Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

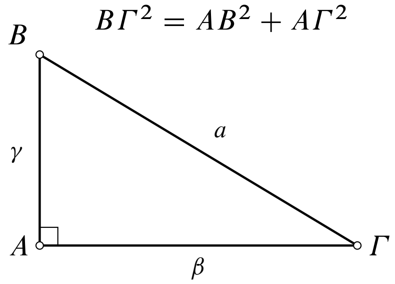
8 Δεκεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μαθηματικά

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Εξισώσεις - Ανισώσεις

1.1 Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου όπως $a, \beta, x, y, \ldots$

Ορισμός 1.2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αριθμητική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών.

Ορισμός 1.3 : ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αλγεβρική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

- **Τιμή** μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει ύστερα από πράξεις εαν αντικατασταθούν οι μεταβλητές της με αριθμούς.
- Κάθε προσθετέος μέσα σε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **όρος** της παράστασης.

Ορισμός 1.4 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ
Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας τους όμοιους όρους της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Αν a, β, γ είναι τρεις οποιοιδήποτε αριθμοί τότε το γινόμενο του ενός με το άθροισμα των άλλων δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

1.2 Εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.5 : ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή. Μια εξίσωση με έναν άγνωστο θα είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου a, β είναι οποιοιδήποτε αριθμοί.

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.

$$1^{\text{ο}} \text{ μέλος} = 2^{\text{ο}} \text{ μέλος}$$

- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εαν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εαν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.

Ορισμός 1.6 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ
Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Σε κάθε ισότητα εαν τοποθετήσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, η σχέση που προκύπτει είναι ξανά ισότητα :

$$a = \beta \Rightarrow \begin{cases} a+\gamma = \beta+\gamma \\ a-\gamma = \beta-\gamma \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} a\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma \\ \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma} \ , \ \gamma \neq 0 \end{matrix}$$

Θεώρημα 1.3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ
Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων $a = \beta$ και $\gamma = \delta$ προκύπτει ισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\text{ων}}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\text{ων}}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κατά μέλη.

$$\text{Αν } a = \beta \ \text{ και } \ \gamma = \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{1. Πρόσθεση κατά μέλη}} & a+\gamma = \beta+\delta \\ \textbf{\textit{2. Αφαίρεση κατά μέλη}} & a-\gamma = \beta-\delta \\ \textbf{\textit{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} & a\cdot\gamma = \beta\cdot\delta \\ \textbf{\textit{4. Διαίρεση κατά μέλη}} & \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \ , \ \gamma\cdot\delta \neq 0 \end{cases}$$

1.3 Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή. Μια ανίσωση μιας μεταβλητής θα έχει τη μορφή

$$ax + \beta > 0 \text{ ή } ax + \beta < 0$$

όπου a, β οποιοιδήποτε αριθμοί.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x), Q(x), R(x)$ είναι αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Εαν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ a - \gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περπτώσεις :

   i. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.

   ii. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

Θεώρημα 1.5 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ
Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων προκύπτει ανισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους με φορά ίδια της αρχικής. Ομοίως πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη δύο ανισότητες προκύπτει ανισότητα με φορά ίδια της αρχικής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο ανισότητες κατά μέλη πρέπει όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \quad \text{και} \quad \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textit{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textit{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \quad , \quad \text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για οποιουσδήποτε αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν την τετραγωνική τους ρίζα.

Ιδιότητα	Συνθήκη
Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad x \geq 0$
Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \quad , \quad x$ πραγματικός
Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad , \quad x, y \geq 0$
Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad , \quad x \geq 0$ και $y > 0$

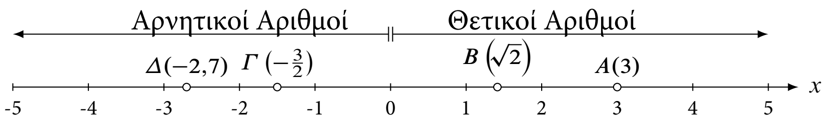
2.2 Άρρητοι - Πραγματικοί αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.2 : ΡΗΤΟΣ - ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Ρητός ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος μπορεί να γραφτεί στη μορφή κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με ακέραιους όρους a, β. Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός ονομάζεται **άρρητος**.

