第七章 常微分方程初值问题数值解法

讲授：

求常微分方程初值问题的公式构造技术和有关知识。

重点论述：

Euler方法、**Runge-Kutta**方法和线性多步法原理、构造、局部截断误差和稳定性等。

单摆运动可看作工程技术里某些振动问题的简化．单摆运动如图 7－1 所示，其中摆线长为 l，小球质量为 m，图中竖线是小球的平衡位置．若将小球偏离平衡位置一个角度 θ，然后将重力作用于它，小球将会沿圆弧摆动．假设小球的摆动只受重力作用，不考虑空气阻力，试考查单摆的运动规律（设 $l=25$，初始角度 $\theta_0=30^\circ$，$g=9.8$）．

单摆的运动规律可用角度 θ 与时间 t 的关系来描述．由 Newton 第二定律，可得下面的微分方程：

$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$$

式中，$\ddot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$，$\dot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，再由初始条件 $\theta(0)=\theta_0=30^\circ$ 及 $\dot{\theta}(0)=0$，本问题转化为求解微分方程初值问题

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0\\ \theta(0)=30^\circ,\dot{\theta}(0)=0\end{cases}$$

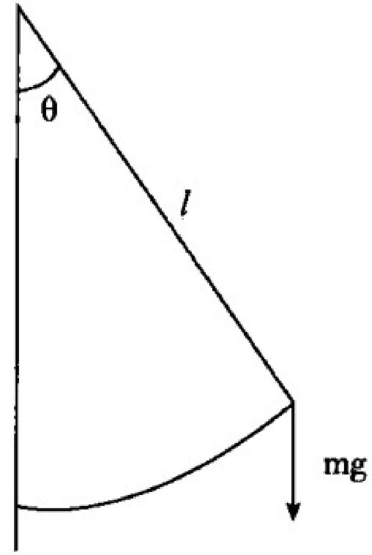


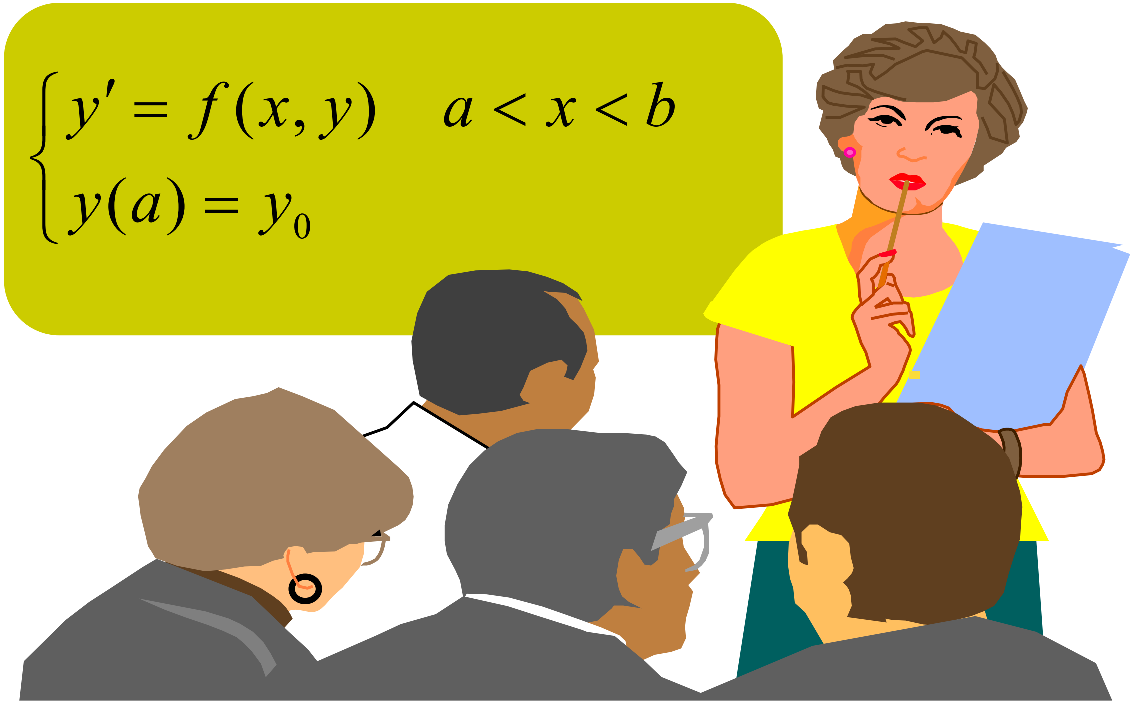
图7-1　单摆运动

的解 $\theta(t)$．但遗憾的是上面微分方程初值问题不能用通常的方法来求解，事实上它没有解析解．怎样求解不能用解析方法求解的微分方程初值问题，是本章要解决的问题.

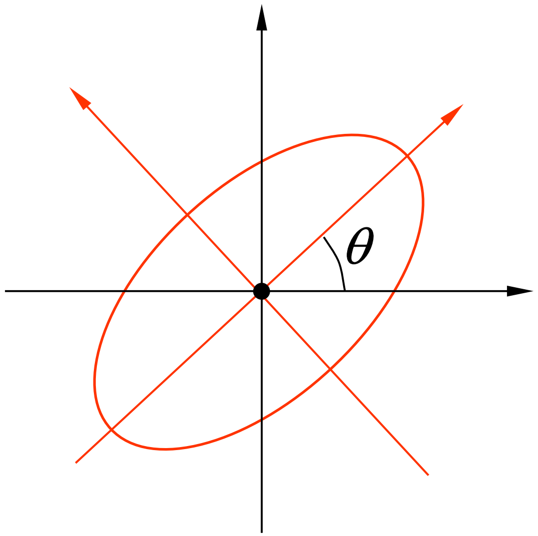
什么是常微分方程问题？

- **此问题求的是一个函数**
- **自变量和函数值一个方程**
- **当此方程种存在求导时**
- **常微分方程---偏微分方程**

§7.2 基本概念



$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a < x < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



