

The background is a solid blue color with a subtle pattern of small, light blue geometric shapes (cubes and rectangles) scattered across it. A faint, repeating watermark of the text "中国大学MOOC" is visible diagonally across the entire image. In the center, the large white Chinese character "图" is displayed.

图

大连理工大学

刘馨月

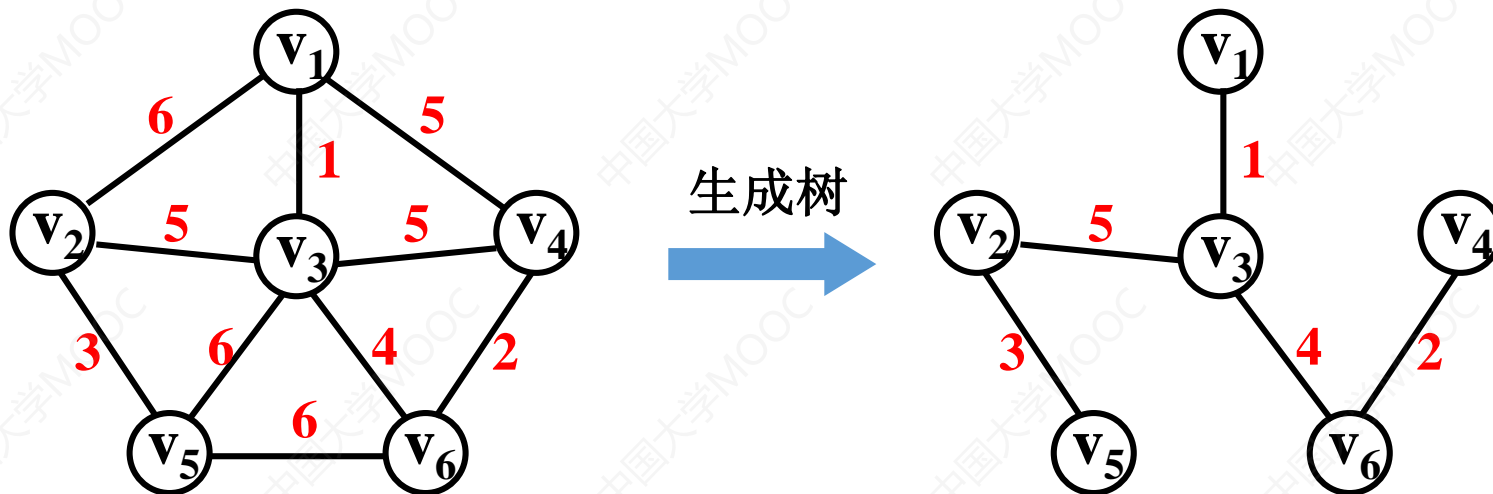
主要内容

- 图的基本概念
- 图的存储
- 图的遍历
- 最小生成树
- 最短路径
- 关键路径

最小生成树

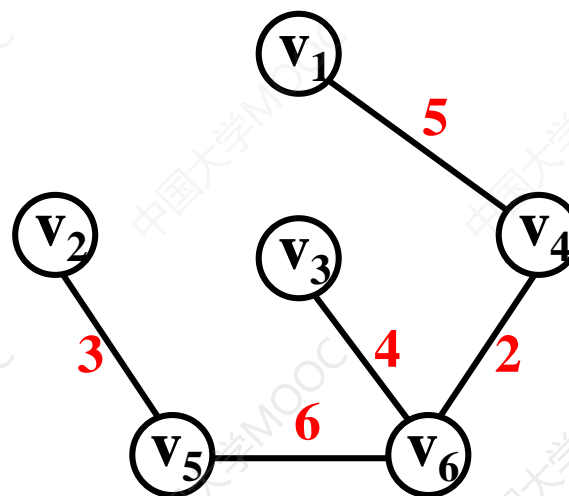
- 最小生成树的概念
 - 连通图的最小生成树
 - 应用举例
- 最小生成树的构造算法
 - **Prim**算法
 - **Kruskal**算法

