Introduction aux vibrations non-linéaires

Aurélien GROLET

LISPEN – Arts et Métiers (Lille)

- Aurélien GROLET (aurelien.grolet@ensam.eu)
  - 2016: MCF au LISPEN à l'Ensam de Lille (Arts et Métiers)
  - 2014-2016: Post-doc à l'Imperial Colege London / Rolls Royces plc
  - 2013-2014: ATER à Centrale Lyon
  - 2010-2013: Thèse au LTDS à Centrale Lyon (dir. F. Thouverez)

Plan de la présentation

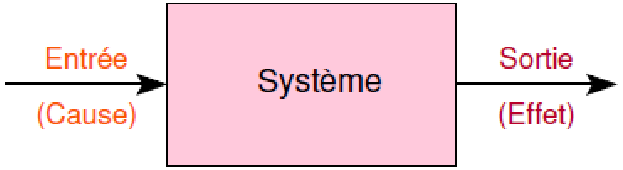
- Applications et types de non-linéarité en mécanique
- Modélisation et approximation linéaire
- Vibrations non-linéaires et calcul des solutions périodiques
- Vibrations non-linéaires: Phénoménologie
- Conclusion

Applications et types de non-linéarité en mécanique

Systèmes Linéaires

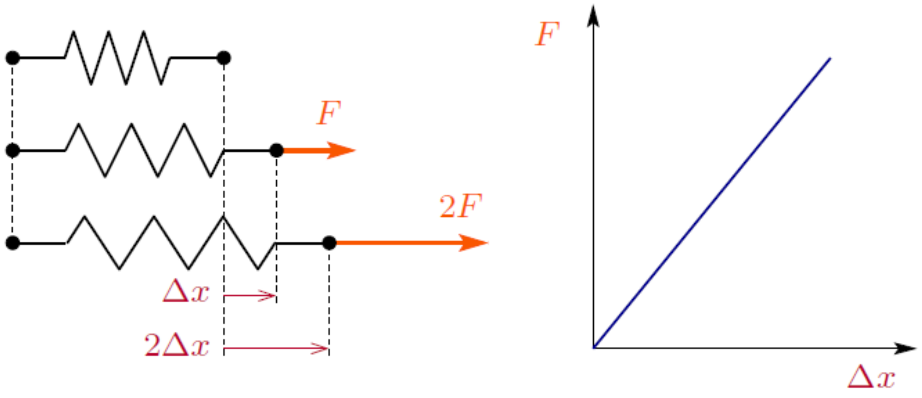
- Définition

"Un phénomène est *linéaire* lorsque un changement de l'intensité de la cause produit un changement de l'effet *dans les mêmes proportions*"



Ex.: ressort linéaire

$$\boxed{F = k\,\Delta x}$$



- Non-linéaire: tous ce qui n'est pas linéaire

Dynamique non-linéaire

- Système caractérisé par un état $y(t) \in R^n$

- Equation d'état sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = g(y, t, \lambda)$$

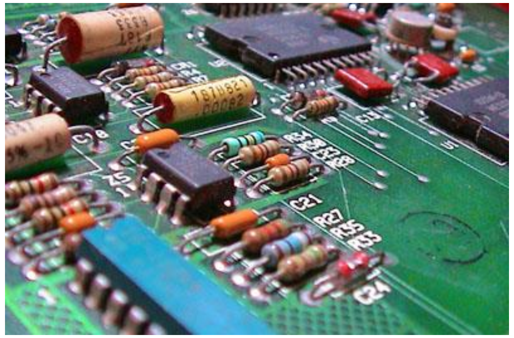
- $g \in R^n$ fonction non linéaire par rapport à y

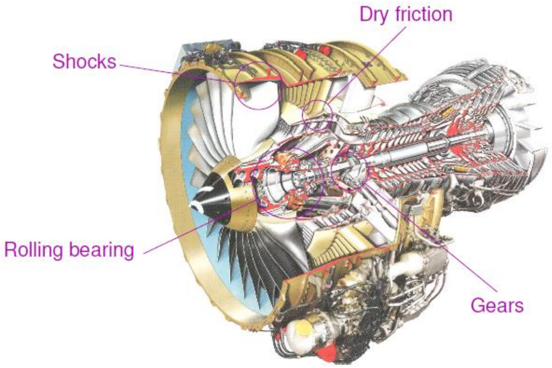
- Théorie mathématique des systèmes dynamiques

