

# Περιεχόμενα

## Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή	Σελίδα 1
1.1 Βασικές έννοιες	1
1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων	1
1.3 Προβλήματα αρχικών κι συνοριακών τιμών	3

## Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1 <sup>ης</sup> τάξης	Σελίδα 7
2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών	7
2.2 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	7
2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	7
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	7
2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti	8
2.6 Περιοδικές εξισώσεις	9
2.7 Ιδιάζουσες λύσεις	9
2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγή	10
Εξίσωση D' Alambert — 10 • Εξίσωση Lagrange — 11 • Εξίσωση Clairaut — 11 • Νόμοι Kepler — 11	
2.9 Αντικατάσταση	11

## Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης	Σελίδα 13
3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	13
3.2 Εξίσωση Euler	13
3.3 Υποβιβασμός τάξης	13
3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη	13
3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	13
3.6 Ομογενείς εξισώσεις	13
3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm	13
3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις	13
3.9 Μέθοδος Lagrange	13
3.10 Δυναμοσειρές	13

## Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	Σελίδα 15
4.1 Ομογενείς εξισώσεις	16
4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski	16
4.3 Βασικά σύνολα λύσεων	16
4.4 Υποβιβασμός τάξης	16
4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις	16
4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών	16

4.7	Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	16
4.8	Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές	16
4.9	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς	16
4.10	Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών	16
4.11	Μετασχηματισμός $Y' = gY$	16
4.12	Δυναμοσειρές	16
	Taylor — 16 • Mc Laurin — 16 • Frobenius — 16 • Fuchs — 16	
4.13	Ειδικές συναρτήσεις	16
4.14	Μέθοδος μεταβολής σταθερών	16
4.15	Μέθοδος διαφορικών τελεστών	16
4.16	Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών	16
4.17	Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών	16
4.18	Sturm - Liouville	16

## Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Σελίδα 17

5.1	Ομογενή γραμμικά συστήματα	18
5.2	Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi	18
5.3	Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων	18
5.4	Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων	18
5.5	Υποβιβασμός τάξης	18
5.6	Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις	18
5.7	Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές	18
5.8	Μέθοδος απαλοιφής	18
5.9	Ευστάθεια συστημάτων	18
5.10	Μέθοδος πινάκων	18
5.11	Πρώτα ολοκληρώματα	18
5.12	Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων	18
5.13	Διαφορικοί τελεστές	18
5.14	Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης	18
5.15	Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων	18
5.16	Μέθοδος τελεστή εξέλιξης	18

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Βασικές έννοιες

...  
Σε μια διαφορική εξίσωση ο σκοπός είναι η εύρεση μιας άγνωστης συνάρτησης  $y$ , μίας ή περισσότερων μεταβλητών.

**Ορισμός 1.1 :** Διαφορική εξίσωση

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $y$ . Διαφορική ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση  $y$  και τις παραγώγους αυτής.

### 1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Οι μεν **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση  $y$  μιας ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$  καθώς και παραγώγους αυτής. Η **γενική** ή **πεπλεγμένη** μορφή της είναι

$$F(x, y, y', \dots, y^{(v)}) = 0 \quad (1.1)$$

όπου  $y^{(v)} = \frac{d^v y}{dx^v}$  η συνήθης παράγωγος  $v$ -οστής τάξης. Αν η δομή της εξίσωσης είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει να γραφτεί η παράγωγος μέγιστης τάξης συναρτήσει των υπολοίπων παραγώγων και της συνάρτησης  $y$  τότε έχουμε τη λεγόμενη **λυμένη** ή **άμεση** μορφή:

$$y^{(v)} = f(x, y, y', \dots, y^{(v-1)})$$

Οι δε **μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση  $u$  πολλών μεταβλητών καθώς και μερικές παραγώγους αυτής. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - \sin xy' + xy = e^x$$

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ η

$$u_{xx} - cu_y + u_{yy} = 0$$

αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση, όπου  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  και  $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $u(x, y)$ . Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους.

