第四章 随机变量的数字特征

- 数学期望
- 方差
- 协方差与相关系数
- 其它数字特征
- 综合例题

§4.1 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 二维随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质

离散型随机变量的数学期望

例 1 设某班级中有20人，在一次考试中成绩 如下：

2人50分,3人60分,8人70分,5人80分,2人90分。

这20人的平均成绩为

$$\frac{1}{20}(2\times 50+3\times 60+8\times 70+5\times 80+2\times 90)$$

$$=50\times\frac{2}{20}+60\times\frac{3}{20}+70\times\frac{8}{20}+80\times\frac{5}{20}+90\times\frac{2}{20}$$

$$=71$$

离散型随机变量的数学期望

例 1 设某班级中有20人，在一次考试中成绩 如下：

2人50分,3人60分,8人70分,5人80分,2人90分。

从这20人中任取一人，以 X表示其成绩，则 X为一个离散型随机变量， 分布列为：

X	50	60	70	80	90
P_k	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$

离散型随机变量的数学期望

将随机变量X的取值乘以对应概率再 相加，可得:

$$50\times\frac{2}{20}+60\times\frac{3}{20}+70\times\frac{8}{20}+80\times\frac{5}{20}+90\times\frac{2}{20}$$

$$=71$$

所得结果与平均成绩是 一样的。

离散型随机变量的数学期望(均值)

定义1 设离散型随机变量 X的分布列为 $P\{X = x_k\} = p_k$，$k = 1,2,3,\cdots$，若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机 变量 X的(数学)期望，记为$E(X)$,即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \qquad (4.1.1)$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$不收敛，则称$X$的数学期望不存在。

例 1 设随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2},k=1,2,\cdots,$$

解： 因为 $\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty,$

所以随机变量 X 的期望不存在。

例 2 设随机变量$X\sim B(n,p)$，求X的数学期望。

解：$E(X)=np.$

例 3 设$r.v.X\sim P(\lambda)$，求X的数学期望 $E(X)$。

解：X的分布列为P$(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

例 4 设随机变量$X \sim G(p)$,求X的数学期望。

解： X的分布列为$P(X=k)=pq^{k-1}, k=1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\boxed{k\cdot q^{k-1}}$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}.$$

连续型随机变量的数学期望

定义2 设随机变量 X的密度函数为 $f(x)$,

若广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛，则称

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$为随机变量$X$的(数学)期望,

记为$E(X)$,即$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ （4.1.2）.

若$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx=+\infty$， 则称$X$的期望不存在。

例 5 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad x\in R,$$

问 X 的数学期望 $E(X)$ 是否存在。

解：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx^2=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$$

所以 X 的数学期望 $E(X)$ 不存在。

例 6 设随机变量 $X \sim U(a,b)$, 求X的数学期望。

解: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

例 7 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 求X的数学期望 $E(X)$。

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty} xd(-e^{-\lambda x})$$

$$=(-xe^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-\lambda x})dx=\frac{1}{\lambda}$$

例 8 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

随机变量函数的数学期望

定理1 设Y是$r.v.X$的函数：$Y=g(X),(g(x)$是连续函数)。

（1）设X是离散型随机变量，它 的分布列为$P\{X=x_k\}$

$=p_k,k=1,2,\cdots$，若级数$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛，

则$r.v.Y=g(X)$的期望存在，且

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k。\qquad(4.1.3)$$

(2).设X是连续型随机变量，它的密度函数为$f(x)$,

若广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，

则 $r.v.Y$的 (数学)期望存在 ,且

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \qquad （4.1.4）。$$

例 9 设随机变量 $X \sim B(n,p)$，求 $E(2^{-X})$。

解：

$$E(2^{-X}) = \sum_{k=0}^{n} [2^{-k} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{p}{2})^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (\frac{p}{2} + 1 - p)^n = (1 - \frac{p}{2})^n$$

