Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
2 Αυγούστου 2016

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εμβαδά

ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΟ ΧΩΡΙΟ
Πολυγωνικό χωρίο ονομάζεται το σύνολο των σημείων ενός πολυγώνου μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.

- Κάθε πολυγωνικό χωρίο παόρνει το όνομά του από το όνομα του αντίστοιχου πολυγώνου : τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό και γενικά ν-γωνικό χωρίο.
- Η επιφάνεια που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων με κοινές πλευρές χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία ονομάζεται **πολυγωνική επιφάνεια**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
Μονάδα μέτρησης επιφάνειας ονομάζεται το μέγεθος ενός πολυγωνικού χωρίου το οποίο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση και σύγκριση όλων των πολυγωνικών χωρίων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΜΒΑΔΟΝ
Εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ονομάζεται ο θετικός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τη μονάδα μέτρησης επιφάνειας ώστε να καλύψουμε το χωρίο αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΧΩΡΙΑ
Ισοδύναμα ή ισεμβαδικά ονομάζονται τα χωρία τα οποία έχουν ίσα εμβαδά.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

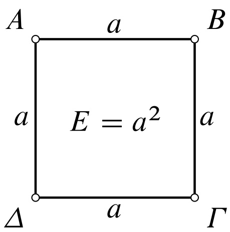
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΩΝ ΧΩΡΙΩΝ
Δεχόμαστε τις εξής προτάσεις που αφορούν τα πολυγωνικά χωρία και τις πολυγωνικές επιφάνειες.

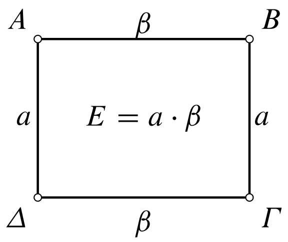
i. Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
ii. Αν ένα πολυγωνικό χωρίο ή πολυγωνική επιφάνεια χωριστεί σε πεπερασμένο πλήθος χωρίων χωρίς εσωτερικά σημεία, το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους χωρίων.
iii. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 ισούται με 1.
iv. Αν ένα χωρίο P βρίσκεται στο εσωτερικό ενός χωρίου Q τότε το εμβαδόν του P είναι μικρότερο από το εμβαδόν του Q.

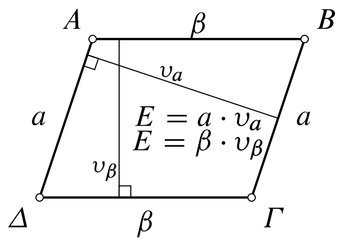
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Τα βασικά πολυγωνικά χωρία που συναντάμε είναι το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, το τρίγωνο, το τραπέζιο και ο ρόμβος. Τα εμβαδά τους είναι τα εξής :

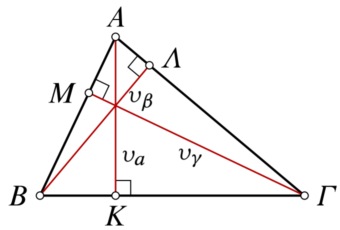
1. **Τετράγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του: $E = a^2$.
2. **Ορθογώνιο**
   Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις a, β ισούται με το γινόμενο του μήκους επί του πλάτους του.
   $$E = a \cdot \beta$$
3. **Παραλληλόγραμμο**
   Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της
   $$E = a \cdot \upsilon_a = \beta \cdot \upsilon_\beta$$



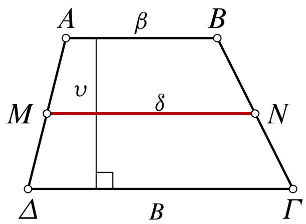




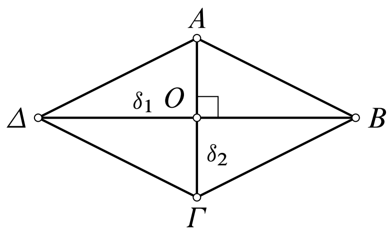
4. **Τρίγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της.
   $$E = \frac{1}{2}a \cdot \upsilon_a = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$



   - Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του.
   - Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a ισούται με $E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
5. **Τραπέζιο**
   Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του αθροίσματος των βάσεων επί το μισό του ύψους του.
   $$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2} = \delta \cdot \upsilon$$
   Ισούται επίσης με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.



6. **Ρόμβος**
   Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.
   $$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$
   Γενικότερα το εμβαδόν οποιουδήποτε τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιους ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΔΙΑΜΕΣΟΣ - ΙΣΕΜΒΑΔΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Σε κάθε τρίγωνο, οποιαδήποτε διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε ισεμβαδικά μέρη.

$$(AMB) = (AM\Gamma)$$