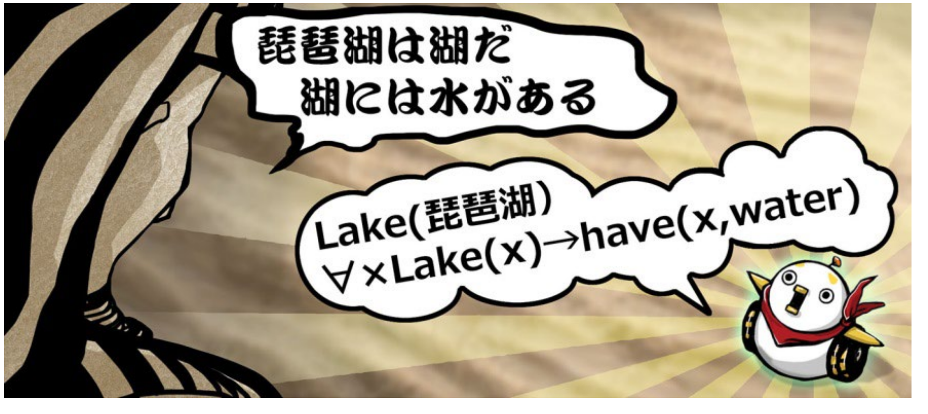
# 人工知能

## 第13回 言語と論理(2)
## 記号論理


立命館大学 情報理工学部
谷口彰


# STORY 言語と論理（2）

- ホイールダック２号は自然言語文を形態素解析できるようになった．構文解析できるようになった．さて，これでスフィンクスと戦えるだろうか．そうはいかない．
- 単語の切れ目や，係り受け構造がわかったところでスフィンクスが「琵琶湖は湖です」「湖には水がある」といったときに，これから「琵琶湖に水がある」ということを推論することがホイールダック２号にはできない．
- このような文に潜む論理構造を見出すことができなければ，謎かけに答えることなどできない．ホイールダック２号に求められるのは論理的思考能力だった！



# 仮定 言語と論理（2）

- ホイールダック２号に文法に関する知識，語彙に関する知識は事前に埋め込んでよいものとする.
- ホイールダック２号は誤りのない音声認識が可能であるとする.
- ホイールダック２号は与えられた自然言語文を論理式に変換する意味的構文解析の処理系を備えているものとする.

# Contents

# 15.1 記号論理

- 言葉で表現されるものを記号に変換したものを，その論理関係によってとらえる記号論理(Symbolic logic)
  - 命題論理 (propositional logic)
  - 述語論理 (predicate logic)
  - その他多くの派生論理
    - 様相論理，時制論理，ファジィ論理， etc. etc.
- 言葉で表現する物事の「真・偽」だけを論理的に扱う世界.
- 自然言語⊃・・・・・⊃述語論理⊃命題論理
- 数学の公理系⊃・・・・・・⊃述語論理⊃命題論理

自然言語の持つ「論理」の中の小さな部分！

# Contents

# 述語論理

- 個々の命題の内容について論じるために，命題の中に**<u>変数</u>**を用いて，変数の値によって真・偽を捉える記号論理
- 命題論理では扱えない例
  - すべての<u>人</u>は平和を好む
  - 太郎は<u>人</u>である． => 太郎は平和を好む.
- 述語論理は命題に含まれる変数に着目し，その命題における変数の性質や状態を**<u>述語(predicate)</u>**を用いて推論する．

## 15.2.1 記号と定義

述語論理はある事実を記述することができる.

