

The background is a solid blue color with a subtle pattern of small, light blue geometric shapes (cubes and spheres) scattered across it. A faint, repeating watermark of the text "中国大学MOOC" is visible diagonally across the entire image. In the lower-left corner, there is a cluster of larger, 3D blue cubes of various sizes, some of which are slightly offset from the main plane, creating a sense of depth.

图

大连理工大学

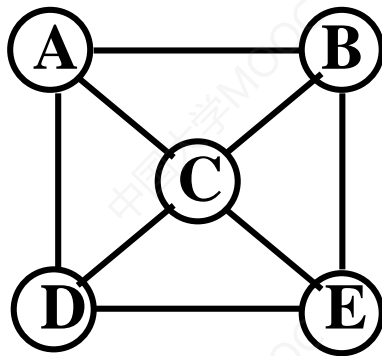
刘馨月

主要内容

- 图的基本概念
- 图的存储
- 图的遍历
- 最小生成树
- 最短路径
- 关键路径

图的基本概念

图的基本概念



图是一种较线性表和树更为复杂的数据结构。

线性表：线性结构

树：层次结构

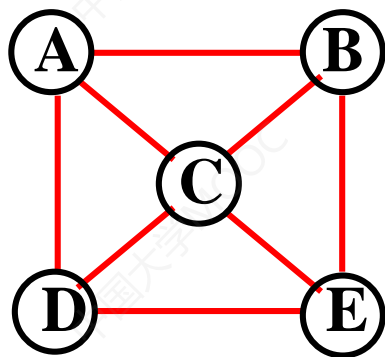
图：结点之间的关系可以是任意的，即图中任意两个数据元素之间都可能相关。

图的基本概念

图 G 是由两个集合顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 组成的，记作 $G=(V(G), E(G))$ ，简称 $G=(V, E)$ 。

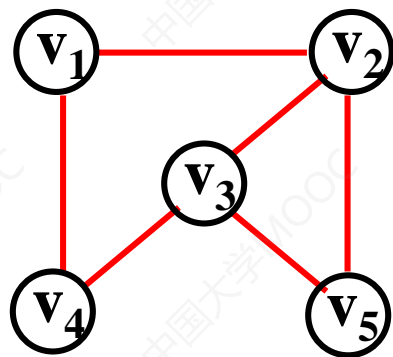
$V(\text{vertex})$ 是顶点的有穷非空集合。

$E(\text{edge})$ 是两个顶点之间的关系，即边的有穷集合。



无向图

无向图： 边是顶点的无序对，即边没有方向性。



$$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$$

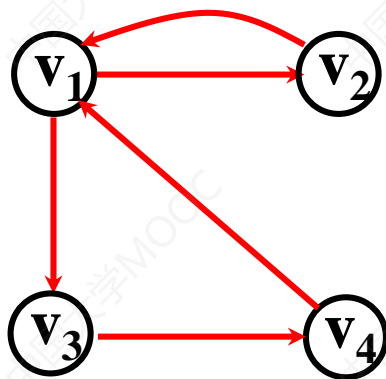
$$E = \{ (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5) \}$$

(v_1, v_2) 表示顶点 v_1 和 v_2 之间的边， $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ 。

