

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Παραλληλόγραμμο - Τραπεζία

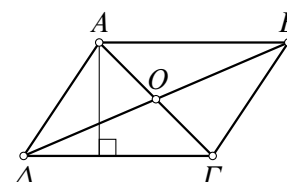
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ - ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΡΟΜΒΟΣ - ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

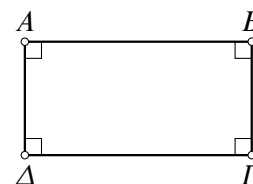
Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του ανα δύο παράλληλες.

- Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις απέναντι κορυφές του παραλληλογράμμου ονομάζονται **διαγώνιοι**.
- Το σημείο τομής των διαγωνίων του ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σ' αυτές ονομάζεται **ύψος**.



ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το ορθογώνιο ως το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει μια ορθή γωνία και κατά συνέπεια από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, προκύπτουν και οι υπόλοιπες γωνίες του ορθές.

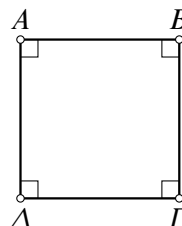
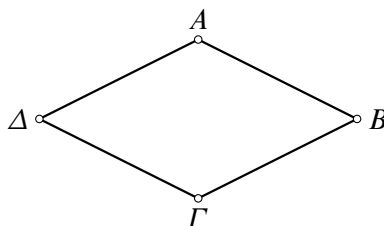


ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΡΟΜΒΟΣ

Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει τις διαδοχικές πλευρές του μεταξύ τους ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος συγχρόνως.

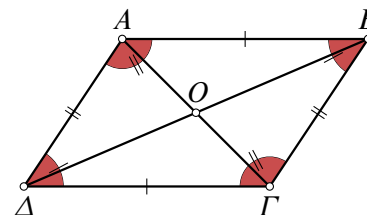


ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι :

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες : $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
- Δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές : $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

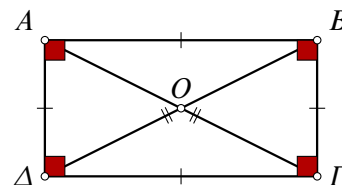
ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

- Το κέντρο ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι κέντρο συμμετρίας του.
- Εαν δύο ή περισσότερα παράλληλα τμήματα έχουν τα άκρα τους πάνω σε παράλληλες ευθείες τότε είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Σε κάθε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες : $A\Gamma = B\Delta$.
- Όλες του οι γωνίες είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.
- Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.



ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- Έχει 3 ορθές γωνίες.
- Έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

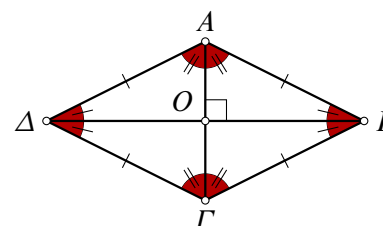
ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΟΜΒΟΥ

Σε κάθε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

- Οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες : $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$.
- Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα : $A\Gamma \perp B\Delta$.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του :

- $A\Gamma$ διχ. των \hat{A} και $\hat{\Gamma}$.
- $B\Delta$ διχ. των \hat{B} και $\hat{\Delta}$.

- Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.



ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΡΟΜΒΟΥ

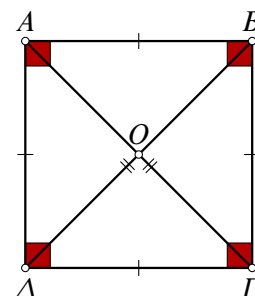
Ένα τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει διαγώνιους κάθετες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Κάθε τετράγωνο $ABΓΔ$ έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου :

- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες : $AB = BΓ = ΓΔ = ΑΔ$.
- Όλες οι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.
- Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες : $AB \parallel \Gamma\Delta$, $A\Delta \parallel B\Gamma$.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, διχοτομούνται , διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.