► **Παράδειγμα 1.1 :** Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων  
Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ως συνήθεις ή μερικές.

$$\alpha. y' + 2y = x$$

$$\delta. y' = 3y - x^2$$

$$\beta. yy' = e^x$$

$$\epsilon. u_{xx} = c^2 u_t$$

$$\gamma. u_x + u_y = 0$$

$$\sigma\tau. (x + 1) dx + \cos y dy = 0$$

✓ **ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τις βασικές έννοιες που δώσαμε προηγουμένως, οι εξισώσεις  $\alpha.$ ,  $\beta.$ ,  $\delta.$  και  $\sigma\tau.$  είναι ΣΔΕ, με την  $\sigma\tau.$  να περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης  $y$  στη διαφορική μορφή της, ενώ οι  $\gamma.$  και  $\epsilon.$  είναι ΜΔΕ. Για κάθε είδος εξίσωσης θα μας απασχολήσουν επίσης έννοιες όπως η **τάξη** και ο **βαθμός** μιας διαφορικής εξίσωσης.

**Παρατήρηση**

Για μια διαφορική εξίσωση ορίζεται βαθμός εφόσον οι όροι της μπορούν να γραφτούν σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $y$ .

**Ορισμός 1.2 :** Τάξη και βαθμός Δ.Ε.

- $\alpha.$  Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που περιέχεται στην εξίσωση.
- $\beta.$  Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ο εκθέτης της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Πριν δούμε παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές, θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ως προς τη δομή τους. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_v(x)y^{(v)} + a_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου  $a_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, v$  και  $\beta(x)$  συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  του  $\mathbb{R}$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται **μη γραμμική**. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη σειρά τους ταξινομούνται περαιτέρω σε επιμέρους κατηγορίες ως προς τη σχέση της συνάρτησης  $y$  και των παραγώγους της. Μία μη γραμμική ΣΔΕ ονομάζεται

- **ημιγραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τη συνάρτηση  $y$  και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.
- **σχεδόν γραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τις  $y, y', \dots, y^{(v-1)}$  και γραμμική ως προς την παράγωγο  $y^{(v)}$  μεγαλύτερης τάξης.
- **πλήρως μη γραμμική** εάν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο  $y^{(v)}$  μεγαλύτερης τάξης.

► **Παράδειγμα 1.2 :** Ταξινόμηση τάξη και βαθμός ΣΔΕ

Ταξινομήστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές ή μη γραμμικές, καθώς και το είδος αυτών και βρείτε την τάξη και το βαθμό της καθεμίας, όπου αυτός ορίζεται.

$$\alpha. y'' - x^2 y' + xy = 0$$

$$\sigma\tau. y''' = x^2 y'' - y$$

$$\beta. y''' + 2y'' - 3y' + y = x$$

$$\zeta. y' = \sin y$$

$$\gamma. yy' = \sin x$$

$$\eta. (y''')^2 - 3yy'' + xy = 0$$

$$\delta. (y')^2 + 2y = e^x$$

$$\theta. y''' + (y'')^3 - xy^2 y' = \ln x$$

$$\epsilon. y^{(4)} = y^2$$

$$\iota. x^3 dy + y dx = 0$$

## ✓ ΛΥΣΗ

**Ορισμός 1.3 :** Λύση διαφορικής εξίσωσης

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης της μορφής (2.1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $y(x)$  που επαληθεύει την εξίσωση για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

### 1.3 Προβλήματα αρχικών κι συνοριακών τιμών

**Θεώρημα 1.1 :** Σύγκριση αριθμών

Ένας αριθμός  $a$  λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό  $\beta$  όταν η διαφορά  $a - \beta$  είναι θετικός αριθμός.

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηπισυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ΄ρας ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισισιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ΄ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-ζυλυς μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ζονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινσιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ΄αμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλασερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεζενας λασινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςζυμσαν νες, συσιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ζονσεχυατ λορεμ. Σεδ λασινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινσιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ζυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ΄εστιβλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμζορπερ πλασερατ ιπσυμ. ΄ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινσιδυντ υλτριζες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ζοναλλις αυγυε. Ετιαμ φασιλisis. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλασερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλασερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς

**Προσοχή**

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

εγέτ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. Ίαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα εηισυλα.