Ορισμός 2.3 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο O στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.



- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y με την οποία **κάθε** τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε **μια μόνο** τιμή της μεταβλητής y.

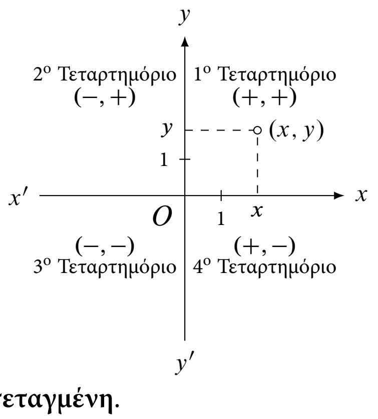
- Κάθε συνάρτηση γράφεται σαν ισότητα η οποία περιέχει και τις δύο μεταβλητές. Η ισότητα αυτή λέγεται **εξίσωση** της συνάρτησης.
- Αν $y = A(x)$ όπου $A(x)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση του x, τότε λέμε ότι η μεταβλητή y γραφεται **ως συνάρτηση** του x.

3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.

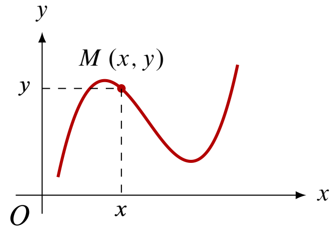


- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.

- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{ο}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

Ορισμός 3.3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση της.

- Το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Η εξίσωση $y = A(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.

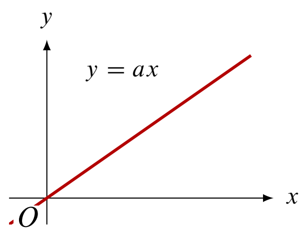


3.3 Η συνάρτηση $y = ax$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.4 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax$
Η συνάρτηση $y = ax$ είναι η συνάρτηση που συνδέει δύο **ανάλογα** ποσά x, y.

- Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **κλίση** της ευθείας. Ισούται με $a = \frac{y}{x}$.

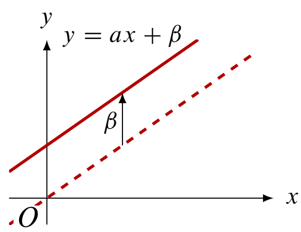


3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.5 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax + \beta$
Η συνάρτηση $y = ax + \beta$ παριστάνει ευθεία γραμμή η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $y = ax$.

- Ο αριθμός a ονομάζεται **κλίση** της ευθείας.
- Η ευθεία $y = ax + \beta$ με $\beta \neq 0$ αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση της ευθείας $y = ax$ ίση με β μονάδες.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.1 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $ax + \beta y = \gamma$
Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία γραμμή αν ισχύει $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

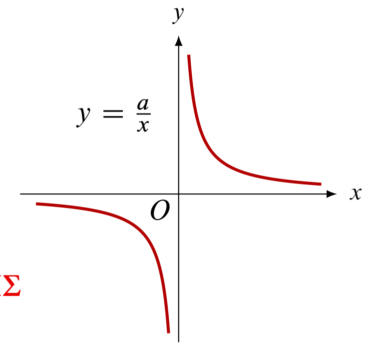
- Οι εξισώσεις της μορφής $y = \kappa$ παριστάνουν οριζόντιες ευθείες.
- Οι εξισώσεις της μορφής $x = \kappa$ παριστάνουν κατακόρυφες ευθείες.

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.6 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$

Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ είναι η συνάρτηση η οποία συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x, y.



