Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
1 Ιουνίου 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εξισώσεις

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

***1^ο Βήμα :* Σχηματισμός τριωνύμου**
Αν η εξίσωση δεν έχει την ίδια μορφή με αυτή του **Ορισμού 2** τότε μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και με κατάλληλες πράξεις τη μετασχηματίζουμε ώστε στο 1^ο μέλος της να προκύψει τριώνυμο 2^{ου} βαθμου.

***2^ο Βήμα :* Υπολογισμός διακρίνουσας**
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.

***3^ο Βήμα :* Υπολογισμός λύσεων**
Ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης ακολουθώντας τον κανόνα στο **Θεώρημα 1**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις 2^{ου} βαθμού.

i. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ii. $x^2 + 4x + 4 = 0$ iii. $2x^2 - x + 3 = 0$

ΛΥΣΗ
Οι παραπάνω εξισώσεις θα λυθούν με τη βοήθεια του τύπου δηλαδή με υπολογισμό της διακρίνουσας.

i. Η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$ είναι ήδη στην επιλύσιμη μορφή της, αφού το πρώτο μέλος της είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού και δεύτερο μέλος της το 0. Έχουμε λοιπόν

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Οι συντελεστές του τριωνύμου είναι οι $a = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ οπότε θα έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική τότε η εξίσωση θα έχει δύο λύσεις τις :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση θα έχει λύσεις τις $x = 2$ και $x = 1$.

ii. Για την εξίσωση $x^2 + 4x + 4 = 0$, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως και παραπάνω :

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Οι συντελεστές του τριωνύμου είναι $a = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$ οπότε η διακρίνουσα θα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μηδενική και αυτό σημαίνει οτι η εξίσωση θα έχει μια διπλή λύση η οποία είναι :

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Επομένως η λύση θα είναι η $x = -2$.

iii. Τέλος για την εξίσωση $2x^2 - x + 3 = 0$ ακολουθώντας τα ίδια βήματα θα έχουμε

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

Οι συντελεστές του τριωνύμου είναι $a = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$ οπότε η διακρίνουσα θα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική άρα η εξίσωση δεν έχει καμία λύση οπότε είναι αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$(x-2)^2 - 3x = 7 - 5x$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε οτι η παραπάνω εξίσωση δεν έχει την απλή μορφή εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού, δεν παυεί όμως να αποτελεί μια. Θα χρειαστεί να γίνουν κατάλληλες πράξεις ώστε να τη μετασχηματίσουμε σε μια αναγνωρίσιμη μορφή, δηλαδή να σχηματιστεί τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού στο πρώτο μέλος. Για να το πετύχουμε θα εκτελέσουμε όλες τις πράξεις και στη συνέχεια θα μεταφέρουμε όλους τους όρους στο $1^{ο}$ μέλος για να γίνει αναγωγή ομοίων όρων.

$$\begin{aligned}(x-2)^2 - 3x = 7 - 5x &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 3x = 7 - 5x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 3x - 7 + 5x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0\end{aligned}$$

Αφού σχηματίσαμε τριώνυμο στο $1^{ο}$ μέλος της εξίσωσης, συνεχίζουμε την επίλυση ακολουθώντας τα βήματα του **Παραδείγματος 1** και βρίσκουμε τις λύσεις $x = 3$ και $x = -1$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Για την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ διακρίνουμε τις δύο ειδικές περιπτώσεις

1. Αν $\gamma = 0$ τότε η εξίσωση θα είναι της μορφής $ax^2 + \beta x = 0$. Μπορεί να λυθεί είτε με τη **Μέθοδο 1** είτε ως εξής :

$1^{ο}$ Βήμα : **Παραγοντοποίηση**
Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο βγάζοντας κοινό παράγοντα το x : $x(ax + \beta) = 0$

$2^{ο}$ Βήμα : **Μηδενικό γινόμενο**
Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $y = 0$ για να σχηματίσουμε τις επιμέρους εξισώσεις : $x = 0$ και $ax + \beta = 0$ τις οποίες και λύνουμε.

2. Αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση θα είναι της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$. Η εξίσωση αυτή λύνεται

  i. με τη βοήθεια του τύπου (**Μέθοδος 1**)
  ii. παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο $ax^2 + \gamma$ αν αυτό αποτελεί διαφορά τετραγώνων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $y = 0$ για να σχηματίσουμε και να λύσουμε τις επιμέρους εξισώσεις.
  iii. Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους και βάζουμε ρίζα και στα δύο μέλη της εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΛΥΣΗ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^ου^ ΒΑΘΜΟΥ

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις 2^ου^ βαθμού.

i. $x^2 - 4x = 0$

ii. $x^2 - 9 = 0$

ΛΥΣΗ

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν με τον ίδιο τρόπο που λύθηκαν και οι εξισώσεις στο **Παράδειγμα 1**, δηλαδή με τη βοήθεια του τύπου. Εναλλακτικά όμως μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής

i. Στην εξίσωση $x^2 - 4x = 0$ παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πρωτοβάθμιος όρος και αυτό σημαίνει οτι $\beta = 0$. Παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο στο 1^ο^ μέλος της εξίσωσης

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

Εκμεταλευόμενοι την ιδιότητα $a \cdot \beta = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$ σχηματίζουμε και λύνουμε δύο εξισώσεις 1^ου^ βαθμού.

$$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι $x = 0$ και $x = 4$.

ii. Στην εξίσωση $x^2 - 9 = 0$ ο σταθερός όρος είναι μηδεν δηλαδή $\gamma = 0$. Μπορεί να λυθεί με δύο επιπλέον τρόπους

1^ος^ Τρόπος : Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποιούμε το 1^ο^ μέλος το οποίο αποτελεί διαφορά τετραγώνων και έχουμε

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $a \cdot \beta = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$.

$$(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Επομένως οι λύσεις είναι $x = 3$ και $x = -3$.

2^ος^ Τρόπος : Ρίζα

Χωρίζουμε μέλη τους γνωστούς και τους άγνωστους όρους της εξίσωσης

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$$

Βάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε τετραγωνική ρίζα

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

Οπότε οι λύσεις όπως και με τον προηγούμενο τρόπο θα είναι $x = 3$ και $x = -3$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για να παραγοντοποιηθεί ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$:

1ο Βήμα : Υπολογισμός διακρίνουσας
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

2ο Βήμα : Λύση εξίσωσης
Ανάλογα το πρόσημο της παραγοντοποιούμε ακολουθώντας τον κανόνα στο **Θεώρημα 2**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα.

i. $x^2 - 8x + 7$ ii. $9x^2 + 6x + 1$ iii. $x^2 + x + 1$

ΛΥΣΗ
Για κάθε τριώνυμο θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τη διακρίνουσα και τις ρίζες του.

i. Για το τριώνυμο $x^2 - 8x + 7$ θα ισχύει

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = 7 \\ \\ \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$$

Άρα το τριώνυμο θα παραγοντοποιηθεί ως εξής

$$x^2 - 8x + 7 = 1(x - 7)(x - 1) = (x - 7)(x - 1)$$

ii. Ομοίως για το τριώνυμο $9x^2 + 6x + 1$ θα ισχύει

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

Η διπλή ρίζα του τριωνύμου θα είναι

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

Άρα το τριώνυμο θα παραγοντοποιηθεί ως εξής

$$9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x + 1)^2$$

iii. Τέλος για το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ θα έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Άρα το τριώνυμο δεν έχει καμία ρίζα οπότε δεν παραγοντοποιείται.