1、常微分方程初值问题

本章只研究一阶常微分方程问题

1）一般形式

已知函数

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a < x < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

初始条件

2）数值方法

求$y = y(x)$在离散点$\{x_k\}$处近似值$\{y_k\}$的方法。

3）数值解

$$\boxed{y(x_k) \approx y_k, k = 1, 2, \cdots, n}$$

数值方法求的近似值$\{y_k\}$

设区间$[a,b]$上的一组节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

步长： $h_k = x_{k+1} - x_k$

求数值解一般是从初值开始按递推方式求解，即：

$$\boxed{y_0 = y(a) \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n = y(b)}$$

初值问题的解法有单步法和多步法：

单步法： $y_k \to y_{k+1}$

多步法： $\{y_{k-l}, y_{k-l+1}, \ldots, y_{k-1}, y_k\} \to y_{k+1}$

数值解法还有显格式和隐格式之分。

2、基本思想

用数值微分法、数值积分法、Taylor展开法等离散化方法将初值问题化为差分方程后再求解。

初值问题化为差分方程的方法：

1）用离散方法去掉微分方程中的导数 得到近似离散化方程；

2）在近似离散化方程中用 y_k 替换 $y(x_k)$

3）在近似离散化方程中将“≈”换为“=”

3、构造过程

1）数值微分法

$$\because y' = f(x, y) \Rightarrow y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

用数值微分的2点前差公式代替导数，有

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \approx y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

得近似离散化方程

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \approx f(x_k, y(x_k))$$

用初值问题化为差分方程的方法得到差分方程 $y_k \to y(x_k), \approx \to =$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k)$$

整理得

Euler公式

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

是**显式单步法**。

2）数值积分法

用数值积分

对 $y'=f(x,y)$ 两边积分

可得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx$$

采用梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

梯形方法

得近似离散化方程

$$y(x_{k+1})-y(x_k)\approx\frac{h}{2}[f(x_k,y(x_k))+f(x_{k+1},y(x_{k+1}))]$$

是隐式单步法

$$\Rightarrow y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$$

3）Taylor展开法

函数 y(x)的Taylor展式为

$$\because \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!} y''(x_k) + \cdots$$

$$= y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2!} \frac{d}{dx}[f(x, y(x))]\Big|_{x=x_k} + \cdots$$

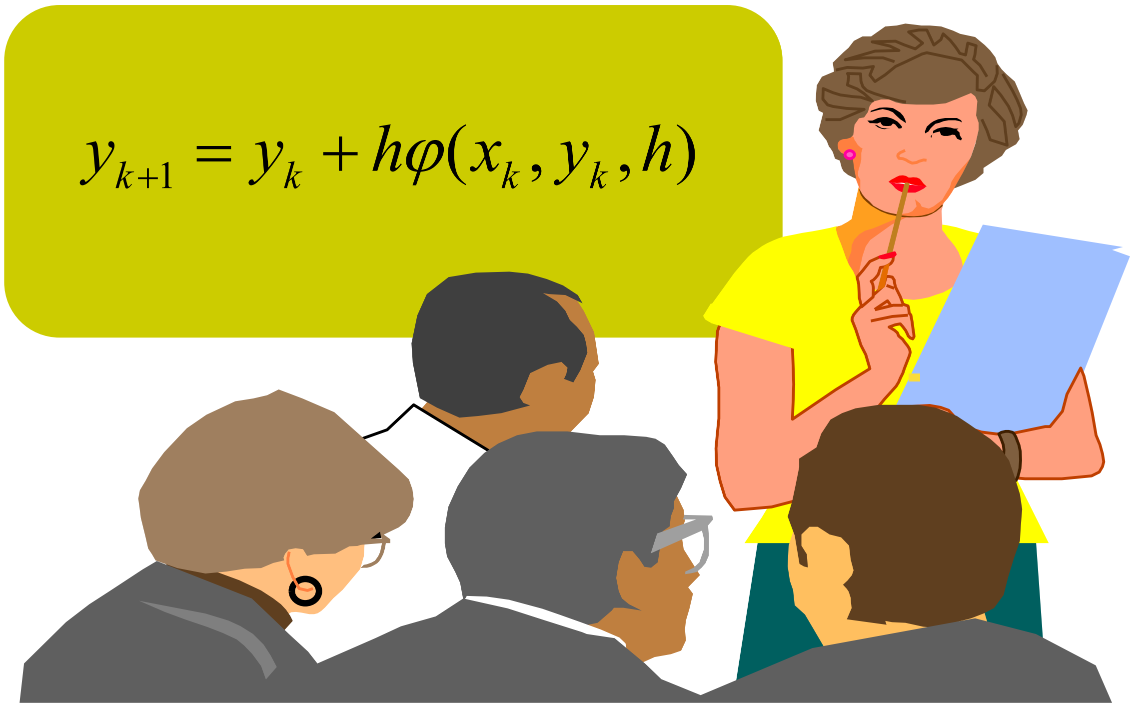
取上式右端前2项，得近似离散化方程:

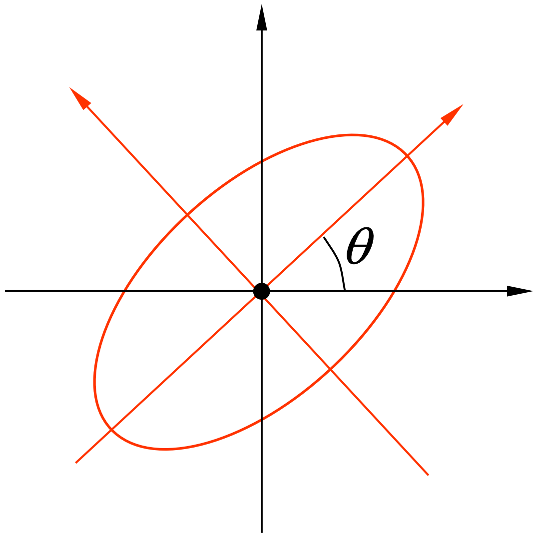
$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$$

$$\text{做} y_k \to y\left(x_k\right), \approx \to = \quad \Rightarrow y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right)$$

§ 7.3 数值解法的误差、阶与绝对稳定性

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$$





概念

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a < x < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

1) 单步法数学描述

显式： $y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$

隐式： $y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)$

增量函数 $\varphi(\ )$ **与** $f(x,y)$**有关。**

2)与函数y(x)有关的一些说明

$\boxed{y(x_k)}$ 解y(x) 在 x_k 的准确值，**没有误差**；

$\boxed{y_k}$ $y(x_k)$ 的近似值，递推公式计算的数值解，**有截断误差**；

$\boxed{\tilde{y}_k}$ 计算 y_k 给出的计算解，**有舍入误差**。

整体截断误差: $\boxed{e_{k+1} = y(x_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}}$

考虑到之前计算误差的累积

局部截断误差: $T_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\varphi(x_k, y(x_k), h)$

假设上一步的计算是准确的

$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \cdots}$$

3)从泰勒展式角度定义和理解方法误差阶

P阶方法(精度)： $\boxed{\text{如果 } T_{k+1} = O(h^{P+1})}$

方法的阶越高，方法越好。：

主局部截断误差: $\boxed{g(x_k, y(x_k))h^{P+1}}$

若 $T_{k+1} = O(h^{P+1}) = g(x_k, y(x_k))h^{P+1} + O(h^{P+2})$

例 :常微分方程初值问题的单步法为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}[f(x_n,y_n)+2f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

试求其局部截断误差主项并确定其精度阶。

这里初值问题及步长h为

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}, \quad h=x_{n+1}-x_n$$

解： $y'(\underline{x_n})=f\left(\underline{x_n},y\left(\underline{x_n}\right)\right)$

$$\because T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{3}[f(x_n,y(x_n))+2f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{3}\left(y'(x_n)+2y'(x_{n+1})\right)$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$$

$$- y(x_n) - \frac{h}{3} y'(x_n) - \frac{2}{3} h \left(y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!} y'''(\xi) \right)$$

$$= (1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}) hy'(x_n) + (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

$$= -\frac{1}{6} h^2 y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

故局部截断误差主项是 $-\frac{1}{6} h^2 y''(x_n)$ **精度是一阶。**

同阶无穷小O运算规则:

$$O(h^p) = a_1 h^p + a_2 h^{p_2} + \cdots, a_1 \neq 0, p < p_2$$

$$O(h^p) + O(h^q) = O(h^p), \quad p < q$$

数值方法是绝对稳定的定义：

$$\left|\varepsilon_{k+1}\right| \leq \left|\varepsilon_{k}\right|$$

ε_k 是 y_k 的舍入误差， $\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k$

试验方程 $y' = \lambda y$ λ为复数

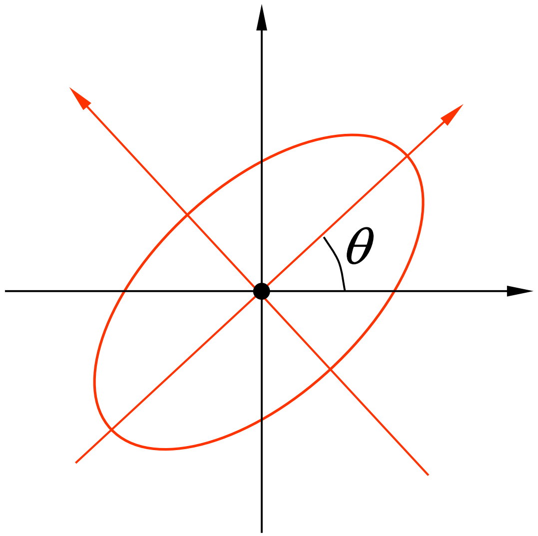
绝对稳定域： $\left\{ \boxed{\mu(\lambda, h)} \middle| \left|\varepsilon_{k+1}\right| \leq \left|\varepsilon_{k}\right|, y' = \lambda y \right\}$

