デジタル信号処理

第6回　スペクトル誤差と窓関数

立命館大学
情報理工学部
李　亮

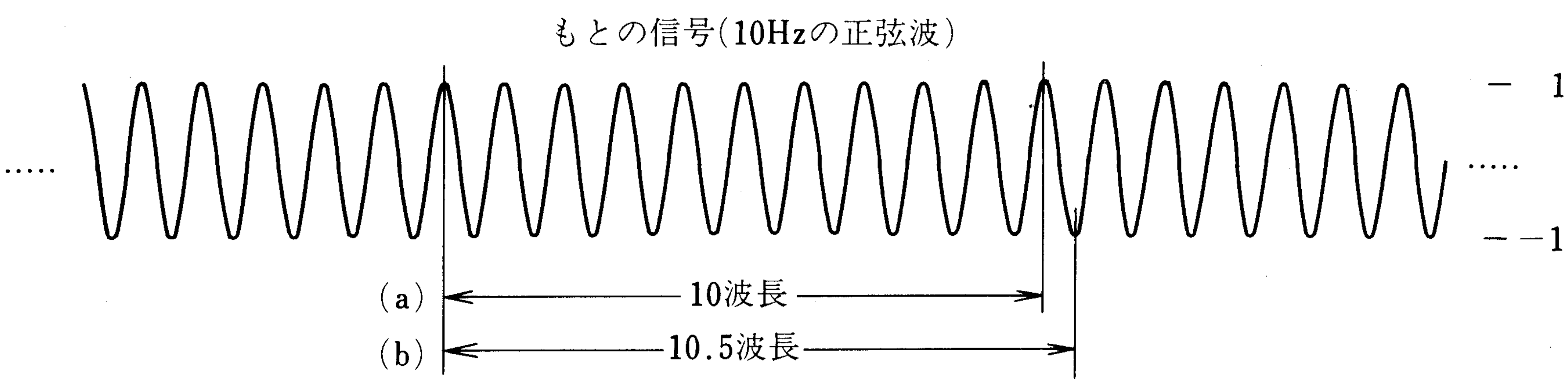
今回の講義内容

- 【復習】前回講義の復習
  - 周波数解析
  - スペクトルの特徴
  - 離散フーリエ変換

- 窓関数
  - 窓関数とは
  - なぜ窓関数が必要なのか

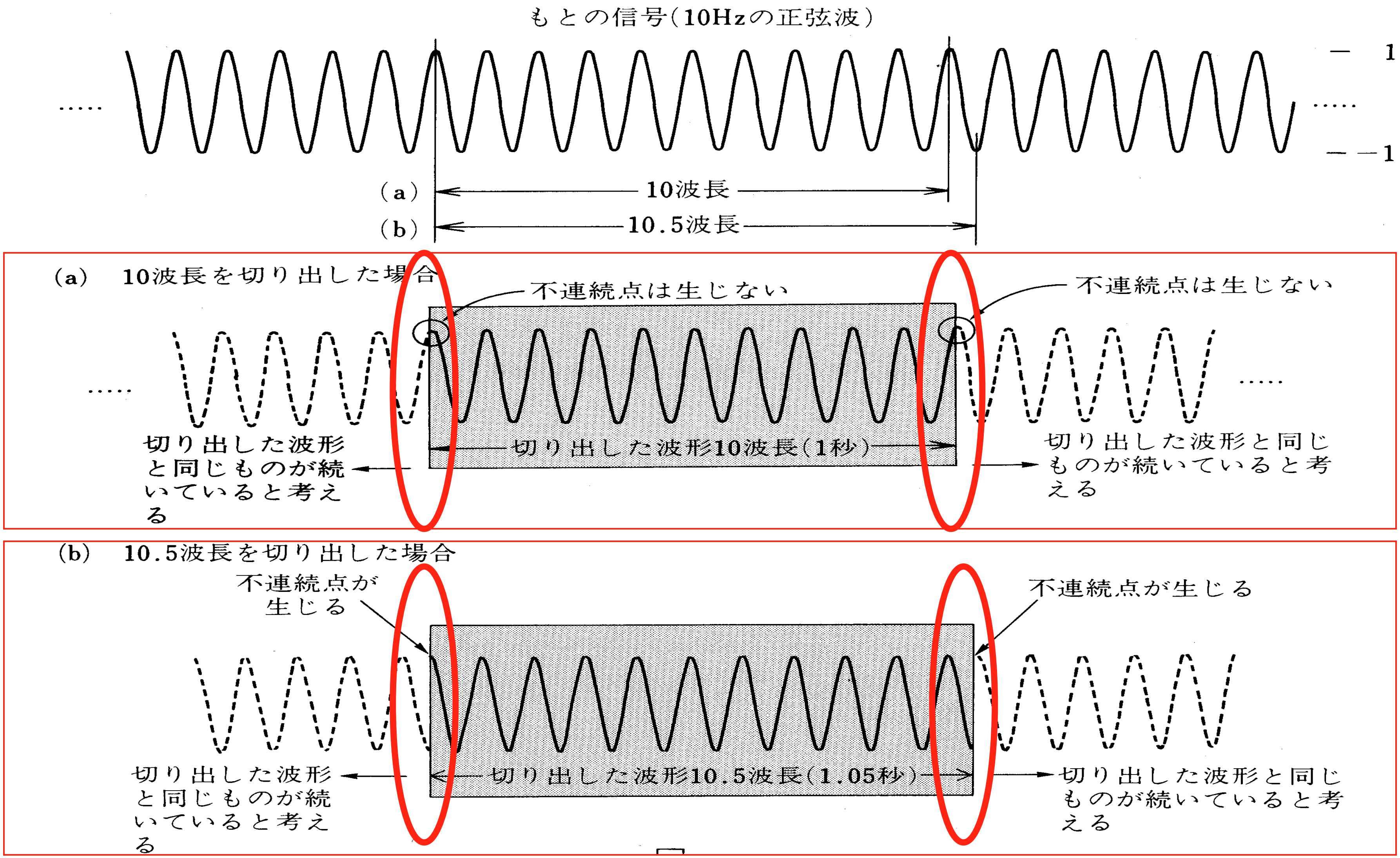
演習課題(1/4)

