デジタル信号処理

第3回　離散時間信号　ー時間領域表現ー

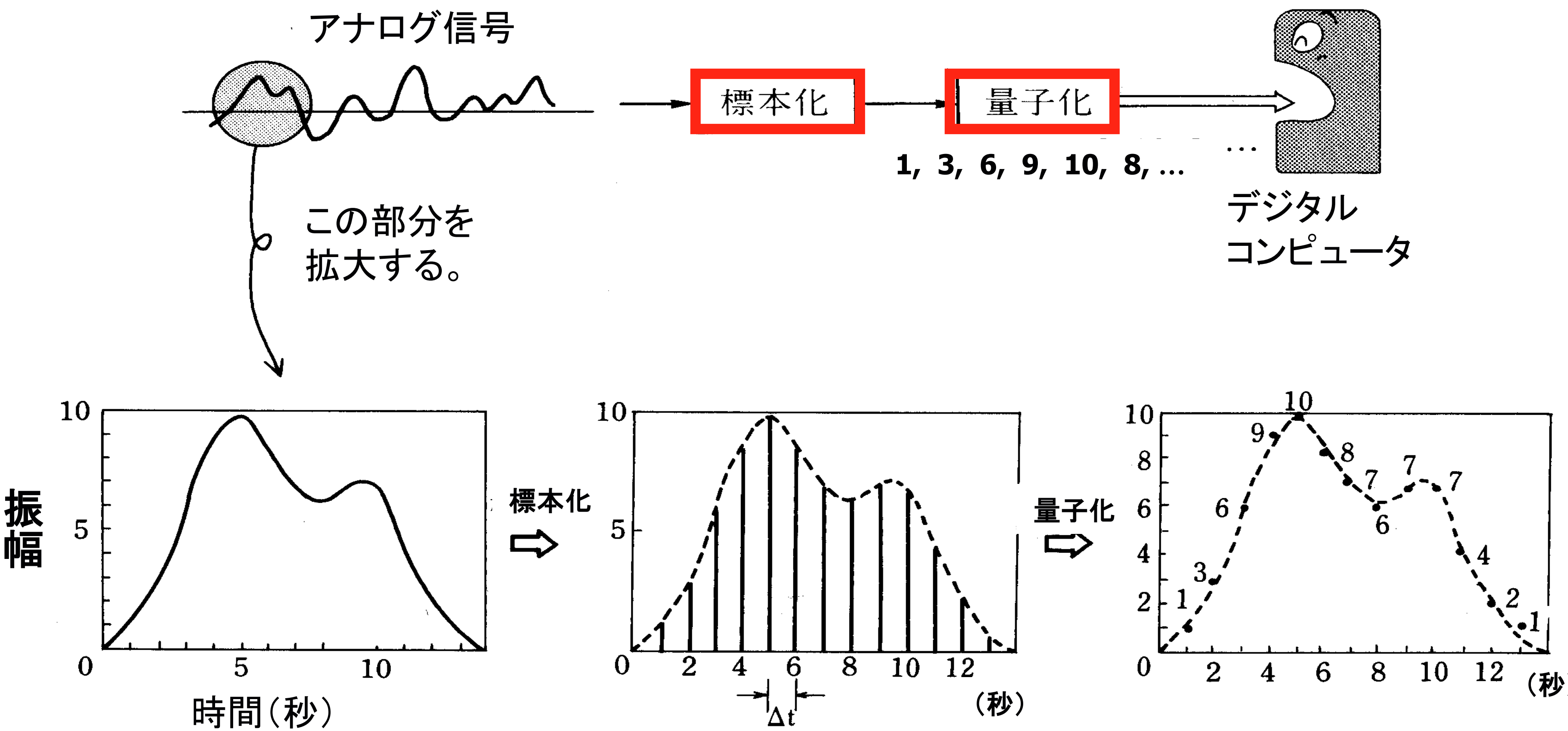
立命館大学
情報理工学部
李　亮

今回の講義内容

- 【復習】AD変換
  - アナログ信号からデジタル信号に変換
  - 標本化と量子化について
  - 波について

- 離散時間信号
  - 時間領域信号と周波数領域信号

【復習】AD変換（アナログからデジタルへの変換）



標本化間隔

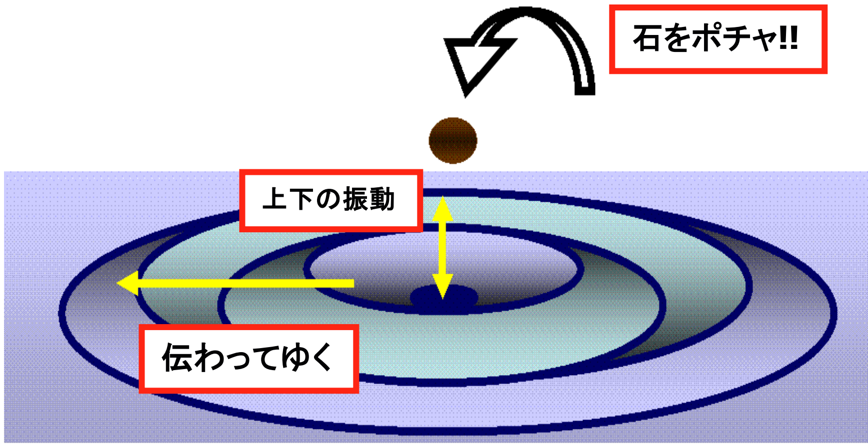
(a)　アナログ信号
（時間も電圧も連続量）

(b) 標本化後の信号
（時間は離散量、振幅は連続量）

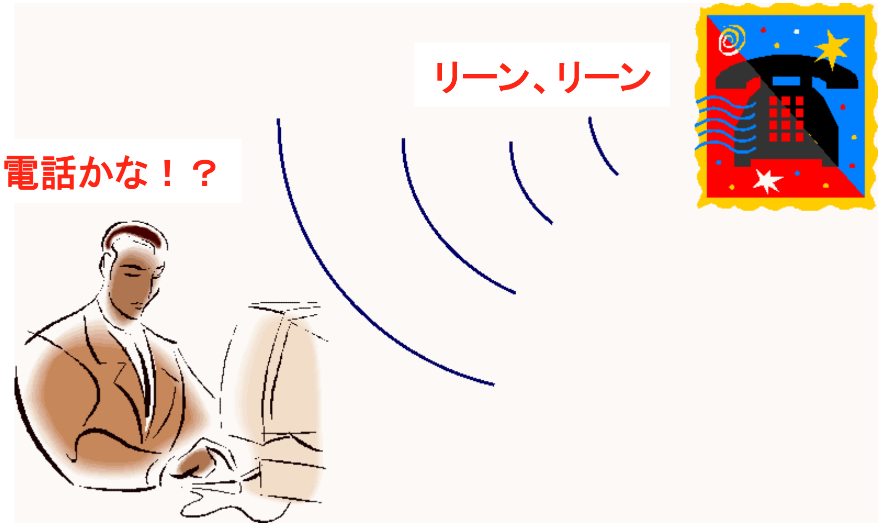
(C) 量子化後の信号
