デジタル信号処理

第5回　周波数解析

立命館大学
情報理工学部
李　亮

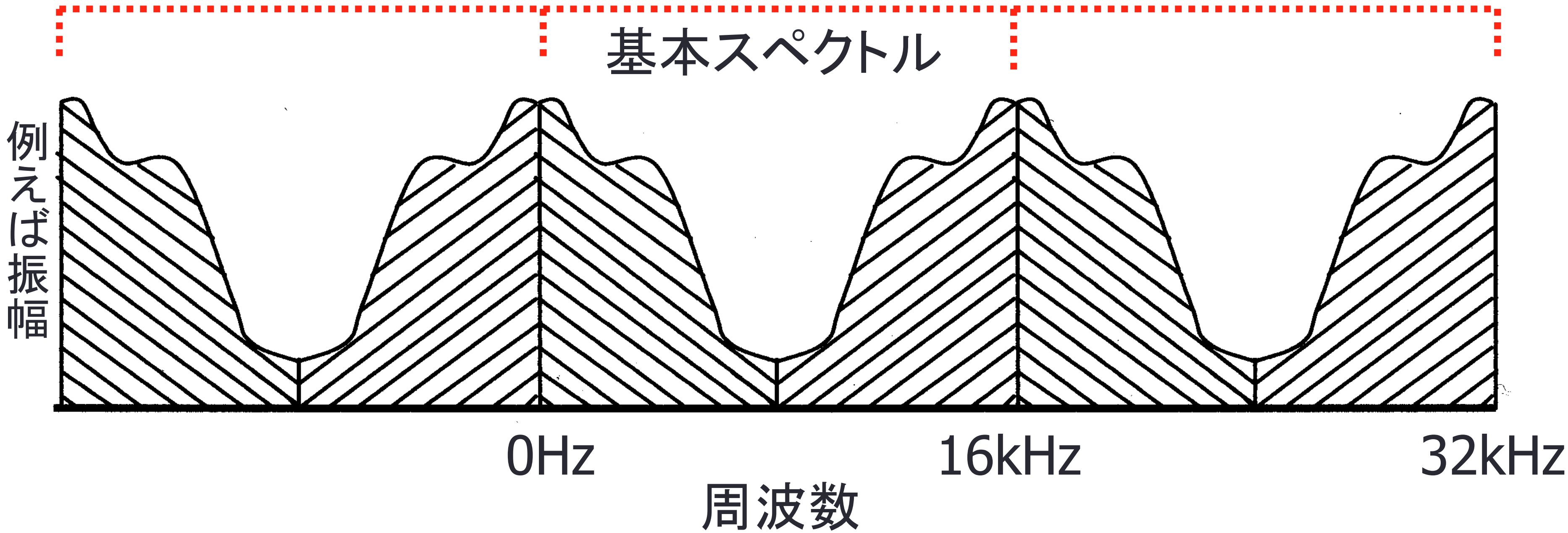
今回の講義内容

- 【復習】前回講義の復習
  - 周波数領域信号について
  - フーリエ級数展開
  - スペクトル表記など

- 周波数解析（スペクトル解析）
  - スペクトルの特徴
  - 離散フーリエ変換

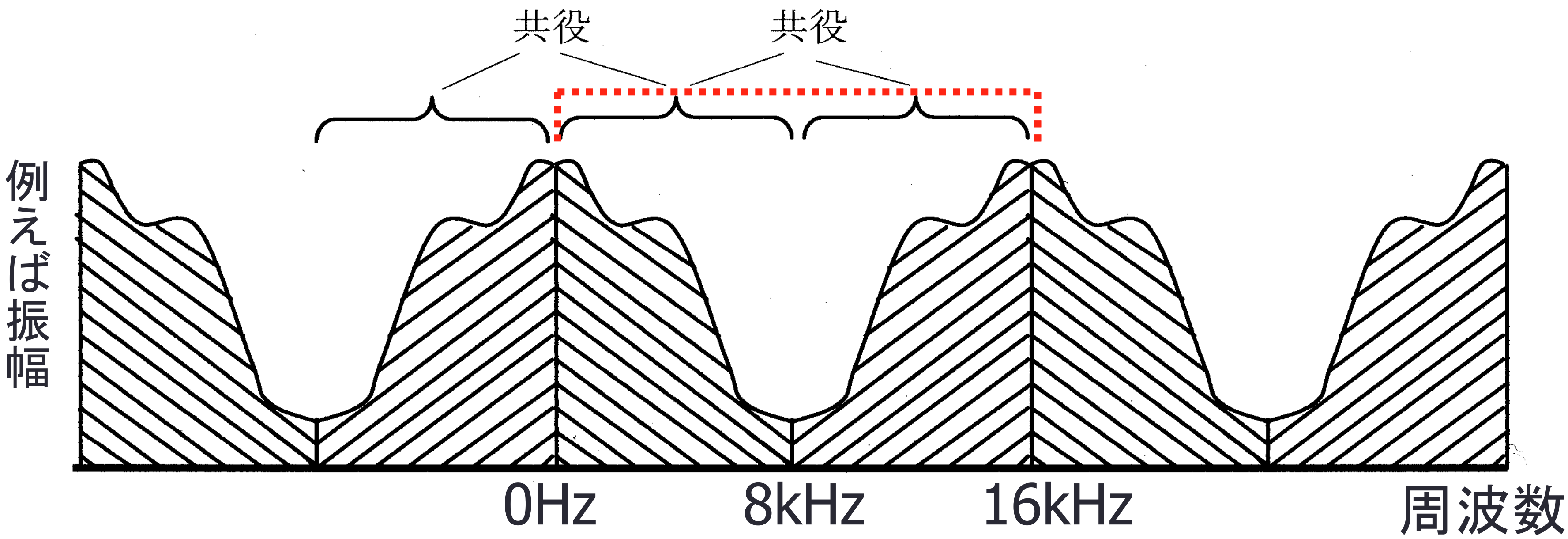
