第三章 二维随机变量及其分布

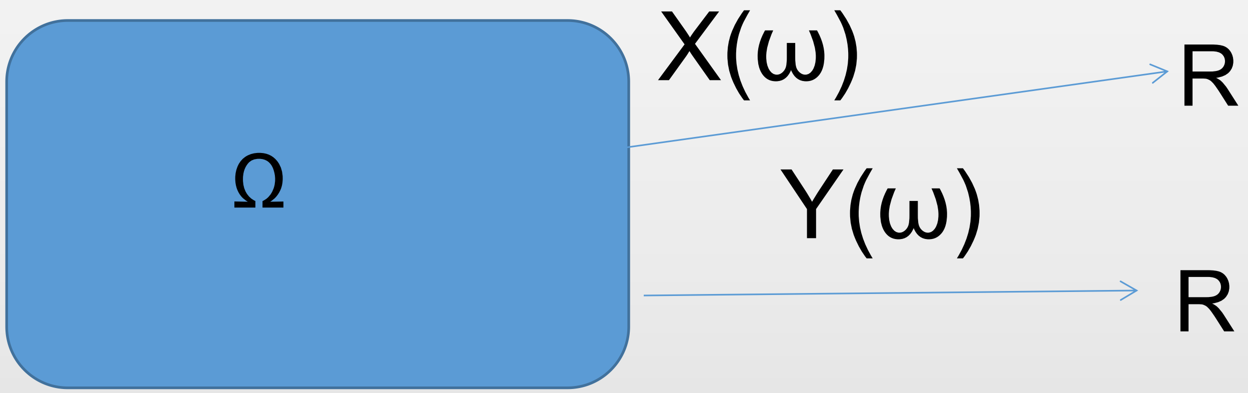
- 二维随机变量的联合分布与边际分布
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量
- 二维随机变量函数的分布
- 综合例题

§3.1 二维随机变量的联合分布与边际分布

- 二维随机变量的定义
- 联合分布函数的定义与性质
- 联合分布函数与边际分布函数的关系

二维随机变量的定义

定义1 设随机试验E的样本空间为Ω={ω}，X=X(ω)和Y=Y(ω)是定义在Ω上的随机变量，称向量(X,Y)为二维随机变量或**二维随机向量**。



联合分布函数的定义

定义 2 设(X,Y)是一个二维随机变量，对任意实数 x,y，称二元函数

$$F(x,\ y)=P(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\})\triangleq P(X\le x,Y\le y)$$

为二维随机变量$(X,\ Y)$的联合分布函数.