（時間も振幅も離散量）

【補足】波について

- 波とは
  - 「振動」するものがあって、それが周囲に「伝わってゆく」現象
    - 例：池に石を投げると、石が落ちたところでは、水面の高さが上下に震動し、その位置を中心にして波が輪を描いて四方へ伝達
    - デジタル信号処理では、波（アナログ信号）をデジタル信号として扱い処理



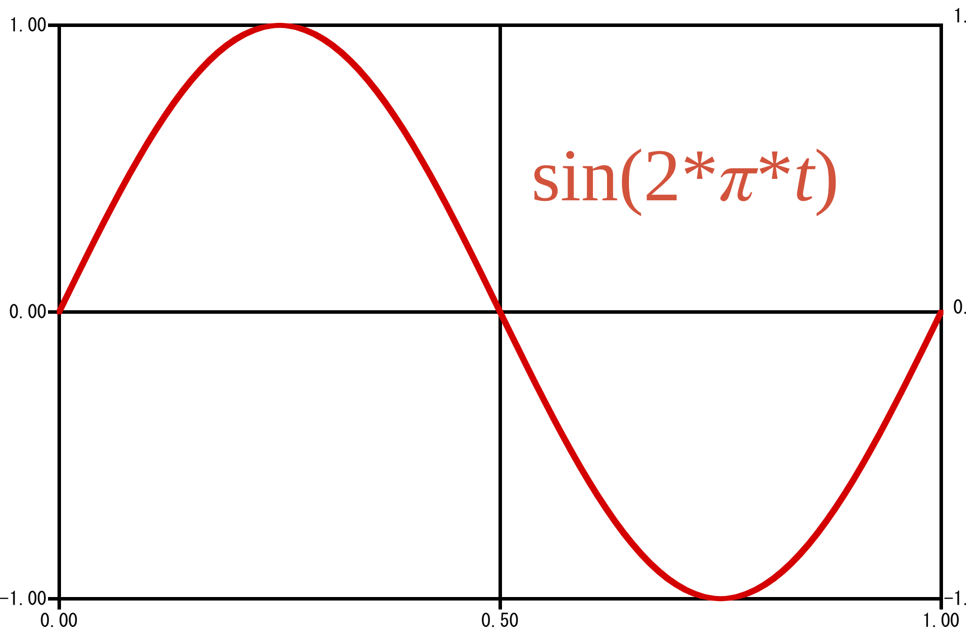
  - 音も「波」（光や地震、電磁波も「波」）
    - たとえばバイオリンの場合、バイオリンの弦の「振動」により、この振動が弦に接している空気の分子を「振動」させ、空気中を「伝わってゆく」。そして、この空気（の分子）の振動が耳まで伝わり、鼓膜を振動させることで、我々は「音」として知覚



