

第 2 节 课



§ 1.2 概 率

一、频率的定义与性质

1. 定义 在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。

比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$ 。

2. 它具有下述性质:

$$1^\circ \quad 0 \leq f_n(A) \leq 1;$$

$$2^\circ \quad f_n(\Omega) = 1;$$

3° 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是两两互不相容事件,则

$$\begin{aligned} f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \\ = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k) \end{aligned}$$

掷硬币实验

$n=500$ 次（7组） n_A : 正面出现的次数 $f_n(A)$: 正面出现的频率

n_A	251	249	256	253	251	246	244
$f_n(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488

所以频率具有不确定性。

实 验 者	n	n_H	$f_n(H)$
德•摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5096
K•皮尔逊	12000	6019	0.5016
K•皮尔逊	24000	12012	0.5005

所以频率具有稳定性

事件发生
的频繁程度

频 率

稳 定 性

事件发生
的可能性的
大小

概 率

频率的性质

概率的公理化定义

$$1^{\circ} \quad 0 \leq f_n(A) \leq 1 ;$$

$$2^{\circ} \quad f_n(\Omega) = 1;$$

$$3^{\circ} \quad f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

$$1^{\circ} \quad 0 \leq P(A) \leq 1 ;$$

$$2^{\circ} \quad P(\Omega) = 1;$$

$$3^{\circ} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

二 概率的定义和性质

1.定义 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 要求集合函数 $P(\bullet)$ 满足 下列条件:

1⁰ (非负性) $0 \leq P(A)$;

2⁰ (归一性) $P(\Omega) = 1$;

3⁰ (可列可加性) 若 A_1, A_2, \dots 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

2. 概率的性质

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

性质 1 $P(\emptyset) = 0$;

$$\cancel{A_1}, \cancel{A_2}, \cdots, \cancel{A_n}, \cancel{A_{n+1}}, \cdots$$

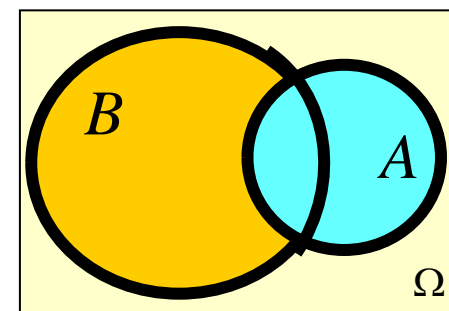
性质 2 若 A_1, A_2, \cdots, A_n 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 3 $P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B)$

$$\underline{\underline{A \subset B}} \quad P(B) - P(A)$$

(单调性) $A \subset B \Rightarrow P(B) \geq P(A)$



$$B = (B - A) \cup AB$$

$$P(B) = P(B - A) + P(AB)$$

性质 4 $P(A) \leq 1$;

性质 5 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

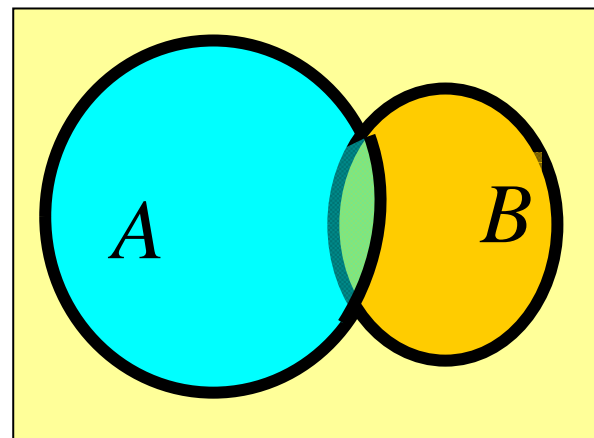
$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

性质 6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$A \cup B = A \cup B\bar{A}$$

$$A \cup B \cup C = A \cup B\bar{A} \cup C\bar{A}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ &\quad + P(ABC) \end{aligned}$$



例1. 设事件 A, B 的概率分别为 $1/2$ 和 $1/3$, 下列三种情况下

1) $P(AB) = 1/4$; 2) $AB = \phi$; 3) $B \subset A$, 求: $P(A-B), P(A \cup B)$

解 $P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{3}$

1) $P(A-B) = P(A) - P(AB)$

2) $P(A-B) = P(A)$

3) $P(A-B) = P(A) - P(B)$

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) $P(A \cup B) = P(A)$

例2. 已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A - B) = 0.3$, 求 $P(\bar{A} \cup \bar{B}), P(A \cup \bar{B})$ 。

解 1) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 0.8$

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3$$

$$P(AB) = 0.2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P(A \cup \bar{B}) &= P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) \\ &= P(A) + P(\bar{B}) - (P(A) - P(AB)) \end{aligned}$$

$$= 0.6 + 0.2 = 0.8$$

例3. 设 A 、 B 、 C 为三个事件

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/4, P(AB) = P(BC) = 1/8, P(AC) = 0$$

求： A 、 B 、 C 都不发生的概率。

解

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \end{aligned}$$

$$P(ABC) = 0$$