デジタル信号処理

第4回　離散時間信号　－周波数領域表現－

立命館大学
情報理工学部
李　亮

今回の講義内容

- 離散時間信号
  - 周波数領域信号
  - フーリエ級数展開
  - スペクトル表記など

周波数領域表現

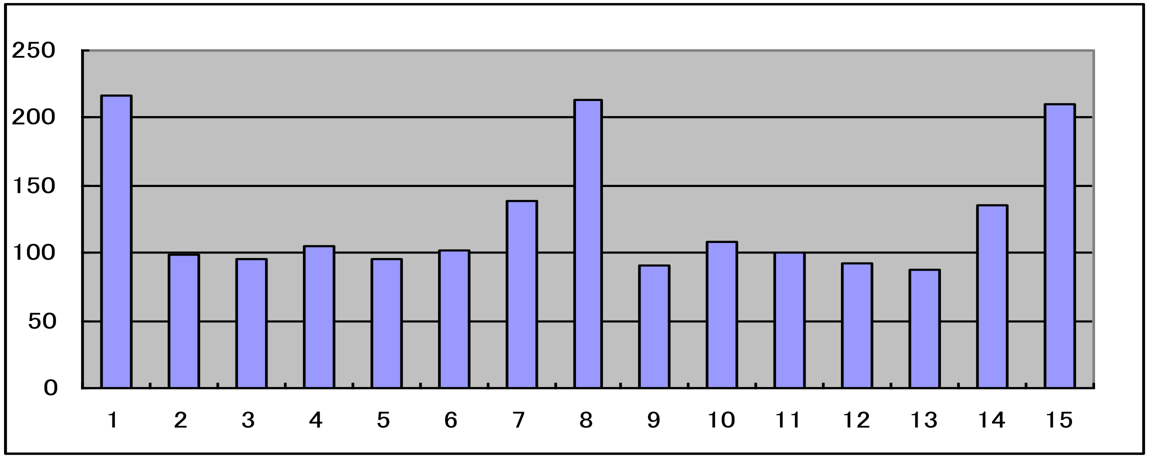
- 信号をどうやって周波数で表現するのか？
  - 「時間領域の信号を周波数領域に射影（変換）」
  - どうやって変換するのか？
    - 一般的には、回転ベクトルを用いて時間領域の信号から周波数領域の信号へ変換
      - 周波数とは、1秒間に繰り返される波の数のこと
    - 時間領域の信号に対して、どんな波が1秒間に何回繰り返しているのかを解析することで、周波数領域に変換できる

- 例：　周波数表現
  - 身近なものとしては、
    - 音楽プレーヤーなどのイコライザ（音の補正処理）などは周波数表現
      - 音を周波数で表現している　（だから低音の強調などができる）
    - ラジオやテレビの電波も周波数表現
      - 電波を周波数で表現している　（だから複数の番組を受信できる）

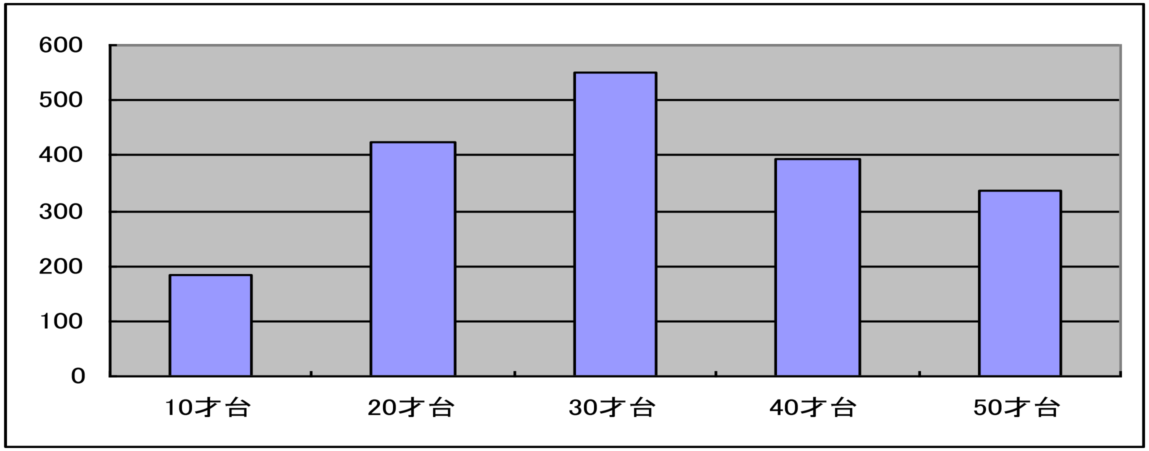
身近な射影（変換）の例

コンビニエンスストアの１日の客数

時間



年齢



時間領域の信号から年齢領域の信号に変換

時間領域⇒周波数領域も同じ考え方（同じものに対する見方が違うだけ）

周波数領域への道

- フーリエ級数とは
  - フランスの数学者 フーリエが考案
  - 「任意の周期関数は三角関数の和として表せる」
  - 「任意の周期関数」
    - ある1周期分の波形が同じ波形で繰り返し発生する関数のこと

フーリエ級数展開(1)

$x(t)$: 周期 T 秒で繰り返される信号

フーリエ級数の考え方:
信号 $x(t)$ は T 秒で1周期、すなわち周波数$1/T$ (Hz)の成分と、その整数倍の周波数成分($2/T$, $3/T$, $4/T$, …(Hz))の無限和として表現

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos\frac{4\pi t}{T} + a_3 \cos\frac{6\pi t}{T} + \cdots\cdots$$

$$\cdots + a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + b_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin\frac{4\pi t}{T}$$

$$+ b_3 \sin\frac{6\pi t}{T} + \cdots\cdots + b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$