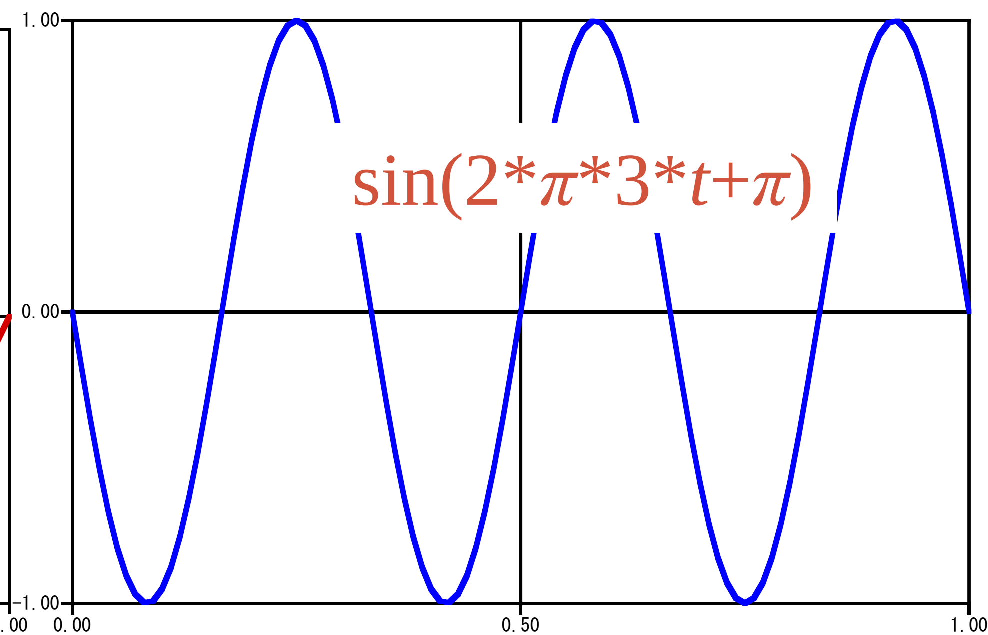
【補足】波の表現方法

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}$$

- 周波数
  - 周波数とは，1秒間に繰り返される波の数のことで，ヘルツ(Hz)という単位で表現する。簡単にいえば振動の速さ。例えば，空気の振動数を指す場合は，耳で聞こえる音の高さとして使用



