图

大连理工大学

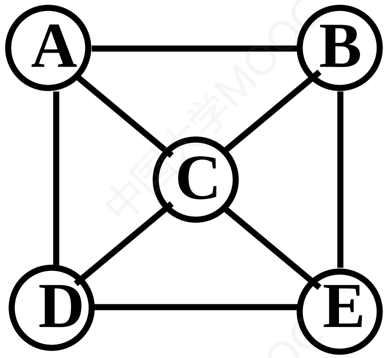
刘 馨 月

主要内容

- 图的基本概念
- 图的存储
- 图的遍历
- 最小生成树
- 最短路径
- 关键路径

图的基本概念

图的基本概念



图是一种较线性表和树更为复杂的数据结构。

线性表：线性结构

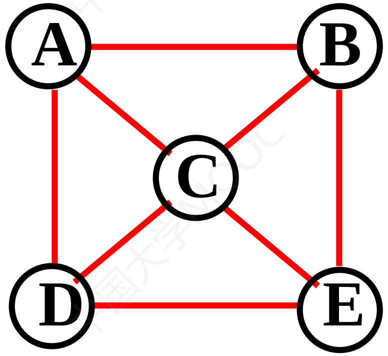
树：层次结构

图：结点之间的关系可以是任意的，即图中任意两个数据元素之间都可能相关。

图 G 是由两个集合顶点集 V(G) 和边集 E(G) 组成的，记作G=(V(G)，E(G))，简称G=(V，E)。

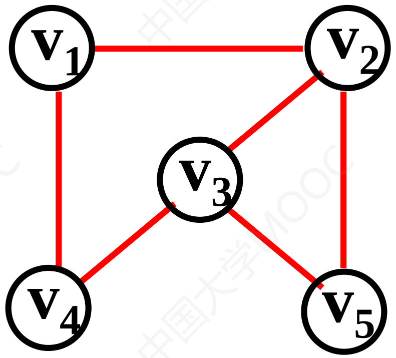
V(vertex)是顶点的有穷非空集合。

E(edge)是两个顶点之间的关系，即边的有穷集合。



无向图

无向图： 边是顶点的无序对，即边没有方向性。



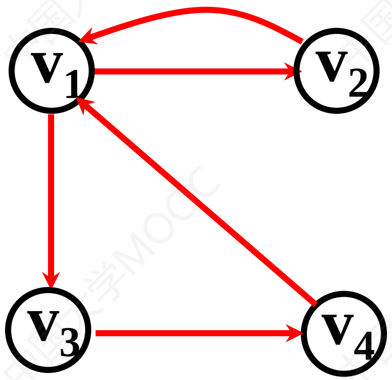
$V = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 \}$

$E = \{ (v_1 ,v_2) , (v_1 ,v_4) , (v_2 ,v_3) , (v_2 ,v_5) , (v_3 ,v_4) , (v_3 ,v_5) \}$

(v_1 , v_2)表示顶点 v_1 和 v_2 之间的边， $(v_1 , v_2) = (v_2 , v_1)$。

有向图

有向图：其边是顶点的有序对，即边有方向性。



$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ <v_1, v_2>, <v_1, v_3>, <v_3, v_4>, <v_4, v_1> \}$

