§4.4　贝叶斯公式

主　题

贝叶斯公式

贝叶斯公式的含义及应用

综合例题

例8（续例6）：已知从仓库中随机抽取的这只晶体管是次品，求这只晶体管来自元件厂1的概率。

元件制造厂	提供晶体管的份额	次品率
1	0.15	0.02
2	0.80	0.01
3	0.05	0.03

解：设B={次品}, A_i={产品来自第i制造厂}, i=1,2,3

$$\boxed{P(A_1 \mid B) =} \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)\boxed{P(B \mid A_1)}}{P(B)}$$

$$= \frac{0.15 \times 0.02}{0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24$$

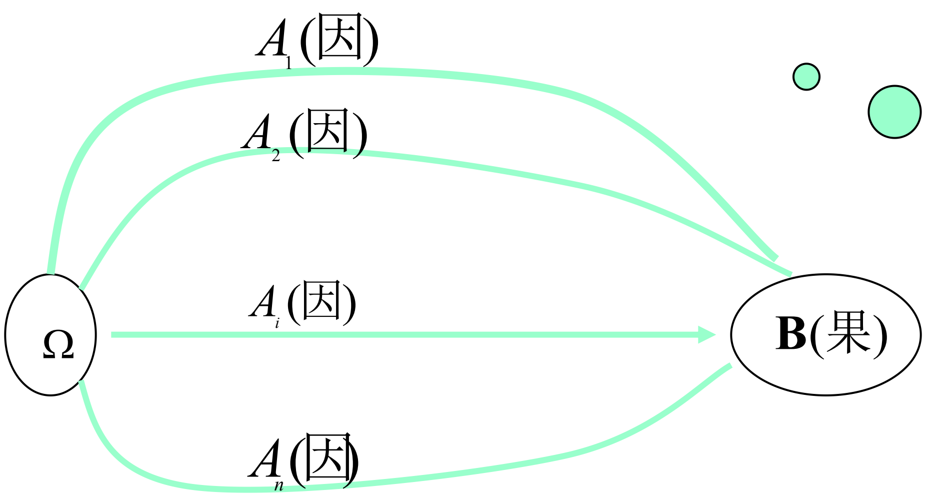
贝叶斯(Bayesian)公式

设$A_1,\ldots,A_n$是样本空间 Ω的一个划分，如果 $P(A_i)>0, i=1,\ldots,n,$
则对任意事件 B，只要 $P(B)>0$，就有

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(B\mid A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

$$=\frac{P(A_kB)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$



全概率公式是知因索果，而Bayes 公 式为知果索因.

例9（续例6）

元件制造厂	$P(A_i)$ 提供晶体管的份额		$P(B\mid A_i)$ 次品率
1	0.15	×	0.02
2	0.80	×	0.01
3	0.05	×	0.03

$$P(B)=0.0125$$

全概率公式

贝叶斯公式

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{0.15\times 0.02}{0.0125}=0.24$$

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.8\times 0.01}{0.0125}=0.64$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.05\times 0.03}{0.0125}=0.12$$

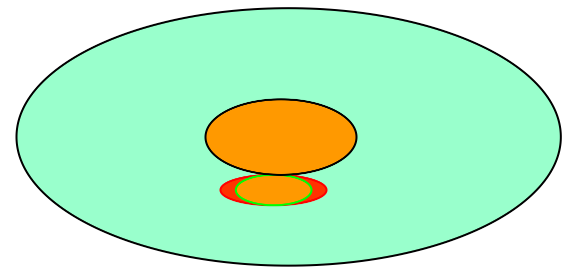
$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3).$$

例10 用“胎甲蛋白法”普查癌症，已知确有癌症者，查出为阳性的概率为0.95；未患癌症者，查出c为阴性的概率为0.95。一人生活在低发病区，该地区癌症发病率为0.005，若该人的普查结果为阳性，问该人患病的概率是多少？

