二维连续型随机变量函数的分布

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$， $g(x,y)$是二元连续函数，则$Z=g(X,Y)$仍是连续型随机变量，其分布函数记为$F_Z(z)$,则

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=P((X,Y)\in D_z)$$

$$=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy \qquad f_Z(z)=F_Z'(z)$$

例12 已知随机变量 $X \sim E(\alpha), Y \sim E(\beta)$, 且X与Y相互独立，试求下列随机变量的密度函数：

$(1).\ Z_1 = X + Y,\quad (2).Z_2 = \dfrac{Y}{X},$

解： $(1).Z_1$的取值范围为$[0,+\infty)$,

当$z<0$时, $F_{Z_1}(z)=0$, 当$z \ge 0$时, $F_{Z_1}(z)=P(Z_1 \le z)$

$$=P(X+Y\le z) \underline{\underline{D_z=\{(x,y)\mid x+y\le z\}}} \iint\limits_{D_z} f(x,y)dxdy$$

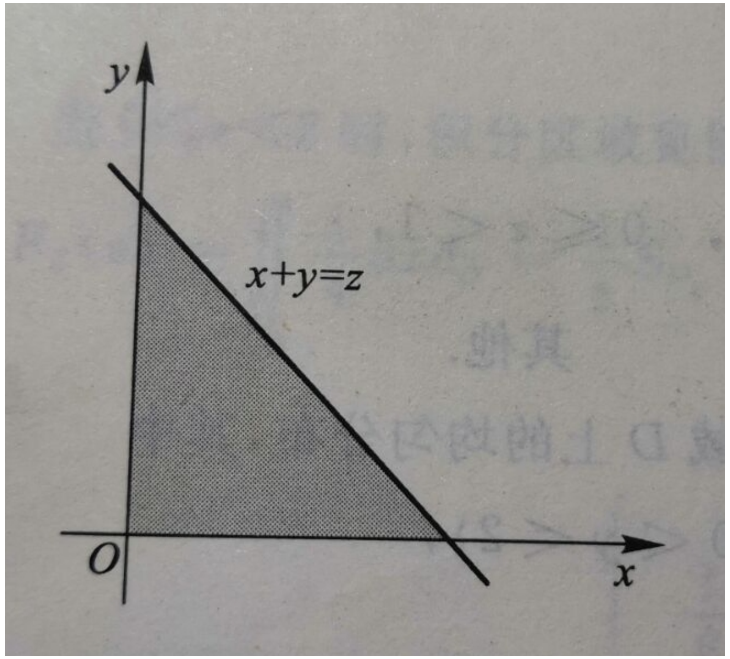
因为X与Y相互独立，

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot\beta e^{-\beta y}=\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)},\quad x>0,y>0$$

$$F_{Z_1}(z)=\iint\limits_{\substack{x>0,y>0\\x+y\le z}}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dxdy$$

$$=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dy$$



$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\beta(z-x)})\ dx$$

$$= 1 - e^{-\alpha z} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z})$$

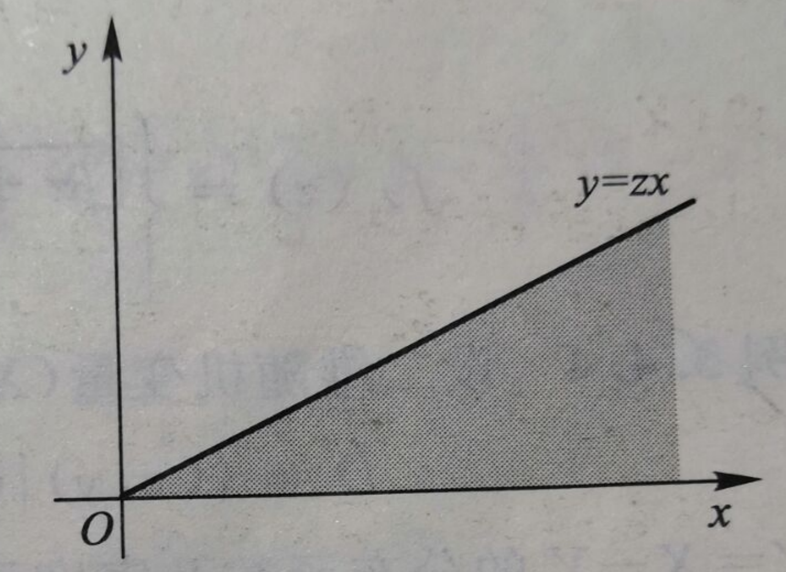
$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