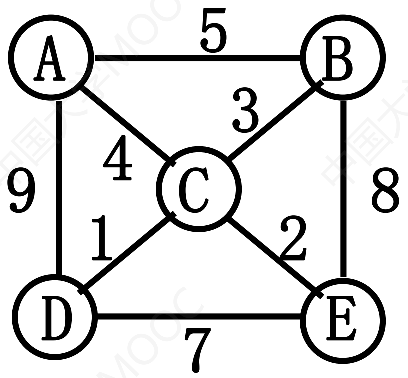
通常边称为弧，$<v_1, v_2>$表示顶点 v_1 到 v_2 的弧。

称 v_1 为弧尾，称 v_2 为弧头。

$<v_1, v_2> \neq <v_2, v_1>$

带权图

有时对图的边或弧赋予相关的数值，这种与图的边或弧相关的数值叫做权。



这些权可以表示从一个顶点到另一个顶点的距离。

可以表示从一个顶点到另一个顶点的耗费。

基本性质

若用 **n** 表示图中顶点数目，用 **e** 表示边或弧的数目，若在图中不存在顶点到自身的边或弧，则

对于无向图，$0 \le e \le \frac{1}{2}n(n-1)$

对于有向图，$0 \le e \le n(n-1)$

证明：

$0 \le e$ 显然成立

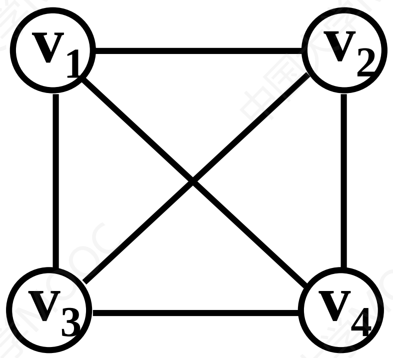
对有向图来说，每个顶点至多可发出 n-1 条弧，共 n 个顶点，故至多有 n(n-1) 条弧，即 $e \le n(n-1)$；

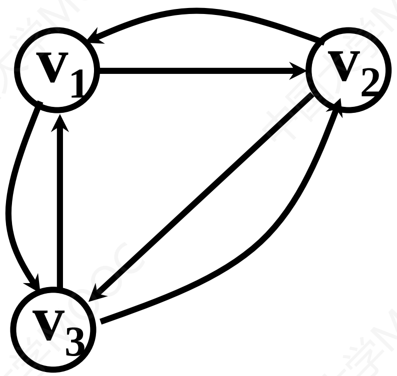
对无向图来说，由于边无方向，则任一两个顶点 v_1 和 v_2，都有 $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$，故至多有n(n-1)/2条边；

