

The background is a solid blue color with a subtle pattern of small, light blue geometric shapes (cubes and rectangles) scattered across it. A faint, repeating watermark of the text "中国大学MOOC" is visible diagonally across the entire image. In the center, the large white Chinese character "图" is displayed.

图

大连理工大学

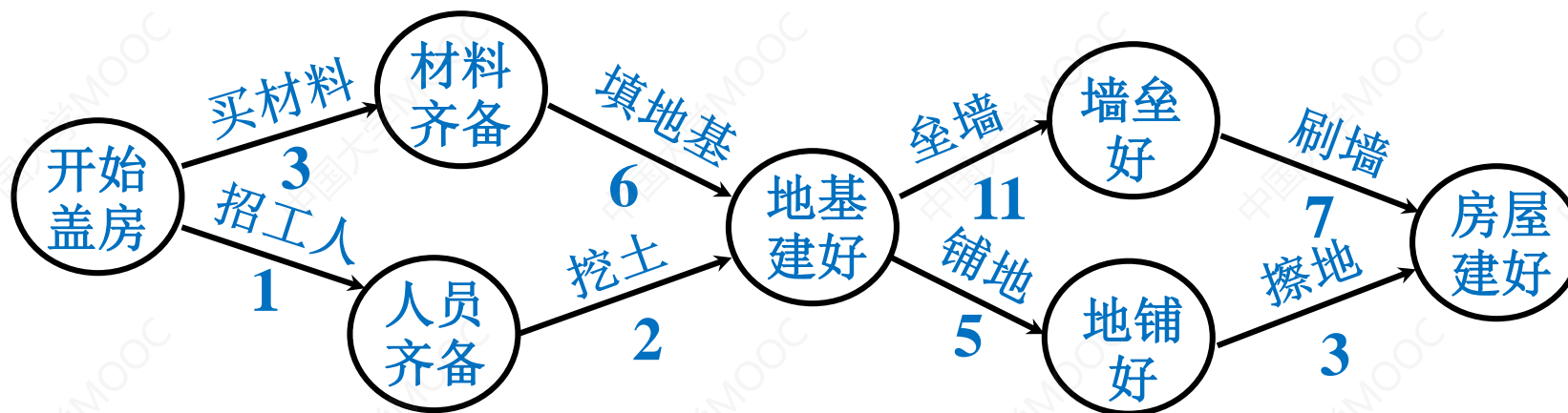
刘馨月

主要内容

- 图的基本概念
- 图的存储
- 图的遍历
- 最小生成树
- 最短路径
- 关键路径

关键路径

关键路径



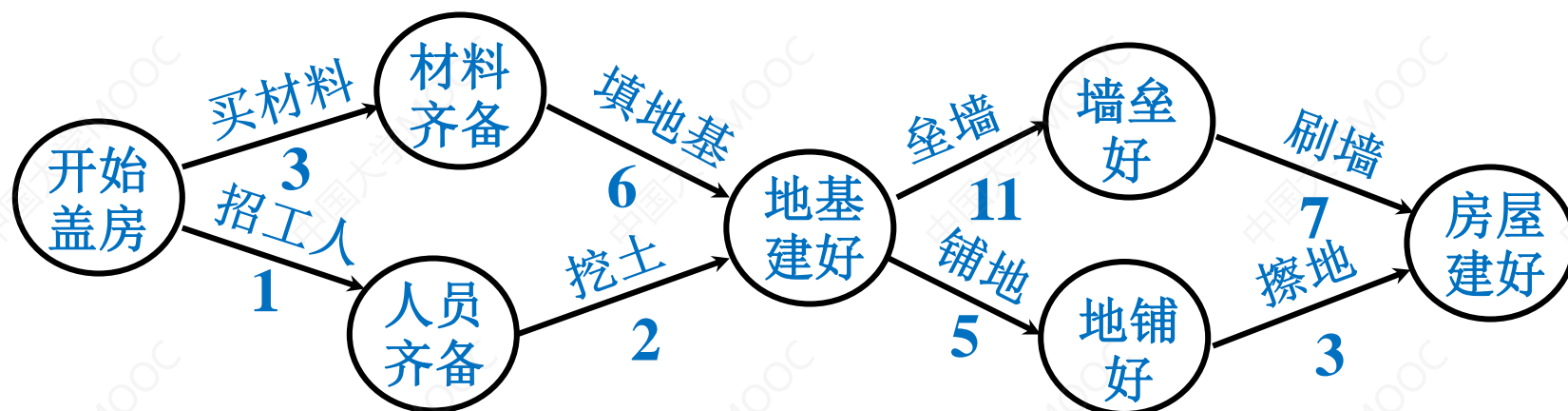
顶点表示**事件**(状态);

