Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
13 Απριλίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

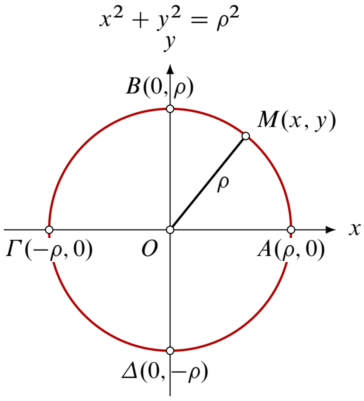
Κωνικές Τομές

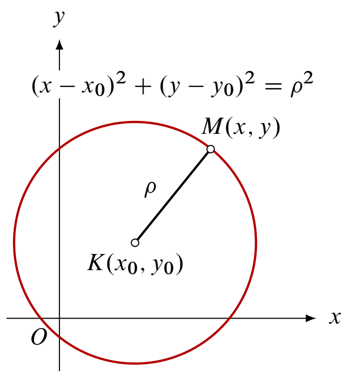
ΚΥΚΛΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΚΥΚΛΟΣ
Κύκλος ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του ίδιου επιπέδου.

- Το σταθερό σημείο ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου.
- Η σταθερή απόσταση των σημείων του κύκλου από το κέντρο ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου : $KM = \rho$.
- Ένας κύκλος συμβολίζεται ως (K, ρ) όπου K είναι το κέντρο και ρ η ακτίνα του.

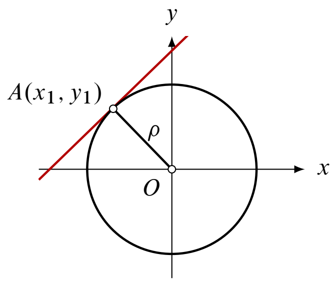




- Η καμπύλη του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, παριστάνεται αλγεβρικά από την εξίσωση
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
όπου x, y είναι οι συντεταγμένες των σημείων $M(x, y)$ του κύκλου.
- Αν ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων τότε θα έχει εξίσωσή της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Αν η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι ίση με τη μονάδα τότε ο κύκλος ονομάζεται **μοναδιαίος** και έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

Εφαπτομένη ενός κύκλου (K, ρ) σε ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ ονομάζεται η ευθεία η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο αυτό, έχει δηλαδή ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.



- Η εφαπτόμενη ευθεία για τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

- Η εφαπτόμενη ευθεία του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ όπου M είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\varGamma}}{2}$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $A^2 + B^2 - 4\varGamma > 0$. Αντιστρόφως, κάθε κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση την μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$.

i. Αν ισχύει $A^2 + B^2 - 4\varGamma = 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ένα σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

ii. Αν ισχύει $A^2 + B^2 - 4\varGamma < 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση δεν έχει λύσεις και κατά συνέπεια κανενός σημείου οι συντεταγμένες δεν την επαληθεύουν.