ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Φιλομαθεια
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , : 26610 20144 , : 6932327283 - 6955058444

23 Μαρτίου 2023

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Φρόνιμος Σπύρος

Τυπολόγιο

1ο Κεφάλαιο Διαφορικός Λογισμός

1.1 Συναρτήσεις

1.1 Πεδίο ορισμού συνάρτησης D_f

Είδος	**Τύπος**	**Περιορισμός**
Πολυωνυμική	$f(x) = A(x)$	$-$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
´Αρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
´Αρρητος παρονομαστής	$f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$
Ημίτονο - Συνημίτονο	$f(x) = \text{ημ}A(x)$ ή $f(x) = \text{συν}A(x)$	$-$
Εφαπτομένη	$f(x) = \text{εφ}A(x)$	$A(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
Συνεφαπτομένη	$f(x) = \text{σφ}A(x)$	$A(x) \neq \kappa\pi$

Πίνακας 1: Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

1.2 Πράξεις συναρτήσεων

- ´Αθροισμα : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Διαφορά : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- Γινόμενο : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$
- Πηλίκο : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$

1.3 Το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη $C_f \Leftrightarrow f(a) = \beta$.

1.4 Σημείο τομής της C_f μέ τον άξονα

- $x'x : f(x) = 0$
- $y'y : A(0, f(0))$

1.5 Σχετική θέση C_f με τον άξονα $x'x$

- Η C_f είναι πάνω από τον $x'x \Rightarrow f(x) > 0$
- Η C_f είναι κάτω από τον $x'x \Rightarrow f(x) < 0$

1.6 Σχετική θέση C_f με C_g

- Η C_f είναι πάνω από την $C_g \Rightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f είναι κάτω από την $C_g \Rightarrow f(x) < g(x)$

1.7 Γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f \uparrow \Delta$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f \downarrow \Delta$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

1.8 Ακρότατα της f

- Ολικό μέγιστο στη θέση x_0 : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$
- Ολικό ελάχιστο στη θέση x_0 : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$.
- Τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0.
- Ολικό ελάχιστο στη θέση x_0 : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0.

1.2 Όρια - Συνέχεια

1.9 Όριο συνάρτησης στο x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1.10 Συνέχεια σε σημείο x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

1.11 Ιδιότητες ορίων :

Πράξη	**Ιδιότητα**
Άθροισμα	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
Πολλαπλάσιο	$\lim\limits_{x \to x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
Γινόμενο	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
Πηλίκο	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$
Δύναμη	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^\nu = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^\nu$
Ρίζα	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

Πίνακας 2: Ιδιότητες των ορίων

1.3 Παράγωγος

1.12 Παράγωγος σε σημείο x_0 : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1.13 Παράγωγος συνάρτηση : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΠΛΕΣ		**ΣΥΝΘΕΤΕΣ**		
Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση $g \circ f$	Παράγωγος $(g \circ f)'$	Περιγραφή
c	0			
x	1			
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$f^\nu(x)$	$\nu f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$	$\nu(\text{βάση})^{\nu-1}(\text{βάση})'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{(\text{Παρονομαστής})'}{\text{Παρονομαστής}^2}$

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\frac{(\text{Υπόριζο})'}{2\cdot \text{Ρίζα}}$
$ημx$	$συνx$	$ημ f(x)$	$συν f(x)\cdot f'(x)$	$συν(\text{Γωνία})\cdot(\text{Γωνία})'$
$συνx$	$-ημx$	$συν f(x)$	$-ημ f(x)\cdot f'(x)$	$-ημ(\text{Γωνία})\cdot(\text{Γωνία})'$
$εφx$	$\frac{1}{συν^2 x}$	$εφ f(x)$	$\frac{f'(x)}{συν^2 f(x)}$	$\frac{(\text{Γωνία})'}{συν^2(\text{Γωνία})}$
$σφx$	$-\frac{1}{ημ^2 x}$	$σφ f(x)$	$-\frac{f'(x)}{ημ^2 f(x)}$	$-\frac{(\text{Γωνία})'}{ημ^2(\text{Γωνία})}$