1Hzの波
（1秒間に波が1回繰り返すから）

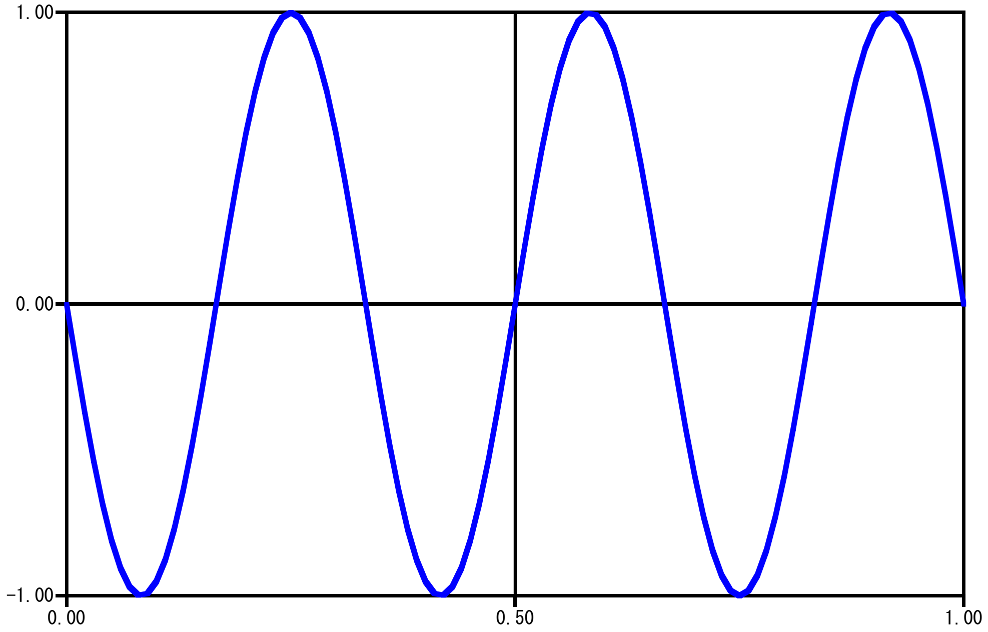


3Hzの波
（1秒間に波が3回繰り返すから）

演習課題（1/5）

- 3Hzの波を標本化周波数4Hz、量子化2bitsでデジタル信号に変換せよ。

- ヒント:
  - まず4Hzで標本化
  - その後2bitsで量子化
  - デジタル信号は数字列
  - よって答えは…



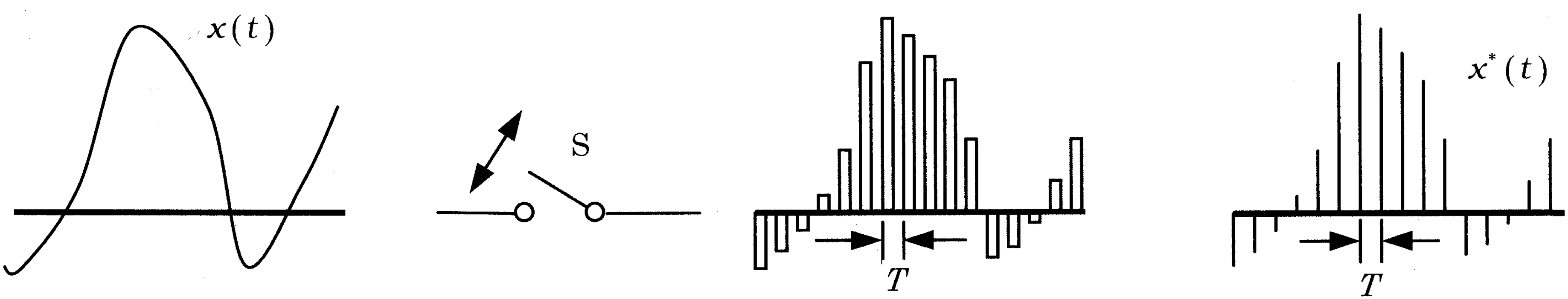
演習課題（2/5）

- 標本化に関する問題
  - オーディオ周波数（可聴周波数）は20Hz～20,000Hzである。このオーディオ信号をデジタル信号処理する場合、その標本化（サンプリング）周波数はいくらが適当か？
  - CD (Compact Disk) では、サンプリング周波数を44,100Hzとしている。エイリアシングなく標本化（サンプリング）するためには、AD変換前のアナログ信号において、周波数成分をどのように制限しておく必要があるか。

ヒント（エイリアシング）：
　信号の持つ最高周波数の2倍以上で標本化しないと波の折り返しが生じ、品質が劣化する。

離散時間信号について

- 時間領域表現
  - デジタル信号処理の基本は離散時間信号
  - デジタル信号
    - 離散時間信号の大きさを数値（量子化値）で表現しているだけ
    - これからは 「デジタル信号」＝「離散時間信号」として記載
  - どうやって離散時間信号を得るのか？
    - サンプラーのON/OFFを周期Tで行うことにより、信号を離散化



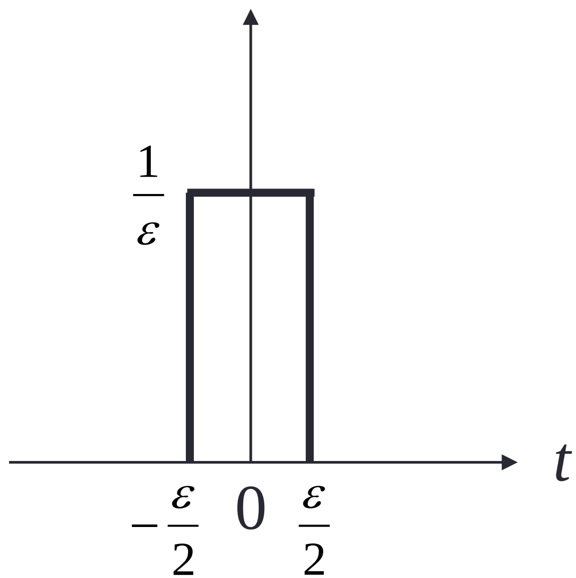
アナログ信号化　サンプラー　パルス列信号　離散時間信号

サンプラーがONのときのみ値を持つ

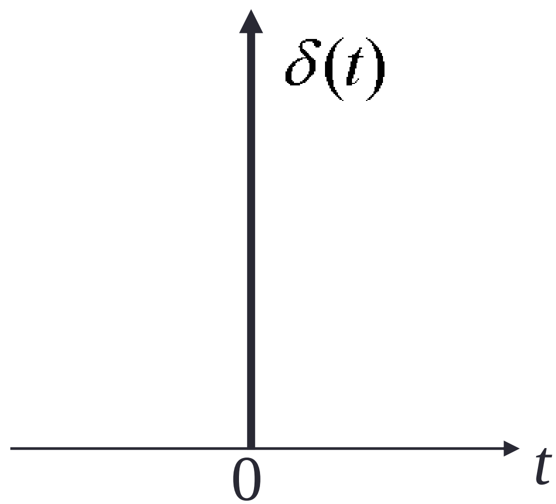
サンプラーが短い時間だけONにするとき

離散時間信号　ーデルタ関数１ー

単位面積パルス信号



デルタ関数（（単位）インパルス関数）



パルス：
語源は脈拍。通常パルスという
と1回の波をさす。
単位面積パルス（信号）：
幅ε、高さ$1/\varepsilon$の信号。面積は1

デルタ関数（インパルス関数）：
幅0、振幅∞の信号。面積は1。

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

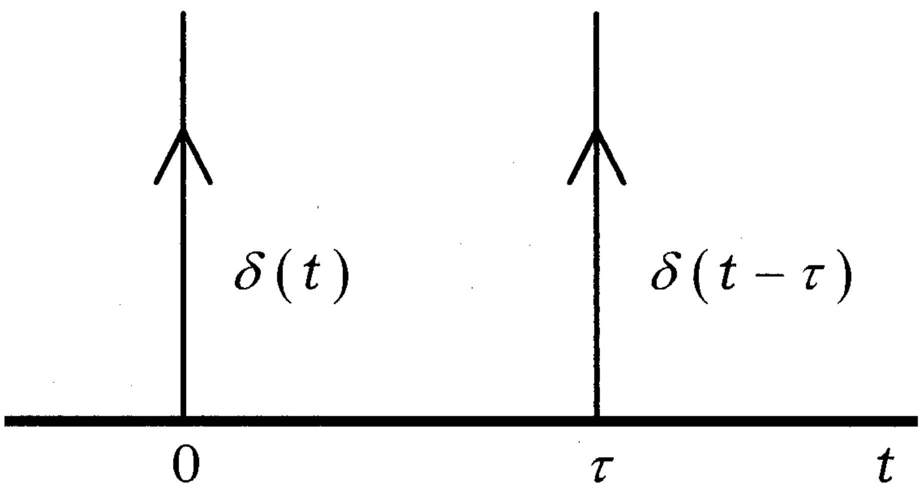
時刻t以外の振幅は0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