- 10Hzの正弦波に対して離散フーリエ変換を用いて周波数解析を行う場合、切り出す区間を(a)10波長、(b)10.5波長とすると、
  - (1) 2つのスペクトルは一致するか？
  - (2) (1)の理由は？



ヒント： 離散フーリエ変換は周期関数を仮定する

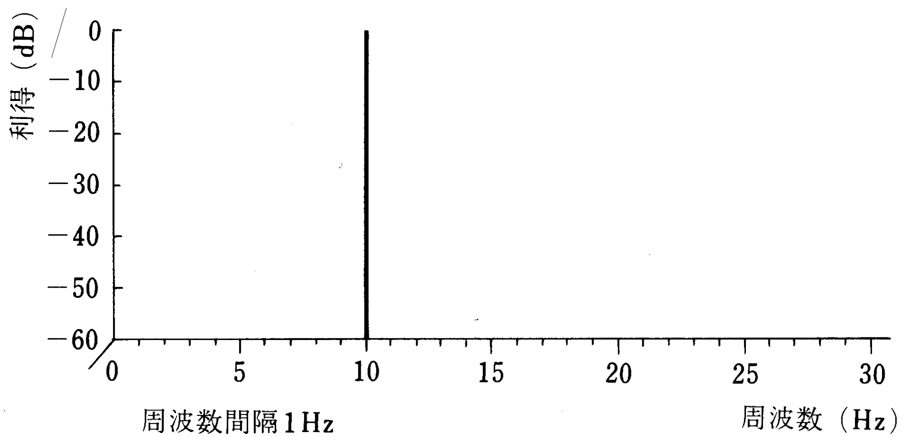
離散フーリエ変換における スペクトル誤差（1）



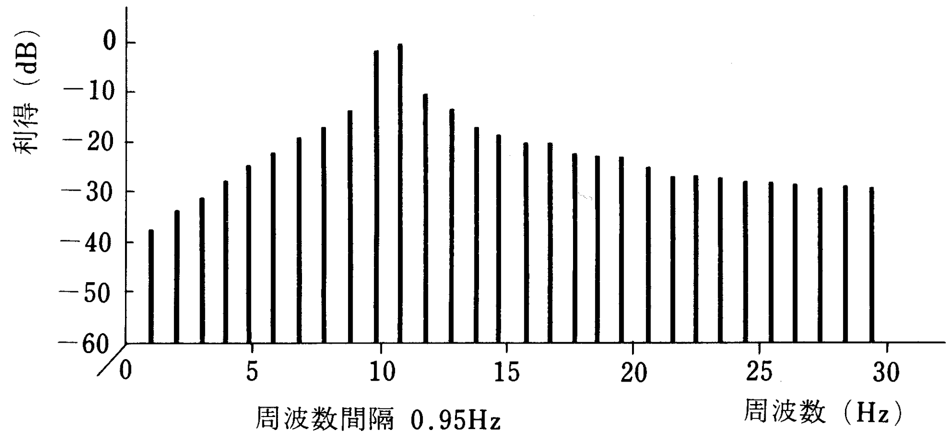
離散フーリエ変換における スペクトル誤差(2)

