4. 掌握逻辑代数、逻辑变量、逻辑函数的基本定理和运算法则；

逻辑代数（又称布尔代数）**Logical/Boolean Algebra**，它是分析设计逻辑电路的数学工具。虽然它和普通代数一样也用字母表示变量，但变量(Variable)的取值只有“0”，“1”两种，分别称为逻辑“0”和逻辑“1”。这里“0”和“1”并不表示数量的大小，而是表示两种相互对立的逻辑状态。

★ 逻辑代数所表示的是逻辑关系，而不是数量关系。这是它与普通代数的本质区别。

1.Laws and Rules of Logical Algebra

1. The relationship between constant and variable

自等律 $A+0=A \qquad A\cdot 1=A$

0-1律 $A+1=1 \qquad A\cdot 0=0$

重叠律 $A+A=A \qquad A\cdot A=A$

还原律 $\overline{\overline{A}}=A$

互补律 $A+\overline{A}=1 \qquad A\cdot\overline{A}=0$

2. Basic operation rules of logical algebra

交换律 Commutative $A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$

结合律 Associative

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

分配律 Distributive

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$$

普通代数不适用！

证: $(A+B)\cdot(A+C)$

$$=A\cdot A+A\cdot C+B\cdot A+B\cdot C \qquad A\cdot A=A$$

$$=A+A(C+B)+BC \qquad A+1=1$$

$$=A(1+C+B)+BC$$

$$=A+BC$$

吸收律：
Absorption

$$\begin{cases} A + A \cdot B = A \\ A \cdot (A + B) = A \end{cases} \qquad \begin{cases} A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B \\ A + \overline{A} \cdot B = A + B \end{cases}$$

反演律(摩根定律)

DeMorgan's Theorems

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

List the state table to verify：

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

2.The representation method of logical function

- 真值表(Truth Table)
- 逻辑式(Logical Expression)
- 逻辑图(Logic diagram)

下面举例说明这三种表示方法。

例：有一T形走廊，在相会处有一路灯，在进入走廊的*A*、*B*、*C*三地各有控制开关，都能独立进行控制。任意闭合一个开关，灯亮；任意闭合两个开关，灯灭；三个开关同时闭合，灯亮。设*A*、*B*、*C*代表三个开关（输入变量）；*Y*代表灯（输出变量）。

设：开关闭合其状态为“1”，断开为“0”
灯亮状态为“1”，灯灭为“0”

1. 列逻辑状态表

用输入、输出变量的逻辑状态（“1”或“0”）以表格形式来表示逻辑函数。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

三输入变量有八种组合状态

n输入变量有2^n种组合状态

2. 逻辑式

用“与”“或”“非”等运算来表达逻辑函数的表达式。

(1)由逻辑状态表写出逻辑式

取 Y=“1”(或Y=“0”) 列逻辑式

★ 取 Y = “1”

一种组合中，输入变量之间是“与”关系，

对应于Y=1，若输入变量为“1”，则取输入变量本身(如A)；若输入变量为“0”则取其反变量(如 $\overline{A}$)。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2. 逻辑式

