图

大连理工大学

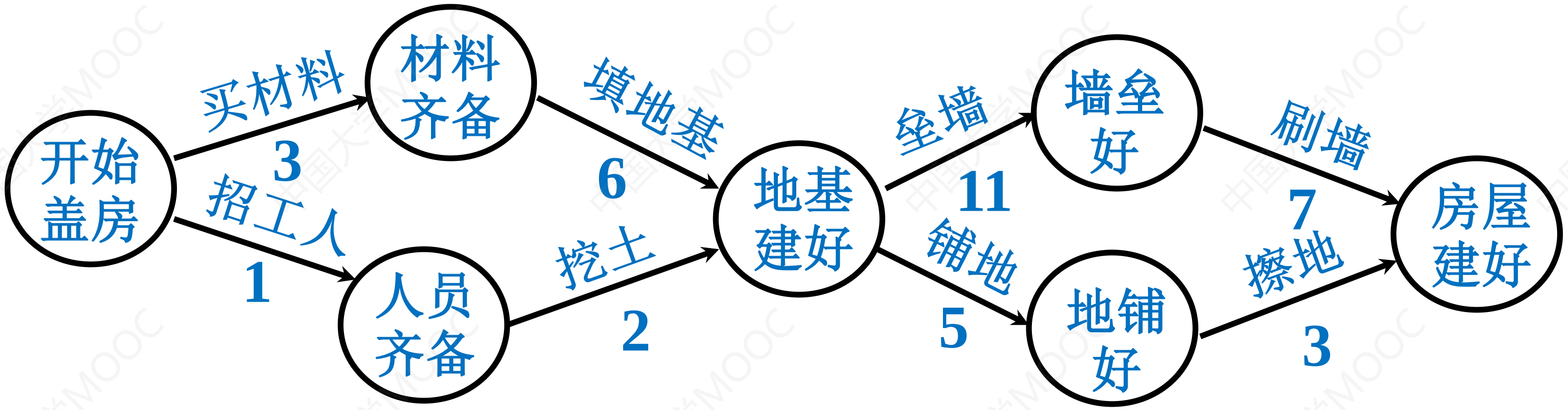
刘 馨 月

主要内容

- 图的基本概念
- 图的存储
- 图的遍历
- 最小生成树
- 最短路径
- 关键路径

关键路径

关键路径



顶点表示事件(状态);

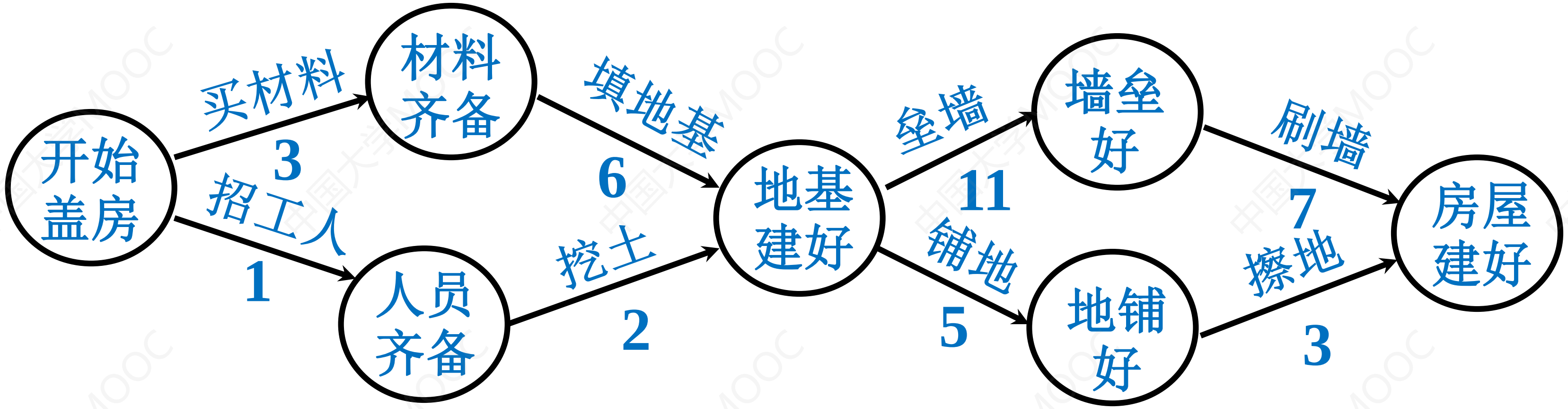
边表示活动;

每个事件表示在它之前的活动已经完成，在它之后的活动可以开始;

边上的权，通常表示活动所需要的时间;