述語記号　　関数記号　　定数記号

$$\boxed{\exists x \neg \mathrm{like}(\mathrm{MOTHER}(\text{サトシ}), x)}$$

限量記号　　論理記号　　変数記号

「サトシの母は好きではない物がある」

# 述語論理で用いる記号(1)

表 15.1 述語論理で用いる記号

| 記号の種類 | 説明 |
| --- | --- |
| 定数記号 | 特定の個体を表す記号． $a, b, c$ や実際の名前 apple, box, Tommy などが使われることが多い． |
| 変数記号 | 任意の個体を表す記号． $x, y, z$ などが使われることが多い． |
| 関数記号 | 個体間の関係を表す記号． $f, g$ などが使われることが多い． $f(x)$ などで，ある個体を表す．<br>たとえば， MOTHER(Tom) で「Tom の母親」を指す．<br>関数記号は引数を受けて個体を指す．<br>本書では述語記号との明確な区別のため，関数記号は大文字で表記する． |

# 述語論理で用いる記号(2)

| | |
|---|---|
| 述語記号 | 個体に関する性質や状態を表す記号． $p, q, r$ や，もしくは性質を表す単語そのもの cold, fly, small などが使われることが多い．<br>cold$(x)$ で「$x$ が冷たい」という状態を表す．<br>本書では小文字もしくは日本語で表記する． |
| 論理記号 | 結合記号 (connective) とも呼ばれる． $\neg$ 否定, $\wedge$ 連言, $\vee$ 選言, $\rightarrow$ 含意, $\equiv$ 同値の 5 つがある（表 15.2）． |
| 限量記号 | 「任意の〜」を表す全称記号 $\forall$ と，「ある〜が存在する」を表す存在記号 $\exists$ がある． |

# 演習15-1

- 以下の述語論理を日本語で表してみよう

- $\forall x like(FATHER(\text{サトシ}), x)$

## **項**の定義

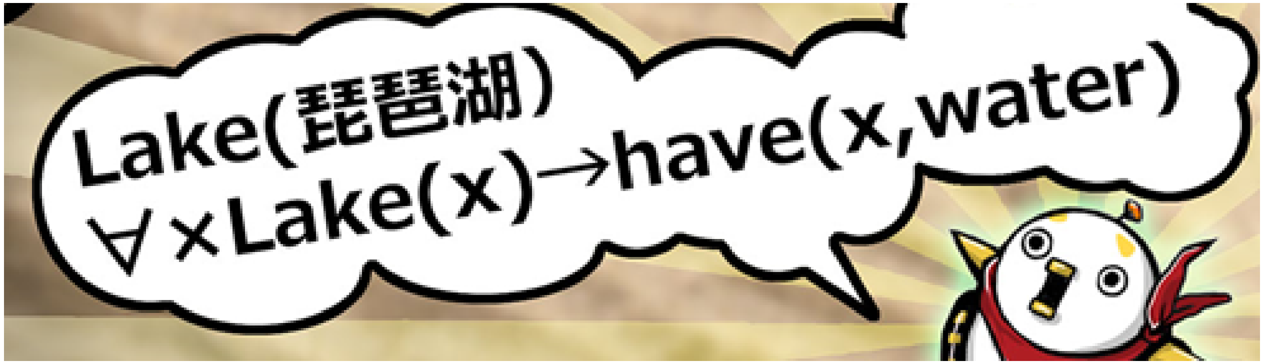
- 定数記号，変数記号はすべて項である.
- $t_1, t_2, \ldots, t_n$ が項であり，$f$ が関数記号であるとき $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$も項である.

## **原子論理式**の定義

- $t_1, t_2, \cdots\cdots t_n$が項であり， $p$が述語記号であるとき， $p(t_1, t_2, \cdots\cdots t_n)$をを**原子論理式**(atomic formula) という.

# 述語論理式の定義

- 原子論理式は論理式である.
- P,Qが論理式であれば，論理記号を用いて構成される**¬P（否定）**, **P ∧ Q（連言）**, **P ∨ Q（選言）**, **P → Q（含意）**, **P ≡ Q（同値）** も論理式である.
- P が論理式で，x が個体変数であるとき，∀xP, ∃xP は論理式である.
- 上記より論理式となるものだけが論理式である.



# 論理式を**解釈**する(interpretation)

- 論理式の真偽は，その論理式を構成している原子論理式の真偽をそれぞれ求め，それらの論理記号による結びつきを考え，元となる論理式全体の真偽を決定する.

1 = TRUE

0 = FALSE

表 15.2　真理値表

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \to Q$ | $P \equiv Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$P, Q$ それぞれの真偽値が左のように決まった場合に，論理記号で結ばれてつくられたそれぞれの論理式は上のような真偽値をとる.

