第四章 求矩阵特征值和特征向量的方法

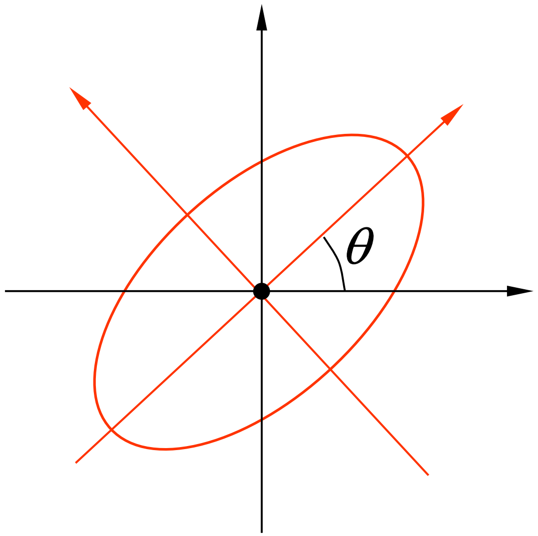
讲授：

求矩阵特征值及特征向量的常用数值方法的构造和原理。

重点论述：

重点论述幂法的构造内容。

§4.2 基本概念



1、矩阵A的特征多项式：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}, A\in R^{n\times n}.$$

2、矩阵A的特征多项式方程：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$$

3、矩阵A的特征值：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0\text{的根}$$

4、特征值与特征向量的关系：

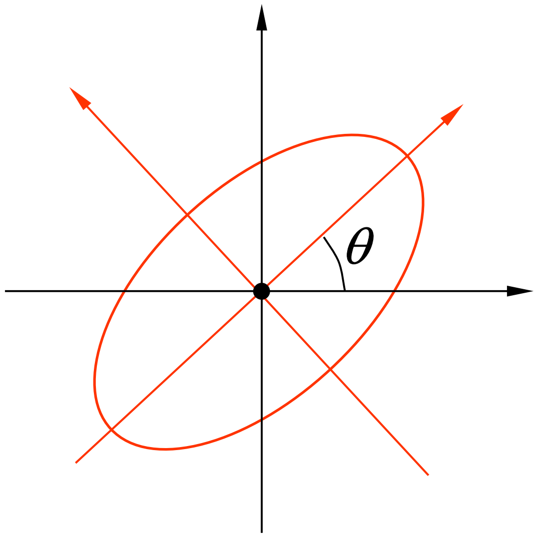
$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}\,,\vec{x}\neq 0$$

问题

特征方程是一个n次代数方程，求根很复杂且特征方程对舍入误差很敏感，特别当n较大时，这些问题更突出。

由于这些原因，实用中在求解代数特征值问题时一般不用如上的线性代数的方法，而采用本章介绍的**迭代加变换的计算机求解**方法，这些方法具有编程简单，对舍入误差不敏感等优点。

§4.3 幂法



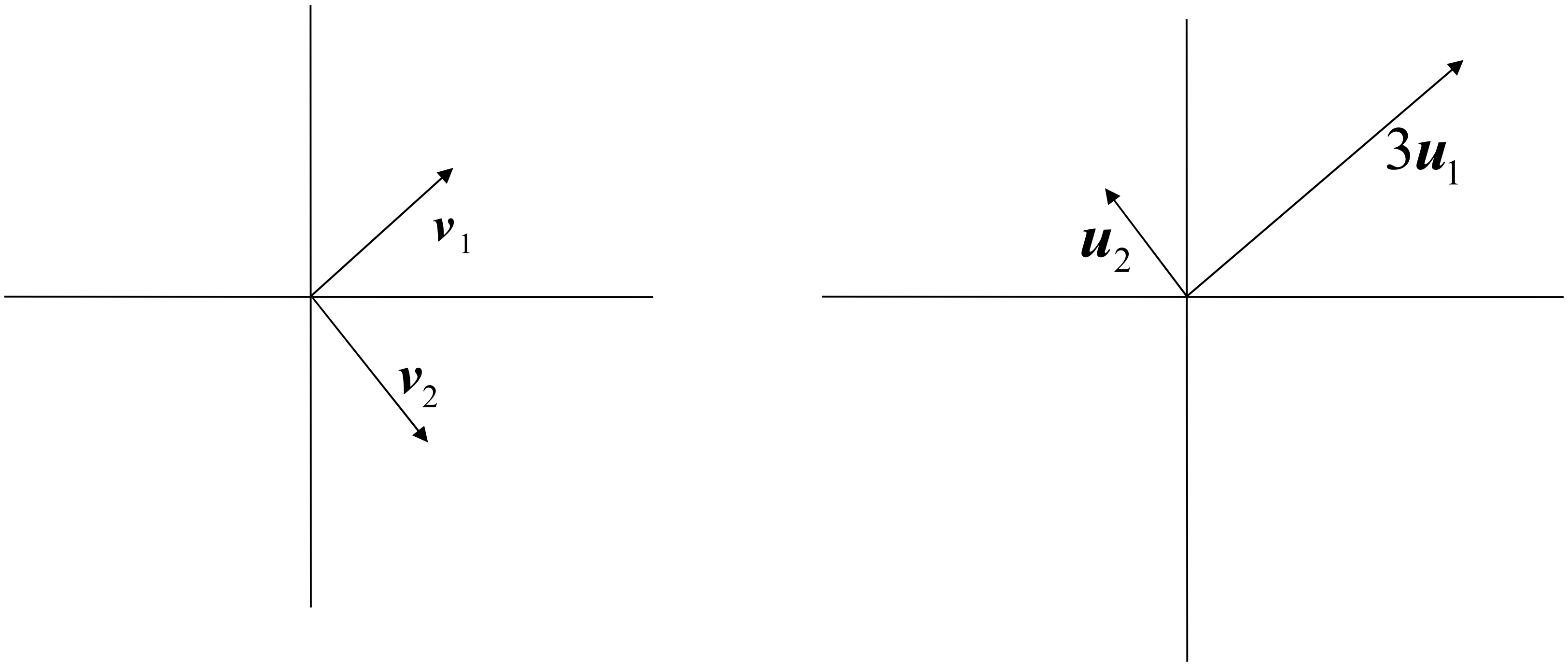
一、基本思想

利用矩阵的特征值与特征向量的关系构造迭代向量序列来求矩阵按模最大的特征值及其相应特征向量。

幂法作用

求矩阵**按模最大**的**特征值**及其**相应特征向量**。

矩阵作用效果



二、构造原理

设 $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(n)}$是A的$n$个线性无关的特征向量，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$是对应的特征值。

$$\forall V^{(0)}\neq 0\in R^n,\Rightarrow V^{(0)}=\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2x^{(2)}+\dots+\alpha_nx^{(n)}$$

