ch1 概率论的基本概念

一、概率的定义及基本性质

二、古典概型和几何概型中事件的概率

三、条件概率的定义

四、全概率公式

五、贝叶斯公式

六、事件的独立性

概率的公理化定义

定义1　设Ω为随机试验E的样本空间，如果对任 意事件$A\subset\Omega$，有一个实数$P(A)$与之对应，且满足

(1).非负性：$P(A)\geq 0$

(2).归一性：$P(\Omega)=1$

(3)可列可加性：

若$A_1,A_2\cdots$为一列两两互不相容的事件，

则有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

概率的基本性质

1. 有限可加性

若$A_1, A_2 \cdots A_n$为n个两两互不相容的事件，

则有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

加法公式：若 $AB = \Phi$,则

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.保序性：

$$若A \subset B,则P(A) \leq P(B)$$

3.**补事件的概率公式**：

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3.**减法公式**：

$$\boxed{P(A-B) = P(A) - P(AB)}$$

4.**一般加法公式**

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$(2)P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例1 某人给5位同学各写了一封信，并且写好信封，然后随机地在每一信封里装入一封信，求下列事件的概率：

（1）只有一封信装对；

（2）没有一封信装对；

解：（2）记A:至少有一封信装对，则$\overline{A}$:没有一封信装对

记A_i:第i封信装对,$i=1,2,3,4,5$ 则$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$

$$P(\bigcup_{i=1}^{5}A_i)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{i<j}^{5}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{5}P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{5-1}P(A_1A_2\cdots A_5)$$

$P(A_i)=\frac{1}{5},i=1,2,3,4,5,$ $P(A_1A_2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4},$ $P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3},$

$P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2},$

$$P(A)=5\times\frac{1}{5}-C_5^2\times\frac{1}{20}+C_5^3\times\frac{1}{60}-C_5^4\times\frac{1}{120}+\frac{1}{120}=\frac{19}{30}$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{11}{30}$$

（1）记B:只有一封信装对，记B_i:只有第i封信装对，

$$P(B)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)=5P(B_1)$$

$$=5\times\frac{1}{5}[1-(4\times\frac{1}{4}-C_4^2\times\frac{1}{12}+C_4^3\times\frac{1}{24}-\frac{1}{24})]=\frac{3}{8}$$

二、古典概型和几何概型中事件的概率

三、条件概率的定义

单选题 10分

设置

有7个红球8个白球共15个球放在一起，不小心丢了其中的4个，现从剩下的11个球中任取一个，此球为白球的概率为（　）

A $\frac{7}{15}$

B $\frac{8}{15}$

C $\frac{7}{11}$

D $\frac{8}{11}$

提交

条件概率的定义

设A与B为两个事件，且$P(A)>0,$那么在已知事件A已发生的条件下，事件 B的条件概率定义为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1.4.1)$$

例2　设有一对夫妻，有两个 孩子（假设生男生女的概率相等），已知 其中一个为女孩，求这 对夫妻有男孩的概率。

解：$\Omega=\{$男男，男女，女男，女女$\}$　$P=\frac{2}{3}$

条件概率满足下列性质：

(1) 非负性：$\forall$B，有$P(B|A)\geq 0$

（2）归一性： $P(\Omega|A)=1$

(3).可列可加性：对一列两两互不相容的事件

$$B_1,B_2,\cdots B_n,\cdots,\text{有}P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n|A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n|A)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\middle|A\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n|A)$$

$$\frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}AB_n)}{P(A)} \rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)}{P(A)} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(AB_n)}{P(A)}$$

全概率公式

定理 1 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为 Ω 的一个划分，

并且 $P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$, 则对 $\forall$ 事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) \qquad (1.4.3)$$

贝叶斯公式

定理 2 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为 Ω 的一个划分，并且

$P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots n,$ 则对 $\forall$ 事件 B，只要 $P(B) > 0,$

就有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (1.4.4)$$

$$= \frac{P(A_k B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

例3 设事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是样本空间 Ω的划分，且 $P(A_m) = p_m > 0, m = 1, \ldots, n$， 求事件 A_i比 A_j 先发生的概率。

