知识回顾

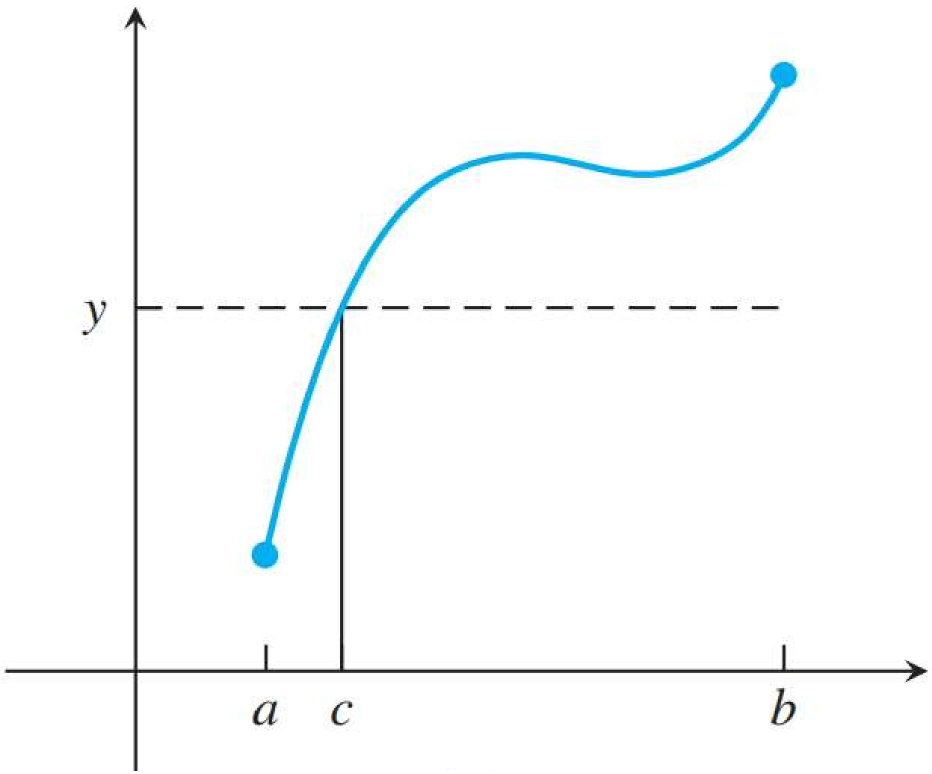
Each double precision floating point number is assigned an 8-byte word, or 64 bits, to store its three parts. Each such word has the form

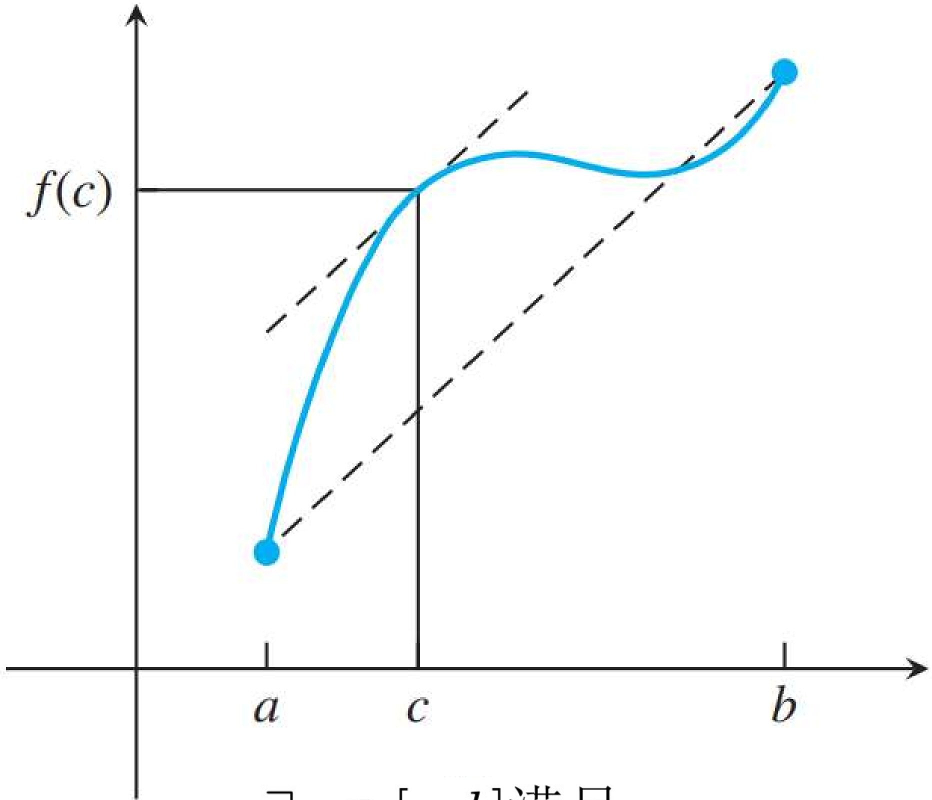
$$\boxed{se_1e_2 \ldots e_{11}b_1b_2 \ldots b_{52}},$$

precision	sign	exponent	mantissa
single	1	8	23
double	1	11	52
long double	1	15	64

machine number	example	hex format
`+Inf`	1/0	7FF0000000000000
`-Inf`	–1/0	FFF0000000000000
`NaN`	0/0	FFFxxxxxxxxxxxxx

知识回顾





$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b]$满足

$f(c) = y$

$\exists c \in [a, b]$满足

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

第二章　非线性方程的求根方法

$$(1-0.5tan(x))^{1.4}cos(x)-0.32=0$$

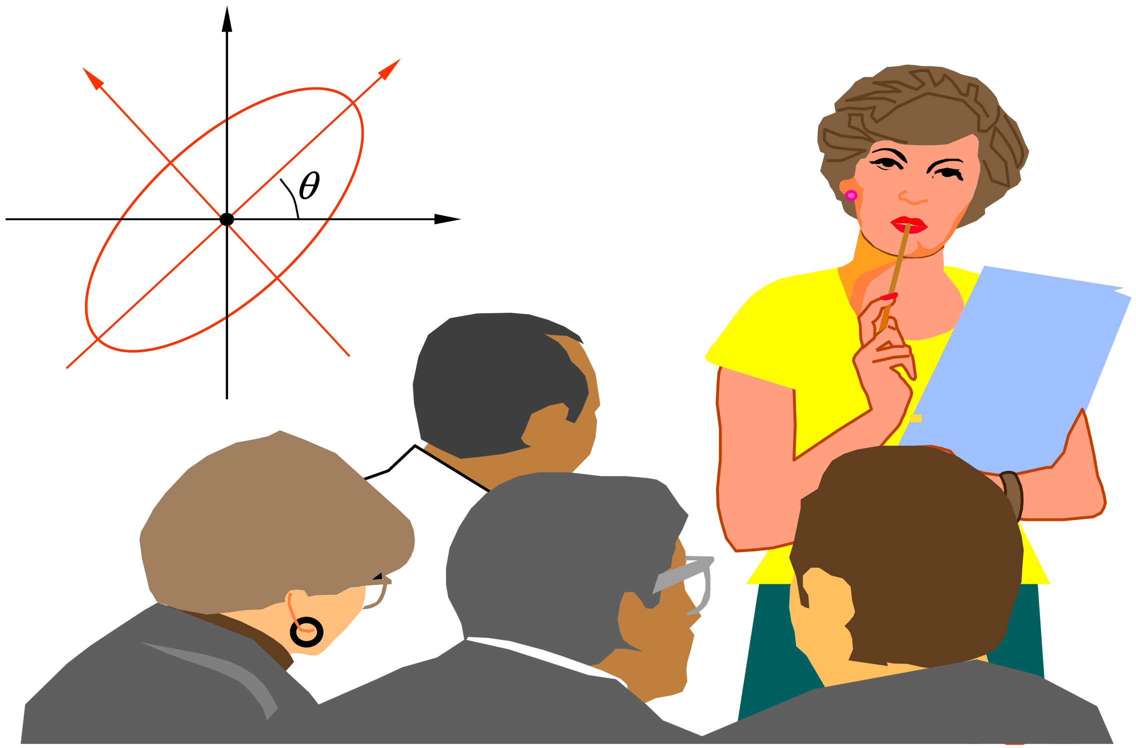
$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

