機械学習 第７回 サポートベクトルマシン

立命館大学 情報理工学部

福森 隆寛

Beyond Borders

講義スケジュール

■ 担当教員１：福森（第1回～第15回）

1	機械学習とは、機械学習の分類
2	機械学習の基本的な手順
3	識別（１）
4	識別（２）
5	識別（３）
6	回帰
7	**サポートベクトルマシン**
8	ニューラルネットワーク

9	深層学習
10	アンサンブル学習
11	モデル推定
12	パターンマイニング
13	系列データの識別
14	半教師あり学習
15	強化学習

■ 担当教員２：叶昕辰先生（第16回の講義を担当）

今回の講義内容

- 取り扱う問題の定義
- サポートベクトルマシン
  - ハードマージン
  - ソフトマージン
  - カーネル関数
- 演習問題

取り扱う問題の定義：教師あり・識別問題

- カテゴリデータ、または数値データからなる特徴ベクトルを入力して、それをクラス分けする識別器を作る

※ 教師あり学習の識別問題での学習データは、以下のペアで構成される

入力データの特徴ベクトル（カテゴリデータ/数値データ） ← $\{\boldsymbol{x}_i, y_i\}, \quad i = 1,2,\dots,N$ → 学習データの総数

カテゴリ形式の正解情報 → 「クラス」と呼ぶ

- 機械学習
  - 教師あり学習
    - 識別
    - 回帰
  - 中間的学習
  - 教師なし学習

※ 第３回と同じ問題を考えます

サポートベクトルマシン

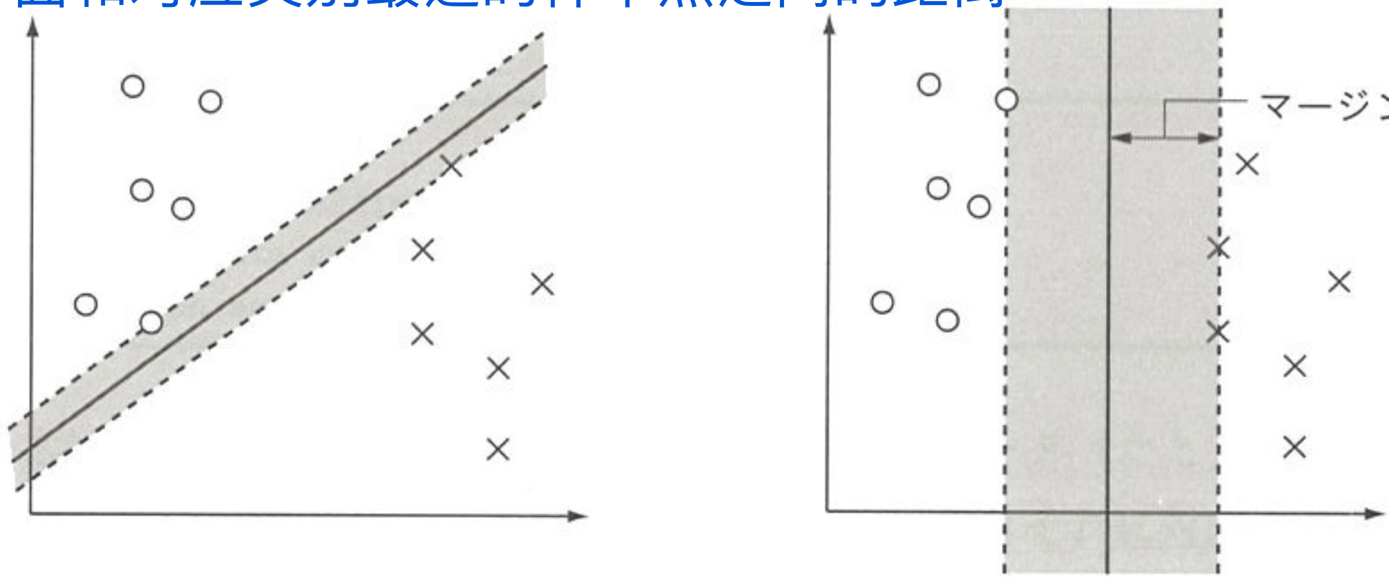
- 下図のような特徴空間上で超平面によって分離できる学習データを考える
  - 正解率100%で識別できる識別面が無数に存在
  - マージン（識別面と最も近いデータとの距離）に基づいて識別面を決定（→汎化能力の高さを定量的に表現）