例10 设随机变量$X \sim N(0,1)$，求$E(|X|)$。

解：

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

例11 设某种商品的需求量X~U[10, 30]，商店每销售一单位商品获利500元，若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损100元，若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位商品获利300元，问商店进多少该商品才能使商店所获利润的期望值最大？

解： 设商店的进货量为y, 商店所获利润为Z, 则

$$Z = g(X) = \begin{cases} 500y + 300(X - y), \ X \geq y \\ 500X - 100(y - X), X < y \end{cases} = \begin{cases} 200y + 300X, X \geq y \\ 600X - 100y, \ X < y \end{cases}$$

$$E(Z)=E[g(X)]$$

$$=\int_y^{30}(200y+300x)\cdot\frac{1}{20}dx+\int_{20}^{y}(600x-100y)\cdot\frac{1}{20}dx$$

$$=-\frac{15}{2}y^2+350y+5250$$

$$=-\frac{15}{2}(y-\frac{70}{3})^2+6000$$

当$y=\frac{70}{3}\approx 23$时所获利润的期望值最大。

二维随机变量函数的数学期望

定理 2 设Z是$r.v.X$和Y的函数：$Z=g(X,Y)$,($g(x,y)$是二元连续函数)。

（1）设(X,Y)是二维离散型随机变量，其联合分布列为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，

若级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则$r.v.Z=g(X,Y)$的期望

存在,且$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$。 (4.1.5)

(2).设(X,Y)是二维连续型随机变量，

其联合密度函数为$f(x,y)$，

若$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)dy<+\infty$，

则随机变量 Z的(数学)期望存在，且$E(Z)=$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dy \qquad （4.1.6）。$$

例 12 设二维随机变量(X, Y)的联合分布列为

Y \ X	-1	0	1	
0	1/9	2/9	0	$\frac{1}{3}$
1	1/3	1/9	2/9	$\frac{2}{3}$

求$E(X), E(X^2), E(XY)$。

解： $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}, E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3},$

$E(XY)=1\times(-1)\times\frac{1}{3}+1\times1\times\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}.$

例 13 设二维连续型 $r.v.(X,Y)$的联合密度函数为

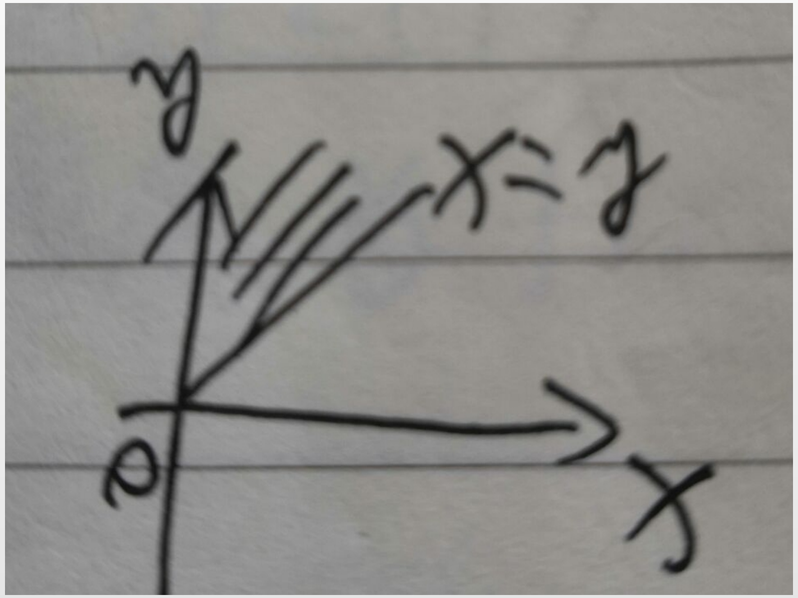
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y<+\infty \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$$ 求$E(X), E(XY)$。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dy$$

$$=\iint\limits_{0<x<y<+\infty}x\cdot e^{-y}dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}x\cdot e^{-y}dy$$