-∞～∞まで積分すると1
（＝全体の面積が1）

離散時間信号　ーデルタ関数2ー

- デルタ関数（インパルス関数）の表記
  - 時刻 0 にパルスがあるデルタ関数:　$\delta(t)$
  - 時刻 τ にパルスがあるデルタ関数:　$\delta(t-\tau)$

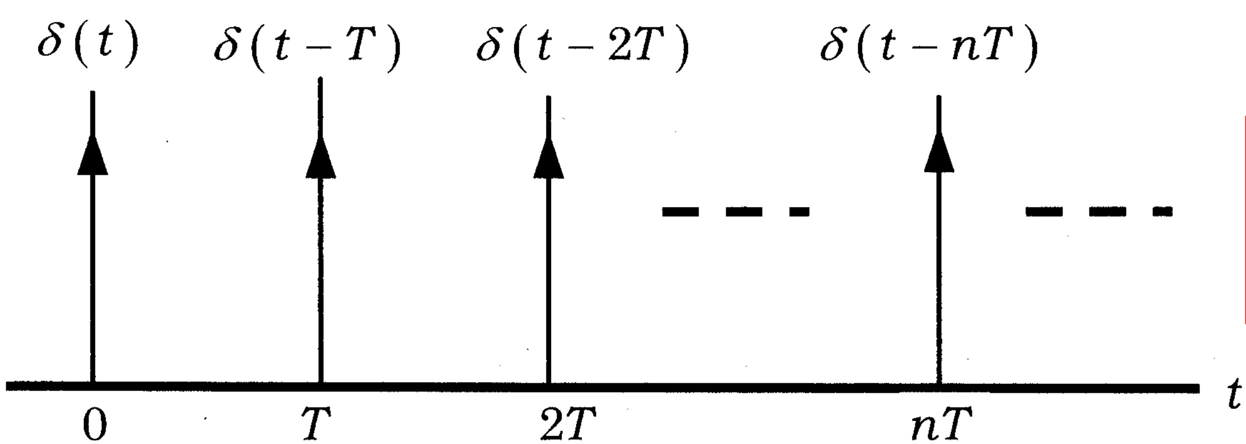


離散時間信号　ー時間領域表現1ー

- サンプラー関数の表記
  - サンプラーがONになるときは、

$$s(t) = \cdots + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \cdots$$

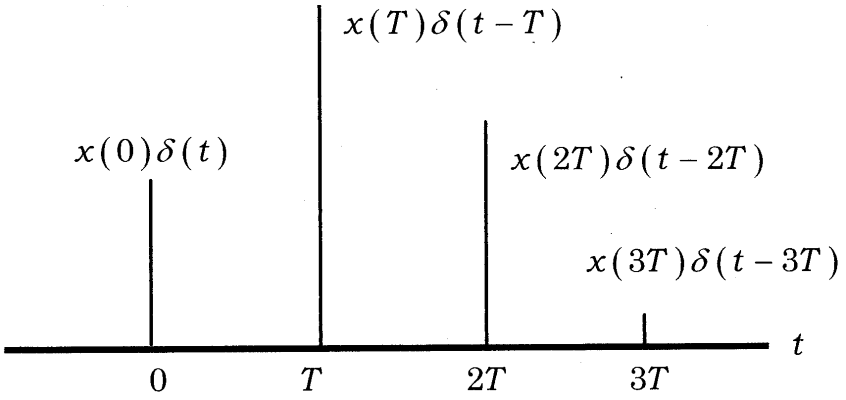
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



このサンプラーのタイミングに振幅を考慮すれば、離散時間信号になる

離散時間信号　ー時間領域表現2ー

- 離散時間信号の表記
  - 離散時間信号　$x^*(t)$
  - アナログ信号　$x(t)$
  - サンプラー　$s(t)$
  - サンプリング周期　T
  - サンプル数　n
  - デルタ関数　$\delta(t)$



