

数值分析模拟题

一. 选择题

1. 已知 $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$ 的三个近似值分别为 $x_1 = 1.73$, $x_2 = 1.7321$, $x_3 = 1.7320$, 这些近似数各有几位有效数字?

- A. 3, 5, 5
- B. 2, 5, 5
- C. 3, 5, 4
- D. 3, 4, 5

2. 用二分法解方程 $2x^3 - 5x - 1 = 0, x \in [1, 3]$ 时, 第 3 次二分后根所在的区间是什么?

- A. $[1, 2]$
- B. $[1, 1.5]$
- C. $[1.5, 1.75]$
- D. $[1.75, 3]$

3. 对任给 $x \in (x_1, x_2, x_3)^T \in C^3$, 试问如下实值函数哪个可以构成向量范数?

- A. $|x_1| + |2x_2 + x_3|$
- B. $|x_1| + |2x_2| - 5|x_3|$
- C. $|x_1|^4 + |x_2|^4 + |x_3|^4$
- D. $|x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|$

4. 哪种方法不能将矩阵转化为下三角矩阵?

- A. Givens 矩阵旋转法
- B. 高斯消元法
- C. Householder 矩阵法
- D. 幂法

5. 对于 $n+1$ 个插值节点的问题, 使用三次样条插值, 其未知量的个数为 () 个, 插值函数 () 阶连续可导。

- A. $3n, 3$
- B. $3n, 2$
- C. $4n, 3$
- D. $4n, 2$

6. 提高数值积分精度的方法包括 ()

- A. 固定求积节点, 改善系数
- B. 插值型求积公式提升求积节点数目的数量级
- C. 积分区间分段, 分段数值积分
- D. 固定求积节点的数目, 优化求积节点位置

二. 填空题

1. 对于 $y = \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$, 写出当 x 远小于 1 时, 适合数值计算 y 值的更精确计算公式
_____.

- (a) $x^3 + x - 2 = 0$
2. (b) $x^4 - x^2 + x - 1 = 0$
(c) $x^2 - x - 1 = 0$

初始值 $x_0=0$, 以上三个方程用牛顿法迭代两次后解为: _____, _____, _____.

3. 使用列主元消元法对系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ 处理, 完成后第 2 行第 2 列的数值为 6/5.

4. 写出数值稳定的能将向量 (10, 0.001, 0.001) 的第 2, 3 分量转化为 0 的 Householder 矩阵: _____.

5. 求解矩阵特征值的 QR 迭代方法中, $A^{(k)} = Q_k R_k$, 那么 $A^{(k+1)} = \underline{R_k \cdot Q_k}$. [10, 0, 0]

6. 相比 Language 插值, 牛顿插值的优点是 P110.

7. 求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ 的代数精度为 3, 是否是 Gauss 求积公式 是.

8. 写出 Simpson 求积公式 _____, 其代数精度为 3. 奇数阶为 n.

9. 微分方程离散化方法包括 Euler, Runge-Kutta, 龙格库塔法.

三. 简答题

1. 设函数 $f(x)$ 的导数满足 $0 < 2 \leq f'(x) \leq 3$, 且 $f(x)=0$ 的根存在, x 任意, 选取合适的 λ 值, 使得迭代格式

$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 对任意初值 x_0 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^* , 并对于初值 5, 迭代 10 步, 给出其先验误差估计值。

2. 已知线性方程组为

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

(1) 写出 Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式;

(2) 判别这两种迭代法的收敛性。

3. 证明: 若 A 的 n 个特征值为满足 $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ 时, 幂法仍成立。

4. 已知函数 $f(x)$ 的 4 个数值 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=1, f(3)=1$; 请写出其 Language 插值多项式 $P(x)$, 并写出和证明 $f(x)-P(x)$ 的误差估计式。

5. 给定数表

x	-2	-1	0	1	2
y	0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

使用最小二乘法进行二次曲线拟合, 写出关于二次曲线系数的线性方程组。

6 确定参数 x_1, x_2, A_1, A_2 , 使求积公式 $\int_0^1 f(x) \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ 成为 Gauss 求积公式。

7. 数值求解此问题

$$\begin{cases} y' = x^2 - 2y, 0 \leq x \leq 0.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

写出 Euler 方法公式和梯形公式, 并构造预测校正公式, 使用预测校正公式求解, 步长为 0.1。分析其局部截断误差。