用A左乘， 并利用$Ax^{(k)}=\lambda_kx^{(k)}$,有

$$AV^{(0)}=\alpha_1Ax^{(1)}+\alpha_2Ax^{(2)}+\dots+\alpha_nAx^{(n)}$$

$$=\alpha_1\lambda_1x^{(1)}+\alpha_2\lambda_2x^{(2)}+\dots+\alpha_n\lambda_nx^{(n)}$$

记$V^{(k)}=AV^{(k-1)}$， 有

$$V^{(k)}=A^kV^{(0)}=\alpha_1\lambda_1^kx^{(1)}+\alpha_2\lambda_2^kx^{(2)}+\cdots+\alpha_n\lambda_n^kx^{(n)}$$

$$=\lambda_1^k\left(\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^kx^{(2)}+\cdots+\alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^kx^{(n)}\right)$$

假设$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|, \alpha_1 \neq 0$

$$\because \left| \lambda_k / \lambda_1 \right| < 1 \Rightarrow V^{(k)} \Rightarrow \lambda_1^k \alpha_1 x^{(1)}, k \to \infty$$

考虑向量V的分量比，对于第i个分量，有

$$\frac{V_i^{(k)}}{V_i^{(k-1)}} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 x_i^{(1)} + \alpha_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k x_i^{(2)} + \cdots + \alpha_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k x_i^{(n)}}{\alpha_1 x_{i-1}^{(1)} + \alpha_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k x_{i-1}^{(2)} + \cdots + \alpha_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k x_{i-1}^{(n)}} \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_1$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{V_i^{(k)}}{V_i^{(k-1)}} \approx \lambda_1}$$

$\because V^{(k)} \approx \alpha_1 \lambda_1^k x^{(1)}$，故$V^{(k)}$是$\lambda_1$对应的近似特征向量。

三、分析

$$\because |\lambda_1| > 1 \Rightarrow \lambda_1^k \to \infty \Rightarrow V^{(k)}$$出现上溢错误。

定理：假设矩阵A的n个特征值满足$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$，

任取非零向量$V^{(0)} \in R^n$，有计算格式

$$u^{(0)} = V^{(0)}, \quad \begin{cases} V^{(k)} = Au^{(k-1)} \\ m_k = \max\left(V^{(k)}\right) \quad k = 1, 2, \cdots \\ u^{(k)} = V^{(k)} / m_k \end{cases}$$

规范化的思想

$$\Rightarrow \underline{\lim_{k\to\infty} u^{(k)} = \frac{x^{(1)}}{\max\left(x^{(1)}\right)}}, \qquad \underline{\lim_{k\to\infty} m_k = \lambda_1}$$

式中$\max\{V^{(k)}\}$表示$V^{(k)}$绝对值最大的分量，$\{u^{(k)}\}$是规范化向量。

证明 $\because V^{(1)} = Au^{(0)} = AV^{(0)},$

$$u^{(1)} = \frac{V^{(1)}}{\max V^{(1)}} = \frac{Au^{(0)}}{\max\left(Au^{(0)}\right)} = \frac{AV^{(0)}}{\max\left(AV^{(0)}\right)}$$

$$V^{(2)} = Au^{(1)} = A\frac{AV^{(0)}}{\max\left(AV^{(0)}\right)} = \frac{A^2V^{(0)}}{\max\left(AV^{(0)}\right)}$$

$$u^{(2)} = \frac{V^{(2)}}{\max\left(V^{(2)}\right)} = \frac{A^2V^{(0)}}{\max\left(V^{(2)}\right)\cdot\max\left(AV^{(0)}\right)} = \frac{A^2V^{(0)}}{\max\left(A^2V^{(0)}\right)}$$

一般的有

$$\boxed{V^{(k)} = \frac{A^kV^{(0)}}{\max\left(A^{k-1}V^{(0)}\right)},\ u^{(k)} = \frac{A^kV^{(0)}}{\max\left(A^kV^{(0)}\right)}}$$

记$\varepsilon^{(k)} = \sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x^{(i)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)} = 0, \because \left|\lambda_k/\lambda_1\right| < 1$

再由$A^k V^{(0)} = \lambda_1^k \left(\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right)$ **有**

$$\lim_{k \to \infty} u^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_1^k \left(\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right)}{\max\left(\lambda_1^k \left(\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right) \right)} = \frac{x^{(1)}}{\max\left(x^{(1)} \right)};$$

$$\lim_{k \to \infty} m_k = \lim_{k \to \infty} \max \left(\frac{A^k V^{(0)}}{\max\left(A^{k-1} V^{(0)} \right)} \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_1^k \left(\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right)}{\max\left(\lambda_1^{k-1} \left(\alpha_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k-1)} \right) \right)} = \lambda_1$$

规范化幂法算法

1) 输入矩阵$A, V^{(0)}$和精度ε, 使用中取$V^{(0)} = \{1, 1, \cdots, 1\}$

2）$k \Leftarrow 1$

3）$V^{(k)} \Leftarrow Au^{(k-1)}$

4）$m_k \Leftarrow \max\left(V^{(k)}\right), m_{k-1} \Leftarrow \max\left(V^{(k-1)}\right)$

5）$u^{(k)} \Leftarrow V^{(k)} / \mathrm{m}_k$

6）如果$\left|\mathrm{m_k} - \mathrm{m_{k-1}}\right| < \varepsilon$, 则输出$u^{(k)}, m_k$, 停止

7）$k \Leftarrow k+1, goto \quad 3)$

【例 4-1】 用幂法求 $A=\begin{bmatrix}133 & 6 & 135\\ 44 & 5 & 46\\ -88 & -6 & -90\end{bmatrix}$ 按模最大的特征值及其特征向量，要求误差$<10^{-4}$.

解 取 $V^{(0)}=\{1,1,1\}^T$，按规范化幂法计算得下表结果.

迭代次数 k	m_k	$u^{(k)}$	$\vert m_k-m_{k-1}\vert$
0		(1, 1, 1)	
1	44.42335766	{1., 0.3467153285, −0.6715328467}	229.5766423
2	44.92343082	{1., 0.3341275058, −0.6672691423}	0.5000731606
3	44.99546459	{1., 0.3333729572, −0.6667020234}	0.07203376236
4	44.99977337	{1., 0.3333351894, −0.6666684279}	0.004308781874
5	44.99998937	{1., 0.3333334179, −0.6666667492}	0.0002160020115
6	44.99999952	{1., 0.3333333371, −0.6666666704}	0.0000101441501

此结果说明迭代 6 次，求得误差为 0.0000101441501 的按模最大的特征值为 44.99999952 及其对应的一个特征向量为 {1,0.3333333371,−0.6666666704} .

