学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2020 年度　デジタル信号処理　中間演習

DSP04 傅里叶级数的展开

周期 T＝1 の信号 $x(t)$ のフーリエ級数は

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt) \tag{1}$$

$$a_0 = \int_0^1 x(t)dt, \quad a_m = 2\int_0^1 x(t)\cos(2\pi mt)dt, \quad b_m = 2\int_0^1 x(t)\sin(2\pi mt)dt$$

である．区間 $0 \le t < 1$ で信号 $x(t)$ が

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 1/6) \\ 0 & (1/6 \le t < 5/6) \\ 1 & (5/6 \le t < 1) \end{cases}$$

であるとき，以下の空欄を埋めよ．

(1) まず a_0 を求める． 计算直流成分（对完整的周期积分）

$$a_0 = \int_0^1 x(t)dt = \int_0^{\boxed{1/6}} 1dt + \int_{\boxed{1/6}}^{\boxed{5/6}} 0dt + \int_{\boxed{5/6}}^{1} 1dt = \boxed{1/3}$$

(2) 次に $a_m (m \ge 1)$ を求める．

$$\begin{aligned} a_m &= 2\int_0^1 x(t)\cos(2\pi mt)dt = 2\left(\int_0^{\boxed{1/6}} \cos(2\pi mt)dt + \int_{\boxed{5/6}}^{1} \cos(2\pi mt)dt\right) \\ &= 2\left(\left[\frac{\boxed{\sin(2\pi mt)}}{2\pi m}\right]_0^{\boxed{1/6}} + \left[\frac{\boxed{\sin(2\pi mt)}}{2\pi m}\right]_{\boxed{5/6}}^{1}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sin(\pi m/\boxed{3})}{2\pi m} - \frac{\sin(\boxed{5}\pi m/\boxed{3})}{2\pi m}\right) = \frac{2\sin(\pi m/\boxed{3})}{\pi m} \end{aligned}$$

となる．ここで，$\sin(2\pi m - \theta) = -\sin(\theta)$ を利用した．例えば，

$$a_1 = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\pi} \approx 0.5513, \quad a_2 = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}\pi} \approx 0.2757, \quad a_3 = \boxed{0}, \quad a_4 = -\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}\pi} \approx -0.1378$$

となる． 代入m=1　m=2　m=3

(3) 最後に $b_m (m \ge 1)$ を求める．

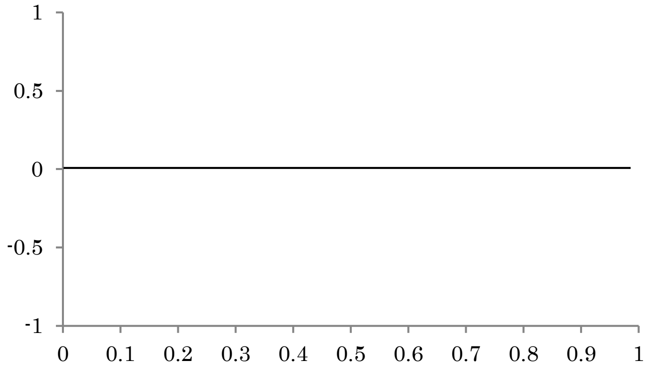
$$\begin{aligned} b_m &= 2\int_0^1 x(t)\sin(2\pi mt)dt = 2\left(\int_0^{\boxed{1/6}} \sin(2\pi mt)dt + \int_{\boxed{5/6}}^{1} \sin(2\pi mt)dt\right) \\ &= 2\left(\left[\frac{\boxed{-\cos(2\pi mt)}}{2\pi m}\right]_0^{\boxed{1/6}} + \left[\frac{\boxed{-\cos(2\pi mt)}}{2\pi m}\right]_{\boxed{5/6}}^{1}\right) \\ &= 2\left(\frac{\boxed{1} - \cos(\pi m/\boxed{3})}{2\pi m} - \frac{\boxed{1} - \cos(\boxed{5}\pi m/\boxed{3})}{2\pi m}\right) = \boxed{0} \end{aligned}$$

となる．ここで，$\cos(2\pi m-\theta)=\cos(\theta)$ を利用した．

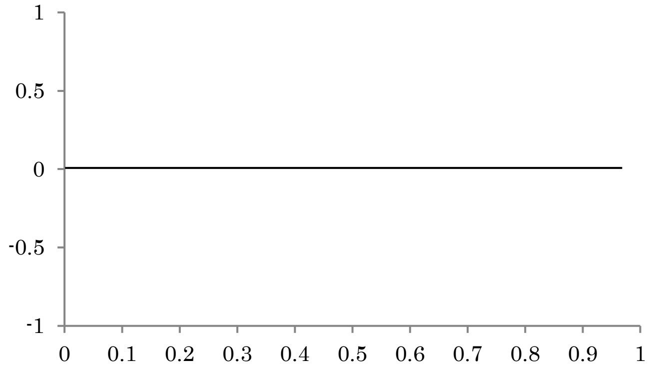
(4) 以上より，式(1)は

$$x(t)\approx\frac{1}{\boxed{3}}+\boxed{0.5513}\cos(2\pi t)+\boxed{0.2757}\cos(4\pi t)+\boxed{-0.1378}\cos(8\pi t)+\ldots \tag{2}$$

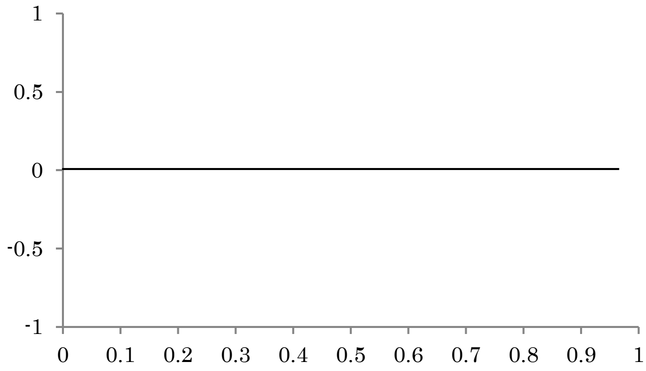
(5) 式(2)の右辺第 1 項，第 2 項，第 3 項，第 4 項（各周波数成分）をそれぞれグラフに描け．



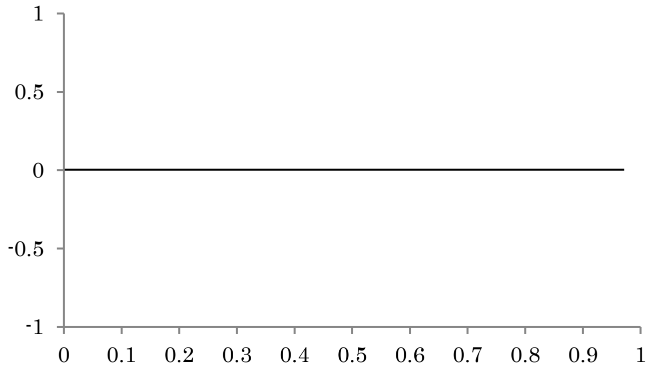
第 1 項



第 2 項



第 3 項



第 4 項