图的基本概念

有向图

有向图：其边是顶点的有序对，即边有方向性。



$$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$$

$$E = \{ \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle \}$$

通常边称为弧， $\langle v_1, v_2 \rangle$ 表示顶点 v_1 到 v_2 的弧。

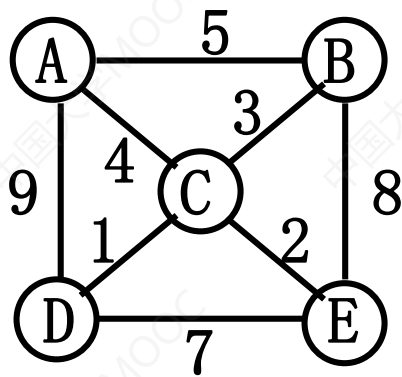
称 v_1 为弧尾，称 v_2 为弧头。

$$\langle v_1, v_2 \rangle \neq \langle v_2, v_1 \rangle$$

图的基本概念

带权图

有时对图的边或弧赋予相关的数值，这种与图的边或弧相关的数值叫做**权**。



这些权可以表示从一个顶点到另一个顶点的距离。

可以表示从一个顶点到另一个顶点的耗费。

基本性质

若用 n 表示图中顶点数目，用 e 表示边或弧的数目，
若在图中不存在顶点到自身的边或弧，则

对于无向图， $0 \leq e \leq \frac{1}{2}n(n-1)$

对于有向图， $0 \leq e \leq n(n-1)$

证明：

$0 \leq e$ 显然成立

对有向图来说，每个顶点至多可发出 $n-1$ 条弧，共 n 个顶点，故至多有 $n(n-1)$ 条弧，即 $e \leq n(n-1)$ ；

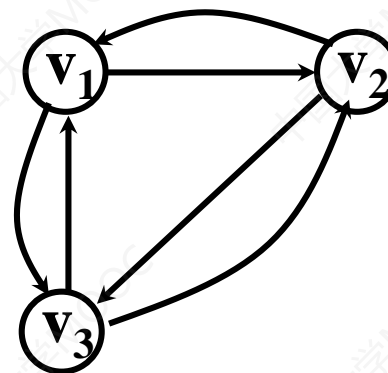
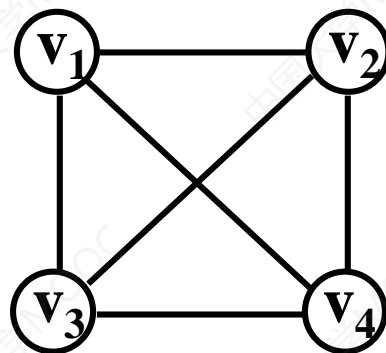
对无向图来说，由于边无方向，则任一两个顶点 v_1 和 v_2 ，都有 $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ ，故至多有 $n(n-1)/2$ 条边；

图的基本概念

完全图、稀疏图、稠密图

有 $n(n-1)/2$ 条边的无向图称为**完全图**。

有 $n(n-1)$ 条弧的有向图称为**有向完全图**。



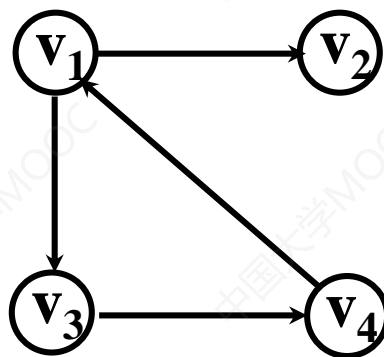
有很少条边或弧的图称为**稀疏图**。

反之称为**稠密图**。

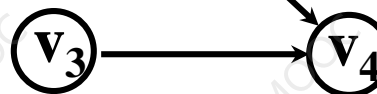
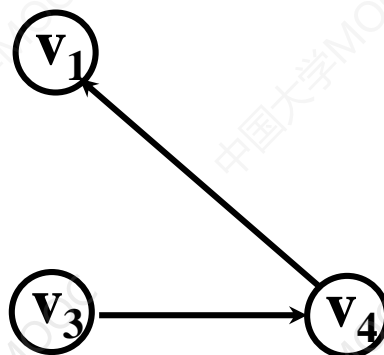
图的基本概念

子图

假设有两个图 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$ ，如果 $V' \subseteq V$ ，且 $E' \subseteq E$ ，则称 G' 为 G 的子图。