- 切り出し区間の違いによって、
  - 仮定する周期信号が変形する。(不連続点の発生)
  - スペクトルも変形する。
  - 下記は切り出し区間の違いによる10Hzの信号に対するパワースペクトル

（a）10波長で切り出し



（b）10.5波長で切り出し



不連続点の除去に向けて

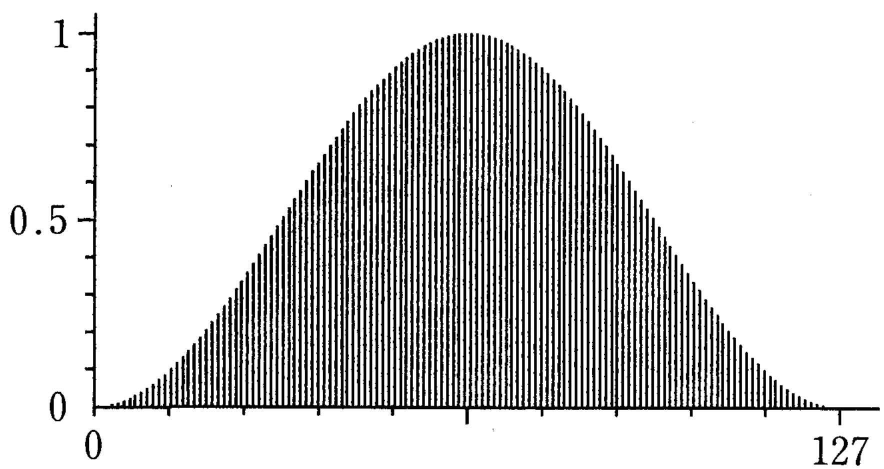
- 不連続点について
  - あらかじめ、信号に含まれている波長が既知であれば、切り出し区間を調節して不連続点を除去可能。
  - しかしながら、周波数解析するために信号を切り出す場合は、信号に含まれている周波数は未知のため不連続点は必ず発生！
  - 信号の不連続点を除去しなければ正しい周波数解析は行えない。

- どうすれば、不連続点を除去できるか？
  - 切り出した信号の最初と最後の値が等しければ、切り出した部分を周期とする周期信号とみなせる。

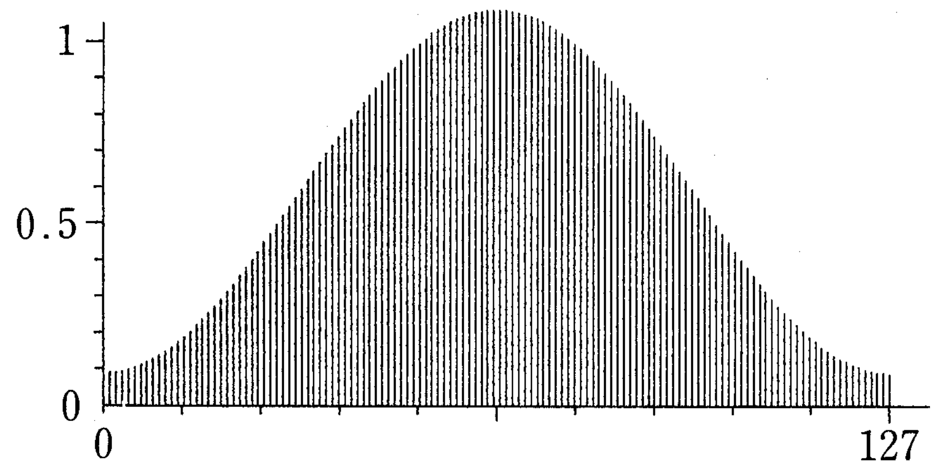
⇒　窓関数の提案

窓関数とは

- 信号の不連続点を除去するために提案された関数
  - 窓関数は、長い信号の中から一部を切り出すこと、「窓を通して信号を観測する」ことが語源
  - この関数を使って信号を切り出すことで不連続点を除去
  - 下記は窓関数の例