$$3x^2-e^x=0$$

$$3x+4=0$$

$$xe^x-1=0$$

$$e^x+\sin x=4.$$



第二章　非线性方程的求根方法

讲授：

函数方程求根的常用数值方法

概念	直观
构造方法	解决问题
分析证明	灵活使用

重点论述：

二分法、简单迭代法、牛顿迭代法及其变形的原理、构造、收敛性等。

§2.2　基本概念

1、概念

函数方程： $f(x)=0$ **，** $f(x)$**是** x **的连续函数；**

非线性方程：

$f(x)$**不是** x **的线性函数的函数方程；**

代数方程：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

超越方程：

$f(x)$**不是多项式函数的函数方程。**

$$\cos x \cdot (1 - 0.5 \tan x) - 0.32 = 0$$

在非线性方程中，绝大部分是没有求根公式的，或者难以保证精度，因此寻找求近似根的方法是非常重要!

- 求根问题 3 要素：（结合实际）

  根的存在性、根的范围、根的精确化。

  根的精确化是方程求根问题的核心！

- **求根方法有 2 类：** 区间法、迭代法。

- **求根方法共同点：**

  构造收敛于根的数列 $\boxed{\{x_k\}}$

收敛阶为 p 或 方法具有p阶敛速：

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\frac{\left|x_{k+1}-x^{*}\right|}{\left|x_{k}-x^{*}\right|^{p}}=C}$$