(2).Z_2的取值范围为$[0,+\infty)$，当$z<0$时，$F_{Z_2}(z)=0$，

当$z\geq 0$时，$F_{Z_2}(z)=P(Z_2\leq z)=P(\frac{Y}{X}\leq z)=P(Y\leq Xz)$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{zx}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\beta xz})dx$$



（积分区域为第一象限中直线 $y=zx$ 的下方）

$$= \frac{\beta z}{\alpha + \beta z}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta z)^2}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

例13 设二维随机变量 (X,Y)服从区域 D上的均匀分布,其中$D=\{(x,y)\,|\,0<x<2,0<y<2\}$。求$Z=X-Y$的分布函数及密度函数 。

解: Z的取值范围为$[-2,2]$, 当$z<-2$时, $F_Z(z)=0$,

当$z\geq 2$时, $F_Z(z)=1$, 当$-2\leq z<2$时, $F_Z(z)$

$=P(X-Y\leq z)$ $=P(Y\geq X-z)$ $D_z=\{(x,y)\,|\,y\geq x-z\}$

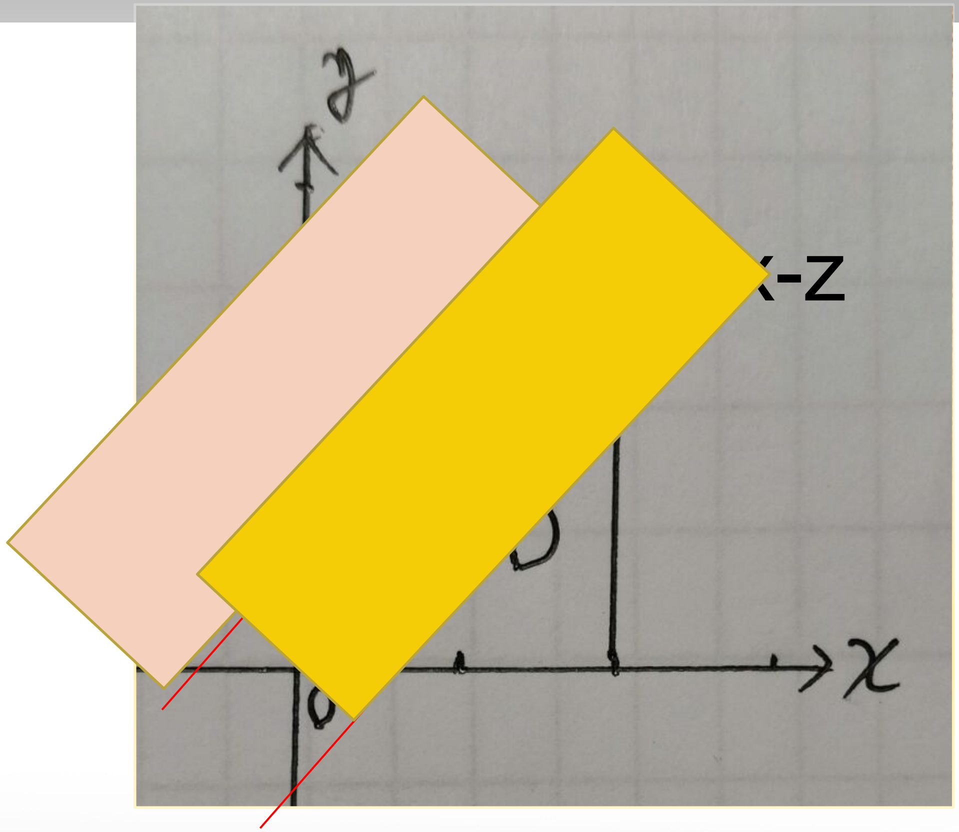
$$D_z = \{(x,y) \mid y \geq x - z\}$$

当 $-2 \leq z < 0$ 时, $F_Z(z)$

$$= \iint_{D_z} \tfrac{1}{4} dxdy = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2}(2+z)^2$$

$$= \frac{(z+2)^2}{8}$$

当 $0 \leq z < 2$ 时, $F_Z(z) = \iint_{D_z} \tfrac{1}{4} dxdy = 1 - \frac{(2-z)^2}{8}$