完全图、稀疏图、稠密图

有n(n-1)/2 条边的无向图称为完全图。

有 n(n-1) 条弧的有向图称为有向完全图。



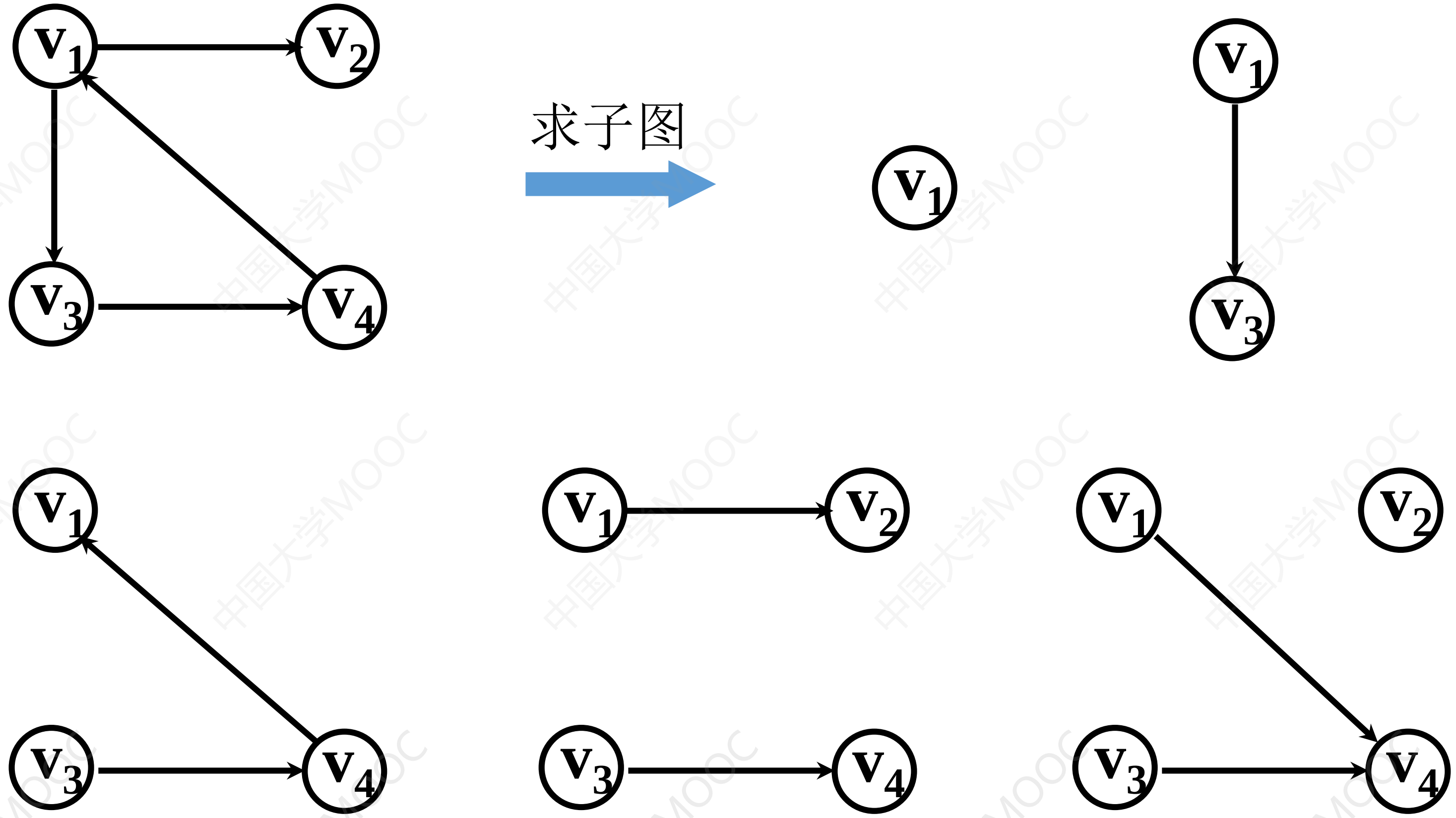


有很少条边或弧的图称为稀疏图。

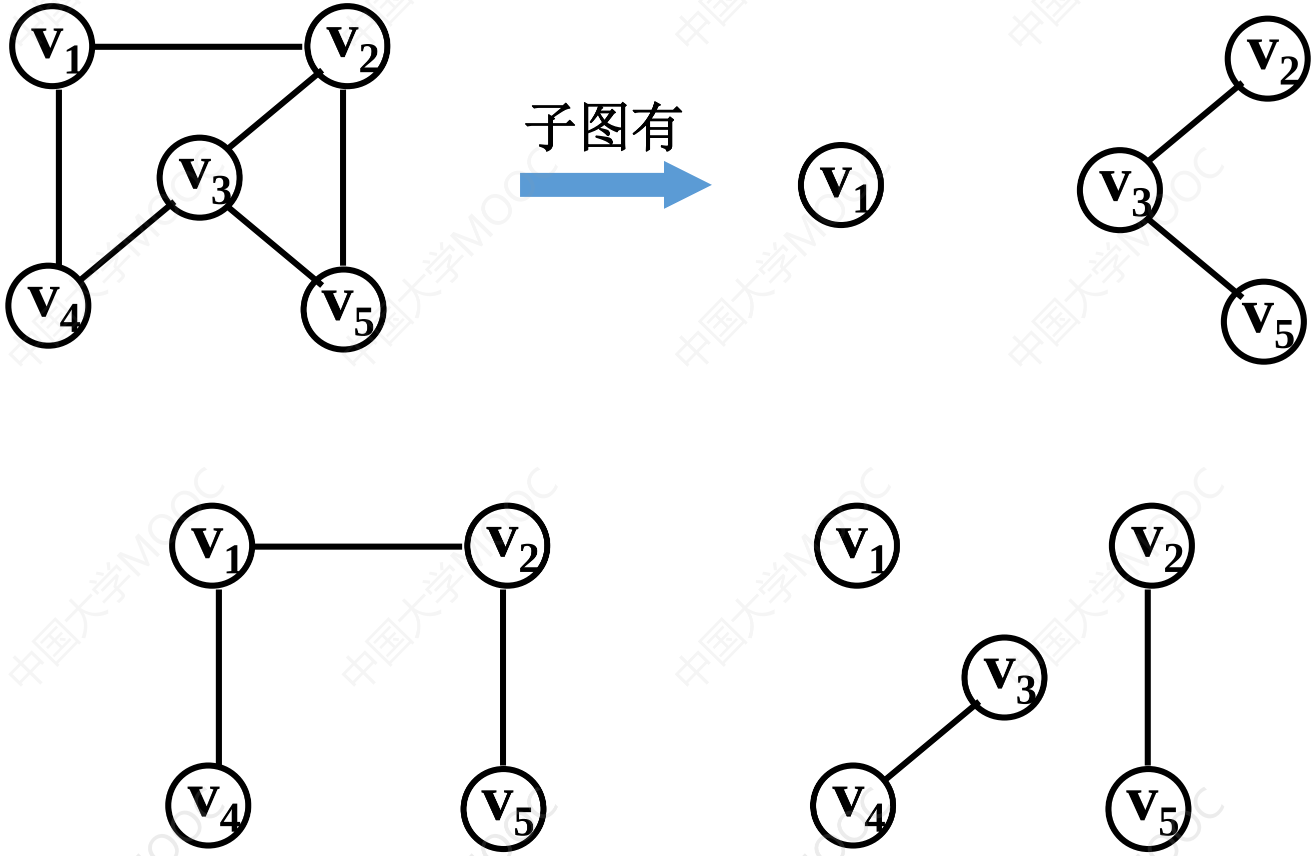
反之称为稠密图。

子图

假设有两个图 G=(V, E) 和 G’=(V’, E’)，如果 $V' \subseteq V$，且 $E' \subseteq E$，则称 G’ 为 G 的子图。



子图



图的基本概念

邻接与关联

对于无向图 G=(V, E)，如果边 (v, v’) ∈ E，则称顶点 v 和 v’ 互为邻接点，即 v 和 v’ 相邻接。

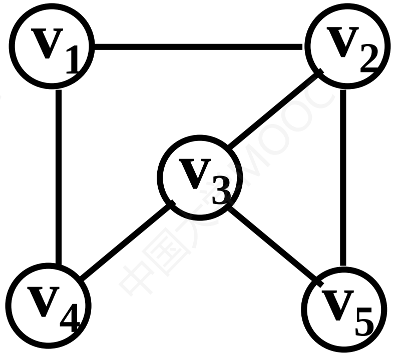
边 (v, v’) 依附于顶点 v 和 v’，或者说 (v, v’) 与顶点 v 和 v’ 相关联。

对于有向图 G=(V, E)，如果弧 <v, v’> ∈ E，则称顶点 v 邻接到顶点 v’，顶点 v’ 邻接到顶点 v 。

弧 <v, v’> 和顶点 v, v’ 相关联。

顶点的度

对于无向图，顶点 v 的度是和 v 相关联的边的数目，记做 TD(v)。