スペクトルの特徴(1)

- 周期性
  - 離散時間信号のスペクトルは周期性を持つ
  - 例えば、標本化周波数(f_s)が16kHzの信号のスペクトルは、基本スペクトル(0Hz-16kHz)に基づく周期を持つ
    - 振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルとも周期性を持つ



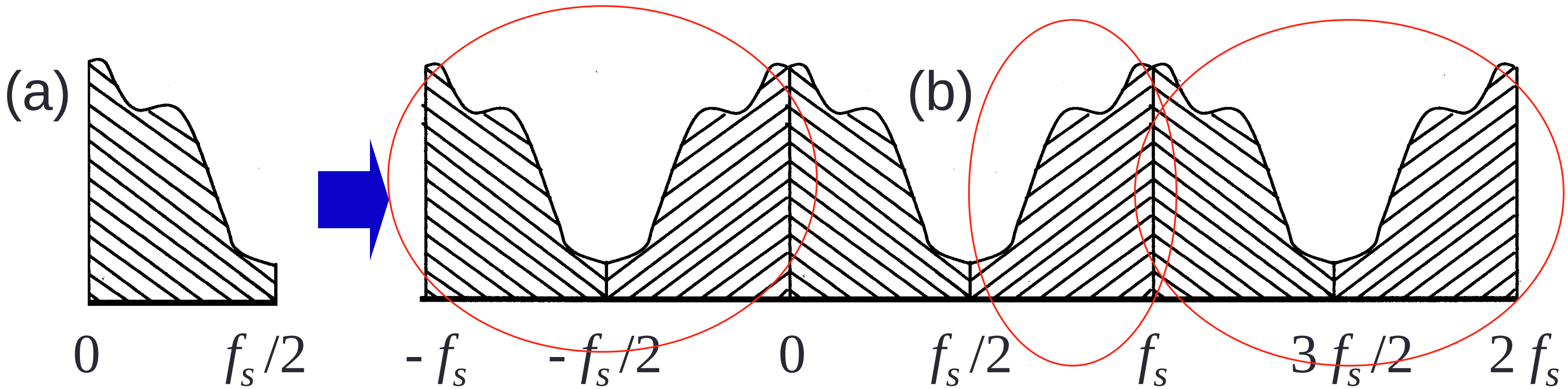
スペクトルの特徴(2)