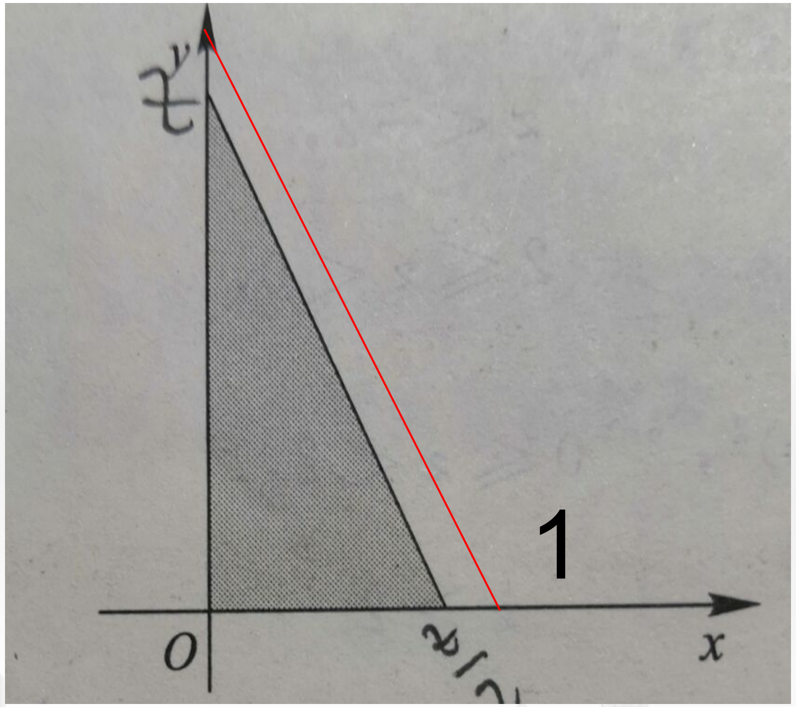


$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-2\\ \frac{(2+z)^2}{8}, & -2\le z<0\\ 1-\frac{(2-z)^2}{8}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases},\quad f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2+z}{4}, & -2\le z<0\\ \frac{2-z}{4}, & 0\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}。$$

例14 设二维随机变量 (X,Y)服从区域 D上的均匀分布，其中$D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<2-2x\}$。求 $Z=2X+Y$的密度函数。

解： (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2-2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