这里 $x_k \to x^{*}, p, C > 0$

收敛阶为 p 或 方法具有p阶敛速：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}=C$$

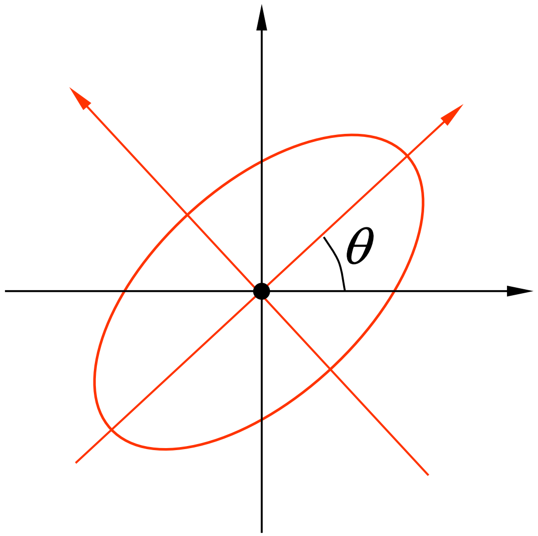
这里 $x_k \to x^*, p, C > 0$

- 方法线性收敛：　当 $p=1$且$C<1$时
- 方法平方收敛：　当 $p=2$时
- 方法超线性收敛：　当 $p>1$时

收敛阶越大，收敛越快，方法越好！

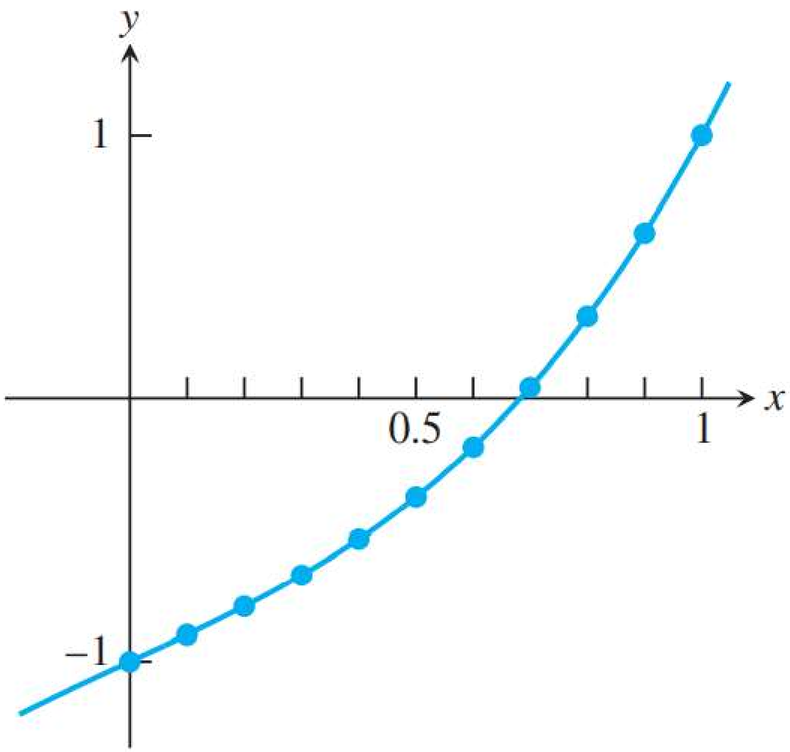
§2.3　二分法

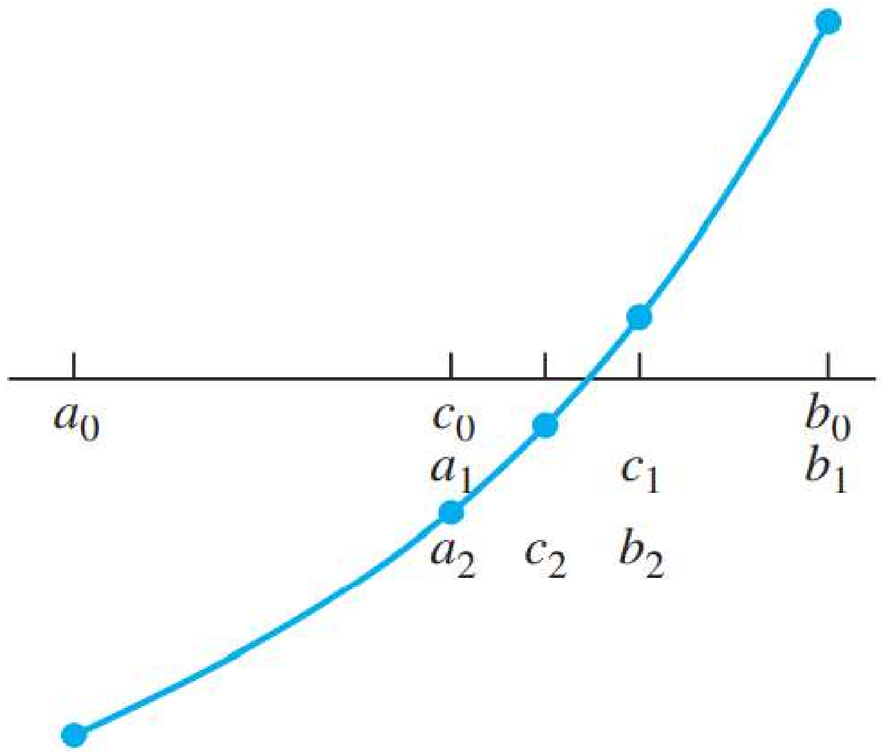
$$x_k = 0.5(a_k + b_k)$$



1、 基本思想

利用连续函数零点定理，将含根区间逐次减半缩小构造点列来逼近根。





二分法也称对分区间法、对分法等，是最简单的求根方法，属于区间法求根类型。

2、构造原理

设连续函数 $f(x)$在$[a,b]$ 只有一个根，且满足$f(a)f(b)<0$

1）记$I_0= [a,b]$,**取区间中点** $x_0 = 0.5(a+b)$

2）**判别$f(x_0)$ 的值**

a. **若$f(x_0)=0$, 则 $x^* = x_0$,停止**

b. **若$f(x_0)\ f(a)<0$, 记** $I_1 = [a, x_0]$

否则, 记$I_1= [x_0,b]$

3) 记 $I_1 = [a_1, b_1]$, 再取 $x_1 = 0.5(a_1 + b_1)$

4) 若 x_1满足根精度要求，则 $x^* \approx x_1$,停止

否则，I_1替代 I_0 转1）

3、分析

1) 求根数列

记第k次二分得到的含根区间为 $I_k=[a_k,b_k]$

则二分法对应的求根数列算式为

$$x_k=0.5(a_k+b_k)$$

2) 收敛性

$$\because x^* \in I_k, k=0,1,\cdots \Rightarrow I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

$$\therefore |x^*-x_k| \le \frac{1}{2}(b_k-a_k)=\frac{1}{2^2}(b_{k-1}-a_{k-1})=\ldots=\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

$$\therefore \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)\to 0 \Rightarrow x_k \to x^*$$

3）计算次数控制

$$\because \left|x^{*}-x_{k}\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

对给定的计算精度$\varepsilon > 0$，要成立$\left|x^{*}-x_{k}\right| < \varepsilon$

$$\text{让} \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \le \varepsilon \Rightarrow k > \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$$

即：满足精度要求的二分次数为$k > \dfrac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$。

$$\because \left|b_{k}-a_{k}\right| = 2\left|x_{k}-x_{k-1}\right| \Rightarrow \left|x^{*}-x_{k}\right| \le \left|x_{k}-x_{k-1}\right|$$

于是，满足精度的根 可取$\left|x_{k}-x_{k-1}\right| \le \varepsilon$成立的$x_{k}$。

4、二分法的误差估计

$$1、\ k > \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$$

先验估计

$$2、\left|x^{*}-x_{k}\right| \le \left|x_{k}-x_{k-1}\right|$$

后验估计

先验估计的k往往偏大，主要用于理论估计。

后验估计的k往往较小，主要用于实际控制。

例1：用二分法求方程 $2x^3-5x-1=0$

在区间[1,2]内的根，绝对误差 $\varepsilon \le 10^{-2}$

解： 取 $f(x)=2x^3-5x-1$

$$\Rightarrow f(1)<0,\ f(2)>0,\ f'(x)=6x^2-5>0$$

可知方程 在[1,2]内有唯一根，二分法可用。

$$I_0=[1,2], x_0=0.5(1+2)=1.5$$

$$\because f(x_0)f(1)>0$$

$$\Rightarrow I_1=[x_0,2]=[1.5,2]\Rightarrow x_1=0.5(1.5+2)=1.75$$

$$\because f(x_0)f(x_1)<0$$

$$\Rightarrow I_2=[1.5,x_1]=[1.5,1.75]\Rightarrow x_2=0.5(1.5+1.75)=1.625$$

…

$$I_4 = [1.625, 1.6875] \Rightarrow x_4 = 1.65625$$

$$I_5 = [1.6525, 1.6875] \Rightarrow x_5 = 1.671875$$

$$|x_5 - x_4| = 0.015625 > 10^{-2}$$

$$I_6 = [1.671875, 1.6875] \Rightarrow x_6 = 1.679688$$

$$\Rightarrow |x_6 - x_5| = 0.007813 = 0.7813 \times 10^{-2} < 10^{-2}$$

得近似解

$$x^* \approx x_6 = 1.679688$$

求方程$x^3+x-1=0$在区间$[0,1]$上的根

i	a_i	$f(a_i)$	c_i	$f(c_i)$	b_i	$f(b_i)$
0	0.0000	−	0.5000	−	1.0000	+
1	0.5000	−	0.7500	+	1.0000	+
2	0.5000	−	0.6250	−	0.7500	+
3	0.6250	−	0.6875	+	0.7500	+
4	0.6250	−	0.6562	−	0.6875	+
5	0.6562	−	0.6719	−	0.6875	+
6	0.6719	−	0.6797	−	0.6875	+
7	0.6797	−	0.6836	+	0.6875	+
8	0.6797	−	0.6816	−	0.6836	+
9	0.6816	−	0.6826	+	0.6836	+

【例 2－2】　写出二分法求非线性方程根的算法．

输入：a，b，$f(x)$，ε，ε_1

输出：根 x

步骤：

① $x \Leftarrow 0.5(a+b)$；

②If $|f(x)| < \varepsilon_1$，then 输出根 x，stop；

③If $f(a)f(x) < 0$，then $b \Leftarrow x$；else $a \Leftarrow x$

④If $b - a \leqslant \varepsilon$，then 输出根 x，stop，else 转①.

注意0的处理

注意使用变量的个数（存储）

一尺之捶，日取其半，万世不竭

$$|x_{k+1}-x^*|<\frac{1}{2}|x_k-x^*|$$

通常说二分法具有线性收敛速度；
二分法只是用函数值符号信息；
一般用于为方程提供初始近似值，
然后用其他方法进一步快速精化。

优点：

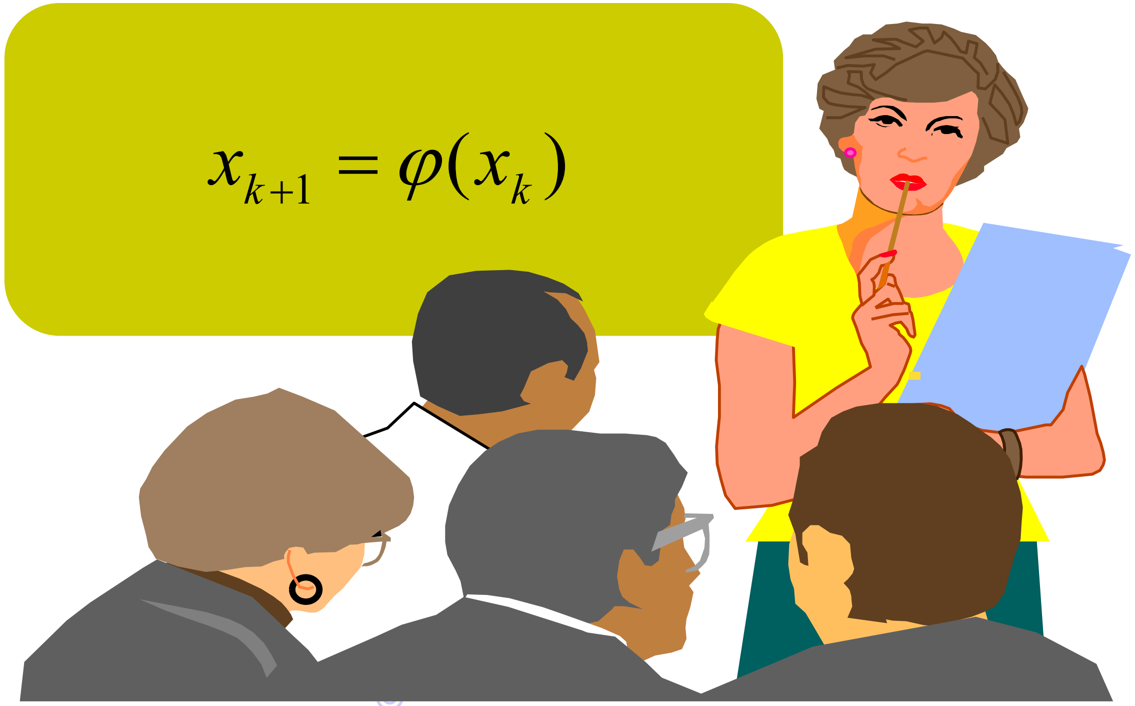
- 二分法计算简单，对f(x)要求不高；
- 输入初始区间不管多大，总能算出符合精度要求的根。