本题矩阵 A 的三个特征值为 {45,2,1}，可见所求结果很好 .

思考：如何求矩阵按模最小的特征值及特征向量

反幂法

用幂法求矩阵按模最小的特征值的方法

如果有$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_2| > |\lambda_n| > 0 \Rightarrow A^{-1}$存在

由$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)} \Rightarrow A^{-1}x^{(k)} = \lambda_k^{-1}x^{(k)}$

说明λ_k^{-1}是A^{-1}的特征值，$x^{(k)}$是其对应的特征向量。

$$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_2| > |\lambda_n| > 0 \Rightarrow |\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \ldots \geq |\lambda_1^{-1}|$$

对A^{-1}用幂法，可以求出λ_n^{-1}，

继而求出安模最小的特征值λ_n。

避免矩阵求逆

反幂法迭代公式 $\mathbf{V}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{u}^{(k-1)}$

用解线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{V}^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k-1)}$ 的方法求得 $\mathbf{V}^{(k)}$

思考： 如何求矩阵所有的特征值及特征向量

$$V^{(k)} = A^k V^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^k x^{(2)} + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k x^{(n)}$$

思考： 已知在实数s附近有特征值，如何求此特征值

Inverse Power Iteration

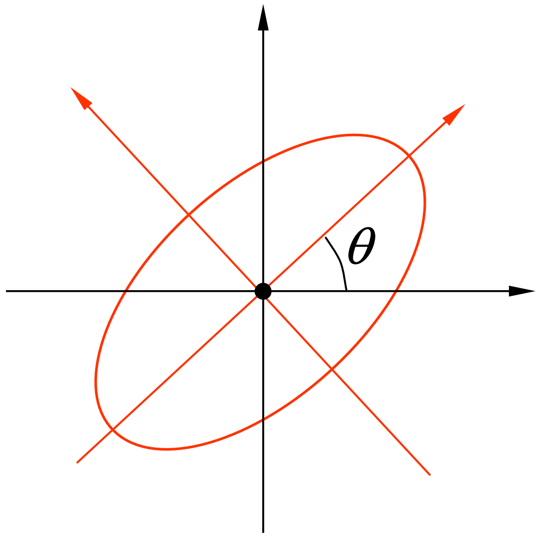
Given initial vector x_0 and shift s

for $j = 1, 2, 3, \ldots$
  $u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$
  Solve $(A - sI)x_j = u_{j-1}$
  $\lambda_j = u_{j-1}^T x_j$
end
$u_j = x_j/||x_j||_2$

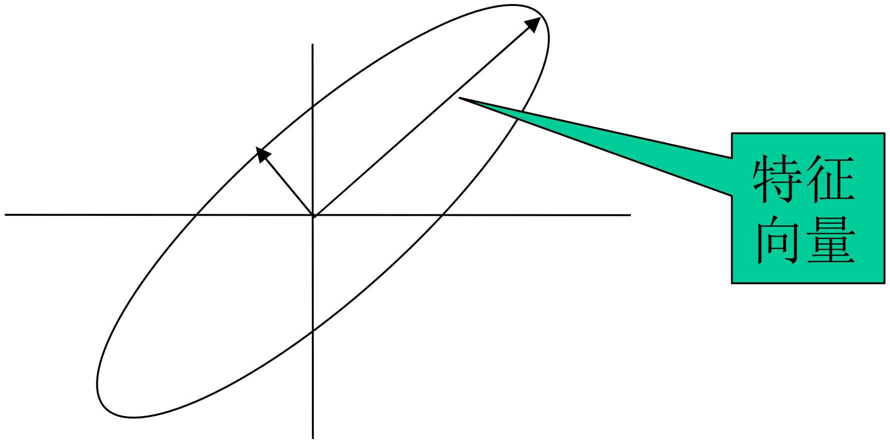
思考： 算法的收敛速度

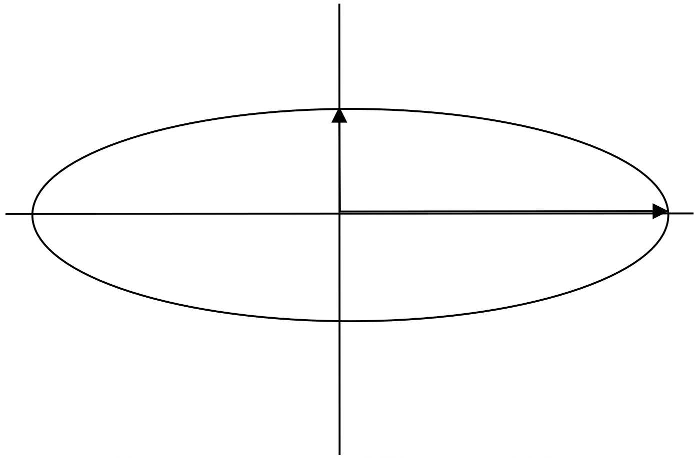
第4章求矩阵特征值和特征向量的方法

§4.4 Jacobi方法



Jacobi方法又称旋转法，
是求实对称矩阵特征值和特征向量的方法





$$f(x_1,x_2)=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

二阶旋转变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix},\ \boxed{|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}}$$

$$f(x_1,x_2)=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

$$=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}b_{11} & 0\\ 0 & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

二次型	**特殊二次型**
↕	↕
实对称矩阵	**实对角矩阵**

N阶旋转矩阵，
也叫Givens矩阵

单位正交矩阵

$$
J(i,j,\varphi)=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\varphi &&&& -\sin\varphi &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \sin\varphi &&&& \cos\varphi &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\qquad\qquad & i\text{列} & \qquad\qquad & j\text{列}
\end{array}
\end{array}
$$