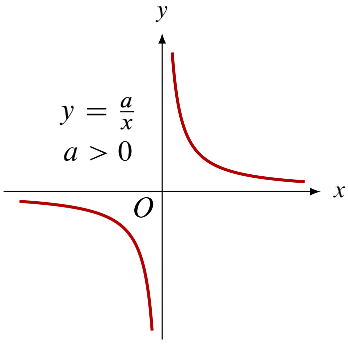
- Η γραφική της παράσταση ονομάζεται **υπερβολή**. Αποτελείται από δύο κλάδους όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Ο αριθμός a είναι διάφορος του μηδενός.

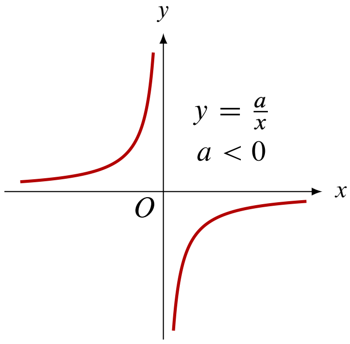
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.2 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$

Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ ισχύουν τα εξής:

i. Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
ii. Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής.
iii. Αν $a > 0$ η υπερβολή βρίσκεται στο 1^{ο} και στο 3^{ο} τεταρτημόριο ενώ αν $a < 0$ βρίσκεται στο 2^{ο} και στο 4^{ο} τεταρτημόριο.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Εμβαδά - Πυθαγόριεο Θεώρημα

4.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1 : ΕΜΒΑΔΟΝ
Εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας ονομάζεται ο θετικός αριθμός ο οποίος εκφράζει το μέγεθος της έκτασης που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή.

Ορισμός 4.2 : ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
Μονάδα μέτρησης επιφάνειας ονομάζεται μια επιφάνεια οποιουδήποτε σχήματος η οποία χρησιμοποιείται για η μέτρηση και σύγκριση όλων των επιφανειών.

4.2 Μονάδες μέτρησης επιφάνειας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.3 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές μονάδες μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε καθώς και τις σχέσεις που τις συνδέουν στο διάγραμμα που ακολουθεί:

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τ.Χιλιόμετρο	$1km^2$	$1km^2 = 1000$ στρέμματα $= 10^6 m^2$
Στρέμμα	1 στρέμμα	$\frac{1}{1000}km^2 = 1$ στρέμμα $= 1000m^2$
Τ.Μέτρο	$1m^2$	$1m^2 = 100dm^2 = 10^4cm^2 = 10^6mm^2$
Τ.Δεκατόμετρο	$1dm^2$	$\frac{1}{100}m^2 = 1dm^2 = 100cm^2 = 10^4mm^2$
Τ.Εκατοστόμετρο	$1cm^2$	$\frac{1}{10^4}m^2 = \frac{1}{100}dm^2 = 1cm^2 = 100mm^2$
Τ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^2$	$\frac{1}{10^6}m^2 = \frac{1}{10^4}dm^2 = \frac{1}{100}cm^2 = 1mm^2$

Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από μια μονάδα μέτρησης σε άλλη φαίνονται στο διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}\text{Τ.Χιλιόμετρα}\\(km^2)\end{matrix}} \arrow[r, shift left, "\cdot 10^3"] & \boxed{\begin{matrix}\text{Στρέμματα}\\\text{στρ.}\end{matrix}} \arrow[l, shift left, ": 10^3"] \arrow[r, shift left, "\cdot 10^3"] & \boxed{\begin{matrix}\text{Τ.Μετρα}\\(m^2)\end{matrix}} \arrow[l, shift left, ": 10^3"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{matrix}\text{Τ.Δέκατα}\\(dm^2)\end{matrix}} \arrow[l, shift left, ": 100"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{matrix}\text{Τ.Εκατοστά}\\(cm^2)\end{matrix}} \arrow[l, shift left, ": 100"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{matrix}\text{Τ.Χιλιοστά}\\(mm^2)\end{matrix}} \arrow[l, shift left, ": 100"]
\end{tikzcd}$$

4.3 Εμβαδά βασικών σχημάτων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.1 : ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ
Τα βασικά πολυγωνικά χωρία που συναντάμε είναι το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, το τρίγωνο, το τραπέζιο και ο ρόμβος. Τα εμβαδά τους είναι τα εξής :

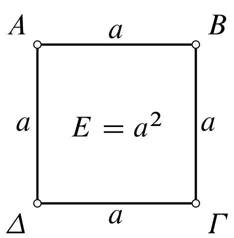
1. **Τετράγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του: $E = a^2$.

