§4.2　乘法公式

主 题

两个事件的乘法公式

多个事件的乘法公式

乘法公式的分解思想

乘法公式

1.两个事件的乘法公式

由条件概率的计算公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

我们得 $P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$

这就是两个事件的乘法公式. $P(AB)=P(B)P(A|B)(P(B)>0)$

2.多个事件的乘法公式

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为n个随机事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

则有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)$
$P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

$P(A_1A_2)$ $\quad$ $P(A_1A_2A_3)$ $\quad$ ....

$$P\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2 \middle| A_1\right)$$
$$P\left(A_3 \middle| A_1 A_2\right)\cdots P\left(A_n \middle| A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\right)$$

$$P(A_1)P(A_2 \cdots A_n | A_1)$$

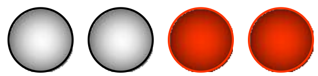
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \cdots A_n \mid A_1 A_2)$$

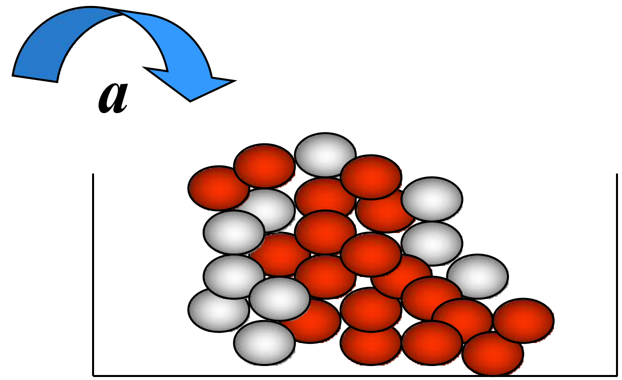
$$P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \cdots A_n \mid A_2 \mid A_1) = P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \cdots A_n \mid A_1 A_2)$$

......

例4 波里亚罐子模型

一个罐子中包含t个白球和r个红球. 随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进a个与所抽出的球具有相同颜色的球. 这种取法进行四次，试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率.





t个白球, r个红球

解：设A_i={第i次取出是白球}, i=1,2,3,4

则所求事件为：$A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}$，应用乘法公式

$$P\left(A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\overline{A_3} \mid A_1 A_2)P(\overline{A_4} \mid A_1 A_2 \overline{A_3})$$

$$= \frac{t}{t+r} \times \frac{t+a}{t+r+a} \times \frac{r}{t+r+2a} \times \frac{r+a}{t+r+3a}$$

相当于罐子中有t+a个白球r个红球情况下，第1次取出的是白球的概率。

例5． 猎人在100米处射击一动物，击中的概率为0.6，如果第一次不中则进行第二次射击，但由于动物逃跑而使距离变为150米，如果第二次不中则进行第三次射击，这时距离变为200米，假设击中的概率与距离成反比，试求猎人击中动物的概率.

解： 设A_i={第i次击中}, i=1,2,3

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}) \quad \boxed{= 1 - 0.4 \times 0.6 \times 0.7}$$

由已知 $P(A_1) = 0.6 \longrightarrow P(\overline{A_1}) = 0.4$ $\quad P(A_2 \mid \overline{A_1}) = \dfrac{100 \cdot 0.6}{150} = 0.4 \longrightarrow P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) = 0.6$

$$P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 0.3 \longrightarrow P(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 0.7$$

又 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$

$$P(A_1A_2) = 0$$

$$P(A_2) = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1})$$

$$P(A_3) = P(A_3\overline{A_2}\,\overline{A_1}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$