Dynamique non-linéaire

- Applications
  - Chimie
  - Electronique
  - Halieutique
  - Economie

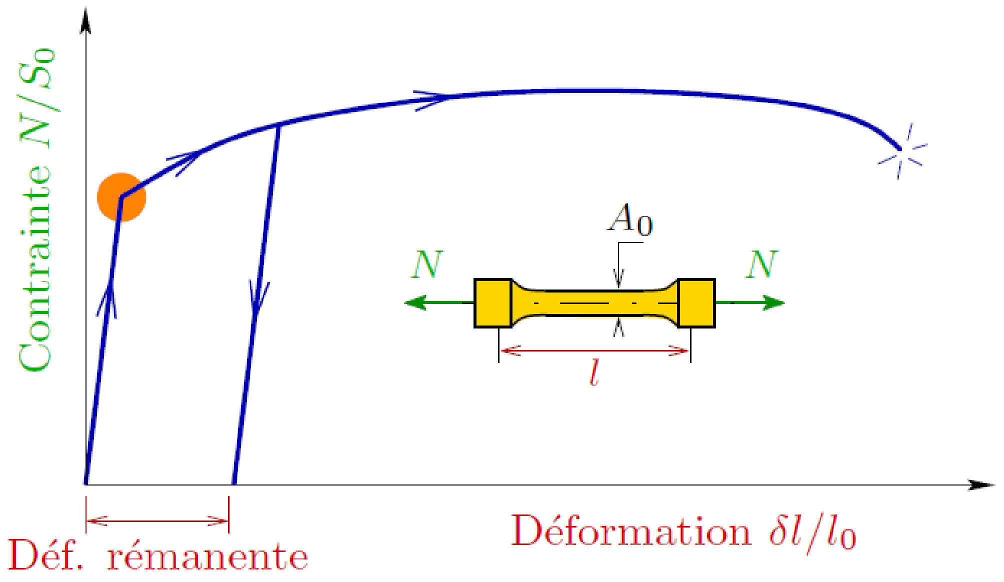
    …
  - Mécanique

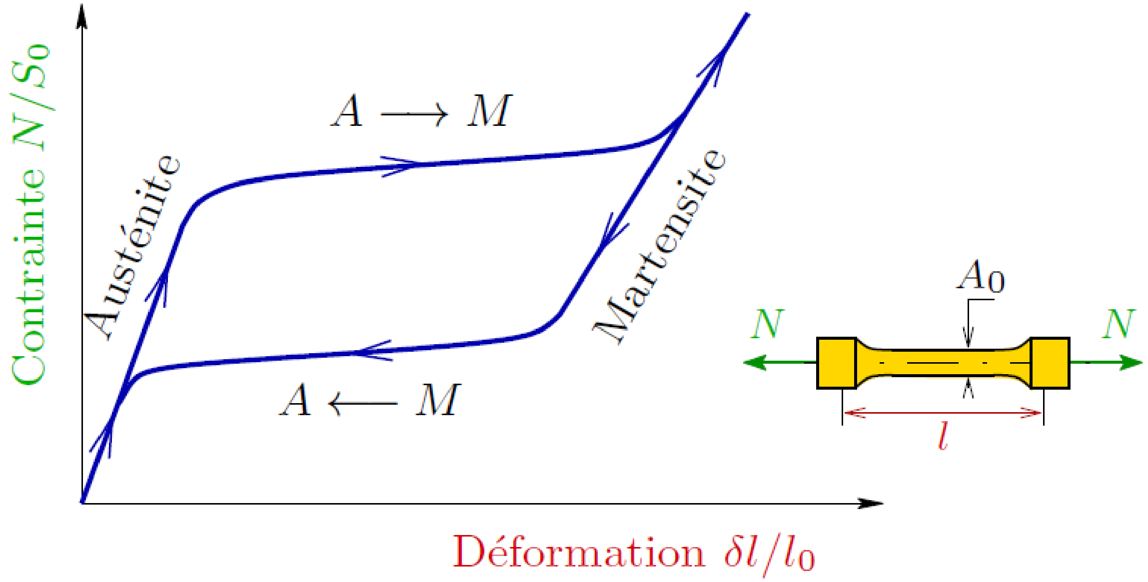




Non-linéarité en mécanique

- Non-linéarité matérielle

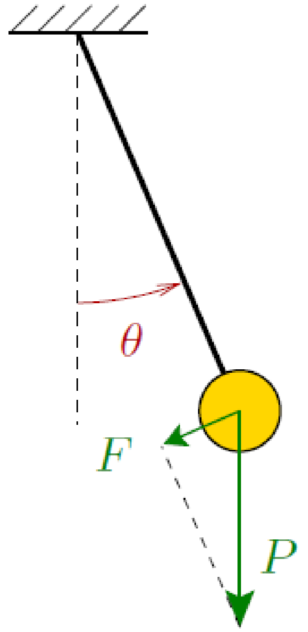


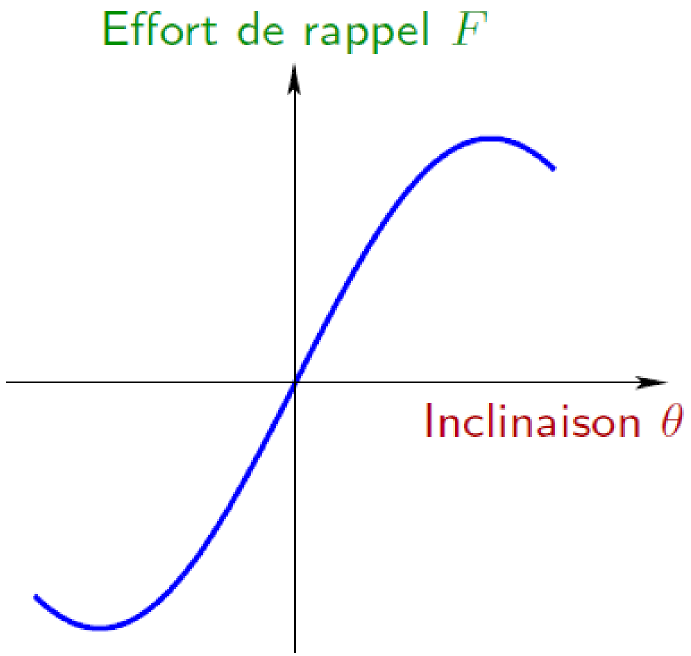


Non-linéarité en mécanique

- Non-linéarité géométrique (grandes rotations / grands déplacements)
  - Systèmes articulés
  - Structures minces

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

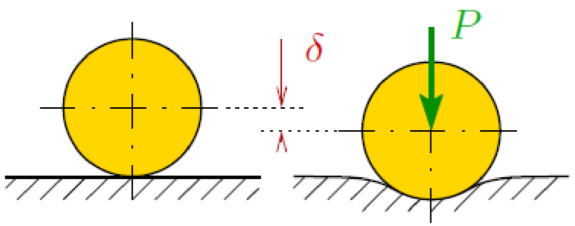


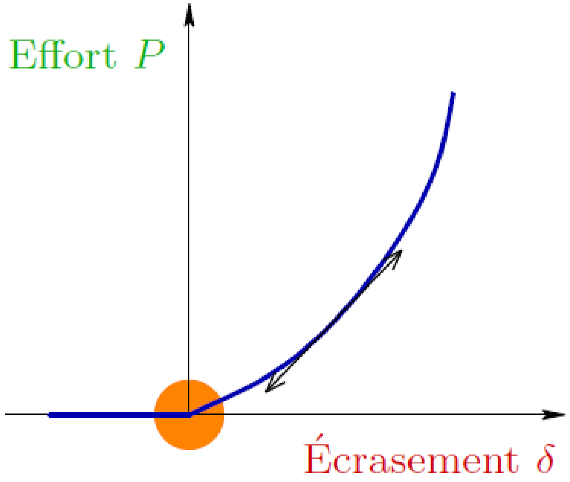


Non-linéarité en mécanique

- Non-linéarité de contact, frottement

$$P = K\delta^{3/2}$$

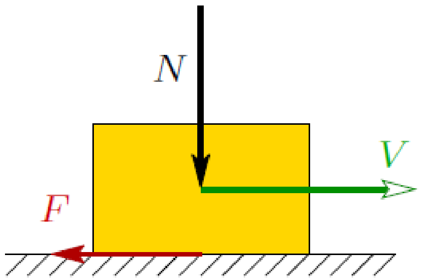


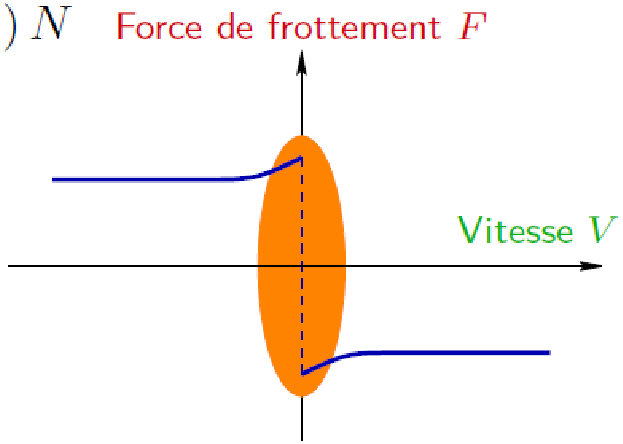


Contact de Hertz

Frottement de coulomb

$$\begin{array}{lcl} V < 0 & \Longrightarrow & F = +\mu(V)\,N \\ V = 0 & \Longrightarrow & |F| < \mu_0\,N \\ V > 0 & \Longrightarrow & F = -\mu(V)\,N \end{array}$$