Margin

超平面和对应类别最近的样本点之间的距离

マージンの小さい識別面

マージンの大きい識別面

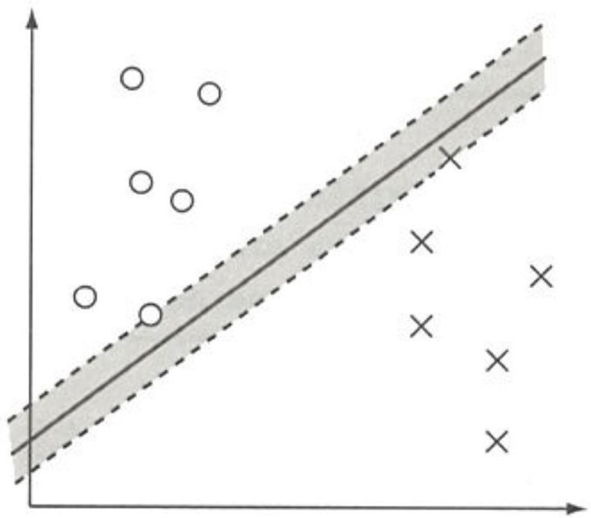


学習データと識別面とのマージン

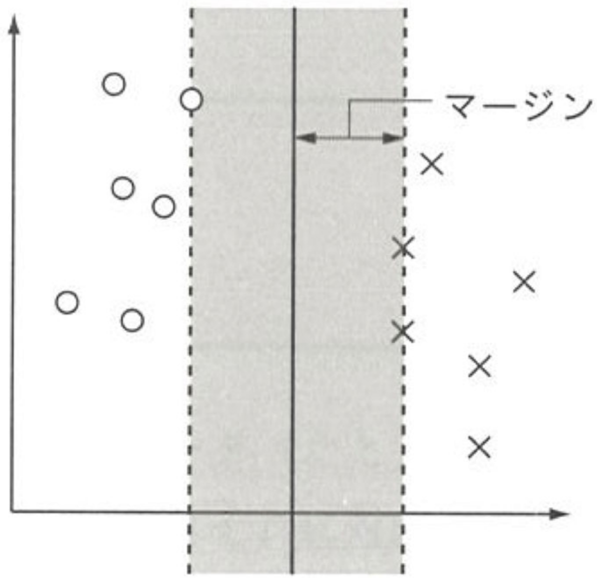
サポートベクトルマシン

□ サポートベクトルマシン（support vector machine: SVM）

- 学習データからのマージンが最大となる　最大化判别面的边界
  識別面（一般には識別超平面）を求める手法
- マージンが広いと、学習データと識別面の間に
  未知データが入る余地がある Margin越大，泛化能力越强



マージンの小さい識別面



マージンの大きい識別面

学習データから
少しずれた
未知データが
別クラスに
識別されることが
少なくなる

サポートベクトルマシン：定式化

- マージンが最大となる識別面を求める方法を考える

- 前提条件
  - 学習データが**線形分離可能**な状況を仮定
  - 数値特徴に対して正解情報の付いたデータを使用

$$\{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - 2値分類問題に限定
    - 正解情報y_i：正例 → $y_i = 1$、負例 → $y_i = -1$

サポートベクトルマシン：定式化

- 特徴空間上での識別面（超平面を仮定）
  - 識別面：$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + w_0 = 0$　※$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{x}$： d次元ベクトル
  - 正例：$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + w_0 > 0$
  - 負例：$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + w_0 < 0$

- 点と直線の距離の公式（こうしき）より
  i番目のデータ$\boldsymbol{x}_i$と、この識別面との距離 $\mathrm{Dist}(\boldsymbol{x}_i)$

$$\mathrm{Dist}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0|}{\|\boldsymbol{w}\|}$$