Πίνακας 3: Παράγωγοι απλών και σύνθετων συναρτήσεων

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Πράξη	**Συνάρτηση**	**Παράγωγος**
΄Αθροισμα - Διαφορά	$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
Πολλαπλάσιο	$c\cdot f(x)$	$c\cdot f'(x)$
Γινόμενο	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Πηλίκο	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Σύνθεση	$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$

Πίνακας 4: Κανόνες παραγώγισης πράξεων

1.4 Εφαπτομένη - Ρυθμός μεταβολής

1.14 Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$: $y=\lambda x+\beta$

1.15 Συντελεστής διεύθυνσης εφαπτομένης : $\lambda = f'(x_0) = εφω$

1.16 Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 : $f'(x_0)$

2ο Κεφάλαιο Στατιστική

2.1 Βασικές έννοιες - Πίνακες συχνοτήτων

2.1 ν : μέγεθος δείγματος

2.2 κ :Πλήθος τιμών μεταβλητής X

2.3 $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$: Παρατηρήσεις του δείγματος

2.4 $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$: Τιμές μεταβλητής X.

2.5 $\nu_i, i=1,\ldots,\kappa$: Συχνότητα της τιμής x_i.

2.6 $f_i, i=1,\ldots,\kappa$: Σχετική συχνότητα της τιμής x_i.

2.7 $f_i\%, i=1,\ldots,\kappa$: Σχετική συχνότητα επί τοις 100 της τιμής x_i.

2.8 Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα ν_i

α. $0\le \nu_i \le \nu$ για $i=1,2,\ldots,\kappa$.

β. $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=\nu$

γ. $\nu_i = N_i - N_{i-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

2.9 Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα f_i

α. $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = \dfrac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $0 \leq f_i \leq 1$ και $0 \leq f_i\% \leq 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

γ. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$ και $f_1\% + f_2\% + \ldots + f_\kappa\% = 100$

δ. $f_i = F_i - F_{i-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ε. $f_i\% = F_i\% - F_{i-1}\%$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

2.10 Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική συχνότητα N_i

α. $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $N_i = N_{i-1} + \nu_i$ γ. $N_1 = \nu_1$ δ. $N_\kappa = \nu$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

2.11 Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική σχετική συχνότητα F_i

α. $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $F_i = \frac{N_i}{\nu}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

γ. $F_i\% = f_1\% + f_2\% + \ldots + f_i\%$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

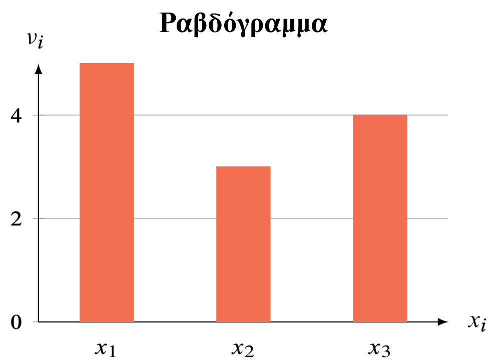
δ. $F_i\% = \frac{N_i}{\nu} \cdot 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

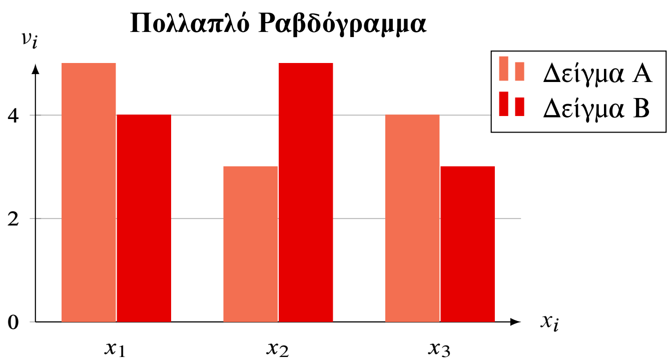
ε. $F_1 = f_1$ ζ. $F_\kappa = 1$

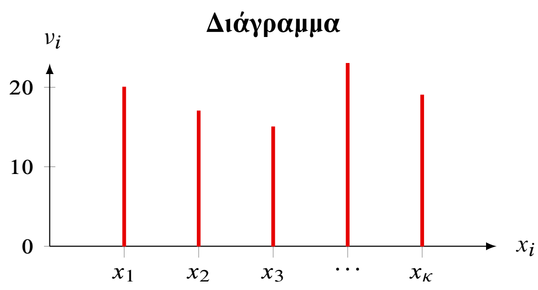
στ. $F_1\% = f_1\%$ η. $F_\kappa\% = 100$