患病率 $\longrightarrow$ **0.005**

患病 $\xrightarrow{\text{阳性}}$ **0.95**

无病 $\xrightarrow{\text{阴性}}$ **0.95**



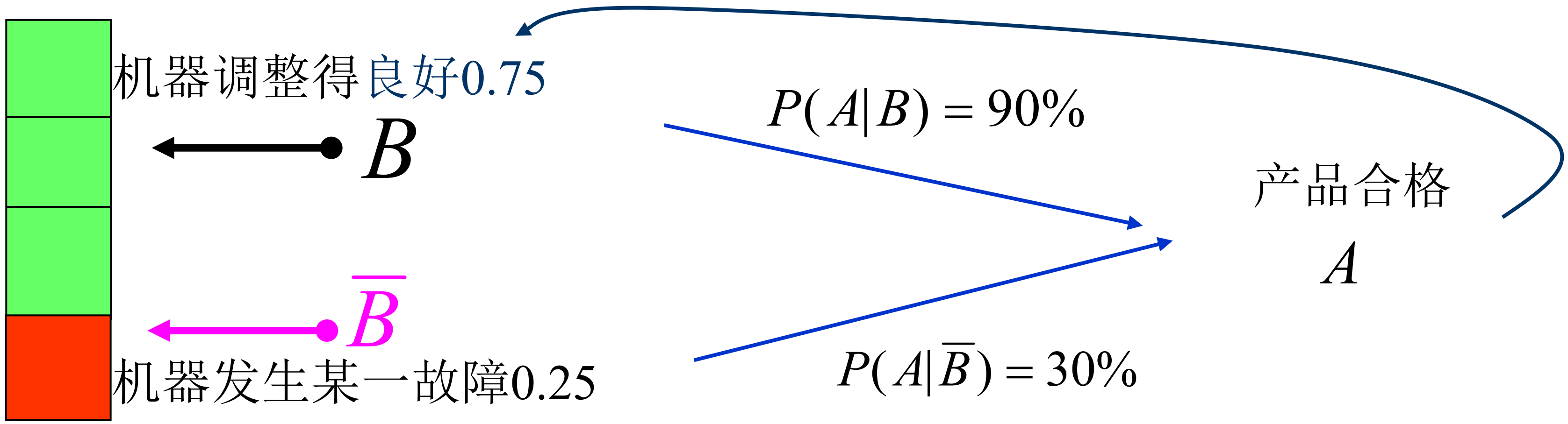
解： 设A={患病}, B={阳性}，则

$$P(A) = 0.005 \qquad P(B\,|\,A) = 0.95 \qquad P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = 0.95$$

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(A)P(B\,|\,A) + P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})}$$

$$= \frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95 + 0.995\times 0.05} \approx \frac{0.005}{0.005+0.05} < \frac{1}{10}$$

例 11 对以往的数据分析结果表明当机器运转良好时，产品的合格率为 90%，而当机器发生某一故障时，其合格率为 30%。每天早上机器开动时，机器良好的概率为 75%。某天早上开工后，随机抽一件产品，问该产品是合格品的概率；若该产品为合格品试求机器良好的概率是多少？



$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \overline{B})P(\overline{B})=0.9\times 0.75+0.3\times 0.25=0.75$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=\frac{0.9\times 0.75}{0.75}=0.9.$$

例12 已知第一个箱中装有50件产品，其中一等品30件，第二个箱中装有 30 件产品，含一等品19件，先随机选择一箱，然后在该箱中**取出**两件产品，事件A表示第一件是一等品，事件B表示第二件是一等品，求 P(A|B) 和P(B|A)

解: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ $\qquad P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

设C={选择的是第一箱}，则

$$P(A) = P(C)P(A|C) + P(\overline{C})P(A|\overline{C}) = \frac{1}{2}\times\frac{30}{50} + \frac{1}{2}\times\frac{19}{30} = 0.6167$$

$$P(B) = P(C)P(B|C) + P(\overline{C})P(B|\overline{C})$$

抽签原则

$$P(AB) = P(C)P(AB|C) + P(\overline{C})P(AB|\overline{C}) = \frac{1}{2}\times\frac{30\times 29}{50\times 49} + \frac{1}{2}\times\frac{19\times 18}{30\times 29} = 0.3741$$

$$P(A|B) = \frac{0.3741}{0.6167} = 0.6066, \qquad P(B|A) = \frac{0.3741}{0.6167} = 0.6066$$

或 $P(B \mid A) = P(B(C \cup \overline{C}) \mid A) = P(BC \cup B\overline{C} \mid A)$

$$= P(BC \mid A) + P(B\overline{C} \mid A)$$

$$= P(C \mid A)P(B \mid AC) + P(\overline{C} \mid A)P(B \mid A\overline{C})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{50}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{30}}\cdot\frac{29}{49} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{30}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{30}}\cdot\frac{18}{29} = 0.6066$$