第二章 随机变量及分布

随机变量函数的分布

随机变量的函数

设X为一个随机变量，其分布已知，g(x)为一个一元函数。

令Y=g(X)。则Y也是一个随机变量。

1. 离散型随机变量的函数

若离散型随机变量X的分布列如下

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

求随机变量函数Y=g(X)的分布列。

设$y_k = g(x_k)$.

(1) $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$ 两两不等

$$\mathrm{P}(Y = y_k) = \mathrm{P}(g(X) = y_k) = \mathrm{P}(X = x_k) = p_k$$

离散型随机变量函数的分布

(2) $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$ 中有相等的：

$$\mathrm{P}(Y = y_k) = \mathrm{P}(g(X) = y_k)$$

$$= P\left\{\bigcup_{g\left(x_{k_j}\right)=y_k} \left\{X = x_{k_j}\right\}\right\} = \sum_{g\left(x_{k_j}\right)=y_k} P(X = x_{k_j})$$

例1　设随机变量 X 具有以下的分布列。

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求 1.$Y = 2X + 1$ 的分布列.

2.$Y = (X-1)^2$的分布列.

解: 1. $Y=2X+1$

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

Y	-1	1	3	5
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

2. $Y=(X-1)^2$

Y	4	1	0
p_k	0.2	0.3+0.4	0.1

$$P(Y=1)=P\left((X-1)^2=1\right)$$

$$=P(X=0)+P(X=2)$$

总结：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$
$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

取值重复，概率合并！

例2 已知

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

$$\boxed{P(X=n)=\frac{1}{2^n}}$$

求 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$

$$\boxed{1,\quad 0,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 0,\quad -1,\quad 0,\cdots}$$

解 $Y:0,\quad 1,\quad -1$

$$P(Y=0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=1)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=4k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4k+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$$

$$P(Y=-1)=\frac{2}{15}$$

二. 连续型随机变量函数的分布

设连续型随机变量X的概率密度$f(x), Y=g(X)$.

若Y也是连续型随机变量，则求Y的密度函数一般步骤如下：

(1). 确定$Y=g(X)$的取值范围，$Y\in \mathrm{D}$

(2). 在D内求Y的分布函数

$y\in D$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$

$$=P(X\in G)\qquad \mathrm{G}=\{x|g(x)\le y\}$$

$$=\int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

(3)$f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{dy}$

记住：$\vartheta(a)=\int_{h(a)}^{g(a)} f(x,a)dx$

$$\vartheta'(a)=\int_{h(a)}^{g(a)} f'_a(x,a)dx+f(g(a),a)g'(a)-f(h(a),a)h'(a)$$

二. 连续型随机变量函数的分布

例 3　设随机变量 X 具有概率密度：

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解：(1) Y的取值范围为（8, 16）

当$y<8$时，　$F_Y(y)=0;$

当$y\geq 16$时，$F_Y(y)=1;$

当$8\leq y<16$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{2X+8\leq y\}=P\{X\leq \frac{y-8}{2}\}=\int_0^{\frac{y-8}{2}}\frac{x}{8}dx$$

$$=\frac{(y-8)^2}{64}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 4　设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$　求 $\boldsymbol{Y=X^2}$ **的概率密度.**

解：Y 的取值范围是 $Y \in [0,\infty)$

当$y<0$时，　$F_Y(y)=0.$

当$y \geq 0$时,

$$F_Y(y)=P\{Y \leq y\}=P\{X^2 \leq y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}).$$

当$y<0$时，　$f_Y(y)=0.$

当$y \geq 0$时，

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d(F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))}{dy}$$

$$\boxed{e^x=\exp\{x\}}$$

$$=\frac{dF_X(\sqrt{y})}{d\sqrt{y}}(\sqrt{y})'-\frac{dF_X(-\sqrt{y})}{d(-\sqrt{y})}(-\sqrt{y})'$$

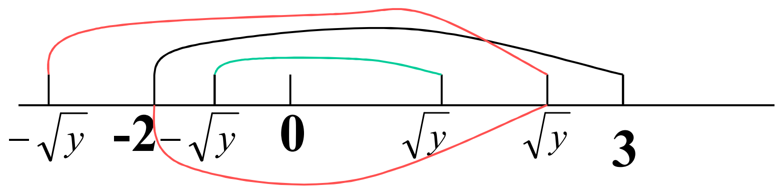
$$=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp\{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\}+\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp\{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

例 5 设随机变量 $X \sim U[-2,3]$ 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：Y 的取值范围是 $Y \in [0,9]$　　$f_X(x)=\dfrac{1}{5}\quad x\in[-2,3]$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0.$

当 $y\geq 9$ 时，$F_Y(y)=1.$



当 $0\leq y<9$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

当 $0\leq y<4$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{2\sqrt{y}}{5}$

当 $4\leq y<9$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{\sqrt{y}+2}{5}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5\sqrt{y}} & 0\leq y<4\\ \dfrac{1}{10\sqrt{y}} & 4\leq y<9\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$