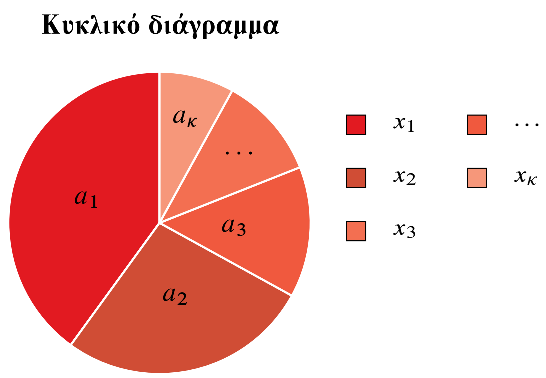
2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων - Σχήματα

2.12 Μέτρο τόξου της τιμής x_i σε κυκλικό διάγραμμα : $a_i = \dfrac{\nu_i}{\nu} \cdot 360° = f_i \cdot 360°$.









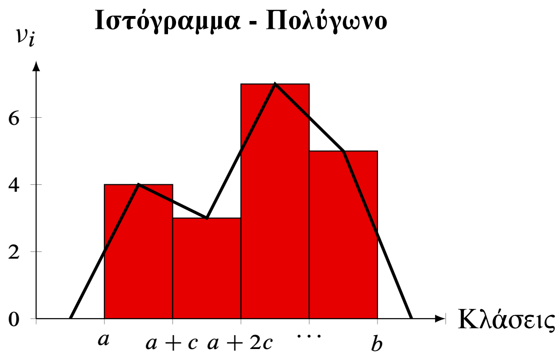
2.3 Ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

2.13 Εύρος παρατηρήσεων $R = t_{\max} - t_{\min}$

2.14 Πλάτος κλάσης $c = \dfrac{R}{\kappa}$ όπου κ το πλήθος των κλάσεων.

2.15 Κεντρική τιμή της κλάσης $[a, \beta)$

- $x_i = \dfrac{a+\beta}{2}, i = 1, \ldots, \kappa$
- $x_i = x_{i-1} + c,\ i = 2, \ldots, \kappa$



2.4 Μέτρα θέσης

2.13 Μέση τιμή :

α. Με παρατηρήσεις t_i : $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

β. Με συχνότητες ν_i $\bar{x} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$

γ. Με συχνότητες f_i : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

2.14 Σταθμικός μέσος : $\bar{x} = \dfrac{t_i w_1 + t_2 w_2 + \ldots + t_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$ όπου w_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι οι συντελεστές βαρύτητας των παρατηρήσεων.

2.15 Διάμεσος

α. $\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$ για ν: περιττό

β. $\delta = \dfrac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$ για ν: άρτιο

γ. Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

- $\delta = L_i + \dfrac{c}{\nu_i}\left(\dfrac{\nu}{2} - N_{i-1}\right).$
- $\delta = L_i + \dfrac{c}{f_i\%}(50 - F_{i-1}\%).$

όπου i : ο δείκτης της κλάσης στην οποία ξεπερνάμε 1η φορά ή συναντάμε το μισό δείγμα (βλέπε μέθοδο **2.7.** και **2.8.**)

2.5 Μέτρα διασποράς

2.16 Εύρος : $R = t_{max} - t_{min}$

2.17 Διακύμανση

α. Για ακέραιο μέσο όρο: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$

β. Για μη ακέραιο μέσο όρο $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$

γ. Με συχνότητα ν_i : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$ για ακέραιο μέσο όρο.

δ. Με συχνότητα ν_i : $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$ για μη ακέραιο μέσο όρο.