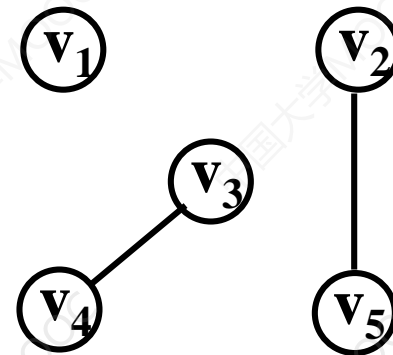
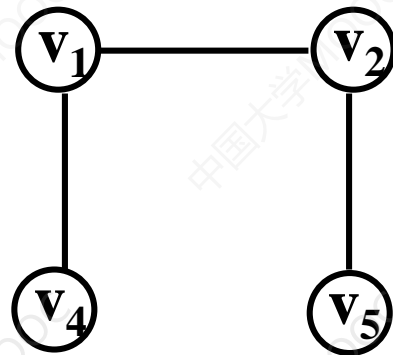
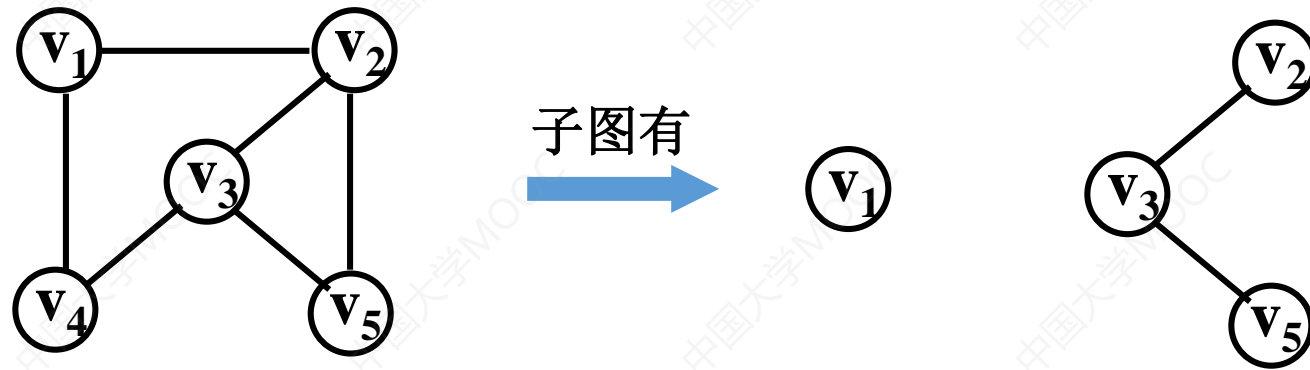


求子图



图的基本概念

子图



邻接与关联



对于无向图 $G=(V, E)$ ，如果边 $(v, v') \in E$ ，则称顶点 v 和 v' 互为邻接点，即 v 和 v' 相邻接。

边 (v, v') 依附于顶点 v 和 v' ，或者说 (v, v') 与顶点 v 和 v' 相关联。

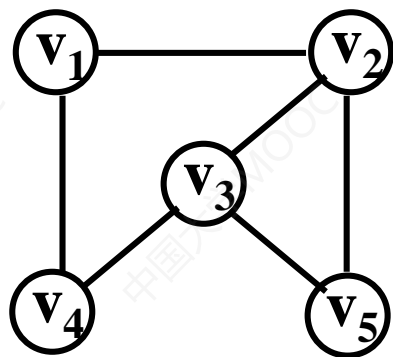


对于有向图 $G=(V, E)$ ，如果弧 $\langle v, v' \rangle \in E$ ，则称顶点 v 邻接到顶点 v' ，顶点 v' 邻接到顶点 v 。

弧 $\langle v, v' \rangle$ 和顶点 v, v' 相关联。

顶点的度

对于无向图，**顶点 v 的度**是和 v 相关联的边的数目，记做 **$TD(v)$** 。



顶点 v_3 的度为 **3**

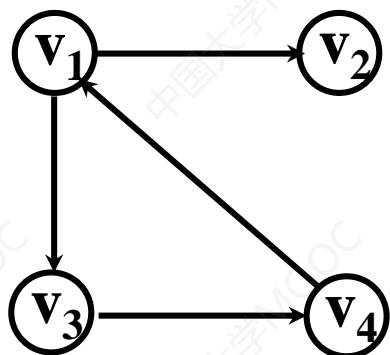
对于有向图，顶点 v 的度 $TD(v)$ 分为两部分——**出度、入度**。

以顶点 v 为**头**的弧的数目称为 v 的入度，记为 **$ID(v)$** ；

以顶点 v 为**尾**的弧的数目称为 v 的出度，记为 **$OD(v)$** ；

顶点 v 的度为 **$TD(v) = ID(v) + OD(v)$** 。

顶点的度



顶点 v_1 的出度为 2

顶点 v_1 的入度为 1

顶点 v_1 的度为 3

性质：对于一个图(无向图、有向图)，如果顶点 v_i 的度为 $\text{TD}(v_i)$ ，那么具有 n 个顶点、 e 条边或弧的图，必满足如下关系

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{TD}(v_i)$$

无向图、有向图的边或弧均计算两遍。

图的基本概念

路径

图（无向图、有向图） G 中若存在一条有穷非空序列 $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ ，其中 v_i 和 e_i 分别为顶点和边（或弧），则称 w 是从顶点 v_0 到 v_k 的一条路径。