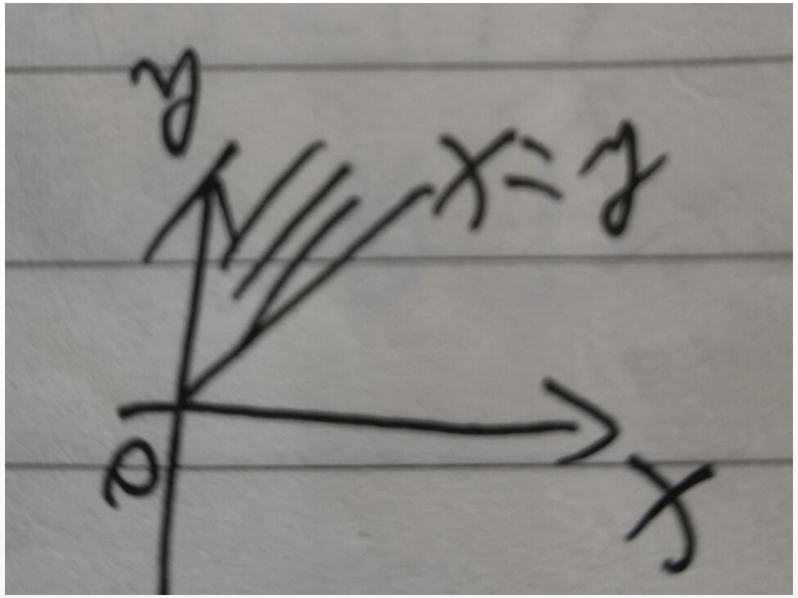


$$=\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x}dx=1$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dy$$

$$=\iint\limits_{0<x<y<+\infty} xy\cdot e^{-y}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}xy\cdot e^{-y}dx=\int_0^{+\infty}ye^{-y}\cdot\frac{y^2}{2}dy=3$$



例14 设一商店经销某种商品，每周的进货量X~U[10,20]，顾客对该商品的需求量Y~U[10,20]，且二者相互独立，商店每售出一单位商品可获利1000元，若供不应求，则可从其他商店调剂供应，此时每单位商品获利500元。试计算此商店经销该商品所获利润的期望值。

解： 设商店所获利润为Z，则

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}1000Y, & X\geq Y\\ 1000X+500(Y-X), & X<Y\end{cases}=\begin{cases}1000Y, & X\geq Y\\ 500(X+Y), & X<Y\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E[g(X,Y)] \\
&= \iint\limits_{I} 1000y \cdot \tfrac{1}{100} dxdy \\
&\quad + \iint\limits_{\mathrm{II}} 500(x+y) \cdot \tfrac{1}{100} dxdy \\
&= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^{x} 1000y \cdot \tfrac{1}{100} dy \\
&\quad + \int_{10}^{20} dx \int_{x}^{20} 500(x+y) \cdot \tfrac{1}{100} dy \\
&= \frac{42500}{3} (\text{元})
\end{aligned}
$$