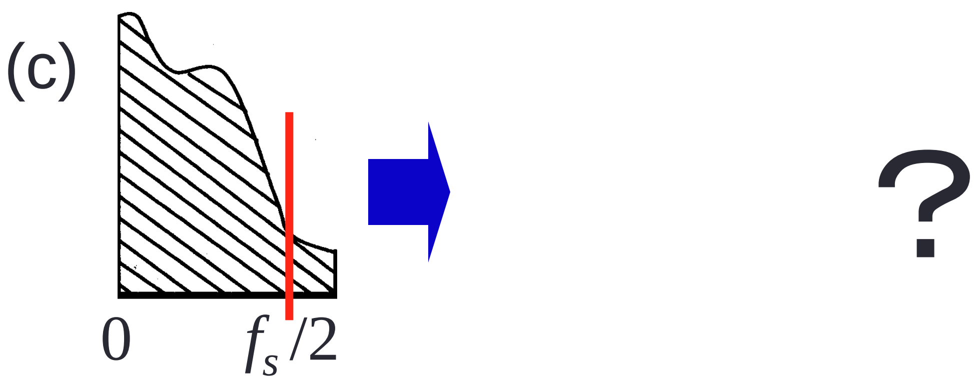
- 対称性
  - 離散時間信号のスペクトルは対称性を持つ
  - 例えば、標本化周波数 f_s が16kHzである信号のスペクトルは、8kHz (f_s /2)を境に対称となる
    - 振幅スペクトル、パワースペクトル、は8kHz(f_s /2)を中心に折り返し
    - 位相スペクトルは8kHz (f_s /2)を中心に折り返し、正負を反転した対称性を持つ



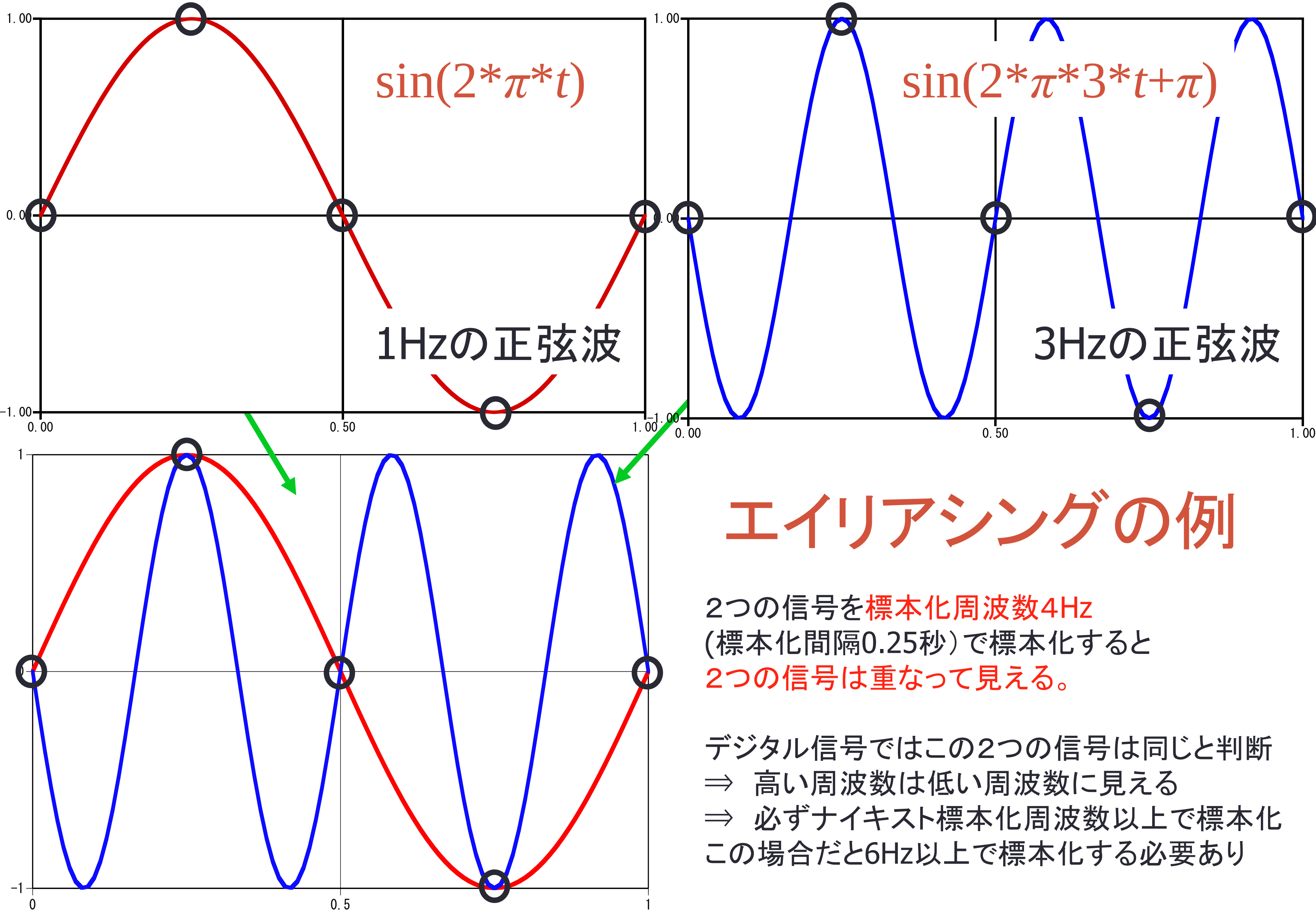
演習課題（1/4）

- 例のように、もとの信号のスペクトル(a)が標本化周波数(f_s)の1/2以下であれば、周期性と対称性はスペクトル(b)のように表せる。では、もとの信号のスペクトルが図(c)のように標本化周波数(f_s)の1/2以上だとすると周期性と対称性を考慮したスペクトルはどのように表せるか？ 図(b)を参考に図示せよ。