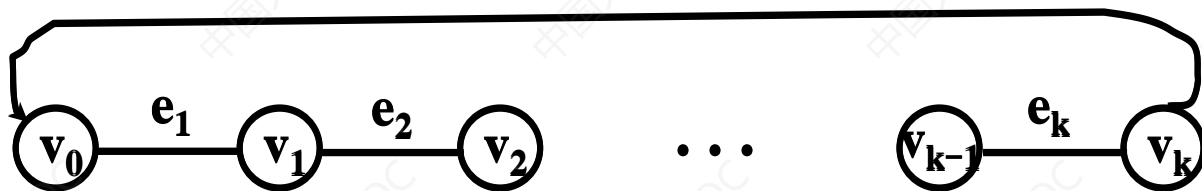
顶点 v_0 和 v_k 分别称为路径 w 的起点和终点。

路径的长度是路径上的边的数目。

w 的长度为 k

起点和终点相同的路径称为回路（环）。

简单路径



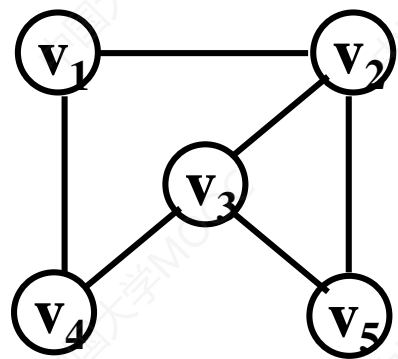
- 若路径 w 的顶点 v_0, v_1, \dots, v_k ，除 v_0 和 v_k 可以相同之外，其他顶点互不相同，则称 w 为**简单路径**。
 - 如果构成回路的路径是简单路径，称此回路为**简单回路**。
- 不带回路的图称为**无环图**。不带回路的有向图称为**有向无环图**。

图的基本概念

连通图

无向图 G ，如果从顶点 v 到顶点 v' 有路径，则称 v 和 v' 是连通的。

如果对于无向图 G 中任意两个顶点 $v_i, v_j \in V$ ， v_i 和 v_j 都是连通的，则称 G 是**连通图**。

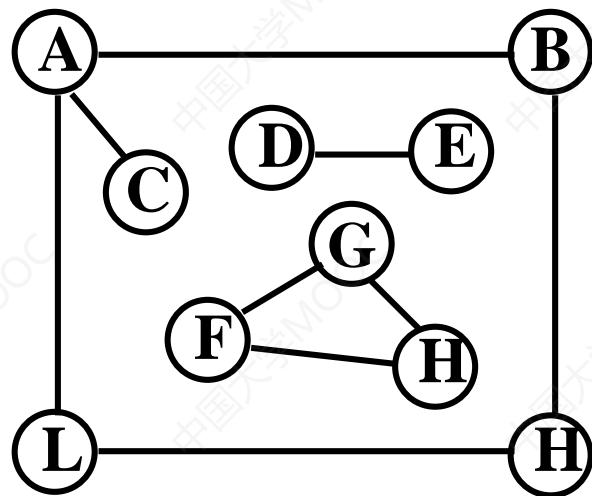


是否为连通图

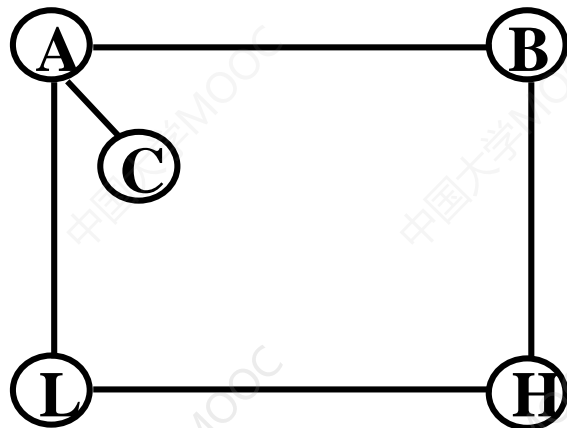
图的基本概念

连通分量

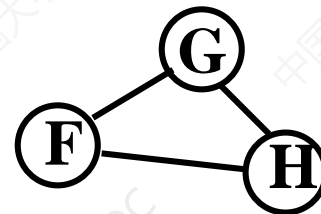
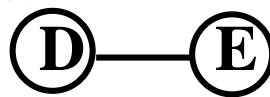
连通分量指的是无向图中的最大连通子图。