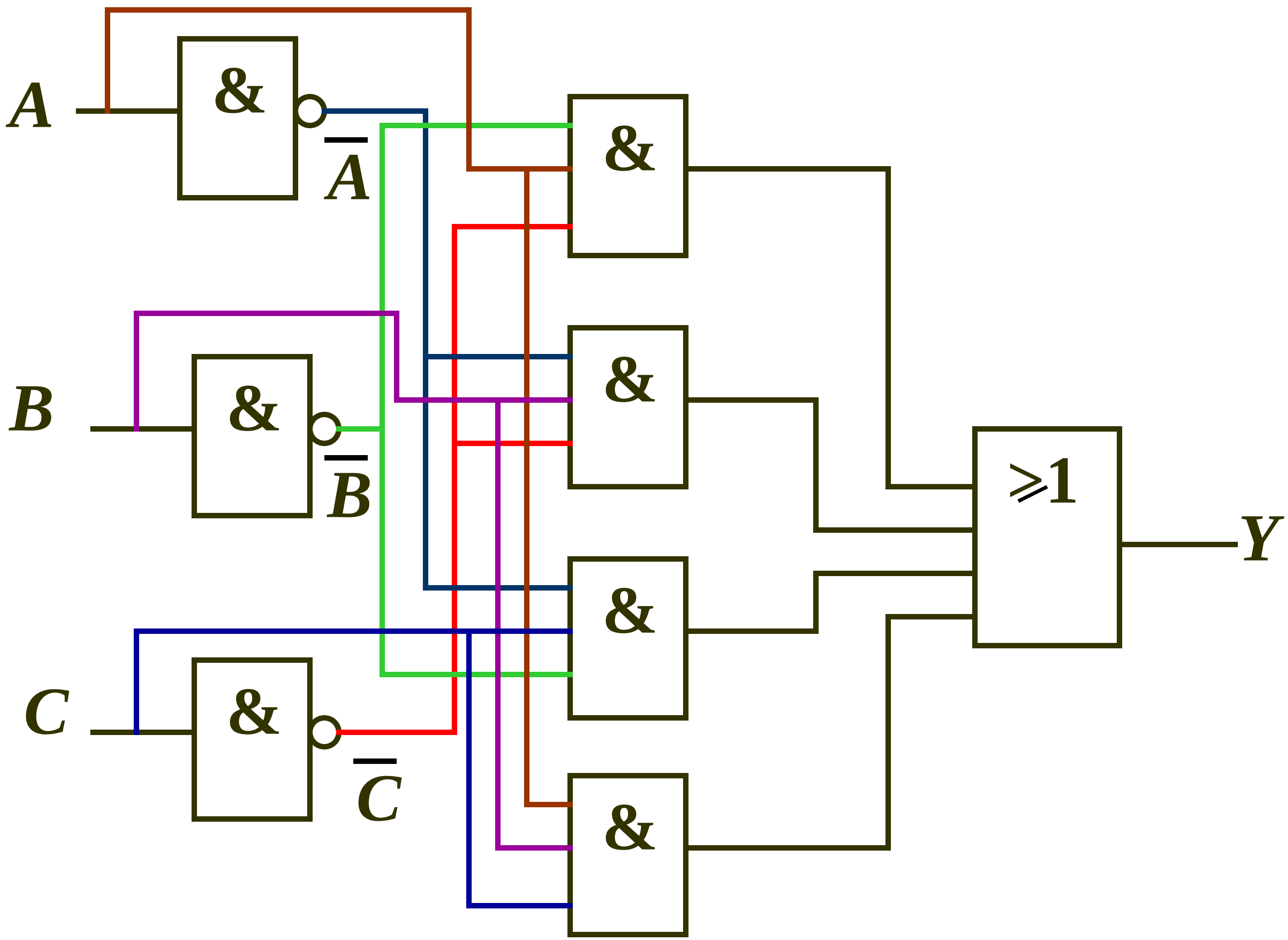
$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