サポートベクトルマシン：定式化

- 識別面 $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + w_0 = 0$ の両辺(りょうへん)を定数倍しても表す識別面は変わらない

取离判别面最近的点，调整参数，使得判别面的值的绝对值为1

- 識別面に最も近いデータを識別面の式に代入したときその絶対値が1になるように係数$\boldsymbol{w}$とw_0を調整

$$\min_{i=1,\ldots,N} |\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0| = 1$$

此时最小距离为，即Margin

この状況での学習パターンと識別面との最小距離は

$$\min_{i=1,\ldots,N} \mathrm{Dist}(\boldsymbol{x}_i) = \min_{i=1,\ldots,N} \frac{|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0|}{\|\boldsymbol{w}\|} = \boxed{\frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}}$$

この最小距離は「マージン」を表している

サポートベクトルマシン：定式化

$$\min_{i=1,\dots,N} \mathrm{Dist}(\boldsymbol{x}_i) = \min_{i=1,\dots,N} \frac{|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0|}{\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}$$

このマージンを最大にする識別面を求める問題は、
$\|\boldsymbol{w}\|$を最小化する問題となる 最大化Margin转化为最小化||w||

- これを$\|\boldsymbol{w}\|^2$の最小化とする問題に置き換える
  - 普通(ふつう)は $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が最小解だが、これでは識別面にならない
  - 識別面として全学習データを識別できるという条件を追加

$$y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots N$$

- $y_i = 1$ または $y_i = -1$ としていたので、
  正例・負例両方の制約を一つの式で表現

サポートベクトルマシン：定式化

- マージンを最大にする識別面を求める問題の最終的な定式化 最终待优化式子

$$\boxed{\min \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2}$$

条件：$y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N$

保证正样本和负样本能够同时正确判别

- 後(のち)ほど、微分を利用して極値を求めて最小解を導くので上式のように乗数(じょうすう) $\frac{1}{2}$ を付けておく

サポートベクトルマシン：識別面の計算

- 前スライドで定式化した問題を
ラグランジュの未定（みてい）乗数法を用いて解決
- **ラグランジュ未定乗数法** 拉格朗日乘数法
  - $g(\boldsymbol{x})=0$の条件下で$f(\boldsymbol{x})$の最小値（または最大値）を計算する手法 在g(x)=0的条件下计算f(x)的最值
  - ラグランジュ関数$L(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})-\lambda g(\boldsymbol{x})$を導入して、この関数の極値を求める問題に置き換える
    - λ：ラグランジュ乗数

要求的式子.

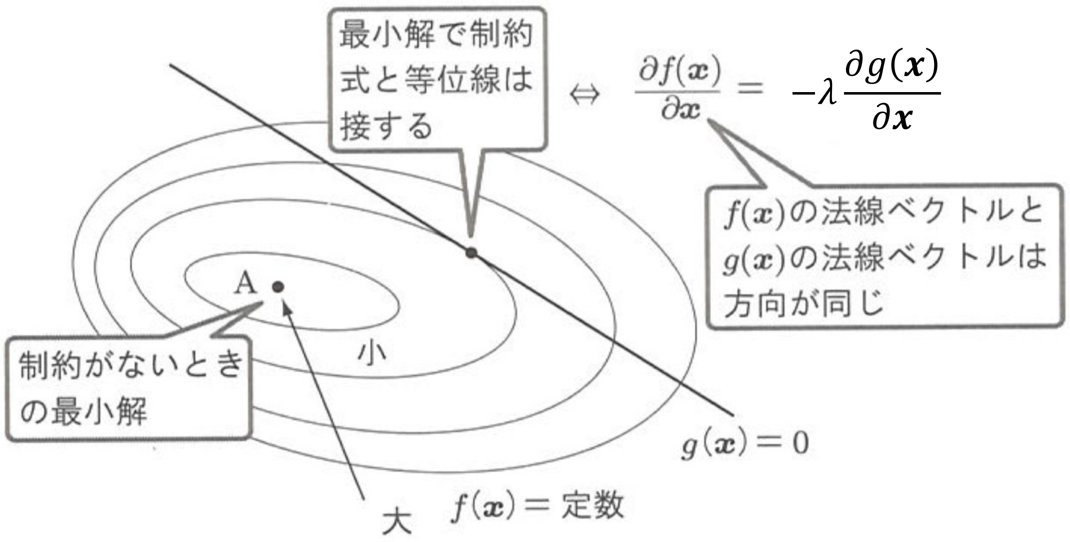
条件.

