10. 순환

10.1 순환 함수(1)

- 순환 함수(recursive function)
  - 자기 자신을 호출하는 함수
  - 가상의 루프를 사용하여 자동적으로 반복

- 예 : 계승(factorial) 함수

$$n! = \begin{cases} 1, \text{if } n = 0 \text{ or } 1 \\ n(n-1)!, \text{if } n > 1 \end{cases}$$

  - 한 숫자에 대한 계승을 이보다 작은 숫자에 대한 계승으로 정의하고 있음
  - 순환부는 나머지 수식이 비순환부에 의해 계산되는 경우를 만날 때까지 계속 적용됨
  - 이렇게 구해진 값은 최종적으로 원래 수식의 정확한 값을 리턴할 때까지 연쇄적으로 다른 값으로 계산됨

순환적으로 7!을 계산

$7! = 7\ (6!)$	$= 7\ (720) = 5040$
$6! = 6\ (5!)$	$= 6\ (120) = 720$
$5! = 5\ (4!)$	$= 5\ (24) = 120$
$4! = 4\ (3!)$	$= 4\ (6) = 24$
$3! = 3\ (2!)$	$= 3\ (2) = 6$
$2! = 2\ (1!)$	$= 2\ (1) = 2$

BASE: $1! = 1$

순환 함수(2)

- 베이스(base)
  - 순환이 제대로 작동하기 위해서는 반드시 직접 계산에 의해 순환 사다리를 다시 올라갈 수 있도록 베이스를 가지고 있어야 함
  - 베이스를 명시하지 않으면 무한 순환에 빠질 위험이 있음

$$n! = 1 \text{ if } n = 0 \text{ or } 1 \text{ [베이스]}$$

$$n! = n(n-1)! \text{ [순환]}$$

순환 계승 함수

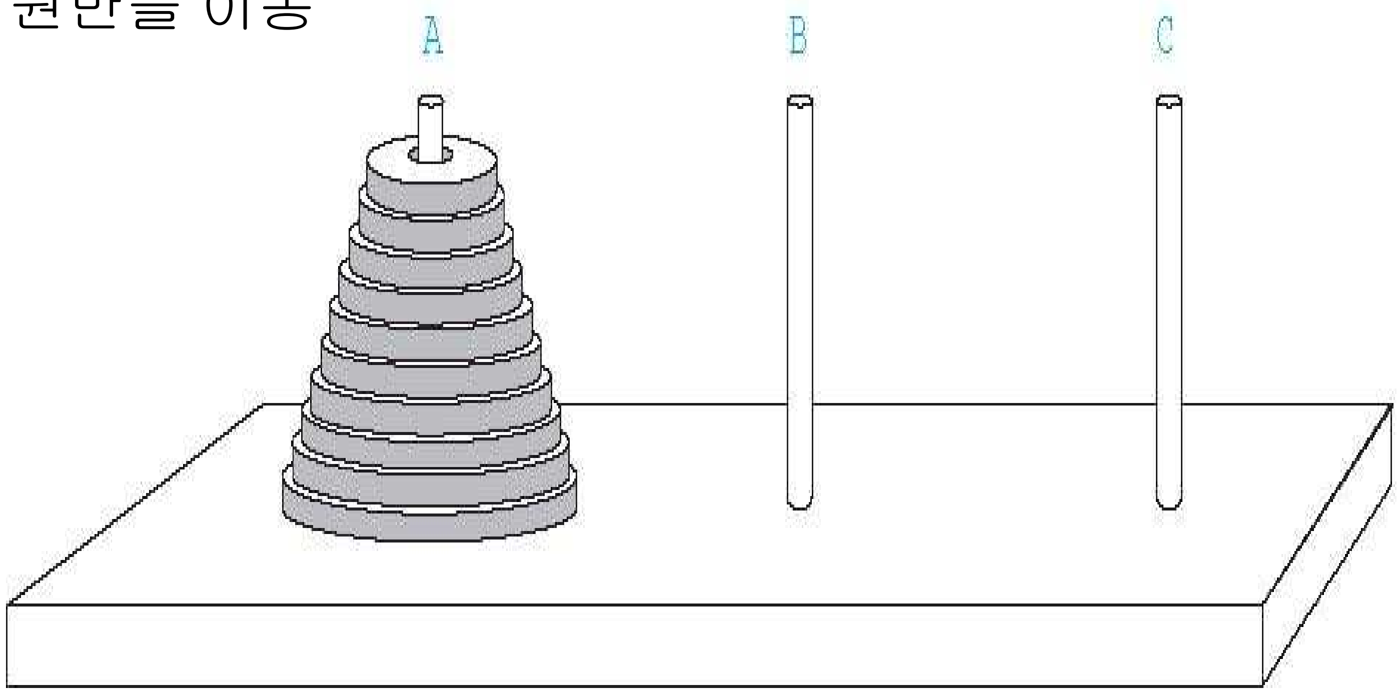
```
class TestRecursiveFactorial {
    public static void main(String[] args) {
      for (int i = 0; i < 10; i++)
          System.out.println(i + "₩t" + factorial(i));
    }

   static long factorial(int n) {
     if (n < 2) return 1; // base
     return n*factorial(n-1); // recursion
   }
}
```