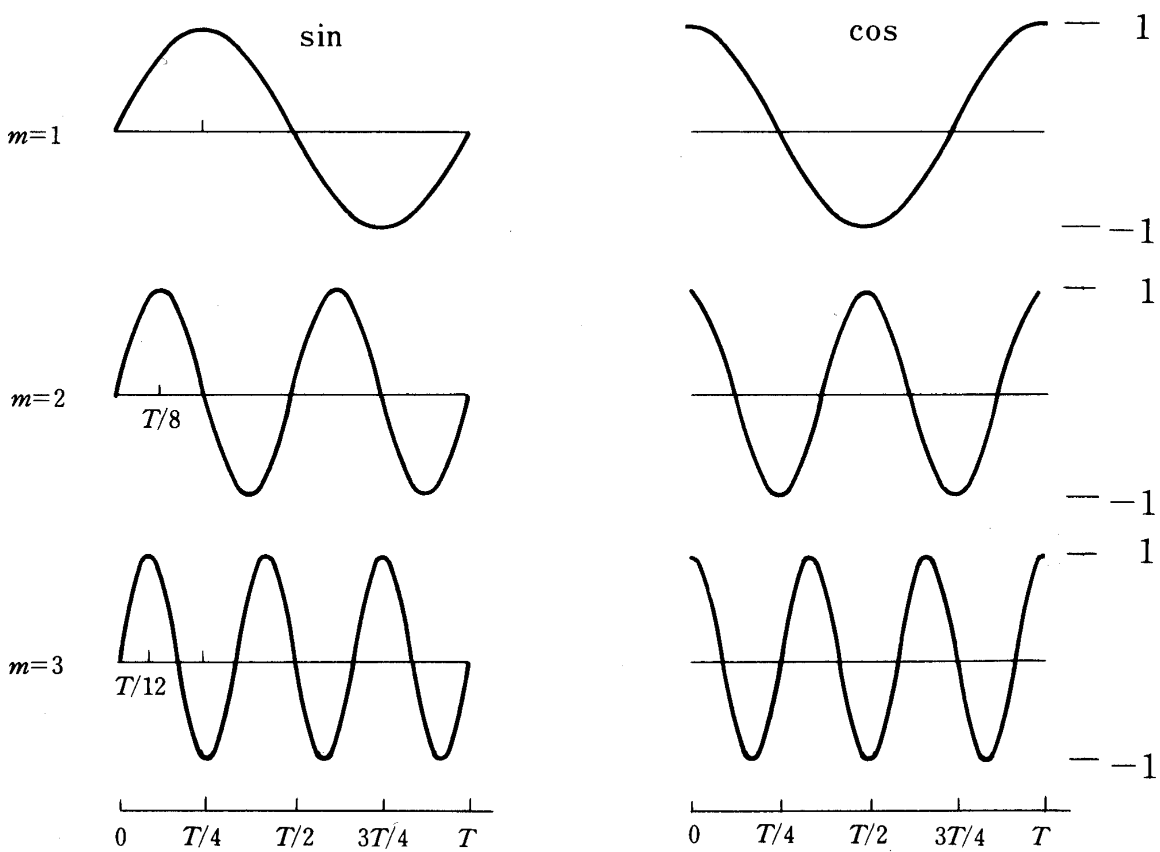
直流成分

$$= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$

フーリエ係数

フーリエ級数展開(2)

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$

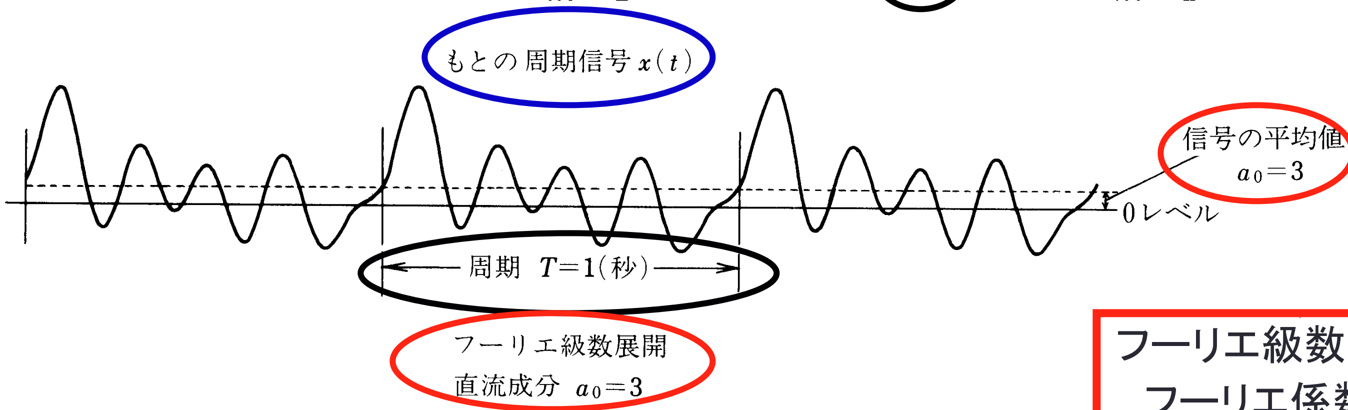


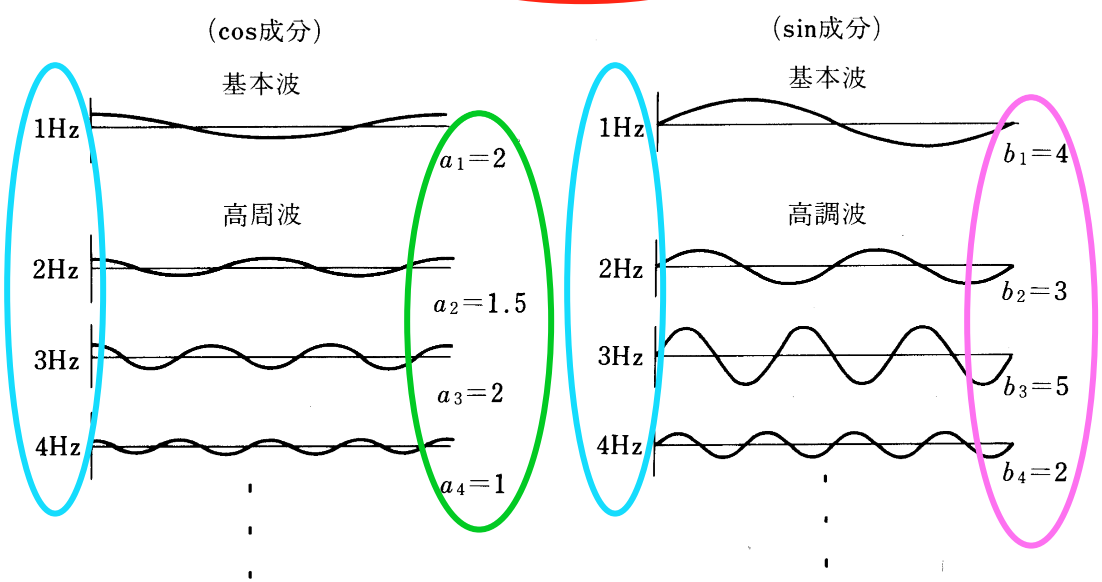
- m=1のとき
  - 基本波成分
- m>1のとき
  - 高調波成分

ポイント:
どんな波もcosとsinで表せるということは、すべてのcosとsinの波を足し合わせれば元の信号になる。

フーリエ級数展開(3)

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$





フーリエ級数展開のポイント

フーリエ係数 a_0

信号の直流成分の振幅

フーリエ係数 a_m b_m

各周波数 m/T (Hz)のcos成分、sin成分の振幅

周波数領域に射影完了

フーリエ係数の算出

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi mt}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi mt}{T}$$