N阶实对称矩阵，对应N元二项式；也可通过一系列的旋转将N维空间的椭球面的轴对齐到坐标轴。

$$\ldots J_n^T \ldots J_2^T J_1^T A J_1 J_2 \ldots J_n \ldots = \Lambda$$

定义$J_1 J_2 \ldots J_n \ldots = Q$,则有$Q^T A Q = \Lambda$,

同时$Q^T Q = I$, $Q^T = Q^{-1}$,故$Q^{-1} A Q = \Lambda$

$$AQ = Q\Lambda$$

$$AQ_j = \lambda_{ii} Q_j$$

实对称矩阵一定正交相似于对角阵；对角元素为特征值；正交矩阵列向量为对应的特征向量；

一、基本思想

将实对称矩阵进行一系列的相似正交变换使其约化成一个近似对角矩阵，然后利用相似正交变换的关系来求全部特征值和特征向量。

Jacobi方法的作用

求**实对称矩阵**的**全部特征值**和特征向量。

由于使用的正交相似变换主要采用旋转变换，故称Jacobi方法为**旋转法**。

1、$J(i,j,\varphi)$的特点**是正交矩阵**

2、选择合适的φ对 A做相似变换

$$J^T(i,j,\varphi)AJ(i,j,\varphi)=A^{(1)}=\left(a_{ij}^{(1)}\right)，\text{可使}a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=0$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$b_{11}=a_{11}\cos^2\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+a_{12}\sin 2\varphi$$

$$b_{12}=0.5(a_{22}-a_{11})\sin 2\varphi+a_{12}\cos 2\varphi$$

$$b_{22}=a_{11}\sin^2\varphi+a_{22}\cos^2\varphi-a_{12}\sin 2\varphi$$

取φ使$b_{12}=0$，得φ要满足 $\tan 2\varphi=\dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$

选取矩阵A的非对角元素的非零元，计算旋转角度，构造旋转矩阵J；A左乘J的转置，右乘J,更新A;
矩阵的第i,j行和第i,j列元素值改变;A(i,j)=A(j,i)=0

$$\varphi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}$$

$$|\varphi|\le\frac{\pi}{4}$$

$A^{(1)}$的计算公式:

$$a_{ii}^{(1)}=a_{ii}\cos^2\varphi+a_{jj}\sin^2\varphi+a_{ij}\sin 2\varphi$$

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=0.5\left(a_{jj}-a_{ii}\right)\sin 2\varphi+a_{ij}\cos 2\varphi$$

$$a_{jj}^{(1)}=a_{ii}\sin^2\varphi+a_{jj}\cos^2\varphi-a_{ij}\sin 2\varphi$$

$$a_{ip}^{(1)}=a_{pi}^{(1)}=a_{ip}\cos\varphi+a_{jp}\sin\varphi \qquad p\ne i,j$$

$$a_{jp}^{(1)}=a_{pj}^{(1)}=a_{jp}\cos\varphi+a_{ip}\sin\varphi \qquad p\ne i,j$$

$$a_{pq}^{(1)}=a_{qp}^{(1)}=a_{pq}=a_{qp} \qquad p,q\ne i,j$$

反复进行上述操作时，之前变成0的元素，可能变成非零元。

定理保证算法可行

定理：设实对称矩阵A$^{(0)}$=A $\in R^{n\times n}, J\left(i_k, j_k, \varphi_k\right)=J_k, k=1,2,\cdots$

是n阶旋转矩阵序列，若记 $A^{(k)}=J_k^T A^{(k-1)} J_k$

是将i行j列元素变为0的旋转矩阵

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^{(k)}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

算法终止性判断：

$$E\left(A^{(k)}\right)=\sum_{i\neq j}\left(a_{ij}^{(k)}\right)^2<\varepsilon$$

Jacobi算法：

（1）给定精度 ε，准备存放特征向量的矩阵 $\boldsymbol{Q}\Leftarrow\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵；

（2）对 $k=1,2,\cdots$，

①选矩阵 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 非对角元素绝对值最大者 $|a_{pq}^{(k)}|=\max\limits_{i\neq j}|a_{ij}^{(k)}|$ 得到行标 p、列标 q；

②计算旋转角 $\varphi_k=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2a_{pq}^{(k)}}{a_{pp}^{(k)}-a_{qq}^{(k)}}$ 和旋转矩阵 $\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{J}(p,q,\varphi_k)$；

③ $\boldsymbol{Q}\Leftarrow\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}_k$，$\boldsymbol{A}^{(k)}\Leftarrow\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{(k-1)}\boldsymbol{J}_k$；

④计算 $E(\boldsymbol{A}^{(k)})$，并判别 $E(\boldsymbol{A}^{(k)})<\varepsilon$，若成立，输出 $\boldsymbol{A}^{(k)}$（其主对角线元素为所求的全部特征值）和 $\boldsymbol{Q}$（其 n 个列为相应的 n 个特征向量），停止；否则做 $k\Leftarrow k+1$，转①.

编程时可注意节约内存空间

特征向量的正交性得到保证

过关Jacobi算法：

先取阀值 $\alpha_1=\sqrt{E(A)}/n$，然后按行的顺序依次把非对角元素 a_{ij} 与 α_1 相比，若 $|a_{ij}|<\alpha_1$，则不做变换，否则做变换将 a_{ij} 化为零，如此多次直至所有非对角元素的绝对值都小于 α_1 后，再选 $\alpha_2=\alpha_1/2$，重复上述过程，继续下去选阀值 $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_m>0$，直至 $\alpha_m<\varepsilon$ 则终止计算，这里 $\alpha_k=\alpha_{k-1}/k$，当然也可以选其他的阀值，只要 α_k 单调减小即可．

过关 **Jacobi** 方法使确定旋转矩阵的过程大大缩短，因此可以加快求解过程．

编程时可注意节约内存空间

特征向量的正交性得到保证

例题： 用Jacobi方法求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的所有特征值及其相应特征向量，要求误差 $\varepsilon < 10^{-5}$

解：**按Jacobi方法的算法，**

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.707107 \\ 0 & 3 & -0.707107 \\ -0.707107 & -0.707107 & 2 \end{pmatrix},$$

$$J_1=\begin{pmatrix} 0.707107 & -0.707107 & 0 \\ 0.707107 & 0.707107 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E\left(A^{(1)}\right)=2$$

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.633975 & -0.325058 & 0 \\ -0.325058 & 3 & -0.627963 \\ 0 & -0.627963 & 2.36603 \end{pmatrix},$$

