ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ӨЕМА А

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και X_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο X_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(X_o) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle 0} \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{f}''(\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle 0}) = \mathbf{0}$, τότε το $\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle 0}$ είναι θέση σημείου καμπής της \mathbf{f} ».

- α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

- α) η εξίσωση f(x) = 0 δεν έχει λύση στο (α, β) .
- β) η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .
- γ) η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .
- δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x) = 0 στο (α, β) .

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- **Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
 - α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\mathfrak{g}}^{\alpha}f(x)\;dx=G(\alpha)-G(\beta)$.
 - β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $X_1, X_2 \in \Delta$ με $X_1 < X_2$, ώστε $f(X_1) < f(X_2)$.
 - **γ)** Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .
 - δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
 - ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx = 0$, τότε f(x)=0 για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ОЕМА В

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **h**.

Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x) dx$.

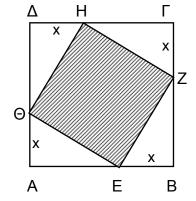
Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:

Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.



Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=2x^2-4x+4, 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

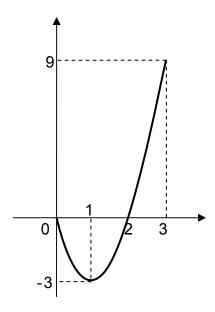
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\mathbf{X}_{o} \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $\mathbf{f}(\mathbf{X}_{o})$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $\mathbf{4e}^{\mathbf{x}_{o}} + \mathbf{1}$ cm².

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση \mathbf{f} , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

• Η γραφική παράσταση της \mathbf{f}' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- f(0) = 2, f(1) = 0
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της **f** και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα [0,3]
- Δ1. Να αποδείξετε ότι f(3)=2, f(2)=-2 και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\mathbf{X}_{o} \in \left(2,3\right)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \mathbf{X}_{o}} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