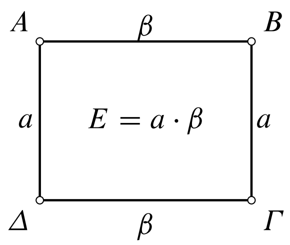
2. **Ορθογώνιο**
   Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις a, β ισούται με το γινόμενο του μήκους επί του πλάτους του.

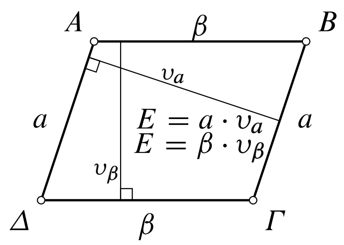
$$E = a \cdot \beta$$

3. **Παραλληλόγραμμο**
   Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της

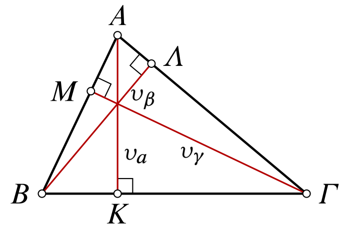
$$E = a \cdot \upsilon_a = \beta \cdot \upsilon_\beta$$





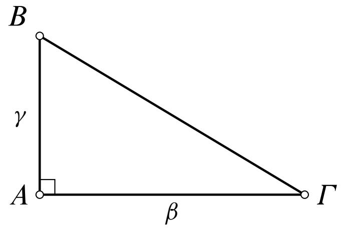


4. **Τρίγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της.



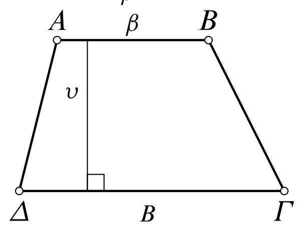
$$E = \frac{1}{2}a \cdot \upsilon_a = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

5. **Ορθογώνιο τρίγωνο**
   Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου των κάθετων πλευρών του.



$$E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$$

6. **Τραπέζιο**
   Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του αθροίσματος των βάσεων επί το μισό του ύψους του.

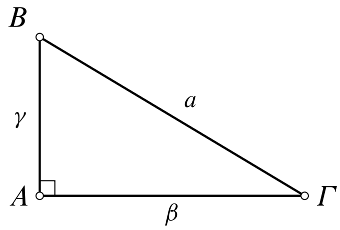


$$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2}$$

4.4 Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.2 : ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.



$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } a^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Θεώρημα 4.3 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ
Αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

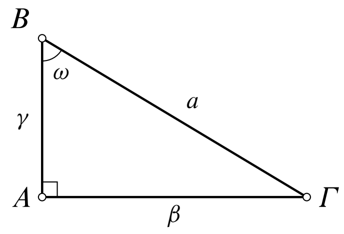
$$\text{Αν } B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Τριγωνομετρία - Διανύσματα

5.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.1 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90°$ ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.

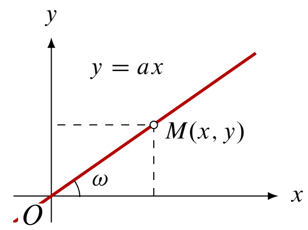


$$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad \text{εφ}\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.1 : ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η κλίση a μιας ευθείας $y = ax$ ισούται με την εφατομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

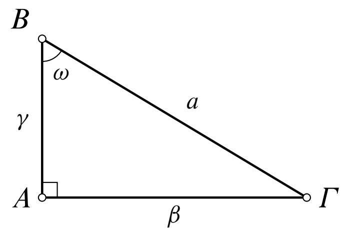


$$a = \frac{y}{x} = \text{εφ}\omega$$

5.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.2 : ΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90°$ ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.