各组合之间是“或”关系

反之，也可由逻辑式列出真值表。

3. 逻辑图



20.2.6逻辑函数表示方法之间的转换

1、由真值表到逻辑图的转换

真值表

1

逻辑表达式

化简

2

最简与或表达式

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

$$= \sum m(2,4,5,7)$$

2

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B} + AC$$

最简与或表达式

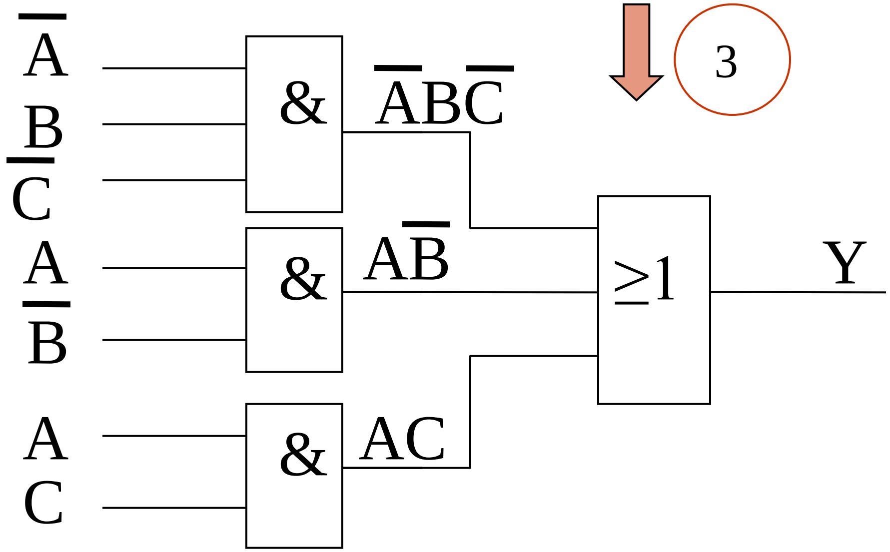
3

画逻辑图

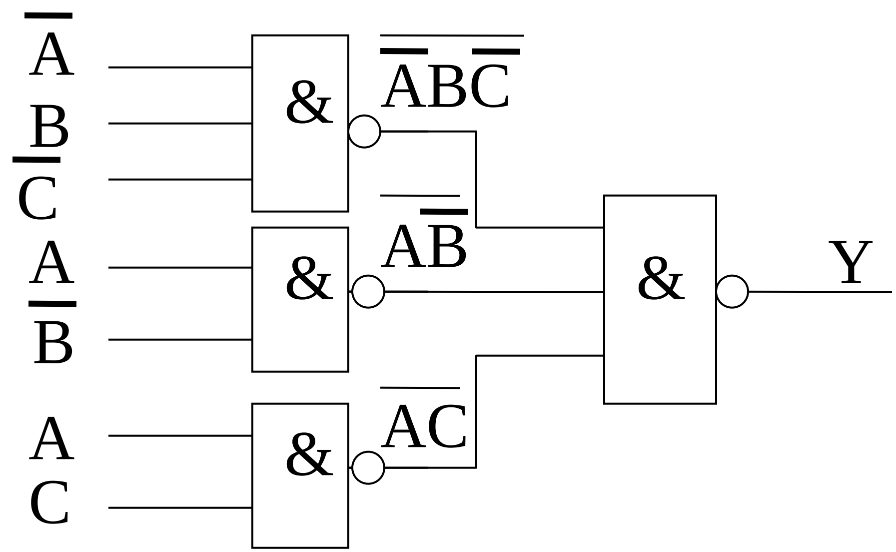
若用与非门实现，将最简与或表达式变换乘最简与非-与非表达式

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B} + AC$$

3



$$Y = \overline{\overline{\bar{A}B\bar{C}} \cdot \overline{A\bar{B}} \cdot \overline{AC}}$$