반복 버젼

```
static long factorial(int n) {
    long m=1;
    for (int f=2; f<=n; f++)
        m *= f;
    return m;
}
```

10.2 하노이의 탑 게임

- 장대 **A**에 있는 원반을 장대 **B**로 이동시키는 게임 (**C**를 이용)
  - 이동시 아래에 있는 원반이 위에 있는 원반보다 반드시 커야 함
  - 작은 원반의 위에 큰 원반을 쌓지 않으면서 한번에 하나씩 원반을 이동



하노이의 탑 해결 과정

- n개의 원반을 A에서 B로 이동하기 위해서는
  - 먼저 마지막 원반을 제외한 모든 n-1개의 원반을 A에서 C로 이동
  - 마지막 원반을 A에서 B로 이동
  - C에 있는 n-1개의 원반을 B로 이동

하노이의 탑

```
class HanoiTowers {
  public static void main(String[] args) {
    int numTowers = 3;
    if (args.length>0) numTowers=Integer.parseInt(args[0]);
    print(numTowers, 'A', 'B', 'C');
  }

  static void print(int n, char x, char y, char z) {
    // move n disks from peg x to peg y using peg z:
    if (n == 1) System.out.println(x + " --> " + y); // base
    else {
      print(n-1, x, z, y); // recursion
      System.out.println(x + " --> " + y);
      print(n-1, z, y, x); // recursion
    }
  }
}
```