- $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$.
- $A\Gamma$ διχ. των \hat{A} και $\hat{\Gamma}$.
- $AO = O\Gamma$, $BO = O\Delta$.
- $B\Delta$ διχ. των \hat{B} και $\hat{\Delta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Ένα τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο εαν είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει και μια από τις παρακάτω προτάσεις :

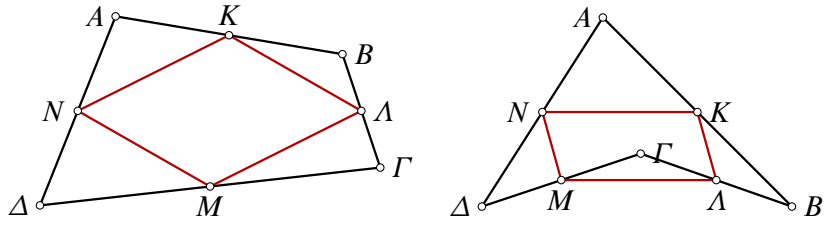
- Έχει μια ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει μια ορθή γωνία και διαγώνιους κάθετες.
- Έχει μια ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.
- Έχει διαγώνιους ίσες και κάθετες.
- Έχει διαγώνιους ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει διαγώνιους ίσες και μια απ' αυτές διχοτομεί μια γωνία.

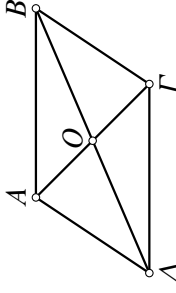
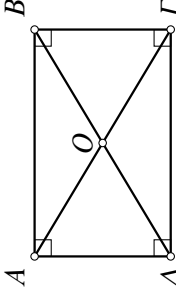
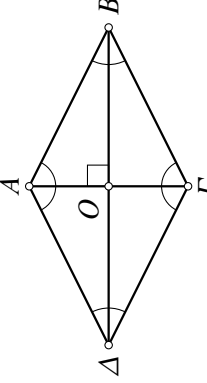
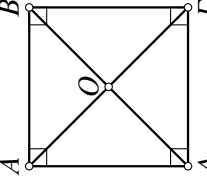
Από τα παραπάνω κριτήρια παρατηρούμε ότι συνδυάζονται δύο ιδιότητες του ορθογωνίου με τρεις ιδιότητες του ρόμβου προκειμένου να οριστούν τα κριτήρια αυτά. Οι συνδιασμοί αυτοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$ABΓΔ$ Παραλληλόγραμμο και			
		Ιδιότητες Ορθογωνίου	
		Μια ορθή γωνία	Διαγώνιοι ίσες
Ιδιότητες ρόμβου	Διαδοχικές πλευρές ίσες	1ο Κριτήριο	4ο Κριτήριο
	Διαγώνιοι κάθετες	2ο Κριτήριο	5ο Κριτήριο
	Διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία	3ο Κριτήριο	6ο Κριτήριο

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΜΕΣΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

Τα μέσα των πλευρών ενός κυρτού ή μη κυρτού τετραπλεύρου ορίζουν παραλληλόγραμμο.



	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο
Σχήμα				
Ορισμός	Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του ανα δύο παράλληλες.	Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει όλες τις γωνίες του ορθές.	Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει τις διαδοχικές πλευρές του μεταξύ τους ίσες.	Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.
Ιδιότητες	<ul style="list-style-type: none"> i. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. ii. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. iii. Δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές. iv. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται. 	<ul style="list-style-type: none"> i. Οι διαγώνιοι είναι ίσες. ii. Όλες οι γωνίες είναι ίσες. iii. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου. 	<ul style="list-style-type: none"> i. Οι διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. ii. Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. iii. Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του. iv. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου. 	<ul style="list-style-type: none"> i. Όλες οι πλευρές είναι ίσες. ii. Όλες οι γωνίες είναι ίσες. iii. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. iv. Οι διαγώνιοι είναι ίσες, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Κριτήρια	<ul style="list-style-type: none"> i. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. ii. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. iii. Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες. iv. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. v. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται. 	<ul style="list-style-type: none"> i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία. ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι είναι ίσες. iii. Έχει 3 ορθές γωνίες. iv. Έχει όλες τις γωνίες ίσες. 	<ul style="list-style-type: none"> i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες. ii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. iii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει διαγώνιους κάθετους. iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μια διγώνιος διχοτομεί μια γωνία. 	<p>Παραλληλόγραμμο και</p> <ul style="list-style-type: none"> i. Έχει μια ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. ii. Έχει μια ορθή γωνία και διαγώνιους κάθετους. iii. Έχει μια ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία. iv. Έχει διαγώνιους ίσες και κάθετους. v. Έχει διαγώνιους ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. vi. Έχει διαγώνιους ίσες και μια απ' αυτές διχοτομεί μια γωνία.