绝对稳定区间： 绝对稳定域与复平面实轴的交。

绝对稳定域越大，方法的绝对稳定性越好。
稳定性和h（步长）有关

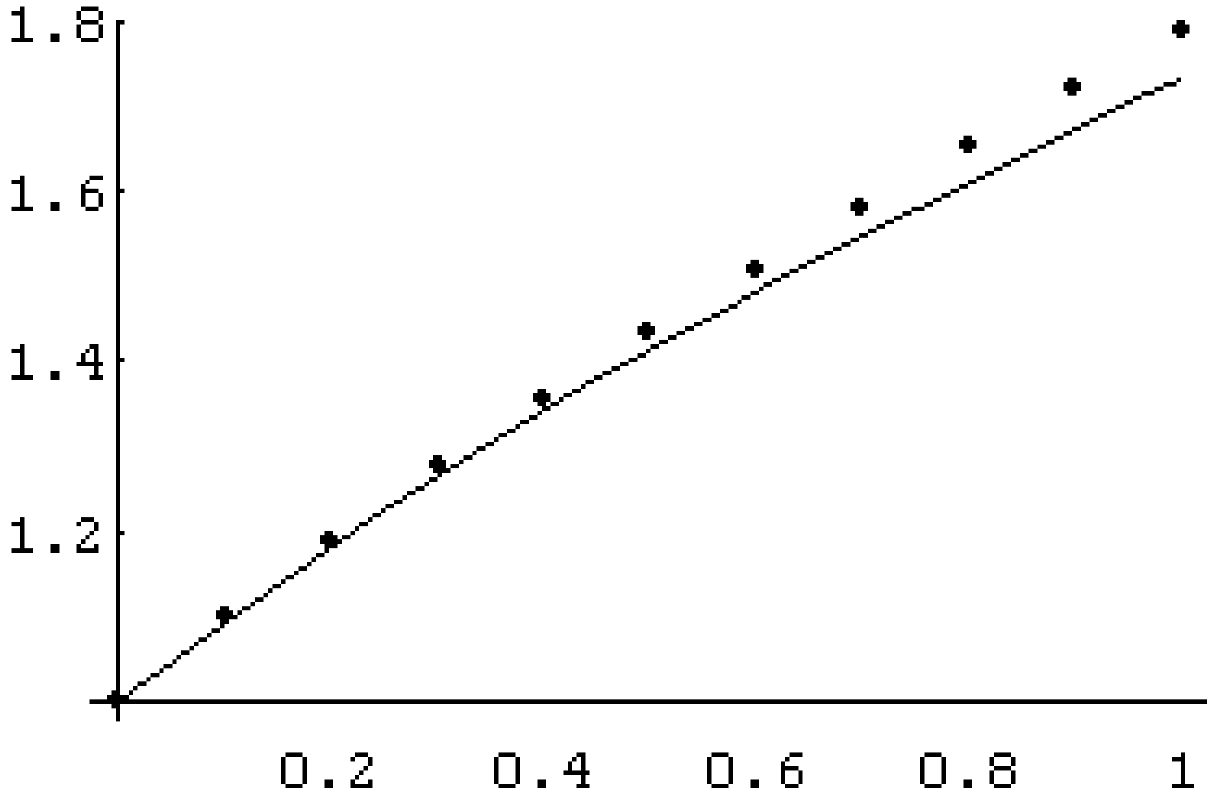
§7.4 Euler方法的有关问题

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$$



1、Euler方法的几何意义

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)}$$



Euler方法常称为折线法。

2、 Euler方法的误差

可按照前面例题方法计算

Euler方法的局部截断误差：

$$T_k = O(h^2)$$

Euler方法的总体截断误差:

$$|e_k| = O(h)$$

$$|f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)| \leqslant L|y(x_k) - y_k|$$

$$|e_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - y_{k+1} + y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}|$$

由 $y_{k+1} = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$，$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k)$，有

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leqslant |T_{k+1}| + (1+hL)|e_k| \\ &\leqslant |T_{k+1}| + (1+hL)|T_k| + (1+hL)^2|T_{k-1}| + \cdots + (1+hL)^k|T_1| \end{aligned}$$

因为对任意 m 都有 $|T_m| = O(h^2)$，则可得

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leqslant \sum_{m=0}^{k}(1+hL)^m|T_{k+1-m}| = O(h^2)\sum_{m=0}^{k}(1+hL)^m \\ &= \frac{(1+hL)^{k+1}-1}{1+hL-1}O(h^2) = O(h) \end{aligned}$$

由 k 的任意性，可知 Euler 方法的总体截断误差为

$$|e_k| = O(h)$$

说明Euler方法计算所得数值解可以逼近准确解，从而Euler方法是收敛的。

3、 Euler方法稳定性

将Euler公式用于试验方程: $y' = \lambda y$ **得到**

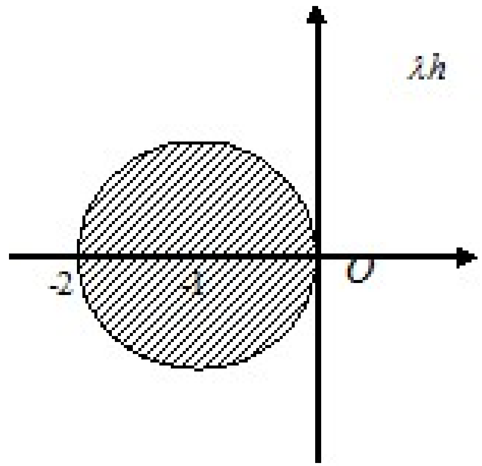
$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = (1+\lambda h) y_k$$

设计算 y_k **时有舍入误差：**ε_k, $\quad k = 0,1,2,\cdots$

$$\Rightarrow y_{k+1} + \varepsilon_{k+1} = (1+\lambda h)(y_k + \varepsilon_k)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{k+1} = (1+\lambda h)\varepsilon_k$$

如果$|\varepsilon_{k+1}| \le |\varepsilon_k| \Rightarrow |1+\lambda h| \le 1$



Euler方法绝对稳定域为 $|1+\lambda h| \le 1$

Euler方法绝对稳定区间为 $-2 \le \mathrm{Re}(\lambda h) < 0$

Euler方法绝对稳定区间为

$$-2 \le \mathrm{Re}\left(\lambda h\right) < 0$$

若指定 λ是负实数，则有当步长h满足

$$0 < h \le -\frac{2}{\lambda}$$

可保证Euler方法的计算绝对稳定。

例：设初值问题为

$$\begin{cases} y' = -100y, \ 0 \le x \le 0.1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取h=0.025, 用Euler方法求其数值解并与其准确解作比较。