ε. Με συχνότητα f_i : $s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$

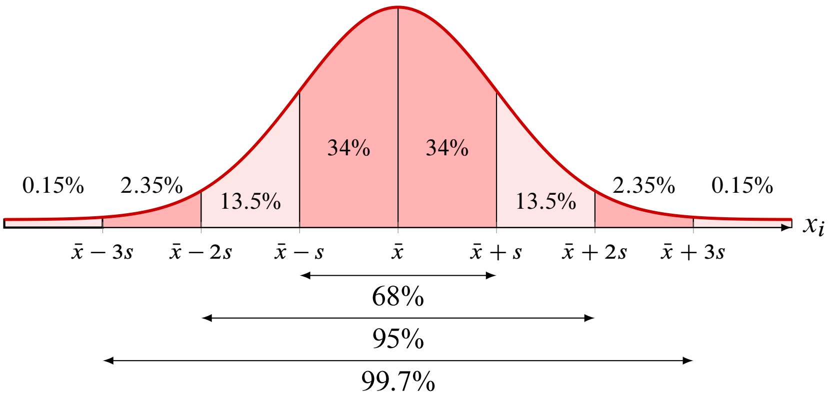
2.18 Σχέση μεταξύ διακύμανσης και μέσης τιμής : $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ όπου $\overline{x^2} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2$

2.19 Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2}$

2.20 Συντελεστής μεταβλητότητας $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$

- Αν $CV \leq 10\%$ τότε το δείγμα είναι ομοιογενές.
- Αν $CV_A < CV_B$ τότε το δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το B.

2.21 Κανονική κατανομή



2.22 Μεταβολές των παρατηρήσεων
Δίνονται οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μιας μεταβλητής X, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Οι μεταβολές στις τιμές αυτές επηρεάζουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα.

Αλλαγή	Τελικές τιμές	Νέα μέση τιμή	Νέα τυπική απόκλιση
Αύξηση - Μείωση	$y_i = x_i \pm c$	$\bar{y} = \bar{x} \pm c$	$s_y = s_x$
Πολλαπλασιασμός	$y_i = x_i \cdot c$	$\bar{y} = \bar{x} \cdot c$	$s_y = s_x \cdot \|c\|$
Διαίρεση	$y_i = \frac{x_i}{c}$	$\bar{y} = \frac{\bar{x}}{c}$	$s_y = \frac{s_x}{\|c\|}$
Αύξηση κατά $a\%$	$y_i = x_i\,(1 + a\%)$	$\bar{y} = \bar{x}\,(1 + a\%)$	$s_y = s_x\,(1 + a\%)$
Μείωση κατά $a\%$	$y_i = x_i\,(1 - a\%)$	$\bar{y} = \bar{x}\,(1 - a\%)$	$s_y = s_x\,(1 - a\%)$
Μέρος	$y_i = x_i \cdot a\%$	$\bar{y} = \bar{x} \cdot a\%$	$s_y = s_x \cdot a\%$
Συνδυασμός	$y_i = \lambda \cdot x_i \pm c$	$\bar{y} = \lambda \cdot \bar{x} \pm c$	$s_y = \|\lambda\| s_x$

Πίνακας 5: Υπολογισμός νέας μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης από μεταβολές παρατηρήσεων

Βασικά είδη ασκήσεων

1ο Κεφάλαιο Διαφορικός λογισμός

1.1. Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο

- Υπολογίζουμε το όριο της f στο σημείο x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$.

Αν είναι ίσα τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

1.2. Όριο της μορφής $\frac{0}{0}$ σε σημείο x_0

- Αν η συνάρτηση είναι ρητή τότε παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα ώσπου να εμφανιστεί η παράσταση $x - x_0$ και να απλοποιηθεί.
- Αν η συνάρτηση περιέχει ρίζα, πολλαπλασιάζουμε πάνω και κάτω με τη συζυγή παράσταση του όρου που έχει τη ρίζα. Στη συνέχεια κάνουμε πράξεις μέχρι να διαιρεθεί η παράσταση $x - x_0$. Τέλος υπολογίζουμε το όριο.

1.3. Παράγωγος απλών - σύνθετων συναρτήσεων
Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους απλών ή και σύνθετων συναρτήσεων ακολουθούμε τον πίνακα 3 καθώς και τους κανόνες παραγώγισης πίνακα 4 για τις πράξεις.