缺点：

- 不能计算重根

§2.4 简单迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$



$$3x + 4 = 0$$
$$3x^2 - e^x = 0$$

1、 基本思想

利用对方程 *f(x)=0* 做等价变换根不发生变化的特点，将方程等价变形

$$x = \varphi(x)$$

获得迭代计算公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

简单迭代法是现代迭代技术及理论的基础。

2、构造原理

不动点方程

1）将方程 $f(x)=0$ 改写成 $\underline{x=\varphi(x)}$ 等价形式;

2）构造迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

3) 取定一个初值 x_0，由迭代公式算出数列

$$x_1=\varphi\left(x_0\right), x_2=\varphi\left(x_1\right), \cdots$$

迭代函数： $\varphi(x)$

根 x^* 称为不动点

迭代数列： $\left\{x_k \mid x_{k+1}=\varphi(x_k)\right\}$

$$\because f\left(x^*\right)=0 \Leftrightarrow x^*=\varphi(x^*), \text{但} x_{k+1}=\varphi(x_k)\neq x_k$$

©

2）收敛性

简单迭代计算产生的数列不一定收敛，但若收敛其能收敛到根吗?

假设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \overline{x}, \varphi(x) \in C[a,b]$

$$\Rightarrow \overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \varphi(\overline{x})$$

说明迭代数列的极限就是所求的根，故用简单迭代法求根是可行的。

$$x^5 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= x^5 - 1 \\ x &= x^{-4} + x^{-3} \\ x &= \sqrt[5]{1+x} \\ &\cdots \end{aligned}$$

一个方程会有很多不动点方程，

那么所有不动点方程构造的迭代数列都收敛吗？答案是否定的

©

给出求方程$x-10^x+2=0$在$x=1$附近的根的迭代求根公式

$$x=10^x-2$$

```
8

1e+08

inf

inf

inf

inf
```

$$x=lg(x+2)$$

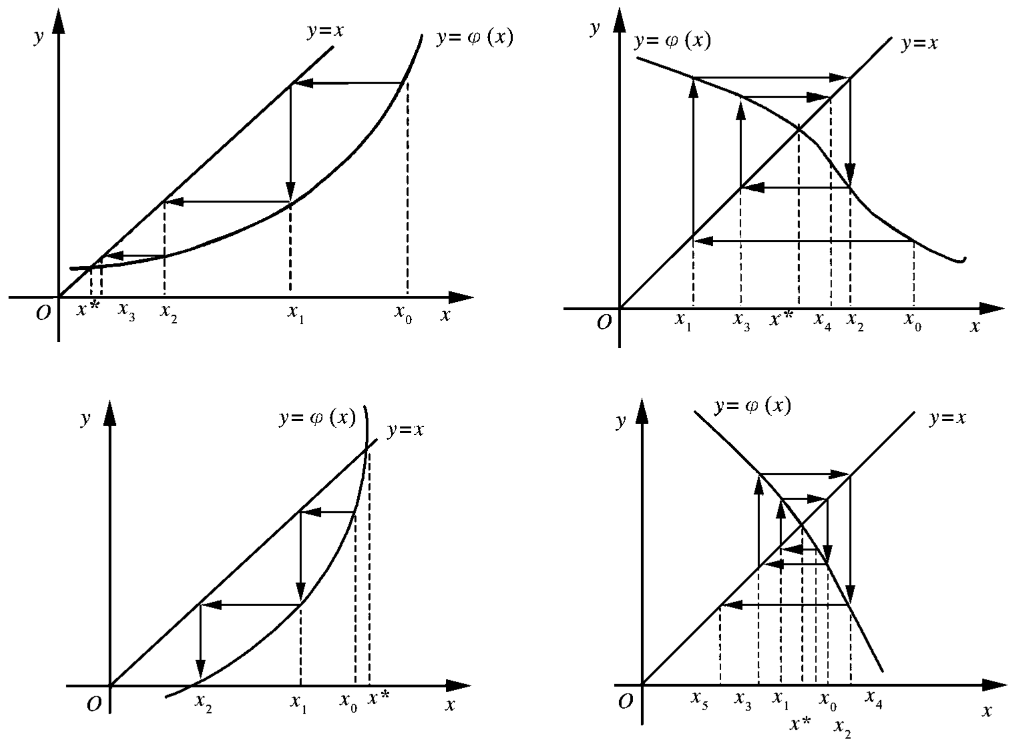
```
0.477121

0.393947

0.379115

0.376415

0.375922

0.375832
```

