Examination Scheduling

Alexander Eckl, Maximilian Fiedler, Mickael Grima, Roland Halbig

Technische Universität München

March 21, 2016

Konstanten

$$\begin{aligned}
s_i &:= \text{Anzahl der Studenten, die für Prüfung } i \text{ angemeldet sind} \\
c_k &:= \text{Anzahl der nutzbaren Sitzplätzein Raum } k \\
Q &:= \text{Kollisionsmatrix} \\
q_{i,j} &:= \begin{cases} 0, & \text{falls Prüfung } i \text{ und } j \text{ gleichzeitig stattfinden können} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
T &:= \text{Sperrmatrix} \\
t_{i,j} &:= \begin{cases} 1, & \text{falls Raum } k \text{ zum Zeitintervall } l \text{ geöffnet ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
h_l &:= \text{Anzahl der Stunden von Periode } l \text{ nach Beginn des Prüfungszeitrau}
\end{aligned}$$

Variablen

$$x_{i,k} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ in Raum } k \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_{i,l} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ im Zeitinterval } l \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dimensionen:

$$n : AnzahlderPrfungen$$

$$r : AnzahlderRume$$

$$p : AnzahlderZeitintervalle$$

Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} s_i x_{i,k} - \gamma \sum_{i=1,j>i}^{n} q_{i,j} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l (y_{i,l} - y_{j,l}) \right|$$

Resolving the absolute value: Define $\Delta h_{i,j} := \sum_{l=1}^{p} h_l(y_{i,l} - y_{j,l})$.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} s_i x_{i,k} - \gamma \sum_{i=1,j>i}^{n} q_{i,j} z_{i,j} & \\
s.t.\ \ z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} + \delta_{i,j}(h_p - h_1) \quad \forall i,j \in [n] \\
z_{i,j} &\leq -\Delta h_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})(h_p - h_1) \quad \forall i,j \in [n] \\
z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i,j \in [n] \\
-z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i,j \in [n]
\end{aligned}$$

http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/absolute.htm

Constraints

1. Jede Prüfung wird auf genau einem Zeitinterval eingeplant

$$\sum_{l=1}^{p} y_{i,l} = 1 \quad \forall i \in [n]$$

2. Alle Studierenden bekommen einen Platz

$$\sum_{k=1}^{r} c_k x_{i,k} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$

3. Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} y_{i,l} \leq t_{k,l} \quad \forall k \in [r], \forall l \in [p]$$

4. Konfliktvermeidung

$$\sum_{i=1, j>i}^{n} q_{i,j} y_{i,l} y_{j,l} = 0 \quad \forall l \in [p]$$

Linear Constraints

1. Jede Prüfung wird auf genau einem Zeitinterval eingeplant
$$\sum_{l=1}^{p} y_{i,l} = 1 \quad \forall i \in [n]$$
2. Alle Studierenden bekommen einen Platz
$$\sum_{k=1}^{r} c_k x_{i,k} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$
3. Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt
$$x_{i,k} + y_{i,l} + x_{j,k} + y_{j,l} \leq 3, \quad \forall i,j \in [n], j > i \forall k \forall l$$
$$x_{i,k} + y_{i,l} \leq 1, \quad \forall i \in [n] \forall k,l \quad \text{such that } t_{k,l} = 0$$
4. Konfliktvermeidung
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_{i,j} y_{j,l} \leq (1 - y_{i,l}) \sum_{\nu=1}^{n} q_{i,\nu} \quad \forall l \in [p] \forall i \in [n]$$

Variablen

$$x_{i,k,l} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ zum Zeitpunkt } l \text{ in Raum } k \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_{i,l} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ im Zeitinterval } l \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dimensionen:

$$n : AnzahlderPr\,fungen$$
$$r : AnzahlderR\,ume$$
$$p : AnzahlderZeitintervalle$$

Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{p} s_i x_{i,k,l} - \gamma \sum_{i=1,j>i}^{n} q_{i,j} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l (y_{i,l} - y_{j,l}) \right|$$

Resolving the absolute value: Define $\Delta h_{i,j} := \sum_{l=1}^{p} h_l(y_{i,l} - y_{j,l})$.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} s_i x_{i,k} - \gamma \sum_{i=1,j>i}^{n} q_{i,j} z_{i,j} \\
s.t.\ \ z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} + \delta_{i,j}(h_p - h_1) \quad \forall i,j \in [n] \\
z_{i,j} &\leq -\Delta h_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})(h_p - h_1) \quad \forall i,j \in [n] \\
z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i,j \in [n] \\
-z_{i,j} &\leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i,j \in [n]
\end{aligned}$$

http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/absolute.htm

Constraints

1. Verknüpfung der Variablen

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i,k,l} \leq y_{i,l} \cdot r \quad \forall i \in [n] \forall l \in [p]$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i,k,l} \geq y_{i,l} \quad \forall i \in [n] \forall l \in [p]$$

2. Jede Prüfung wird auf genau einem Zeitinterval eingeplant

$$\sum_{l=1}^{p} y_{i,l} = 1 \quad \forall i \in [n]$$

3. Konfliktvermeidung

$$\sum_{j=1, j>i}^{n} q_{i,j} y_{j,l} \leq (1 - y_{i,l}) \sum_{\nu=1}^{n} q_{i,\nu} \quad \forall i \in [n], \forall l \in [p]$$

5. Alle Studierenden bekommen einen Platz

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} c_k x_{i,k,l} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$

6. Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k,l} \leq t_{k,l} \quad \forall k \in [r], \forall l \in [p]$$

7. Eine Prüfung in mehreren Räumen findet gleichzeitig statt

$$\sum_{m=1, m \neq l}^{p} \sum_{k=1}^{r} x_{i,k,m} \leq r(1 - y_{i,l}) \quad \forall i \in [n] \forall l \in [p]$$

Modellvergleich

Modell	Anzahl Variablen	Anzahl Nebenbedingungen
2D (mit abs)	$nr + np$	$2n + rp + p$
2D linear (mit abs)	$nr + np + 2n^2$	$2n + \frac{1}{2} nrp(n-1) + nT + np + 4n^2$
2D linear (ohne abs)	$nr + np$	$2n + \frac{1}{2} nrp(n-1) + nT + np$
3D (mit abs)	$nrp + 2rn^2$	$2n + rp + nrp + nrp + 4rn^2$
3D (ohne abs)	nrp	$2n + rp + nrp + nrp$

Modellvergleich - In Zahlen

Problemdimensionen:

- $n \approx 1200$
- $r \approx 70$
- $p \approx 70$
- $T \approx 400$

Modell	Anzahl Variablen	Anzahl Nebenbedingungen
2D (mit abs)	$0.17 \cdot 10^6$	7370
2D linear (mit abs)	$3 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^9$
2D linear (ohne abs)	$0.17 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^9$
3D (mit abs)	$207 \cdot 10^6$	$415 \cdot 10^6$
3D (ohne abs)	$6 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$