注:(1).若将（X,Y）看成R^2上的一个随机点，那么$F(x,y)$描述的就是随机点(X,Y)落在平面上以(x,y)为顶点的左下方无穷矩 形的概率。

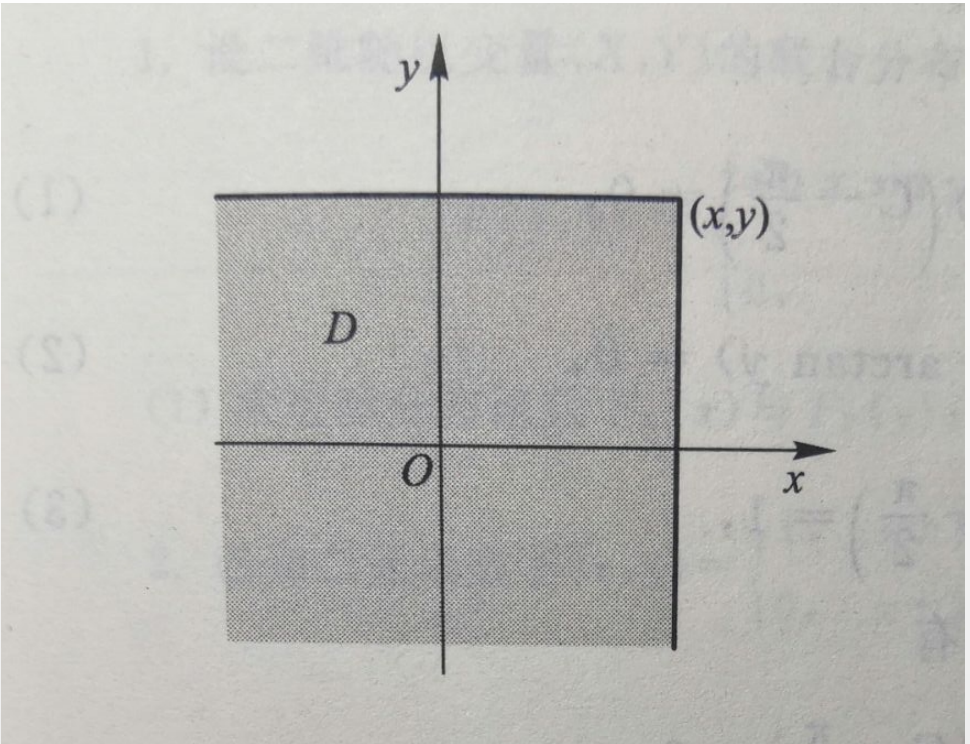


图 3－1

(2). $\forall x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$ 有

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$$

$$+ F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1)$$

(同正异负)

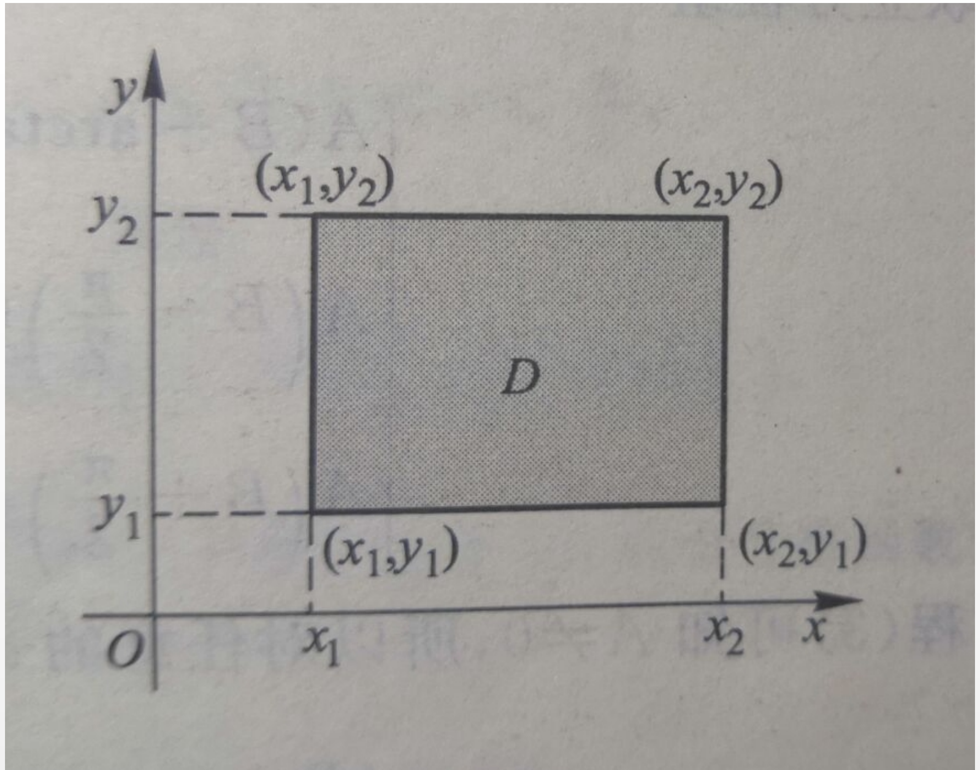


图 3 - 2

它表示随机点 (X,Y) 落在矩形区域 D 内的概率。

联合分布函数的性质

$1^\circ.F(x,y)$对 x或 y都是单调不减的函数，

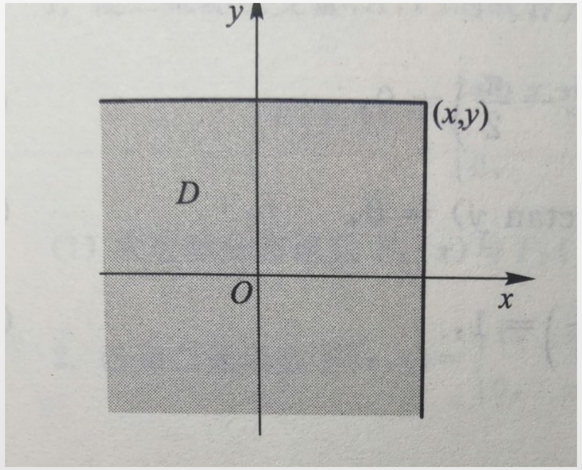
对$\forall y$,若$x_1 < x_2$,则$F(x_1,y) \le F(x_2,y)$

对$\forall x$,若$y_1 < y_2$,则$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$