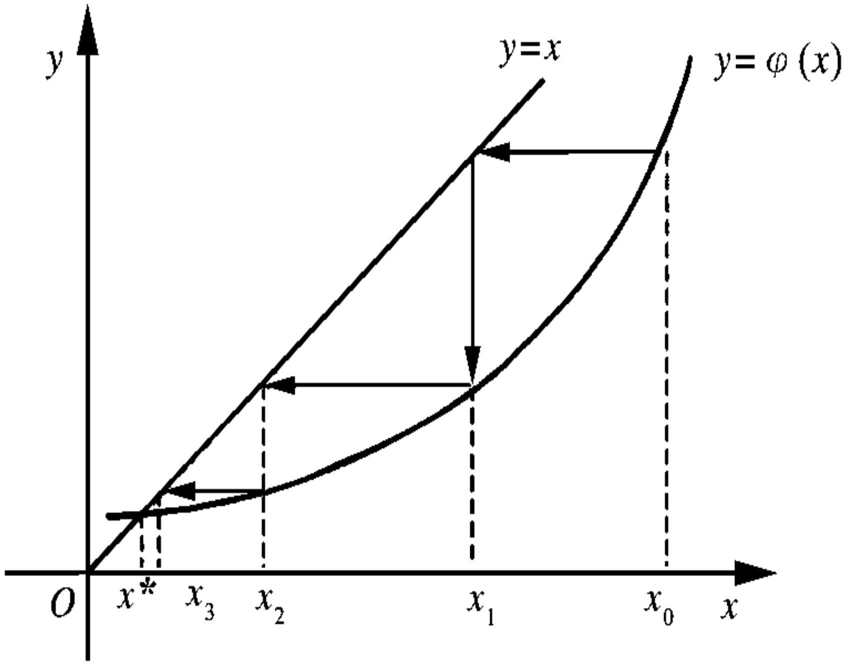
3、分析

1）简单迭代法的几何意义

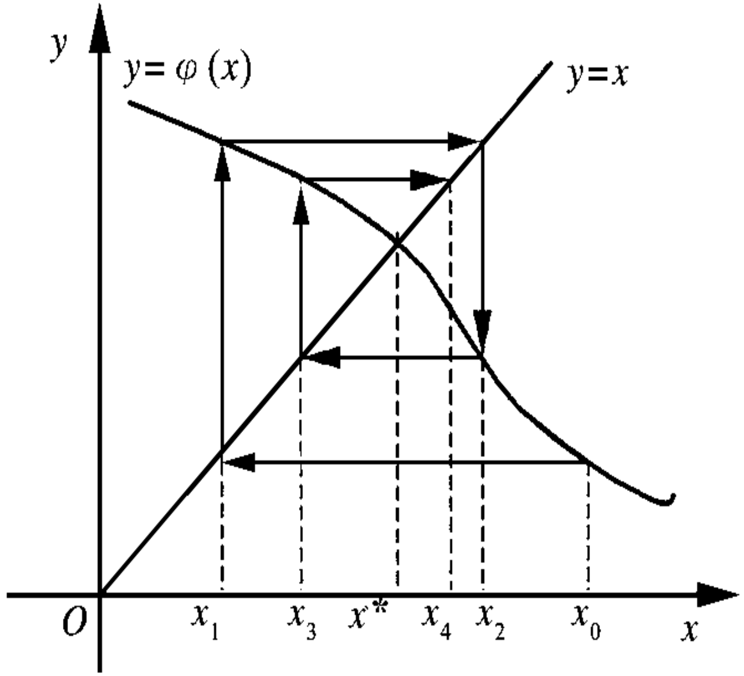
方程 $x=\varphi(x)$ 的根是 $y=x$ 与 $y=\varphi(x)$ 交点横坐标.

在根的附近有如下4种结构：

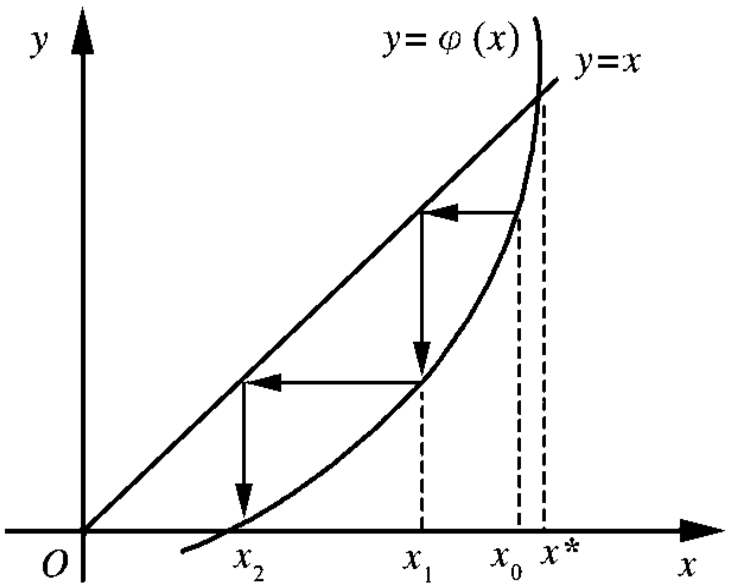




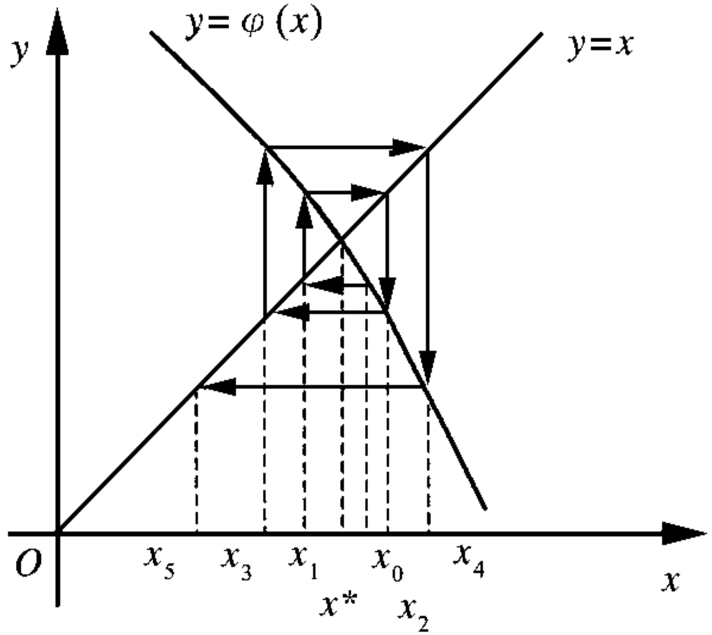
y
y=x
y= φ (x)
O
x*
x₃
x₂
x₁
x₀
x



y
y= φ (x)
y=x
O
x₁
x₃
x*
x₄
x₂
x₀
x



y
y= φ (x)
y=x
O
x₂
x₁
x₀
x*
x



y= φ (x)
y
y=x
O
x₅
x₃
x₁
x₀
x₄
x*
x₂
x

3）判别收敛的充分条件

重要定理！

定理1　设迭代函数$\varphi(x)$满足两个条件

1、$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \underline{\varphi(x) \in [a,b]}$

2、$\exists 0 < L < 1,$

对$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow \left|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|$

则有

1、 **$\varphi(x)$在$[a,b]$中有唯一的不动点x^*；**

2、$\forall x_0 \in [a,b] \Rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k)$产生的数列$\{x_k\} \uparrow x^*$

©

证明： **存在性**

$\because \varphi(x) \in C[a,b]$ **作辅助函数**

条件1

$$\psi(x) = x - \varphi(x)$$

$\because \psi(x) \in C[a,b], \psi(a)\psi(b) \leq 0$

不动点

由中值定理，有

$$\exists \xi \in [a,b] \Rightarrow \psi(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = \varphi(\xi)$$

唯一性 若还有 $\eta = \varphi(\eta)$，做 **矛盾！**

$$|\xi - \eta| = \underline{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| \leq L|\xi - \eta|} < |\xi - \eta|$$

条件2

©

收敛性

$$\because x^* = \varphi(x^*), x_k = \varphi(x_{k-1}) \quad \text{由条件2}$$

$$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \le L|x_{k-1} - x^*|$$

$$\le L^2|x_{k-2} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|$$

$$\because 0 < L < 1 \Rightarrow L^k \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}|x_k - x^*| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

例2．**证明迭代格式**

$$x_{k+1} = 3 - 0.5\left|x_k\right|, x_0 = -15$$

产生的数列是收敛的。

证明：由迭代格式可知迭代函数为

$$\varphi\left(x\right) = 3 - 0.5\left|x\right|$$

取其定义区间为实数R，有

$$\forall x \in R \Rightarrow \varphi\left(x\right) \in R$$

$$\forall x_1, x_2 \in R$$

$$\Rightarrow \left|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right|$$

$$= \left|3 - 0.5\left|x_1\right| - \left(3 - 0.5\left|x_2\right|\right)\right| = 0.5\left|\left|x_1\right| - \left|x_2\right|\right| \le 0.5\left|x_1 - x_2\right|$$

取L=0.5<1,则

由定理有所证。

定理1的条件2

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

不易操作，注意到

$$|\varphi'(x)| \le L < 1, x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

可得如下推论：

推论1：设迭代函数$\varphi(x)$满足

1、$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \underline{\varphi(x) \in [a,b]}$

