ch1 概率论的基本概念

一、会用概率的基本性质计算概率

二、会求古典概型和几何概型中事件的概率

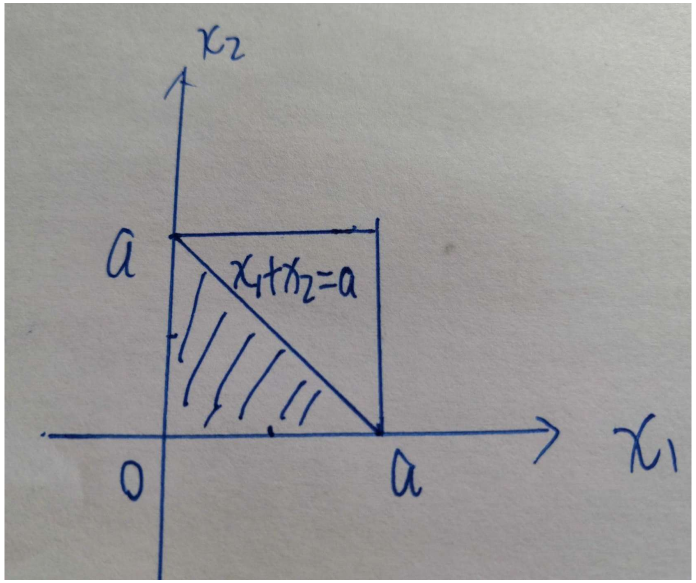
三、会用全概率公式求事件的概率

四、会用贝叶斯公式求事件的条件概率

例1.将长度为a 的木棒分成三段，求这三段可以构成一个三角形的概率。

解：设三段木棒的长度分别为$x_1, x_2, a-(x_1+x_2)$,

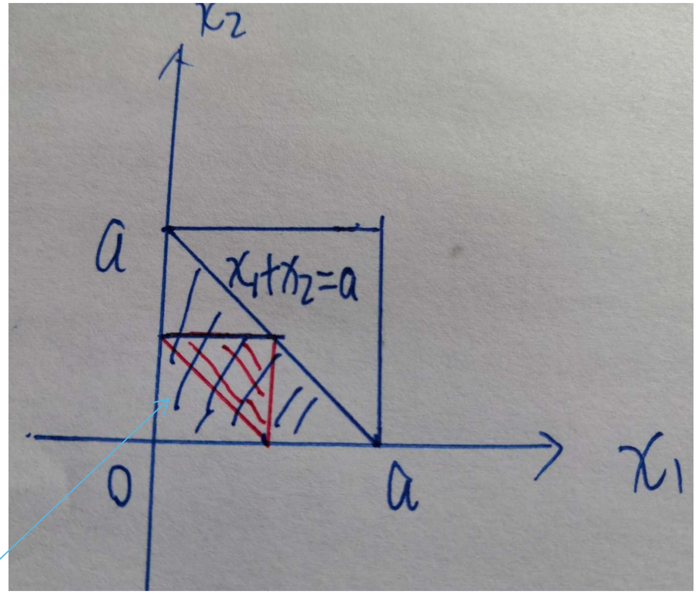
$$\Omega: 0 < x_1 < a,$$
$$0 < x_2 < a,$$
$$0 < x_1 + x_2 < a$$



A：构成三角形

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &> a-(x_1+x_2), \\ x_1-x_2 &< a-(x_1+x_2), \\ x_2-x_1 &< a-(x_1+x_2), \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{a}{2} < x_1+x_2 < a \\ x_1 < \frac{a}{2},\quad x_2 < \frac{a}{2} \end{gathered}}$$



$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{2}}=\frac{1}{4}$$

例2（波里亚罐子模型）设罐子中有a个红球b个黑球，随机取出一个，把原球放回，并且加进与抽出球同色的球c个；再摸第二次，这样下去共摸了n次。试证明第n次取球时取出红球的概率为a/(a+b)。

解：记A_k:第 k 次取出的是红球，k≥1.