$2^\circ.0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,y) = 0$,

$F(x,-\infty) = 0$, $F(-\infty,-\infty) = 0$,

$F(+\infty,+\infty) = 1$



$3^{\circ}.F(x,y)$对x和y是右连续的，

$\forall y$, 则$F(x+0,y)=F(x,y)$， $\forall x$, 则$F(x,y+0)=F(x,y)$

4°（矩形法则）$\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)$$

$$+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)\geq 0$$

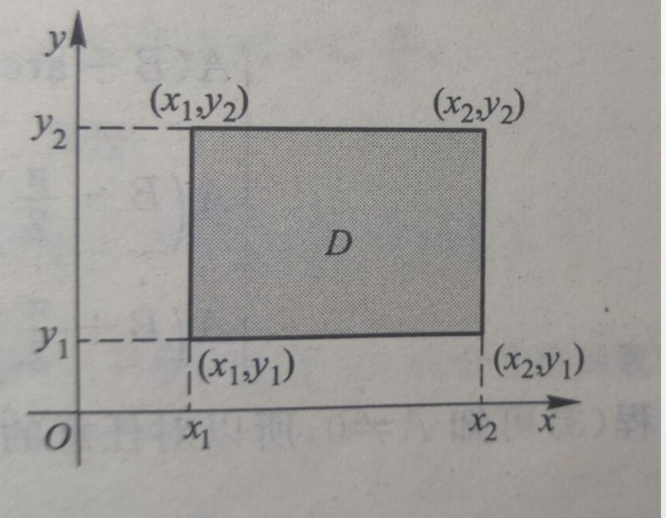


图 3－2

例1 已知二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1, & 2x+y\geq 0\\ 0, & 2x+y<0\end{cases}$,

证明$F(x,y)$不是联合分布函数。

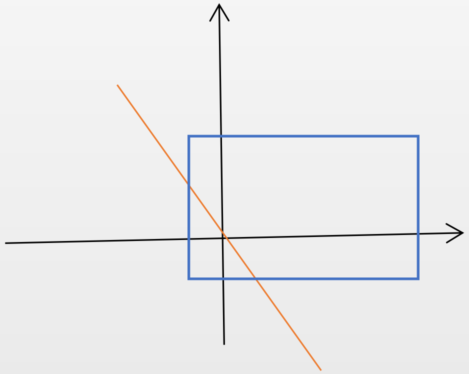
证明: 显然$F(x,y)$对x或y都是右连续的单调不减函数,

$F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0,$

$P\{x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2\}$

$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)$

$=1-1+0-1=-1$　　F(x,y)不满足矩形法则



例2 已知$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y)$,

$x,y\in R$为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，

求常数A,B,C。

解： 由$F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$,

得方程组
$$\begin{cases} A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0, \forall y \\ A(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0, \forall x \\ A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$$
解得：
$$\begin{cases} B=\frac{\pi}{2} \\ C=\frac{\pi}{2} \\ A=\frac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

即$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$.

边际分布函数

定义 3 称随机变量X的分布函数$F_X(x)$为二维随机变量(X,Y)关于X的边际分布函数。

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

定义 4 称随机变量 Y的分布函数 $F_Y(y)$为二维随机变量(X,Y)关于 Y的边际分布函数。

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$$

例3 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布函数

为$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$,

求 $P(X>1)$。

解： $F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)$

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F_X(1)$$

$$=1-\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan 1)=\frac{1}{4}$$

§3.2 二维离散型随机变量

- 二维离散型随机变量的定义
- 联合分布列的定义与性质
- 联合分布列与边际分布列的关系
- 二维离散型随机变量的独立性
- 条件分布列

二维离散型随机变量的定义

定义5. 如果随机变量X与Y都是一维离散型随机变量，则称(X，Y)为二维离散型随机变量。

例：X表示某地区在一段时间内出生的婴儿数，

Y表示该地区在这段时间内出生的男婴数，

则(X,Y)是二维离散型随机变量。

二维离散型随机变量的联合分布列的定义

定义6：设(X，Y)为二维离散型随机变量，它的所有可能取值为$(x_i, y_j),(i,j=1,2,\cdots)$，称

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots) \qquad (3.2.1)$$

为二维离散型随机变量(X，Y)的 联合分布列（律）。

联合分布列的性质

(1).非负性：$p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots$

(2).归一性：$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

边际分布列

定义7. 称随机变量X的分布列为二维随机变量(X,Y)关于X的边际分布列；称随机变量Y的分布列为二维随机变量(X,Y)关于Y的边际分布列。

$$P(X=x_i)\triangleq p_{i\bullet}=P(X=x_i,\bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j))=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

$$P(Y=y_j)\triangleq p_{\bullet j}=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X=x_i),Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