(a)　ハニング窓

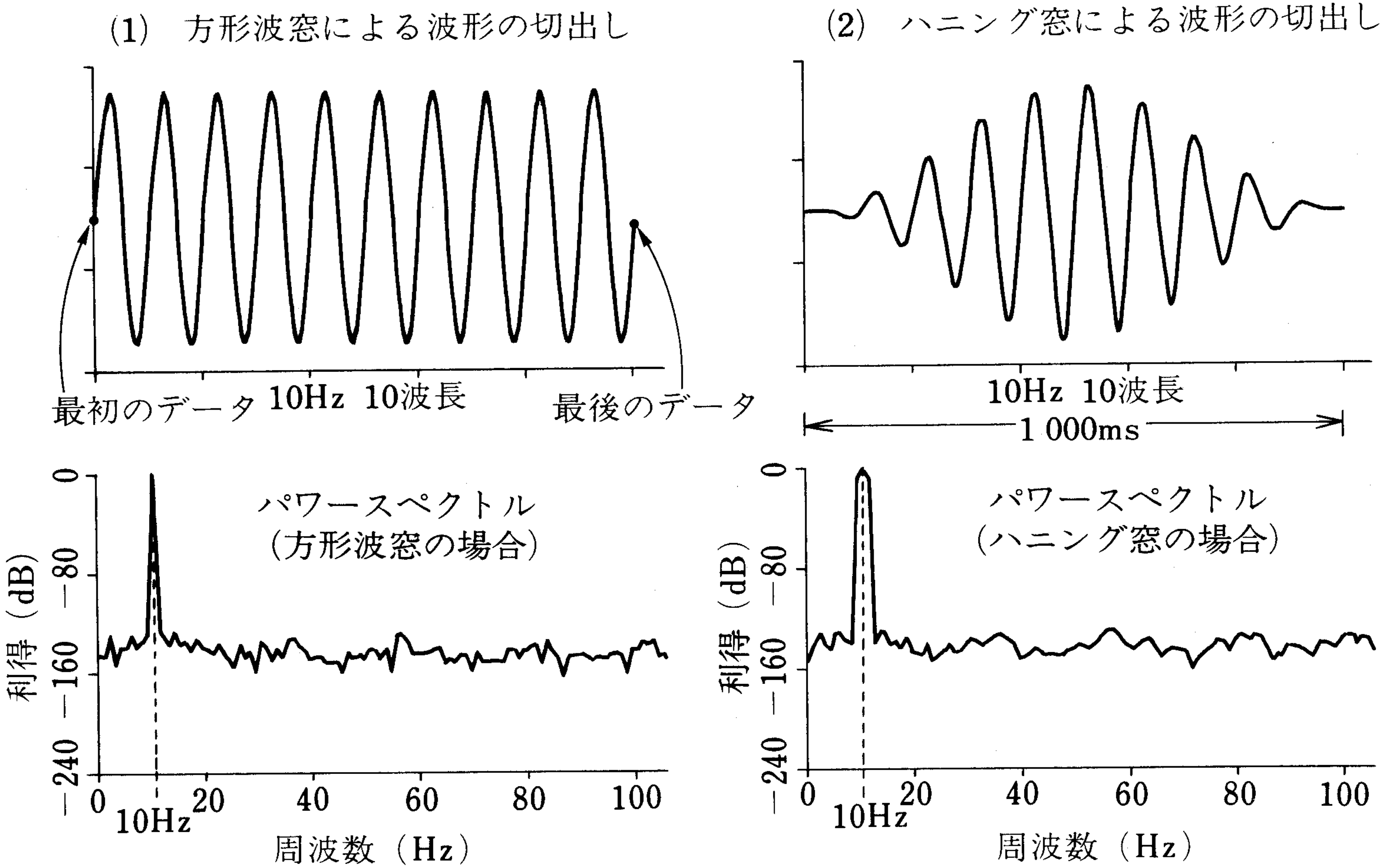


(b)　ハミング窓

窓関数の種類

- 切り出し区間が信号の整数倍のとき
  - 方形窓
    - 不連続点の処理は行わず単に信号を切り出す関数
- 切り出し区間が信号の整数倍でないとき
  - ハニング窓
    - 小さな周波数成分の分析に向いている
  - ハミング窓
    - 複数の周波数成分の分析や大きな周波数成分の分析に向いている
- 窓関数をどう選べばよいか？
  - 実際の信号を切り出すときは整数倍で信号を切り出すことは不可能なため、ハニング窓やハミング窓でスペクトル誤差を小さくすることが望ましい