  - この$\boldsymbol{x}$に関する偏微分を0とすると、下式が得られる

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=-\lambda\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

サポートベクトルマシン：識別面の計算

- 制約がない状況での最小解は、下図の点A
- 直線 $g(\boldsymbol{x}) = 0$の上で、$f(\boldsymbol{x})$が最低となる点
  $\rightarrow f(\boldsymbol{x})$の等位線と直線 $g(\boldsymbol{x}) = 0$が接する点



この等位線と直線が接すること
=
それらの法線ベクトルが一致すること

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = -\lambda \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

サポートベクトルマシン：識別面の計算

（つづき）

$$\min \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \quad \text{条件：} \; y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N$$

の制約付きの最小化問題は、ラグランジュ乗数α_iを導入して、関数Lの最小値を求める問題に置き換える

$$\boxed{L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) - 1\}}$$

最小値では、Lの勾配が0になるので、以下の式が成立（せいりつ）

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i$$

サポートベクトルマシン：識別面の計算

（つづき）

$$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) - 1\}$$

O　×

$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \Downarrow$　　$\frac{\partial L}{\partial w} = 0 \Downarrow$

由梯度为零得到: $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0,\qquad \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i$

これらの式を整理すると 转化为使该上凸函数取得最值的α

$$\boxed{L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j = L_{\text{dual}}(\boldsymbol{\alpha})}$$

$\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2$

「$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha})$を最小にする問題」は「上に凸(とつ)の関数である $L_{\text{dual}}(\boldsymbol{\alpha})$を最大にする$\boldsymbol{\alpha}$を計算する問題」と等価(とうか)

サポートベクトルマシン：識別面の計算

- $L_{\text{dual}}(\boldsymbol{\alpha})$が最大となる$\boldsymbol{\alpha}$を計算すると
  - $\alpha_i \neq 0$：サポートベクトルに対応するもののみ 只能是SV.
  - $\alpha_i = 0$：サポートベクトル以外
  - サポートベクトル：識別面の計算に寄与する学習データ

    支持向量：距離超平面最近且满足一定条件的训练样本.

- マージンを最大にする識別面の重み

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i\,,} \qquad \boxed{w_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_+ + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_-)}$$

  - α_i： $L_{\text{dual}}(\boldsymbol{\alpha})$が最大となる$\boldsymbol{\alpha}$の$i$番目（ばんめ）の要素
  - $\boldsymbol{x}_+$、$\boldsymbol{x}_-$：正例、負例に属するサポートベクトル

サポートベクトルマシン：ソフトマージン

- じっさい
  実際は、線形分離不可能な学習データが多い
  - ある程度の誤識別のデータを許容（きょよう）して、
    それらが識別面からあまり離れていない識別面を選択
  - ソフトマージンの条件を導入

Hard Margin

- **ハードマージン**：全データを正しく識別できる条件

$$y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, N$$

Soft Margin

- **ソフトマージン**：ハードマージンを弱（よわ）める変数ξ_iを導入
  - $\xi_i (\geq 0)$：i番目のデータが制約を満たしていない程度で、
    小さい方が良い 允许一定程度的判别错误，
    即允许一些点靠近判别面

$$y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

サポートベクトルマシン：ソフトマージン

- SVMのマージン最大化問題にξ_iを導入

Soft Margin

$$\min\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2+\boxed{C\sum_{i=1}^{N}\xi_i}\right)$$

$$y_i\cdot(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i+w_0)\geq 1\boxed{-\xi_i},\quad i=1,\ldots,N,\quad \boxed{\xi_i\geq 0}$$