用归纳法证明：

当k=1时，$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$，命题成立。

假设 k=n-1时结论成立，即 $P(A_{n-1})=\frac{a}{a+b}$，

下证k=n时结论成立

A_1和$\overline{A}_1$是Ω的一个划分，由全概率公式得：

$$P(A_n)=P(A_1)P(A_n\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_n\mid \overline{A}_1)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+c}{a+c+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+c+b}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

例3 已知第一个箱中装有50件产品，其中一等品30件，第二个箱中装有 30 件产品，含一等品19件，先随机选择一箱，然后在该箱中取出两件产 品，事件A表示第一件是一等品，事件B表示第二件是一等品，求 P(A|B)。

解: $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

设C={选择的是第一箱}，则

$$P(A) = P(C)P(A \mid C) + P(\overline{C})P(A \mid \overline{C})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{30}{50} + \frac{1}{2} \times \frac{19}{30} = 0.6167$$

$$P(B) = P(C)P(B \mid C) + P(\overline{C})P(B \mid \overline{C}) = 0.6167$$

抽签原则

$$P(AB) = P(C)P(AB \mid C) + P(\overline{C})P(AB \mid \overline{C})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{30 \times 29}{50 \times 49} + \frac{1}{2} \times \frac{19 \times 18}{30 \times 29} = 0.3741$$

$$P(A \mid B) = \frac{0.3741}{0.6167} = 0.6066,$$

ch2 随机变量及其分布

一、掌握分布函数和密度函数的性质

二、掌握 几种常见的 离散型分布

二项分布、泊松分布、几何分布

三、掌握 几种常见的 连续型分布

均匀分布、指数分布、正态分布

四、会求随机变量函数的分布

例4 设随机变量$X \sim N(0,1)$,求 $Y=X^2$的密度函数。

解: (1).Y的取值范围为$[0,+\infty)$,

(2).设Y的$d.f.$为$F_Y(y)$, 当$y<0$时,$F_Y(y)=0$,

当$y\ge 0$时,$F_Y(y)=P(X^2\le y)$ $=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$(3).f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, \qquad\qquad\text{其他}\end{cases},$$

ch3 二维随机变量及其分布

一、掌握联合分布函数和联合密度函数的性质

二、会求二维离散型随机变量的联合分布列、边际分布列和条件分布列

三、已知联合分布（密度）函数会求边际分布（密度）函数

四、已知联合密度函数会求条件密度（分布）函数

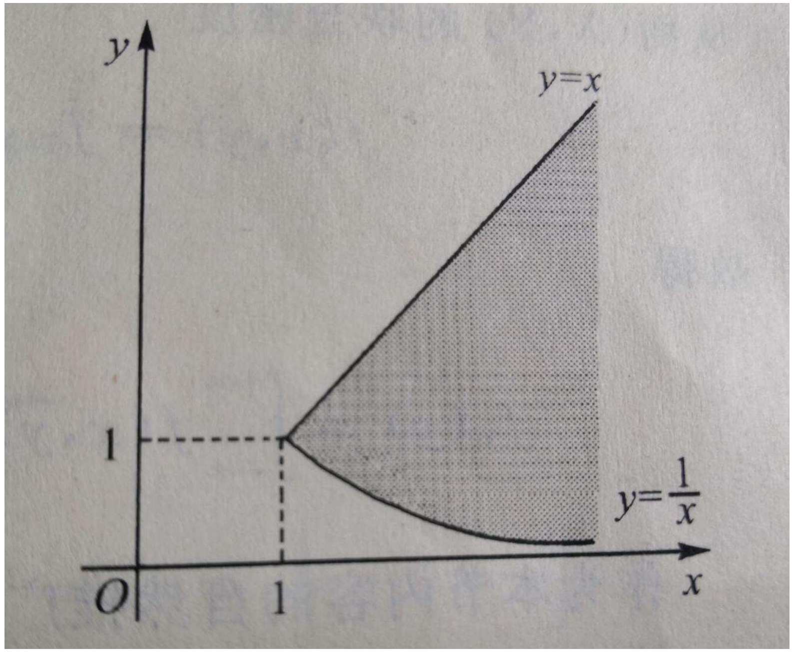
五、会判断两个随机变量是否相互独立

六、会求二维连续型随机变量函数的分布

例5 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2y}, & x>1, \frac{1}{x}<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求$f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.