2、$|\varphi'(x)| \le L < 1, x \in [a,b]$

也有定理1结论。

例3　给出求方程 $x-2^{-x}=0$ **根的迭代公式。**

解：考虑方程 $\begin{cases} y=x \\ y=2^{-x} \end{cases}$ **的图形交点，可知：**

原方程只有一个在1附近根，取不动点方程

$$x=2^{-x}=\varphi(x),[a,b]=[0.3,1]$$

$$\because \varphi'(x)=-2^{-x}\ln 2<0, x\in[0.3,1]\Rightarrow\varphi(x)\downarrow$$

$$x\in[0.5,1]\Rightarrow 0.5=\varphi(1)<\varphi(x)<\varphi(0.5)=1/\sqrt{2}$$

即 $x\in[0.5,1]\Rightarrow\varphi(x)\in\left[0.5,\ \ 1/\sqrt{2}\right]\subseteq[0.5,1]$

$$x\in[0.5,1]\Rightarrow\left|\varphi'(x)\right|\le Max\left\{2^{-1},2^{-0.5}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}=L<1$$

由推论1，迭代公式

$$x_{k+1} = 2^{-x_k}, x_0 = 0.6$$

可以求出方程的根。

【例 2-4】 设函数 $f(x)$ 的导数满足 $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$，且 $f(x)=0$ 的根存在，x 任意，证明：任取 $\lambda \in \left(0, \dfrac{2}{M}\right)$，迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$$

对任意初值 x_0 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*.

【例 2－5】 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，有不动点 x^*，且 $0<\varphi'(x)<1$. 取 $x_0\in[a,b]$，证明：当 $x_0\neq x^*$ 时由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 单调收敛于 x^*.

构造收敛迭代格式的关键点：

1、选择含有唯一根的区间$[a,b]$;

2、挑选迭代函数$\varphi(x)$；

3、检验条件1和条件2，要给出具体L值；

4、检验条件不成立时，重选$[a,b]$或$\varphi(x)$再检验。

$|\varphi'(x)| \le L < 1$ 在 x 较大的范围满足不容易做到，但在较小范围还是较容易做到。

局部收敛:

方法在根的附近取初值才能保证收敛.

全局收敛:

方法没有要求在根附近取初值，就可以保证收敛.

二分法是全局收敛的，简单迭代法一般是局部收敛的。

4、局部收敛定理

1、x^* 是迭代函数 $\varphi(x)$的不动点;

2、$\varphi'(x)$且 在点x^* 处连续

则有

$$1、\quad |\varphi'(x^*)| < 1 \Rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k)\text{局部收敛;}$$

$$2、\quad |\varphi'(x^*)| > 1 \Rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k)\text{发散}$$

该定理利用不动点（符号，不是具体数字）就能判别收敛，但注意是充分条件。

证明：只给出1的证明。

$\because \left|\varphi'(x^*)\right|<1$且$\varphi'(x)$在$x^*$连续，由介值定理，

$\therefore \exists$正实数$L<1$和x^*的闭邻域$D:\left|x-x^*\right|\le\delta,\delta>0,$满足

$$x\in D\Rightarrow\left|\varphi'(x)\right|\le L<1$$

又因为$x\in D$，由$x^*=\varphi(x^*)$

$$\Rightarrow\left|\varphi(x)-x^*\right|=\left|\varphi(x)-\varphi(x^*)\right|=\left|\varphi'(\xi)\right|\left|x-x^*\right|$$

$$\le L\left|x-x^*\right|<\left|x-x^*\right|\le\delta\Rightarrow\varphi(x)\in D$$

由定理有 $x_0\in D\Rightarrow x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛。

5、 误差估计和收敛速度

定理：　在收敛定理的条件下，简单迭代法有如下误差估计式

1、$\left|x^* - x_k\right| \le \dfrac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right|$　　**后验估计**

2、$\left|x^* - x_k\right| \le \dfrac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$　　**先验估计**

证明 只证1)

$$\because x_{k+1}=\varphi(x_k)\Rightarrow\left|x_{k+1}-x_k\right|=\left|\varphi\left(x_k\right)-x_k\right|$$

$$=\left|\varphi(x_k)-\varphi(x^*)+\varphi(x^*)-x_k\right|$$

$$=\left|x^*-x_k+\varphi(x_k)-\varphi(x^*)\right|$$

$$\geq\left|x^*-x_k\right|-\left|\varphi(x_k)-\varphi(x^*)\right|$$

$$\geq\left|x^*-x_k\right|-\mathrm{L}\left|x_k-x^*\right|=(1-\mathrm{L})\left|x^*-x_k\right|$$

$$\because 0<L<1\Rightarrow\left|x^*-x_k\right|\leq\frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

另一方面，有

$$|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|\le L|x_k-x_{k-1}|$$

$$\Rightarrow|x^*-x_k|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \qquad \#$$

迭代计算控制 要$|x^*-x_k|<\varepsilon$

$$只要\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon\Rightarrow k\ge\ln\left|\frac{(1-\mathrm{L})\varepsilon}{x_1-x_0}\right|/\ln L$$

$$或\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon\Rightarrow|x_k-x_{k-1}|\le\varepsilon$$

例5：用简单迭代法求方程

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

在x=1附近的根，计算结果准确到4位有效数字。

解:先确定含唯一根区间，以找到区间[a,b].

令 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$

$$\because f(1)f(2)<0, f'(x)=3x^2+4x+10>0, x\in[1,2]$$

所以原方程 $f(x)=0$ 在[1,2] 内有唯一的根。

找迭代函数:

$$x^3+2x^2+10x-20=0 \Leftrightarrow x=\frac{20}{x^2+2x+10}$$

得迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{20}{x^2+2x+10}$

$$\because \varphi'(x)=-\frac{20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}<0,x\in[1,2]\Rightarrow\varphi(x)\downarrow$$

$$x\in[1,2]\Rightarrow 1<\frac{10}{9}=\varphi(2)\le\varphi(x)\le\varphi(1)=\frac{20}{13}<2$$

$$\therefore x\in[1,2]\Rightarrow\varphi(x)\in[1,2]$$

$$\because|\varphi'(x)|=\frac{20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}\le\frac{20(2\times2+2)}{(1^2+2\times1+10)^2}=\frac{120}{169}=L<1$$

由推论1，可得迭代格式

$$\forall x_0\in[1,2]\Rightarrow x_{k+1}=\frac{20}{x_k^2+2x_k+10}\uparrow$$

$$\because x^* \in [1,2] \Rightarrow x^* = 1.\cdots \Rightarrow m = 1$$

计算结果要准确到4位有效数字，有n=4

$$\Rightarrow \varepsilon = 0.5\times 10^{m-n} = 0.5\times 10^{-3}$$

取 $x_0 = 1$, 进行迭代计算有

$x_1 = 1.538461538 \qquad |x_1 - x_0| = 0.538\cdots > 0.5\times 10^{-2}$

$x_2 = 1.295019517 \qquad |x_2 - x_1| = 0.2434\cdots > 0.5\times 10^{-2}$

$\cdots$

$x_{10} = 1.36869397 \Rightarrow |x_{10} - x_9| = 0.36\cdots\times 10^{-3} < 0.5\times 10^{-3}$

$\therefore x^* \approx x_{10} = 1.36869397$

注意:本题准确根为 1.3688081…

定理4　设 x^* 是迭代函数 $\varphi(x)$ 的不动点，有

$$\varphi^{(m)}(x) \in C[x^*], m \in Z$$

$$\varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) = 0, \cdots, \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0$$

则有

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 m 阶收敛，且有

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^m} = \frac{\varphi^{(m)}(x^*)}{m!}$$

证明　$\because \varphi'(x^*) = 0 \Rightarrow \left|\varphi'(x^*)\right| = 0 < 1$

由定理2可知迭代局部收敛. 将 $\varphi(x)$ 在写成Taylor公式，有

$$\varphi(x)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x-x^*)+\ldots+\frac{\varphi^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1}+\frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x^*)^m$$

$$=x^*+\frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x^*)^m$$

特别有

$$\varphi(x_k)=x^*+\frac{\varphi^{(m)}(\xi_k)}{m!}(x_k-x^*)^m$$

$$\because x_{k+1}=\varphi(x_k)\Rightarrow\frac{x_{k+1}-x^*}{\left(x_k-x^*\right)^m}=\frac{\varphi^{(m)}(\xi_k)}{m!}$$

$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\frac{\left|x_{k+1}-x^*\right|}{\left|x_k-x^*\right|^m}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\varphi^{(m)}(\xi_k)\right|}{m!}=\frac{\left|\varphi^{(m)}(x^*)\right|}{m!}\neq 0$$

由于一般情况下 $\varphi'(x^*) \neq 0$

故简单迭代法通常是线性收敛的.