解： 设B={A_i比A_j先发生}， C_1={第一次实验A_i发生}；

C_2={第一次实验A_j发生}；

C_3={第一次实验A_i, A_j都不发生}，

C_1, C_2, C_3是Ω的一个划分， $P(C_1) = p_i$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(C_i)P(\mathrm{B}|C_i)$$

$$=p_i+(1-p_i-p_j)P(B)$$

解得：$P(B)=\dfrac{p_i}{p_i+p_j}$

$$P(C_2)=p_j$$

$$P(C_3)=1-p_i-p_j$$

$$P(B|C_1)=1$$

$$P(B|C_2)=0$$

$$P(B|C_3)=P(B)$$

1.5 独立性与伯努利试验

事件的相互独立性

1. 两个事件相互独立

定义3 设A、B为两个事件，如果等式

$P(AB)=P(A)P(B)$成立，则称事件A与B相互独立。

性质1. 若$P(A)>0$,事件A与B相互独立,则

$P(B|A)=P(B)$,即事件A的发生对事件B发生的概率没有影响。

性质2. 设P(A)>0, P(B)>0,且事件A与B相互独立,则AB≠ϕ。

性质3 在 $(A,B),(\overline{A},B),(A,\overline{B}),(\overline{A},\overline{B})$这四对事件中，如果有一对相 互独立，则另外三对也相互独立。

2.三个事件相互独立

定义 4 对于三个事件A、B、C，若

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (1)$$
$$P(AC)=P(A)P(C) \qquad (2)$$
$$P(BC)=P(B)P(C) \qquad (3)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \qquad (4)$$

同时成立，称 A、B、C三个事件相互独立。

若(1), (2), (3)同时成立，称 A、B、C三个事件**两两相互独立**

例22. 掷一均匀硬币两次，令A={第一次为正面}，B={第二次为反面}，C={正反面各一次}。试判断A,B,C是否相互独立？是否两两相互独立？

解：$\Omega=\{(\text{正，正}),(\text{正，反}),(\text{反，正}),(\text{反，反})\}$

$A=\{(\text{正，正}),(\text{正，反})\}$ $B=\{(\text{正，反}),(\text{反，反})\}$

$C=\{(\text{正，反}),(\text{反，正})\}$ $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$ $P(ABC)=\frac{1}{4}$

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$$

A,B,C三个事件两两相互独立

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$$

A,B,C三个事件不相互独立

3. n个事件相互独立:

定义5 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个事件，**如果这n个事件中任意k(2≤k≤n)个事件都有**

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots(A_{i_k})$$

则称这n个事件 $A_1, \ldots A_n$ **相互独立。**

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 \cdots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots C_n^n = 2^n - (1+n)$$

性质：若n个事件 $A_1,\ldots A_n\ (n\geq \mathbf{2})$ 相互独立，则将 $A_1,\ldots A_n$ 中任意多个事件换成它们的补事件，所得的n个事件仍相互独立。

例23.三台机器相互独立运转。设第一、二、三台机器不发生故障的概率依次为0.9,0.8,0.7，则这三台机器中至少有一台发生故障的概率是多少?

解：记A_i:第i台机器不发生故障，i=1,2,3

B：这三台机器中至少有一台发生故障

$$B=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\ =\overline{A_1A_2A_3}$$

$$P(B) = P(\overline{A_1 A_2 A_3})$$

$$= 1 - P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$= 1 - 0.9 \times 0.8 \times 0.7$$

$$= 0.496$$

n重伯努利试验

定义6 如果随机试验 E 只有两个可能的结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p(0<p<1)$, $P(\overline{A})=1-p=q$.称随机试验 E 为伯努利试验。

把试验 E 独立地重复进行 n 次构成一个复合试验 E^n，称这个试验为 n 重伯努利试验。

例24.一名射手向目标连续射击5次。已知每次命中率均为p(0<p<1), 且每次命中与否相互独立，求恰好命中3次的概率。

解： 记A_i:第i次命中， i=1,2,3， 4,5　　B：恰好命中3次

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5相互独立

B发生 $\longleftrightarrow$ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5中有3个发生