边表示**活动**;

每个事件表示在它之前的活动已经完成, 在它之后的活动可以开始;
边上的权, 通常表示活动所需要的时间;

边表示活动的带权的无环有向图称为 **AOE 网**

关键路径



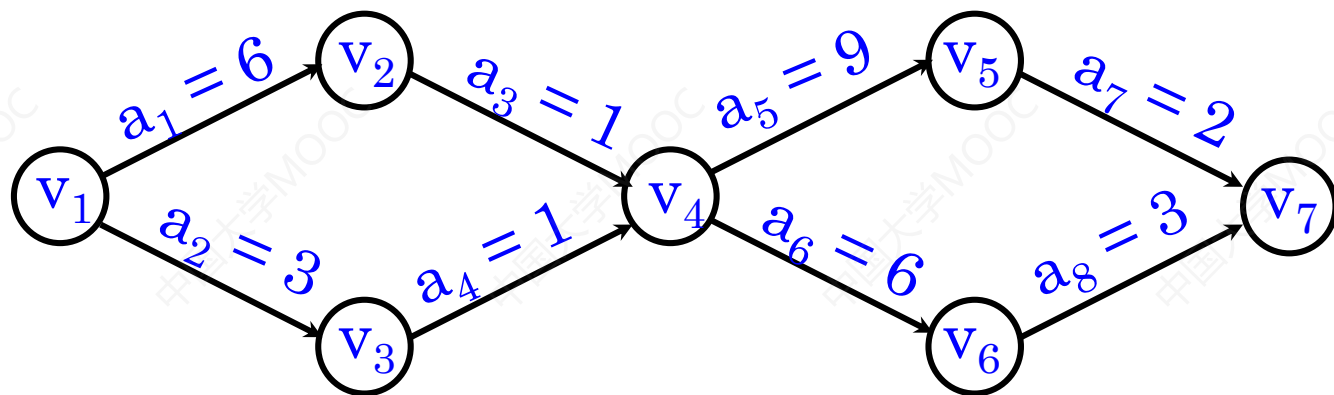
通常，AOE 网中只有一个入度为 0 的顶点(源点)，一个出度为 0 的顶点(汇点)。