直流成分の振幅 $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\,dt$

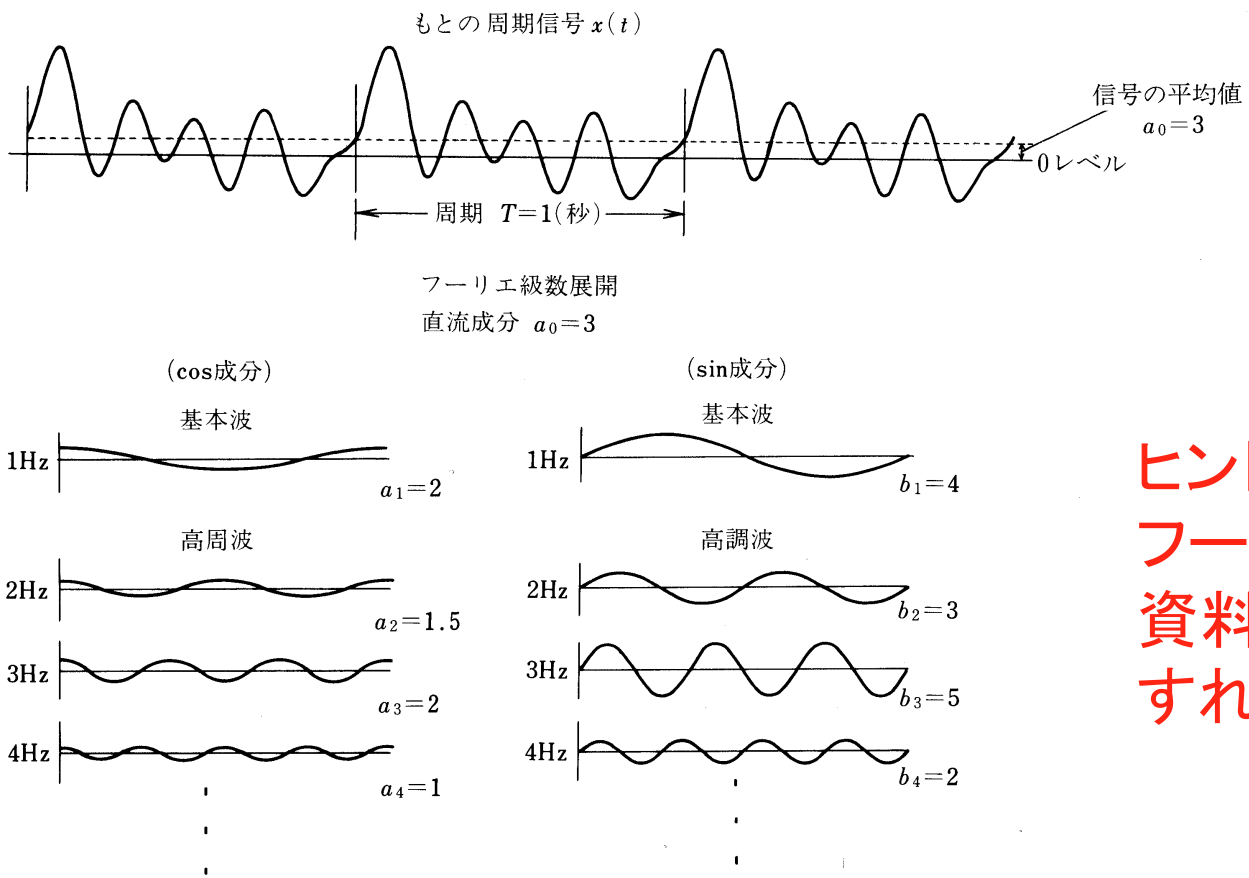
周波数 $\dfrac{m}{T}$(Hz) の成分の振幅

cos 成分 $a_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi mt}{T}\,dt$

sin 成分 $b_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi mt}{T}\,dt$

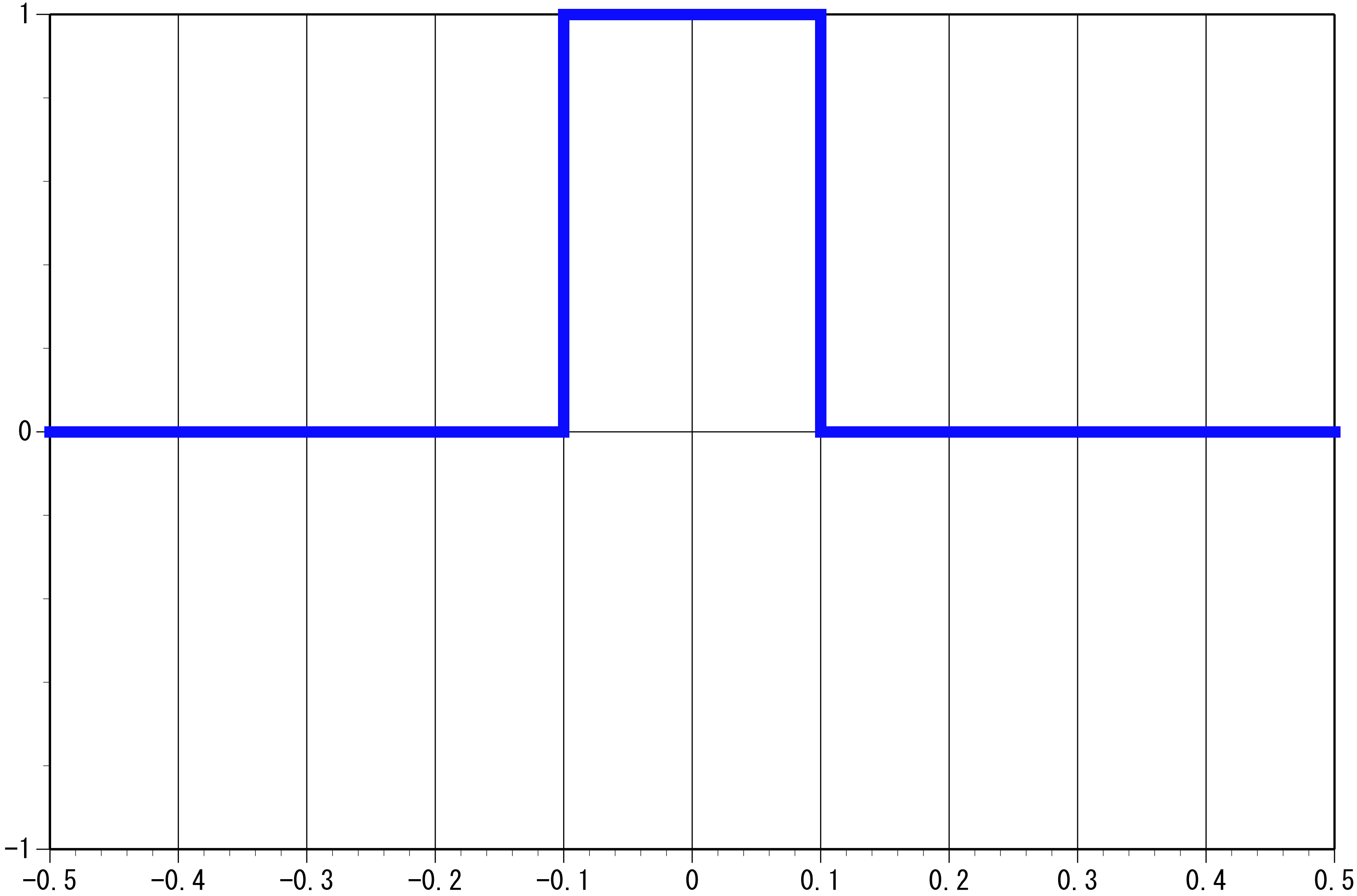
演習課題(1/4)