边表示活动的带权的无环有向图称为 AOE 网

关键路径

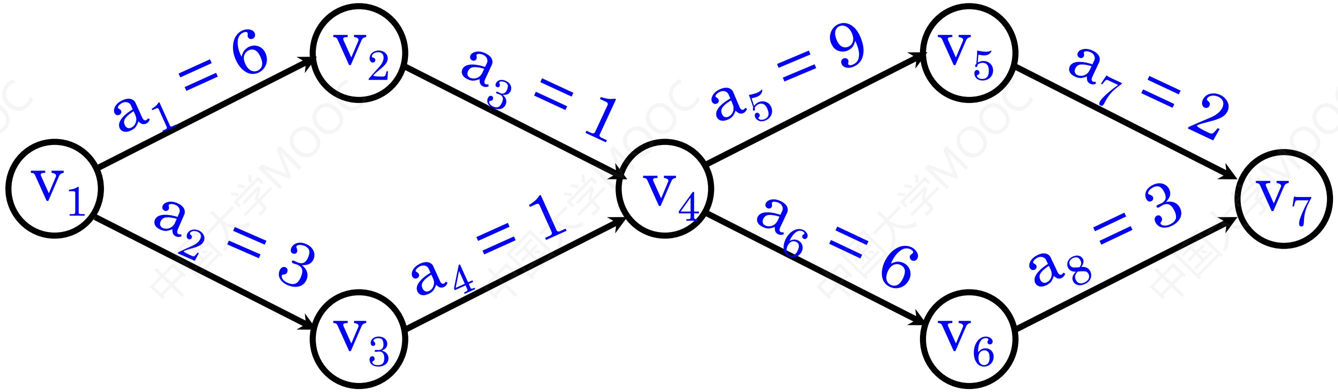


通常，**AOE** 网中只有一个入度为 **0** 的顶点(源点)，一个出度为 **0** 的顶点(汇点)。

对于一个 **AOE** 网，最关心的两个问题:

1. 完成整项工程至少需要多少时间?
2. 哪些活动是影响工程进度的关键?