Modélisation et approximation linéaire

Vibrations non-linéaire: modélisation

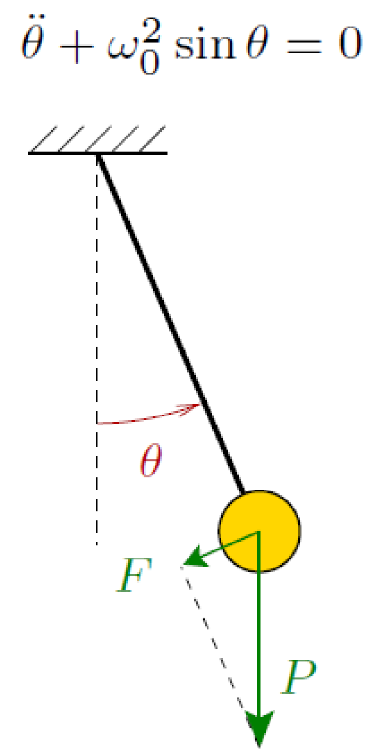
- Equation du mouvement: système différentiel d'ordre 2 en temps:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx + F_{nl}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(t)$$

- Equivalent à un système d'ordre 1 en posant $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ M^{-1}[F(t) - Cy_2 + Ky_1 + F_{nl}(y_1, y_2)] \end{pmatrix} = g(y,t)$$

Equilibre statique



- Système dynamique

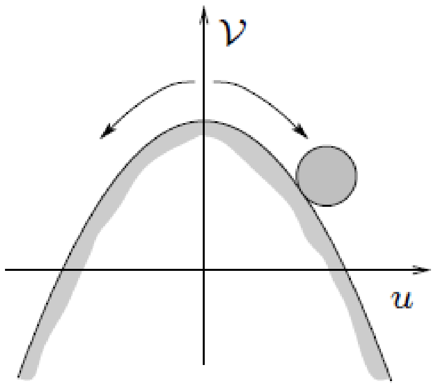
$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx + F_{nl}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(t)$$

- Point d’équilibre statique ($\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = 0$), solution de:

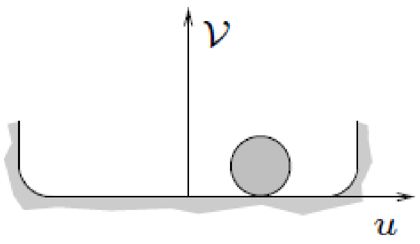
$$Kx_e + F_{nl}(x_e, 0) = 0$$

- Eventuellement plusieurs points d’équilibre x_e à cause de la non-linéarité.
  - Exemple du pendule: $\theta_e = 0\ [\pi]$

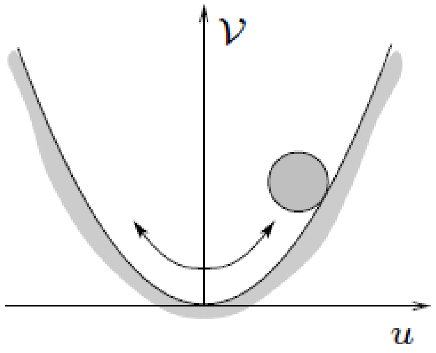
Stabilité des points d’équilibres



Équilibre instable



Équilibre indifférent



Équilibre stable

Exemple du pendule: $\theta_e = 0\ [2\pi]$ stable

Exemple du pendule: $\theta_e = \pi\ [2\pi]$ instable

Linéarisation et petites perturbations

- Linéarisation de la dynamique autour d'un point d'équilibre

$$x(t) = x_e + \ z(t)$$

avec z une petite perturbation

- Développement de Taylor de la non-linéarité)

$$M\ddot{z} + \left(C + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \dot{x}}(x_e) \right)\dot{z} + \left(K + \frac{\partial F_{nl}}{\partial x}(x_e) \right) z = F(t)$$

- Vibration linéaire pour $z(t)$:

$$M\ddot{z} + C_T\dot{z} + K_T z = F(t)$$

Linéarisation et petites perturbations

- Vibration linéaire pour $z(t)$:

$$M\ddot{z} + C_T\dot{z} + K_T z = F(t)$$

- Mode linéaire:

$$M\ddot{z} + K_T z = 0$$

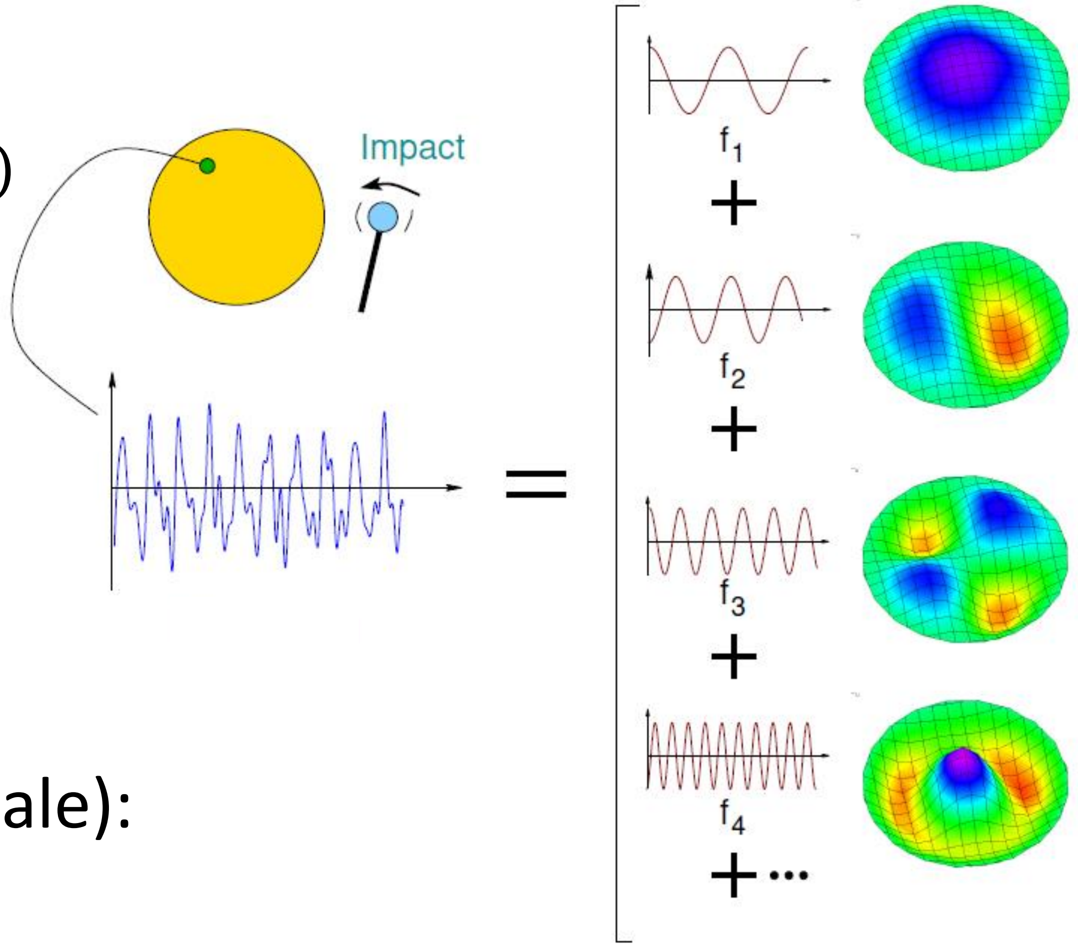
- Equation aux valeurs propres:

$$\left(K - \omega_i^2 M\right)\Phi_\mathrm{i} = 0$$

- Φ_i et ω_i constant

- Théorème de superposition (synthèse modale):

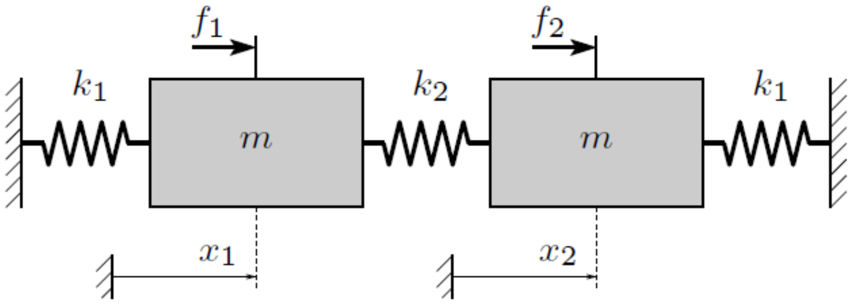
$$z(t) = \sum q_i(t)\,\Phi_i$$

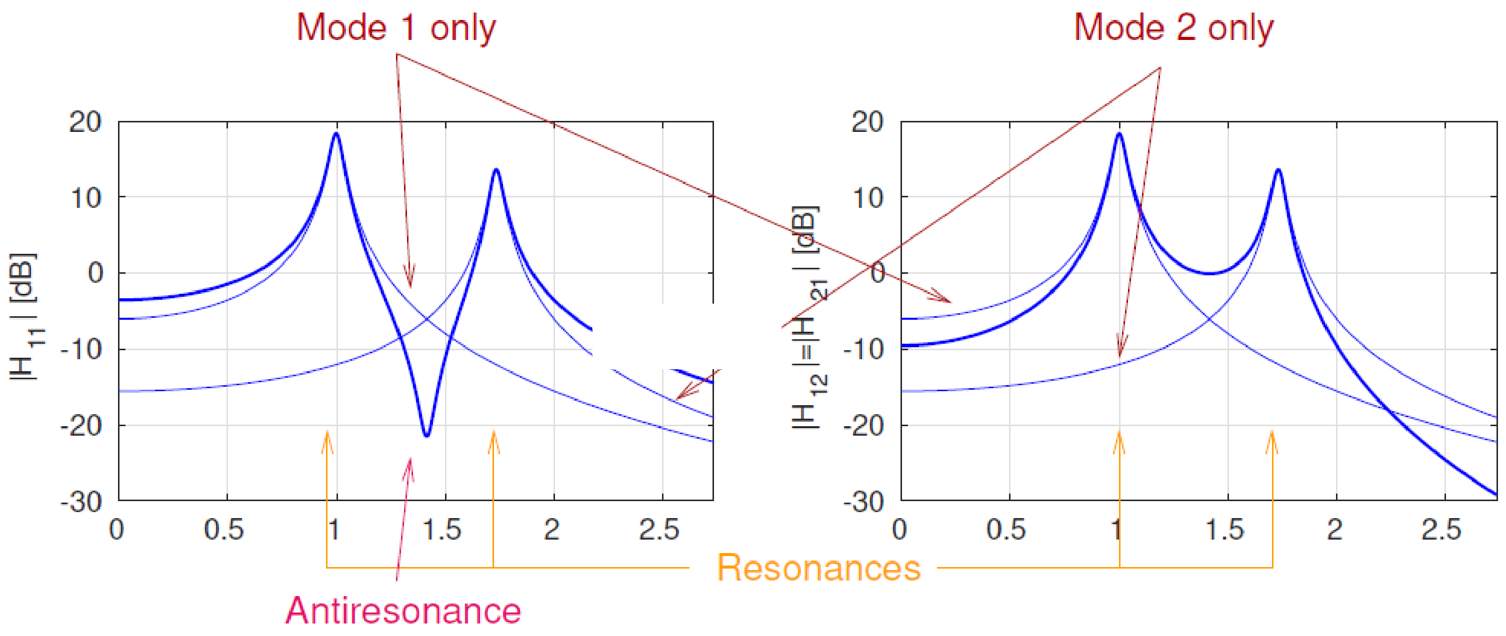


Linéarisation et petites perturbations

- Phénomène de résonance linéaire (force harmonique)

$$M\ddot{z} + C_T\dot{z} + K_T z = F\,cos(\Omega t)$$





Vibrations non-linéaires et calcul des solutions périodiques

Systèmes non-linéaires

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx + F_{nl}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(t)$$

- Pus de principe de superposition !

- Solutions
  - périodiques (stables / instables)
  - quasi périodique
  - chaotique

Calcul des solutions périodiques

- Méthode analytique (perturbation)