Z的取值范围为$(0,2)$,

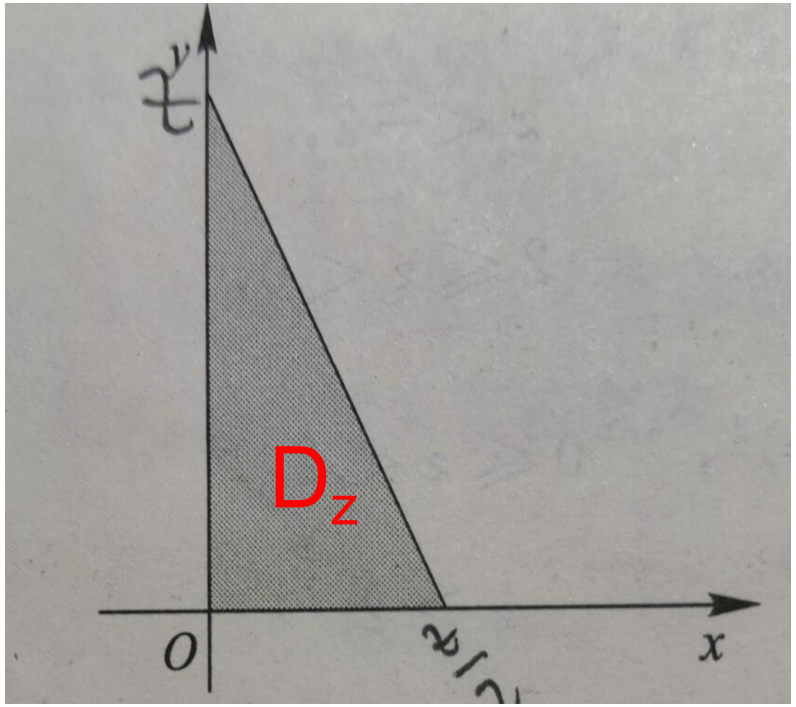
当$z<0$时, $F_Z(z)=0$,

当$z\geq 2$时, $F_Z(z)=1$,

当$0\leq z<2$时, $F_Z(z)=P(2X+Y\leq z)$

$$=P(Y\leq z-2X) \quad =\iint\limits_{D_z} 1dxdy$$

$$=\frac{z^2}{4}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}, 0<z<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}.$$

例15 已知X与Y相互独立，且都服从$N(0,\sigma^2)$，求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数。

解： Z的取值范围为$[0,+\infty)$， 当$z<0$时，$F_Z(z)=0$，

当$z\geq 0$时，$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X^2+Y^2\leq z^2)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot\exp[-(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{r}{2\pi\sigma^2}\cdot\exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})dr$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

- **极小（极大）分布**

例16 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，且X_i的分布函数为 $F_{X_i}(x), i=1,2,\cdots,n.$令

$$Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \quad Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\},$$

则（1).Y的分布函数为$F_{\max}(x)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$

(2).Z的分布函数为$F_{\min}(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$。

解： (1).Y的分布函数为$F_{\max}(x)=P(Y\le x)$

$$=P(\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x)$$

$$=P(X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le x)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x)$$

(2).Z的分布函数为$F_{\min}(x)=P(Z\le x)$

$$=P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x)$$

$$=1-P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x)$$

$$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$$

$$\boxed{F_{\min}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))}$$

$$\boxed{F_{\max}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)}$$

例17 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i\sim U[0,1]$，$i=1,2,\cdots,n$.求 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，与$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的密度函数。

解：

(1).X_i的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, 0\le x<1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

Y的分布函数为$F_{\max}(x)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x)=[F(x)]^n$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ x^n, & 0\le x<1,\\ 1, & x>1\end{cases}\qquad f_Y(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

(2).Z的分布函数为$F_{\min}(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))=1-(1-F(x))^n$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-x)^n, & 0\le x<1,\\ 1, & x>1\end{cases}\qquad f_Z(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

§3.5 综合例题

例18 设$r.v.X$与Y相互独立，且 $X \sim G(p_1)$, $Y \sim G(p_2)$, 试求$Z = \min\{X, Y\}$的分布列。

解： Z 的可能取值为$1, 2, \cdots,$

$$P(Z \geq n) = P(\min\{X, Y\} \geq n) = P(X \geq n, Y \geq n)$$

$$= P(X \geq n)P(Y \geq n)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} P(Y = k)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} p_1(1-p_1)^{k-1} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} p_2(1-p_2)^{k-1}$$

$$= (1-p_1)^{n-1} \cdot (1-p_2)^{n-1}$$

$$= (1-p_1-p_2+p_1p_2)^{n-1}$$

$$\underline{\underline{(p_1+p_2-p_1p_2=p)}} \quad (1-p)^{n-1}$$

$$P(Z=n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = p(1-p)^{n-1}.$$

例19 设离散型随机变量 X的分布列为 $P(X=i)$

$=\frac{1}{3}, i=1,2,3.$连续型$r.v.Y \sim U(0,1)$，且X与Y

相互独立，求$Z=X+Y$的密度函数。

解： Z的取值范围为$[1,4]$,

当$z<1$时，$F_Z(z)=0$， 当$z \geq 4$时，$F_Z(z)=1$，

当$0 \leq z < 4$时，$F_Z(z)=P(Z \leq z)$

$$=P(X+Y \leq z)$$

$$=\sum_{i=1}^{3} P(X=i)\cdot P(X+Y\le z \mid X=i)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(Y\le z-i \mid X=i) \quad =\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(Y\le z-i)$$

$$=\frac{1}{3}(F_Y(z-1)+F_Y(z-2)+F_Y(z-3))$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{3}(f_Y(z-1)+f_Y(z-2)+f_Y(z-3)) \quad 1\le z<4$$