10.3 피보나치 수

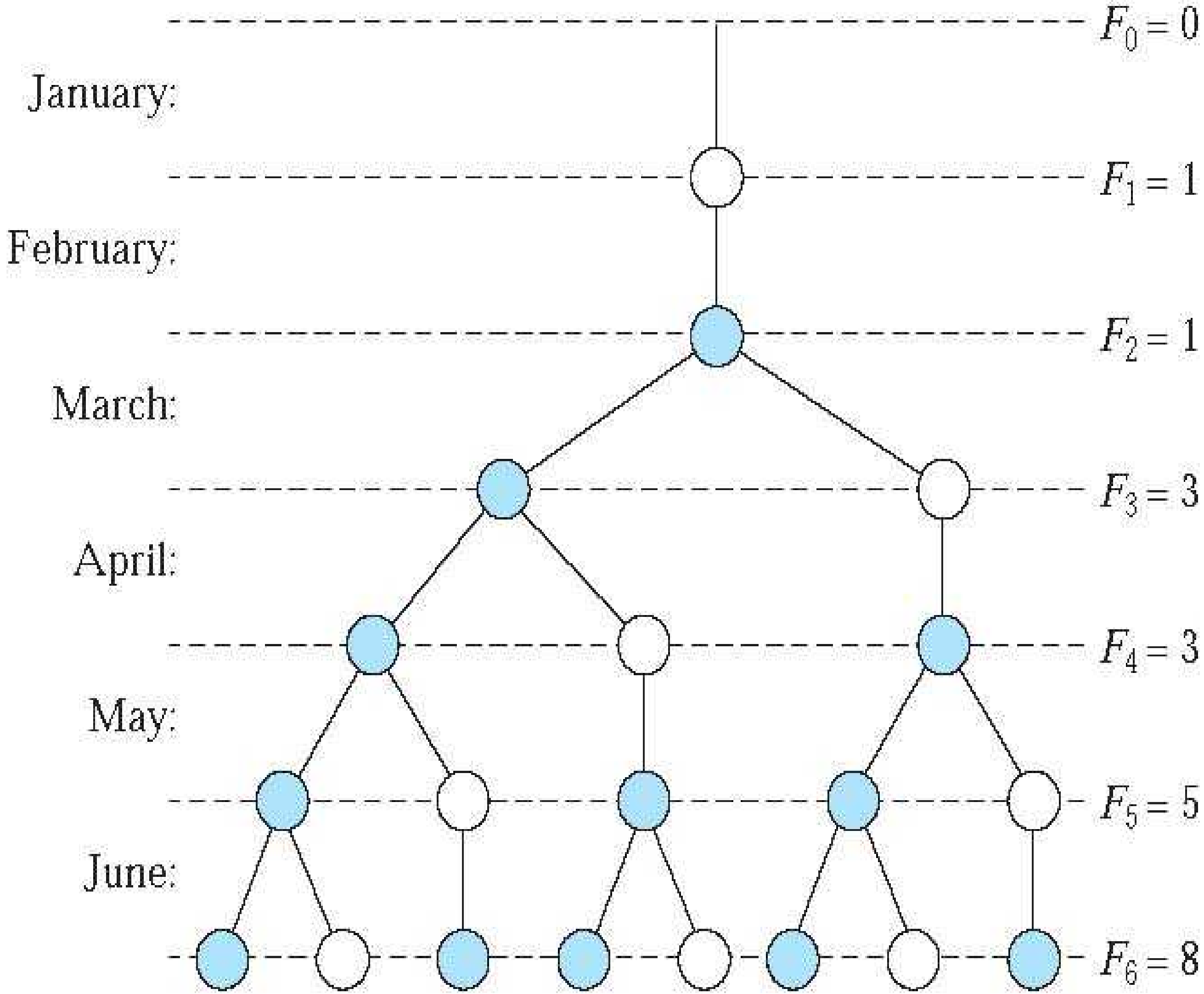
- 피보나치(Fibonacci) 수
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

$$F_n = \begin{cases} 0, \text{if } n = 0 \\ 1, \text{if } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, \text{if } n > 1 \end{cases}$$

순환 피보나치 함수

```
class TestRecursiveFibonacci {
  public static void main(String[] args) {
    for (int i = 0; i < 13; i++)
    System.out.println(i + "₩t" + f(i));
  }
  static long f(int n) {
    if (n < 1) return 0; // base
    if (n < 3) return 1; // base
    return f(n-1) + f(n-2); // recursion
  }
}
```

피보나치의 토끼 문제


January:
February:
March:
April:
May:
June:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_2 = 1$
$F_3 = 3$
$F_4 = 3$
$F_5 = 5$
$F_6 = 8$