- 周期信号$x(t)$が下記のように分解できるとき、$x(t)$のフーリエ級数展開はどのように表現できるか？

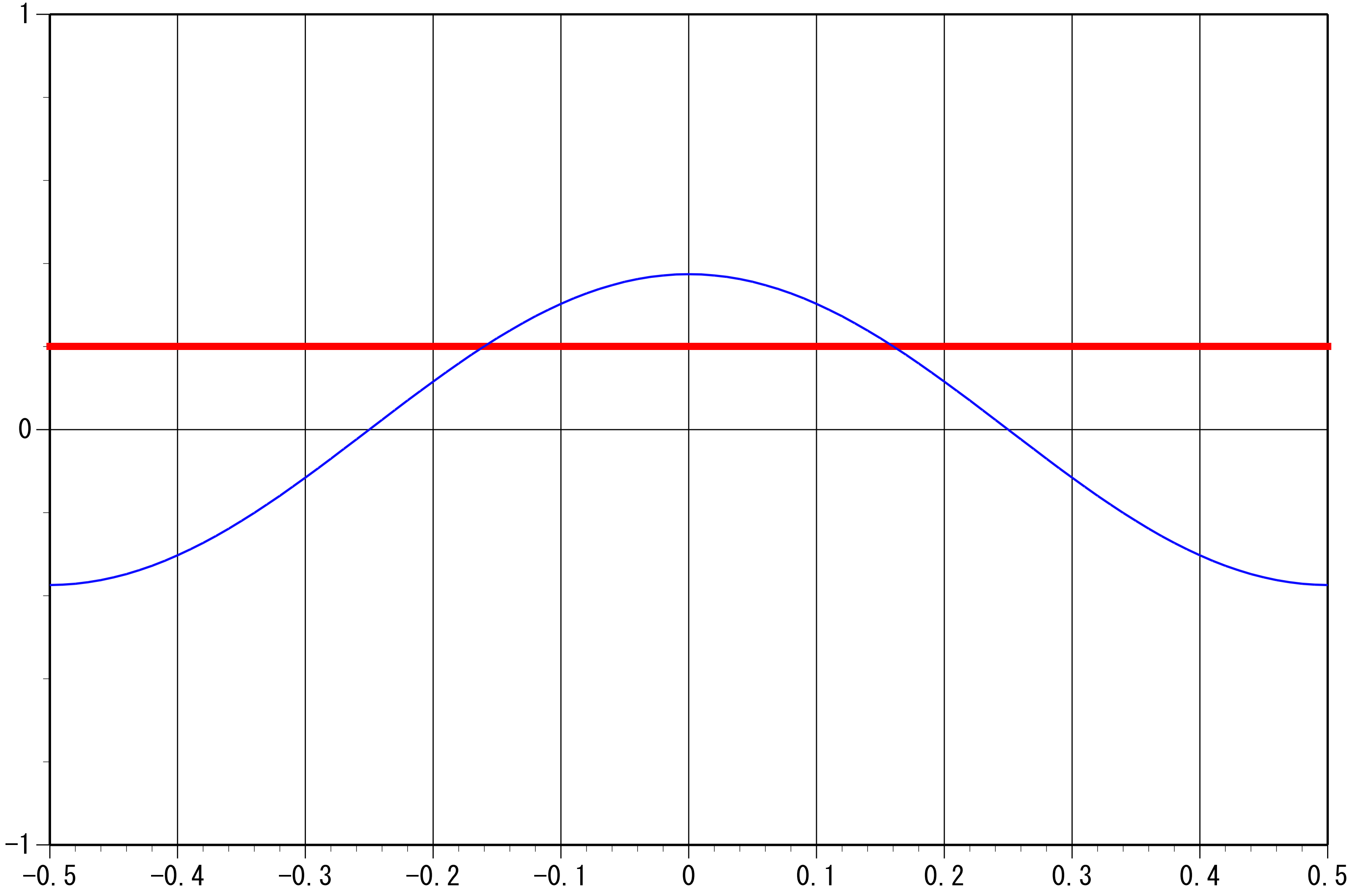


ヒント：
フーリエ級数展開(1)の資料を参考に、値を代入すればよい

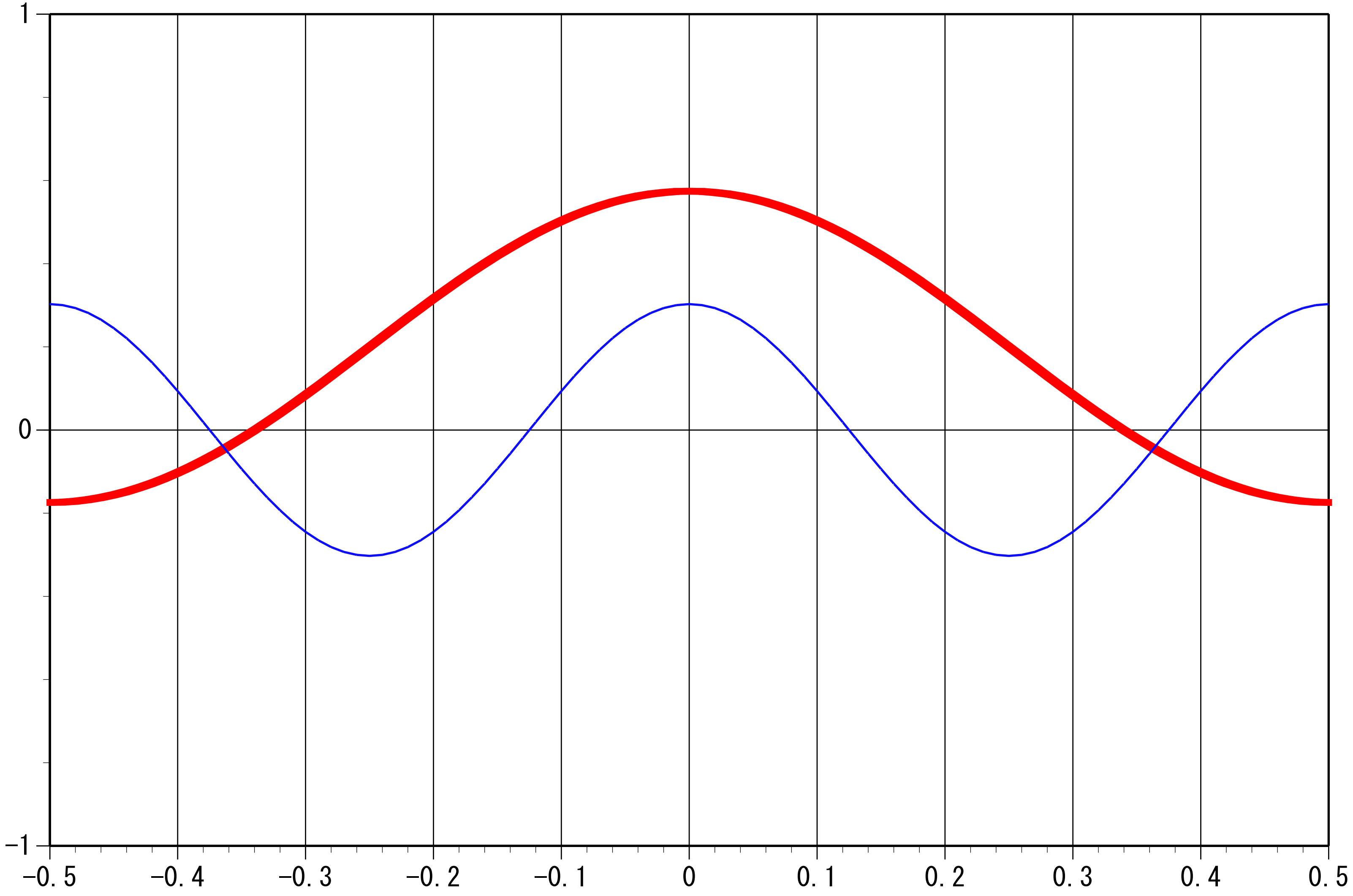
