时，$F_Y(y) = P(X^2 + 1 \le y)$

$$= P(-\sqrt{y-1} \le X \le \sqrt{y-1})$$

$$= \int_0^{\sqrt{y-1}} 2x dx = y - 1$$

$$(3).f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, 1 < y < 2 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$$

例24 设随机变量$X \sim U[-1,2]$，求 $Y = X^2$的密度函数。

解： (1).Y的取值范围为$[0,4]$,

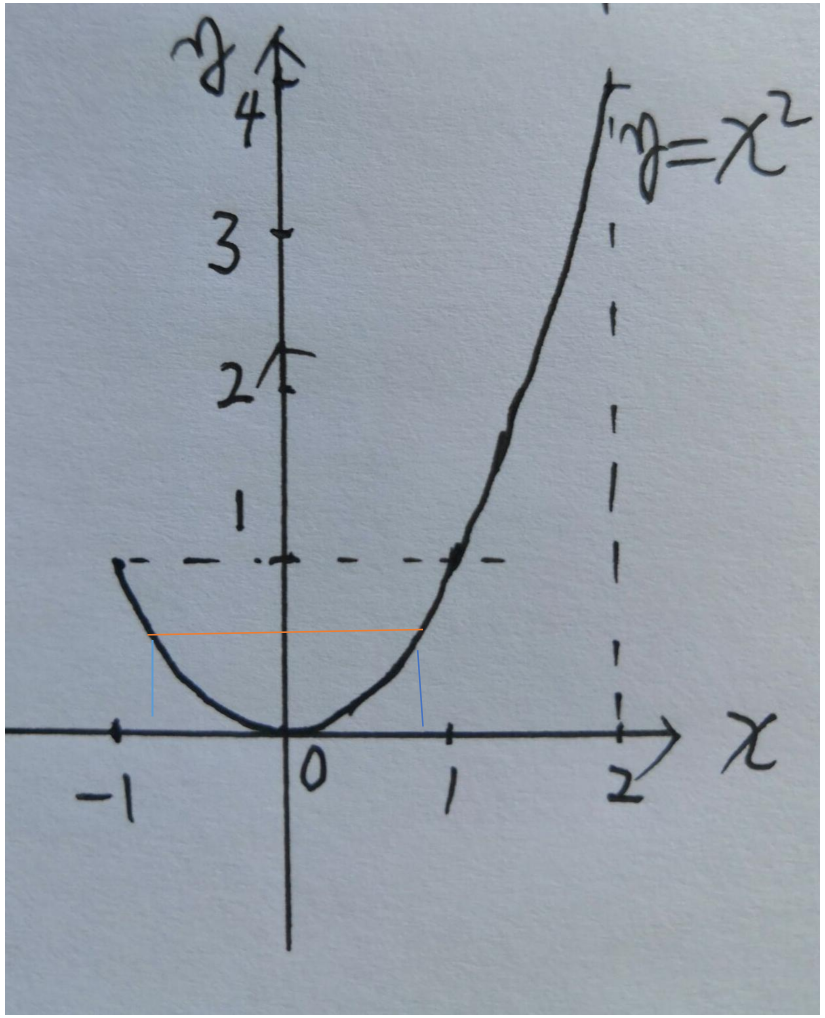
(2).设Y的$d.f.$为$F_Y(y)$,

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$,

当$y>4$时，$F_Y(y)=1$,

当$0 \le y < 1$时，$F_Y(y)$

$= P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$

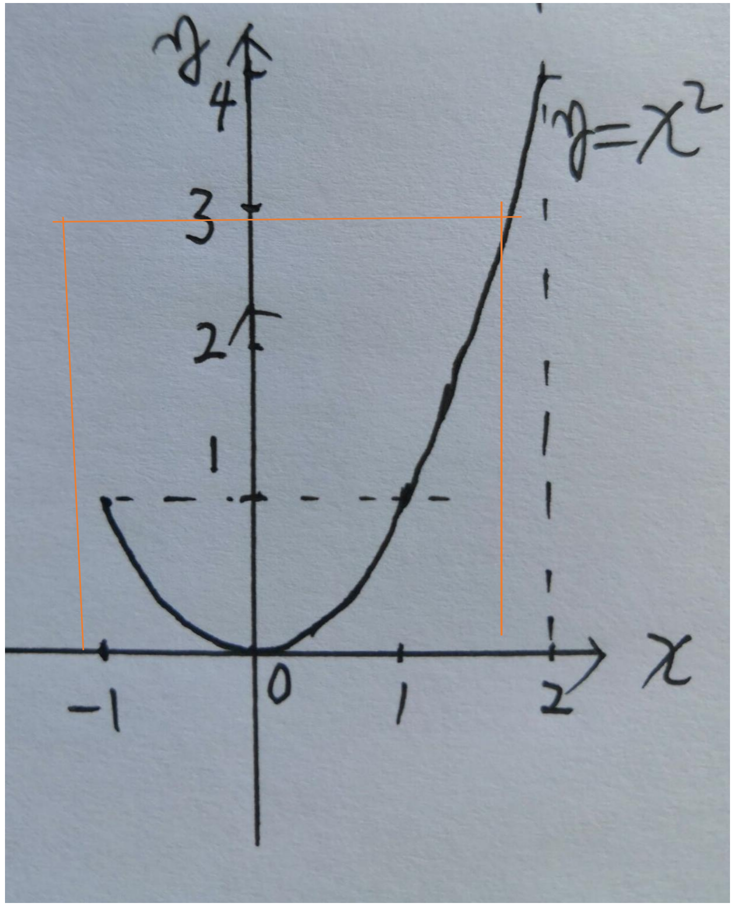


$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}\sqrt{y}$$

当$1\le y<4$时, $F_Y(y)$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$=\int_{-1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{\sqrt{y}+1}{3}$$



$$(3).f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例25 设$r.v.X \sim E(\frac{1}{4})$, 试求$Y=\min\{2,X\}$的分布函数。

解: (1). Y的取值范围为$[0,2]$,

当$y<0$时, $F_Y(y)=0$, 当$y>2$时, $F_Y(y)=1$,

当$0\le y<2$时, $F_Y(y)=P(Y\le y)$

$=P(\min\{2,X\}\le y)=P(X\le y)$

$$=\int_0^y \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = 1-e^{-\frac{y}{4}}$$

$$Y\text{的}\,d.f.\text{为}\,F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\frac{y}{4}}, & 0\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

$F_Y(y)$不是连续函数， **Y不是连续型随机变量**

$F_Y(y)$不是阶梯函数， **Y不是离散型随机变量**

§2.5 综合例题

例26 设$r.v.X \sim P(\lambda)$, 试求X取偶数的概率。

解： $$P(X\text{取偶数}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}$$

$$P(X\text{取奇数}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda}$$