联合分布列和边际分布列的关系

Y \ X	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	$\sum_i \sum_j p_{ij}=1$

例4　设有3件正品2件次品共5件产品，从中任取两次，每次1件，分别以X和Y表示第一、第二次取到的正品个数。试分别在有放回与无放回两种情况下求(X,Y)的联合分布列与边缘分布列。

有放回

X \ Y	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
$P_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

无放回

X \ Y	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$P_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

例5 设某射手向一目标独立地进行连续射击，每次命中的概率为p，用X 表示第二次命中时的射击次数，Y 表示第三次命中时的射击次数，求(X,Y)的联合分布列，并且利用联合分布列求出X和Y的边际分布列。

解：X的可能取值为2,3，…，Y的可能取值为3,4,…，

$$P(X=m,Y=n)= C_{m-1}^{1}\cdot p^{3}\cdot q^{n-3}, \text{其中} q=1-p,$$

第n次射击时射中，前n-1次射击中有2次射中，
第m次射击时射中，前m-1次射击中恰有一次射中

其中$n=3,4,5,\cdots,m=2,3,4,\cdots n-1,$

X的边际分布列为

$$P(X=m)=\sum_{n=m+1}^{\infty}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}(m-1)p^3q^{n-3}$$

$$=(m-1)p^3\boxed{\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-3}}=(m-1)p^3\boxed{\frac{q^{m-2}}{1-q}}$$

$=(m-1)p^2q^{m-2},\quad m=2,3,4,\cdots$。

Y的边际分布列为

$$P(Y=n)=\sum_{m=2}^{n-1}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{m=2}^{n-1}(m-1)p^3q^{n-3}$$

$$=p^3q^{n-3}\boxed{\sum_{m=2}^{n-1}(m-1)}=C_{n-1}^2p^3q^{n-3}$$

$$1+2+\cdots+(n-2)$$
$$=\frac{1+(n-2)}{2}(n-2)$$

$n=3,4,\cdots$。

例6　已知X和Y的边际分布列均为$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,

且$P(XY=0)=1$, 试求(X,Y)的联合分布列。

X \ Y	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$?	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

二维离散型随机变量的独立性

定义8. 若二维离散型随机变量 的联合分布列与边际分布列满足

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, i, j = 1,2,\cdots \qquad (3.2.2)$$

则称X与Y是相互独立的。

$$\frac{P_{ij}}{P_{ij+1}} = \frac{P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j}}{P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j+1}} = \frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot j+1}},$$

任意两列成比例

任意两行成比例

例 7. 设(X,Y)的联合分布列为

Y / X	1	2	3	$p_{i.}$
1	1/18	1/9	1/6	1/3
2	α	β	γ	2/3

且X与Y相互独立，求α，β，γ.

解：因为 X 与Y相互独立，所以 $\dfrac{P_{ij}}{P_{i+1\,j}} = \dfrac{P_{i\cdot}}{P_{i+1\cdot}}$，

$$\frac{\frac{1}{18}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{9}}{\beta} = \frac{\frac{1}{6}}{\gamma} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}, \quad \alpha = \frac{1}{9}, \quad \beta = \frac{2}{9}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

二维离散型随机变量的条件分布列

定义9. 若 $P(X = x_i) = p_{i\bullet} > 0$,则称

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \quad j = 1,2,\cdots$$

为 $X = x_i$ 条件下 Y 的条件分布列。

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j \mid X = x_i)$$

例 8. 设在某医院每天出生的婴儿总数$X \sim P(14)$,
其中出生婴儿为男婴的概率为0.51，以Y表示
每天在该医院出生的男婴个数，

求（1).(X, Y)的联合分布列；

(2). Y 的边际分布列

(3).条件分布列 $P(X = n \mid Y = m)$。

解： (1).在X =n的条件下，男婴个数Y~B(n,0.51),

即$P(Y=m \mid X=n)=C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m} \quad m=0,1,2,\cdots,n$

$$P(X=n)=\frac{14^n}{n!}e^{-14}, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$P(X=n，Y=m)=P(X=n)P(Y=m \mid X=n)$$

$$=\frac{14^n}{n!}e^{-14} \cdot C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m}$$

$$=\frac{(14\times 0.51)^m (14\times 0.49)^{n-m}}{m!\cdot(n-m)!}e^{-14}$$

$$= \frac{7.14^m \cdot 6.86^{n-m}}{m! \cdot (n-m)!} e^{-14}, \quad n = 0,1,2,\cdots, \qquad m = 0,1,2,\cdots,n$$