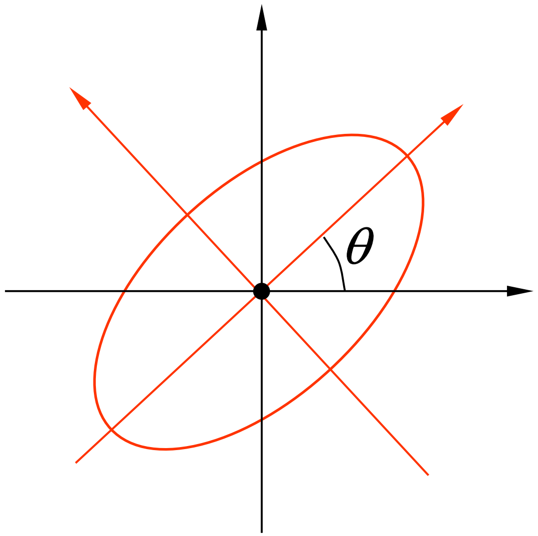
$$J_2=\begin{pmatrix} 0.627963 & -0.707107 & -0.325058 \\ 0.627963 & 0.707107 & -0.325058 \\ 0.459701 & 0 & 0.888074 \end{pmatrix}, E\left(A^{(2)}\right)=1$$

$$A^{(6)}=\begin{pmatrix} 0.585788 & 0.00203811 & -0.24\times10^{-4} \\ 0.00203811 & 3.41421 & 0 \\ -0.24\times10^{-4} & 0 & 2 \end{pmatrix}, E\left(A^{(6)}\right)=0.83\times10^{-5}$$

得 λ_1=0.585788，λ_2=3.41421，λ_3=2

第4章 求矩阵特征值和特征向量的方法

§4.5 QR方法



实对称矩阵正交相似于对角阵，因而可以求解特征值和特征向量，那么对于一般的矩阵呢？

定理(实Schur分解定理)：

$$\exists 正交矩阵 Q \in R^{n\times n}, \Rightarrow Q^T AQ = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & B_{nn} \end{pmatrix}$$

其中B_{ii}是1×1或2×2的小矩阵。

当B_{ii}是1×1时，它就是A的特征值，

当为2×2时，其特征值就是A的一对共轭特征值。

矩阵的QR分解

方阵QR分解：将矩阵化为一个正交矩阵Q和一个上三角矩阵R相乘的形式:A=QR。

QR方法求解矩阵特征值

QR方法的作用求一般矩阵的全部特征值。

QR方法思想

$$\because A^{(k)} = Q_k R_k \Rightarrow R_k = Q_k^{-1} A^{(k)} = Q_k^T A^{(k)}$$

$$\therefore A^{(k+1)} = R_k Q_k = Q_k^T A^{(k)} Q_k$$

QR分解 → 逆序相乘得矩阵序列
序列中矩阵相似，特征值相同；
矩阵序列收敛到一个近似的上三角矩阵；
上三角矩阵易于求解特征值。

定理：若$A \in R^{n\times n}$可逆，且有n个不同的特征值，

记$A = A^{(1)}$，则矩阵序列$A^{(k)}$本质上收敛于上三角块矩阵，

这里$A^{(k)}$的构造为：若$A^{(k)} = Q_k R_k \Rightarrow A^{(k+1)} = R_k Q_k$.

“本质上收敛”指 的主对角线上的元素或子块的特征值有确定的极限，其它元素或子块不管是否有极限。

注意算法终止条件，子块的元素不一定收敛

QR法算法

1) 输入矩阵$A, k \Leftarrow 1$

2）对A做QR分解得到矩阵Q和R

3）$A \Leftarrow RQ$

4）如果A是对角线为1×1或2×2的上三角块矩阵，求出1×1或2×2的特征值，停止

5）$k \Leftarrow k+1, goto \quad 2)$

矩阵的QR分解方法

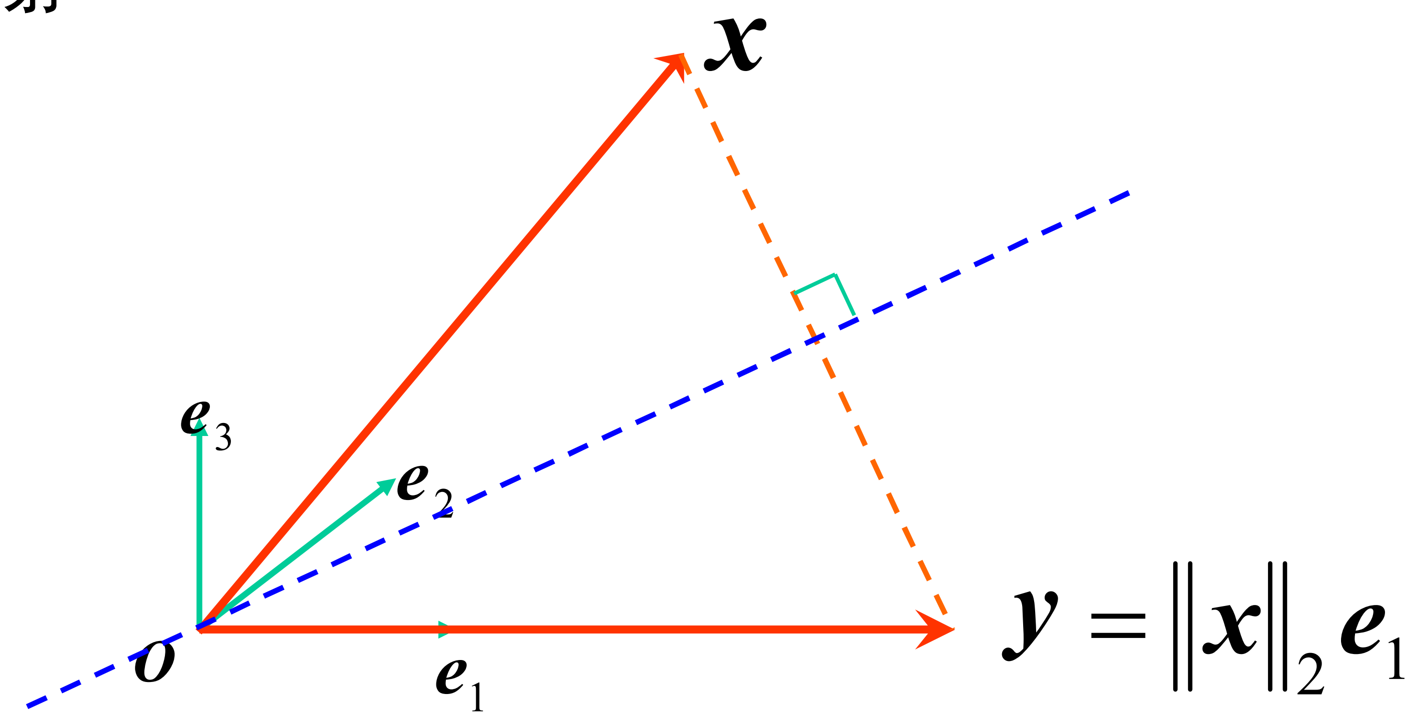
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\times & \times & \times\\ \times & \times & \times\\ \times & \times & \times\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{用正交变换}\boldsymbol{Q}_1}\begin{pmatrix}\times & \times & \times\\ 0 & \times & \times\\ 0 & \times & \times\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{用正交变换}\boldsymbol{Q}_2}\begin{pmatrix}\times & \times & \times\\ 0 & \times & \times\\ 0 & 0 & \times\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\quad \boldsymbol{a}_1\to\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\times\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