1.4. Εφαπτομένη της C_f όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$

- Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$.
- Υπολογίζουμε την $f'(x)$ και στη συνέχεια την $f'(x_0)$ που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.
- Τοποθετούμε στην εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(x_0)$.
- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις συντεταγμένες του σημείου $A(x_0, f(x_0))$ στη θέση των μεταβλητών x, y και λύνοντας την υπολογίζουμε το β.
- Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας.

1.5. Εφαπτομένη της C_f όταν γνωρίζουμε την κλίση της ευθείας

- Θεωρούμε σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$.
- Υπολογίζουμε την $f'(x)$.
- Υπολογίζουμε, αν δεν μας δίνεται, το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης.*
- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x_0) = \lambda$ και βρίσκουμε το x_0 και στη συνέχεια το $f(x_0)$.
- Τοποθετούμε στην εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(x_0)$.
- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις συντεταγμένες του σημείου $A(x_0, f(x_0))$ στη θέση των μεταβλητών x, y και λύνοντας την υπολογίζουμε το β.
- Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας.

* Στο βήμα που καλούμαστε να υπολογίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης έχουμε τους εξής κανόνες:

- Δύο ευθείες παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- Για δύο κάθετες ευθείες ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
- Οι ευθείες παράλληλες με τον άξονα $x'x'$ έχουν $\lambda = 0$.
- Αν η ευθεία σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x'$ τότε $\lambda = \text{εφ}\omega$.

1.6. Μονοτονία - Ακρότατα

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και ελέγχουμε αν είναι συνεχής.
- Υπολογίζουμε την $f'(x)$.
- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$
- Υπολογίζουμε τα πρόσημα της $f'(x)$.*
- Σχηματίζουμε και συμπληρώνουμε πίνακα προσήμων της f' και μονοτονίας της f.
- Απαντάμε για το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα καθώς και για το είδος και τη θέση των ακρότατων εκεί που αλλάζει η μονοτονία.

***Εύρεση πρόσημου της $f'(x)$**

- Λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$.
- Αν η f' είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού με ρίζα $x = x_0$ τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x) = a x + \beta$	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a

- Αν η f' είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού τότε εφαρμόζουμε έναν από τους παρακάτω κανόνες:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x) = a x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x) = a x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x) = a x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του a

1.7. Ρυθμός μεταβολής

΄Οταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f τότε υπολογίζουμε την παράγωγο f' της f.

1.8. Σύγκριση αριθμών με τη βοήθεια μονοτονίας

Αν μας ζητείται να συγκρίνουμε δύο τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$, με $a < \beta$, της συνάρτησης f τότε μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία της.

- Αν $f \uparrow$ τότε $a < \beta \Rightarrow f(a) < f(\beta)$
- Αν $f \downarrow$ τότε $a < \beta \Rightarrow f(a) > f(\beta)$.

1.9. Απόδειξη ανισότητας με τη βοήθεια ακρότατων

Αν μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \leq a$ ή $f(x) \geq a$ τότε μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα της.

- Αν η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το a στη θέση x_0 τότε από τον ορισμό του μέγιστου γράφουμε $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) \leq a$.
- Αν η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το a στη θέση x_0 τότε από τον ορισμό του μέγιστου γράφουμε $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq a$.

2ο Κεφάλαιο Στατιστική

2.1. Συμπλήρωση πίνακα συχνοτήτων

- Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των συχνοτήτων ν_i, f_i, $f_i\%$, N_i, F_i, $F_i\%$ από το τυπολόγιο. Κάθε τύπος είναι εξίσωση από την οποία βρίσκουμε διαδοχικά τις συχνότητες που λείπουν από τον πίνακα.
- Κάθε συχνότητα που βρίσκουμε την συμπληρώνουμε στον πίνακα. Οι πράξεις γίνονται κάτω από τον πίνακα.