对于一个 AOE 网，最关心的两个问题：

1. 完成整项工程至少需要多少时间？
2. 哪些活动是影响工程进度的关键？

完成工程的最短时间是从源点到汇点的**最长路径的长度**，这里的最长路径叫做**关键路径**。

关键路径



ve(v_i) —— 事件 v_i 的最早发生时间

$$ve(v_1) = 0$$

$$ve(v_3) = 3$$

vl(v_i) —— 事件 v_i 的最迟发生时间

$$vl(v_1) = 0$$

$$vl(v_3) = 6$$

e(a_i) —— 活动 a_i 的最早开始时间

$$e(a_1) = 0$$

$$e(a_2) = 0$$

l(a_i) —— 活动 a_i 的最迟开始时间

$$l(a_1) = 0$$

$$l(a_2) = 3$$

dut(j, k) —— 活动 a_i 的持续时间, 满足 a_i 关联事件 v_j、v_k

l(a_i) - e(a_i) 意味着完成活动 a_i 的时间余量

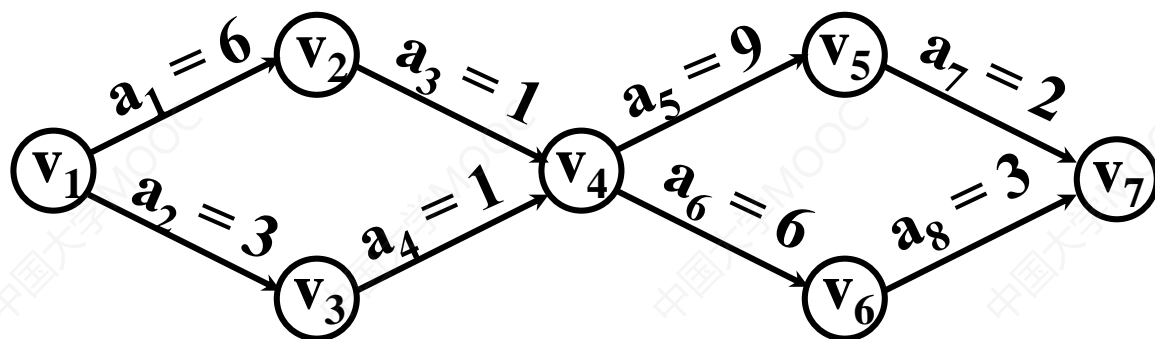
l(a_i) = e(a_i) 的活动叫做**关键活动**;

显然, 关键路径上的活动都是关键活动。 例 **a₁ a₃ a₅ a₇**

关键活动的工效直接影响到整个工期。

辨别关键活动就是要找 $l(a_i) = e(a_i)$ 的活动;