$$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{ημ}\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

Ορισμός 5.3 : ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90°$ ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{συν}\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. $0 < \eta\mu\omega < 1$ ii. $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ iii. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

5.3 Μεταβολές τριγωνομετρικών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.3 : ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία τότε αυξάνεται το ημίτονο και η εφαπτομένη της, ενώ μειώνεται το συνημίτονό της. Αν φ, θ, ω είναι τρεις οξείες γωνίες με $\varphi < \theta < \omega$ τότε:

i. $\eta\mu\varphi < \eta\mu\theta < \eta\mu\omega$ ii. $\sigma\upsilon\nu\varphi > \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\omega$ iii. $\varepsilon\varphi\varphi < \varepsilon\varphi\theta < \varepsilon\varphi\omega$

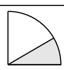
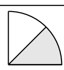
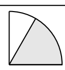
Θεώρημα 5.4 : ΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ
Αν δύο ή περισσότερες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή συνημίτονα ή εφαπτομένες τότε είναι μεταξύ τους ίσες.

$$\text{Αν}\quad \left.\begin{aligned} \eta\mu\varphi &= \eta\mu\omega \text{ ή} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= \sigma\upsilon\nu\omega \text{ ή} \\ \varepsilon\varphi\varphi &= \varepsilon\varphi\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \omega$$

5.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.5 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

Γωνία	30°	45°	60°
Σχήμα			
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varepsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

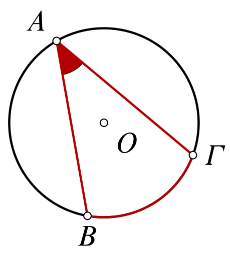
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Μέτρηση κύκλου

6.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.1 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

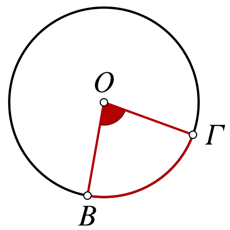
Εγγεγραμμένη γωνία σε έναν κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει κορυφή ένα σημείο του κύκλου, ενώ οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



- Το τόξο με άκρα τα σημεία τομής της γωνίας και του κύκλου, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας.
- Μια εγγεγραμμένη γωνία θα λέμε ότι **βαίνει** στο αντίστοιχο τόξο της.

Ορισμός 6.2 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ

Επίκεντρη ονομάζεται η γωνία η οποία έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου.



- Το τόξο με άκρα τα σημεία τομής της γωνίας και του κύκλου, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας.
- Μια επίκεντρη γωνία θα λέμε ότι **βαίνει** στο αντίστοιχο τόξο της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.1 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΟΞΟ

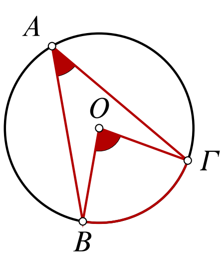
Μεταξύ των εγγεγραμμένων των επίκεντρων γωνιών και των αντίστοιχων τόξων τους ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

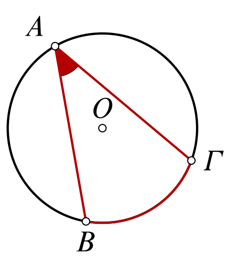
i. Αν μια εγγεγραμμένη και μια επίκεντρη γωνία βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε η εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης : $\hat{A} = \dfrac{\hat{O}}{2}$.

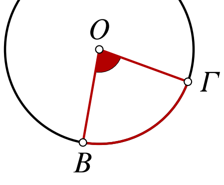
ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2}$.