解　本题准确解为 $y = e^{-100x}$

Euler法计算公式为

$$y_{k+1} = y_k - 100hy_k = (1 - 100h)y_k, \quad y_0 = 1$$

直接计算结果与对应准确值的误差有如下表

x_k	0.025	0.05	0.075	0.1
y_k	-1.5	2.25	-3.375	5.0625
$y(x_k)-y_k$	1.58	-2.24	3.37	-5.06

计算结果波动大，不稳定，计算结果失真！

原因： **h的稳定性范围为**

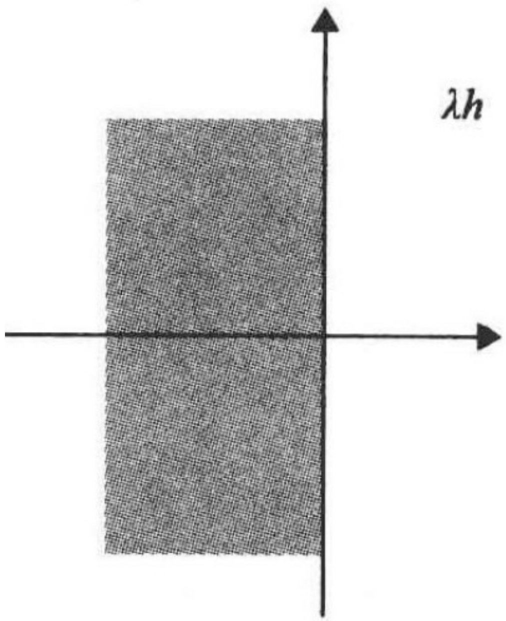
$$0<h\le -\frac{2}{\lambda}=0.02, \because \lambda=-100$$

本题的 h=0.025〉0.02，故计算结果不稳定。

3、基于数值积分的梯形方法

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$$

$$\left|1+\frac{\lambda}{2}h\right|\leqslant\left|1-\frac{\lambda}{2}h\right|$$



隐式

↓

显式

4、改进的Euler方法

预测： $\overline{y}_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$

Euler方法

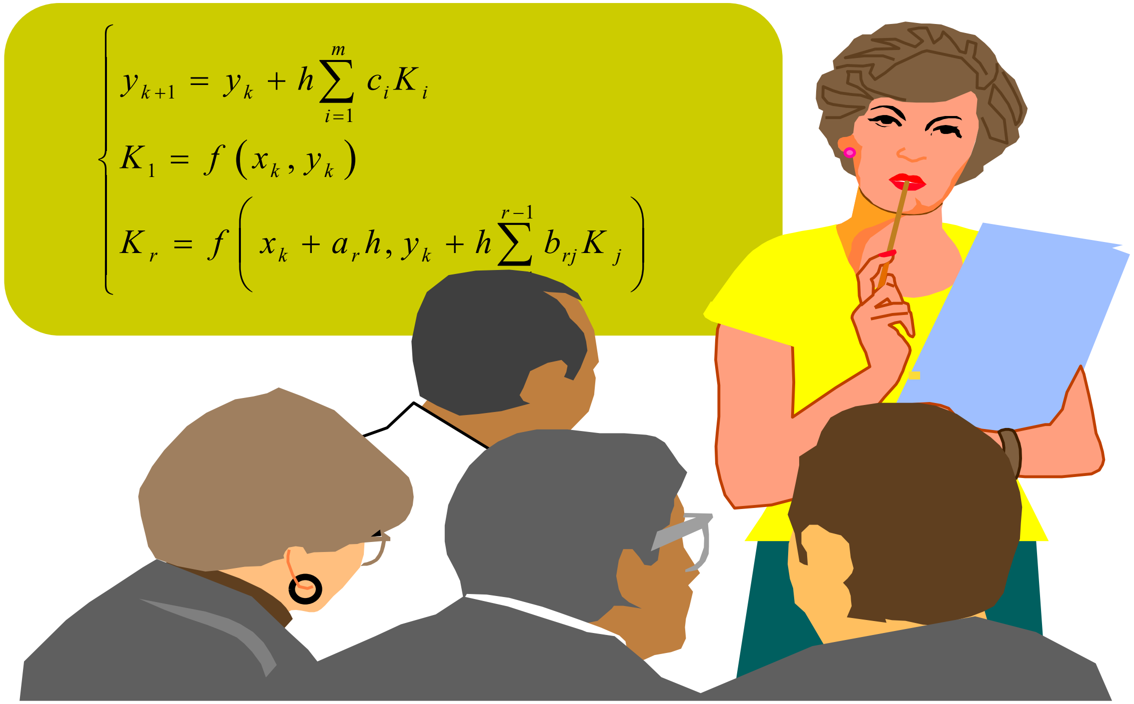
校正： $y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\overline{y}_{k+1})]$

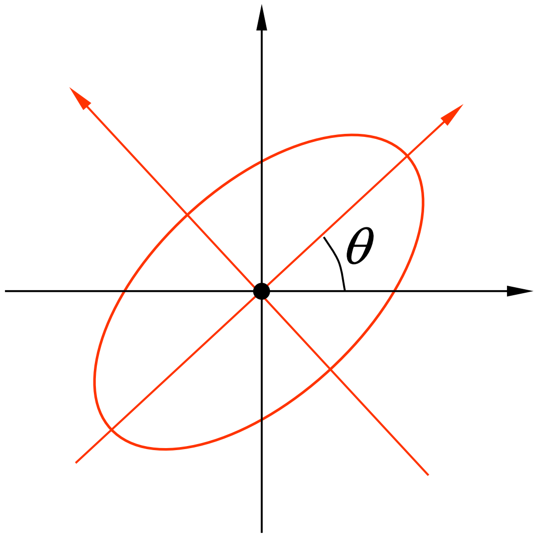
梯形方法

称为预测—校正公式。

易证它也是二阶方法。

§7.5 Runge-Kutta方法





2、基本思想

将微分方程初值问题转化为积分方程问题，再对积分方程中的定积分使用待定的m点插值型求积公式构造高阶的函数展开模式以获得高阶数值方法。

理论上，由Taylor展开法可以构造出解初值问题的高阶数值方法，但这涉及到要计算 的高阶导数，因此很不方便。本节的Runge-Kutta方法从函数 本身着手，避开计算 的高阶导数来构造高阶数值方法。