2、由逻辑图到真值表的转换

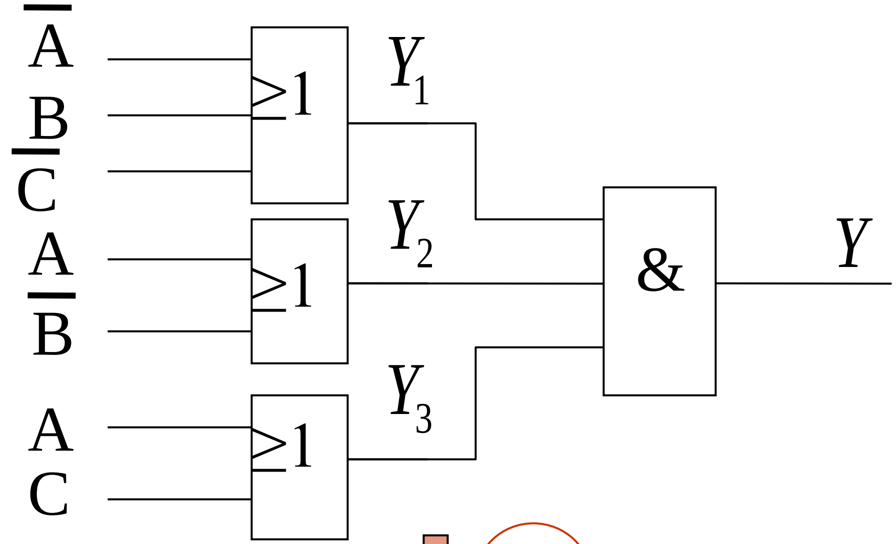
逻辑图

1 从输入到输出逐级写出

逻辑表达式

2 化简

最简与或表达式



1

$$Y_1=\overline{A}+B+\overline{C}$$

$$Y_2=A+\overline{B}$$

$$Y_3=A+C$$

$$Y=Y_1\cdot Y_2\cdot Y_3$$

$$=(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B})(A+C)$$

2

$$Y=(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B})(A+C)=(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}C)$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}C+AB+A\overline{C}$$

最简与或表达式

3

真值表

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}C+AB+A\overline{C}$$

3

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

20.2.7 逻辑函数的化简Simplification of logical function

★由逻辑状态表直接写出的逻辑式及由此画出的逻辑图，一般比较复杂；若经过简化，则可使用较少的逻辑门实现同样的逻辑功能。从而可节省器件，降低成本，提高电路工作的可靠性。

★利用逻辑代数变换，可用不同的门电路实现相同的逻辑功能。

化简方法 $\begin{cases} \text{公式法operation rule} \\ \text{卡诺图法Karnaugh Map} \end{cases}$

20.2.7.1 公式化简法(simplification)

公式化简法就是利用逻辑代数的定理公式进行化简。简化的原则以项数最少，每一项所含的变量数最少为最佳。

1、与—或式的简化

➤合并项法 (merge or combine)

利用公式 $AB+A\overline{B}=A$ 可将两项合并为一项，并消去B和$\overline{B}$这一对互补因子。A和B可以是任何复杂的逻辑式。

例：利用合并项法化简下列逻辑函数

$$F_1 = A(\overline{B}\,\overline{C}+BC)+A(B\overline{C}+\overline{B}C)$$

$$F_2 = \overline{A}B+ACD+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}CD$$

解

$$F_1 = A(B\odot C)+A(B\oplus C)=A\overline{(B\oplus C)}+A(B\oplus C)=A$$

$$F_2 = \overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+(ACD+\overline{A}CD)=\overline{A}+CD$$

➢添项法 add

利用公式 $A = A + A$ $A = AB + A\overline{B}$ $AB + \overline{A}C = AB + \overline{A}C + BC$

进行添项。利用所添的项与其他项进行合并达到简化目的。

$$F = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B = A\overline{B}(C + \overline{C}) + (A + \overline{A})B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= (A\overline{B}C + \overline{B}C) + (A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}) + (\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B)$$

$$= \overline{B}C + A\overline{C} + \overline{A}B$$

$$F = A\overline{B} + B\overline{C} + (\overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}C)$$

$$= (A\overline{B} + \overline{B}C + \overline{A}C) + (B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C)$$

$$= (A\overline{B} + \overline{A}C + B\overline{C})$$

➢吸收法absorb

利用$A+AB=A$吸收多余因子，A和B均可为任意复杂的逻辑函数。

例:利用吸收法化简逻辑函数

解

$$F_1 = A + (A+BC)(\overline{A} + \overline{\overline{B}\,\overline{C} + D}) + BC$$

$$= (A+BC) + (A+BC)(\overline{A} + \overline{\overline{B}\,\overline{C} + D}) = A + BC$$