因此首先必须求出 AOE 网中的所有活动的 $e(a_i)$ 和 $l(a_i)$ 。



例 a_4

$$e(a_4) = ve(v_3)$$

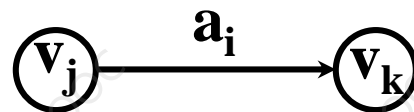
$$l(a_4) = vl(v_4) - dut(3, 4)$$

一. 事件与活动之间的关系

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k

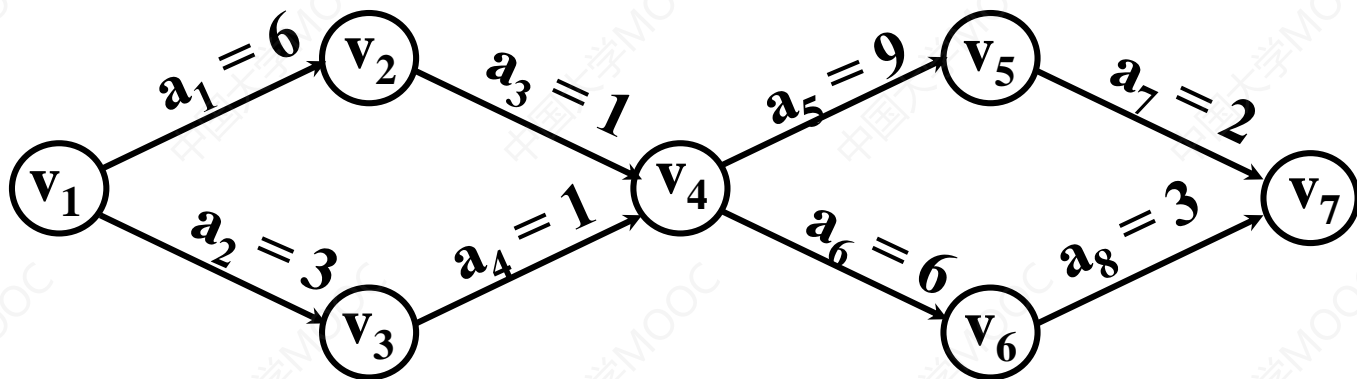
则有 $e(a_i) = ve(v_j)$

$$l(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$$



关键路径

注意：源点和汇点一定是关键活动，其最早和最迟发生时间相等



例，

$$ve(v_2) = ve(v_1) + 6$$

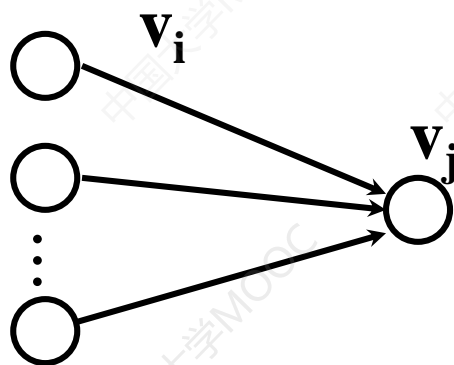
$$ve(v_3) = ve(v_1) + 3$$

$$ve(v_4) = ve(v_2) + 1 ?$$

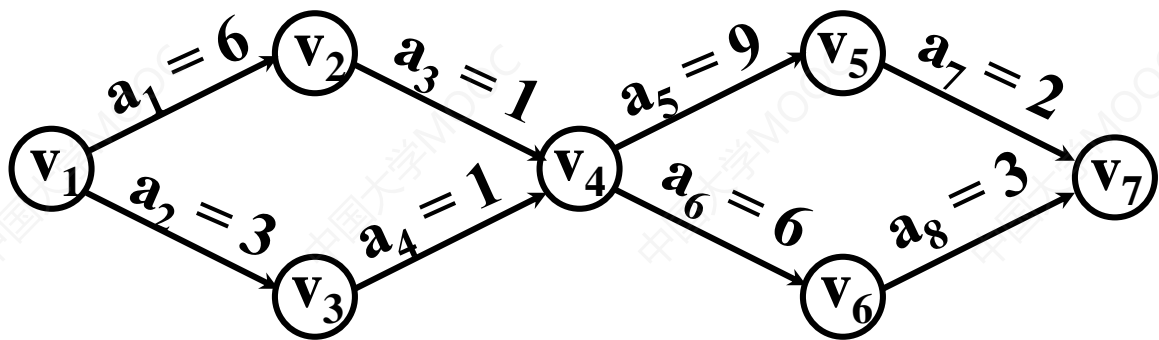
$$ve(v_3) + 1 ?$$

$$ve(v_j) = \text{Max}\{ ve(v_i) + \text{dut}(i, j) \}$$

v_i 是 v_j 的前驱事件



关键路径



例,

$$vl(v_5) = vl(v_7) - 2$$

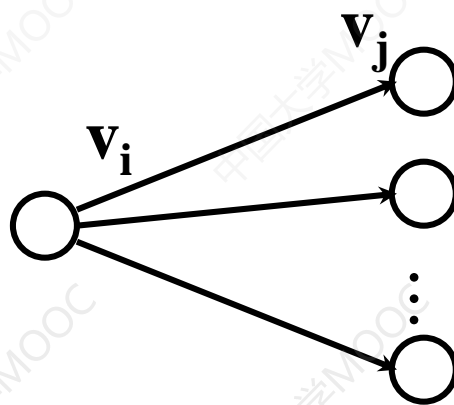
$$vl(v_6) = vl(v_7) - 3$$

$$vl(v_4) = vl(v_5) - 9 ?$$

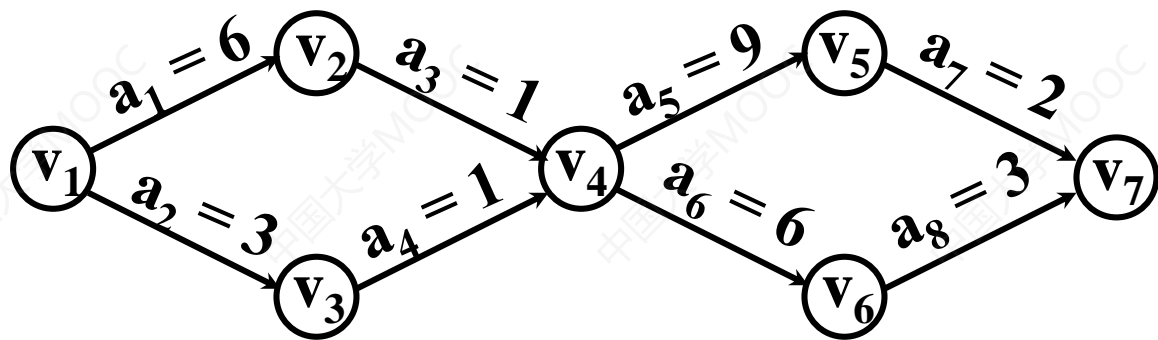
$$vl(v_6) - 6 ?$$

$$vl(v_i) = \text{Min}\{ vl(v_j) - \text{dut}(i, j) \}$$

v_j 是 v_i 的后继事件



关键路径



设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k

则有 $e(a_i) = ve(v_j)$

$$l(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$$