# 演習15-2

- 下の真理値表を完成させよ．(T=1, F=0)

| $p$ | $q$ | $\neg p \vee q$ | $p \to q$ | $\neg(q \to p)$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

# 恒真式，恒偽式

- 原子論理式のとる真理値にかかわらず，常に真であるものや常に偽であるものが存在する.
  - 恒真式 (tautology)・・・解釈によらず真
    - トートロジー
  - 恒偽式 (contradiction)・・・解釈によらず偽
    - 矛盾式
  - 充足可能 (satisfiable)・・・解釈次第で真
  - 充足不能 (unsatistiable)・・・解釈によらず偽

同じ

# 矛盾式(コントラディクション)と恒真式(トートロジー)

- 「**<u>僕は君を愛してもおり，愛していなくもある</u>**．ああ，僕のこの想いをどう言葉にすればいいんだ・・メリッサ！」

矛盾：$p \wedge \neg p$

→ 意味不明

- 「**<u>世の中には二種類の人間が居る．寿司を愛するものと，寿司を愛さないものだ</u>**．寿司こそ全てだよ！」

恒真：$p \vee \neg p$

→ あたりまえだから何の情報もない

T:True
F:False
⇔：同値

# 論理式の同値関係

- 二重否定　$\neg(\neg p) \equiv p$
- べき等律　$p \vee p \equiv p$,　　$p \wedge p \equiv p$
- 補元律　$p \vee \neg p \equiv T$,　　$p \wedge \neg p \equiv F$
- 交換律　$p \vee q \equiv q \vee p$,　　$p \wedge q \equiv q \wedge p$
- 結合律　$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$，$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- 分配律　$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ド・モルガン律　$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$,
  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- 恒真，恒偽　$p \vee T \equiv T$，$p \wedge T \equiv p$，$p \vee F \equiv p$，$p \wedge F \equiv F$,
- 含意の除去　$p \to q \equiv \neg p \vee q$
- 同値記号の除去　$(p \equiv q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$

# 演習15-3

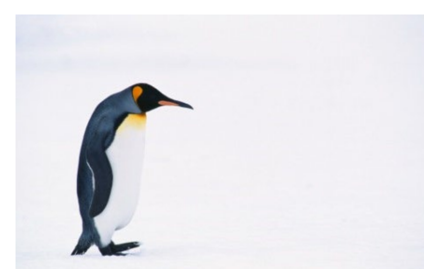
- 恒真式（トートロジー）の説明として**最も不適切**なものを選べ.

  1. 充足可能である.
  2. 非定型は矛盾になる.
  3. 解釈の仕方次第では偽になる.
  4. 自然言語で意味をくみ取ろうとすると「当たり前」の分になることが多い.

# 15.2.3 述語論理式の例

表 15.3 一階述語論理式の例

| 例 | 自然文での表現 | 述語論理式での表現 |
|---|---|---|
| 1 | 私は本を持っている | $\exists x(\mathrm{have}(I, x) \wedge \mathrm{book}(x))$ |
| 2 | 私は本かノートを持っている | $\exists x(\mathrm{have}(I, x) \wedge \mathrm{book}(x))$ $\vee \exists x(\mathrm{have}(I, x) \wedge \mathrm{notebook}(x))$ |
| 3 | すべての女子はケーキが好きだ | $\forall x(\mathrm{girl}(x) \rightarrow \exists y(\mathrm{loves}(x, y) \wedge \mathrm{cake}(y)))$ |
| 4 | 誰も自分の背中を触れない | $\neg\exists x(\mathrm{human}(x) \wedge \mathrm{touch}(x, \mathrm{BACK}(x)))$ |
| 5 | ペンギン以外の鳥は飛ぶ | $\forall x((\mathrm{bird}(x) \wedge \neg\mathrm{penguin}(x)) \rightarrow \mathrm{fly}(x))$ |



# 演習15-4

- 先に挙げた例,
  - p1 すべての人は平和を好む
  - p2 太郎は人である.
  - p3 太郎は平和を好む.
- をそれぞれ，述語論理式であらわしてみよう.
- 何をどのように変数と置くかは自分で考えてみよう.