【実演】フーリエ級数展開



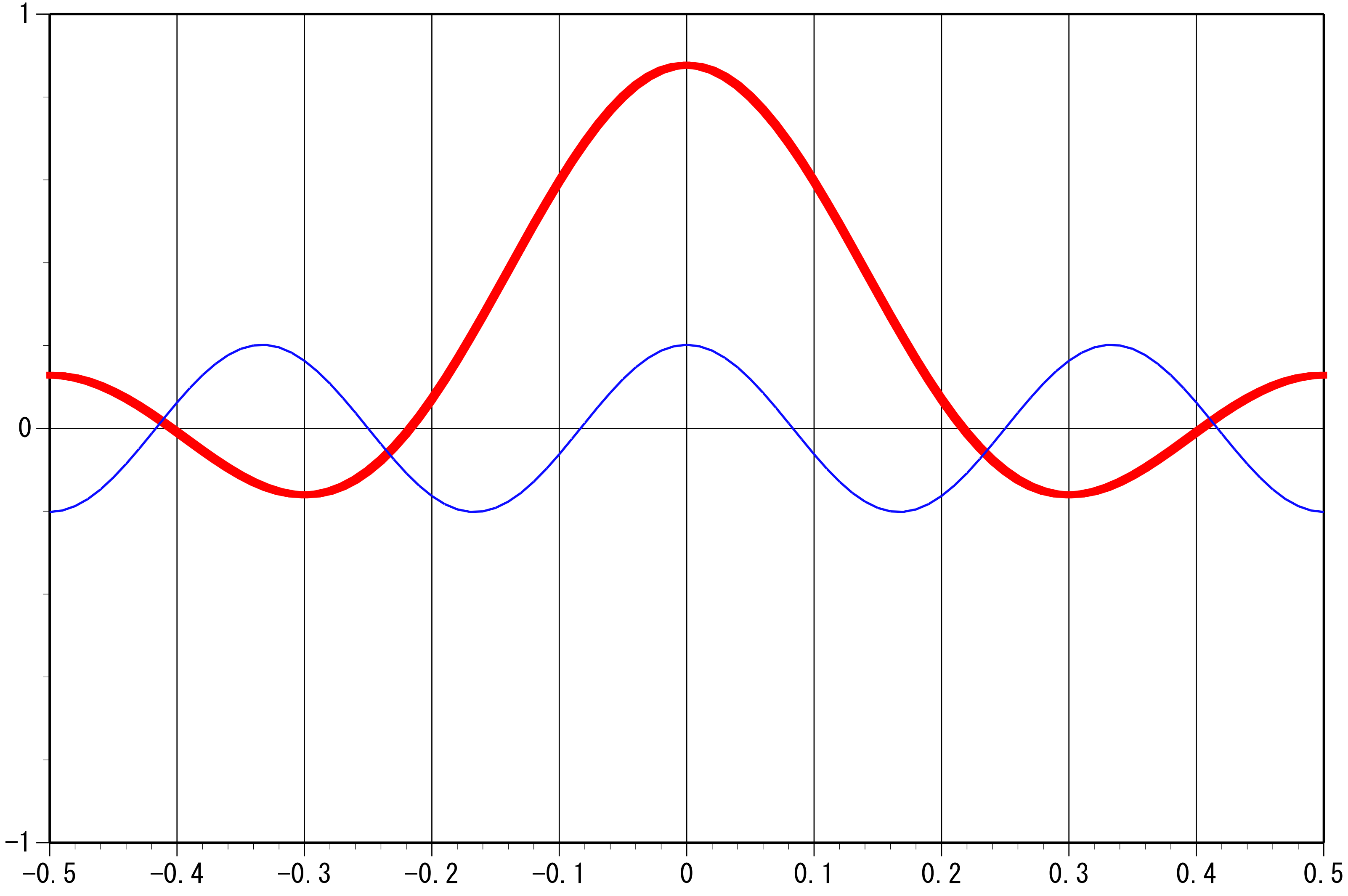
m=0まで(赤)、m=1(青)



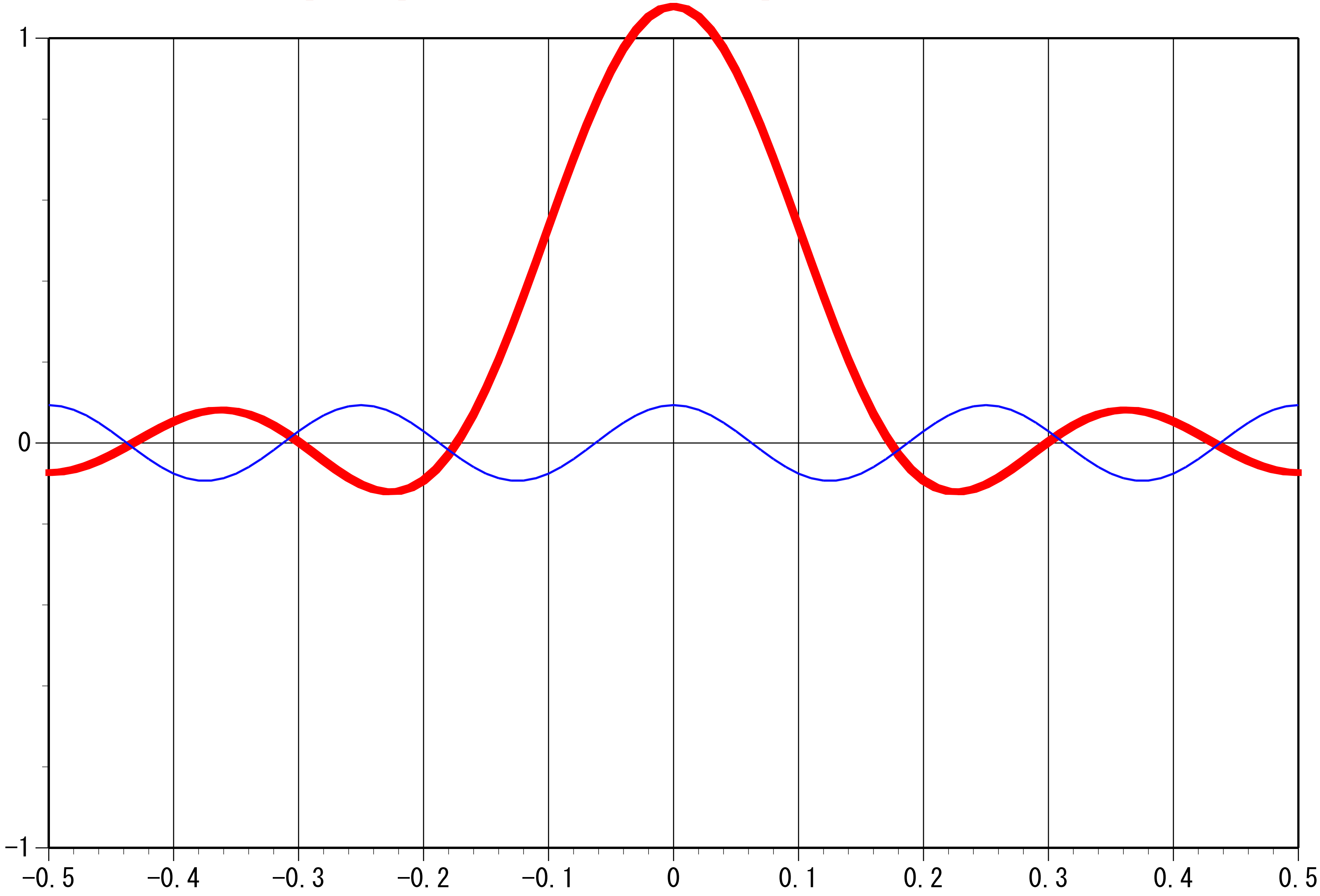
m=1まで(赤)、m=2(青)