非连通图



连通分量为

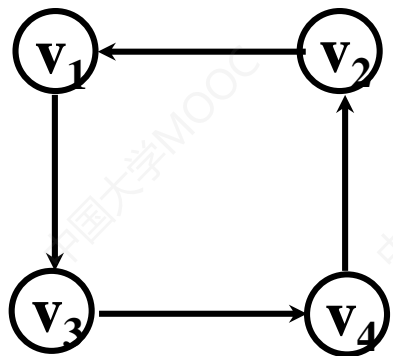


图的基本概念

强连通图、强连通分量

有向图 G ，如果从顶点 v 到顶点 v' 有路径或从顶点 v' 到顶点 v 有路径，则称 v 和 v' 是连通的。

在有向图 G 中，如果对于每一对 $v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$ ，从 v_i 到 v_j 和从 v_j 到 v_i 都存在路径，则称 G 是强连通图。

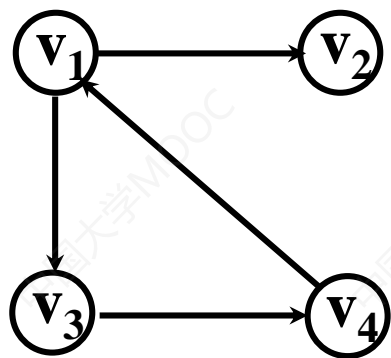


是否为强连通图

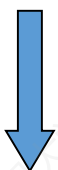
图的基本概念

强连通图、强连通分量

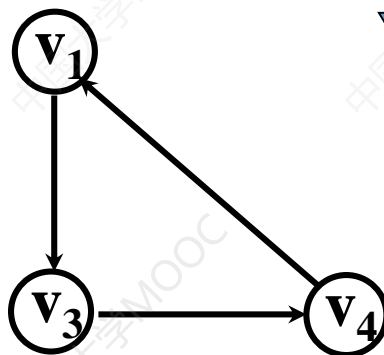
有向图中的**最大强连通子图**称作有向图的**强连通分量**。



非强连通图



强连通分量



生成树

一个连通图 G 的一个包含所有顶点的极小连通子图 T 是：

- (1) T 包含 G 的所有顶点 n 个
- (2) T 为连通子图
- (3) T 包含的边数最少

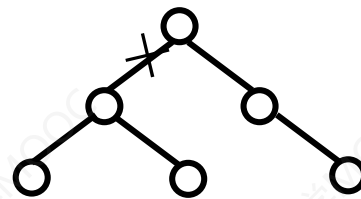
T 是一棵有 n 个顶点， $n-1$ 条边的生成树（支撑树）。

生成树

性质1: 一个有 n 个顶点的连通图的生成树有且仅有 $n-1$ 条边。

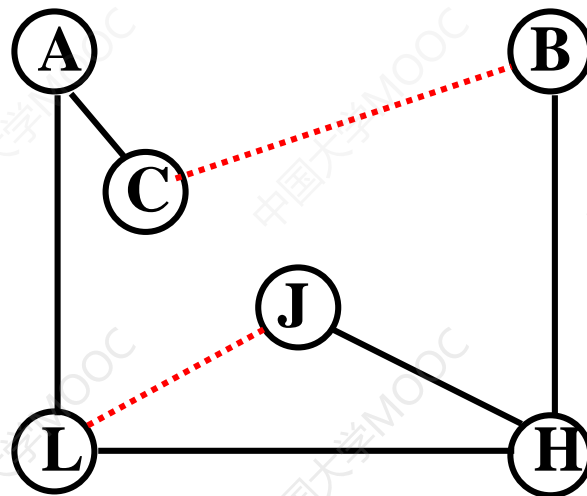