顶点 v_3 的度为 **3**

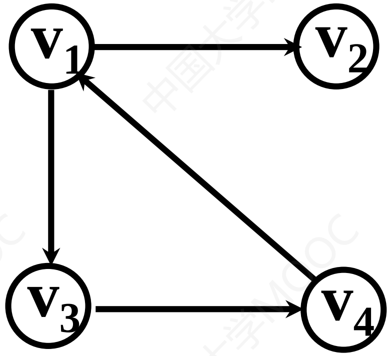
对于有向图，顶点 v 的度 TD(V) 分为两部分——出度、入度。

以顶点 v 为头的弧的数目称为 v 的入度，记为**ID(v)**；

以顶点 v 为尾的弧的数目称为 v 的出度，记为**OD(v)**;

顶点 v 的度为 **TD(v) = ID(v) + OD(v)**。

顶点的度



顶点 v_1 的出度为 2

顶点 v_1 的入度为 1

顶点 v_1 的度为 3

性质：对于一个图(无向图、有向图)，如果顶点 v_i 的度为TD(v_i)，那么具有 n 个顶点、e 条边或弧的图，必满足如下关系

$$e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} TD(v_i)$$

无向图、有向图的边或弧均计算两遍。

图的基本概念

路径

图（无向图 、有向图）G 中若存在一条有穷非空序列 $w = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \dots\ e_k\ v_k$，其中 v_i 和 e_i 分别为顶点和边（或弧），则称 w 是从顶点 v_0 到 v_k 的一条路径。