C_5^3种情况，每种情况的概率都是$p^3(1-p)^2$

$$P(B)=C_5^3\,p^3(1-p)^2,$$

性质：在n重贝努里试验中，事件A发生k次的概率为

$$P(B_k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k},$$

$$k=0,1,\cdots,\ n$$

§1.6 综合例题

例25.甲、乙两人投掷均匀硬币，其中甲掷n+1次，乙掷n次。求“甲掷出正面的次数大于乙掷出正面的次数”这一事件的概率。

解： $甲_{正}$=甲投出的正面次数， $甲_{反}$=甲投出的反面次数，

$乙_{正}$=乙投出的正面次数， $乙_{反}$=乙投出的反面次数，

$$\overline{甲_{正}>乙_{正}}=甲_{正}\le 乙_{正}=甲_{反}>乙_{反}$$

$$\boxed{n+1-甲_{正}\ge n+1-乙_{正}}$$

$$P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) = 1 - P(\text{甲}_{\text{反}} > \text{乙}_{\text{反}}) \quad ①$$

由于硬币是均匀的，由对称性知

$$P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) = P(\text{甲}_{\text{反}} > \text{乙}_{\text{反}}) \quad ②$$

由①②知 $P(\text{甲}_{\text{正}} > \text{乙}_{\text{正}}) = \frac{1}{2}$.

例26.（Buffon投针问题）在平面上画满间距为a的平行直线，向该平面随机投掷一枚长度为l(l<a)的针，试求针与直线相交的概率。

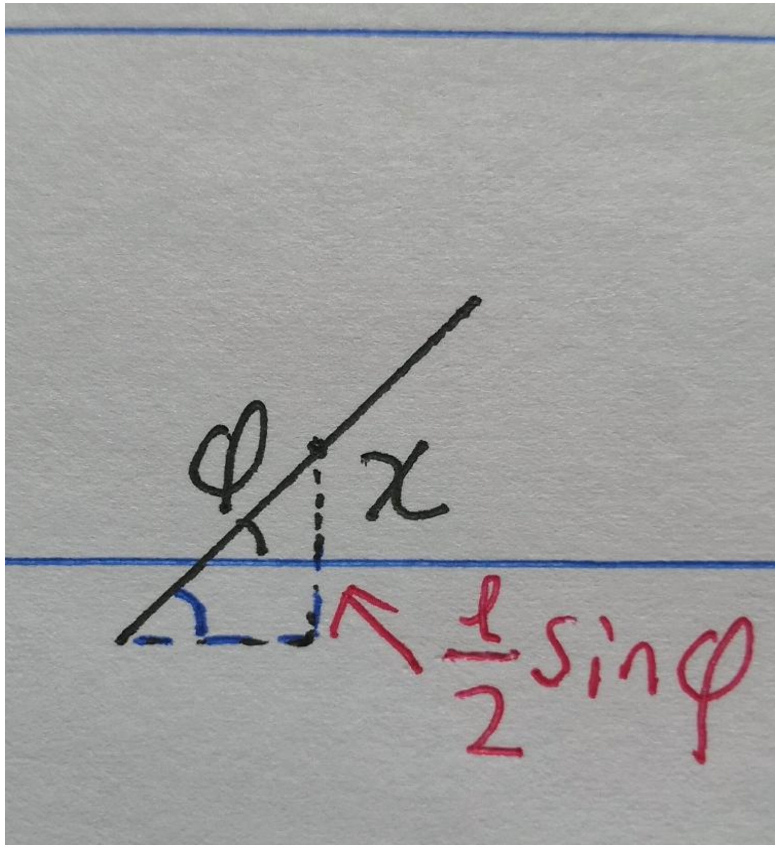
解：以x表示针的中点距最近一条平行线的距离，$0 \le x \le \frac{a}{2}$，