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx + \epsilon F_{nl}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(t)$$

$$x(t) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots$$

- Exemple:
  - Méthode des échelles multiples
  - Méthode de Lindstedt
  - …

Calcul des solutions périodiques

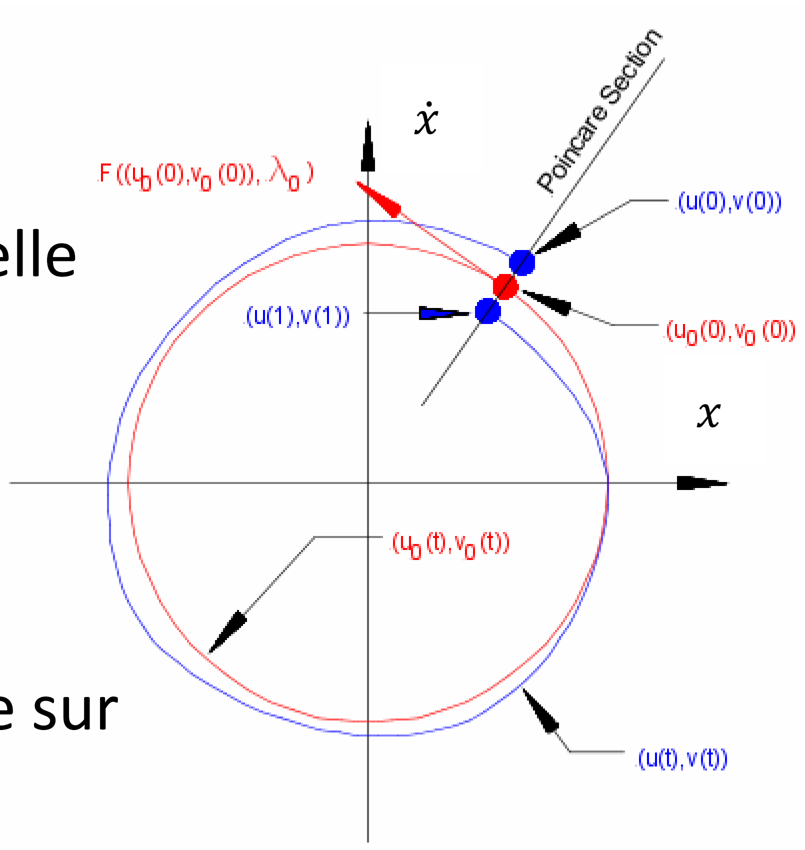
- Méthode numérique basée sur l'intégration temporelle (shooting)

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+Kx+F_{nl}\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=F(t)$$

- On part d'une condition initiale $(x_0,\dot{x_0})$ et on intègre sur une période pour obtenir $(\mathrm{x}(\mathrm{T}),\dot{x}(T))$

- On modifie la condition initiale itérativement de sorte que

$$(\mathrm{x}(\mathrm{T}),\dot{x}(T))=(x_0,\dot{x_0})$$



Méthode de l'équilibrage harmonique

- Méthode semi analytique: équilibrage harmonique

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx + F_{nl}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(t)$$

- On recherche x sous la forme d'une série de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_k a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

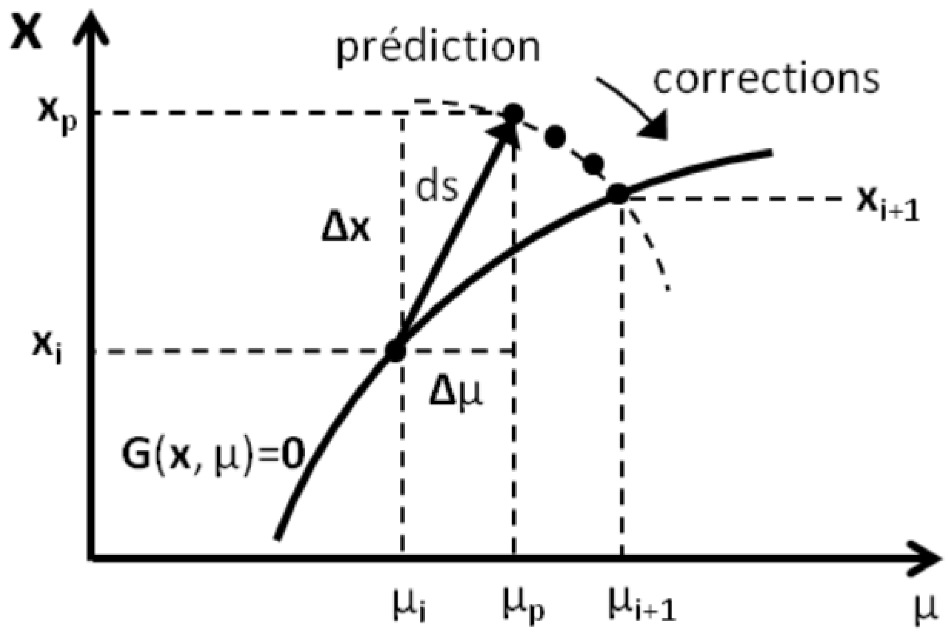
- On « équilibre » les harmoniques pour obtenir un système d'équation algébrique

$$G(a_k, b_k, \omega) = 0$$

- On résout ensuite le système algébrique

Résolution de système algébrique: Méthodes de continuation numérique

- Système algébrique dépendant d'un paramètre:
$$G(X, \mu) = 0$$
- Recherche des solutions sous forme paramétrée $(X(s), \mu(s))$
- Méthode de prédiction/correction
- Méthode asymptotique (MAN)

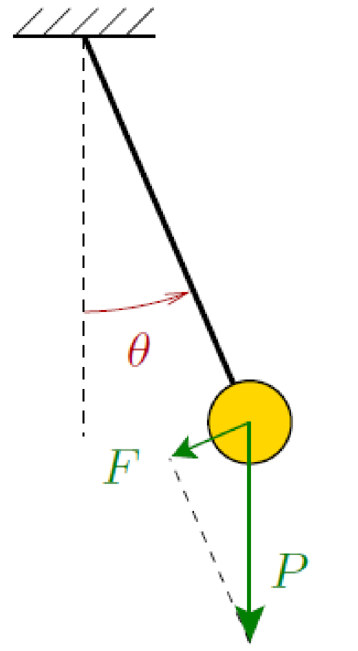


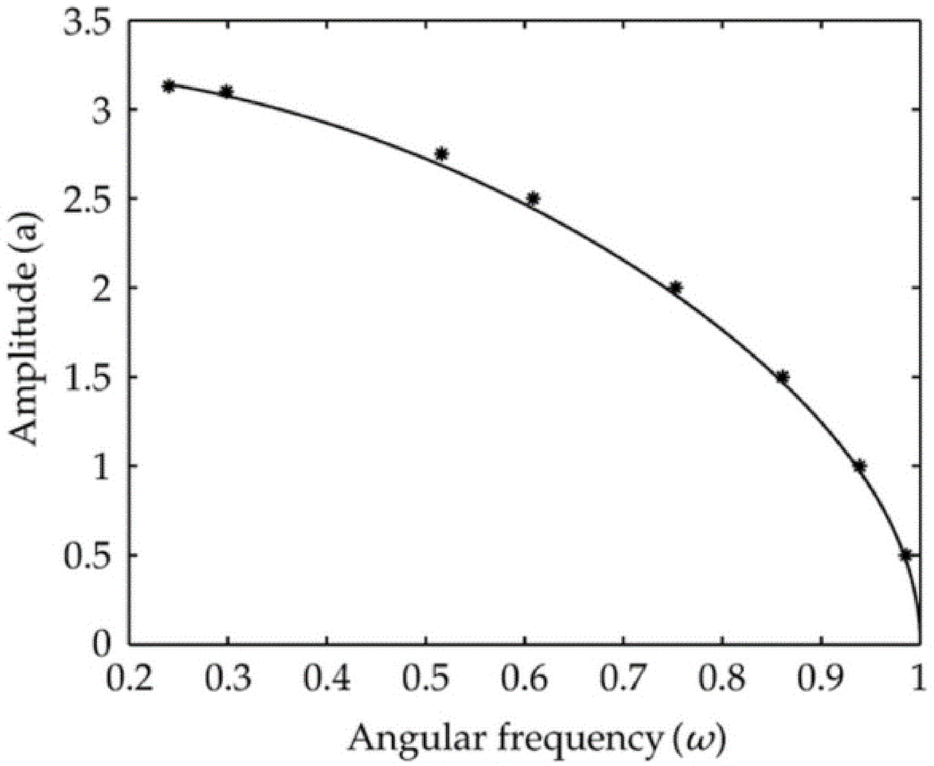
Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