最小生成树的概念

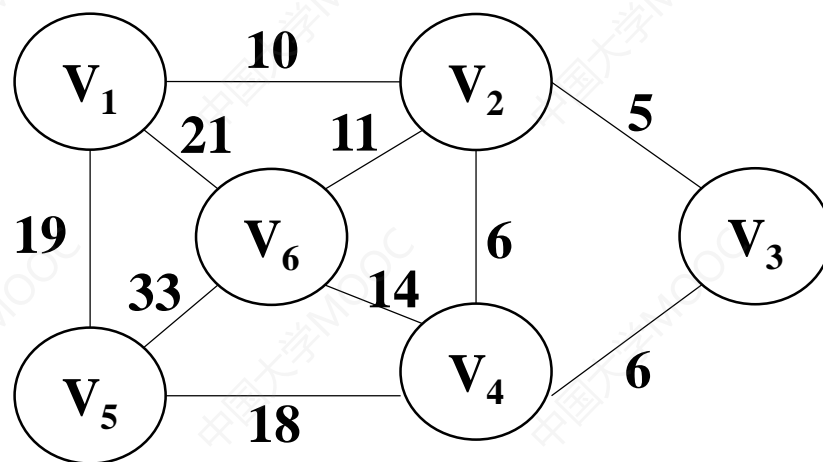


生成树的代价:为树上各边的权之总和。

所有的生成树中，代价最小的生成树称为图G的**最小生成树** (minimum-cost spanning tree, 简称MST)。



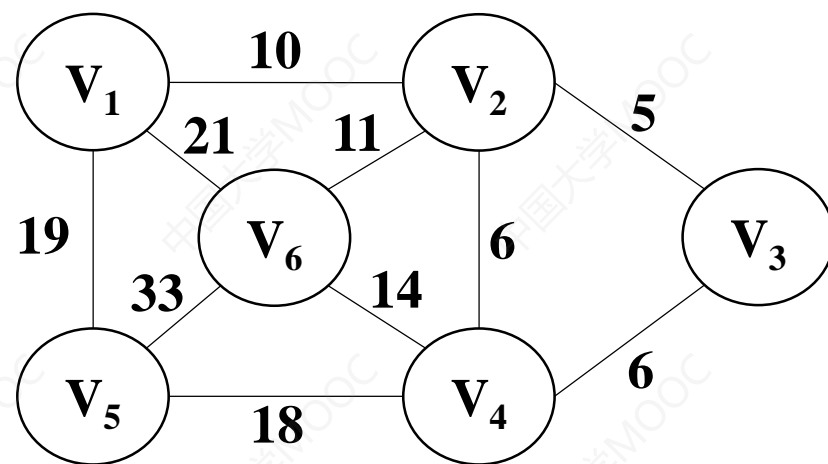
最小生成树应用举例



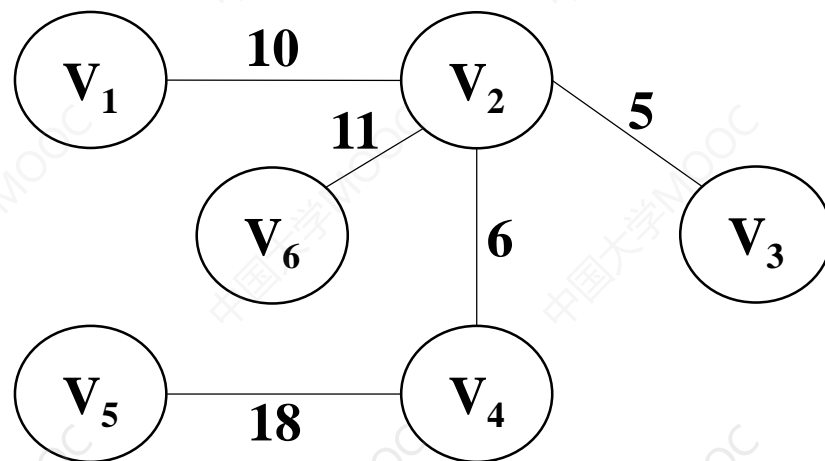
- 上图代表6个城市间的交通网，边上的权表示公路的造价
- 现在要用公路把6个城市连接起来（这至少要修5条公路）
- 如何设计使得这5条公路的总造价最少呢？