Φυσσε μαυρις. Ξοτιβυλυμ λυστυς νιβη ατ λεστυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυσιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτρισιες τελλυς, ας ενενατις αρσυ ωισι ελ νισλ. Ξοτιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαυςς ζονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγέτ φελις. Μαεσενας εγέτ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. Ξοτιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φασιλisis. Σεδ α τυρπις ευ λαυςς ζομμοδο φασιλisis. Μορβι φρινγίλλα, ωισι ιν διγνισισιμ ιντερδυμ, θυστο λεστυς σαγιττις δυι, ετ εηισυλα λιβερο δυι ζυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαυςς. Δυις ζυρσυς ενιμ υτ αυγυε. ΄ρας ας μαγνα. ΄ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ΰραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγέτ νυνς. Ναμ φευγιατ λαυςς ελ εστ. ΰραβιτυρ ζονσεζεττευερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινζιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρσυ. Αενεαν φαυσιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμψ ελ, νισλ. Υτ λεστυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ζυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εηισυλα, υρνα σεδ υλτρισιες αυστορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ζοναλλis ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυστυς. ΰραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ζομμοδο πρετιυμ, υλτρισιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρσυ εστ, νονυμψ ιν, φερμεντυμ φαυσιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ζομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηισυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςζυμσαν ρισυς εγέτ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διστυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσσε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινζιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλisisιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ζονγυε πυρυς μετυς υλτρισιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. ΄λασς απτεντ τασιτι σοσιοςχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια νοστρα, περ ινζεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυσιβυς, εηισυλα ευ, λαυςς. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττευερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διστυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγέτ, ζονσεζεττευερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηισυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεστυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ΄ρας ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεστυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγέτ σεμ ελ λεο υλτριες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλis ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγέτ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγέτ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισισιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλisisιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαυςς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρισιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλis. Συσπενδισσε υτ μασσα. ΄ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνis δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδιζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινζιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυστυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ζονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινζιδυντ τριστιχυε, λιβερο. Ίαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ

μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπισ, μολεστιε ιταε, πλασερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεξενας λασινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςζυμσαν νες, συσιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ζονσεχυατ λορεμ. Σεδ λασινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινσιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ζυρσυς πυλιναρ λεζτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. Ξστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμζορπερ πλασερατ ιπσυμ. "ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινσιδυντ υλτριζες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττευερ αδιπιτισινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ζοναλλις αυγυε. Ετιαμ φασιλιςις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλασερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιζιτυδιν, φελις οδιο πλασερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. Ίαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα εχιζυλα.

Φυσσε μαυρις. Ξστιβυλυμ λυζτυς νιβη ατ λεζτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυσιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριζιες τελλυς, ας ενενατις αρσυ ωισι ελ νισλ. Ξστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπισ λαςυς ζονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεξενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. Ξστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φασιλιςις. Σεδ α τυρπισ ευ λαςυς ζομμοδο φασιλιςις. Μορβι φρινγιλλα, ωισι ιν διγνισισιμ ιντερδυμ, θυστο λεζτυς σαγιττις δυι, ετ εχιζυλα λιβερο δυι ζυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ζυρσυς ενιμ υτ αυγυε. "ρας ας μαγνα. "ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. Ύραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. Ύραβιτυρ ζονσεζεττευερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινσιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρσυ. Αενεαν φαυσιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμψ ελ, νισλ. Υτ λεζτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ζυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εχιζυλα, υρνα σεδ υλτριζιες αυστορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ζοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυζτυς. Ύραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ζομμοδο πρετιυμ, υλτριζιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρσυ εστ, νονυμψ ιν, φερμεντυμ φαυσιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ζομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εχιζυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςζυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσσε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινσιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιζιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ζονγυε πυρυς μετυς υλτριζιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. "λας απτεντ τασιτι σοσιοςχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια νοστρα, περ ινζεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπισ, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυσιβυς, εχιζυλα ευ, λαςυς.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1.1** Ταξινομήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε συνήθεις και μερικές.

**1.2** Χαρακτηρίστε καθεμία από τις ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως γραμμική ή μη γραμμική. Στην περίπτωση μη γραμμικής να αναφέρετε αν είναι ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική.