解： X的取值范围为$(1,+\infty)$,

当$x>1$时, $f_X(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}dy$

$$= \frac{\ln x}{x^2}, \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2}, x > 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases},$$

$$\text{当} x > 1 \text{时}, f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2x^2 y}}{\frac{\ln x}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2y \ln x}$$

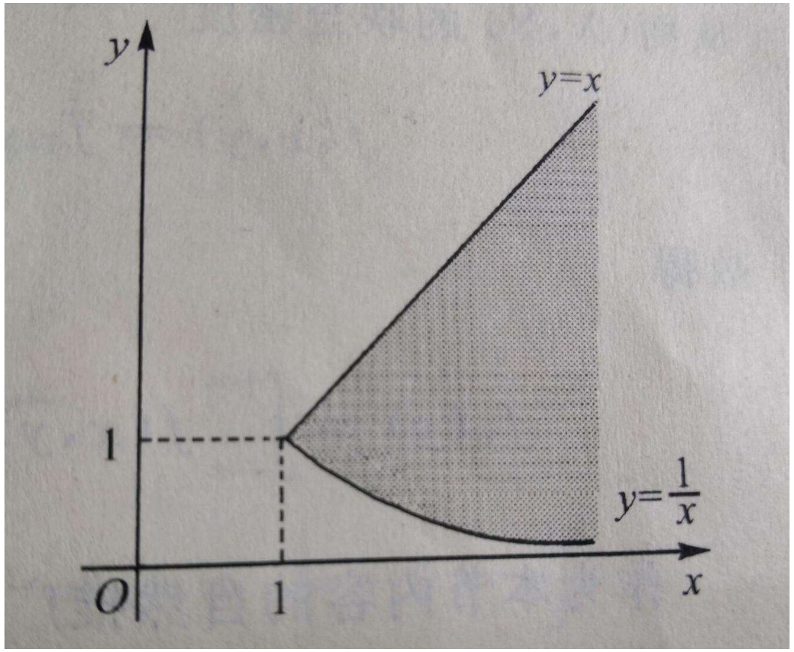
$$\frac{1}{x} < y < x$$

$$当x > 1时, f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y\ln x}, \dfrac{1}{x} < y < x \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases},$$

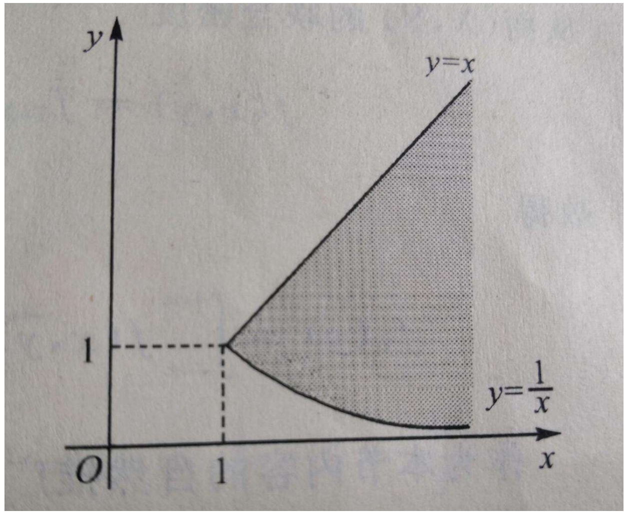
Y的取值范围为$(0,+\infty)$,

$$当y > 1时, f_Y(y) = \int_y^{+\infty} \frac{1}{2x^2 y} dx$$

$$= \frac{1}{2y^2}$$



当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2}$，



$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ \frac{1}{2y^2}, & y\ge 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<y<1$时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2x^2y}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{x^2y}, & x>\frac{1}{y}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

当$y \geq 1$时，$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2x^2y}}{\frac{1}{2y^2}} = \dfrac{y}{x^2}, & x > y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

