§5.1 事件的独立性

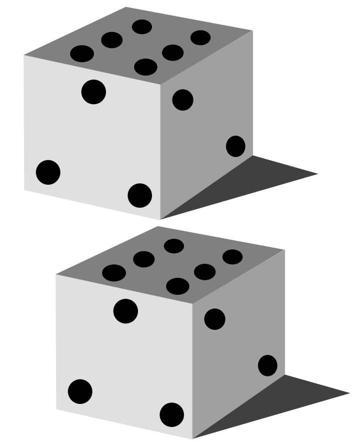
主 题

两个事件的独立性
多个事件相互独立
多个事件两两独立

$$P(B) \overset{?}{=} P(B|A)$$

先看一个例子：

将一颗均匀骰子连掷两次，



设 A={第一次掷得的是6点}，B={第二次掷得的是6}

显然 $P(B) = \dfrac{6\times 1}{6\times 6}$ =1/6 $=\!=$ $P(B|A) = \dfrac{1/(6\times 6)}{1/6}$ =1/6

这就是说,已知事件 A 发生,并不影响事件 B 发生的概率,

这时称事件A、B独立.

由条件概率公式 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) > 0$,

又 $P(B \mid A) = P(B)$,

得 **P(AB)=P(A) P(B)**

它不受$P(B)>0$或$P(A)>0$的制约

一、两事件的独立性

定义 若两事件A、B满足

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

则称A、B独立，或称A、B相互独立.

性质 1. A,B为两个事件， 若 $P(A)>0$，

A与B相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$.

1'. A,B 为两个事件，若 $P(B)>0$，

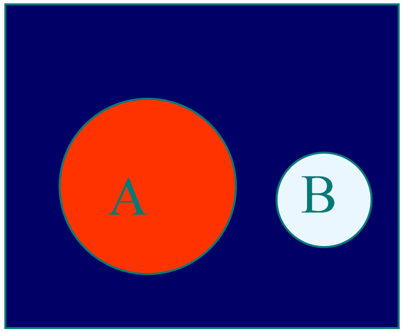
A与B相互独立 $\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A)$.

2. 若两事件 A,B 独立，则有$A,\overline{B}$；$\overline{A},B$；$\overline{A},\overline{B}$ 分别相互独立。

证： $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\overline{B})$

3. 若 $P(A)>\mathbf{0}$，$P(B)>\mathbf{0}$，　则有

$$AB=\phi \Rightarrow A\text{与}B\text{不独立}$$



证：$P(AB)=P(\phi)=\mathbf{0}, P(A)P(B)>\mathbf{0}$

则$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

4. 若两事件A与A独立，则$P(A)=\mathbf{0}$或者$P(A)=\mathbf{1}$.

证：$P(AA)=P(A)P(A)$，$P(A)=\mathbf{0}$或者$\mathbf{1}$.

二、多个事件的独立性

1. 将两事件独立的定义推广到三个事件：

对于三个事件A、B、C，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称三个事件A、B、C相互独立。

上面四个等式中，如果只满足前三个，则称**A**、**B**、**C**两两相互独立。

例 1 将一枚硬币抛掷两次设*A*={第一次是正面}、*B*={第二次反面}、*C*={两次同正或同反}，确定这三个事件是否是两两独立，三个事件是否相互独立的。

解：

$$\Omega = \{正正，正反，反正，反反\}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} = P(B) = P(C) \\ P(AB) &= \frac{1}{4} = P(BC) = P(CA) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &P(AB) = P(A)P(B) \\ &P(AC) = P(A)P(C) \\ &P(BC) = P(B)P(C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *A*、*B*、*C* 两两独立

$P(ABC) = 0 \Rightarrow P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$

$\Rightarrow$ *A*、*B*、*C* 不相互独立

2. n个事件相互独立：$A_1,\dots A_n\ (n\geq \mathbf{2})$

如果这**n**个事件中任意**k(1<k<n+1)**个事件都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots(A_{i_k})$$

则称这**n**个事件 $A_1,\dots A_n$ 相互独立。

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3\cdots+C_n^n=2^n,\quad C_n^2+C_n^3+\cdots C_n^n=\mathbf{2}^n-(\mathbf{1}+n)$$

性质：若**n**个事件 $A_1,\dots A_n\ (n\geq \mathbf{2})$ 相互独立，则将 $A_1,\dots A_n$ 中任意多个事件换成它们的补事件，所得的**n**个事件仍相互独立。

例2． 设两个相互独立的事件 A, B 都不发生的概率为1/9，若 A 发生而 B 不发生的概率与 B 发生而 A 不发生的概率相等，求 $P(A)$

解：由已知

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{9}$$

$$P(\overline{A}B) = P(A\overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

例3．若事件 A,B,C 相互独立，证明： $A \cup B$ 与 $\overline{C}$ 相互独立

证明：

$$P((A \cup B)\overline{C}) \Rightarrow P(A \cup B)P(\overline{C})$$

$$P((A \cup B)\overline{C}) = P(A\overline{C} \cup B\overline{C}) = P(A\overline{C}) + P(B\overline{C}) - P(AB\overline{C})$$

$$P(A \cup B)P(\overline{C}) = P(\overline{C})[P(A) + P(B) - P(AB)] = P(A)P(\overline{C}) + P(B)P(\overline{C}) - P(AB)P(\overline{C})$$

$$P(A\overline{C}) + P(B\overline{C}) - P(AB\overline{C}) = P(A)P(\overline{C}) + P(B)P(\overline{C}) - P(AB)P(\overline{C})$$

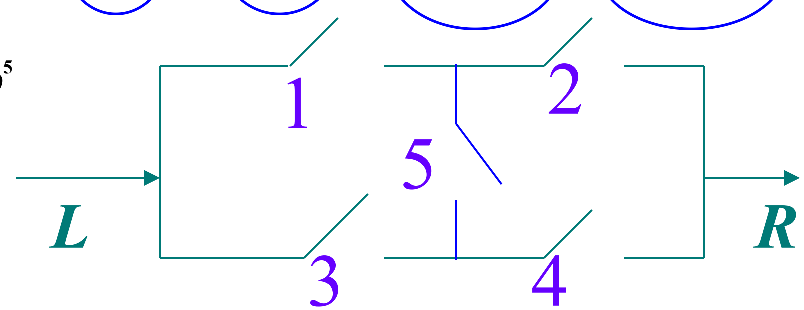
口算　三名同学独立做一道数学题，每人做出的概率分别为：0.7, 0.8,0.9，求这道题被做出来的概率。

$$1 - (1-0.7)(1-0.8)(1-0.9) = 0.994$$

例 4 设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4，5，为继电器接点。设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一个继电器接点闭合的概率均为 p。求 L至 R 为通路的概率。

解： 设事件 A_i(i=1,2,3,4，5) 为“第 i 个继电器接点闭合”，L 至 R 为通路这一事件可表示为：$A = A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_1A_5A_4 \cup A_3A_5A_2.$

$$P(A) = 2p^2 + 2p^3 - (5p^4 + p^5) + 3p^5$$



$C_4^1 \to 2p^2, 2p^3$　　$-C_4^2 \to 5p^4, p^5$

$C_4^3 \to 4p^5$　　$-C_4^4 \to p^5$

$$P(A) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$