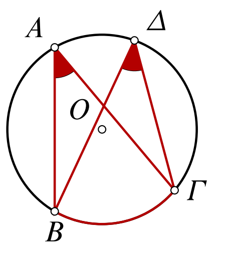
iii. Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{O} = \overset{\frown}{B\Gamma}$.

iv. Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε είναι ίσες. $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



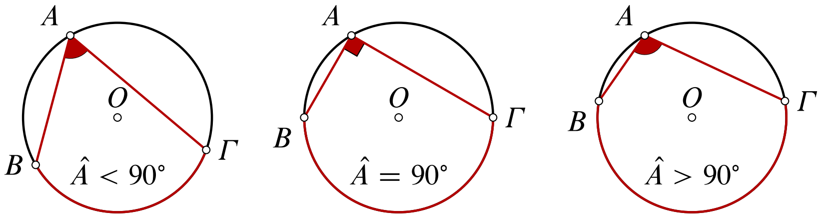






Θεώρημα 6.2 : ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ
Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και μια εγγεγραμένη γωνία $\hat{A}$ στο κύκλο αυτό με αντίστοιχο τόξο το $B\Gamma$.

i. Αν το τόξο ισούται με 180° η γωνία είναι ορθή: $\overset{\frown}{B\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 90°$.
ii. Αν το τόξο είναι μικρότερο από 180° η γωνία είναι οξεία: $\overset{\frown}{B\Gamma} < 180° \Rightarrow \hat{A} < 90°$.
iii. Αν το τόξο είναι μεγαλύτερο από 180° η γωνία είναι αμβλεία: $\overset{\frown}{B\Gamma} > 180° \Rightarrow \hat{A} > 90°$.

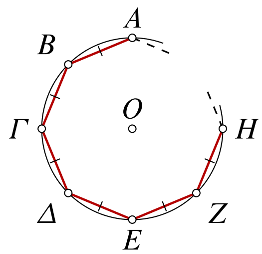


6.2 Κανονικά πολύγωνα

ΟΡΙΣΜΟΙ

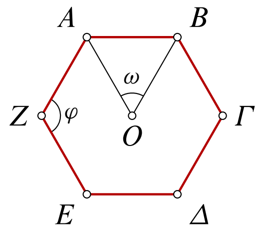
Ορισμός 6.3 : ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟ (ν-ΓΩΝΟ)

Κανονικό ονομάζεται κάθε πολύγωνο το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.



- Ένα κανονικό πολύγωνο συμβολίζεται ν-γωνο, όπου ν είναι ο φυσικός αριθμός που καθορίζει το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου με $\nu \geq 3$.
- Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος του πολυγώνου**.
- Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **κέντρο του πολυγώνου**

Ορισμός 6.4 : ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ
Οι γωνίες που σχηματίζονται μέσα σε ένα κανονικό $\nu-$γωνο είναι οι εξής:



1. **Κεντρική γωνία**
   Η κεντρική γωνία είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο ακτίνες του κύκλου του πολυγώνου που ενώνουν το κέντρο με δύο διαδοχικές κορυφές του. Συμβολίζεται ω.

2. **Γωνία πολυγώνου**
   Η γωνία του πολυγώνου είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται φ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.3 : ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ
Για τις γωνίες , ω, φ ενός κανονικού πολυγώνου ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η κεντρική γωνία ω ισούται με $\omega = \dfrac{360°}{\nu}$.
ii. Η γωνία φ του πολυγώνου ισούται με $\varphi = 180° - \omega$.

6.3 Μήκος κύκλου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.5 : ΟΑΡΙΘΜΟΣ π

Ο αριθμός π ορίζεται ως το πηλίκο του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του. Ο π είναι άρρητος αριθμός. Ισούται κατά προσέγγιση με

$$\pi = 3.14$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.4 : ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας ρ και διαμέτρου δ δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$L = \pi\delta \text{ ή } L = 2\pi\rho$$

6.4 Μήκος τόξου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.6 : ΑΚΤΙΝΙΟ

Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα. Συμβολίζεται με $1rad$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.5 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ

Αν μ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και a το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{a}{\pi}$$

Θεώρημα 6.6 : ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Το μήκος ℓ του τόξου ενός κύκλου μέτρου μ μοιρών ή a ακτινίων δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\ell = \frac{2\pi\rho\mu}{360^\circ} \text{ ή } \ell = a\rho$$

6.5 Εμβαδόν κύκλου

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.7 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E = \pi\rho^2$$