$$x^*(t) = x(t)s(t)$$

アナログ信号とサンプラーの時刻 t における掛け算

$$= x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

サンプラーを離散表記すると

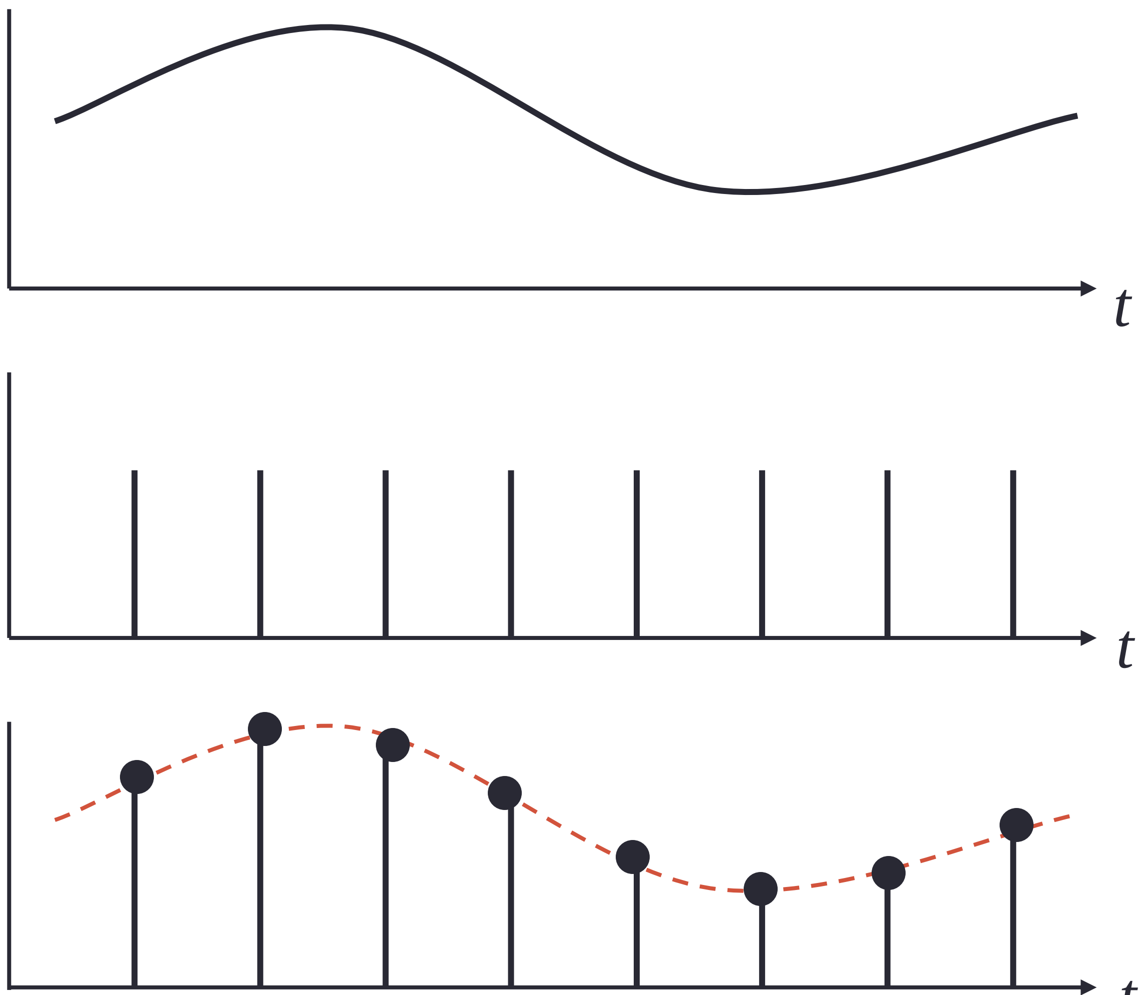
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

離散空間ではtはT間隔でしか値を持たないので $x(t)$ は $x(nT)$ 表現することができ、最終的には各時刻におけるアナログ信号とサンプラーの掛け算の合計で信号を表せる

$$= \sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

実際に信号はマイナス時刻で値をもたないので、合計する範囲は n が0から∞となる。

離散時間信号　ー時間領域表現3ー



アナログ信号
$x(t)$

サンプラー関数
$s(t)$

離散時間信号
$$x^*(t)$$
$$= x(t)s(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

演習課題(3/5)

- 次のような信号 $x(t)$ を離散信号化して得られる $x^*(t)$ の式を示せ。

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

ヒント：
講義資料をよく確認してください。

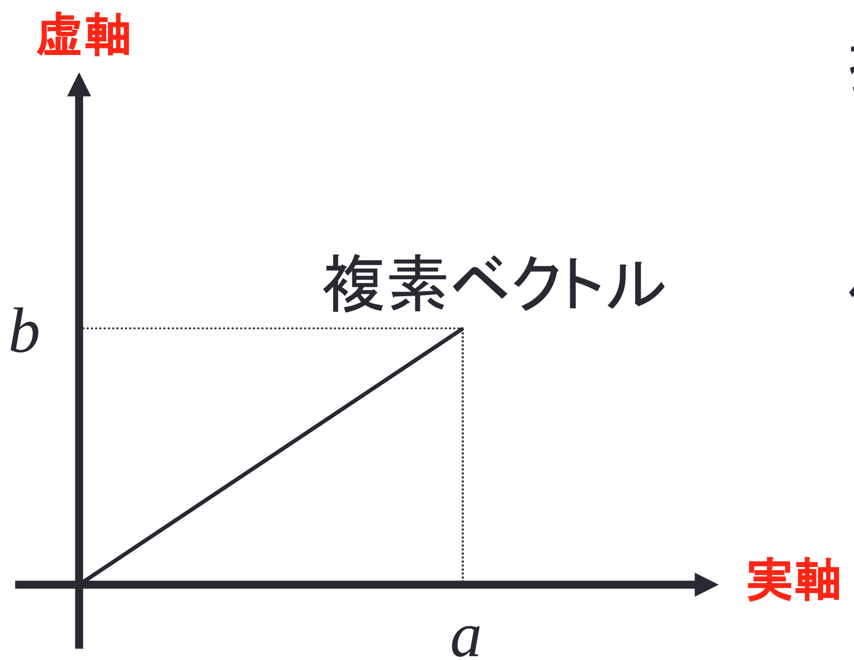
離散時間信号　ー周波数領域表現１ー

- 時間軸の信号を離散化できれば、当然周波数軸上の表記も離散化可能
  - 時間軸上:　　　　時間 t の表記
  - 周波数軸上:　　　複素数での表記
    - なぜなら周波数は振幅と位相を持っているから