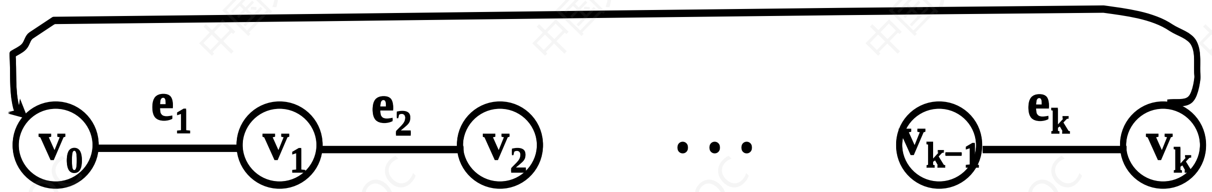
顶点 v_0 和 v_k 分别称为路径 w 的起点和终点。

路径的长度是路径上的边的数目。

w 的长度为 k

起点和终点相同的路径称为回路(环)。

简单路径



• 若路径 w 的顶点 v_0 , v_1 , … , v_k ， 除v_0 和v_k可以相同之外，其他顶点互不相同，则称 w 为简单路径。

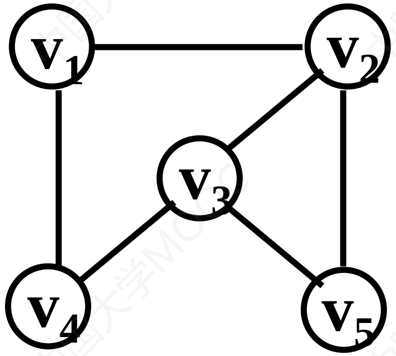
• 如果构成回路的路径是简单路径，称此回路为简单回路。

不带回路的图称为无环图。不带回路的有向图称为有向无环图。

连通图

无向图G，如果从顶点v到顶点v’有路径，则称v和v’是连通的。

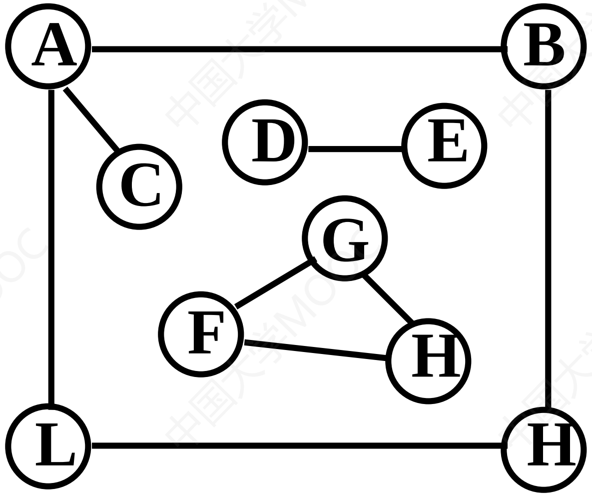
如果对于无向图 G 中任意两个顶点 v_i , v_j ∈V, v_i 和 v_j 都是连通的，则称 G 是连通图。



