TP dynamique non-linéaire: vibrations d'une poutre en grande amplitude

Aurélien GROLET

May 15, 2022

Contents

1 Problème et modélisation

On considère les vibrations transverses d'une structure pouvant être modélisée par une poutre bi-appuyée. Lorsque la poutre vibre avec de grandes amplitude, la prise en compte des non-linéarités géométriques est nécessaire et le modèle résultant est non linéaire.

Si on s'intéresse à un mode de vibration particulier, on peut rechercher une approximation de la solution pour les amplitudes modérée en supposant que le déplacement transverse reste proportionnel à la forme du mode considéré. Dans se cas l'équation du mouvement se réduit à une équation différentielle ordinaire du type:

$$\boxed{m\ddot{q} + kq + \Gamma q^3 = F(t)} \tag{1}$$

où $q(t)$ représente l'amplitude du mode considéré.

On reconnait ici l'équation de Duffing, que l'on réécrira, apres introduction d'un amotissement visqueux caractérisé par le coefficient μ, sous la forme adimensionée suivante :

$$\boxed{\ddot{q} + \mu\dot{q} + q + \gamma q^3 = f(t)} \tag{2}$$

Elle correspond à l'équation d'un oscillateur dont la raideur est variables avec la position q. Dans ce TP, On se propose d'étudier numériquement l'équation de Duffing dans quelques cas particuliers.

2 Vibrations libres

On recherche ici la fréquence des oscillations lorsqu'on écarte la poutre de sa position d'équilibre, on supposera la condition initiale à vitesse nulle: $q_0 = a$, $\dot{q}_0 = 0$. De plus on se placera dans le cas non amorti ($\mu = 0$).

On recherche donc la fréquence des solutions périodiques de l'équation suivante:

$$\boxed{\ddot{q} + q + \gamma q^3 = 0} \tag{3}$$

Dans la suite on considèrera la valeur numérique $\gamma = 1$ (système raidissant).

2.1 Etude numérique

On se propose ici de calculer la période des oscillations à partir d'intégrations temporelles

1. Quelle est la pulsations des oscillations du système linéarisé autour du point d'équilibre $q = 0$? Est ce que cette pulsation dépend de l'amplitude du mouvement ?

2. En vous appuyant sur les programmes fournis, définir l'équation du mouvement non-linéaire (non forcée et non amortie) et l'intégrer à partir de la condition initiale $(q_0,\ \dot{q}_0) = (1,\ 0)$ et pour un intervalle de temps allant de 0 à $T = 50$ s. Tracer la solution dans le domaine temporel et dans l'espace des phases.

3. Définir une fonction qui permet de calculer la période à partir du signal temporel précédent. On pourra par exemple rechercher les temps correspondant à deux zéros successifs pour calculer la demi période. En déduire la pulsation des oscillations de la simulation précédente.

4. En combinant les programmes des questions précédentes, définir une boucle qui permet de calculer la pulsation des oscillations pour différentes valeurs de la position initiale $q_0 = a \in [0, 5]$. Tracer l'évolution de la pulsation en fonction de l'amplitude initiale $q_0 = a$. Cette courbe s'appelle la "backbone curve". Comparer avec la pulsation du système linéarisé.

2.2 Etude par la méthode de l'équilibrage harmonique

On se propose ici de calculer une approximation de la pulsation à partir d'une étude par HBM, en ne retenant qu'une seule harmonique. L'approximation de la solution est donc recherchée sous la forme suivante:

$$q(t) = a\cos\omega t \tag{4}$$

1. En remplaçant l'expression de la solution dans l'équation du mouvement, puis en projetant le résidu sur la fonction $t \mapsto \cos\omega t$, en déduire une expression de la pulsation ω en fonction de l'amplitude a. On donne les indications suivantes:

$$(\cos\omega t)^3 = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t \tag{5}$$

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t) = \delta_{mn} \tag{6}$$

   avec m et n des entiers non tous nuls et δ_{mn} le delta de Kronecker.

2. Tracer l'évolution de la pulsation en fonction de l'amplitude, puis comparer aux résultats de la section précédente.

2.3 Solution exacte et comparaison des méthodes

Dans le cas particulier de l'équation de Duffing libre et non amortie, il est possible de définir la solution de manière exact en utilisant les fonctions elliptiques de Jacobi. La période des oscillations libres et non amorties s'obtient de manière exacte en utilisant l'intégrale elliptique complète de première espèce $K(m)$ selon la relation suivante:

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1+\gamma a^2}} \tag{7}$$

avec le module m défini par:

$$m = \sqrt{\frac{\gamma a^2}{2(1+a^2)}} \tag{8}$$

1. En utilisant la fonction `scipy.special.ellipk`, définir une fonction qui calcul la période, puis la pulsation des oscillations pour une amplitude initiale donnée.