1. 如果一棵生成树有 n 个顶点和小于 $n-1$ 条边，则为非连通图。

构成一棵 n 顶点生成树需要 $n-1$ 条边，
少于 $n-1$ ，则必有边断开，不再连通。



2. 如果一棵生成树有 n 个顶点和多于 $n-1$ 条边，则一定有环。

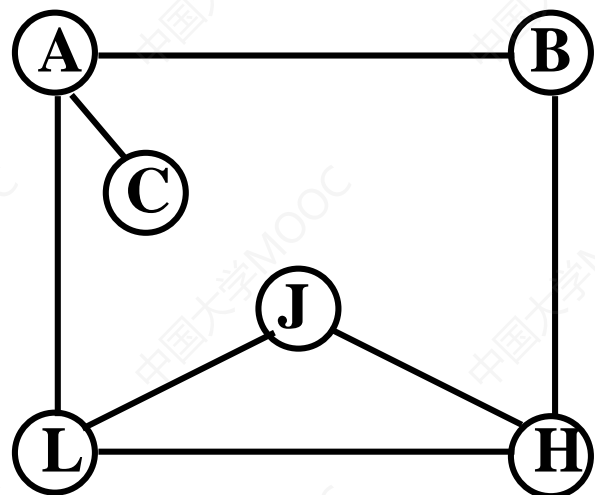
构成一棵 n 顶点生成树需要 $n-1$ 条边，
若再添加一条边，必会使得与它关联的那两个顶点之间有了
第二条路径。



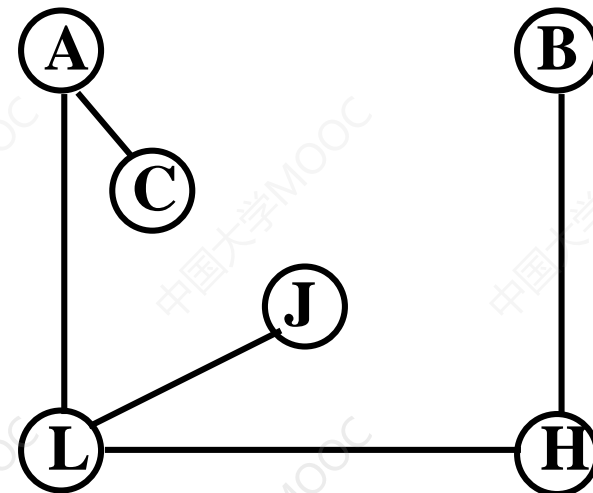
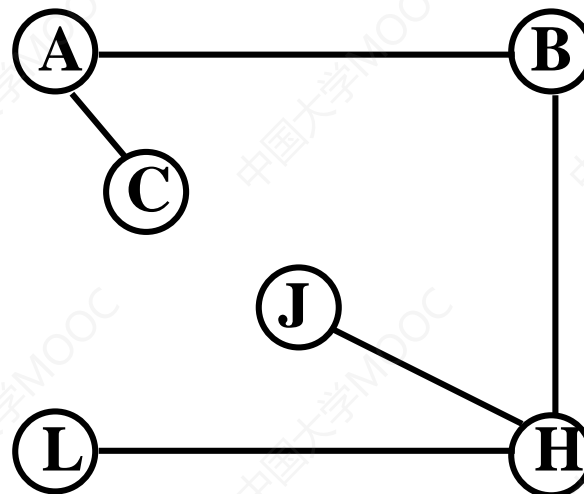
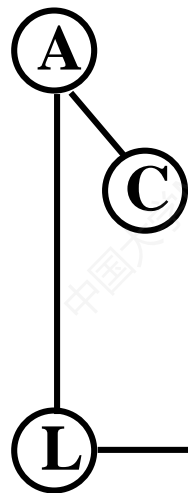
图的基本概念

生成树

性质2: 一个连通图的生成树并不唯一。



生成树



删除环中的任一条边

The background is a solid blue color with a subtle pattern of small, light blue geometric shapes (cubes and spheres) scattered across it. A large, faint watermark of the text "中国大学MOOC" is repeated diagonally across the entire image. In the center, the character "图" is displayed in a large, white, serif font.

图

大连理工大学

刘馨月