ヒント：エイリアシングを
周波数軸上で考えれば．．．



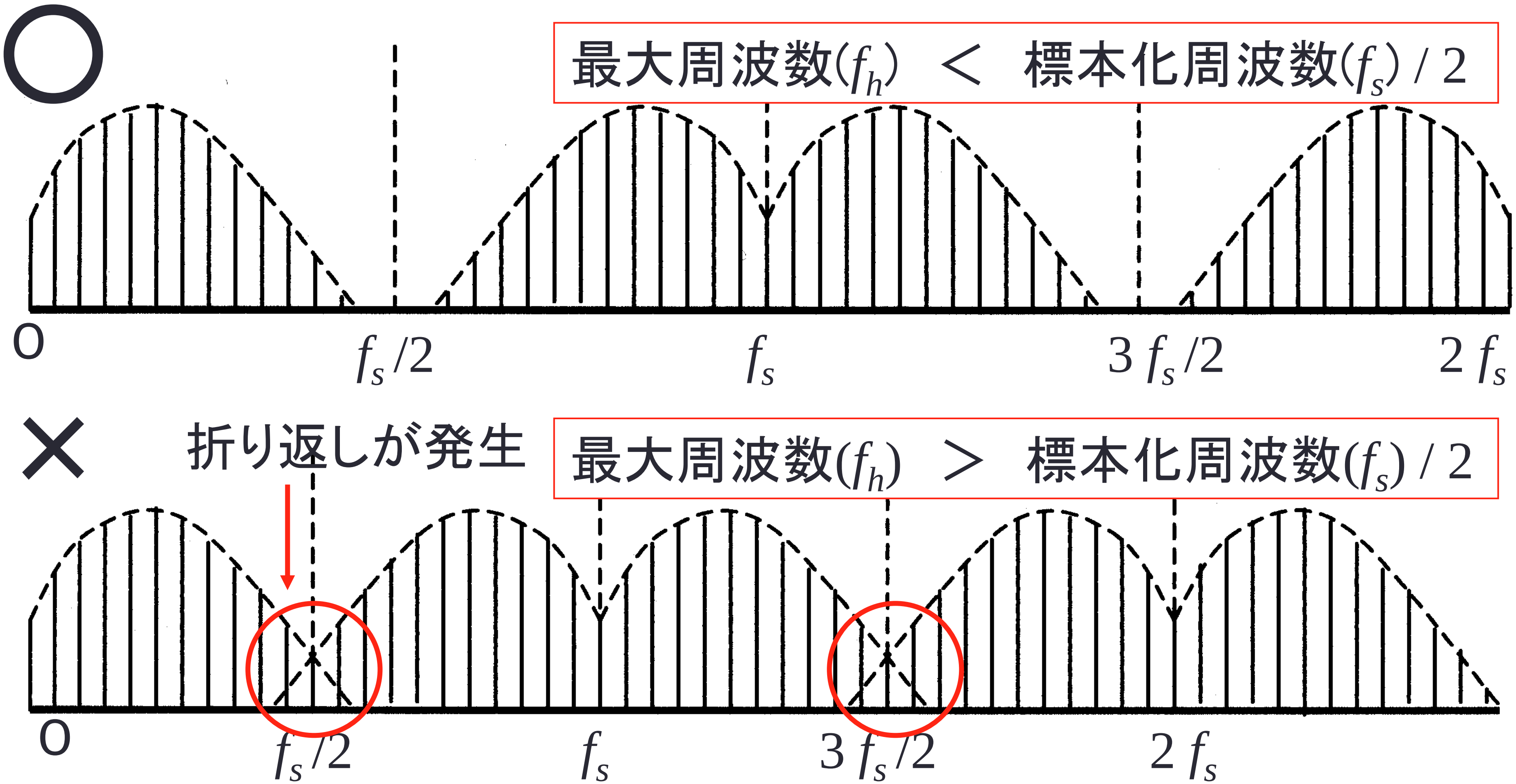
エイリアシングの例

2つの信号を標本化周波数4Hz
(標本化間隔0.25秒)で標本化すると
2つの信号は重なって見える。

デジタル信号ではこの2つの信号は同じと判断
⇒　高い周波数は低い周波数に見える
⇒　必ずナイキスト標本化周波数以上で標本化
この場合だと6Hz以上で標本化する必要あり