3、构造原理

对 $y'=f(x,y)$ 两边积分, 可得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx$$

用m个点的插值型求积公式，得近似离散化方程

$$y(x_{k+1})\approx y(x_k)+h\sum_{i=1}^{m} c_i f(\xi_i,y(\xi_i)) \qquad \xi_i\in[x_k,x_{k+1}],h=x_{k+1}-x_k$$

取 $\xi_i=x_k+a_i h$，对 $f(\xi_i,y(\xi_i))$ 做展开, 得

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+h\sum_{i=1}^{m} c_i K_i \\ K_1=f\left(x_k,y_k\right) \\ K_r=f\left(x_k+a_r h, y_k+h\sum_{j=1}^{r-1} b_{rj}K_j\right) \quad (r=2,3,\cdots,m) \end{cases}$$

R-K一般公式

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{m} c_i K_i \\ K_1 = f\left(x_k, y_k\right) \\ K_r = f\left(x_k + a_r h, y_k + h\sum_{j=1}^{r-1} b_{rj} K_j\right) \quad (r = 2,3,\cdots,m) \end{cases}$$

Runge-Kutta方法

利用Taylor展开式对参数 $\left\{a_r, b_{rj}, c_i\right\}$ **适当选择就可以构造高阶方法。**

Runge-Kutta方法的增量函数： $\varphi\left(x, y, h\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i K_i$

要构造 p 阶数值方法，

可选择参数 a_r, b_{rj}, c_i ，使局部截断误差

$$T = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y(x), h) = O(h^{p+1})$$

4、构造过程

m=1时是什么？

m = 2的Runge-Kutta方法的构造过程：

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\left(c_1 K_1 + c_2 K_2\right)}$$

R-K公式

$$K_1 = f\left(x_k, y_k\right), K_2 = f\left(x_k + a_2 h, y_k + h b_{21} K_1\right)$$

其增量函数为

$$\varphi\left(x, y(x), h\right) =$$

$$c_1 f\left(x, y(x)\right) + c_2 f\left(x + a_2 h, y(x) + h b_{21} f\left(x, y(x)\right)\right)$$

引进符号

$$f\left(x,y(x)\right)=f,\ f'_x\left(x,y(x)\right)=f'_x,\ f'_y\left(x,y\right)=f'_y$$

$$\because\ y'=f\left(x,y\right)\Rightarrow y''\left(x\right)=f'_x+f'_y\cdot f$$

$$y'''\left(x\right)=f''_{xx}+f''_{xy}\cdot f+\left(f''_{yx}+f''_{yy}\cdot f\right)f+f'_y\left(f'_x+f'_y\cdot f\right)$$

函数在x 处做Taylor展开，有

$$y\left(x+h\right)=y\left(x\right)+y'\left(x\right)h+\frac{y''\left(x\right)}{2!}h^2+O\left(h^3\right)$$

$$=y\left(x\right)+hf+\frac{h^2}{2!}\left(f'_x+f'_y\cdot f\right)+O\left(h^3\right)$$

对增量函数 $\varphi(x,y(x),h)=$

$$c_1 f(x,y(x))+c_2 f(x+a_2 h, y(x)+hb_{21} f(x,y(x)))$$

在(x,y) 做二元Taylor展开，有

二元Taylor展开公式

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f_x'h+f_y'k$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}''h^2+2hkf_{xy}''+f_{yy}''k^2\right)+\cdots$$

$$\varphi(x,y(x),h)=c_1 f+c_2\left[f+a_2 hf_x'+hb_{21}f_y'f+O(h^2)\right]$$

$$=(c_1+c_2)f+(c_2a_2f_x'+c_2b_{21}f_y'f)h+O(h^2)$$

$$\because T = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y(x), h)$$

$$\Rightarrow T = (1-c_1-c_2) f h + \left[\left(\frac{1}{2}-c_2a_2\right)f'_x + \left(\frac{1}{2}-c_2b_{21}\right)f'_y f\right]h^2 + O(h^3)$$

取 $c_1 + c_2 = 1,\quad \dfrac{1}{2} - c_2a_2 = 0,\quad \dfrac{1}{2} - c_2b_{21} = 0 \Rightarrow T = O(h^3)$

从方程组解出 c_1, c_2, b_{21}, a_2

即得到一组二阶Runge-Kutta公式。

改进的Euler公式

因方程组有3个方程4个参数，有无穷多解，如

令 $c_2 = t \neq 0 \quad \Rightarrow c_1 = 1-t, a_2 = b_{21} = \dfrac{1}{2t}$ 令 $t = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_k+h, y_k + hf(x_k, y_k))\right]$$

5、 Runge-Kutta方法的阶与级的关系

计算f(x,y) 的次数m:	1	2	3	4	5	6	7
对应方法的最高阶	1	2	3	4	4	5	6

经典R-K公式

$$
\begin{cases}
y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \\
K_1 = f\left(x_k, y_k\right) \\
K_2 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 = f\left(x_k + h, y_k + hK_3\right)
\end{cases}
$$

例：给定初值问题求解公式

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{4}[f(x_m,y_m)+3f(x_m+\frac{2}{3}h,y_m+\frac{2}{3}hf(x_m,y_m))]$$