因为$f_Y(y)=\begin{cases}1,\ 0<y<1\\0,\ \text{其他}\end{cases}$，

$$f_Z(z)=\frac{1}{3}(f_Y(z-1)+f_Y(z-2)+f_Y(z-3))$$

$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3},1<z<4\\0,\ \text{其他}\end{cases}$，即$Z\sim U(1,4)$.

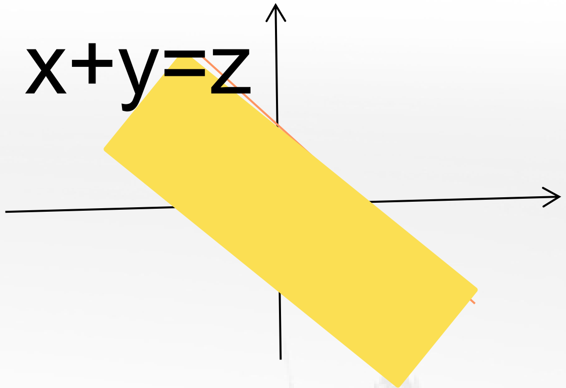
卷积公式

定理1 设二维 $r.v.(X,Y)$的联合密度函数为 $f(x,y)$,

则$Z = X + Y$的密度函数为 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$

证明: $Z = X + Y$的分布函数为 $F_Z(z) = P(X + Y \leq z)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy$$



$y = u - x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)dx}$$

则Z的密度函数为 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$

当X与Y相互独立时，$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$,则有：

定理2 设$r.v.X$与Y相互独立， X的边际密度函数为 $f_X(x)$, Y的边际密度函数为$f_Y(y)$，则$Z = X+Y$的密度函数为

为 $$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx.}$$

例20 设$r.v.X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，且$X$与$Y$相互独立，

则$Z = X + Y \sim N(0,2)$。

解：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}} dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(x-\frac{z}{2})^{2}}\cdot e^{-\frac{z}{4}^{2}}dx$$

令$x-\frac{z}{2}=\frac{t}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{4}^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t}{2}^{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{4}^{2}}$$

即$Z=X+Y\sim N(0,2)$。

一般地，有：

设$r.v.X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$X$与$Y$相互独立，

则：$(1).r.v.Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

正态分布具有可加性

$(2).r.v.W = aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2).$

例如：设$r.v.X \sim N(1,4), Y \sim N(1,9)$，且$X$与$Y$相互独立，

则$W = 2X + 3Y \sim N(5,97).$

例21 设$r.v.X \sim U(0,1), Y \sim E(1)$，且$X$与$Y$相互独立，

求$Z = X + Y$的密度函数。

解：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

当$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ z - x > 0 \end{cases}$时，即$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < z \end{cases}$时，

当$0<z<1$时，解得 $0 < x < z$

当$z>1$时，解得 $0 < x < 1$

当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z 1\cdot e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e^z-1)$

当$z>1$时，$f_Z(z)=\int_0^1 1\cdot e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e-1)$

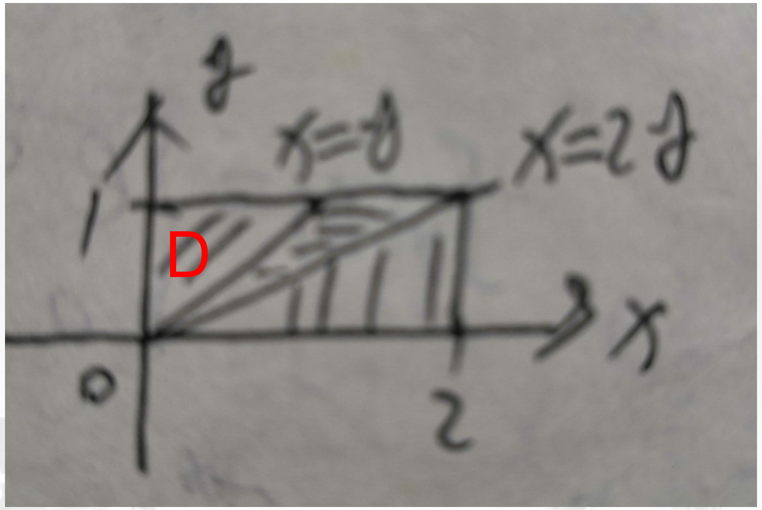
$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ e^{-z}(e^z-1), & 0<z<1.\\ e^{-z}(e-1), & z\geq 1\end{cases}$$