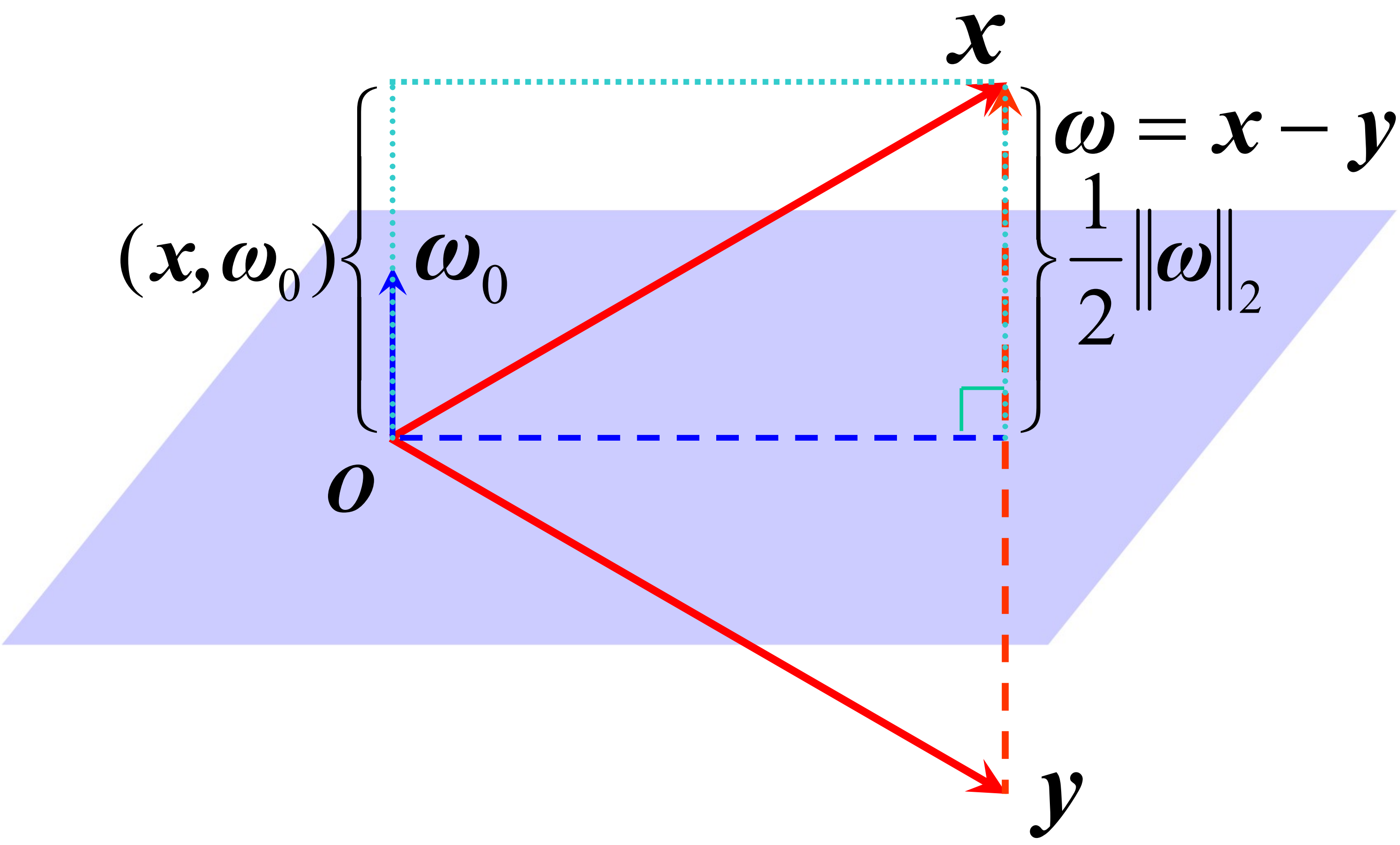
几何上看，就是把空间中的一个向量通过正交变换，变为落在第一个坐标轴上的向量。

正交变换：旋转和镜面反射，特点是保持向量的内积和长度（**2**-范数）不变。

镜面反射



如何将任意非零向量 x 变为落在第一个坐标轴 e_1 上的向量 $y=\|x\|_2 e_1$ ？



$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{\omega}\|_2 \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|_2}, \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_2$$

$$\boldsymbol{\omega}_0=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|_2},\quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{\omega}\|_2\boldsymbol{\omega}_0,\quad \|\boldsymbol{\omega}\|_2=2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_0)=2\boldsymbol{\omega}_0^T\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\omega}_0\cdot 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_0)=2\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\omega}_0^T\boldsymbol{x})=2\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\omega}\|_2^2}=2\frac{(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T)\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-2\frac{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T}{\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\frac{2}{\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T)\boldsymbol{x}:=H(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}$$

定义**2.4** 设 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{\omega}\neq 0$, 称初等矩阵

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{I}-\frac{2}{\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T \qquad \textbf{（2-33）}$$

为**Householder**矩阵（简称**H**阵），或称**Householder**变换矩阵.

镜面反射矩阵

Householder矩阵的性质

1. 对称性： $H(\omega)^T = H(\omega)$

$$H(\omega)^T = \left(I - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T\right)^T = I - \frac{2}{\omega^T\omega}\left(\omega\omega^T\right)^T = I - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T = H(\omega)$$

2. 正交性： $H(\omega)^T H(\omega) = I$

$$H(\omega)^T H(\omega) = \left(I - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T\right)^2 = I - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T + \left(\frac{2}{\omega^T\omega}\right)^2\left(\omega\omega^T\right)\left(\omega\omega^T\right)$$

$$= I - \frac{4}{\omega^T\omega}\omega\omega^T + \frac{4}{\left(\omega^T\omega\right)^2}\omega\left(\omega^T\omega\right)\omega^T = I$$

3. 如果 $\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, **则** $\|\boldsymbol{y}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2$ **(长度不变)**

$$\|\boldsymbol{y}\|_2^2=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^T\left(\boldsymbol{H}(\omega)^T\boldsymbol{H}(\omega)\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

4. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 取 $\omega=\boldsymbol{x}-\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1$ 则

$$\boldsymbol{H}(\omega)x=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}-\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{x}\|_2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1.$$

例10 已知向量

$$x=(-3,0,4)^T,\ y=(0,0,5)^T,$$

试求Householder矩阵H，使得 $y = Hx$.