求其局部截断误差，指出它是几阶公式。

$$\text{式中} h=\frac{b-a}{n}, x_m=a+mh, m=0,1,\cdots,n$$

解

$$\boxed{y_{m+1}=y_m+\frac{h}{4}[f(x_m,y_m)+3f(x_m+\frac{2}{3}h,y_m+\frac{2}{3}hf(x_m,y_m))]}$$

$$\because T_{m+1}=y(x_{m+1})-y(x_m)$$

$$-\frac{h}{4}[f(x_m,y(x_m))+3f(x_m+\frac{2}{3}h,y(x_m)+\frac{2}{3}hf(x_m,y(x_m)))]$$

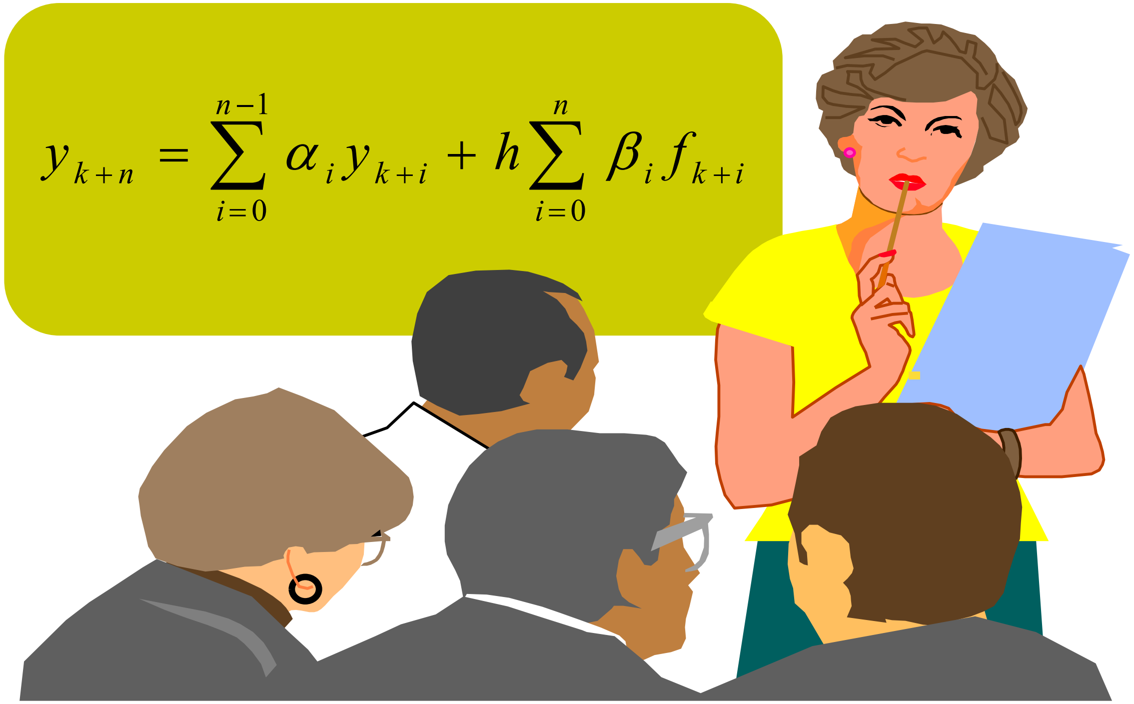
$$=y(x_{m+1})-y(x_m)-\frac{h}{4}y'(x_m)-\frac{3}{4}hf(x_m+\frac{2}{3}h,y(x_m)+\frac{2}{3}hy'(x_m))$$

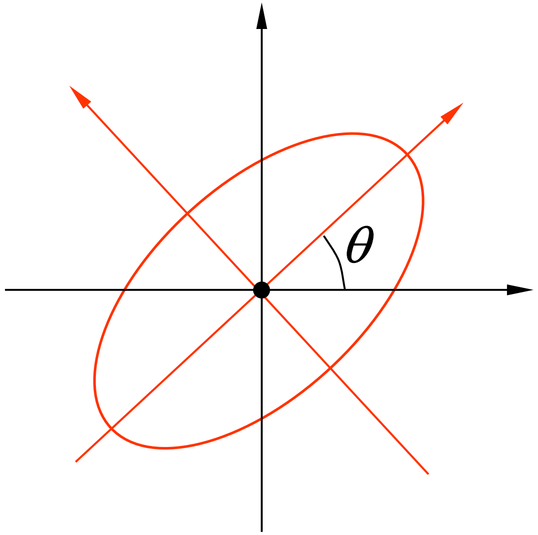
$$=\frac{h^3}{6}y''(x_m)f_y'\left(x_m,y\left(x_m\right)\right)+O(h^4)=O(h^3)$$

$$y\left(x_{m+k}\right)=y\left(x_m+kh\right),k=\pm1,\pm2\cdots$$

2阶方法

§ 7.6 线性多步法





1、概念

线性 n步法公式

$$y_{k+n}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i y_{k+i}+h\sum_{i=0}^{n}\beta_i f_{k+i}\quad ,k=0,1,2,\cdots$$