最小生成树

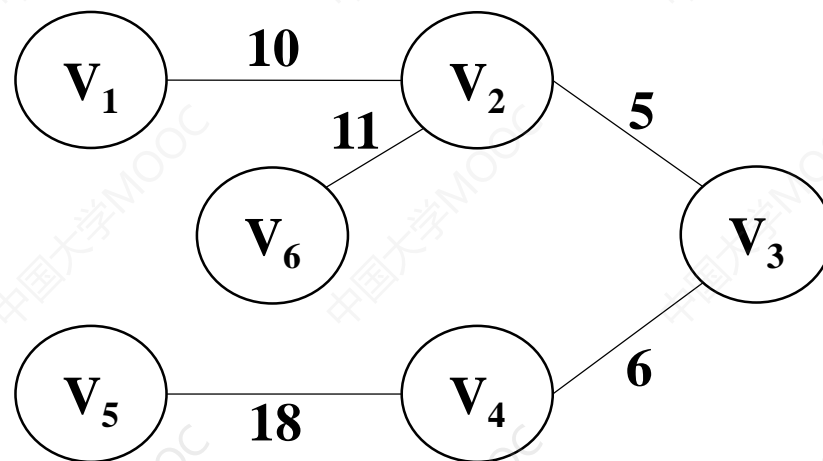
最小生成树应用举例



(a)



(a)的MST



(a)的MST

最小生成树的构造方法

- 普里姆 (Prim) 算法
- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法

Prim算法

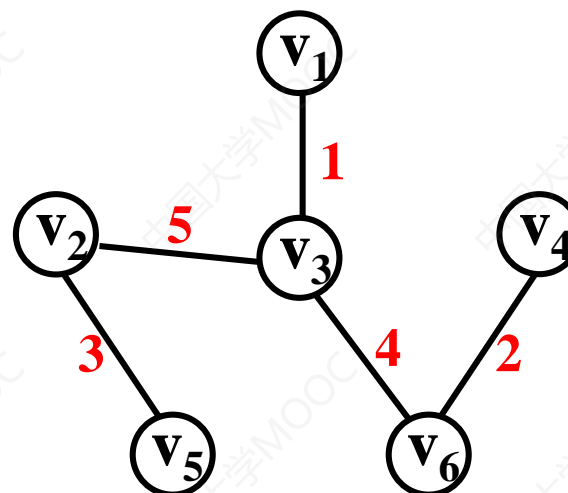
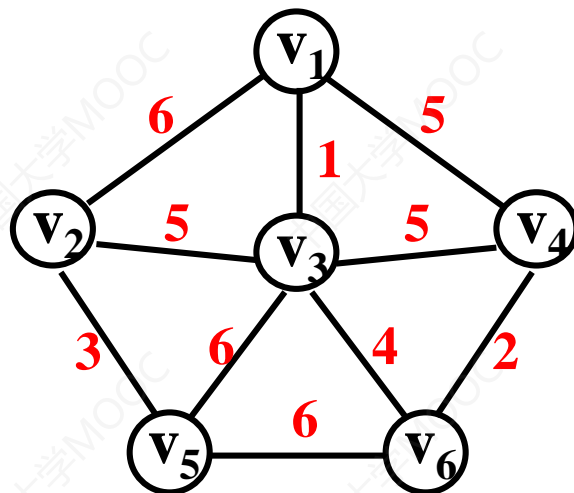
思想:

- $G = (V, E)$ 是具有 n 个顶点的连通图, 设 U 是最小生成树中顶点的集合, TE 是最小生成树中边的集合;
- 初始, $U = \{ u_1 \}$, $TE = \{ \}$,
- 重复执行:
 - 在所有 $u \in U, v \in V - U$ 的边 (u, v) 中寻找代价最小的边 (u', v') , 并纳入集合 TE 中;
 - 同时将 v' 纳入集合 U 中;
- 直至 $U = V$ 为止。