- Les fréquences naturelles peuvent dépendre de l'amplitude du mouvement (backbone curve)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

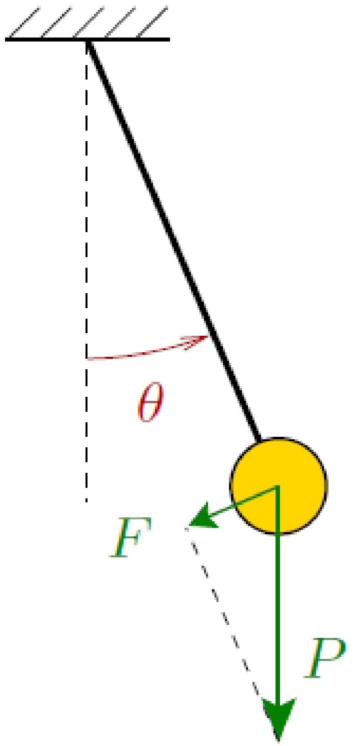


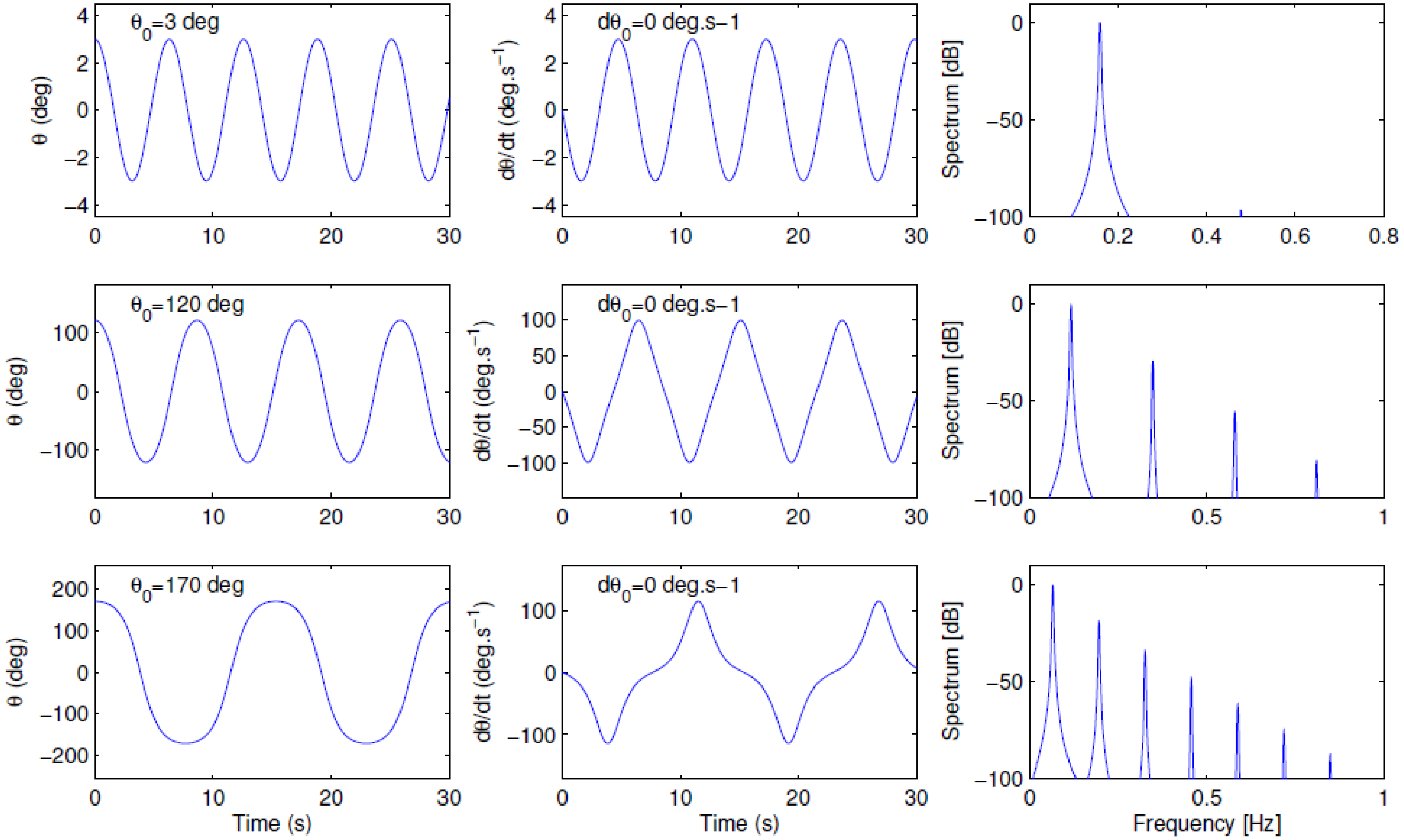


Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

- Les non-linéarités engendre de la distorsion harmonique

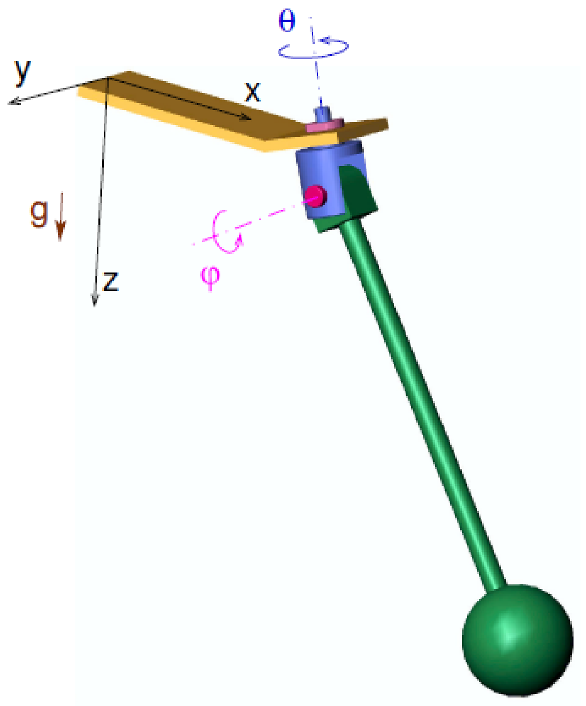
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