10.4 호출 트리

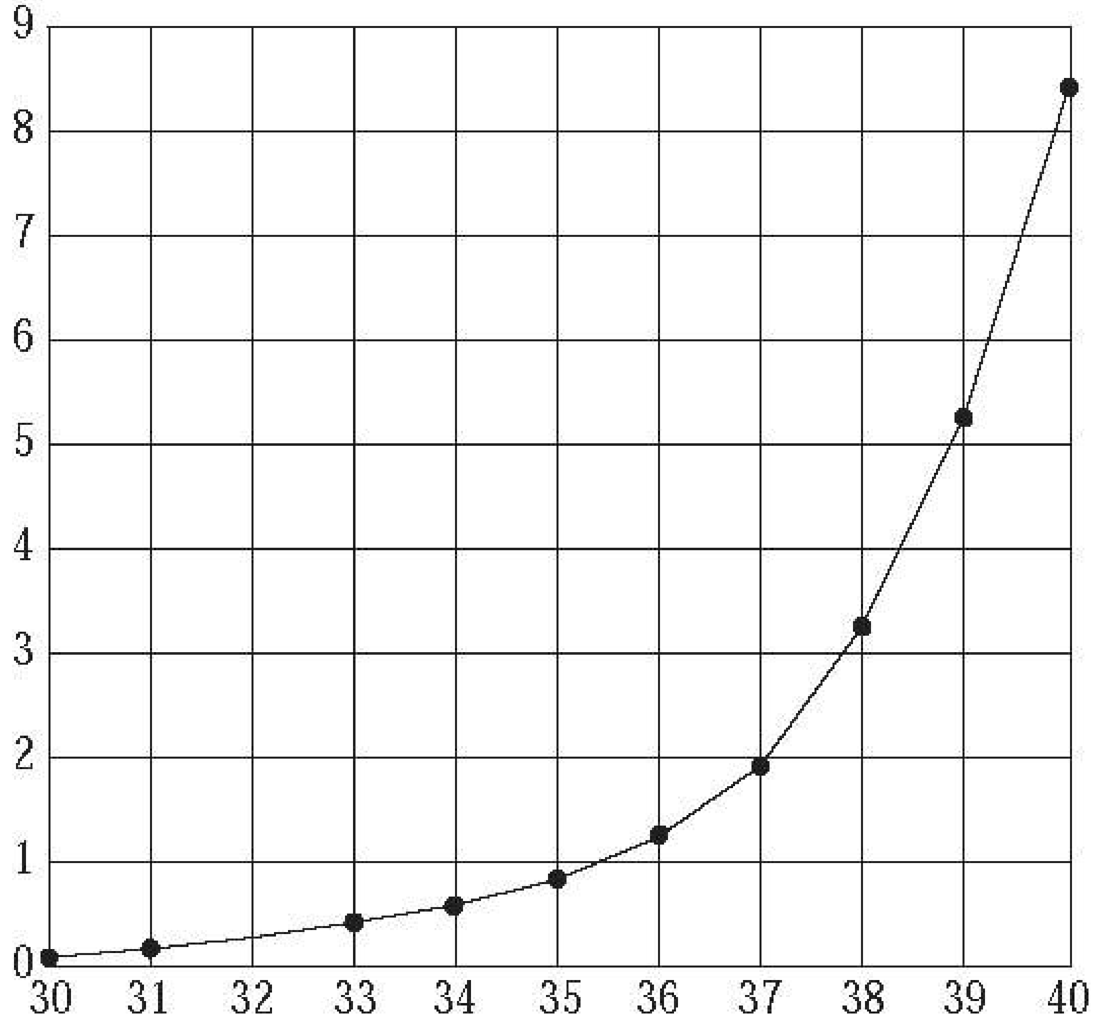
- 순환 피보나치 함수의 시간 측정

```
class TimeRecursiveFibonacci {
  public static void main(String[] args) {
    for (int n=30; n<=40; n++) {
      long t0=System.currentTimeMillis();
      long m=f(n);
      long t1=System.currentTimeMillis();
      System.out.println("f("+n+")="+m+“₩ttime: "+(t1-t0));
    }
  }

 static long f(int n) // same as in Listing 10.3
}
```