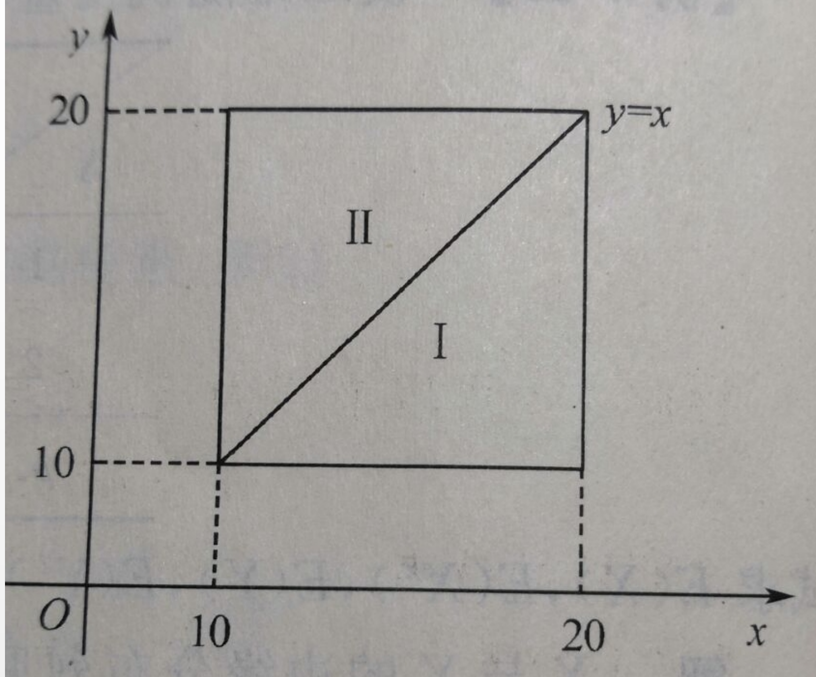


图 4-2

数学期望的性质:

(1).设C为常数， $E(C)=C$;

(2).设X是$r.v.$,C为常数，则$E(CX)=C\cdot E(X)$;

(3).设X和Y是两个$r.v.$,则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

推论：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是n个随机变量，则

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

(4).若$r.v.X$和Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

例 15 设随机变量 $X \sim E(1), Y \sim U(0,2)$,

(1).求 $E(X+Y), E(3X-3Y^2+1)$;

(2).若 X 与 Y 相互独立，求 $E[(X+Y)(2X-Y+1)]$。

解： (1). $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+1=2$,

$$E(3X-3Y^2+1)=3E(X)-3E(Y^2)+1$$

$$=3\times 1-3\times \tfrac{4}{3}+1=0$$

$$E(Y^2)=\int_0^2 y^2\cdot \tfrac{1}{2}dy=\tfrac{4}{3},$$

$$(2).E[(X+Y)(2X-Y+1)] = E(X+Y)E(2X-Y+1)$$

$$E[(X+Y)(2X-Y+1)]$$

$$= E[2X^2 - XY + X + 2XY - Y^2 + Y]$$

$$= 2E(X^2) + E(XY) + E(X) - E(Y^2) + E(Y)$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx + E(X)E(Y) + 1 - \tfrac{4}{3} + 1$$

$$= 2\times 2 + 1\times 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{17}{3}.$$

例 16 设随机变量 $X \sim B(n,p)$，求$E(X)$。

解：考虑n 重 伯努利试验，令

$$X_k = \begin{cases} 0, \text{若第}k\text{次试验}A\text{不发生} \\ 1, \quad \text{若第}k\text{次试验}A\text{发生} \end{cases}, \quad k = 1,2,\cdots,n,$$

则n 重 伯努利试验事件A发生的次数X~B(n,p), $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$,

$$E(X) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = np.$$

$$\boxed{E(X_k) = p \cdot 1 + 0 \cdot (1-p) = p}$$

例 17 已知一质点在数轴上从原点出发随机游走，步长为一个单位，每步向正方向走一步的概率为p，向负方向走一步的概率为$1-p$.试求该质点走n步后的平均位置。

解： 设该质点走n步后的位置为X,则 $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$,

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{若第}k\text{步向正方向走}\\ -1, & \text{若第}k\text{步向负方向走}\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

$$E(X)=E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k) \quad =n(2p-1).$$

$$\boxed{E(X_k)=p\cdot 1+(-1)\cdot(1-p)=2p-1}$$

§4.2 方差

- 方差的定义及计算
- 方差的性质
- 常见分布的方差

方差的定义

定义2 设X是一个随机变量，若 $E[X-E(X)]^2$存在，

则称其为随机变量 X的方差,记为$D(X)$,

即 $D(X)=E[X-E(X)]^2$。 (4.2.1)

