4）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\quad (\text{其中}\lambda>0\text{为常数})$$

则称随机变量 X 服从参数为λ的泊松（ Poisson ）分布.记为： $X\sim P(\lambda)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

泊松分布的应用：单位时间内出现的次数（一天收到电话次数，商场一天的顾客数），稀有事件发生次数（每年发生洪水次数），显微镜下某区域中的细胞数量等。

例　已知 $X \sim P(\lambda)$, 问 k 取何值时 $P(X=\mathrm{k})$ 最大？最大值是多少？

$$\boxed{P(X=k-1)\le} P(X=k) \boxed{\ge P(X=k+1)}$$

$$k \le \lambda \Longleftarrow \boxed{\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} \le} \boxed{\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}} \boxed{\ge \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}} \Longrightarrow \lambda \le k+1$$

$$\Longrightarrow \lambda-1 \le k \le \lambda$$

总结 $\begin{cases} \text{当 } \lambda \text{ 为整数值时，} k=\lambda\text{，}\ \lambda-1 \\ \text{当 } \lambda \text{ 为非整数值时，} k=\lceil \lambda \rceil \end{cases}$

Poisson 定理:

已知 $X_n \sim B(n, \quad p_n)$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda, (\lambda > 0)$

则有 $$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明: 令 $np_n = \lambda_n,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n{}^k}{k!} \bullet \frac{n}{n} \bullet \frac{n-1}{n} \cdots\cdots \bullet \frac{n-k+1}{n} \bullet \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

上述定理表明当 n很大, p很小$(np \le 5)$时有如下近似式

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (其中\lambda = np).$$

Poisson 定理表明：当n很大，p很小时，二项分布 $B(n,\ p)$ 可以用泊松分布 $P(np)$ 来近似。 此结论常用于二项分布概率的近似计算。

例　　在一个盒中装100支签，含10支好签，从盒中有放回随机取出30支。求至少取到两只好签的概率。

解：　设取到好签的个数为 X ,则 $X \sim B(30, 0.1)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{P(3)}$

$P(X \geq 2)$ =0. 8 $\Longrightarrow$ 0. 9

如果要是这个概率达到0.9，至少需加进多少只好签？

$$X \sim B(30, \frac{10+a}{100+a}) \Longrightarrow \boxed{P(\frac{30(10+a)}{100+a})}$$

$$P(X \geq 2) \geq 0.9 \Longrightarrow \lambda = \frac{30(10+a)}{100+a} \geq 4$$

$$\Downarrow$$

$$a = 5 \Longleftarrow a \geq 4.13$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

5）几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1, 2, \cdots) \quad (\text{其中}0<p<1\text{为常数})$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布（ Geometric ）. 记为：$X \sim G(p)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

※ 独立重复试验中，首次成功次数的分布律

在多次重复的伯努利试验中，试验一直进行到某种结果第一次出现为止，此时试验的总次数服从几何分布

例 某射手向一目标独立地进行连续射击，每次命中的概率都是p，以X表示首次命中时的射击次数，则X的分布律为：

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1, 2, \cdots)$$ 也即$X \sim G(p)$

几何分布的无记忆性

设*X*服从参数为*p*的几何分布，则对任何正整数*m*,*n*，都有：

$$P(X>n+m|X>m)=P(X>n)$$

证明： 已知 $X \sim G(p)$ 　X 的分布律为$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$

$$P(X>n+m|X>m)=P(X>n)$$

$$\frac{P(X>n+\mathrm{m})}{P(X>m)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^{m}} = (1-p)^{n}$$

$$P(X>m)=\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\,\frac{(1-p)^{m}}{1-(1-p)} = (1-p)^{m}$$

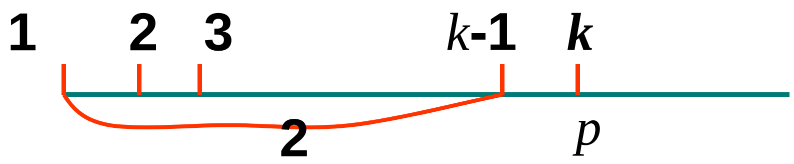
理解：

$\{X>n\}$ 表示首次命中时的射击次数次数$X>n$次，也即前n次都没有命中

$P(X>n+m|X>m)=P(X>n)$ 表示在已知前*m*次没有命中的条件下，再射击*n*次也没有命中的概率等于前n次射击没有命中的概率，相当于前m次没有命中的信息被遗忘了。

例 某人向一个目标独立射击，每次击中的概率都是 0.6，直到第 3 次击中目标时就停止射击。设停止射击时的射击次数为 X，求 X 的分布律

解 $\boldsymbol{X}$ **的可能取值为：** $3,4,5,\cdots$



$$P(X=k)=0.6\ C_{k-1}^{2}0.6^{2}(1-0.6)^{k-3}\quad k=3,4,5,\cdots$$

按照上述规则，假设这个人连续进行了10组实验，求恰有两组射击次数不超过5次的概率

$$P(X\le 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=0.6^{3}+C_{3}^{2}0.6^{3}\times 0.4+C_{4}^{2}0.6^{3}\times 0.4^{2}\ \mathbf{=0.68}$$

设$\boldsymbol{Y}$表示**10**组实验中射击次数不超过**5**次的组数

则 $Y\sim N(10,0.68)$

$$P(Y=k)=C_{10}^{k}0.68^{k}(1-0.68)^{10-k}\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

求出$P(Y=2)$即可