例22 设二维随机变量 (X,Y)服从区域 D上的均匀分布,其中$D=\{(x,y)\,|\,0<x<2,0<y<1\}$。

令$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases}$,$V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>Y\end{cases}$,

求:(1).(U,V)的联合分布列;

（2）$P(U=V)$



解: $P(U=0,V=0)=P(X\le Y,X\le 2Y)$

$=\iint\limits_D \frac{1}{2}dxdy \quad =\frac{1}{4}$

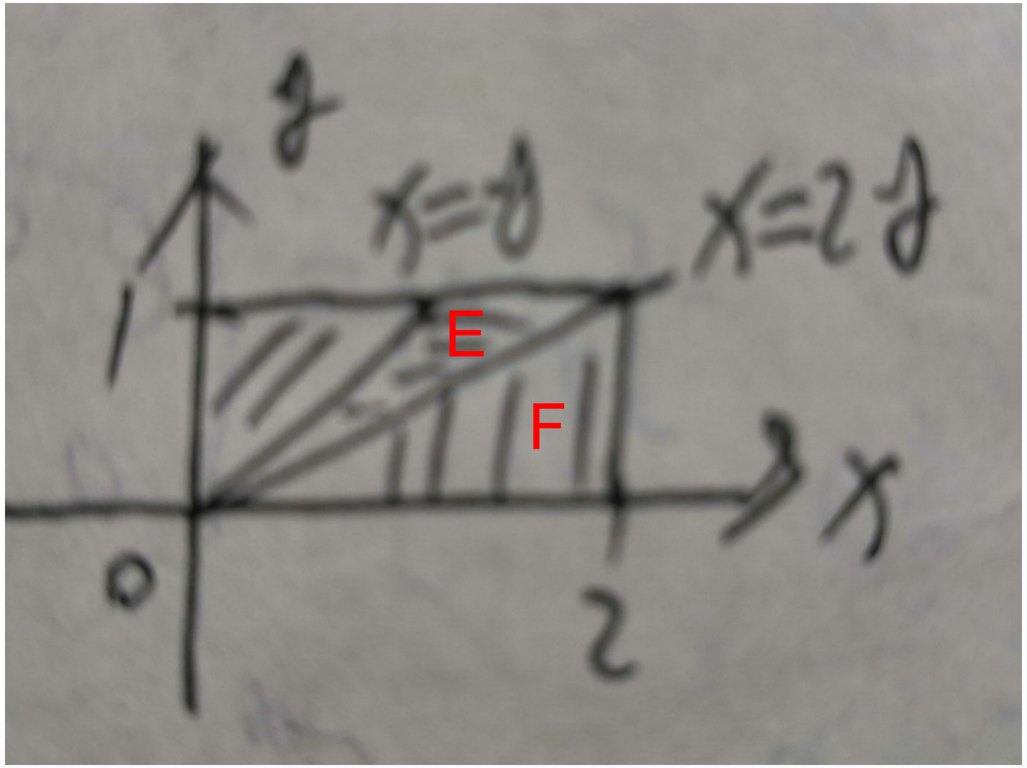
$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\le 2Y)$$

$$=\iint\limits_{E}\tfrac{1}{2}\,dxdy=\tfrac{1}{4}$$

$$P(U=1,V=1)=P(X>Y,X>2Y)$$

$$=\iint\limits_{F}\tfrac{1}{2}\,dxdy=\tfrac{1}{2}$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le Y,X>2Y)=0$$



(U,V)的联合分布列为：

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

（2）$P(U=V)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$