- 上式のCは制約を満たさないデータを、どの程度の重みで最適化に組み込むかを決定する定数
  - Cが大きい　C描述不满足条件的数据多大程度加入优化过程
    - ハードマージンの問題設定に近づき、複雑な識別面になる
  - Cが小さい
    - 誤りをほぼ無視する振る舞いで、比較的単純な識別面になる

サポートベクトルマシン：ソフトマージン

- 前スライドをラグランジュの未定乗数法で解くと、ハードマージンでの識別面と同じ式が導出され、

$$L_{\text{dual}}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j$$

が最大となる$\boldsymbol{\alpha}$を計算する

ただし、ソフトマージンでは$\boxed{0 \le \alpha_i \le C}$の制約がつく

演習問題7-1（10分間）

- SVMは2クラスのデータに対する分類器である。
  ここで、3クラス以上のデータに対する多クラス
  識別問題にSVMを適用するには、
  どうすれば良いか考えよ

演習問題7-1（10分間）解答例

- SVMは2クラスのデータに対する分類器である。ここで、3クラス以上のデータに対する多クラス識別問題にSVMを適用するには、どうすれば良いか考えよ

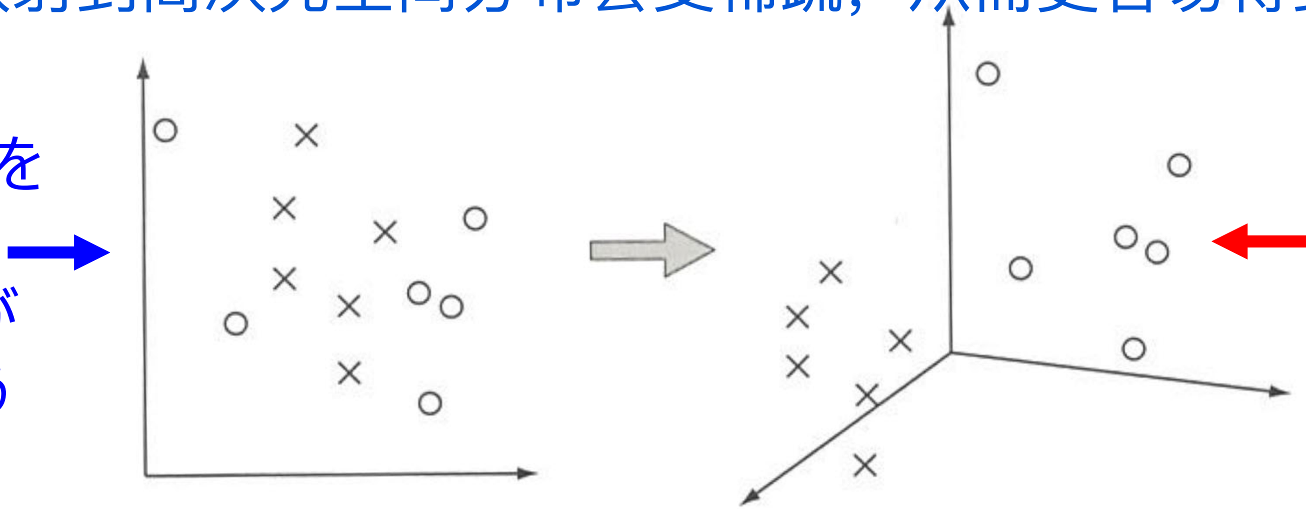
- 解答例
  - cクラスの場合（$c > 2$）
    あるクラスとそれ以外のデータを識別するc個のSVMを作成し、結果として最もスコアの高いクラスを選択する

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- 信頼できる識別面が得られそうにない場合を考える
- 特徴空間の次元数dが大きい場合
  - データが高次元空間上に疎らに分布することになるので、線形識別面が存在する可能性が高くなる

将数据映射到高次元空间分布会变稀疏，从而更容易得到线性判别面

ソフトマージンを使っても良い識別面が得られなさそう



高次元空間に写像すると、線形分離の可能性が高まる

低次元の特徴ベクトルを高次元空間に写像し、
高次元空間上でSVMを使って識別超平面を求める方法を考える

サポートベクトルマシン：カーネル関数

映射时要保证原空间内的距离关系

- d次元の特徴空間に対して
元の空間におけるデータ間の距離関係を保存しながら高次元に非線形に写像する
  - 高次元空間上での線形識別器の性能は元の空間での複雑な非線形識別器の性能に相当する
  - ただし、識別に無関係な特徴を持ち込む（も）（こ）と、データが無意味な方向に疎らに分布し、元の分布の性質が壊されやすくなる（こわ）
- 元の空間におけるデータ間の距離関係を保存するような非線形写像が見つかるか？