- 離散時間信号の周波数領域表現に入る前に複素数の復習

【復習】複素数

- 複素数とは
  - ２つの実数 a と b および虚数単位 j を用いて $a+jb$ と表現する数
  - a を実部、 b を虚部と呼ぶ



振幅: $\sqrt{a^2+b^2}$

位相: $\arctan(\frac{b}{a})$

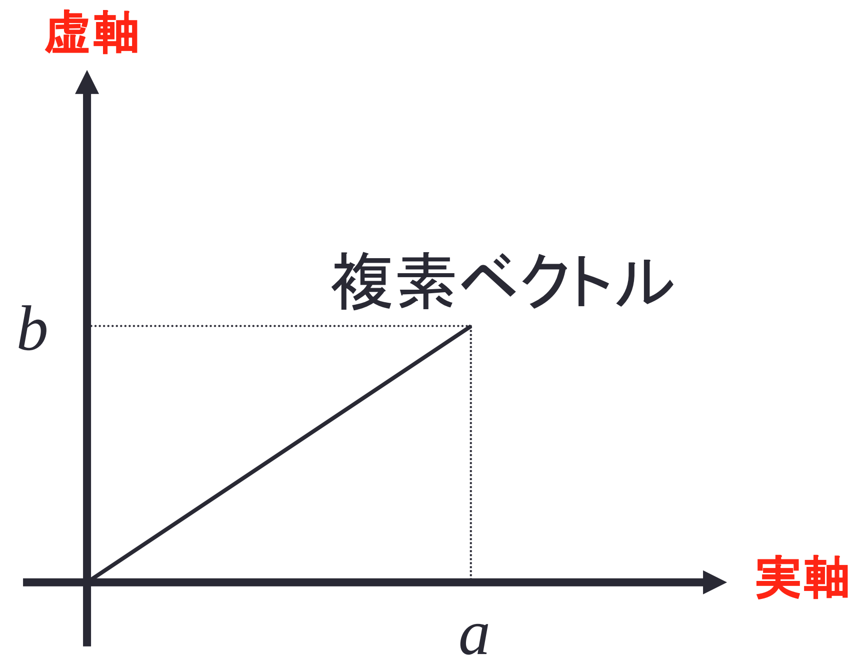
演習課題(4/5)