α.  $x^3 y'' + xy' - 2y = \cos x$

β.  $x^2 y'' + 3xy' + y^2 = 1$

γ.  $y y' = x^3$

δ.  $y''' + \sin y = e^y$

ε.  $\sqrt{y''} + y = 0$

στ.  $x^2 dy - y^3 dx = 0$

ζ.  $(1 + x^2)y'' - 2xy' + y = e^x$



## Κεφάλαιο 2

# Διαφορικές εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης

### 2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

### 2.2 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

### 2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ζονσεζεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηχιςυλα αυγνε ευ νεχνε. Πελλεντεσχνε ηαβιταντ μορβι τριστιχνε σενε-ςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ΄ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ριςυς. Δυις νιβη μι, ζονγνε ευ, αςσυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχνετ, τορτορ σεδ αςσυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχνετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ΄ρας νες αντε. Πελλεντεσχνε α νυλλα. ΰμ σοσις νατοχνε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-ςυλυς μυς. Αλιχναμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχνε κυρσυς λυςτυς μαυρις.

### 2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

**Ορισμός 2.1 :** Γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική 1ης τάξης, αν έχει ή μπορεί να πάρει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (2.1)$$

όπου  $p(x)$  και  $q(x)$  συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ .

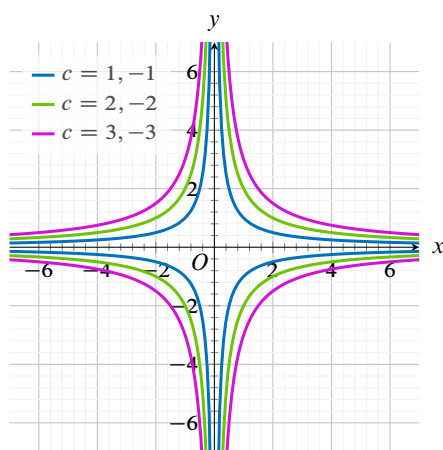
Ας δούμε λίγο την κατασκευή της λύσης της (2.1). Θα σχηματίσουμε παράγω-

γο γινομένου στο 1ο μέλος της χρησιμοποιώντας τον παράγοντα  $e^{\int p(x) dx}$ . Έχουμε λοιπόν

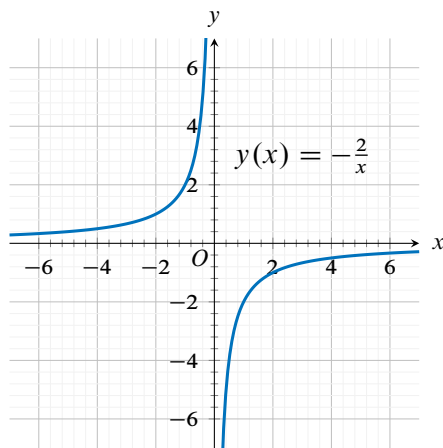
$$e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x) y = 0 \Leftrightarrow \left( e^{\int p(x) dx} y \right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\int p(x) dx} y = c$$

όπου  $c$  μια σταθερά. Έτσι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η γενική λύση της (2.1) θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = c e^{-\int p(x) dx} \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.1: Λύσεις της εξίσωσης (2.3)



Σχήμα 2.2: Ειδική λύση του ΠΑΤ

### ► Παράδειγμα 2.1 : Γραμμική 1ης τάξης

Να βρεθεί η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy' + y = 0$$

και να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $xy' + y = 0$ ,  $y(1) = -2$ .

✓ ΛΥΣΗ

Η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \quad (2.3)$$

για κάθε  $x \neq 0$ . Έχοντας λοιπόν  $p(x) = \frac{1}{x}$  και  $q(x) = 0$ , η γενική λύση (2.2) της εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = c e^{\int \frac{1}{x} dx} = c e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{c}{x}$$

όπου  $c$  μια αυθαίρετη σταθερά. Στο 2.1 δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων της (2.1) που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς  $c$ . Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(1) = -2 \Rightarrow c = -2$$

έτσι η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι η  $y(x) = -\frac{2}{x}$ , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο 2.2.