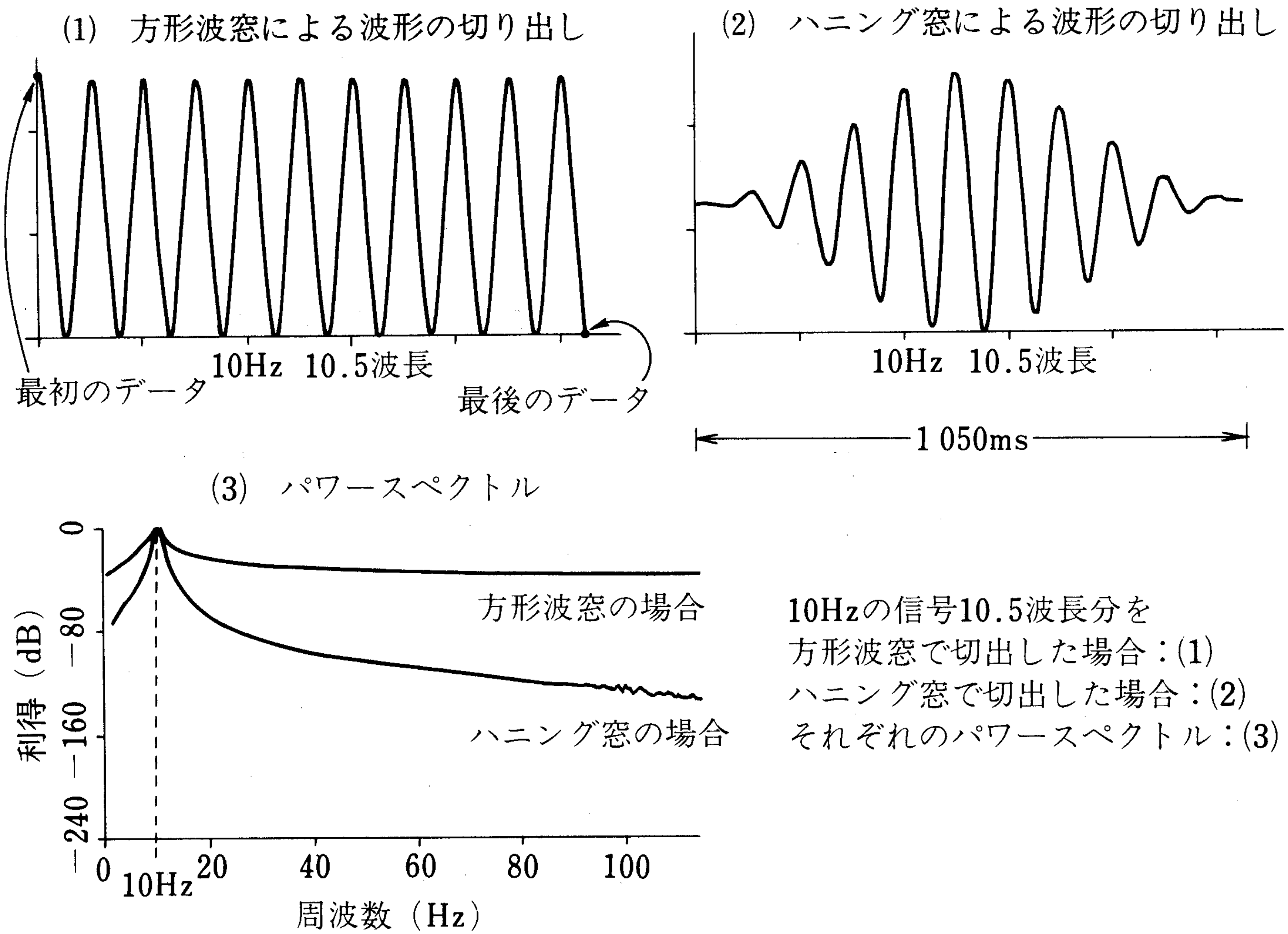
窓関数の効果(1) −切り出し区間が整数倍のとき−



(a)　10波長の信号を切り出した場合

整数倍のときは方形窓を使うほうが正確にスペクトルを解析可能

窓関数の効果(2) —切り出し区間が非整数倍のとき—



(b) 10.5波長の信号を切り出した場合

非整数倍のときはハニング窓を使うほうがスペクトルの精度が向上

演習課題（2/4）

- 音楽のような複数の周波数を含む信号の周波数解析を行う場合は、
  - （1） どの窓を用いて信号を切り出したほうが良いか？
  - （2） その理由は？
  - （3） 周波数解析において窓関数を使うことの欠点（問題点）は？

ヒント： （1）、（2）は整数倍での切り出しが可能か？
（3）は窓関数の形を良く考えて。

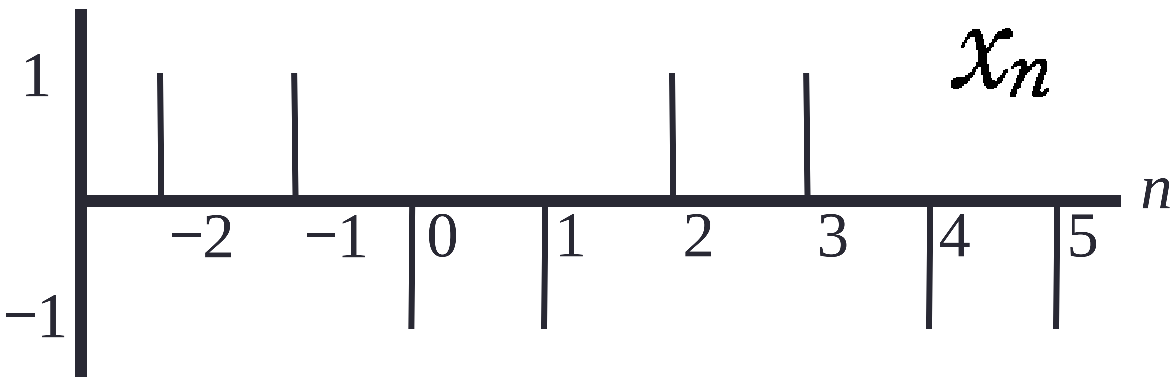
窓関数のまとめ

