§3.3 二维连续型随机变量

- 二维连续型随机变量的定义
- 二维连续型随机变量的联合密度
- 二维连续型随机变量的边际密度
- 两种常见的二维连续型分布
- 二维连续型随机变量的独立性
- 二维连续型随机变量的条件密度函数

二维连续型随机变量的独立性

定义3 若二维连续型随机变量的联合分布函数与边际分布函数满足

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \qquad \forall x, y \in R,$$

称随机变量 X 与 Y 相互独立。

定义3' 若二维连续型随机变量的联合密度函数与边际密度函数满足

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{几乎处处成立}$$

称随机变量X与Y相互独立。

若$f(x,y)$为二元连续函数，则有

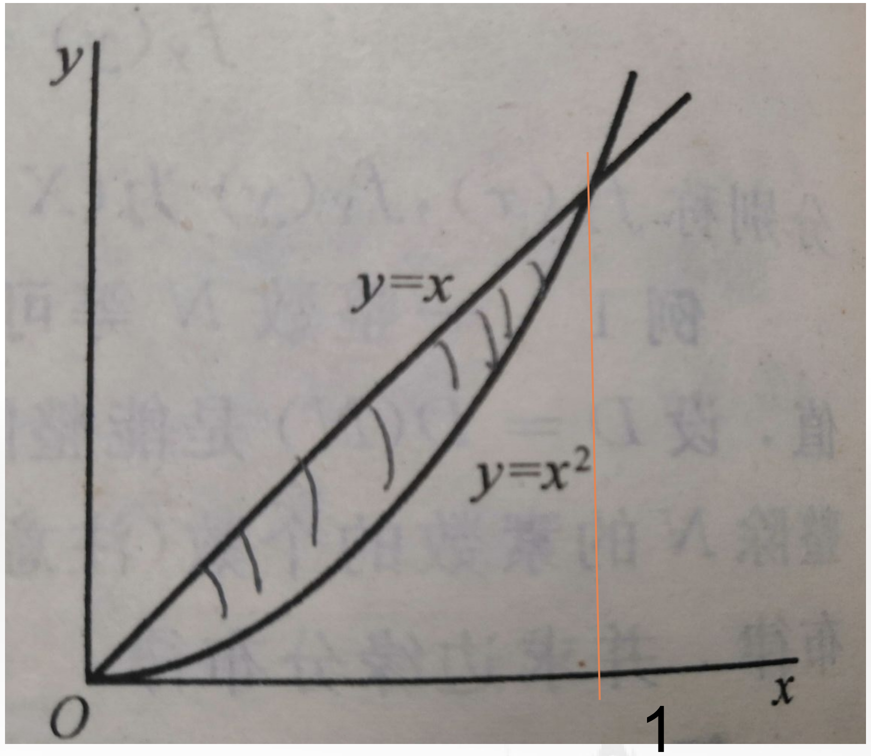
$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$对任意x,y都成立。

例6 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1).求边际概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$;

(2).X与Y是否相互独立？为什么?



解: (1).r.v.X的取值范围为(0,1),

当$0<x<1$时, $f_X(x)=\int_{x^2}^{x}6dy$

$=6(x-x^2)$

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

r.v.Y的取值范围为(0,1),

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^{\sqrt{y}}6\,dx=6(\sqrt{y}-y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当$0<x<1,0<y<1$时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

所以X与Y不相互独立。

例7 设二维 $r.v.(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$,则

X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0.$

证明: $\Rightarrow$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

若X与Y相互独立，因为$f(x,y)$为二元连续函数，

则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$对任意 x,y都成立。

特别地有$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

所以$\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$

所以 $\rho=0.$

若 $\rho=0$，则

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$=f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y相互独立。