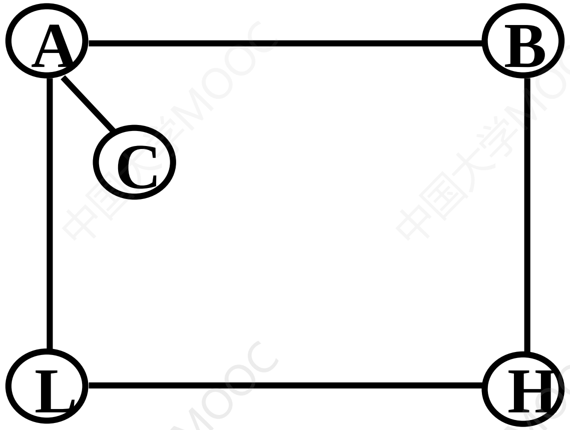
是否为连通图

连通分量

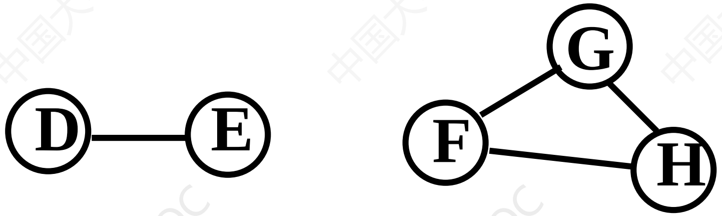
连通分量指的是无向图中的最大连通子图。



非连通图



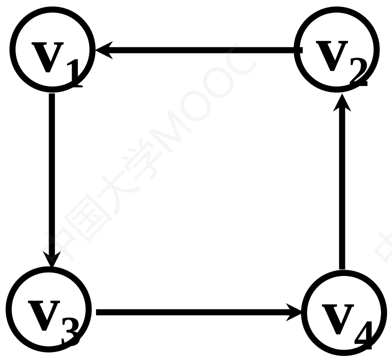
连通分量为



强连通图、强连通分量

有向图G，如果从顶点 v 到顶点 v' 有路径 或 从顶点 v' 到顶点 v 有路径，则称 v 和 v' 是连通的。

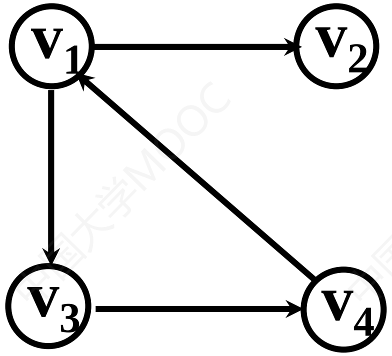
在有向图 G 中，如果对于每一对 $v_i, v_j \in V$，$v_i \neq v_j$，从 v_i 到 v_j 和 从 v_j 到 v_i 都存在路径，则称 G 是强连通图。



是否为强连通图

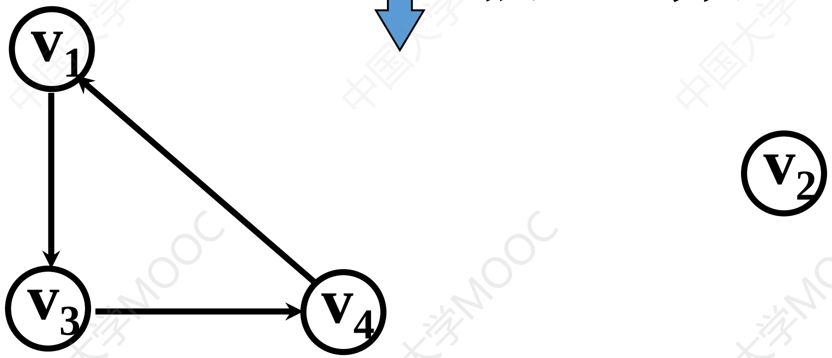
强连通图、强连通分量

有向图中的最大强连通子图称作有向图的强连通分量。



非强连通图

强连通分量



生成树

一个连通图 G 的一个包含所有顶点的极小连通子图 T 是：

(1) T 包含 G 的所有顶点 n 个

(2) T 为连通子图

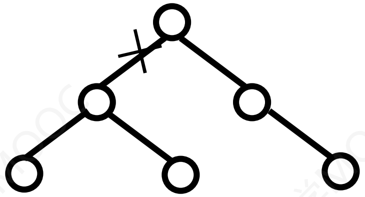
(3) T 包含的边数最少

T 是一棵有 n 个顶点，n-1 条边的生成树（支撑树）。

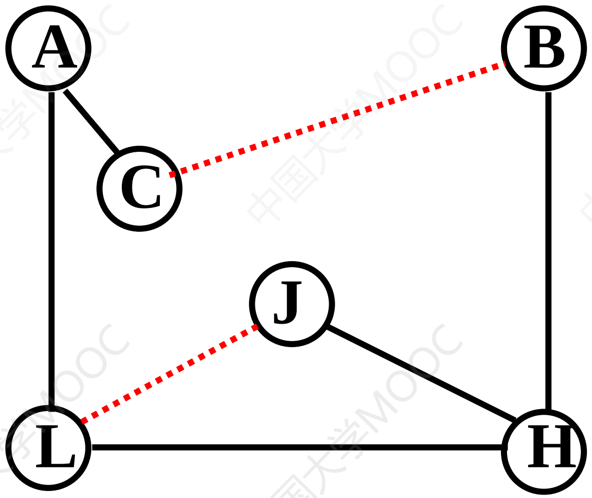
生成树

性质1：一个有n个顶点的连通图的生成树有且仅有n-1条边。

1. 如果一棵生成树有 n 个顶点和小于 n-1 条边，则为非连通图。
   构成一棵 n 顶点生成树需要 n-1 条边，
   少于 n-1 ，则必有边断开，不再连通。