推论:

1. $x^* = \varphi(x^*),\ \varphi'(x^*) = 0 \Rightarrow$ 迭代至少平方收敛;

2. $x^* = \varphi(x^*),\ \varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) = 0$

$\Rightarrow$ 迭代至少3阶收敛;

3. $x^* = \varphi(x^*),\ \varphi^{(k)}(x^*) \neq 0 \quad \Rightarrow$ 迭代的收敛阶小于k

例6 确定常数*p*，*q*，*r*使迭代函数

$$f(x)=px+q\frac{a}{x^2}+r\frac{a^2}{x^5}$$

对应的迭代局部收敛到$\beta=\sqrt[3]{a}$， $a>0$；

且有尽可能高的收敛阶。

解: $\because$ 迭代格式为：$x_{k+1}=px_k+q\frac{a}{x_k^2}+r\frac{a^2}{x_k^5}$

$$\because \beta=f(\beta)\Rightarrow \beta=p\beta+q\frac{a}{\beta^2}+r\frac{a^2}{\beta^5}$$

$$\because \beta=\sqrt[3]{a}\Rightarrow p+q+r=1$$

要有尽可能高的收敛阶，要选

$$f'(\beta)=0, f''(\beta)=0,\cdots$$

因有3个参数，要三个方程才有可能有唯一解。

取 $f'(\beta)=0, f''(\beta)=0$,得

$$f'(\beta)=p-2q\frac{a}{\beta^3}-5r\frac{a^2}{\beta^6}=0$$

$$f''(\beta)=6q\frac{a}{\beta^4}+30r\frac{a^2}{\beta^7}=0$$

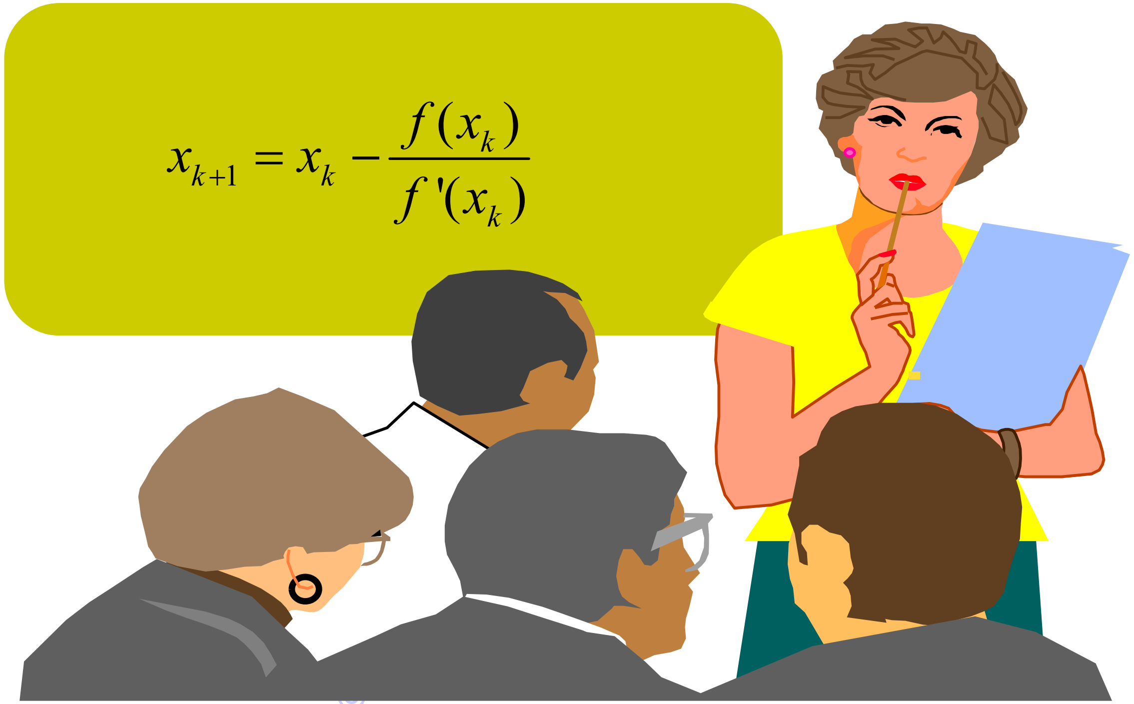
$$\Rightarrow\begin{cases} p+q+r=1 \\ p-2q-5r=0 \\ q+5r=0 \end{cases}$$

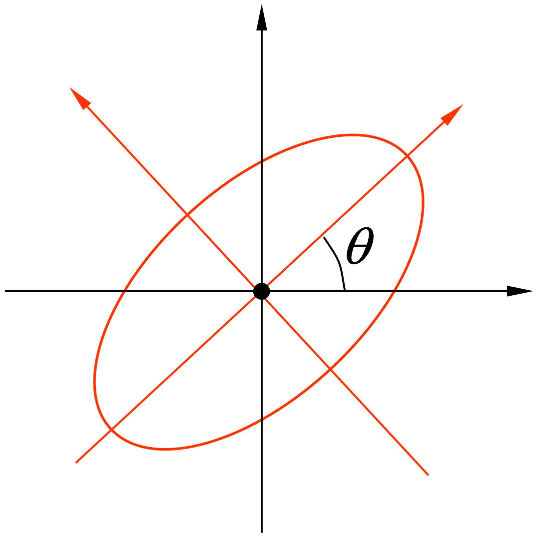
$$\Rightarrow p=q=\frac{5}{9}, r=-\frac{1}{9} \qquad \Rightarrow x_{k+1}=\frac{5x_k}{9}+\frac{5a}{9x_k^2}-\frac{a^2}{9x_k^5}$$

$$\because f'''(\beta)=10\beta^{-2}\neq 0$$

所求迭代收敛阶最高为3。。

§2.5 Newton迭代法





1、基本思想

将函数做线性化处理，把方程转化为对应的近似方程 ，再构造迭代公式。

跟着Newton大师学技能！！！

2、构造原理

(1) 将$f(x)$在x_k处作$Taylor$展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2+\cdots$$

(2) 取 $f(x)$关于$x-x_k$的线性部分：

$$L(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

再将方程 $f(x)=0$替换为近似方程 $L(x)=0$，得

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

(3) 求出线性方程的解，记为x_{k+1},得到迭代格式

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

3、分析

定理5 设 $f(x^*)=0,\ f'(x^*)\neq 0,\ f(x)\in C^2[N(x^*)]$

则*Newton*迭代格式至少是平方收敛的。

证明：由条件知 有如下Taylor公式：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x-x_k)^2$$