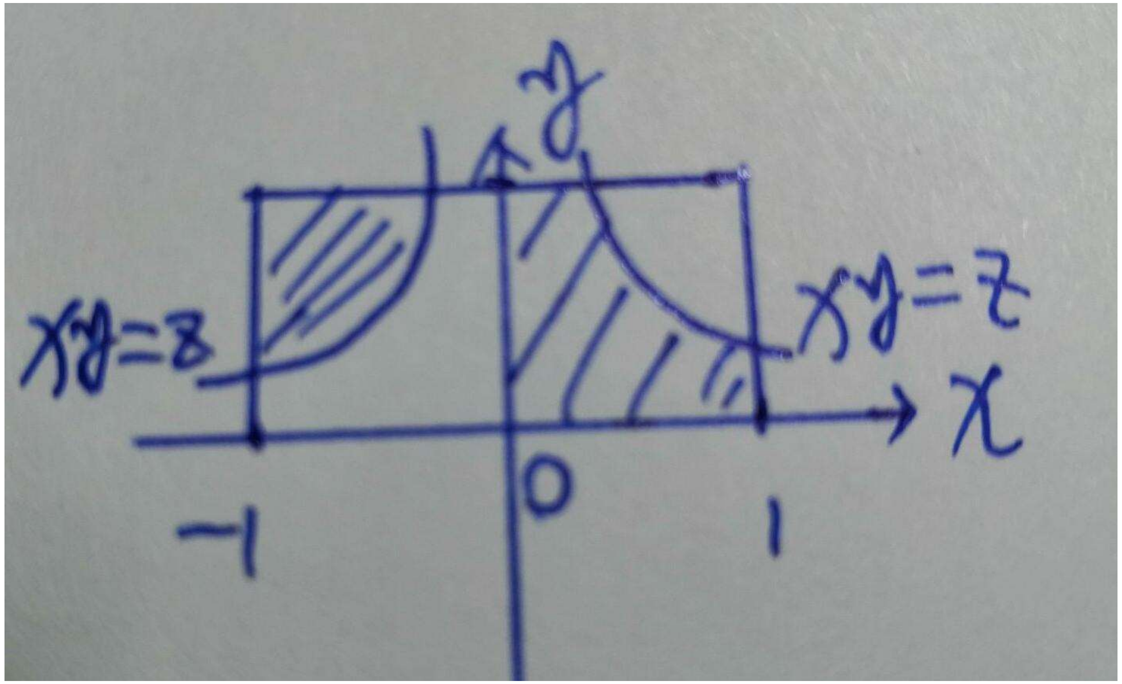
例6 设随机变量$X \sim U(-1,1)$，随机变量$Y \sim U(0,1)$，求$Z = XY$的密度函数。