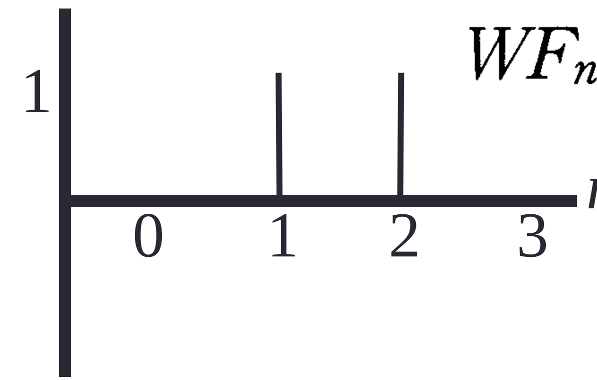
- 離散フーリエ変換を用いた周波数解析
  - 不連続点の影響によりスペクトルに誤差が発生
  - 窓関数により、不連続点を除去して離散フーリエ変換を行えば、スペクトル誤差を低減可能
- 窓関数
  - 実際の信号を切り出すときは整数倍で信号を切り出すことは不可能なため、ハニング窓やハミング窓が使われる。
  - しかし、窓関数を使用することでスペクトルが変形することも注意が必要。（それでも窓関数を用いて不連続点を除去したほうがスペクトル誤差は小さい）

演習課題(3/4)

ヒント：　窓関数と切り出し区間の値をかけて
離散フーリエ変換の式に代入して計算するだけ

- 離散時間信号 x_n が下記の式で表せるとき、離散フーリエ変換を用いて周波数解析を行いたい。**切り出し区間を n =0〜3**とし、下記窓関数 WF_n を使って周波数解析を行え。