$$F_2 = AB + AB\overline{C} + ABD + AB(\overline{C} + \overline{D})$$

$$= AB + AB(\overline{C} + D + \overline{C} + \overline{D}) = AB$$

利用公式 $A+\bar{A}B=A+B$ 削去多余的变量；

利用公式 $AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$削去多余项。

例:利用削去法化简下列逻辑函数

解 $$F_1=AB+(\bar{A}+\bar{B})C=AB+\overline{AB}C=AB+C$$

$$F_2=AC+A\bar{B}+\overline{B+C}$$

$$=AC+A\bar{B}+\bar{B}\,\bar{C}=AC+\bar{B}\,\bar{C}$$

4. 卡诺图Karnaugh Map

卡诺图：是由表示变量的所有可能取值组合的小方格所构成的图形。

逻辑函数卡诺图的填写方法：在那些使函数值为1的变量取值组合所对应的小方格内填入1，其余的方格内填入0，便得到该函数的卡诺图。

卡诺图是真值表的另外一种画法，既保留了真值特性，又便于逻辑运算。

20.2.7.1 应用卡诺图化简

卡诺图:是与变量的最小项 (**Minimum term**) 对应的按一定规则排列的方格图，每一小方格填入一个最小项。

（1）最小项： 对于**n**输入变量有2^n种组合，其相应的乘积(product)项也有2^n个，则每一个乘积项就称为一个最小项。其特点是每个输入变量均在其中以原变量和反变量形式出现一次，且仅一次。

如：三个变量，有8种组合，最小项就是8个，卡诺图也相应有8个小方格。

在卡诺图的行和列分别标出变量及其状态。

(2) 卡诺图

$A \backslash B$	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
1	$A\bar{B}$	AB

二变量

任意两个相邻最小项之间只有一个变量改变

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

四变量

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

三变量

二进制数对应的十进制数编号

(2)卡诺图

(a)根据真值表画出卡诺图

如:

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A \ *BC*	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将输出变量为“1”的填入对应的小方格,为“0”的可不填。

(2)卡诺图

(b)根据逻辑式画出卡诺图

如:$Y=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$

A \ BC	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将逻辑式中的最小项分别用“1”填入对应的小方格。如果逻辑式中最小项不全，可不填。

注意：如果逻辑式不是由最小项构成，一般应先化为最小项，或按观察方法填写。

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数 $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{D}+ACD+A\overline{B}$

解：第一步，展开为最小项标准型

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{D}(C+\overline{C})+ACD(B+\overline{B})+A\overline{B}(C+\overline{C})$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+ABCD+A\overline{B}CD+A\overline{B}C(D+\overline{D})+A\overline{B}\,\overline{C}(D+\overline{D})$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+ABCD+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$=m_0+m_6+m_4+m_{15}+m_{11}+m_{10}+m_9+m_8$$

$$=\sum m(0,4,6,8,9,10,11,15)$$

第二步，用卡诺图表示

CD / *AB*	**00**	**01**	**11**	**10**
00	**1**			
01	**1**			**1**
11			**1**	
10	**1**	**1**	**1**	**1**

(3)应用卡诺图化简逻辑函数

步骤
1.卡诺图
2.合并最小项
3.写出最简“与或”逻辑式

例 $Y = \overline{A}BC + ABC$

解：① 画出卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	
1			1	

规则一：

(a)将取值为“1”的相邻小方格圈成圈。

(b)所圈取值为“1”的相邻小方格的个数应为2^n (n=0,1,2…)。

(c)为了使函数最简，圈要尽可能大。

(d)一个圈代表一个与项，由圈中取值未发生变化的变量构成，如果变量取值为1则取原变量，取值为0则取反变量。

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	
1			1	

$$Y = \overline{A}BC + ABC = BC$$

规则二：为了使函数得到最佳简化，圈过的1格可重复被圈，即合并圈可以部分重叠。

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

三个圈最小项分别为：

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

$$A\overline{B}C + ABC = AC$$

$$ABC + AB\overline{C} = AB$$

写出简化逻辑式 $Y = BC + AC + AB$

规则三：若一个合并圈中所含的“1”格均被其他合并圈圈过则这个合并圈是多余的，必须消除。

例6. 应用卡诺图化简逻辑函数

$$(1)Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$(2)Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,C\,\overline{D}$$

解：

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1			

多余

写出简化逻辑式

$$Y=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

相邻

$$Y=\overline{B}\,\overline{D}$$

例7. 应用卡诺图化简逻辑函数

$$Y=\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+BC\overline{D}+B\,\overline{D}$$

解：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

含$\overline{A}$均填“1”

注意：

1.圈的个数应最少

2.每个“圈”要最大

3.每个“圈”至少要包含一个未被圈过的最小项。

写出简化逻辑式

$$Y=\overline{A}+B\overline{D}$$