完成工程的最短时间是从源点到汇点的最长路径的长度，这里的最长路径叫做关键路径。



$ve(v_i)$ —— 事件 v_i 的最早发生时间 $ve(v_1) = 0$ $ve(v_3) = 3$

$vl(v_i)$ —— 事件 v_i 的最迟发生时间 $vl(v_1) = 0$ $vl(v_3) = 6$

$e(a_i)$ —— 活动 a_i 的最早开始时间 $e(a_1) = 0$ $e(a_2) = 0$

$l(a_i)$ —— 活动 a_i 的最迟开始时间 $l(a_1) = 0$ $l(a_2) = 3$

$dut(j, k)$ —— 活动 a_i 的持续时间，满足 a_i 关联事件 v_j、v_k

$l(a_i) - e(a_i)$意味着完成活动 a_i 的时间余量

$l(a_i) = e(a_i)$ 的活动叫做关键活动；

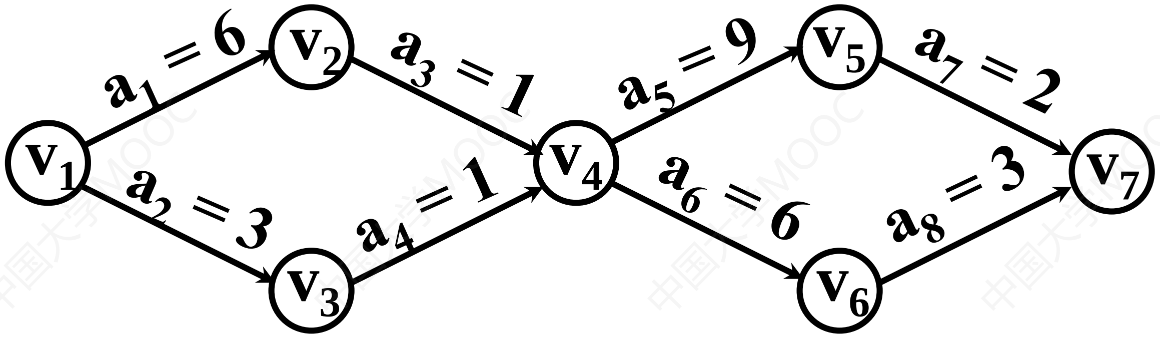
显然，关键路径上的活动都是关键活动。 例 a_1 a_3 a_5 a_7

关键活动的工效直接影响到整个工期。

关键路径

辨别关键活动就是要找 $l(a_i) = e(a_i)$ 的活动；

因此首先必须求出 AOE 网中的所有活动的 $e(a_i)$ 和 $l(a_i)$ 。



例 a_4

$$e(a_4) = ve(v_3)$$

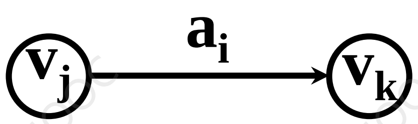
$$l(a_4) = vl(v_4) - dut(3, 4)$$

一. 事件与活动之间的关系

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k

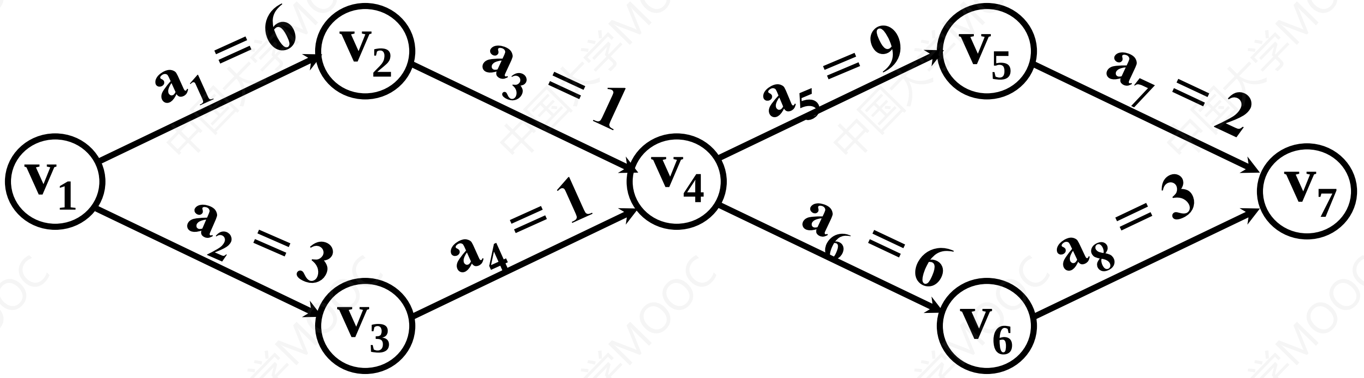
则有

$$e(a_i) = ve(v_j)$$



$$l(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$$

注意：源点和汇点一定是关键活动，其最早和最迟发生时间相等



例，

$ve(v_2) = ve(v_1) + 6$

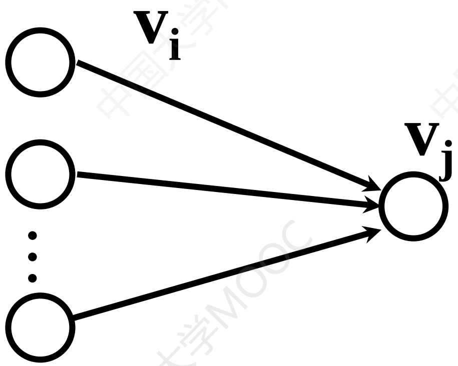
$ve(v_3) = ve(v_1) + 3$

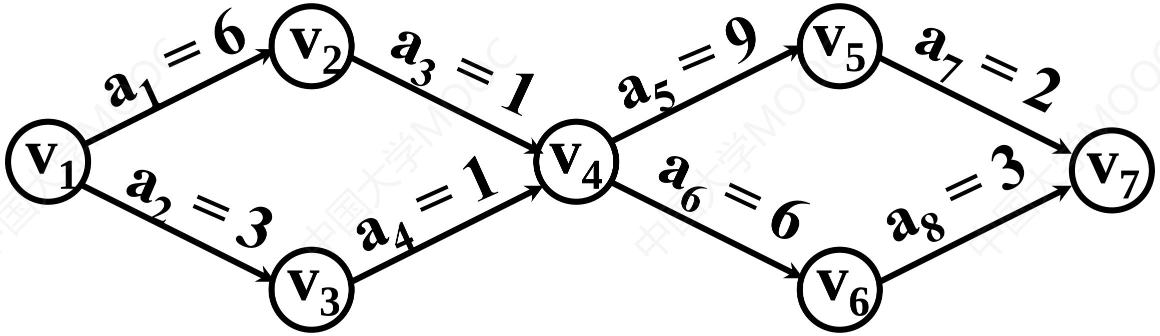
$ve(v_4) = ve(v_2) + 1$?

$ve(v_3) + 1$?