解 $\omega = x - y = (-3,0,-1)^T,\ \|\omega\|_2^2 = 10$ 于是

$$H(\omega) = I - \frac{2}{\omega^T\omega}\omega\omega^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

利用一系列H阵进行矩阵的QR分解

例11 利用Householder变换求A的分解，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$

解：将A按列分块为$A=(a_1,a_2,a_3)$, 其中

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix},\ \|a_1\|_2=3,\ \omega_1=a_1-\|a_1\|_2 e_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{I} - \frac{2}{\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_1}\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{13}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{3} \\ -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2),\ \ \tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \|\tilde{a}_1\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \tilde{a}_1 - \|\tilde{a}_1\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$H(\omega_2) A_2 = \left(H(\omega_2)\tilde{a}_1, H(\omega_2)\tilde{a}_2\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_2) \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1)^T = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}_3\widetilde{\boldsymbol{R}},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_3)\widetilde{\boldsymbol{R}}=\widetilde{\boldsymbol{Q}}\widetilde{\boldsymbol{R}}$$

QR分解小结

1. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{I}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}$ 的定义，性质和几何意义。

2. QR分解的算法过程，

“降阶－变换－镶边－升阶－合并”。

QR分解中频繁用到的情况的加速

3、定理：$\forall$非零$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^T\in R^n$，$\exists \mathrm{P}\in \mathrm{R}^{n\times n}$，满足

$\underline{Px=-\sigma e_1}$，$\sigma=\pm\|x\|_2$，$e_1=\{1,0,\cdots,0\}^T$，P为镜面反射矩阵。

4、对 $x\neq 0\in R^n$，找方阵P，满足$Px=-\sigma e_1$ 的方法

1) 计算 $\sigma=(\operatorname{sgn} x_1)\|x\|_2$

2) 计算 $u=x+\sigma e_1$

3) 计算 $\boxed{\beta=\sigma(\sigma+x_1)}$

4) 取 $P=I-\beta^{-1}uu^T$

替换下式的计算

$\beta=0.5u^T\cdot u$

证明见下页

证明：令 $u = x + \sigma e_1$

做一个镜面反射矩阵：$P = I - \beta^{-1} u u^T, \beta = 0.5\|u\|_2^2$

$$\because x^T x = \|x\|_2^2 = \sigma^2, e_1^T e_1 = 1, x^T e_1 = e_1^T x = x_1,$$

$$\left(x + \sigma e_1\right)^T \left(x + \sigma e_1\right) = 2\left(\sigma^2 + \sigma x_1\right)$$

$$\therefore \beta = 0.5 u^T \cdot u = \sigma^2 + \sigma x_1 = \sigma\left(\sigma + x_1\right)$$

$$\therefore Px = \left(I - \beta^{-1} u u^T\right) x = x - \left(x + \sigma e_1\right) = -\sigma e_1$$

为避免$\beta = \sigma(\sigma + x_1)$有相近数相减，选$\sigma = (\operatorname{sgn} x_1)\|x\|_2$

例题：对$x=\{-1,1,-1,1\}^{\mathrm{T}}$，试构造正交矩阵P，

满足$Px=-\sigma e_1$,这里$\sigma=\pm\|x\|_2$，$e_1=\{1,0,0,0\}^T$

解：$\sigma=(\operatorname{sgn} x_1)\|x\|_2$ =-$\sqrt{4}=-2$

$$u=x+\sigma e_1=(-3,1,-1,1)^T$$

$$\beta=\sigma(\sigma+x_1)=-2(-2-1)6$$

$$P=I-\beta^{-1}uu^T=I-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3 & 3\\3 & 5 & 1 & -1\\-3 & 1 & 5 & 1\\3 & -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

思考题：

能不能利用其它正交变换（如旋转）进行QR分解？

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \qquad cot\theta = \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

一系列Givens矩阵左乘于矩阵A，可以将A转化为上三角矩阵

计算顺序

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} \\ \times & \times & \times \\ 0 & \mathrm{m} & \mathrm{m} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} \\ 0 & \mathrm{m} & \mathrm{m} \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Hessenberg矩阵

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

Hessenberg矩阵A的QR分解用左乘n-1个旋转矩阵计算得到，A=LR

Hessenberg矩阵QR分解之后逆序相乘仍然是上Hessenberg矩阵

QR方法改进

1）首先将矩阵转化为Hessenberg型，更新A

2）对A做QR分解得到矩阵Q和R

此步使用旋转法

3）$A \Leftarrow RQ$

4）如果A是对角线为1×1或2×2的上三角块矩阵，求出1×1或2×2的特征值，停止

5）$k \Leftarrow k+1, goto \quad 2)$

用 Householder 变换将一般矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 化为上 Hessemberg 矩阵的方法如下．

①取 $\boldsymbol{A}$ 第一列后 $n-1$ 个元素 $\boldsymbol{\alpha}_1=\{a_{21},a_{31},\cdots a_{n1}\}^{\mathrm{T}}$ 构造 $n-1$ 阶的 Householder 矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}_1=\boldsymbol{I}_{n-1}-\beta^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，使 $\hat{\boldsymbol{P}}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\{\sigma_1,0,\cdots,0\}^{\mathrm{T}}$.

②令 n 阶正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{\boldsymbol{P}}_1\end{bmatrix}$，对 $\boldsymbol{A}$ 做正交相似变换 $\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$，然后取 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的第 2 列后 $n-2$ 个元素做上述类似处理，可将 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 形式，继续下去，做到第 $n-1$ 次，则可将 $\boldsymbol{A}$ 化为上 Hessenberg 矩阵．

教材此处错误，应为对**A**左乘**P1**

本章介绍的幂法、Jacobi 旋转法及 QR 方法是在计算机上常用的求矩阵特征值和特征向量的方法．这些方法都是用矩阵迭代来构造算法的．

幂法计算简单，特别适用于高阶稀疏矩阵情况，但其收敛速度有时不能令人满意，需要采用位移技术来对幂法进行加速，这方面的内容可以参考文献［4］．

Jacobi 方法是古典方法，它收敛快、精度高，便于并行计算且算法稳定．用 Jacobi 方法求出的特征向量有较好的正交性，但当矩阵阶数较大时，收敛速度减慢，因此 Jacobi 方法适用于求低阶对称矩阵的全部矩阵特征值和特征向量．