集合 TE 中必有 $n-1$ 条边。

最小生成树

Prim算法 例,



初始: $U = \{ v_1 \}$, $V-U = \{ v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$

$TE = \{ \}$

$U = \{ v_1, v_3 \}$, $V-U = \{ v_2, v_4, v_5, v_6 \}$

$\langle v_1, v_3 \rangle$

$U = \{ v_1, v_3, v_6 \}$, $V-U = \{ v_2, v_4, v_5 \}$

$\langle v_3, v_6 \rangle$

$U = \{ v_1, v_3, v_4, v_6 \}$, $V-U = \{ v_2, v_5 \}$

$\langle v_6, v_4 \rangle$

$U = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_6 \}$, $V-U = \{ v_5 \}$

$\langle v_3, v_2 \rangle$

$U = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$, $V-U = \{ \}$

$\langle v_2, v_5 \rangle$

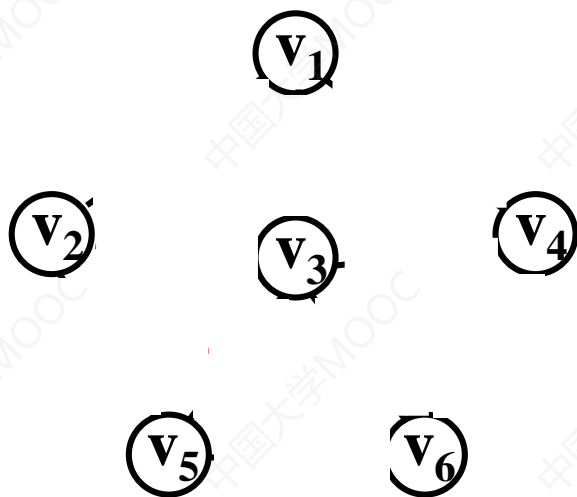
重点: 边一定存在U 与 $V-U$ 之间(MST性质)。

Kruskal算法

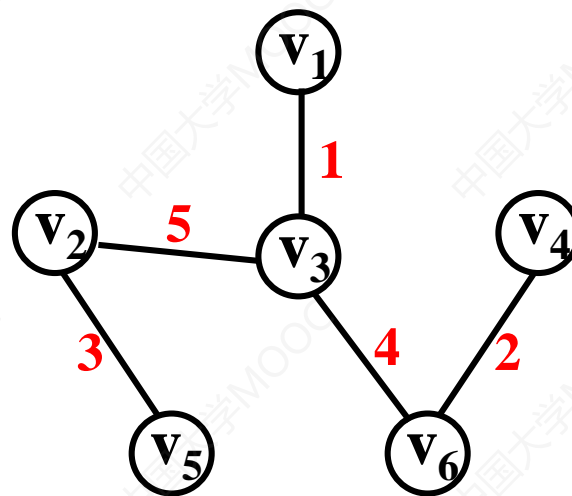
- 使用的贪心准则，从剩下的边中**选择具有最小权值且不会产生环路的边**加入到生成树的边集中。

最小生成树

Kruskal算法



当前权值最小边 (v_5, v_6)



初始 $TE = \{ \}$

$\langle v_1, v_3 \rangle$

$\langle v_4, v_6 \rangle$

$\langle v_2, v_5 \rangle$

$\langle v_3, v_6 \rangle$

$\langle v_2, v_3 \rangle$

Kruskal算法

- 基本操作：
 - (1) 确定权值最小的边；
 - (2) 判定一条边所关联的两个顶点是否在一个连通分量中；
 - (3) 如果不是则合并两个顶点所属的连通分量。

Prim 算法

- 算法时间复杂度: $O(n^2)$
- 与边的个数无关;
- 适合于求边稠密的图的最小生成树。

Kruskal 算法

- 算法时间复杂度: $O(e \log e)$
e为图的边的数目
- 适合于求边稀疏的图的最小生成树。

The background is a solid blue color with a subtle pattern of small, light blue geometric shapes (cubes and rectangles) scattered across it. A faint, repeating watermark of the text "中国大学MOOC" is visible diagonally across the entire image. In the center, the large white Chinese character "图" is displayed.

图

大连理工大学

刘馨月