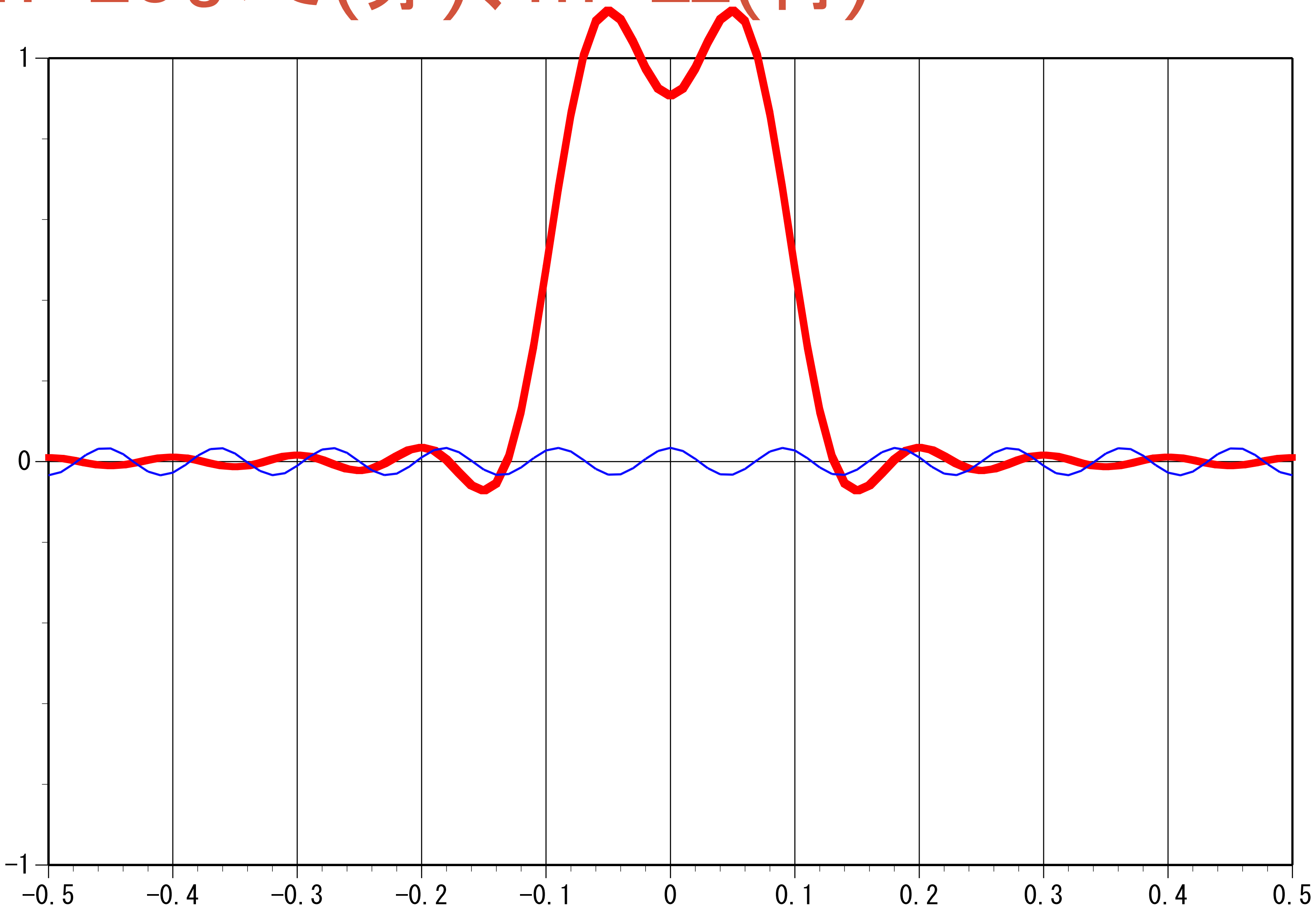
m=2まで(赤)、m=3(青)



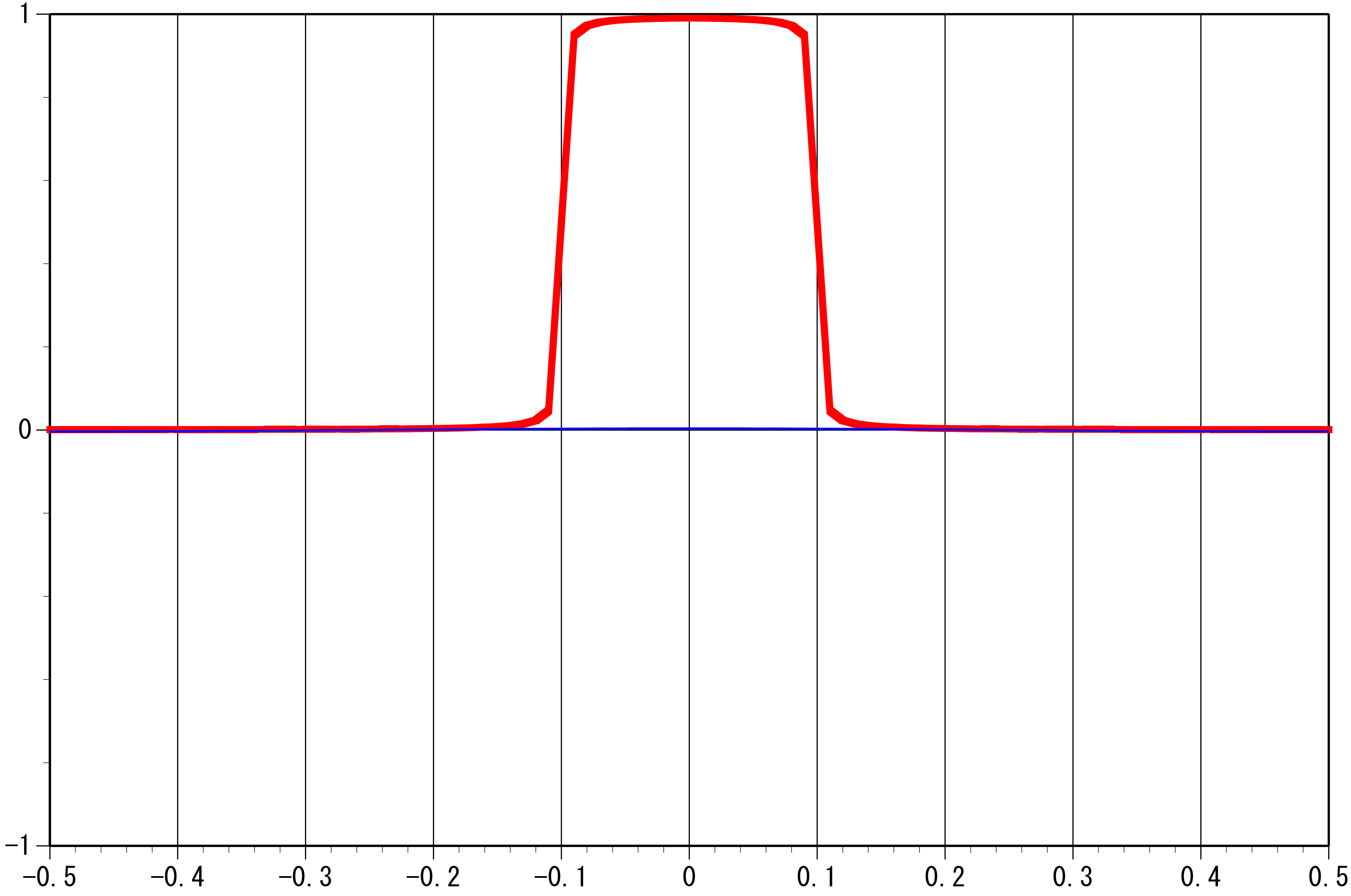
m=3まで(赤)、m=4(青)



m=10まで(赤)、m=11(青)



m=100まで(赤)、m=101(青)



フーリエ次数mについて

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi mt}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi mt}{T}$$