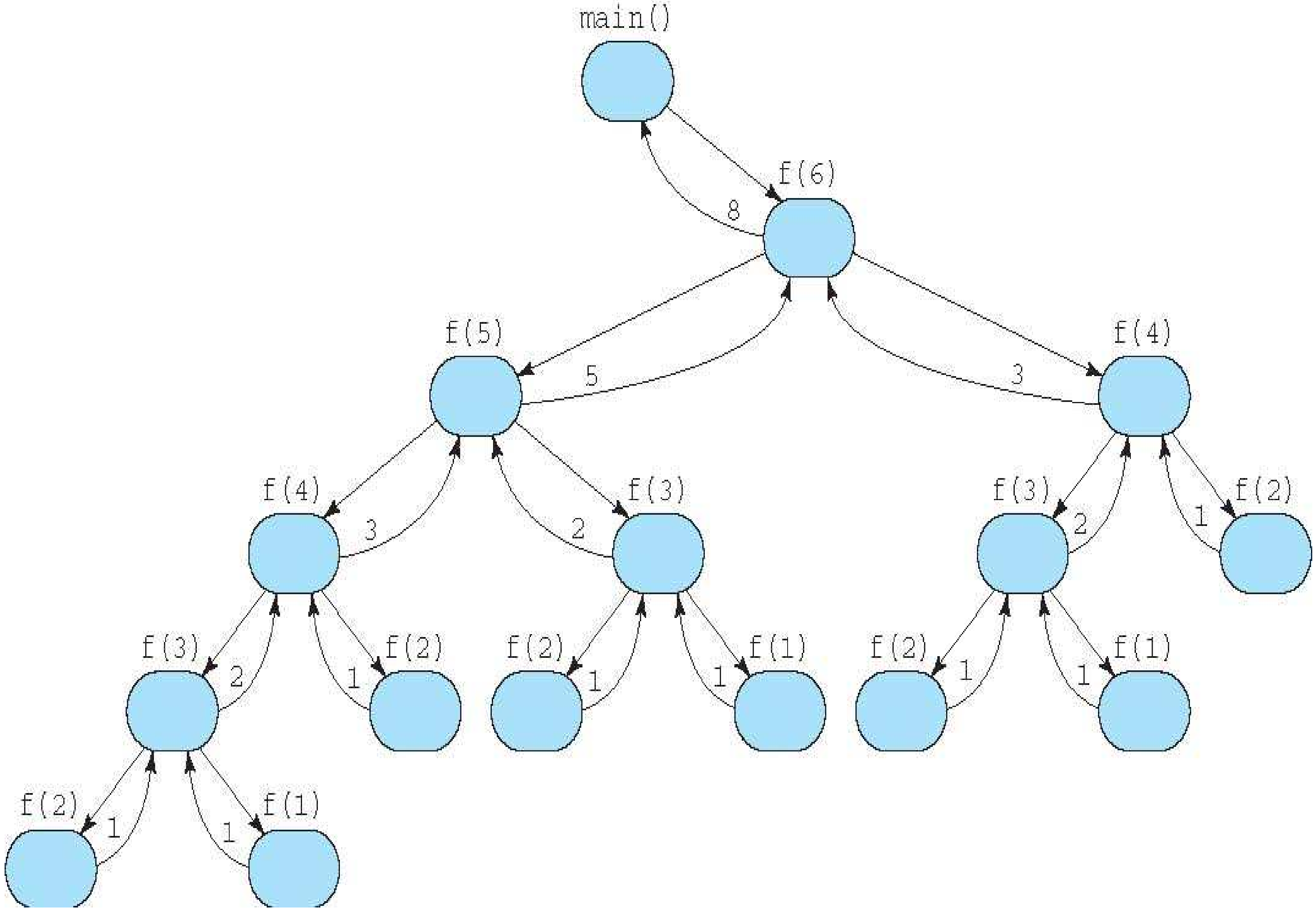
출력 결과

f(30) = 832040 time: 78
f(31) = 1346269 time: 125
f(32) = 2178309 time: 188
f(33) = 3524578 time: 297
f(34) = 5702887 time: 468
f(35) = 9227465 time: 782
f(36) = 14930352 time: 1265
f(37) = 24157817 time: 1953
f(38) = 39088169 time: 3219
f(39) = 63245986 time: 5250
f(40) = 102334155 time: 8531

