

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Παράλληλες Ευθείες

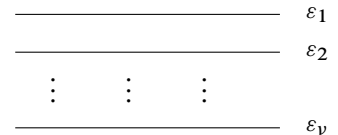
ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Παράλληλες ονομάζονται δύο ή περισσότερες ευθείες του ίδιου επιπέδου οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες χρησιμοποιούμε το συμβολισμό \parallel .

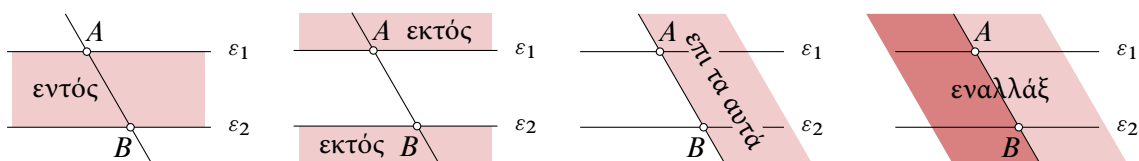
$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \dots \parallel \varepsilon_n$$



ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

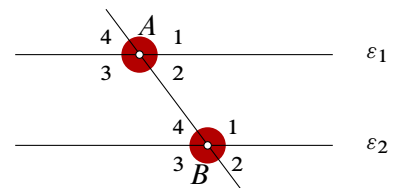
Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και μια τέμνουσα ε των δύο ευθειών. Η τέμνουσα ευθεία τέμνει τις παράλληλες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία A, B αντίστοιχα, οπότε σχηματίζονται 8 γωνίες με κορυφές τα σημεία A και B . Οι χαρακτηρισμοί που δίνονται σ' αυτές τις γωνίες είναι οι ακόλουθοι :

- Οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών ονομάζονται **εντός**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται στην περιοχή έξω από τις παράλληλες ευθείες ονομάζονται **εκτός**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η τέμνουσα ονομάζονται **επί τα αυτά**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας ονομάζονται **εναλλάξ**.



Επιλέγοντας δύο γωνίες, μια με κορυφή το σημείο A και μια με κορυφή το B συνδυάζουμε τους παραπάνω χαρακτηρισμούς οπότε προκύπτουν οι εξής ονομασίες :

- εντός εναλλάξ : \hat{A}_2, \hat{B}_4 και \hat{A}_3, \hat{B}_1
- εκτός εναλλάξ : \hat{A}_1, \hat{B}_3 και \hat{A}_4, \hat{B}_2
- εντός εκτός εναλλάξ : $\hat{A}_1, \hat{B}_4, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{A}_3, \hat{B}_2$ και \hat{A}_2, \hat{B}_3
- εντός και επί τα αυτά : \hat{A}_3, \hat{B}_4 και \hat{A}_2, \hat{B}_1
- εκτός και επί τα αυτά : \hat{A}_4, \hat{B}_3 και \hat{A}_1, \hat{B}_2
- εντός εκτός και επί τα αυτά : $\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_3$ και \hat{A}_4, \hat{B}_4



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και μια τέμνουσα ε τέμνει αυτές στα σημεία A, B αντίστοιχα. Αν ισχύει μια από τις προτάσεις :

- οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
- οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

τότε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες : $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και μια τέμνουσα ε τέμνει αυτές στα σημεία A, B αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες τότε :

- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

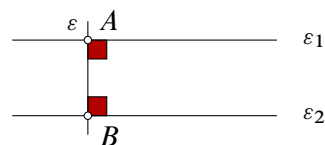
ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΑΙΤΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μια ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΕΥΘΕΙΑ

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες σε μια τρίτη ευθεία ε σε διαφορετικά σημεία της, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

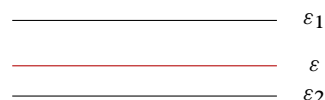
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon \text{ και } \varepsilon_2 \perp \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΕΥΘΕΙΕΣ ΑΝΑ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε τότε θα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon \text{ και } \varepsilon_2 \parallel \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΕΥΘΕΙΑ

Αν μια ευθεία ε είναι τέμνουσα μιας από τις δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τότε θα είναι τέμνουσα και της άλλης. Προκύπτει παρόμοια ότι αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από τις δύο παράλληλες τότε θα είναι κάθετη και με την άλλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Εαν δύο γωνίες $\hat{xOy}, \hat{x'O'y'}$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες τότε

- αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες είναι ίσες.
- αν είναι μια οξεία και μια αμβλεία τότε είναι παραπληρωματικές.