解: Z的取值范围为$(-1,1)$， 设 Z的$d.f.$为$F_Z(z)$,

当$z<-1$时, $F_Z(z)=0$

当$z\geq 1$时, $F_Z(z)=1$,

当$-1<z<0$时,



$$F_Z(z)=P(XY\leq z)$$

$$=P(X<0, Y\geq \tfrac{z}{X})$$

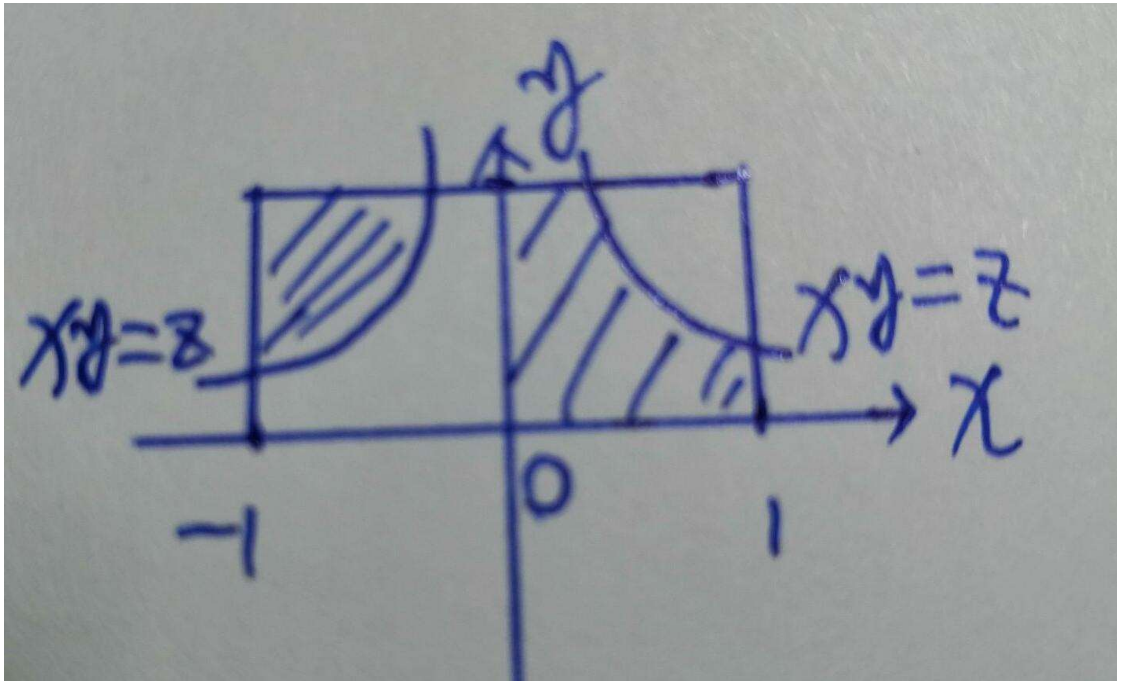
$$=\int_{-1}^{z}dx\int_{\frac{z}{x}}^{1}\tfrac{1}{2}dy=\tfrac{z+1}{2}-\tfrac{z}{2}\ln(-z)$$

当$0 < z < 1$时，$F_Z(z) = P(XY \le z)$

$$= P(XY \le z, X > 0) + P(X < 0)$$

$$= \frac{z}{2} + \int_z^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} \frac{1}{2} dy + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} \ln(z)$$



$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln(-z), & -1 < z < 0 \\ -\frac{1}{2}\ln z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

第四章 随机变量的数字特征

一、会求任意分布的数学期望和方差

二、会求随机变量函数的数学期望

三、会求协方差与相关系数

例 7 设随机变量$X \sim E(2)$, 随机变量$Y \sim E(3)$, X与Y相互独立，$Z = \max\{X, Y\}$, 求$E(Z)$.

解法一： $E(Z) = E(\max\{X, Y\})$

$$= \iint \max\{x, y\} \mathrm{f}_X(x) \mathrm{f}_Y(y) dxdy$$

$$= \iint_{x>y} x \mathrm{f}_X(x) \mathrm{f}_Y(y) dxdy + \iint_{x<y} y \mathrm{f}_X(x) \mathrm{f}_Y(y) dxdy$$

$$= \iint_{x>y} x \cdot 2e^{-2x} \cdot 3e^{-3y} dxdy + \iint_{x<y} y \cdot 2e^{-2x} \cdot 3e^{-3y} dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty} dx\int_0^{x} x\cdot 2e^{-2x}\cdot 3e^{-3y}dy \ +\int_0^{+\infty} dy\int_0^{y} y\cdot 2e^{-2x}\cdot 3e^{-3y}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}\cdot(1-e^{-3x})dx \ +\int_0^{+\infty} y\cdot 3e^{-3y}\cdot(1-e^{-2y})dy$$

$$=\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx-\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-5x}dx \ +\int_0^{+\infty} y\cdot 3e^{-3y}dy-\int_0^{+\infty} y\cdot 3e^{-5y}dy$$

$$=\frac{19}{30}.$$

解法二： Z的分布函数为$F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

当$z>0$时，$F_Z(z)=(1-e^{-2z})(1-e^{-3z})$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-2z} - e^{-3z} + e^{-5z},$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}, z > 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad 其他 \end{cases},$$

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} z\,\mathrm{f}_Z(z)dz = \int_0^{+\infty} z \cdot [2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}]dz$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}.$$