二维连续型随机变量的条件密度

对连续型随机变量X,有$P(X=x)=0, \quad \forall x \in R$

$$P(Y \le y \mid X = x) = \frac{P(Y \le y, \quad X = x)}{P(X = x)}$$

$$P(X \le x \mid Y = y) = \frac{P(X \le x, \quad Y = y)}{P(Y = y)}$$

对$\forall \varepsilon > 0$,考虑$P(X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y)$

$$= \frac{P(X \le x,\ y-\varepsilon < Y \le y)}{P(y-\varepsilon < Y \le y)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} du \int_{y-\varepsilon}^{y} f(u,v)dv}{\int_{y-\varepsilon}^{y} f_Y(v)dv}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\int_{-\infty}^{x}du\int_{y-\varepsilon}^{y}f(u,v)dv}{\int_{y-\varepsilon}^{y}f_Y(v)dv}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y-\varepsilon)du}{f_Y(y-\varepsilon)} \quad =\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du \quad =\lim_{\varepsilon\to 0+}P(X\le x\,|\,y-\varepsilon<Y\le y)$$

定义4 若二维连续型随机变量 的联合密度函数为$f(x,y)$，Y的边际密度函数为 $f_Y(y)$，当$f_Y(y)>0$时，称 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} P\{X\le x \mid y-\varepsilon < Y \le y\}$ 为$Y=y$条件下X的条件分布函数，记为 $F_{X|Y}(x\mid y)$。

称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为$Y=y$条件下X的条件密度函数，记为 $f_{X|Y}(x\mid y)$，即 $\boxed{f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$.

类似的，$X=x$条件下Y的条件密度函数为

$$\boxed{f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(\mathrm{x,y})}{f_x(x)}}.$$

例8 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}9e^{-3y},0<x<y\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases},$$

(1).求条件密度$f_{X|Y}(x\,|\,y)$和$f_{Y|X}(y\,|\,x)$;

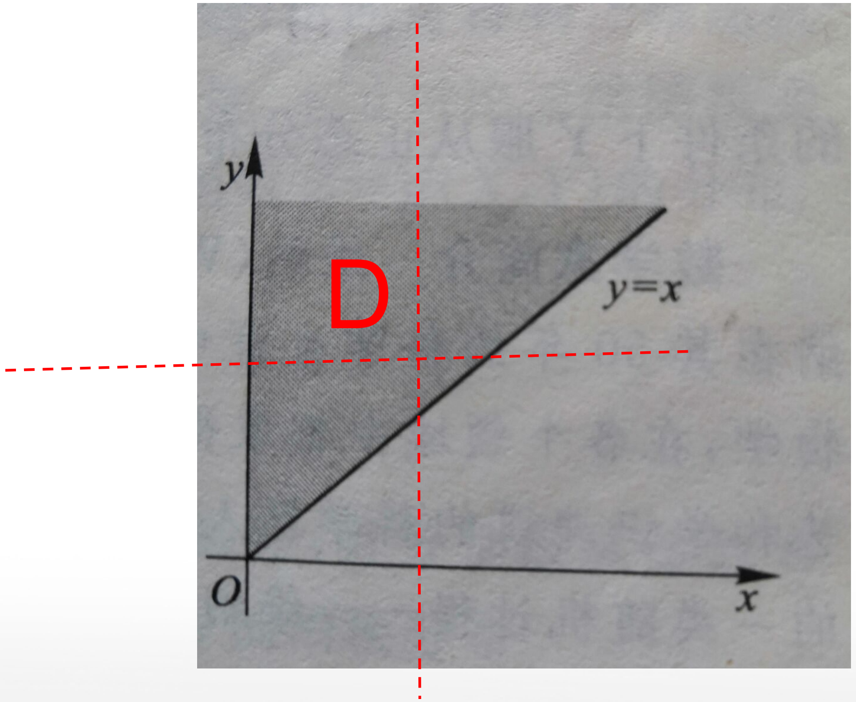
(2).$P(Y<4\,|\,X=2)$。

解： r.v.X的取值范围为（0,+∞],

当$x>0$时，$f_X(x)$

$$=\int_x^{+\infty} 9e^{-3y}dy = 3e^{-3x},$$

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



当$0<y<+\infty$时，$f_Y(y) = \int_0^y 9e^{-3y}dx = 9ye^{-3y}$

当$y>0$时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$0<x<y$$

$$=\frac{9e^{-3y}}{9ye^{-3y}}=\frac{1}{y}$$

即在$Y=y$条件下X的条件分布为$U(0,y)$.

