§4.1　条件概率

主　题

条件概率的定义

条件概率的性质

条件概率的计算

条 件 概 率

已知事件 A、B， A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率称为B在A之下的条件概率，记为$P(B \mid A)$。

例1 假设咱们班级有112名同学，其中男同学80人，女同学32人，又男同学中，家在大连的有8人，女同学中,家在大连的有3人。任选一名同学,设事件 A表示选出的是女同学，事件 B表示这名同学家是大连的。

1.求事件 A和事件 B的概率

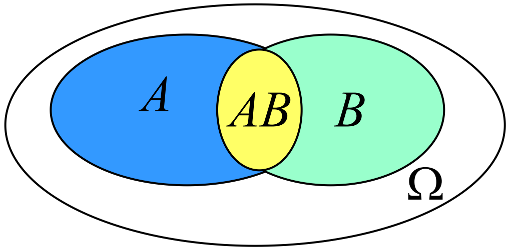
2.若就在女同学中选，求这名同学家在大连的概率

解： $P(A)=\dfrac{32}{112}$ $\quad P(B)=\dfrac{11}{112}$ $\quad P(AB)=\dfrac{3}{112}$

$$P(B \mid A)=\frac{3}{32}$$

缩小样本空间求概率

$$=\frac{3/112}{32/112}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$



定义：设A、B是某随机试验中的两个事件，且 $P(A) > 0$

则 $$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件A已发生的条件下事件B的条件概率，简称为B在A之下的条件概率。

注意P(AB)与P(B|A) 的区别！

例2： 从区间[0,1]上任取两点，记为x,y, 令

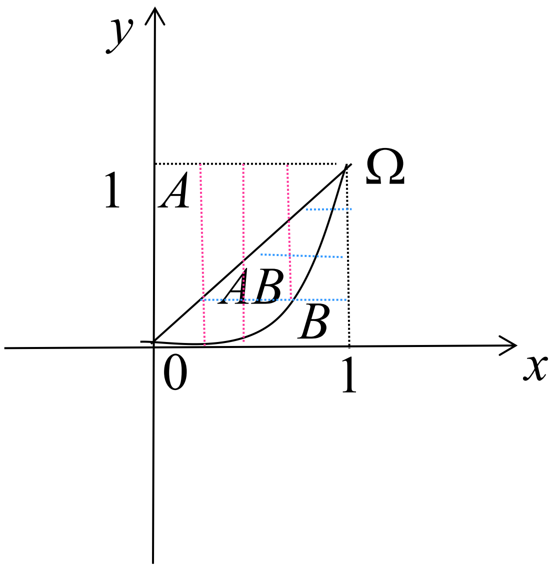
$A=\{(x,y): y\geq x^2\}, B=\{(x,y): y<x\},$

试计算 $P(AB)$与 $P(A\mid B)$.

$$P(AB)=\frac{1}{2}-\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{6}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\mid B)=\frac{AB\text{的面积}}{B\text{面积}}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$



口算 一盒子装有10只产品，其中有4只一等品，6只二等品．从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样．设事件A为“第一次取到的是一等品”，事件B为“第二次取到的是一等品”．试求条件概率$P(B|A)$．

练习： **某家庭有2个小孩，且已知有一个是女孩，求另一个是女孩的概率．**

$$\Omega=\{男男，男女，女男，女女\}$$

$$\frac{1}{3}$$

口算 一盒子装有10只产品，其中有4只一等品，6只二等品．从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样．设事件A为“第一次取到的是一等品”，事件B为“第二次取到的是一等品”．试求条件概率$P(B|A)$．

1. 可以通过条件概率的定义公式计算
2. 也可以用缩小样本空间直接算，先计算出B的样本点个数，然后再计算事件BA的样本点个数。(4*3/4*9)

条件概率的性质

1 非负性：对任意事件B，有$P(B|A)\geq 0$

2 规范性：　　$P(\Omega|A)=1$

3 可列可加性：如果随机事件B_1，$B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\middle|A\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n|A)$$

$$\frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}AB_n)}{P(A)} \rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)}{P(A)} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(AB_n)}{P(A)}$$

$\boxed{AB_1,\ AB_2,\cdots,AB_n,\cdots \text{ 两两互不相容}}$

4 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$;

5 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$;

条件概率 $P(B \mid A)$也可以记作 $P_A(B)$,

$P(\cdot \mid A)$或者 $P_A(\cdot)$看作是 A下条件概率的运算符号 ，

$P(\cdot \mid A)$满足概率的所有性质。

例3 已知 $P(A)=0.5, P(C)=0.2, P(AC)=0.1$； $P\left(B\middle|\overline{C}\right)=0.6, A\subset B$；

试求 $P\left(A\cup\overline{B}\middle|\overline{C}\right)$

解： $P\left(A\cup\overline{B}\middle|\overline{C}\right)=P(A\mid\overline{C})+P\left(\overline{B}\middle|\overline{C}\right)-P(A\overline{B}\mid\overline{C})$

$$A\subset B\Rightarrow \quad A\overline{B}=\phi \quad \Rightarrow \quad P(A\overline{B}\mid\overline{C})=0$$

$$P\left(\overline{B}\middle|\overline{C}\right)=1-P(B\mid\overline{C})=1-0.6=0.4$$

$$P(A\mid\overline{C})=\frac{P(A\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(A)-P(AC)}{1-P(C)}$$

$$=\frac{0.5-0.1}{1-0.2}=\frac{1}{2}$$

$$P\left(A\cup\overline{B}\middle|\overline{C}\right)=0.4+0.5=0.9$$