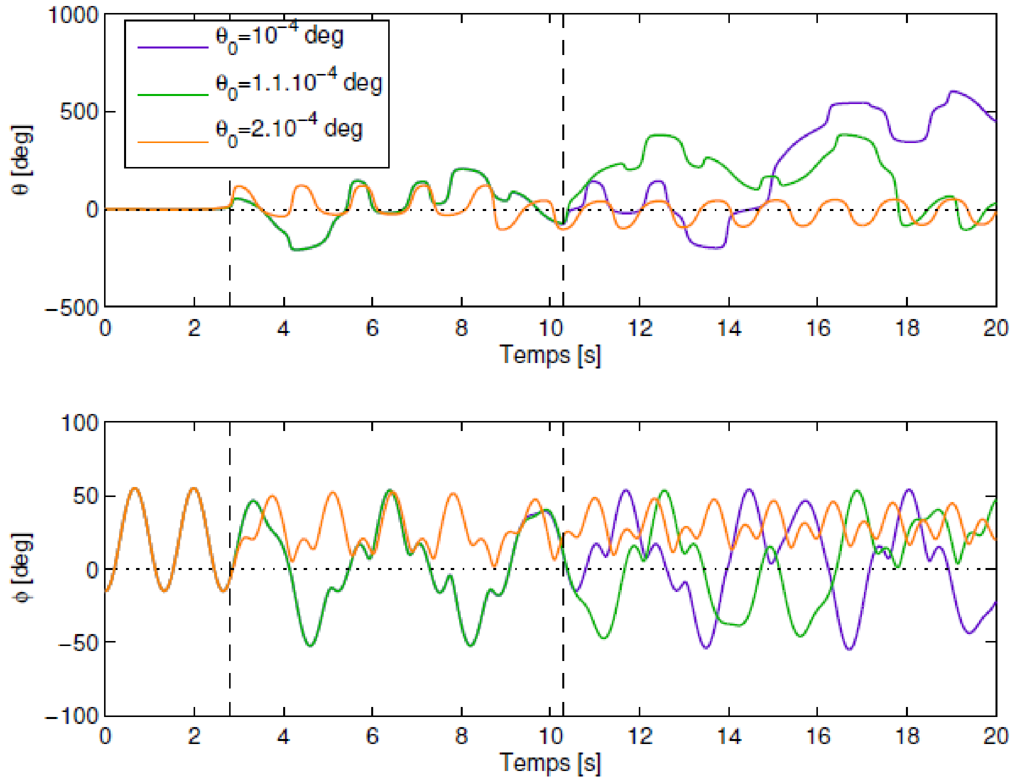




Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

- Sensibilité aux conditions initiales et solution chaotique





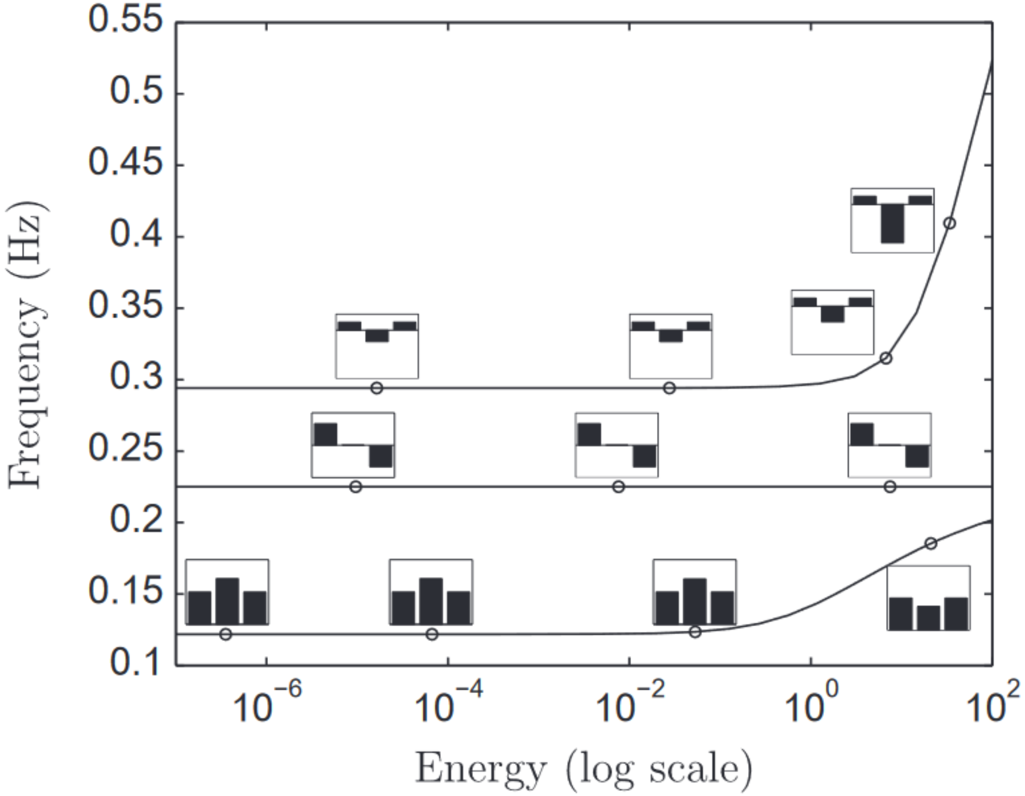
Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

- Notion de mode non linéaire (solution de l'équation libre sans amortissement)
- La forme des modes de vibration peut dépendre de l'amplitude de vibration