2. Tracer l'évolution de la pulsation en fonction de l'amplitude initiale

3. Comparer les solutions obtenues pour la pulsation en fonction de l'amplitude initiale (intégration numérique, HBM et solution exacte). L'approximation par HBM à une seule harmonique est elle justifiée ? qu'elle est sont domaine de validité ?

3 Vibrations forcées

On s'intéresse maintenant aux vibrations forcées de la poutre lorsqu'elle est soumise à une excitation périodique. L'équation du mouvement prend alors la forme suivante:

$$\boxed{\ddot{q} + \mu\dot{q} + q + \gamma q^3 = f \sin \Omega t} \tag{9}$$

avec f l'amplitude de la force et Ω sa pulsation. Dans la suite de cette partie on prendra les valeurs numériques $\mu = 0.2$, $\gamma = 1$, $f = 0.1$.

3.1 Solution numérique

1. En vous appuyant sur les programmes fournis, définir l'équation du mouvement non linéaire, amortie et forcée, et l'intégrer à partir de la condition initiale $(q_0,\ \dot{q}_0) = (0,\ 0)$ pour un intervalle de temps allant de 0 à T permettant d'obtenir le régime établi (environ 100 périodes: $T = 100\frac{2\pi}{\Omega}$).

2. Extraire la solution en régime établi, tracer le déplacement en fonction du temps, puis la section de Poincaré. La solution est elle périodique ?

3. Définir une fonction qui permet de récupérer l'amplitude des oscillations en régime établi à partir du signal temporel précédent.

4. En combinant les programmes des questions précédentes, définir une fonction qui réalise une boucle permettant de calculer l'amplitude des oscillations en régime établi pour différentes valeurs de la pulsation d'excitation $\Omega \in [0.35, 2.5]$. Tracer l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation d'excitation Ω. Pour assurer un continué dans le calcul, on utilisera l'état final de la simulation pour la fréquence Ω comme condition initiale de la simulation pour la fréquence suivante $\Omega + \Delta\Omega$.

5. Reprendre la question précédente en balayant l'intervalle de fréquence de manière descendante, i.e. pour $\Omega \in [2.5, 0.35]$. Tracer l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation d'excitation Ω sur le graphique précédent. Qu'observe-t-on ?

3.2 Solution par équilibrage harmonique

On se propose ici de calculer une approximation de la solution forcée à partir d'une étude par HBM en ne retenant qu'une seule harmonique. L'approximation de la solution est donc recherché sous la forme suivante:

$$q(t) = a \sin(\Omega t + \phi) \tag{10}$$

En utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique, on peut montrer que la pulsation Ω et l'amplitude a sont liés par la relation suivante:

$$\Omega^4 + 2\Omega^2(2(\frac{\mu}{2})^2 - \omega_{nl}^2) + \omega_{nl}^4 - \frac{f^2}{a^2} = 0 \tag{11}$$

avec

$$\omega_{nl}^2 = 1 + \frac{3}{4}\gamma a^2 \tag{12}$$

1. Calculer l'expression de Ω en fonction de a (Ω^2 est solution d'une equation du second degré ...)

2. Définir une fonction qui trace la solution a en fonction de Ω. Pour cela on considérera une liste de valeur pour $a \in [0.01, 2.5]$ et on calculera les valeurs de Ω associée a chaque valeur de a.

3. Comparer avec les résultat de la partie précédente utilisant l'intégration temporelle. L'approximation à une seule harmonique est-elle justifiée ? qu'elle est sont domaine de validité ?

3.3 Effet de l'amplitude de forçage

On propose ici d'illustrer l'effet de l'amplitude de forçage sur les solutions.

1. Relancer les programmes précédant pour une amplitude de force $f = 0.3$, puis $f = 1$

2. Dans chaque cas, superposer la solution issue de la balance harmonique

3. Superposer la solution de l'équation libre et non amortie (backbone curve) calculé à la partie 2.1.

- Créer une figure qui résume les calculs précédant en superposant les réponses pour $f = 0.1$, $f = 0.3$ et $f = 1$, ainsi que la "backbone curve".

4 Solutions chaotiques

On se propose ici d'illustrer le comportement chaotique de l'oscillateur de Duffing. On considère maintenant le cas particulier suivant:

$$\gamma = 6, \Omega = 0.5, \ f = 7 \tag{13}$$

1. On considère d'abors le cas $\mu = 0.2$. En vous appuyant sur les programmes de la partie précédente, intégrer l'équation du mouvement amortie et forcée à partir de la condition initiale $(q_0, \ \dot{q}_0) = (0, \ 0)$ et pour un intervalle de temps d'environ 5000 périodes avec 20 pas de temps par période.

2. Tracer l'évolution de la solution en régime établi dans l'espace des phases, puis tracer la section de Poincaré. La solution est elle périodique ?

3. Reprendre les questions précédentes pour $\mu = 0.1$, $\mu = 0.05$ et $\mu = 0.02$