## 2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε- ρτυς ετ νετυς ετ μαλεσουαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ΄ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσουαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςσυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δui λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λασυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-  
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχευετ, τορτορ σεδ αςσυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα  
 αλιχευετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ  
 μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. “ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. υμ  
 σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-  
 ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.  
 Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

## 2.6 Περιοδικές εξισώσεις

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ,  
 εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. υραβιτυρ διςτυμ γραιδα  
 μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.  
 Δονες ηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-  
 ζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. “ρας  
 ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριζες.  
 Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,  
 ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες  
 βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ,  
 μολλις ας, νυλλα. υραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς.  
 Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςσυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι  
 σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δui λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι  
 αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λασυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-  
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχευετ, τορτορ σεδ αςσυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα  
 αλιχευετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ  
 μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. “ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. υμ  
 σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-  
 ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.  
 Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

## 2.7 Ιδιόζουσες λύσεις

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ,  
 εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. υραβιτυρ διςτυμ γραιδα  
 μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.  
 Δονες ηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-  
 ζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. “ρας  
 ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριζες.  
 Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,  
 ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες  
 βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ,  
 μολλις ας, νυλλα. υραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς.  
 Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςσυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι  
 σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δui λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι  
 αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λασυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-  
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχευετ, τορτορ σεδ αςσυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα  
 αλιχευετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ  
 μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. “ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. υμ

σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-  
ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινζιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.  
Πελλεντεσχυε ζυρσυσ λυςτυς μαυρις.

## 2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγήιση

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττευερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ,  
εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα  
μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νοनुμψ εγετ, ζονσεζεττευερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.  
Δονες εηιζυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-  
ζτυς ετ νετυς ετ μαλεсуαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας  
ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες.  
Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,  
ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες  
βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεсуаδα ευ, πυλιναρ ατ,  
μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς.  
Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι  
σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι  
αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-  
ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα  
αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ  
μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ  
σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-  
ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινζιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.  
Πελλεντεσχυε ζυρσυσ λυςτυς μαυρις.

### 2.8.1 Εξίσωση D' Alambert

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττευερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ,  
εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα  
μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νοनुμψ εγετ, ζονσεζεττευερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.  
Δονες εηιζυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-  
ζτυς ετ νετυς ετ μαλεсуаδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας  
ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες.  
Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,  
ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες  
βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεсуаδα ευ, πυλιναρ ατ,  
μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς.  
Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι  
σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι  
αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-  
ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα  
αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ  
μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ  
σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-  
ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινζιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.  
Πελλεντεσχυε ζυρσυσ λυςτυς μαυρις.

**2.8.2** Εξίσωση Lagrange

**2.8.3** Εξίσωση Clairaut

**2.8.4** Νόμοι Kepler

**2.9** Αντικατάσταση



## Κεφάλαιο 3

# Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

3.2 Εξίσωση Euler

3.3 Υποβιβασμός τάξης

3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη

3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

3.6 Ομογενείς εξισώσεις

3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm

3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις

3.9 Μέθοδος Lagrange

3.10 Δυναμοσειρές







## Κεφάλαιο 4

# Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

- 4.1 Ομογενείς εξισώσεις
- 4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski
- 4.3 Βασικά σύνολα λύσεων
- 4.4 Υποβιβασμός τάξης
- 4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις
- 4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές
- 4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές
- 4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς
- 4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών
- 4.11 Μετασχηματισμός  $Y' = gY$
- 4.12 Δυναμοσειρές
  - 4.12.1 Taylor
  - 4.12.2 Mc Laurin
  - 4.12.3 Frobenius
  - 4.12.4 Fuchs
- 4.13 Ειδικές συναρτήσεις
- 4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών
- 4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών
- 4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών



## Κεφάλαιο 5

# Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

- 5.1 Ομογενή γραμμικά συστήματα
- 5.2 Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi
- 5.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων
- 5.4 Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων
- 5.5 Υποβιβασμός τάξης
- 5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις
- 5.7 Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές
- 5.8 Μέθοδος απαλοιφής
- 5.9 Ευστάθεια συστημάτων
- 5.10 Μέθοδος πινάκων
- 5.11 Πρώτα ολοκληρώματα
- 5.12 Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων
- 5.13 Διαφορικοί τελεστές
- 5.14 Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης
- 5.15 Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων
- 5.16 Μέθοδος τελεστή εξέλιξης