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- 元の特徴空間上の2点$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$の距離に基づいて定義される類似度（るいじど）関数$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$を考える
  - 2点$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$が近いほど、$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$は大きな値になる

相似度函数的值可以通过两点得到的高维向量的内积来计算

- $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$が、半正定値性などの条件を満たすと

$$\boxed{K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}')}$$

  のように、2点$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$から求まる高次元ベクトルの内積（ないせき）によって、類似度関数の値を計算できる
  - この関数を**カーネル関数**と呼ぶ

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- カーネル関数の例
  - 多項式カーネル

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boxed{(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}' + 1)^p}$$

※ p：自然数

高斯

  - ガウシアンカーネル関数

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boxed{\exp(-\gamma \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2)}$$

值越大判别面越复杂

- γ：カーネル関数の広がりを表すパラメータσ^2の逆数（ぎゃくすう）$\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$
- γが大きい場合は、複雑な識別面が形成される
  - カーネル関数が大きな値をとる範囲が狭（せま）くなるので、識別面の形成（けいせい）に関与（かんよ）するデータが近傍のものに限（かぎ）られる

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- 写像後の空間での識別関数$g(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))$

$$g(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + w_0$$

- ここでSVMを適用すると、$\boldsymbol{w}$は

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_i)$$

となるので、識別関数$g(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))$は

$$g(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + w_0$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) + w_0$$

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- これまでと同様に、学習の問題も

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$$

  が最大となる$\boldsymbol{\alpha}$を計算すれば良い

- カーネル関数Kさえ定(さだ)まれば、識別面を得られるのが重要なポイント

- **カーネルトリック** 避免复杂非线性映射的操作
  - 複雑な非線形写像を求める操作を避(さ)ける方法
  - これがSVMが色々(いろいろ)な応用に使われてきた理由

サポートベクトルマシン：カーネル関数

- カーネル法
  - 入力データを高次元空間に写像しながら、計算上は明示的に高次元空間を考えずに識別面を構成できる

- 非線形写像で線形分離可能な高次元空間にデータを飛(と)ばして、マージン最大化基準で信頼できる識別面を求めるSVMは非常(ひじょう)に強力(きょうりょく)
  - 文書分類やバイオインフォマティックスなどの様々な分野（特に高次元識別問題）で利用

演習問題7-2（10分間）

- カーネル関数の1つである多項式（たこうしき）カーネルは、以下の式で与えられる

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}' + 1)^p$$

- 2次元特徴ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$、$p = 2$として$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$を求めよ

補足資料

サポートベクトルマシンのマージンを最大とする識別面の計算にて

$$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{y_i \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + w_0) - 1\}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0, \qquad \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i$$

から

$$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j = L_{\mathrm{dual}}(\boldsymbol{\alpha})$$

を求める

$(x1^2 \quad , \quad x2^2 \ , \ (\sqrt{2})x1x2, \ (\sqrt{2})x1, \ (\sqrt{2})x2, 1)$

補足資料

$$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{y_i(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i + w_0) - 1\}$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i + w_0) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \boldsymbol{w}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i - w_0 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} - w_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{w}\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = -\frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= -\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i$$

補足資料

（つづき）

$$L(\boldsymbol{w}, w_0, \boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \boldsymbol{x}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha_1 y_1 \boldsymbol{x}_1^T + \cdots + \alpha_N y_N \boldsymbol{x}_N^T)\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \boldsymbol{x}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 y_1 \boldsymbol{x}_1^T \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \boldsymbol{x}_j + \cdots + \alpha_N y_N \boldsymbol{x}_N^T \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \boldsymbol{x}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i^T \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \boldsymbol{x}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$