スペクトルの特徴(3)

- スペクトル上でのエイリアシング
  - アナログ信号の最大周波数(f_h)と標本化周波数(f_s)の関係



エイリアシング対策

- エイリアシングを回避するために、
  - 必ずアナログ信号からデジタル信号に変換するときは、

$$f_s \geqq 2 f_h$$

を厳守する。

  - 予め標本化周波数 f_s が決まっている場合は、
    - アナログ信号に対してフィルタ処理（後半の講義で説明予定）を行い、アナログ信号の最大周波数 f_h が標本化周波数の1/2以下になるように不要な周波数を除去する。
    - これにより、エイリアシングは回避可能
    - 一般的な音楽のレコーディングでは、音楽CDの標本化周波数 f_s が44,100Hzと決まっているので、レコーディングした音響信号に対してフィルタ処理を行い、最大周波数 f_h が22,050Hz以下になるように不要な周波数を除去して音楽CDを製作している。

演習課題(2/4)

- A君は音楽CD(標本化周波数44,100Hz)を製作しようとしています。しかしながら、エイリアシング問題を考慮せずに(フィルタ処理なしに)レコーディングを行ったため、音響信号(アナログ信号)の最大周波数が25,000Hzになってしまいました。
  - このまま音響信号(アナログ信号)を44,100Hzで標本化して、音楽CDとして再生するとどうなるか?
  - 音響信号(アナログ信号)を44,100Hzで標本化した後に、フィルタ処理により、22,050Hz以上の信号を除去して、音楽CDを再生するとどうなるか?
  - 音響信号(アナログ信号)に対して22,050Hz以上の信号を除去するフィルタ処理を行った後に、44,100Hzで標本化して音楽CDを再生するとどうなるか?

ヒント:エイリアシングはどの時点で発生するかよく考えてください

離散フーリエ変換とは

- Discrete Fourier Transform (DFT)
- フーリエ級数展開に基づく周波数解析法
  - フーリエ級数展開：（連続信号を仮定）
    - すべての周期関数はsinとcosで表現可能