$ve(v_j) = \text{Max}\{ ve(v_i) + dut(i, j) \}$

v_i 是 v_j 的前驱事件





例，

$$vl(v_5) = vl(v_7) - 2$$

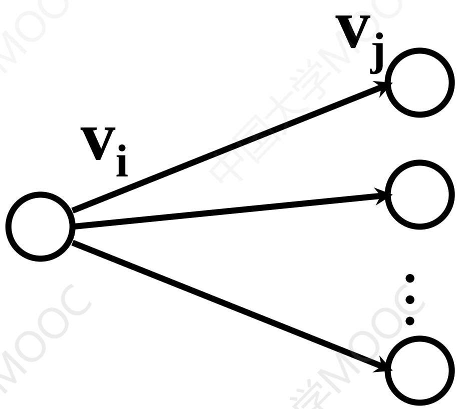
$$vl(v_6) = vl(v_7) - 3$$

$$vl(v_4) = vl(v_5) - 9\ ?$$

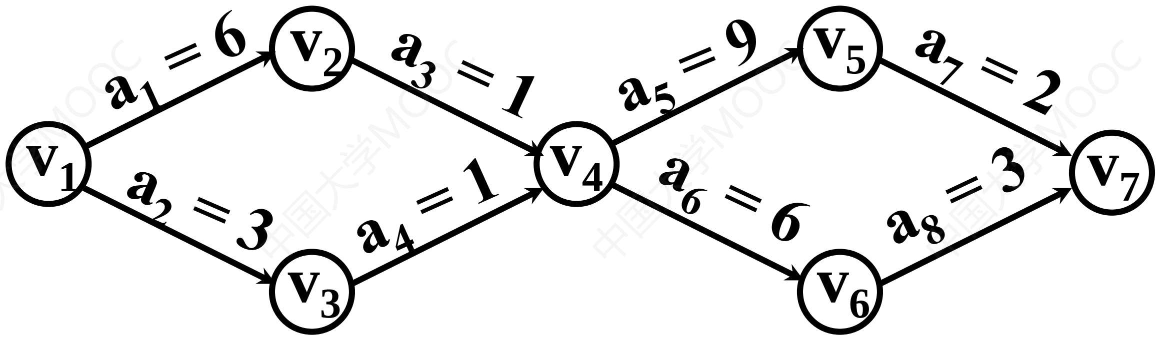
$$vl(v_6) - 6\ ?$$

$$vl(v_i) = \text{Min}\{\, vl(v_j) - dut(i\,,\,j) \,\}$$

v_j 是 v_i 的后继事件



关键路径



初始

$ve(v_1) = 0$

$vl(v_7) = 18$

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k

则有 $e(a_i) = ve(v_j)$

$l(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$

$ve(v_j) = \mathrm{Max}\{ ve(v_i) + dut(i, j) \}$

v_i 是 v_j 的前驱事件

$vl(v_i) = \mathrm{Min}\{ vl(v_j) - dut(i, j) \}$

v_j 是 v_i 的后继事件

两个递推公式的计算必须分别在拓扑有序和逆拓扑有序前提下进行

②

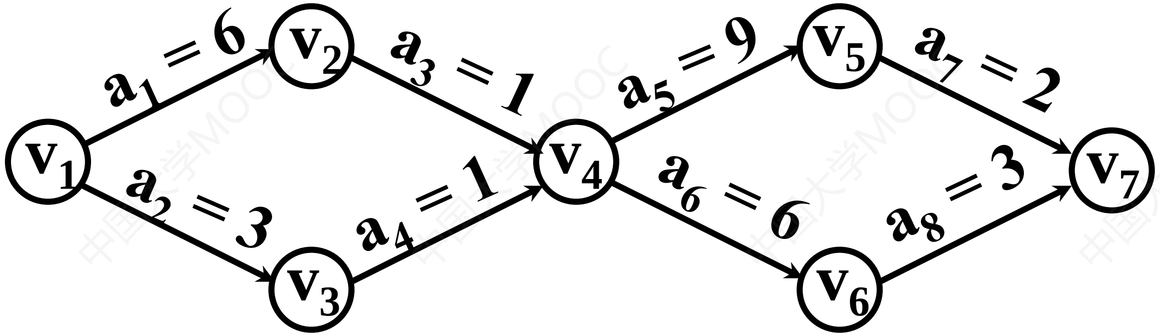
1. 从源点 v_0 出发，令 $ve(v_0) = 0$，按拓扑有序求其余各事件的最早发生时间 $ve(v_i)$。

2. 从汇点 v_n 出发，令 $vl(v_n) = ve(v_n)$，按逆拓扑有序求其余各事件的最迟发生时间 $vl(v_i)$。

3. 根据各事件的 $ve(v_i)$ 和 $vl(v_i)$，求各活动的最早开始时间 $e(a_j)$ 和最迟开始时间 $l(a_j)$。

4. $l(a_j) = e(a_j)$ 的活动叫做关键活动。

例



逆拓扑有序

事件	ve	vl
v_1	0	0
v_2	6	6
v_3	3	6
v_4	7	7
v_5	16	16
v_6	13	15
v_7	18	18

活动	e	l
a_1	0	0
a_2	0	3
a_3	6	6
a_4	3	6
a_5	7	7
a_6	7	9
a_7	16	16
a_8	13	15

关键路径 a_1 a_3 a_5 a_7

图

大连理工大学

刘 馨 月