2.2. Συμπλήρωση πίνακα ομαδοποιημένων παρατηρήσεων

Ο πίνακας συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων συμπληρώνεται ακριβώς όπως και ο συνήθης πίνακας υπολογίζοντας τις συχνότητες που περιέχει. Αν επιπλέον λείπουν από τον πίνακα και τα άκρα των κλάσεων καθώς και οι κεντρικές τιμές τότε

- Θέτουμε με a το κάτω άκρο της 1ης κλάσης (ή οποιασδήποτε άλλης αν γίνεται) και χρησιμοποιώντας το πλάτος c των κλάσεων, σχηματίζουμε τις κλάσεις με τον ακόλουθο τρόπο

  $$[a, a+c), [a+c, a+2c), [a+2c, a+3c), \ldots$$

  έως ότου συμπληρωθούν όλες οι κλάσεις.
- Από τα δεδομένα του πίνακα σχηματίζουμε 2 εξισώσεις με μεταβλητές a, c και λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών αυτών.
- Στη συνέχεια σχηματίζουμε με τις τιμές αυτές τις ομάδες του πίνακα και συμπληρώνουμε και τις κεντρικές τιμές x_i.

2.3. Συμπεράσματα από πίνακα συχνοτήτων

Αν ύστερα από τη συμπλήρωση ενός πίνακα καλούμαστε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις που αφορούν το δείγμα τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν οι ερωτήσεις ζητούν πλήθος παρατηρήσεων τότε χρησιμοποιούμε τις συχνότητες ν_i, N_i.
- Αν οι ερωτήσεις ζητούν ποσοστό παρατηρήσεων τότε χρησιμοποιούμε τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$, $F_i\%$.

Εάν η ερώτηση αφορά μια τιμή x_i τότε χρειαζόμαστε την αντίστοιχη συχνότητά ν_i ή $f_i\%$. Αν αφορά πολλές τιμές τότε προσθέτουμε τις αντίστοιχες συχνότητες ή χρησιμοποιούμε κάποια αθροιστική.

2.4. Συμπεράσματα από πίνακα συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων

Για να απαντήσουμε σε ερωτήσεις που αφορούν ένα ομαδοποιημένο δείγμα διακρίνουμε τις περιπτώσεις που είδαμε στην προηγούμενη μέθοδο για πλήθος και ποσοστό. Στη συνέχεια για να επιλέξουμε τις συχνότητες που μας χρειάζονται ακολουθούμε τις παρακάτω οδηγίες.

- Κάθε ερώτηση αφορά πλήθος ή ποσοστό παρατηρήσεων
  - μέχρι κάποια τιμή x
  - από κάποια τιμή x
  - μεταξύ δύο τιμών x, y
- Σε κάθε περίπτωση μας ενδιαφέρει αν οι τιμές αυτές είναι άκρα κάποιας ομάδας ή ενδιάμεσα σημεία.
  - Αν είναι άκρα, τότε τις ομάδες που χρειαζόμαστε τις παίρνουμε ολόκληρες.
  - Αν είναι κεντρικές τιμές, τότε τις ομάδες που τις περιέχουν τις παίρνουμε μισές.
  - Αν κάποια τιμή είναι ενδιάμεσο σημείο τότε παίρνουμε το **μέρος** της ομάδας που περιέχει τις τιμές που θέλουμε.

Αν η τιμή x περιέχεται στην ομάδα $[a, \beta)$ αναλυτικά η διαδικασία έχει ως εξής.

- Η ομάδα χωρίζεται στα διαστήματα $[a, x)$ και $[x, \beta)$.

- Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει το μέρος της ομάδας που χρειαζόμαστε

Ζητούμενο	**Διάστημα**	**Μέρος της ομάδας**
μέχρι x	$[a, x)$	$\dfrac{x-a}{c}$
από x	$[x, \beta)$	$\dfrac{\beta - x}{c}$

- Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στην κλάση και πολλαπλασιάζουμε το κλάσμα της 3ης στήλης με τη συχνότητα ν_i ή f_i της κλάσης.

2.5. Μέσος όρος - Σταθμικός μέσος

- Χρησιμοποιούμε τους τύπους 2.13 για το μέσο όρο, ανάλογα με το αν η άσκηση μας δίνει παρατηρήσεις t_i, συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i.
- Για το σταθμικό μέσο χρησιμοποιείται ο τύπος 2.14.