α_i,β_i为常数，$f_{k+i}=f(x_{k+i},y_{k+i}),x_{k+i}=x_k+ih$

α_0,β_0不同时为零。

$$\{\underbrace{y_k,y_{k+1},\cdots,y_{k+n-1}}_{n个y值}\}\to y_{k+n}$$

2、方法构造

1）基于数值积分的构造方法

对y' =f(x,y)两边积分，得

$$y(x_{k+m}) = y(x_{k-m+1}) + \int_{x_{k-m+1}}^{x_{k+m}} f(x, y(x))dx$$

对右端的定积分选择 的不同插值函数代替被积函数，即可得到计算公式。

Adams方法给出构造过程：

设初值问题的解y(x)在n个点 $x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-n+1}$

的数值解为 $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-n+1}$ **考虑数表**

$$f_i = f\left(x_i, y_i\right)$$

x_k	x_{k-1}	$\cdots$	x_{k-n+1}
f_k	f_{k-1}	$\cdots$	f_{k-n+1}

构造*f(x,y(x))*的n-1次Lagrange插值多项式

$$f(x, y(x)) = L_{n-1}(x) + \frac{y^{(n-1)}(\xi)}{n!}\omega_n(x) \quad L_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} l_{in-1}(x) f_{k-i}$$

积分中取 m=1。有定积分

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \\ &= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{n-1}(x)dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{y^{(n-1)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)dx \end{aligned}}$$

$$\because \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{n-1}(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_{k-i} \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_{in-1}(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f_{k-i}$$

$$h = x_{k+1} - x_k, \beta_i = \frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_{k+1}} l_{in-1}(x)dx, \text{记} R_n = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{y^{(n\text{-}1)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)dx$$

$$\Rightarrow y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f_{k-i} + R_n$$

n步Adams外插公式

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f_{k-i}}$$

例： 构造3阶Adams显示公式。

解： 取三个相邻的等距节点对应的数据

$$
\begin{array}{ccc}
x_k & x_{k-1} & x_{k-2} \\
f_k & f_{k-1} & f_{k-2}
\end{array}
$$

做二次Lagrange插值多项式

$$
L_2(x) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-2})} f_k + \frac{(x-x_k)(x-x_{k-2})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k-2})} f_{k-1}
$$

$$
+ \frac{(x-x_k)(x-x_{k-1})}{(x_{k-2}-x_k)(x_{k-2}-x_{k-1})} f_{k-2}
$$

$$\because x_{k-i} = x_k - ih,\text{令} x = x_k + th$$

$$\Rightarrow L_2(x) = \frac{1}{2}(t+1)(t+2)f_k - t(t+2)f_{k-1} + \frac{1}{2}t(t+1)f_{k-2}$$

$$\Rightarrow y(x_{k+1}) - y(x_k) \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_2(x)dx$$

$$= h\int_0^1 [\frac{(t+1)(t+2)}{2} f_k - t(t+2)f_{k-1} + \frac{1}{2}t(t+1)f_{k-2}]dt$$

$$= \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

得到3阶Adams外推公式

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})}$$

其局部截断误差为

$$T = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})}{3!} y^{(4)}(\xi)dx$$

$$= h^4 \int_0^1 \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} y^{(4)}(\xi)dt$$

$$= h^4 y^{(4)}(\eta) \int_0^1 \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} dt = \frac{3h^4}{8} y^{(4)}(\eta)$$

2）基于Taylor展开的构造方法

方法

*先给出线性多步法的计算公式模式；
* 对局部截断误差表达式处作Taylor展开确定公式的系数。

例 设求初值问题的线性3步公式具有如下形式

$$y_{k+1}=y_{k-2}+h(af_k+bf_{k-1}+cf_{k-2})$$

h为步长，试求系数a,b,c使该公式的阶数尽可能高，并写出其局部截断误差。

解：局部截断误差为

$$\begin{aligned}T&=y(x_{k+1})-y(x_{k-2})\\&\quad-h\Big(af\big(x_k,y(x_k)\big)+bf\big(x_{k-1},y(x_{k-1})\big)+cf\big(x_{k-2},y(x_{k-2})\big)\Big)\\&=y(x_{k+1})-y(x_{k-2})-h\big(ay'(x_k)+by'(x_{k-1})+cy'(x_{k-2})\big)\end{aligned}$$

$$=\left[y(x_k)+y'(x_k)h+\frac{1}{2}h^2y''(x_k)+\frac{1}{3!}y'''(x_k)h^3+\frac{1}{4!}y^{(4)}(x_k)h^4+O(h^5)\right]$$

$$-\left[y(x_k)-2y'(x_k)h+\frac{1}{2}(-2h)^2y''(x_k)+\frac{1}{3!}y'''(x_k)(-2h)^3+\frac{1}{4!}y^{(4)}(x_k)(-2h)^4+O(h^5)\right]$$

$$-hay'(x_k)-bh\left[y'(x_k)-hy''(x_k)+\frac{1}{2}y'''(x_k)h^2-\frac{1}{3!}y^{(4)}(x_k)h^3+O(h^4)\right]$$

$$-ch\left[y'(x_k)-2hy''(x_k)+\frac{1}{2}y'''(x_k)(-2h)^2+\frac{1}{3!}y^{(4)}(x_k)(-2h)^3+O(h^4)\right]$$

$$=(3-a-b-c)hy'(x_k)+\left(-\frac{3}{2}+b+2c\right)h^2y''(x_k)$$

$$+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}b-2c\right)h^3y'''(x_k)+\left(-\frac{5}{8}+\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c\right)h^4y^{(4)}(x_k)+O(h^5)$$

因为有3个待定系数，选择截断误差的前3项的系数为零，得线性方程组

$$\begin{cases} 3-a-b-c=0 \\ -1.5+b+2c=0 \\ 1.5-0.5b-2c=0 \end{cases}$$

解得

$$a=2.25$$
$$b=0$$
$$c=0.75$$

$$\because \; -\frac{5}{8}+\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c=\frac{3}{8}\neq 0$$

是3阶方法，局部截断误差为

$$T=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}\left(x_k\right)+O\left(h^5\right)$$

一阶常微分方程初值问题-知识总结：

- 什么是微分方程问题---数值解
- 什么是一阶常微分方程初值问题