Contents

# 15.3.1 命題論理式の節形式への変形

- 命題論理式
  - 基礎となる原子論理式がP,Q,R などの記号でおかれ，これらを上記五つの論理記号で結合することによって得られる論理式
- 同値となる論理式は多数あるために，標準形を定めておくことは都合が良い．（多項式における因数分解，展開に近い）
- **連言標準形**（和積標準形：conjunctive normal form）
  - リテラル (literal) ・・原子論理式，または原子論理式の否定
  - 節 (close)・・・リテラルの論理和のみからなる論理式
  - 節形式 (closed form) ・・・節の論理積のみからなる論理式

節　$$C_i \equiv p_{i1} \vee p_{i2} \vee \ldots \vee p_{in_i}$$ リテラル

節形式　$$q \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$$

# 命題論理式の連言標準形への変形

**Algorithm 15.1 命題論理式の連言標準形への変形**

1. 同値記号 $P \equiv Q$ を $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ に，含意記号 $P \rightarrow Q$ を $\neg P \vee Q$ にし，同値記号 $\equiv$, 含意記号 $\rightarrow$ を除去する．
2. 二重否定の消去 $(\neg\neg P \equiv P)$，ド・モルガンの法則の適用 $(\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$，もしくは $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q)$ をすることで，すべての否定記号を原子論理式の前まで移動する．
3. 分配律 $(P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, もしくは $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ を適用することで，連言標準形へと変形する．

# 論理式の節形式への変換

- step1 同値記号≡と含意記号→を以下の同値関係を用いて除去する．
  - p≡qは，((p→q)∧(q→p))と同値
  - p→q≡¬p∨q
- step2 二重否定，ド・モルガン律を適用する．
  - ¬（¬ p） ≡ p
  - ¬(p∧q)≡¬p∨¬q，　　¬(p∨q)≡¬p∧¬q
- step 3 分配律を適用する．
  - p∨(q∧r)≡(p∨q)∧(p∨r)，
  - p ∧(q ∨ r)≡(p ∧ q) ∨(p ∧ r)

# 教科書の例 P ≡ Q ∨ R

手で追ってみよう．．．

$$
\begin{aligned}
& P \equiv Q \vee R && (15.3)\\
\Leftrightarrow\ & (P \to Q \vee R) \wedge (Q \vee R \to P) \cdots \text{同値記号の除去} && (15.4)\\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee (Q \vee R)) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P) \cdots \text{含意記号の除去} && (15.5)\\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P) \cdots \text{ド・モルガンの法則} && (15.6)\\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P) \cdots \text{分配律の適用} && (15.7)
\end{aligned}
$$

# 演習問題 15-5

- 命題論理式の節形式への変換を行うときに実行する手続きとして**最も不適切**なものを選べ.

1. 含意記号と同値記号を除去する.
2. ド・モルガン律を適用して原子論理式のみに否定がかかるように変形する.
3. 分配律を適用する.
4. 各原子論理式を解釈する.

# 15.3.2 述語論理のスコーレム標準形への変形

- スコーレム標準形
  - スコーレム関数を用いて存在記号∃を除去した節形式なので，スコーレム標準形と言われる．

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m) \tag{15.8}$$

**Algorithm 15.2 スコーレム標準形への変形**

1. 与えられた述語論理式 $P$ から同値記号と含意記号を除去する．
2. 二重否定を除去し，ド・モルガンの法則を用いることで原子論理式の前に否定記号を移動する．
3. 変数の標準化を行う．
4. スコーレム関数を導入し存在記号を除去する．
5. 全称記号を前に移動し冠頭形へと変形する．
6. 母式を連言標準形に変形し，節形式にする．
7. 各節の変数を独立化させる．