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}}$$

  - 離散フーリエ変換：（離散信号を仮定）
    - 基本スペクトル（0Hz～f_s）の解析

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

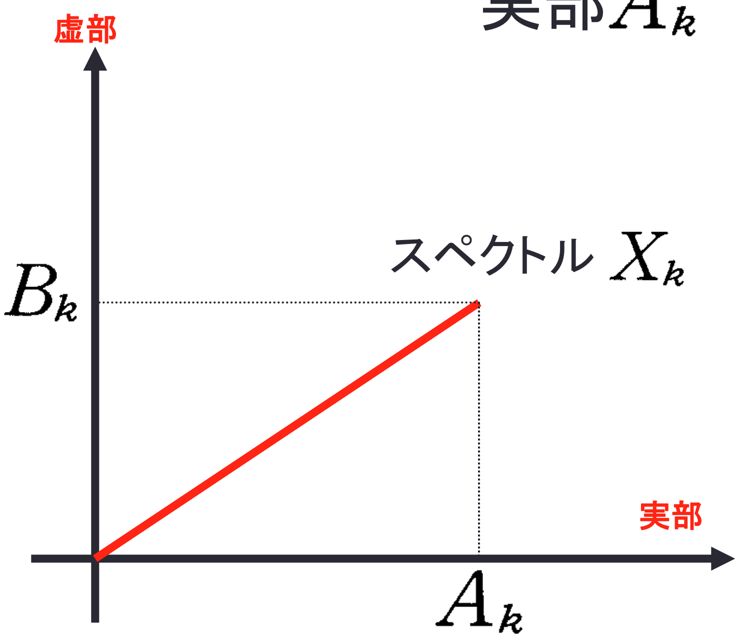
離散信号と回転子の内積の和でスペクトル解析可能

離散フーリエ変換

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

離散信号と回転子の内積の和で
スペクトル解析可能

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$



離散フーリエ変換の式からも
スペクトルは必ず複素領域でないと
表現できないことがわかる。

離散フーリエ逆変換

- 離散フーリエ変換：
  - 離散信号からスペクトルへ変換

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

- 離散フーリエ逆変換
  - スペクトルから離散信号へ変換

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

基本的には1/Nする以外は計算手順は同じ。また教科書によっては離散フーリエ変換で1/Nする場合もあるが、その場合は逆変換で1/Nは行わない

離散フーリエ変換におけるスペクトル表記

- 離散フーリエ変換

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

離散信号と回転子の内積の和で
スペクトル解析可能

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$

振幅スペクトル

$$|X_k| = \sqrt{{A_k}^2 + {B_k}^2}$$

パワースペクトル

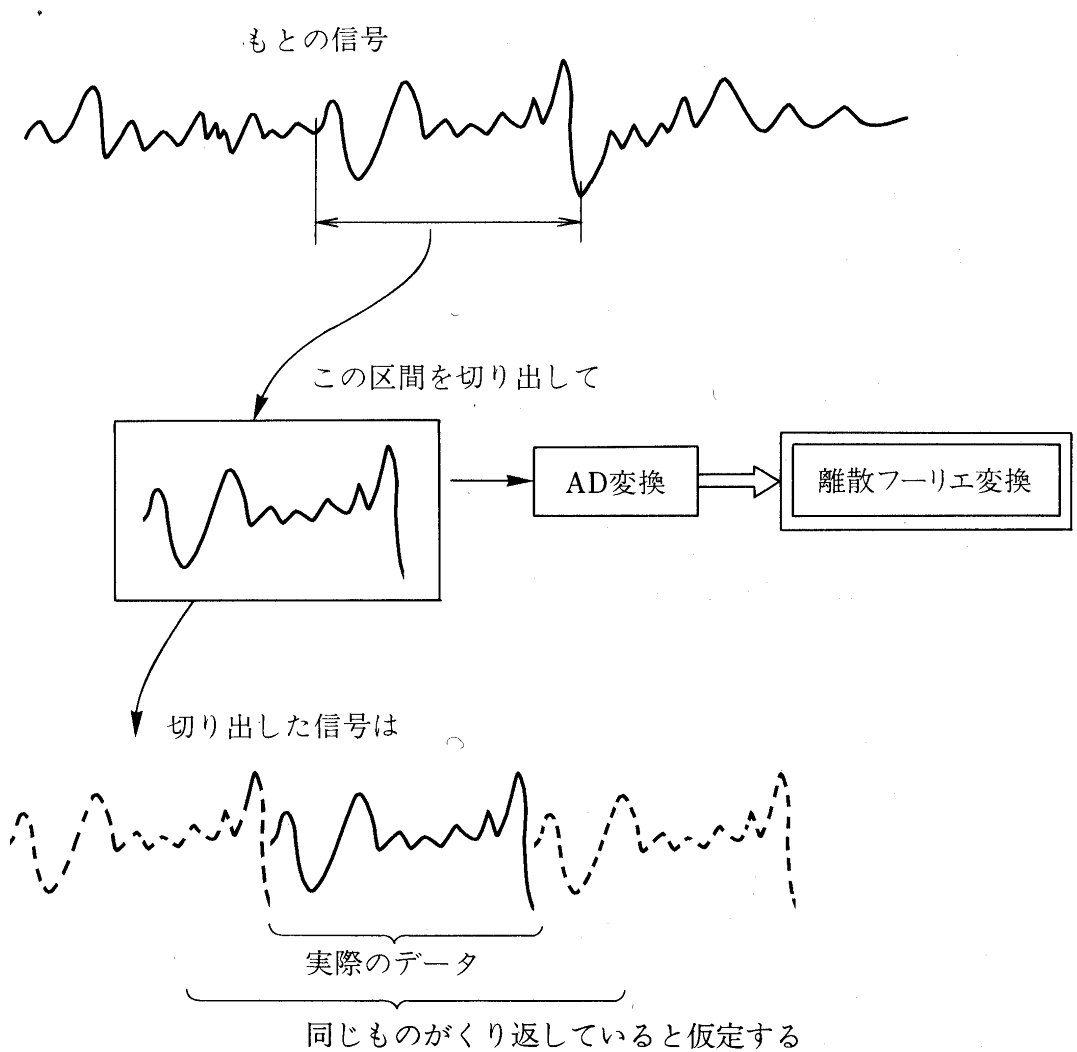
$$|X_k|^2 = {A_k}^2 + {B_k}^2$$

位相スペクトル

$$\arg(X_k) = \tan^{-1}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

離散フーリエ変換の性質(1)