当$x>0$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{9e^{-3y}}{3e^{-3x}}=3e^{-3(y-x)}$

$$y>x$$

当$x>0$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}3e^{-3(y-x)}, x<y\\0, \quad\quad 其他\end{cases}$

$(2) P(Y<4|X=2)=F_{Y|X}(4|2)$

$=\int_{-\infty}^{4} f_{Y|X}(y|2)dy=\int_{2}^{4} 3e^{-3(y-2)}dy$

$=1-e^{-6}.$

例9 设随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases},$$

对$\forall x>0$,当$X=x$时,随机变量 $Y\sim U(0,x)$,
求随机变量Y的密度函数。

解: 当$x>0$时, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & 其他 \end{cases},$

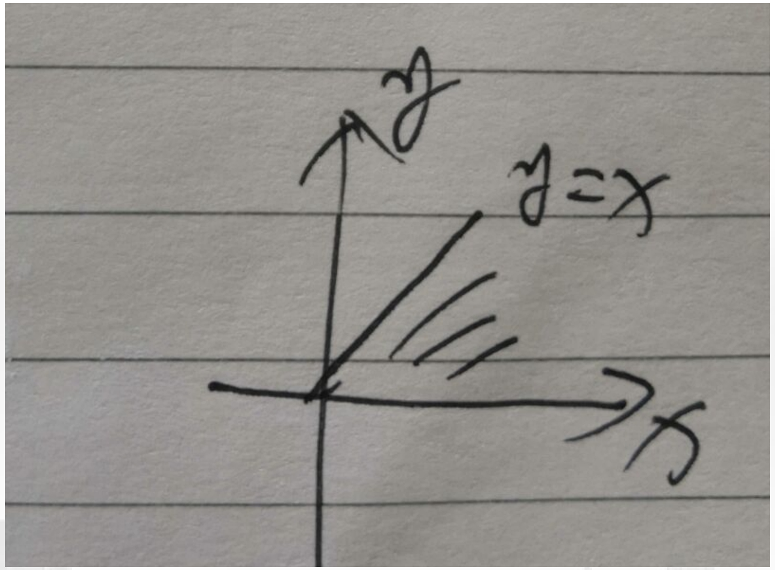
(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-x}, 0<y<x\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

当$y>0$时，$f_Y(y)=\int_y^{+\infty}e^{-x}dx$

$$=e^{-y}.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0\\ 0, 其他\end{cases}.$$



§3.4 二维随机变量函数的分布

- 二维随机变量函数的定义
- 二维离散型随机变量函数的分布
- 二维连续型随机变量函数的分布
- 极小（极大）分布

二维随机变量函数的定义

定义. 设$(X,Y):\Omega\to R^2$是二维随机变量，$f:R^2\to R$是二元函数，则复合映射$f(X,Y):\Omega\to R$为二维随机变量（X,Y）的随机变量函数。

记作：$Z=f(X,Y)$

Z是样本空间Ω上的一维随机变量。

二维离散型随机变量函数的分布

例10 设二维随机变量(X, Y)的联合分布列为

X \ Y	-2	-1	0
-1	1/12 (-3)	1/12 (-2)	1/4 (-1)
1	1/6 (-1)	1/12 (0)	0 (1)
3	1/6 (1)	0 (2)	1/6 (3)

求$Z = X + Y$的分布列。

Z	-3	-2	-1	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

例11 已知随机变量$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$，且X与Y相互独立，试证明：$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

证明： Z的可能取值为0,1，2…

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1{}^i e^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \frac{\lambda_2{}^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1{}^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2{}^{k-i}}{(k-i)!} \cdot k!$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \boxed{\sum_{i=0}^{k} C_k^i \cdot \lambda_1{}^i \cdot \lambda_2{}^{k-i}}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

即$(X+Y)\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

泊松分布具有可加性

二维连续型随机变量函数的分布

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$， $g(x,y)$是二元连续函数，则$Z=g(X,Y)$仍是连续型随机变量，其分布函数记为$F_Z(z)$,则

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=P((X,Y)\in D_z)$$

$$=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy \qquad f_Z(z)=F_Z'(z)$$

例12 已知随机变量 $X\sim E(\alpha), Y\sim E(\beta)$, 且X与Y相互独立，试求下列随机变量的密度函数：

$$(1).\ Z_1 = X+Y, \quad (2).\ Z_2 = \frac{Y}{X},$$

解： (1).Z_1的取值范围为$[0,+\infty)$,

当$z<0$时, $F_{Z_1}(z)=0$, 当$z\geq 0$时, $F_{Z_1}(z)=P(Z_1\leq z)$

$$=P(X+Y\leq z) \xlongequal{D_z=\{(x,y)\mid x+y\leq z\}} \iint_{D_z} f(x,y)\,dxdy$$