以φ表示针与平行线的夹角，

$0 \le \varphi \le \pi$，

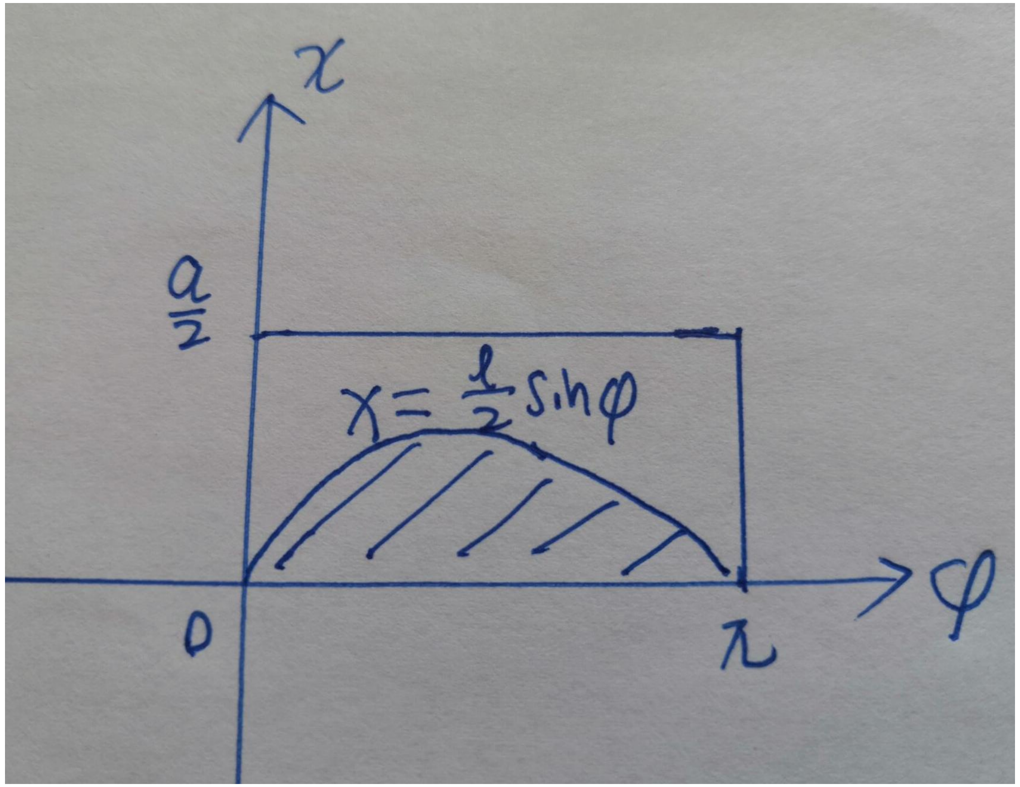
针与平行线相交的条件 ：

$$x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$$



$$P=\frac{\frac{l}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi}$$

$$=\frac{2l}{a\pi}$$



例27（波里亚罐子模型）设罐子中有a个红球b个黑球，随机取出一个，把原球放回，并且加进与抽出球同色的球c个；再摸第二次，这样下去共摸了n次。试证明第n次取球时取出红球的概率为a/(a+b)。

解： 记A_k:第 k 次取出的是红球，k≥1.

用归纳法证明：

当k=1时，$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$，命题成立。

假设 k=n-1时结论成立，即 $P(A_{n-1}) = \frac{a}{a+b}$，

下证k=n时结论成立

A_1和$\overline{A}_1$是Ω的一个划分，由全概率公式得：

$$P(A_n) = P(A_1)P(A_n \mid A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_n \mid \overline{A}_1)$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+c}{a+c+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c+b}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

例28.甲、乙二人比赛下棋，每局胜者得一分，甲在每局比赛中胜的概率为α，乙在每局比赛中胜的概率为β（$\alpha+\beta=1$）。独立地进行比赛，直到有一人超过对方2分就停止，多得2分者胜。求甲最终获胜的概率。

解：设B={甲最终获胜}，A_i={前两局中甲胜i局}，则

$$P(B)=P(A_0)\underbrace{P(B|A_0)}_{\mathbf{0}}+P(A_1)\underbrace{P(B|A_1)}_{\mathbf{P(B)}}+P(A_2)\underbrace{P(B|A_2)}_{\mathbf{1}}$$

$$P(B)=P(A_1)P(B)+P(A_2)$$

$$P(B)=2\alpha\beta P(B)+\alpha^2$$

解得: $P(B)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$