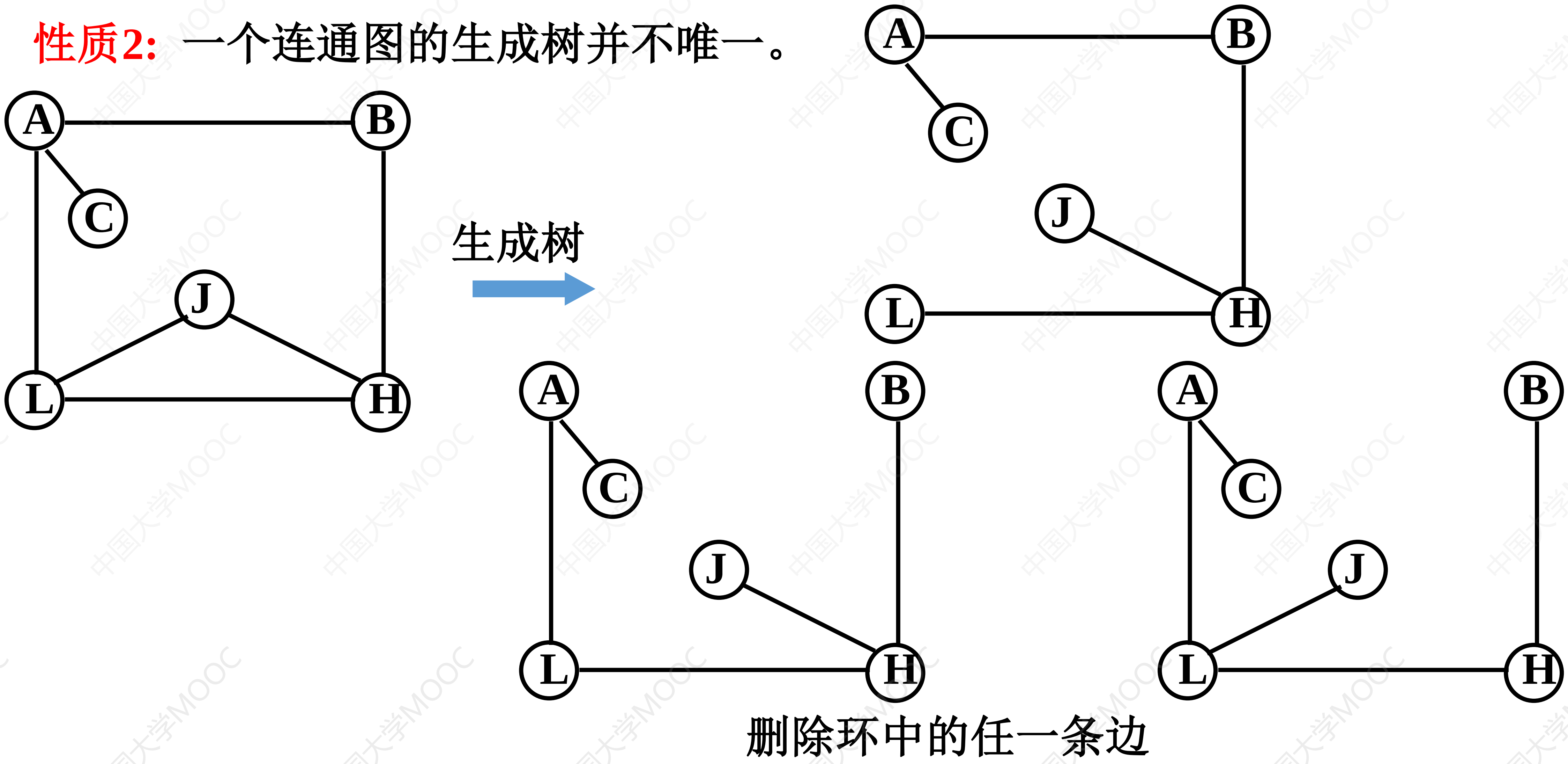


2. 如果一棵生成树有 n 个顶点和多于 n-1 条边，则一定有环。
   构成一棵 n 顶点生成树需要 n-1 条边，
   若再添加一条边，必会使得与它关联的那两个顶点之间有了第二条路径。



生成树

性质2：一个连通图的生成树并不唯一。



图

大连理工大学
刘 馨 月