$$(2).P(Y=m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(X=n, Y=m)$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{7.14^m \cdot 6.86^{n-m}}{m! \cdot (n-m)!} e^{-14}$$

$$= e^{-14} \frac{7.14^m}{m!} \boxed{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}} = e^{-14} \frac{7.14^m}{m!} \cdot e^{6.86}$$

$$=\frac{7.14^m}{m!}\cdot e^{-7.14},\qquad m=0,1,2,\cdots。$$

$$(3).P(X=n\mid Y=m)=\frac{P(X=n,Y=m)}{P(Y=m)}$$

$$=\frac{\dfrac{7.14^m\cdot 6.86^{n-m}}{m!\cdot(n-m)!}e^{-14}}{\dfrac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}}=\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6.86},$$

$$n=m,m+1,m+2,\cdots.$$

§3.3 二维连续型随机变量

- 二维连续型随机变量的定义
- 二维连续型随机变量的联合密度
- 二维连续型随机变量的边际密度
- 两种常见的二维连续型分布
- 二维连续型随机变量的条件密度函数
- 二维连续型随机变量的独立性

二维连续型随机变量的定义

定义9.设 F(x,y)是二维随机变量(X,Y)的联合分布函数,若存在非负二元函数f(x,y),使得对任意的x,y∈R,总有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dv \qquad (3.3.1)$$

则称(X,Y) 为二维连续型随机变量,

称f(x,y)为(X,Y)的联合概率密度函数。

注: (1) F(x,y)是二元连续函数。

联合密度函数f(x,y)的性质:

（1）非负性：f(x,y) ≥0

(2)归一性：$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$$

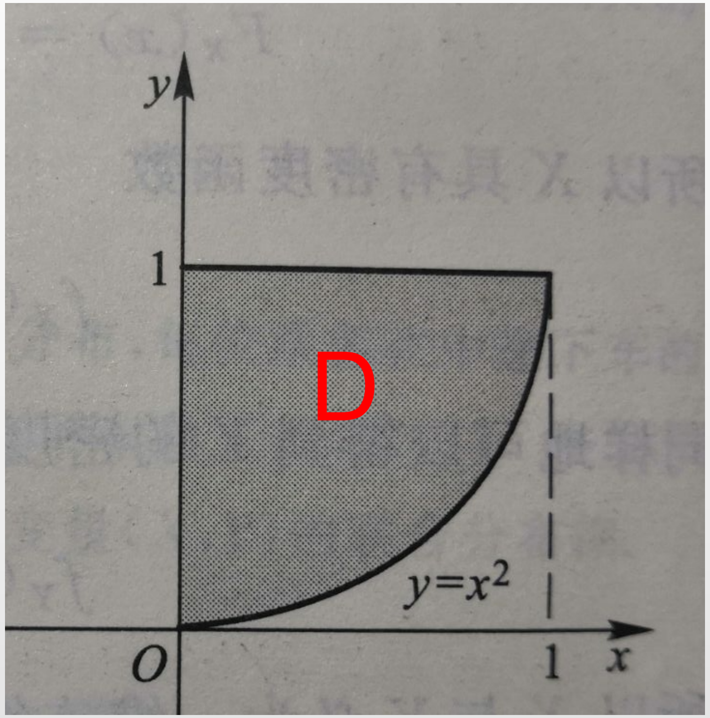
(3).设G是xoy平面上的区域,点(X,Y)落在区域G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy \qquad (3.3.2)$$

(4).若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$。

例1 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, 0<x<1, x^2<y<1\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$$



其中A>0为常数，试求:

(1) 常数A； (2) P(X>Y)；

(3).$P(Y>\frac{1}{2}\mid X>Y)$。

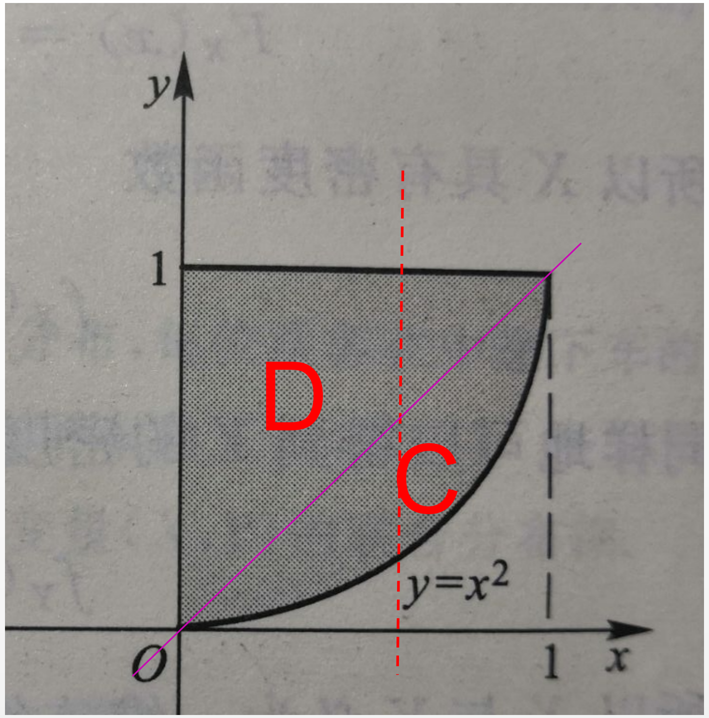
解： (1).由归一性得 $\iint\limits_D Axydxdy=1$

一投二穿

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 Axydy$$

$$=\int_0^1 Ax\cdot\frac{1-x^4}{2}dx$$

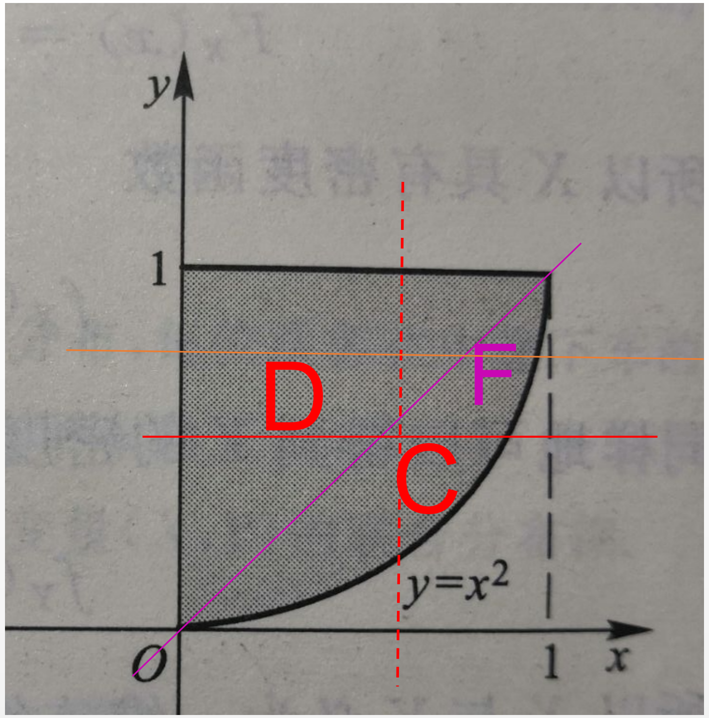
$$=A\cdot\frac{1}{6},\quad A=6$$



(2). $P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy=\iint\limits_C 6xydxdy$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 6xydy$$

$$= \int_0^1 3x \cdot (x^2 - x^4)dx = \frac{1}{4},$$



(3). $P(Y > \frac{1}{2} \mid X > Y)$

$$= \frac{P(Y > \frac{1}{2}, X > Y)}{P(X > Y)} = \frac{\frac{11}{64}}{\frac{1}{4}} = \frac{11}{16}$$

$$P(Y > \frac{1}{2},\ X > Y) = \iint_F 6xydxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_y^{\sqrt{y}} 6xydx = \frac{11}{64},$$

边际密度函数

如果二维随机变量(X,Y)是连续型的，X的边际分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x} du \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv}$$

这表明X也是连续型随机变量，其密度函数为

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad (3.3.3)}$$

类似的， Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx \qquad (3.3.4)$$

例1 (续)设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} 6xy, 0<x<1, x^2<y<1 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$$