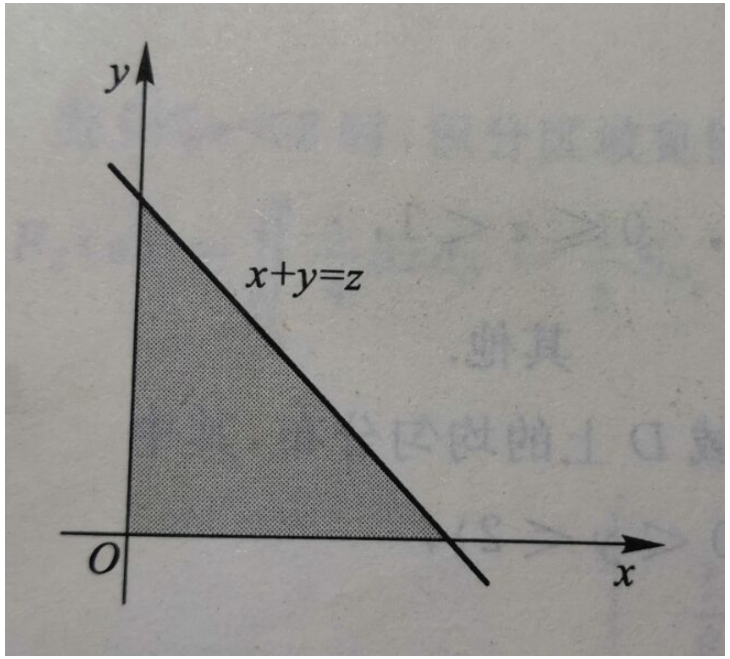
因为X与Y相互独立，

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot\beta e^{-\beta y}=\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)},\quad x>0,y>0$$

$$F_{Z_1}(z)=\iint\limits_{\substack{x>0,y>0\\x+y\le z}}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dxdy$$

$$=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dy$$



$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\beta(z-x)})\ dx$$

$$= 1 - e^{-\alpha z} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z})$$

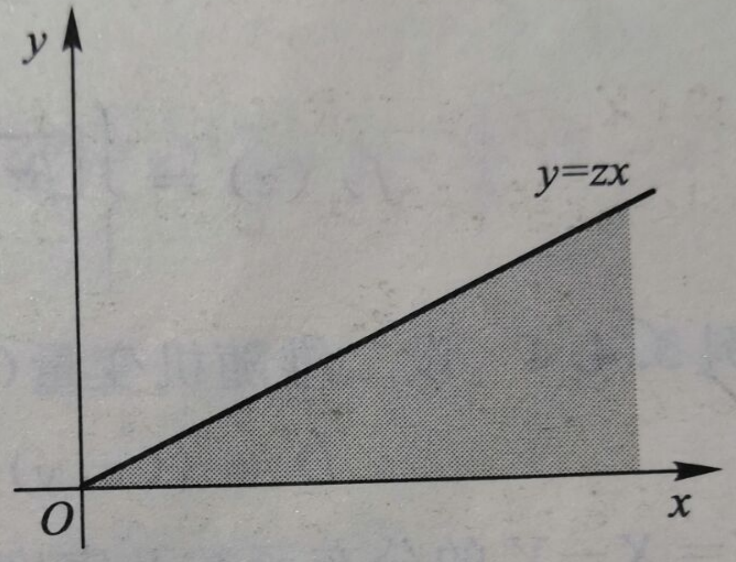
$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

(2).Z_2的取值范围为$[0,+\infty)$，当$z<0$时,$F_{Z_2}(z)=0$,

当$z\geq 0$时,$F_{Z_2}(z)=P(Z_2\leq z)=P(\frac{Y}{X}\leq z)=P(Y\leq Xz)$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{zx}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\beta xz})dx$$



（积分区域为第一象限中直线
y＝zx 的下方）

$$= \frac{\beta z}{\alpha + \beta z}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) \quad = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta z)^2}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$