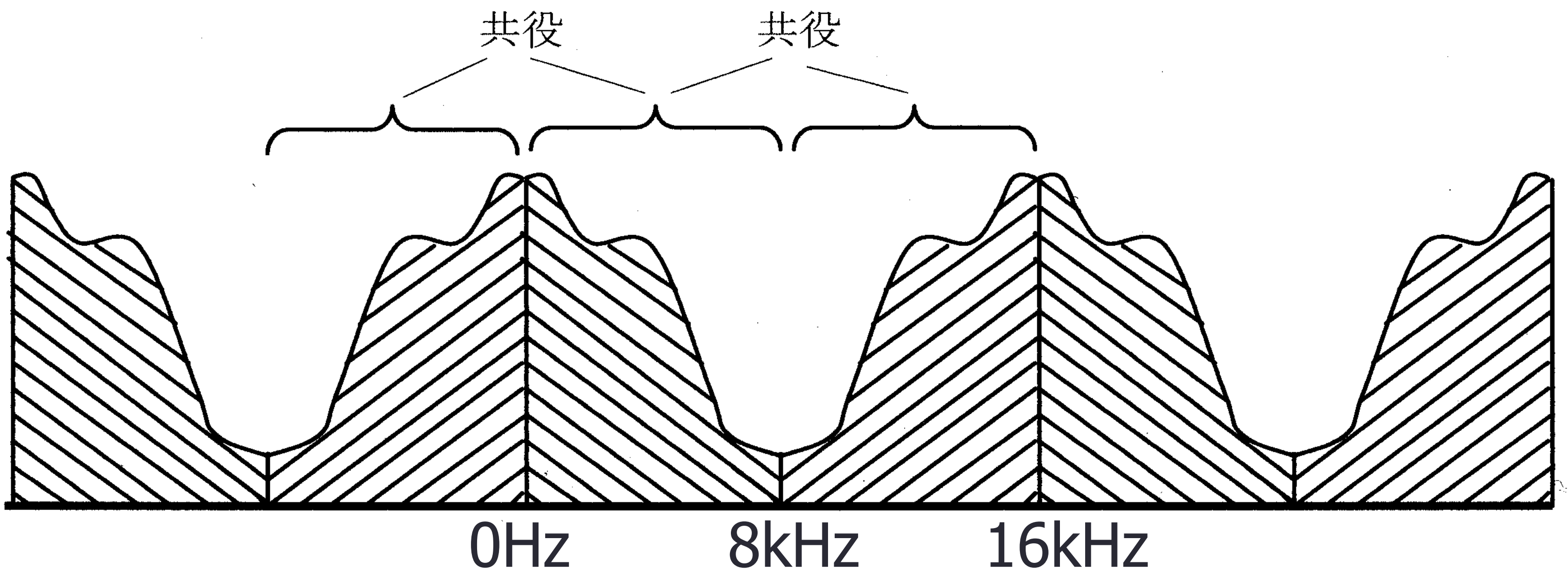
- 周期信号を仮定した変換
  - 離散フーリエ変換は有限長の信号を変換
  - 切り出した信号が繰り返している(周期信号である)と仮定してスペクトルに変換
  - よって非周期信号に対して離散フーリエ変換を行う場合には注意が必要。(実際の信号とは異なったスペクトルになる可能性あり)



離散フーリエ変換の性質(2)

- 離散フーリエ変換のスペクトルは
  - 周期性
  - 対称性

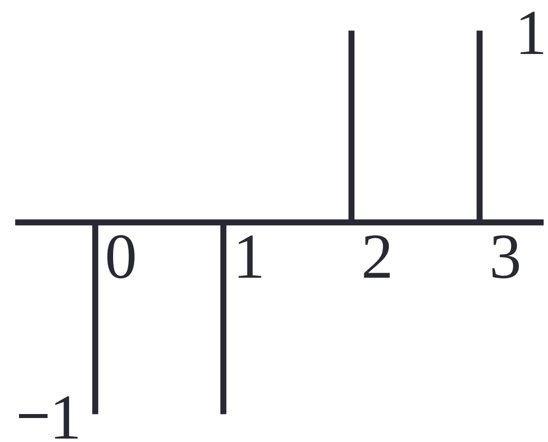
を持つ。(講義資料で説明したとおり)



演習課題(3/4)