실행 시간에 대한 그래프 : 지수 증가



순환 피보나치 메소드에 대한 호출 트리



실제 실행 과정

1. main() calls f(6)
2. f(6) calls f(5)
3. f(5) calls f(4)
4. f(4) calls f(3)
5. f(3) calls f(2)
6. f(2) returns 1 to f(3)
7. f(3) calls f(1)
8. f(1) returns 1 to f(3)
9. f(3) returns 1 + 1 = 2 to f(4)
10. f(4) calls f(2)
11. f(2) returns 1 to f(4)
12. f(4) returns 2 + 1 = 3 to f(5)
13. f(5) calls f(3)
14. f(3) calls f(2)
15. f(2) returns 1 to f(3)
16. f(3) calls f(1)
17. f(1) returns 1 to f(3)
18. f(3) returns 1 + 1 = 2 to f(5)
19. f(5) returns 3 + 2 = 5 to f(6)
20. f(6) calls f(4)
21. f(4) calls f(3)
22. f(3) calls f(2)
23. f(2) returns 1 to f(3)
24. f(3) calls f(1)
25. f(1) returns 1 to f(3)
26. f(3) returns 1 + 1 = 2 to f(4)
27. f(4) calls f(2)
28. f(2) returns 1 to f(4)
29. f(4) returns 2 + 1 = 3 to f(6)
30. f(6) returns 5 + 3 = 8 to main()

반복 피보나치 함수의 시간 측정

```
class TimeIterativeFibonacci {
  public static void main(String[] args) {
    for (int n = 30; n <= 40; n++) {
      long t0=System.currentTimeMillis();
      long m=f(n);
      long t1=System.currentTimeMillis();
      System.out.println("f(" + n + ") = " + m+“₩ttime: "+(t1-t0));
    }
  }
  static long f(int n) {
    if (n<2) return n;
    long f0=0, f1=1, f2=1;
    for (int i=2; i<n; i++) {
      f0 = f1;
      f1 = f2;
      f2 = f1 + f0;
    }
    return f2;
  }
}
```

출력

f(30) = 832040 time: 0
f(31) = 1346269 time: 0
f(32) = 2178309 time: 0
f(33) = 3524578 time: 0
f(34) = 5702887 time: 0
f(35) = 9227465 time: 0
f(36) = 14930352 time: 0
f(37) = 24157817 time: 0
f(38) = 39088169 time: 0
f(39) = 63245986 time: 0
f(40) = 102334155 time: 0

10.5 재계산 대신 저장

- 반복 버전과 순환 버전
  – 일반적으로 반복 버전은 빠르고
  – 순환 버전은 간단함

- 순환 버전이 느린 이유
  – 같은 값을 여러 번 재계산하기 때문
  – 처음 계산될 때 계산 결과를 저장해 놓으면 재계산을 피할 수 있음

피보나치 수를 계산하는데 임시 저장소를 사용

```
class TimeStoredFibonacci {
  public static void main(String[] args) {
    for (int n = 30; n <= 40; n++) {
      long t0 = System.currentTimeMillis();
      long m = Fibonacci.number(n);
      long t1 = System.currentTimeMillis();
      System.out.println("f(" + n + ") = " + m+"₩ttime: "+(t1-t0));
    }   }   }
class Fibonacci {
  private static long[] fib = new long[100];
  private static int lastFibIndex = 2;
  static { // class initializer
     fib[1] = fib[2] = 1;
  }
  public static long number(int n) {
    for (int i = lastFibIndex+1; i <= n; i++)
       fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2];
    if (n > lastFibIndex) lastFibIndex = n;
    return fib[n];
  }
}
```

출력 결과

f(30)	=	832040	time: 31
f(31)	=	1346269	time: 0
f(32)	=	2178309	time: 0
f(33)	=	3524578	time: 0
f(34)	=	5702887	time: 0
f(35)	=	9227465	time: 0
f(36)	=	14930352	time: 0
f(37)	=	24157817	time: 0
f(38)	=	39088169	time: 0
f(39)	=	63245986	time: 0
f(40)	=	102334155	time: 0

10.7 순환 이진 탐색 알고리즘

- 순환 이진 탐색 알고리즘
  1. 만일 $q \le p$ 이면, $-p-1$(베이스) 리턴
  2. $i=(p+q)/2$ 이라 함(정수 나눗셈)
  3. 만일 $a_i=x$ 이면, i 리턴
  4. 만일 $a_i < x$ 이면, 상위 시이퀀스 $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{q-1}\}$을 탐색한 결과를 리턴
  5. 만일 $a_i > x$ 이면, 하위 시이퀀스 $\{a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{i-1}\}$을 탐색한 결과를 리턴

- 순환 이진 탐색 알고리즘은 $\boldsymbol{\Theta(\lg n)}$ 시간에 실행됨