$$\ddot{x}_1 + (2x_1 - x_2) = 0$$

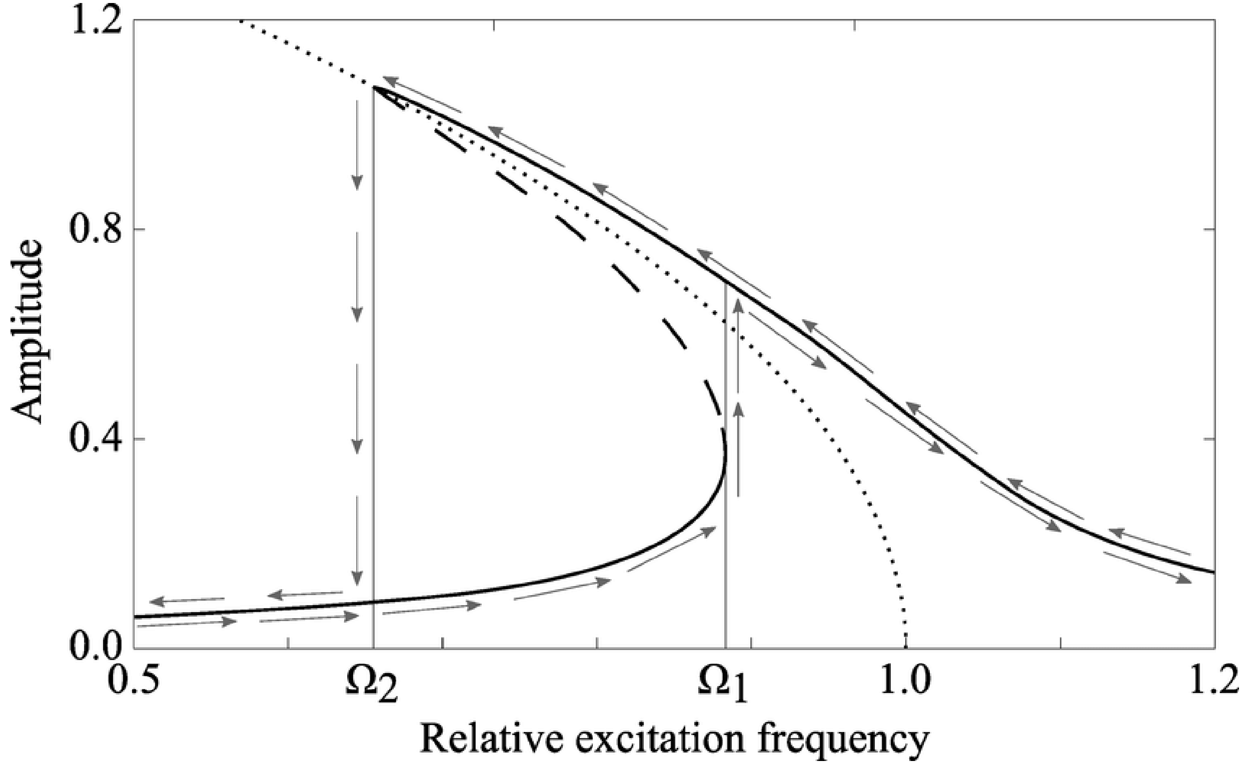
$$\ddot{x}_2 + (2x_2 - x_1 - x_3) + 0.5x_2^3 = 0$$

$$\ddot{x}_3 + (2x_3 - x_2) = 0$$



Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

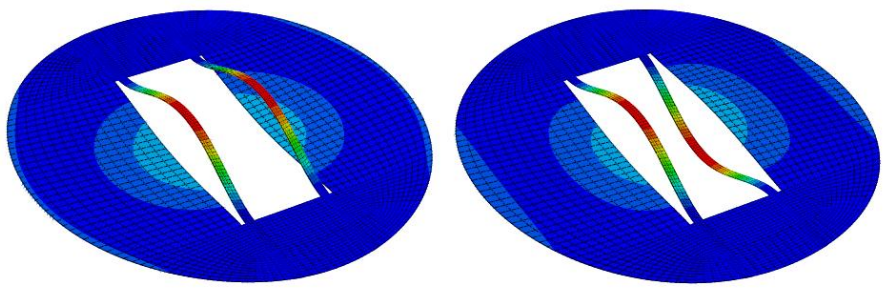
- Les résonances non-linéaires s'organisent autour des « backbones curves »
- Phénomènes de saut

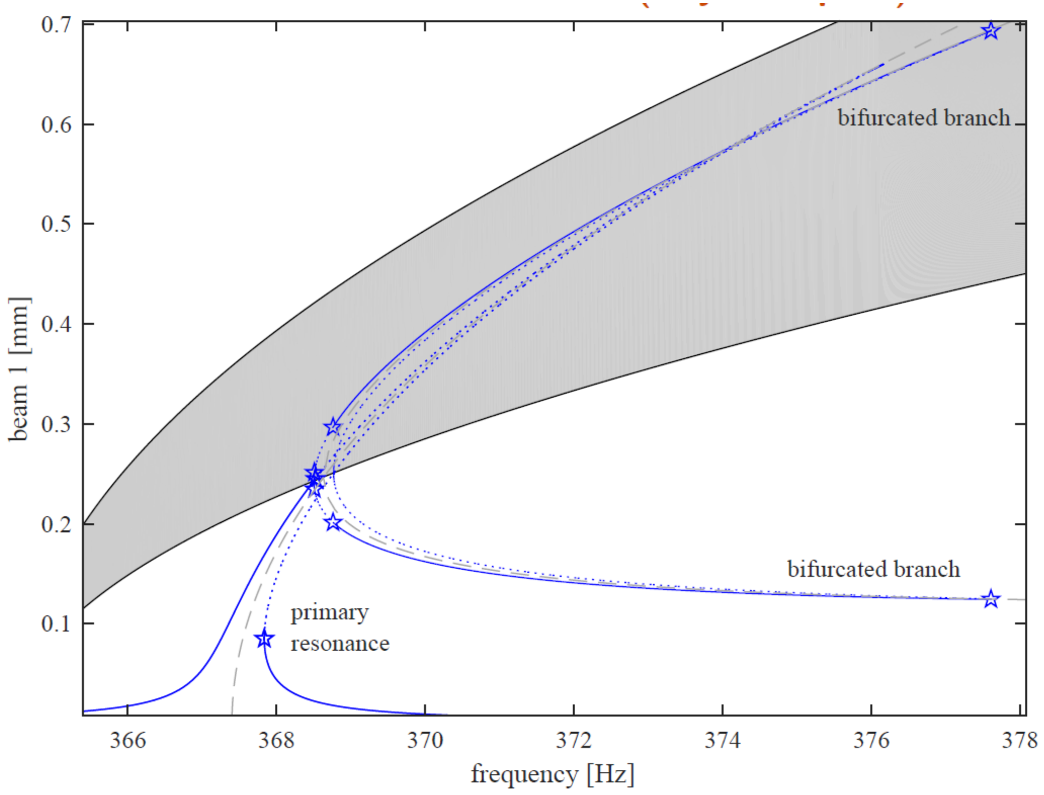


Vibrations non-linéaires: Phénoménologie

- Les modes de vibrations peuvent se coupler au travers de la non-linéarité pour donner lieu à des comportements complexes
  - Ex: bifurcation vers un état de vibration localisé

- Two modes of interest
  - in phase mode (first bending) $f_1 \approx 363$ Hz
  - out of phase mode (first bending) $f_2 \approx 367$ Hz





Conclusion

- Non-linéaire: tous ce qui n’est pas linéaire
- Système linéaire: approximation au premier ordre pour de faible amplitude
- Les non-linéarités révèlent leur effets lorsque les amplitudes augmentes, grande variété de phénomènes
- Plus de théorème de superposition
- Méthode de résolution spécifique