QR 方法是 20 世纪 60 年代发展起来的方法，被称为计算数学最值得注意的算法之一，也是目前求任意矩阵全部特征值的最有效方法．

基于矩阵的*QR*分解求解线性方程组

- 回忆：求解线性方程组与矩阵的三角分解

$$Ax = b \qquad\qquad A = LU$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ A = LU \end{cases} \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

- 问题：条件数与方程组的性态

$$cond(A) = cond(LU) \le cond(L) \cdot cond(U)$$

LU分解是否能保持条件数？

回忆：条件数

定义 设A为非奇异矩阵，$\|\cdot\|$为矩阵的算子范数，则称 $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$为矩阵$A$的条件数。

常用的条件数为：

$$\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$$

$$\mathrm{cond}_1(A)=\|A\|_1\|A^{-1}\|_1$$

$$\mathrm{cond}_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^HA)}{\lambda_{\min}(A^HA)}}$$

分别称为矩阵A的∞-条件数、**1**-条件数和**2**-条件数。

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$$

$$cond_2(\boldsymbol{A})\approx 4.89894, cond_2(\boldsymbol{L})\approx 14.9224, cond_2(\boldsymbol{U})\approx 14.2208.$$

良态方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 变为病态方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}\end{cases}$

矩阵的LU分解不能保证条件数!

回忆：条件数性质

矩阵的条件数具有如下的性质：

(1) $\operatorname{cond}(A)\ge 1$

$$\operatorname{cond}(A)=\left\|A^{-1}\right\|\left\|A\right\|\ge\left\|A^{-1}A\right\|=\left\|I\right\|=1$$

(2) $\operatorname{cond}(A)=\operatorname{cond}(A^{-1})$

$$\operatorname{cond}(A^{-1})=\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|(A^{-1})^{-1}\right\|=\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|A\right\|=\operatorname{cond}(A)$$

(3) $\operatorname{cond}(\alpha A)=\operatorname{cond}(A)$， $\alpha\ne 0$ ， $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{cond}(\alpha A)=\left\|\alpha A\right\|\cdot\left\|(\alpha A)^{-1}\right\|=|\alpha|\cdot\left\|A\right\|\cdot\frac{1}{|\alpha|}\cdot\left\|A^{-1}\right\|$$

$$=\left\|A\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=\operatorname{cond}(A)$$

回忆：条件数性质

（4）**A**，**B**可逆 $\operatorname{cond}(\boldsymbol{AB}) \le \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \cdot \operatorname{cond}(\boldsymbol{B})$

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{AB}) = \|\boldsymbol{AB}\| \left\|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right\|$$

$$\le \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\| \cdot \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \cdot \left\|\boldsymbol{B}^{-1}\right\| = \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \cdot \operatorname{cond}(\boldsymbol{B})$$

（5）如果$\boldsymbol{U}$为正交矩阵，则

$$\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{U}) = 1$$

$$\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{UA}) = \operatorname{cond}_2(\boldsymbol{AU}) = \operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A})$$

解决方法：正交变换保持2-条件数，即若Q为正交矩阵（$Q^{-1}=Q^T$），则

$$cond_2(Q)=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^TQ)}{\lambda_{\min}(Q^TQ)}}=1,$$

$$cond_2(QA)=cond_2(AQ)=cond_2(A)$$

A，B可逆 $\mathrm{cond}(AB)\le\mathrm{cond}(A)\cdot\mathrm{cond}(B)$

$$\mathrm{cond}(AB)=\|AB\|\left\|(AB)^{-1}\right\|\le\|A\|\cdot\|B\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|B^{-1}\right\|=\mathrm{cond}(A)\cdot\mathrm{cond}(B)$$

$$cond_2(QA)\le cond_2(Q)\cdot cond_2(A)=cond_2(A)$$

$$=cond_2(Q^TQA)\le cond_2(Q^T)\cdot cond_2(QA)$$

解决方法：基于QR分解求解线性方程组

若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$，$\boldsymbol{Q}$为正交阵，$\boldsymbol{R}$为上三角阵

$$\begin{cases} Ax = b \\ A = QR \end{cases} \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Qy = b \\ Rx = y \end{cases} \Leftrightarrow Rx = Q^T b$$

3. 证明：在定理 4-1 中若 A 的 n 个特征值为满足 $|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$ 时，定理仍成立．

定理 4-1 设方阵 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}$ 是 $\mathbf{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，其对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n(|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|)$，任取一个非零向量 $\mathbf{V}^{(0)}\in\mathbf{R}^n$，按计算格式

构

3)

$$\mathbf{V}^{(0)}=\alpha_1\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_2\mathbf{x}^{(2)}+\cdots+\alpha_n\mathbf{x}^{(n)}$$

用 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{V}^{(0)}$，并利用 $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}=\lambda_k\mathbf{x}^{(k)}$ 有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{V}^{(0)}&=\alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)}+\alpha_3\mathbf{A}\mathbf{x}^{(3)}+\cdots+\alpha_n\mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)}\\&=\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_2\lambda_2\mathbf{x}^{(2)}+\alpha_3\lambda_3\mathbf{x}^{(3)}+\cdots+\alpha_n\lambda_n\mathbf{x}^{(n)}\end{aligned}$$

记 $\mathbf{V}^{(k)}=\mathbf{A}\mathbf{V}^{(k-1)}$，由 $\lambda_1=\lambda_2$ 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(k)}=\mathbf{A}^k\mathbf{V}^{(0)}&=\alpha_1\lambda_1^k\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_2\lambda_2^k\mathbf{x}^{(2)}+\alpha_3\lambda_3^k\mathbf{x}^{(3)}+\cdots+\alpha_n\lambda_n^k\mathbf{x}^{(n)}\\&=\lambda_1^k\left[\alpha_1\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_2\mathbf{x}^{(2)}+\alpha_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}^{(3)}+\cdots+\alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}^{(n)}\right]\end{aligned}$$

特征根重根的几何意义

矩阵特征值特征向量计算
知识总结：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$$

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}\ ,\vec{x}\neq 0$$

- 特征值和特征向量的几何意义；
- 幂法的几何意义及其推广算法；
- 概念：正交矩阵，矩阵相似，旋转矩阵；
- 实对称矩阵几何意义，二次型，椭球面 ← 旋转；
- 针对向量的旋转 ←→ Householder变换 ←→ 镜面反射；
- 概念：分块矩阵乘法；
- 将矩阵元素变成0的方法；
- HouseholderQR分解→Hessenberg→旋转法QR分解；
- Jacobi法，QR法；