# スコーレム標準形への変形例(1)

$$\exists x \forall y P(x,y) \vee Q(x) \rightarrow \exists x \forall z R(x,z)$$

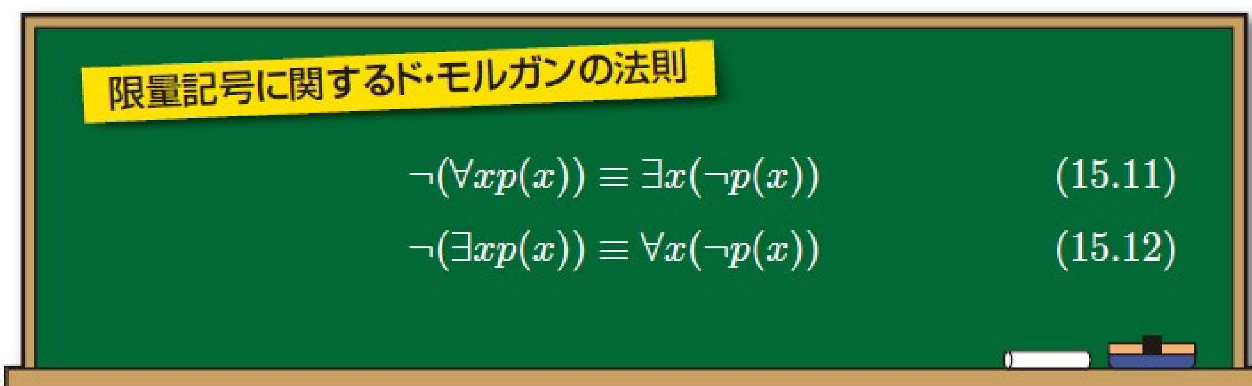
1. **同値と含意の除去**

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x \forall y P(x,y) \vee Q(x)) \vee \exists x \forall z R(x,z)$$

2. **二重否定の除去とド・モルガンの法則による否定記号の移動**

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y \neg(P(x,y) \vee Q(x)) \vee \exists x \forall z R(x,z) \qquad (15.13)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x \forall z R(x,z) \qquad (15.14)$$



# スコーレム標準形への変形例(2)

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x \forall z R(x,z)$$

3. **変数の標準化**

$$\Leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 (\neg P(x_1,x_2) \wedge \neg Q(x_1)) \vee \exists x_3 \forall x_4 R(x_3,x_4)$$

4. **スコーレム関数を用いた存在記号の除去**

$$\Leftrightarrow \forall x_1 (\neg P(x_1,f(x_1)) \wedge \neg Q(x_1)) \vee \forall x_4 R(a,x_4)$$

5. **冠頭形への変形**

$$\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_4 (\neg P(x_1,f(x_1)) \wedge \neg Q(x_1)) \vee R(a,x_4)$$

6. **分配律を用いて節形式へ変形**

$$\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_4 \underbrace{(\neg P(x_1,f(x_1)) \vee R(a,x_4))}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg Q(x_1) \vee R(a,x_4))}_{C_2}$$

7. **各節の変数の独立化**

$$\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \underbrace{(\neg P(x_1,f(x_1)) \vee R(a,x_2))}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg Q(x_3) \vee R(a,x_4))}_{C_2}$$

# 15.3.3 節集合

- スコーレム標準形による節形式は必ず以下の形をとる.
- $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \underbrace{(C_1 \land C_2 \ldots \land C_n)}_{\text{母式（matrix）}}$

- **節集合**形式での記述
  $C=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

述語論理式は
節の集合で表せば十分！

# 演習15-6

- 次の述語論理式のスコーレム標準形を求め，節集合形式で表しなさい．
  - $\forall x \exists y[P(x) \rightarrow Q(x,y)] \wedge \neg(\forall x \exists y[P(x) \wedge \forall z R(z)])$

# まとめ

- 述語論理で用いる記号を導入し述語論理の基礎について学んだ.
- 恒真式，恒偽式とは何かについて学び，主要な同値関係について確認した.
- 事実を表す一般的な自然文を一階述語論理式として表現する方法を学んだ.
- 命題論理式の節形式への変形方法について学んだ.
- 述語論理式のスコーレム標準形および節集合形式への変形方法について学んだ.