称$\sqrt{D(X)}$为X的标准差或均方差，记为$\sigma(X)$。

方差的计算

(1)对离散型$r.v.X$，若$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,$

则$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2 p_k$　　(4.2.2)

(2)对连续型 $r.v.X$，若X的密度函数为 $f(x)$，则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx \qquad （4.2.3）$$

（3） $\boxed{D(X)=E(X^2)-E^2(X)}$ 　　（4.2.4）

例 18 设连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{(x+1)^4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$ 求$E(X),D(X)$。

解： $$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{3}{(x+1)^4}dx=3\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)-1}{(x+1)^4}dx$$

$$=3\left[\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}d(x+1)-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^4}d(x+1)\right]$$

$$=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{3}{(x+1)^4}dx=3\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-1)+1}{(x+1)^4}dx$$

$$=3[\int_0^{+\infty}\frac{x-1}{(x+1)^3}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^4}d(x+1)]$$

$$=3[\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}d(x+1)-\int_0^{+\infty}\frac{2}{(x+1)^3}d(x+1)+\tfrac{1}{3}]$$

$$=3(1-2\times\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})=1$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1-(\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{3}{4}.$$

例 19 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$D(X)$。

解：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

方差的性质:

(1).设C为常数， $D(C)=0$;

(2).设X是$r.v.$, a,b为常数，则$D(aX+b)=a^2D(X)$;

特例：$D(-X)=D(X)$, $D(X+b)=D(X)$;

(3).设 X和 Y是两个 $r.v.$, 且相互独立，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y);$$

推广：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是n个$r.v.$，且相互独立，

$$\text{则}D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)\text{。}$$

例 20 设随机变量$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$。

解： 考虑n 重 伯努利试验，令

$$X_k = \begin{cases} 0, \text{若第}k\text{次试验}A\text{不发生} \\ 1, \quad \text{若第}k\text{次试验}A\text{发生} \end{cases}, \quad k = 1,2,\cdots,n,$$

则n 重 伯努利试验事件A发生的次数X~B(n,p)， $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$，

并且$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立，

$$D(X)=D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)$$

$$E(X_k)=p\cdot 1+0\cdot(1-p)=p$$

$$D(X_k)=E(X_k^{\ 2})-E^2(X_k) \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$=p-p^2=pq$$

$$D(X)=npq\ .$$

例 21 设随机变量 $(X,Y)\sim N(1,1,2^2,3^2,0)$,

求 $D(2X-3Y+1)$。

解： 因为$\rho=0$，所以X与Y相互独立，

$$D(2X-3Y+1)=D(2X-3Y)$$

$$=4D(X)+9D(Y)$$

$$=4\times 2^2+9\times 3^2=97$$

常见分布的方差

1. 二项分布，$X \sim B(n,p), E(X)=np, D(X)=npq$

2. 泊松分布，$X \sim P(\lambda), E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$

3. 几何分布，$X \sim G(p), E(X)=1/p, D(X)=q/p^2$

4. 均匀分布，$X \sim U(a,b), E(X)=(a+b)/2, D(X)=(b-a)^2/12$

5. 正态分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2), E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$。

6. 指数分布，$X \sim E(\lambda), E(X)=1/\lambda, D(X)=1/\lambda^2$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \quad = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2 d(-e^{-\lambda x}) - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}$$

例 22　设随机变量$X \sim G(p)$,求X的方差。

解：　X的分布列为P$(X=k) = pq^{k-1}, k=1,2,\cdots$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)+k]\cdot q^{k-1}$$

$$= pq\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}} + p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right)'$$

$$= pq\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^{k}\right)''+\frac{1}{p} = pq\left(\frac{1}{1-q}\right)''+\frac{1}{p}=\frac{q+1}{p^2}.$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\frac{q+1}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}.$$