- 周期性離散時間信号 x_n の1周期(N=4)が下記の式で表せるとき、周波数解析を離散フーリエ変換を用いて行え

$$
x_n = \begin{cases} -1 & (n = 0,1) \\ 1 & (n = 2,3) \end{cases}
$$



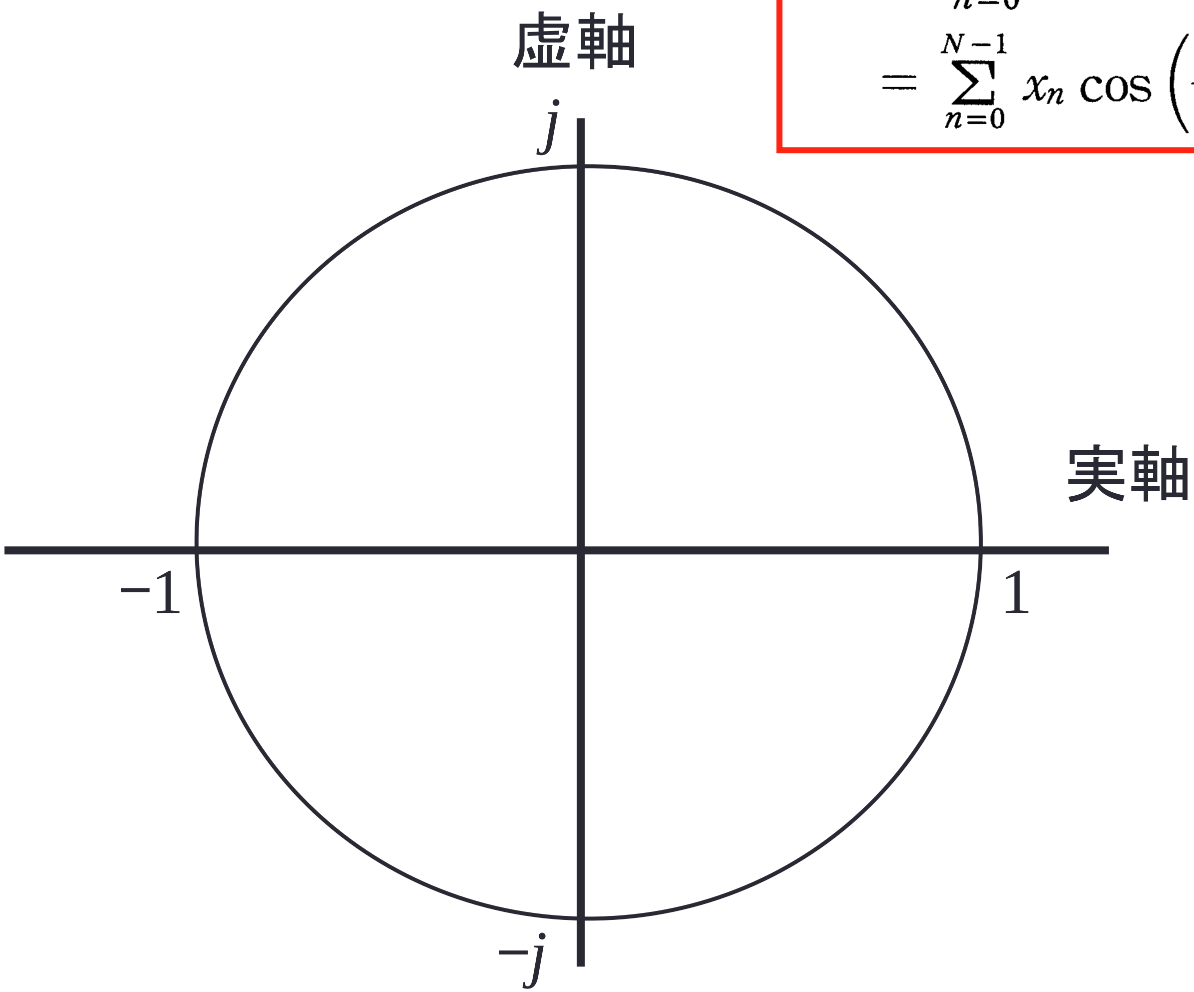
ヒント：　離散フーリエ変換の式に上記値を代入して計算するだけ(答えは複素数になることに注意！)

$$
X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)
$$

演習課題(3/4) 大ヒント

- 複素数

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$



exp(0) = 1
exp($-j\ \pi/2$) = $-j$
exp($-j\ \pi$) = -1
exp($-j\ 3\pi/2$) = j

演習課題(4/4)

- 演習課題(3/4)のスペクトル解析結果を基に、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。(横軸は周波数もしくは k の値とする。)

$X(0) = 0 - j0$　　$X(1) = -2 - j(-2)$

$X(2) = 0 - j0$　　$X(3) = -2 - j2$

ヒント：　離散フーリエ変換式は下記のように分解できる。
よって振幅スペクトルは？パワースペクトルは？　位相スペクトルは？

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$