2.6. Υπολογισμός διαμέσου από παρατηρήσεις t_i

- Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι περιττό, τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση. Δηλαδή
$$\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$$
- Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι άρτιο, τότε η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή
$$\delta = \frac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$$

2.7. Υπολογισμός διαμέσου από συχνότητες ν_i

- Υπολογίζουμε την αθροιστική συχνότητα N_i.
  - Αν το πλήθος είναι περιττό, η διάμεσος είναι η τιμή x_i στην οποία η συχνότητα N_i ξεπερνάει πρώτη φορά τον αριθμό $\frac{\nu}{2}$.
  - Αν το πλήθος είναι άρτιο, τότε εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:
    - ∗ Αν στη στήλη με τη συχνότητα N_i εμφανίζεται σε κάποια τιμή x_i το μισό μέγεθος του δείγματος, δηλαδή $\frac{\nu}{2}$, τότε η διάμεσος ισούται με
$$\delta = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$
    - ∗ Αν στη στήλη με τη συχνότητα N_i **δεν** εμφανίζεται σε κάποια τιμή x_i το μισό μέγεθος του δείγματος, τότε η διάμεσος ισούται με την τιμή x_i στην οποία η N_i ξεπερνάει πρώτη φορά τον αριθμό $\frac{\nu}{2}$

2.8. Υπολογισμός διαμέσου από συχνότητες f_i

- Υπολογίζουμε την αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$.
  - Αν το πλήθος είναι περιττό, η διάμεσος είναι η τιμή x_i στην οποία η συχνότητα F_i ξεπερνάει πρώτη φορά το 50%.
  - Αν το πλήθος είναι άρτιο, τότε εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:
    - ∗ Αν στη στήλη με τη συχνότητα $F_i\%$ εμφανίζεται σε κάποια τιμή x_i το 50%, τότε η διάμεσος ισούται με
$$\delta = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$
    - ∗ Αν στη στήλη με τη συχνότητα N_i **δεν** εμφανίζεται σε κάποια τιμή x_i το 50%, τότε η διάμεσος ισούται με την τιμή x_i στην οποία η N_i ξεπερνάει πρώτη φορά το 50%

2.9. Υπολογισμός εύρους
Χρησιμοποιείται ο τύπος $R = t_{\max} - t_{\min}$

2.10. Διακύμανση - Τυπική απόκλιση

- Χρησιμοποιούμε τους τύπους 2.17 ανάλογα με το ποια συχνότητα θα χρησιμοποιήσουμε αλλά και με το αν ο μέσος όρος $\bar{x}$ είναι ακέραιος ή όχι.
- Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s χρησιμοποιούμε τον τύπο $s = \sqrt{s^2}$.

2.11. Υπολογισμός συντελεστή μεταβολής

- Υπολογίζουμε μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.
- Χρησιμοποιούμε τον τύπο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$.
- Αν $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Αν $CV \leq 10\%$ το δείγμα είναι ομοιογενές.
- Αν για δύο δείγματα ισχύει $CV_A > CV_B$ το δείγμα B είναι πιο ομοιογενές από το A.

2.12. Κανονική κατανομή

- Σχεδιάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τους κατάλληλους αριθμούς, αν γνωρίζουμε τα ποσά $\bar{x}$ και s.
- Χρησιμοποιούμε τα ποσοστά που περιέχει κάθε περιοχή της καμπύλης για να απαντήσουμε σε ερωτήσεις ή να υπολογίσουμε πλήθος παρατηρήσεων με τον τύπο

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\nu_i}{\nu}$$

- Αν μας ενδιαφέρουν πολλές περιοχές του σχήματος προσθέτουμε τα αντίστοιχα ποσοστά.

2.13. Μεταβολές των παρατηρήσεων
Αν οι τιμές y_i μιας νέας μεταβλητής Y προκύπτουν από πράξεις με τις τιμές x_i της αρχικής μεταβλητής X, τότε χρησιμοποιούμε τον πίνακα 5.