试求：(4). X与Y的边际密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$。

解： (4).r.v.X的取值范围为(0,1),

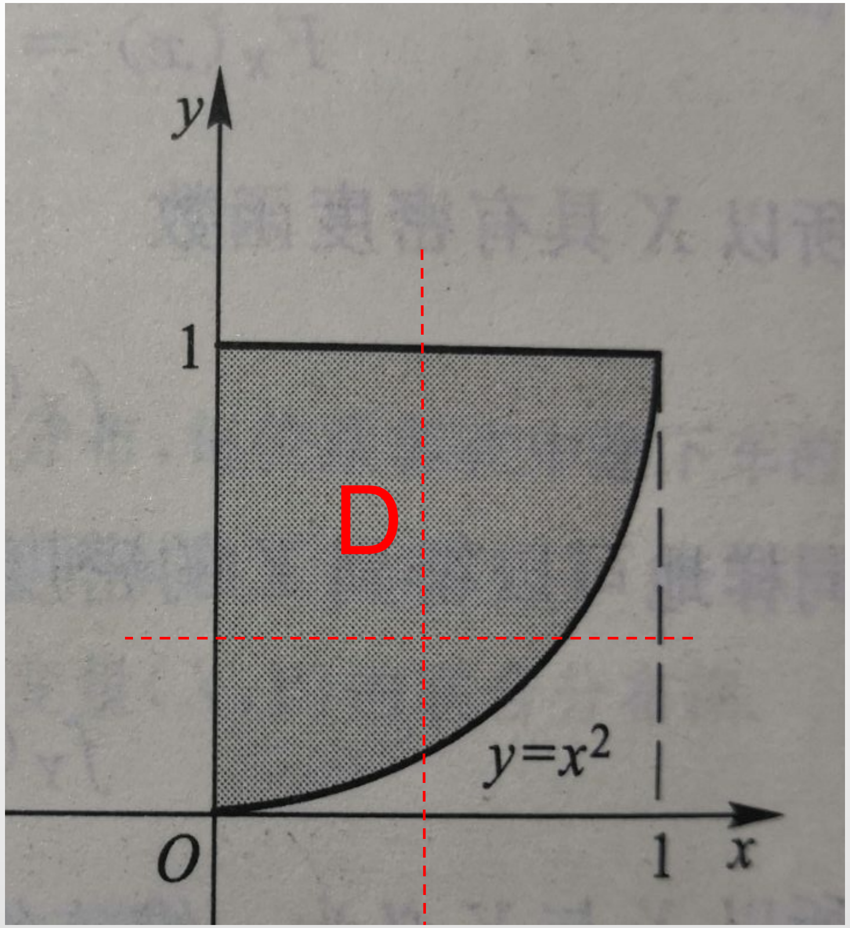
当$0<x<1$时,

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{1}6xydy=3x(1-x^4),$$

$$f_X(x)=\begin{cases}3x(1-x^4), & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

r.v.Y的取值范围为(0,1),

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_0^{\sqrt{y}}6xydx$



$$=3y^2,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, 0<y<1,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

两种常见的二维连续型分布

二维均匀分布

定义2. 设D为平面上有面积的区域，其面积为S_D，

若二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D},(x,y)\in D\\0,\quad\text{其他}\end{cases}\qquad(3.3.5)$$

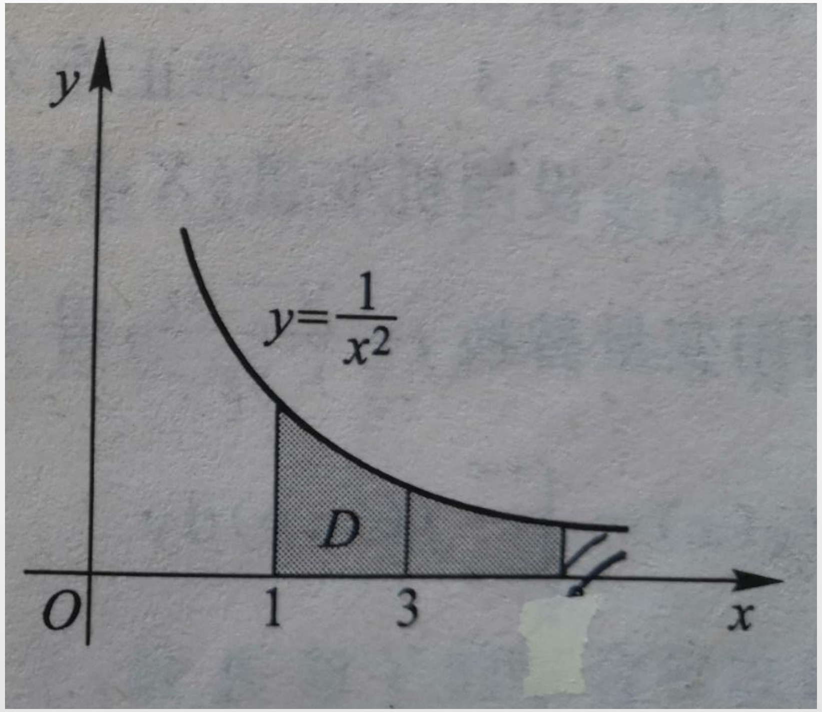
则称(X,Y)服从区域D上的二维均匀分布。

例2 设平面区域D由曲线$y=\frac{1}{x^2}$及直线$x=1$，$y=0$所围成，二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布。求