- 複素ベクトルにおいて振幅＝3、位相＝ $\pi/4$ のとき、実部 a と虚部 b の値はいくつになるか？

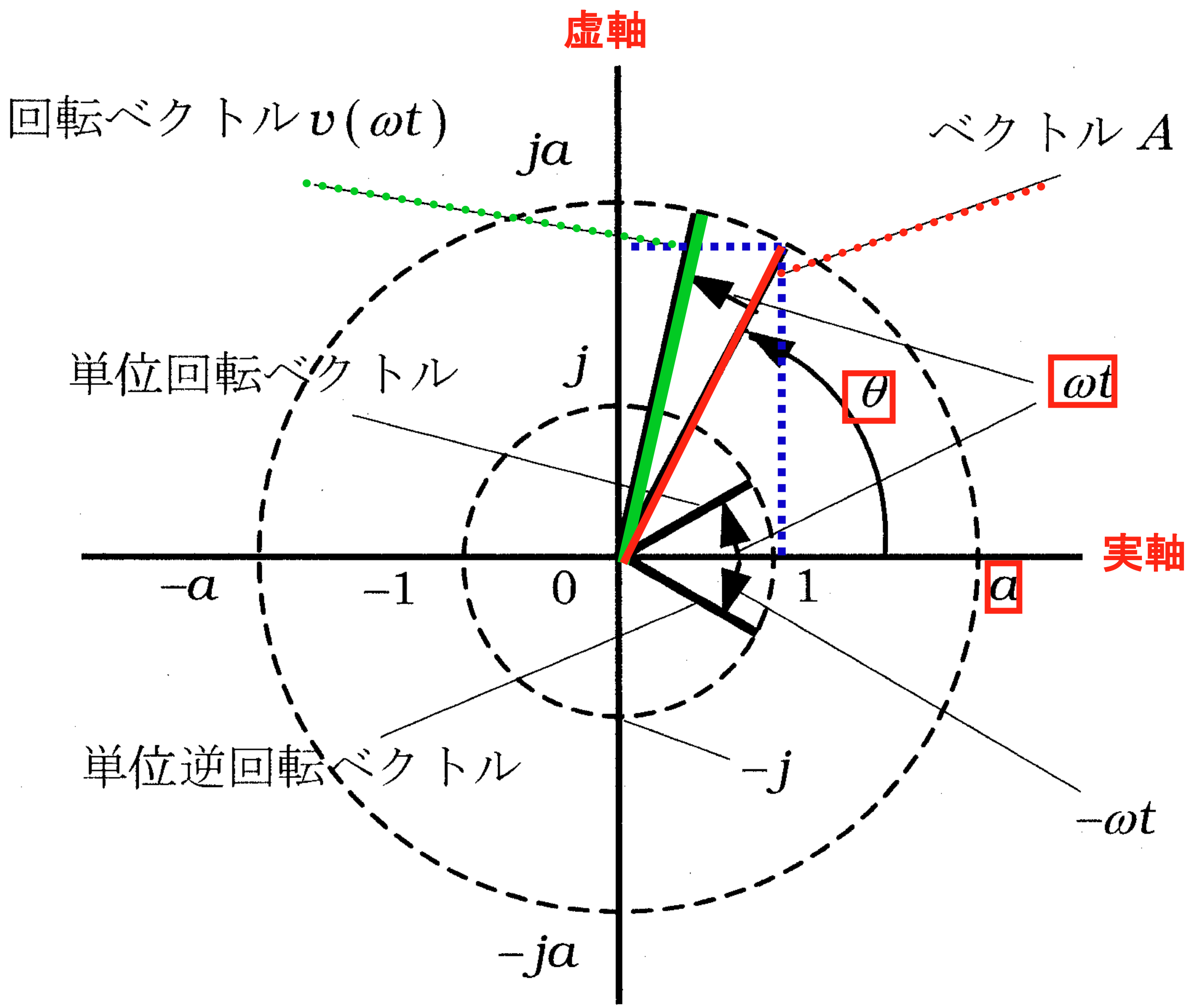
- ヒント

振幅: $\sqrt{a^2+b^2}$

位相: $\arctan(\dfrac{b}{a})$



【復習】回転ベクトル



複素数表現

角周波数 $\omega\ (=2\pi f)$

位相 θ

振幅 a

ベクトルA

$A = a \cdot e^{j\theta}$ 振幅＊回転角

$$A = a \cdot e^{j\theta} = a(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

オイラーの公式

回転ベクトル$v(\omega t)$

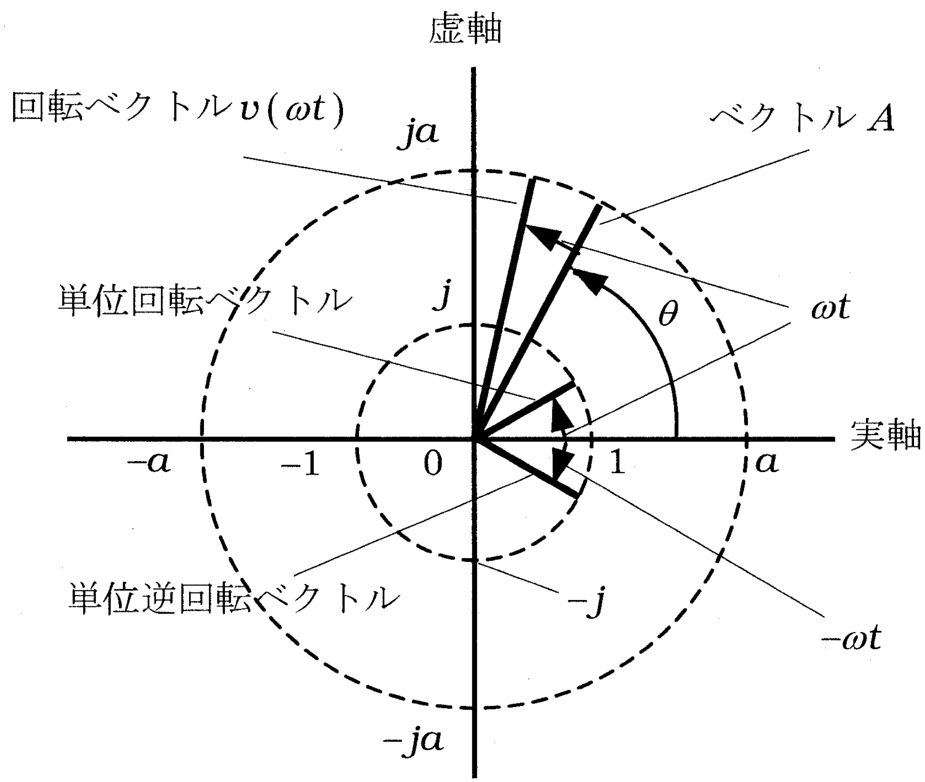
$$v(\omega t) = a \cdot e^{j(\omega t+\theta)} = a \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= A \cdot e^{j\omega t}$$

ベクトルA＊回転角

演習課題(5/5)

- 複素ベクトルAにおいて振幅 $a=3$、位相 $\theta=\pi/4$の複素ベクトルを $\pi/12$だけ回転させると、実部と虚部の値はいくつになるか？



ヒント：
回転ベクトル

$$v(\omega t)=a\cdot e^{j(\omega t+\theta)}=a\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}$$
$$=A\cdot e^{j\omega t}$$