$$P(X\text{取偶数}) + P(X\text{取奇数}) = 1$$

$$P(X\text{取偶数})-P(X\text{取奇数})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{k}}{k!}}=e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}=e^{-2\lambda}$$

$$\boxed{P(X\text{取偶数})=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}}$$

例27 设$F(x)$为连续型 $r.v.X$的分布函数，

且严格单调增加，求$Y=F(X)$的密度函数。

解： (1).Y的取值范围为$[0,1]$，

(2).当$y<0$时，$F_Y(y)=0$， 当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=1$，

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

$=P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$

$$(3).f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{，即}Y\sim U(0,1).$$

例28 设$r.v.X\sim E(\ln 3)$，求$Y=[X]+1$的分布列。

解： Y的可能取值为 $1,2,3,\cdots$

$$P(Y=k)=P([X]=k-1)=P(k-1\le X<k)$$

$$=\int_{k-1}^{k}\ln 3\cdot e^{-(\ln 3)x}dx=\left(-e^{-(\ln 3)x}\right)_{k-1}^{k}$$

$$= -e^{-k(\ln 3)} + e^{-(k-1)(\ln 3)}$$

$$= -e^{\ln 3^{-k}} + e^{\ln 3^{-(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^{k}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

即 $Y \sim G(\frac{2}{3})$.

例29 设$r.v.X$的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$，

求 $r.v.Y = e^X$的分布。

解： $F(x)$是阶梯函数， X是离散型随机变量，

X	0	1	2
P_k	1/3	1/6	1/2
Y	1	e	e^2

Y	1	e	e^2
P_k	1/3	1/6	1/2

例30　设$r.v.X \sim U[0,\pi]$，　求$Y=\sin X$的密度函数。

解:(1).Y的取值范围为$[0,1]$，(2).当$y<0$时，$F_Y(y)=0$，

当$y\geq 1$时，$F_Y(y)=1$，　当$0\leq y<1$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)$

$$=P(\sin X\leq y)=P(X\leq \arcsin y\text{或}X\geq \pi-\arcsin y)$$

$$=\frac{\arcsin y}{\pi}+\frac{\arcsin y}{\pi}=\frac{2\arcsin y}{\pi}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$