(1).(X,Y) 的联合密度函数

(2).X与Y的边际密度函数

$f_X(x)$与$f_Y(y)$。



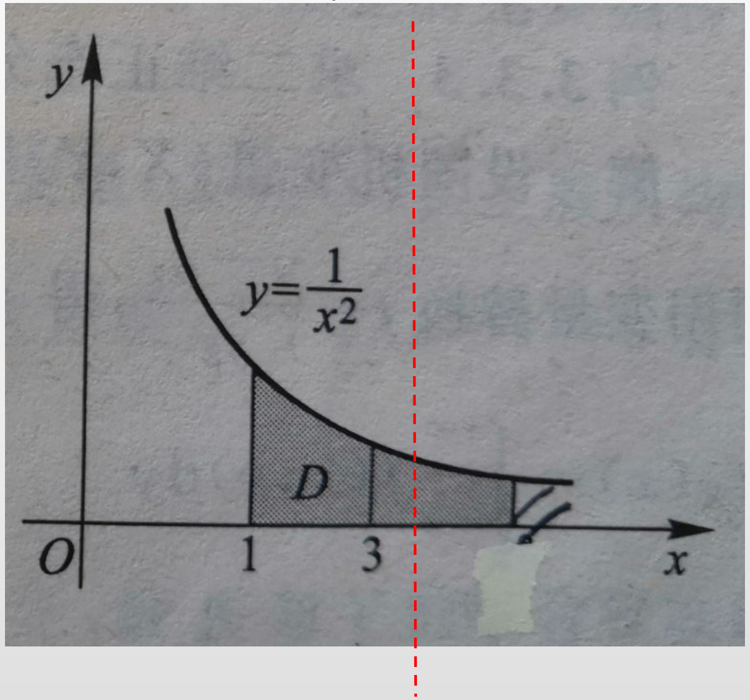
解： （1） $\because S_D=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$

（X,Y）的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$

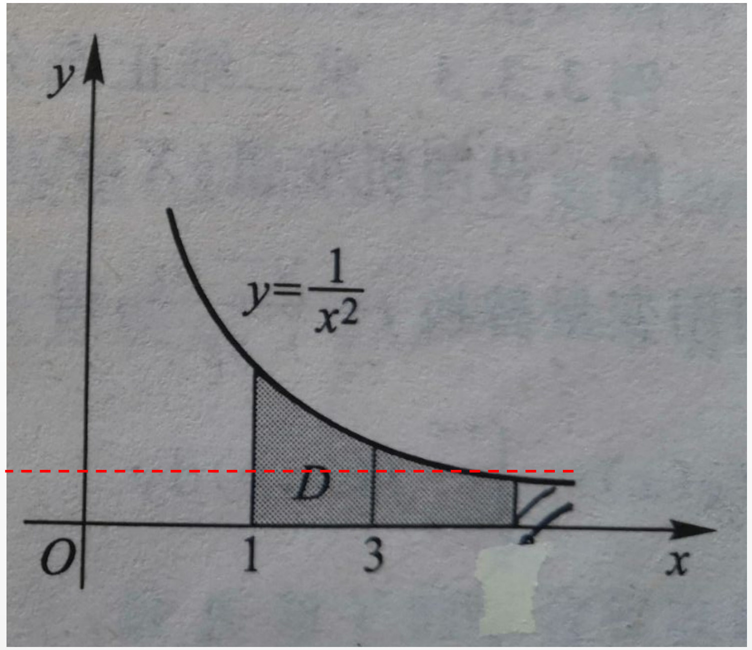
（2）r.v.X的取值范围为$[1,+\infty)$,

当$1<x<+\infty$时,

$$f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x^2}}1dy=\frac{1}{x^2}$$



$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, 1<x<+\infty,\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$



r.v.Y的取值范围为(0,1],

当$0<y<1$时,

$$f_Y(y)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{y}}} 1dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y}}-1,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}-1, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

二维正态分布

定义3 二维若随机变量 (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$\mu_1,\mu_2\in R,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1,$$

称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$的二维正态分布，

记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。

例 3 二维 $r.v.(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$，

求边际分布 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}dy$$

$$\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)t}{\sigma_1}+t^2]\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[t-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}]^2\}dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[t-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}]^2\}dt}$$

$$\boxed{X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).}$$