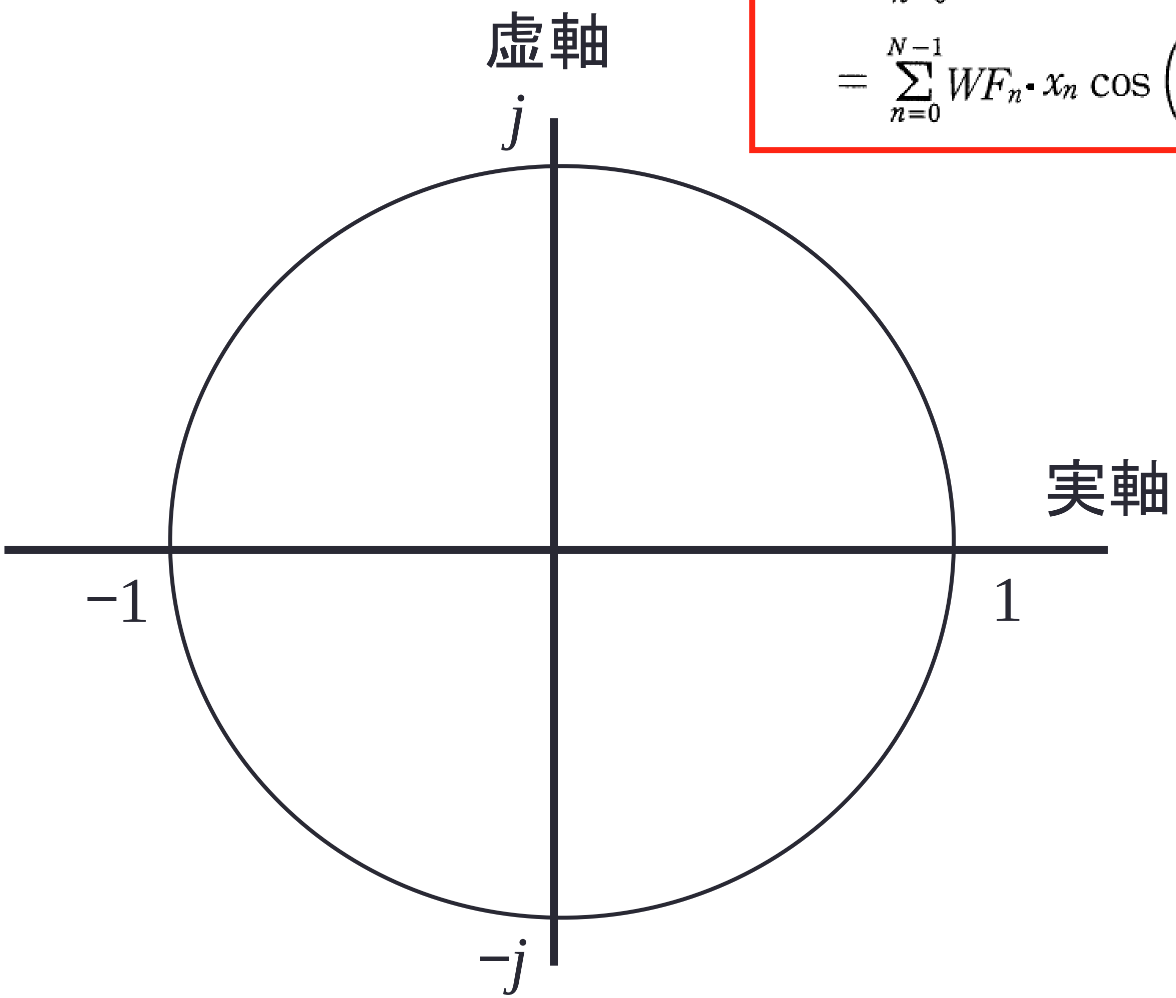
$$x_n = \begin{cases} 1 & (n = -2, -1, 2, 3) \\ -1 & (n = 0, 1, 4, 5) \end{cases}$$

$$WF_n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2) \\ 0 & (n = 0, 3) \end{cases}$$

演習課題（3/4）大ヒント

- 複素数

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$



exp(0) = 1
exp(−*j* π/2) = −*j*
exp(−*j* π) = −1
exp(−*j* 3π/2) = *j*

演習課題(4/4)

- 演習課題(3/4)のスペクトル解析結果を基に、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。(横軸は $k = 0$ から 8 とする。)

$X(0) = 0 - j0$　　$X(2) = 2 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$　　$X(3) = -1 - j1$

ヒント: 離散フーリエ変換式は下記のように分解できる。あとはスペクトルの対称性と周期性を考慮すれば…

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$