$$ve(v_j) = \text{Max}\{ ve(v_i) + dut(i, j) \}$$

v_i 是 v_j 的前驱事件

$$vl(v_i) = \text{Min}\{ vl(v_j) - dut(i, j) \}$$

v_j 是 v_i 的后继事件

初始

$$ve(v_1) = 0$$

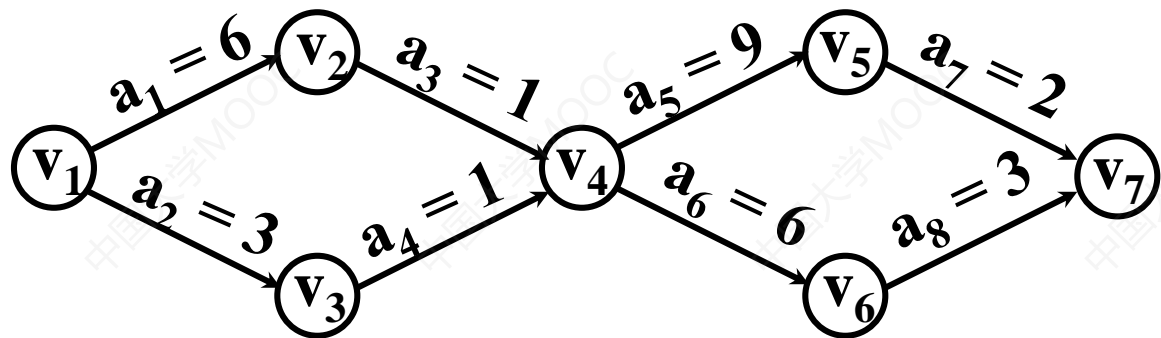
$$vl(v_7) = 18$$

两个递推公式的计算必须分别在拓扑有序和逆拓扑有序前提下进行

1. 从源点 v_0 出发，令 $ve(v_0) = 0$ ，按拓扑有序求其余各事件的最早发生时间 $ve(v_i)$ 。
2. 从汇点 v_n 出发，令 $vl(v_n) = ve(v_n)$ ，按逆拓扑有序求其余各事件的最迟发生时间 $vl(v_i)$ 。
3. 根据各事件的 $ve(v_i)$ 和 $vl(v_i)$ ，求各活动的最早开始时间 $e(a_j)$ 和最迟开始时间 $l(a_j)$ 。
4. $l(a_j) = e(a_j)$ 的活动叫做关键活动。

关键路径

例



逆拓扑有序

事件	ve	vl
v ₁	0	0
v ₂	6	6
v ₃	3	6
v ₄	7	7
v ₅	16	16
v ₆	13	15
v ₇	18	18

活动	e	l
a ₁	0	0
a ₂	0	3
a ₃	6	6
a ₄	3	6
a ₅	7	7
a ₆	7	9
a ₇	16	16
a ₈	13	15

关键路径 a₁ a₃ a₅ a₇

The background is a solid blue color with a subtle, repeating watermark of the text "中国大学MOOC" (China University MOOC) in a lighter blue shade. On the left side, there is a cluster of 3D cubes and rectangular prisms in various shades of blue and white, some appearing to float or fall. The overall aesthetic is modern and academic.

图

大连理工大学

刘馨月