

§ 4.3 全概率公式

主题

划分

全概率公式

全概率公式的应用

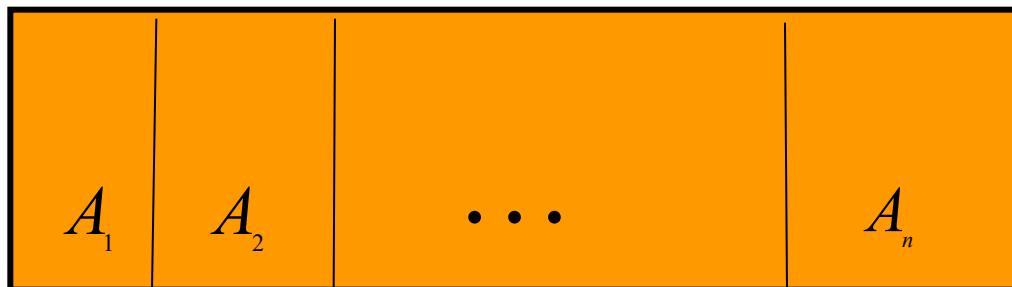
划分

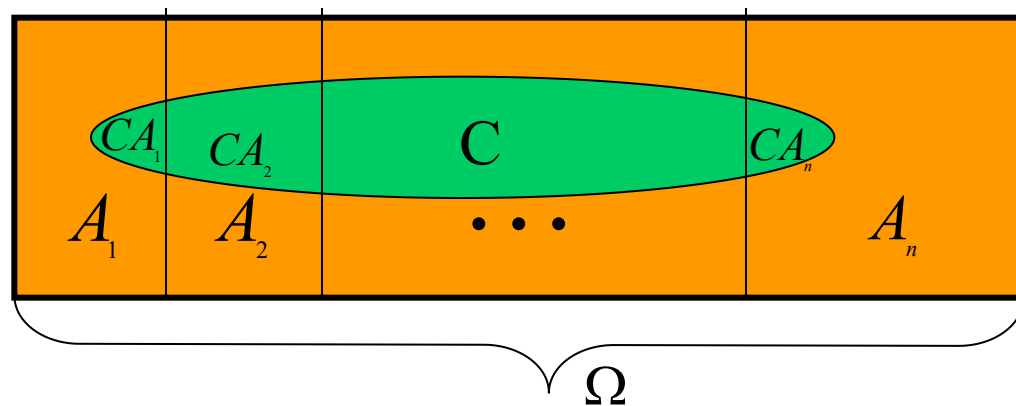
定义 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间, A_1, A_2, \dots, A_n 为一组事件, 若

(i) $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega.$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间 Ω 的一个划分.





全概率公式

已知 A_1, A_2, \dots, A_n 是样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0$,
对任意事件 B ,

$$\text{则有 } P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

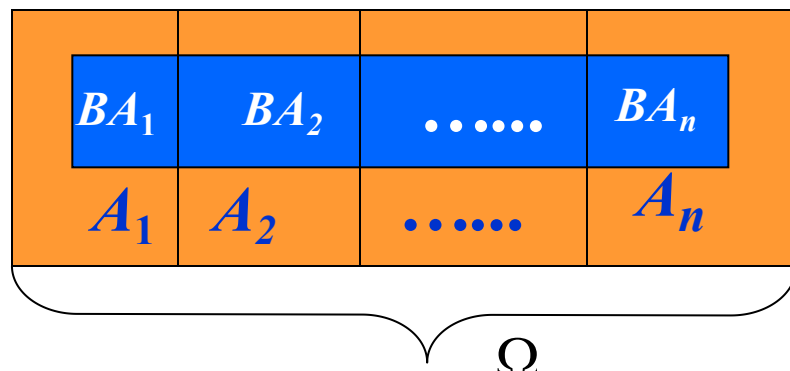
证明:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\Omega) = P(B(\bigcup_{i=1}^n A_i)) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^n BA_i) \end{aligned}$$

由 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容

得 A_1B, A_2B, \dots, A_nB 也两两互不相容;

所以由概率的可列可加性, 得 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_iB) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$



化整为零
各个击破

例6 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件厂提供的。根据以往的记录有以下的数据

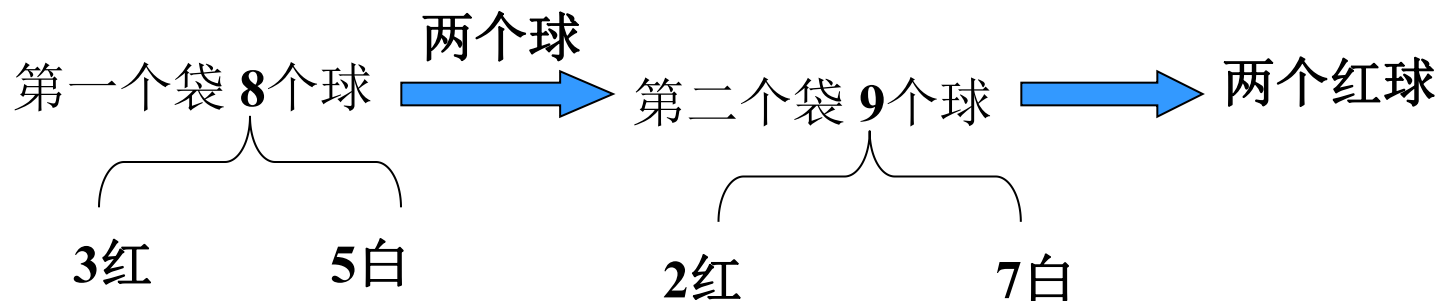
元件制造厂	提供晶体管的份额	次品率
1	0.15	0.02
2	0.80	0.01
3	0.05	0.03

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志。在仓库中随机的取一只晶体管，求它是次品的概率。

解： 设 $B=\{\text{次品}\}$, $A_i=\{\text{产品来自第}i\text{制造厂}\}$, $i=1,2,3$

$$\begin{aligned}\text{则 } P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= 0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03\end{aligned}$$

例7 已知第一个袋中装有8个球，其中3红5白，第二个袋中装有9个球，其中2红7白，先从第一个袋中取出两个球放入第二个袋中，再从第二个袋中取出两个球，求两个球都是红球的概率



解： 设 $A = \{\text{两球都是红球}\}$, $B_i = \{\text{第一次取出球中有 } i \text{ 个红球}\}$,

则
$$P(A) = \sum_{i=0,1,2}^2 P(B_i)P(A|B_i)$$

$$P(B_i) = \frac{C_3^i C_5^{2-i}}{C_8^2} \quad P(A|B_i) = \frac{C_{2+i}^2}{C_{11}^2}$$