

# Examination Scheduling

Alexander Eckl, Maximilian Fiedler, Mickael Grima, Roland  
Halbig

Technische Universität München

March 21, 2016

# Konstanten

$s_i$  := Anzahl der Studenten, die für Prüfung  $i$  angemeldet sind

$c_k$  := Anzahl der nutzbaren Sitzplätze in Raum  $k$

$Q$  := Kollisionsmatrix

$q_{i,j} := \begin{cases} 0, & \text{falls Prüfung } i \text{ und } j \text{ gleichzeitig stattfinden können} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

$T$  := Sperrmatrix

$t_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls Raum } k \text{ zum Zeitintervall } l \text{ geöffnet ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$h_l$  := Anzahl der Stunden von Periode  $l$  nach Beginn des Prüfungszeitraums

# Variablen

$$x_{i,k} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ in Raum } k \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_{i,l} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ im Zeitintervall } l \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dimensionen:

*n : Anzahl der Prüfungen*

*r : Anzahl der Räume*

*p : Anzahl der Zeitintervalle*

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r s_i x_{i,k} - \gamma \sum_{i=1, j>i}^n q_{i,j} \left| \sum_{l=1}^p h_l (y_{i,l} - y_{j,l}) \right|$$

Resolving the absolute value: Define  $\Delta h_{i,j} := \sum_{l=1}^p h_l (y_{i,l} - y_{j,l})$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r s_i x_{i,k} - \gamma \sum_{i=1, j>i}^n q_{i,j} z_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & z_{i,j} \leq \Delta h_{i,j} + \delta_{i,j} (h_p - h_1) \quad \forall i, j \in [n] \\ & z_{i,j} \leq -\Delta h_{i,j} + (1 - \delta_{i,j}) (h_p - h_1) \quad \forall i, j \in [n] \\ & z_{i,j} \leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i, j \in [n] \\ & -z_{i,j} \leq \Delta h_{i,j} \quad \forall i, j \in [n] \end{aligned}$$

# Constraints

- 1 Jede Prüfung wird auf genau einem Zeitintervall eingeplant

$$\sum_{l=1}^p y_{i,l} = 1 \quad \forall i \in [n]$$

- 2 Alle Studierenden bekommen einen Platz

$$\sum_{k=1}^r c_k x_{i,k} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$

- 3 Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt

$$\sum_{i=1}^n x_{i,k} y_{i,l} \leq t_{k,l} \quad \forall k \in [r], \forall l \in [p]$$

- 4 Konfliktvermeidung

$$\sum_{i=1, j>i}^n q_{i,j} y_{i,l} y_{j,l} = 0 \quad \forall l \in [p]$$

# Linear Constraints

- 1 Jede Prüfung wird auf genau einem Zeitintervall eingeplant

$$\sum_{l=1}^p y_{i,l} = 1 \quad \forall i \in [n]$$

- 2 Alle Studierenden bekommen einen Platz

$$\sum_{k=1}^r c_k x_{i,k} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$

- 3 Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt

$$x_{i,k} + y_{i,l} + x_{j,k} + y_{j,l} \leq 3, \quad \forall i, j \in [n], j > i \forall k \forall l$$

$$x_{i,k} + y_{i,l} \leq 1, \quad \forall i \in [n] \forall k, l \text{ such that } t_{k,l} = 0$$

- 4 Konfliktvermeidung

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n q_{i,j} y_{j,l} \leq (1 - y_{i,l}) \sum_{\nu=1}^n q_{i,\nu} \quad \forall l \in [p] \forall i \in [n]$$

# Variablen

$$x_{i,k,l} := \begin{cases} 1, & \text{wenn Prüfung } i \text{ zum Zeitpunkt } l \text{ in Raum } k \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dimensionen:

*n : Anzahl der Prüfungen*

*r : Anzahl der Räume*

*p : Anzahl der Zeitintervalle*

# Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^p s_i x_{i,k,l} - \gamma \sum_{i=1, j>i}^n q_{i,j} \sum_{k=1}^r \left| \sum_{l=1}^p h_l (x_{i,k,l} - x_{j,k,l}) \right|$$

Resolving the absolute value: Define

$$\Delta_{i,j,k} := \sum_{l=1}^p h_l (x_{i,k,l} - x_{j,k,l}).$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^p s_i x_{i,k,l} - \gamma \sum_{i=1, j>i}^n q_{i,j} \sum_{k=1}^r z_{i,j,k}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } z_{i,j,k} &\leq \Delta h_{i,j,k} + \delta_{i,j,k} (h_p - h_1) \quad \forall i, j \in [n] \forall k \in [r] \\ z_{i,j,k} &\leq -\Delta h_{i,j,k} + (1 - \delta_{i,j,k}) (h_p - h_1) \quad \forall i, j \in [n] \forall k \in [r] \\ z_{i,j,k} &\leq \Delta h_{i,j,k} \quad \forall i, j \in [n] \forall k \in [r] \\ -z_{i,j,k} &\leq \Delta h_{i,j,k} \quad \forall i, j \in [n] \forall k \in [r] \end{aligned}$$

<http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/absolute.htm>



# Constraints

- 1 Jede Prüfung wird auf einem Zeitintervall eingeplant

$$\sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^r x_{i,k,l} \geq 1 \quad \forall i \in [n]$$

- 2 Alle Studierenden bekommen einen Platz

$$\sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^r c_k x_{i,k,l} \geq s_i \quad \forall i \in [n]$$

- 3 Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt

$$\sum_{i=1}^n x_{i,k,l} \leq t_{k,l} \quad \forall k \in [r], \forall l \in [p]$$

- 4 Eine Prüfung in mehreren Räumen findet gleichzeitig statt

$$\sum_{m=1, m \neq l}^p \sum_{\mu=1, \mu \neq k}^r x_{i,\mu,m} \leq (1 - x_{i,k,l})M \quad \forall k \in [r], \forall l \in [p], \forall i \in [n]$$

- 4 Jedem Raum wird je Zeit maximal eine Prüfung zugeteilt  
(2.Version)

$$\sum_{k=1}^r x_{i,k,l} \leq r \eta_{i,l} \quad \forall i \in [n] \forall l \in [p]$$
$$\sum_{m=1, m \neq l}^p \sum_{k=1}^r x_{i,k,m} \leq r(1 - \eta_{i,l}) \quad \forall i \in [n] \forall l \in [p]$$

- 5 Konfliktvermeidung

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n q_{i,j} x_{j,k,l} \leq (1 - x_{i,k,l}) \sum_{\nu=1}^n q_{i,\nu} \quad \forall i \in [n], \forall k \in [r], \forall l \in [p]$$

# Modellvergleich

Modell	Anzahl Variablen	Anzahl Nebenbedingungen
2D (mit abs)	$nr + np$	$2n + rp + p$
2D linear (mit abs)	$nr + np + 2n^2$	$2n + \frac{1}{2}nrp(n-1) + nT + np + 4n^2$
2D linear (ohne abs)	$nr + np$	$2n + \frac{1}{2}nrp(n-1) + nT + np$
3D (mit abs)	$nrp + 2rn^2$	$2n + rp + nrp + nrp + 4rn^2$
3D (ohne abs)	$nrp$	$2n + rp + nrp + nrp$

# Modellvergleich - In Zahlen

Problemdimensionen:

- $n \approx 1200$
- $r \approx 70$
- $p \approx 70$
- $T \approx 400$

Modell	Anzahl Variablen	Anzahl Nebenbedingungen
2D (mit abs)	$0.17 \cdot 10^6$	7370
2D linear (mit abs)	$3 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^9$
2D linear (ohne abs)	$0.17 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^9$
3D (mit abs)	$207 \cdot 10^6$	$415 \cdot 10^6$
3D (ohne abs)	$6 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$