周波数 $\frac{m}{T}(\mathrm{Hz})$ の成分の振幅

cos 成分　$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi mt}{T}\,dt$

sin 成分　$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi mt}{T}\,dt$

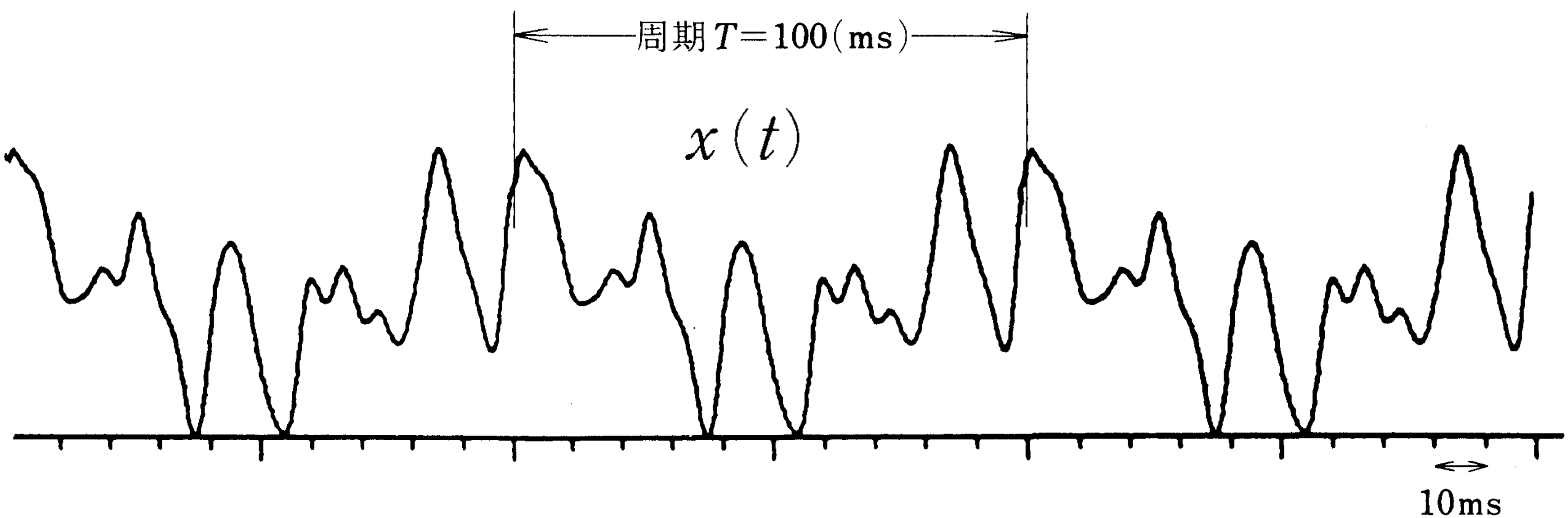
- m の値が小さいと低い周波数、m の値が大きくなると高い周波数を示す（実演どおり）
- 時間領域の信号から周波数領域の信号に変換する場合はこの m と T の関係が非常に重要

演習課題（2/4）

- 下記のフーリエ級数展開において m の値を0から20まで出力した場合、何Hz～何Hzの信号を何Hzおきに表現できるか？

ヒント：
周波数は m/T で表現

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi mt}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi mt}{T}$$

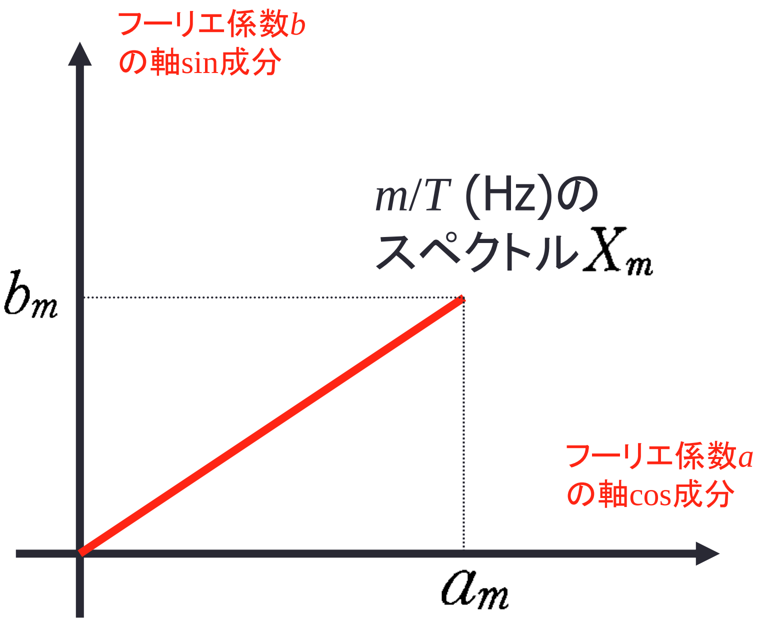


スペクトル（振幅、パワー、位相）

- スペクトル（spectrum）
  - 時間軸信号(時間領域）を周波数軸（周波数領域）で表現したもの。音響信号では時間軸の信号を「波形」と呼ぶのに対し周波数軸の信号を「スペクトル」と呼ぶ。
- 振幅スペクトル
  - スペクトルの振幅を示す。音響信号では対象周波数の大きさを示す。
- パワースペクトル
  - スペクトルのエネルギーを示す。音響信号では対象周波数のエネルギー（パワー：振幅の２乗）を示す。
- 位相スペクトル
  - スペクトルの進度を示す。基準信号に対して対象周波数がずれているとき、位相スペクトルが「遅れている」とか「進んでいる」と表現する。

スペクトル表記(振幅、パワー、位相)

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$



m/T (Hz)の振幅スペクトル:

$$|X_m| = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m}$$

m/T (Hz)のパワースペクトル:

$$|X_m|^2 = a^2{}_m + b^2{}_m$$

m/T (Hz)の位相スペクトル:

$$\theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

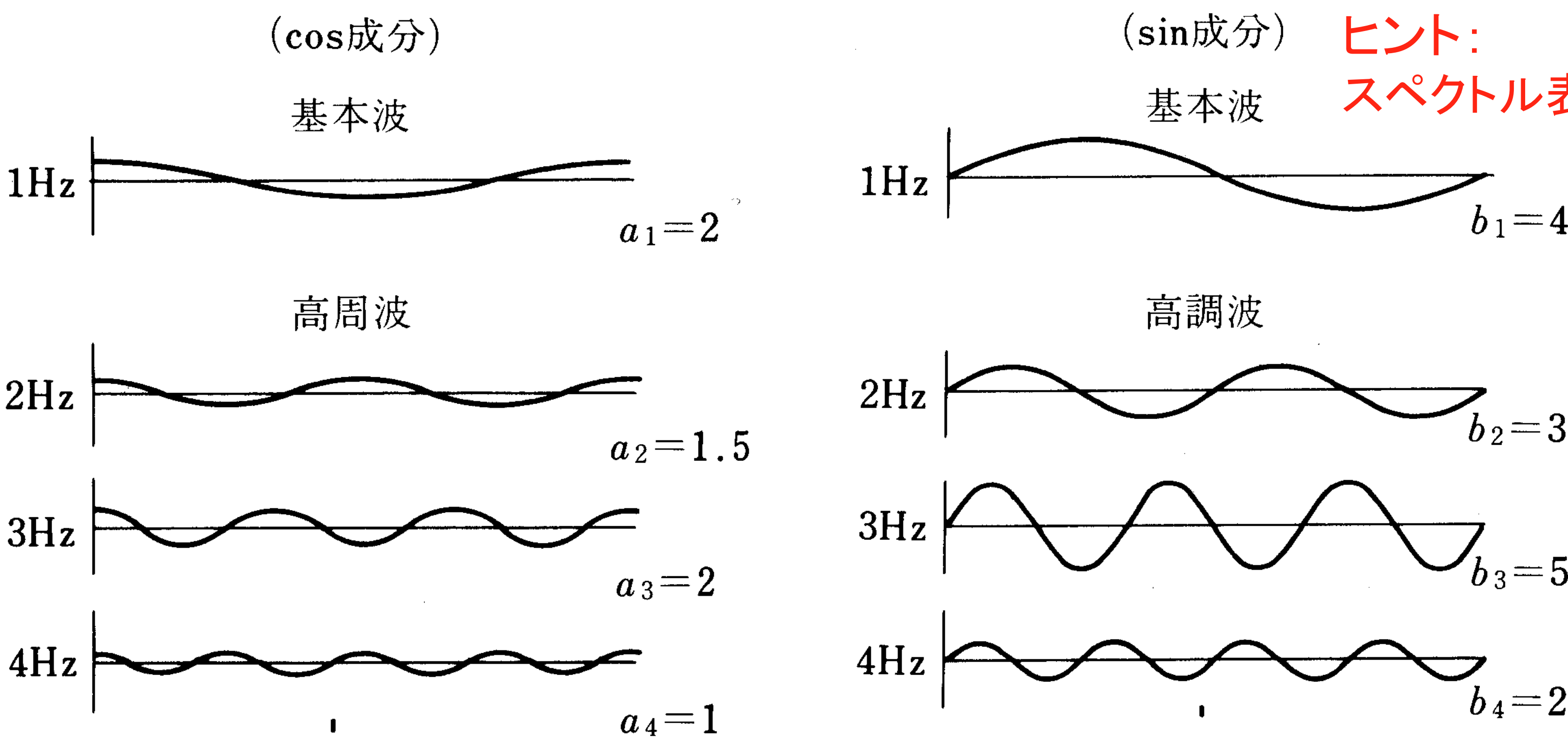
$$X_m = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m}\cos\left(\frac{2\pi m t}{T} - \theta_m\right) \quad \text{ただし } \theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

振幅

＊回転角

演習課題(3/4)

- 下記のようなフーリエ係数が得られたとき、各周波数における振幅スペクトルとパワースペクトルを求めよ。(ここでは1Hz～4Hzまでの信号とする。周期 $T=1$ 秒とする。)



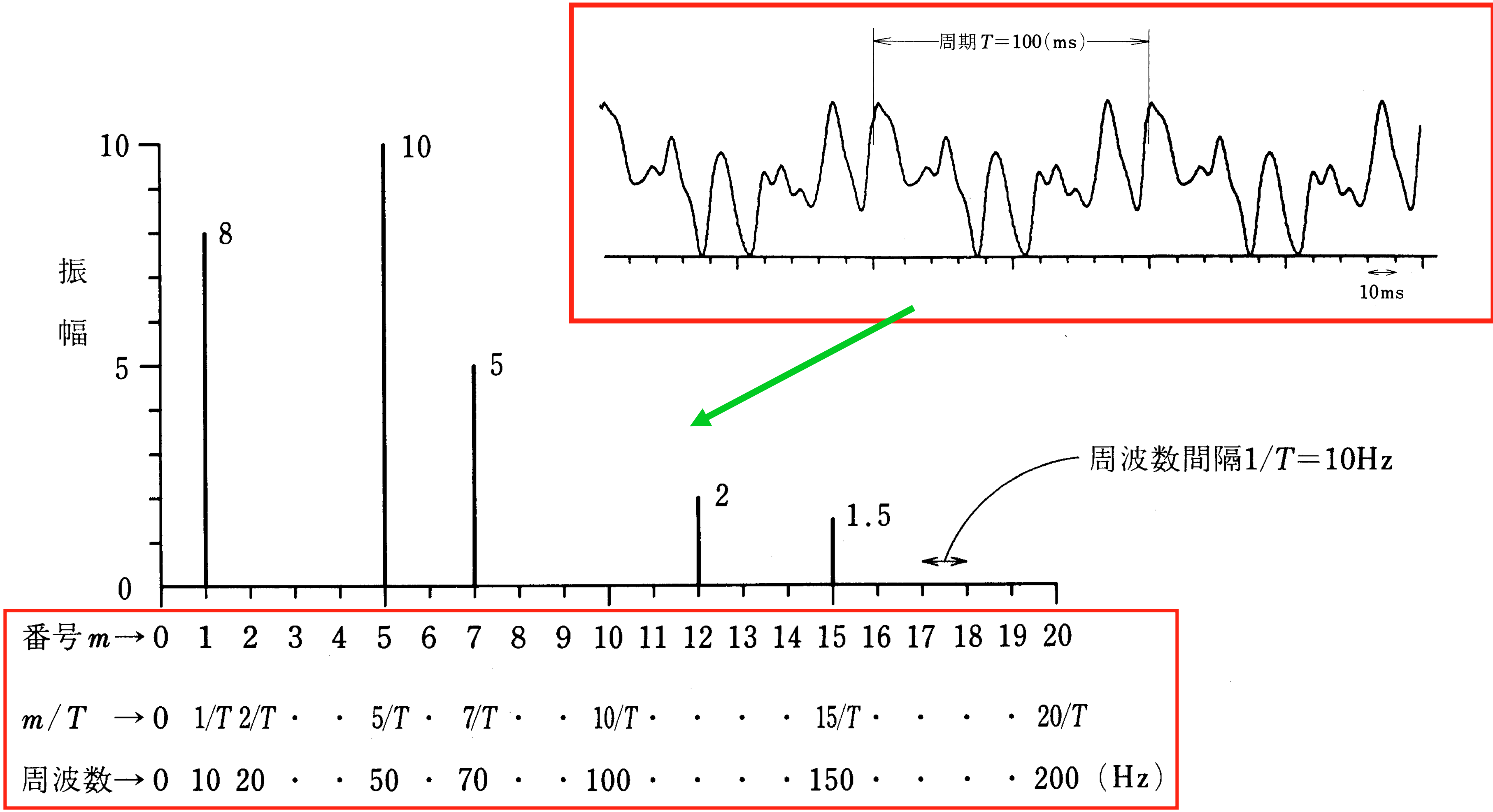
ヒント：
スペクトル表記を参考に

フーリエ級数展開のまとめ

- すべての波はcosとsinで表現可能
  - フーリエ級数展開により時間領域の信号を周波数領域の信号へ射影可能
  - cos とsin成分は各周波数(何Hzか？)を示し、フーリエ係数は各周波数スペクトル（振幅や位相など）を示す

- 高調波成分を考慮すればするほど、高精度に周波数領域へ射影可能
  - 忠実に射影可能
  - 次数（m）が小さいと正確に射影できない。しかしながら大雑把な射影はできる。（実演を参考に）

複素スペクトルの図表記例



演習課題(4/4)

- 時間領域の信号 $x(t)$ が下記のように表せるとき、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。ただし周期 T ＝0.1秒(100ms)とする。

$$x(t) = 8 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ 5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$+ 1.5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$

大ヒント： スペクトルは下記のように表せる

$$X_m = \sqrt{a^2_m + b^2_m} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T} - \theta_m\right) \quad \text{ただし } \theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$