将 $x=x^*$ 代入有

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x^*-x_k)^2$$

假设 $f'(x_k) \neq 0$ 用此同除上式两端:

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x^* - x_k + \frac{f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{2f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* = \frac{f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{2f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{2f'(x_k)} \quad \Rightarrow \frac{x_{k+1} - x^*}{\left(x_k - x^*\right)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\left|x_{k+1} - x^*\right|}{\left|x_k - x^*\right|^2} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}\right| = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$$

定理6 （收敛定理）

设$f(x)$在$[a,b]$上有连续二阶导数，且满足下列3个条件

1. $f(a)f(b)<0$

2. $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$

3. $f''(x), x\in[a,b]$不变号

$\Rightarrow \forall x_0\in[a,b]$，只要$f(x_0)f''(x_0)>0$

则Newton迭代格式产生的数列一定收敛于$[a,b]$上的唯一根。

例8：用Newton迭代法求方程

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

在$x=1$附近的根，计算到$|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$。

解： 令 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$

$\because f(0)f(2)<0$，选择含根区间$[0,2]$，当$x\in[0,2]$有

$f'(x)=3x^2+4x+10>0,\ f''(x)=6x+4>0$

满足定理6的条件，取$x_0=1.5$，有 $f(x_0)f''(x_0)>0$

用Newton迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3+2x_k^2+10x_k-20}{3x_k^2+4x_k+10}$$

得

$$x_1 = 1.37362637363, \left|x_1 - x_0\right| = 0.126374 > 10^{-6}$$

$$x_2 = 1.36881481962, \left|x_2 - x_1\right| = 0.481155 \times 10^{-2} > 10^{-6}$$

$$x_3 = 1.36880810783, \left|x_3 - x_2\right| = 0.671179 \times 10^{-5} > 10^{-6}$$

$$x_4 = 1.36880810782, \left|x_4 - x_3\right| = 0.130396 \times 10^{-10} < 10^{-6}$$

$$\therefore x^* \approx x_4 = 1.36880810782$$

把此题与例4相比可知Newton迭代法收敛速度是很快的。

例9：试构造一个能求 $\sqrt{5}$ 的迭代公式并讨论收敛性。

解: 令 $\sqrt{5} = x \Rightarrow 5 = x^2$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 5 = 0$$

$\therefore \sqrt{5}$ **就是该方程的一个根。**

$\because 0 < \sqrt{5} < 3, f(0)f(3) < 0,$ 选择含 $\sqrt{5}$ 区间 $[0, 3]$

当 $x \in [0,3]$ 有 $f'(x) = 2x > 0, f''(x) = 2 > 0$

满足定理6，建立如下的Newton迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{5}{x_k})$$

取$x_0=3$，有$f(x_0)f''(x_0)>0$ 故所求迭代公式为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{5}{x_k}), x_0=3$$

满足要求。

怎样求$\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$？

2.6 Newton迭代法的变形与推广

1、 割线法（变形）

$$\because f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Newton迭代公式就变为如下

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k)$$

割线法迭代公式，两点迭代公式，

收敛阶为1.618。

2、 Newton迭代法的推广

n个变元的非线性方程组的向量形式为

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

这里

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

非线性方程组的解 $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$

$$\vec{F}\left(\vec{x}^*\right) = \vec{0}$$

非线性方程组的Newton迭代公式

$$\boxed{\vec{x}^{(m+1)} = \vec{x}^{(m)} - [\vec{F}'(\vec{x}^{(m)})]^{-1} \vec{F}(\vec{x}^{(m)})}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

©

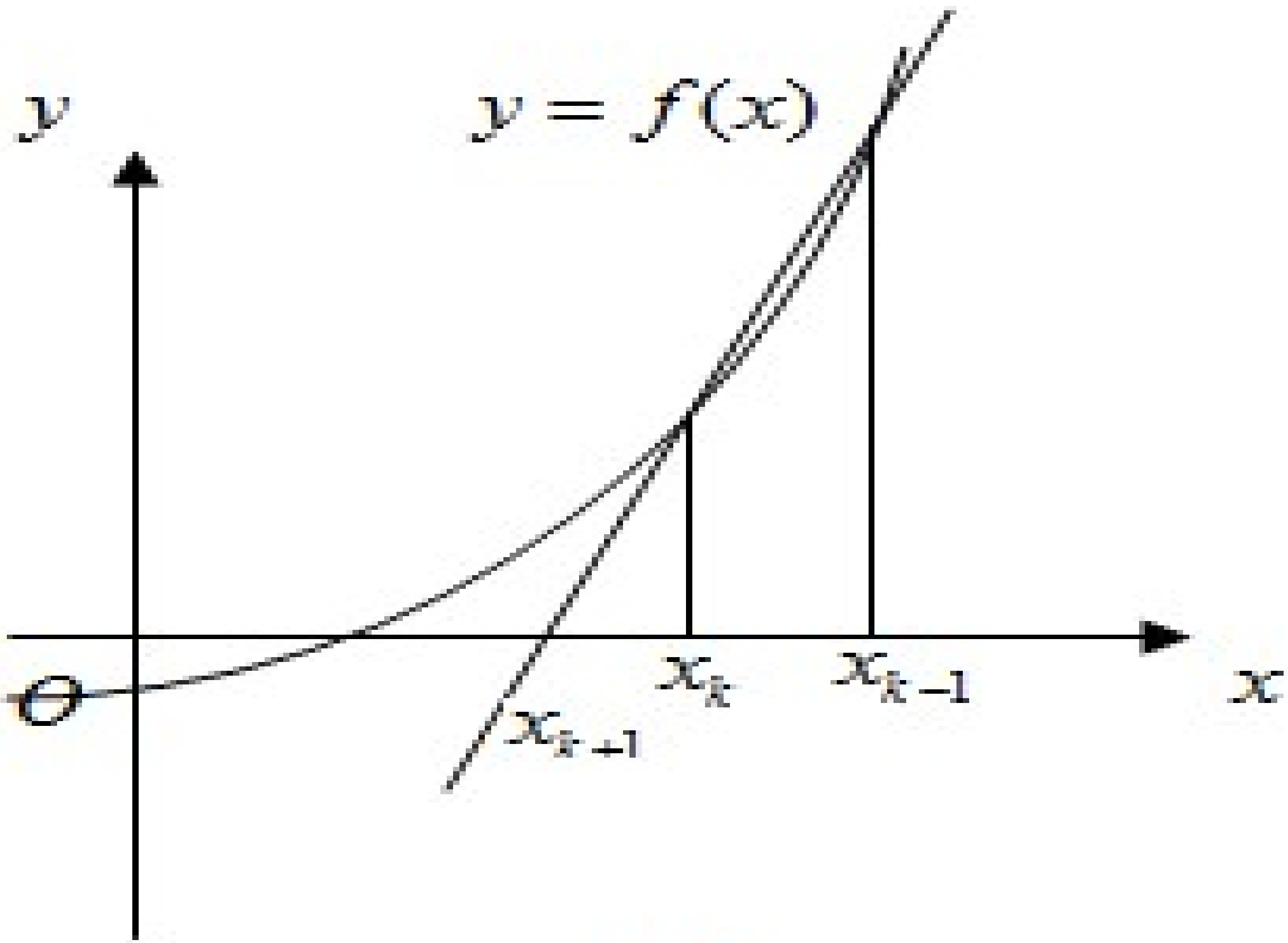


图 2.5

割线法图示