

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τρίγωνα

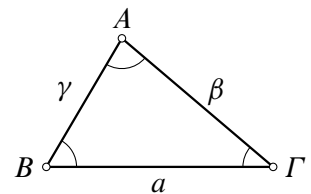
ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΓΩΝΟ - ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τρίγωνο ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες.

- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές, οι γωνίες και οι κορυφές του.
- Κάθε τρίγωνο συμβολίζεται με τη χρήση των ονομάτων των τριών κορυφών του για παράδειγμα $AB\Gamma$.



$$B\Gamma \rightarrow a, \quad A\Gamma \rightarrow \beta, \quad AB \rightarrow \gamma$$

- Οι πλευρές ενός τριγώνου, εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος, μπορούν εναλλακτικά να συμβολιστούν με ένα μικρό γράμμα, αντίστοιχο του ονόματος της απέναντι κορυφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τα δευτερεύοντα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος του. Αναλυτικά ορίζονται ως εξής :

1. Διάμεσος

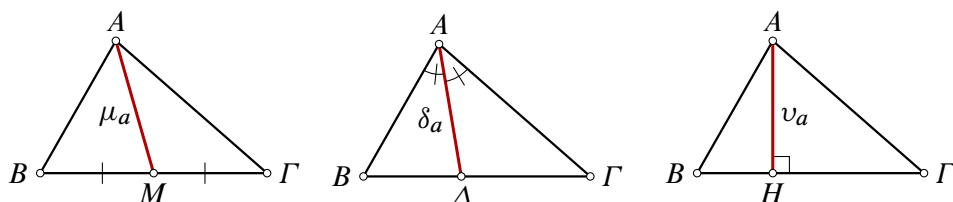
Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

- Κάθε διάμεσος συμβολίζεται είτε με τα γράμματα των δύο άκρων της είναι με το γράμμα μ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διάμεσος.
- Οι διάμεσοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\mu_a, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

2. Διχοτόμος

Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο χωρίζει μια γωνία του τριγώνου σε δύο ίσα μέρη.

- Κάθε διχοτόμος συμβολίζεται εναλλακτικά με το γράμμα δ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
- Οι διχοτόμοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$.



3. Ύψος

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει το ένα άκρο του σε μια κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο με την απέναντι πλευρά.

- Τα ύψη ενός τριγώνου συμβολίζονται με το γράμμα υ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
- Τα ύψη για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\upsilon_a, \upsilon_b, \upsilon_\gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τα τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς το είδος των γωνιών που περιέχουν και ως προς τη σχέση των πλευρών μεταξύ τους.

1. Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Με κριτήριο το είδος των γωνιών που περιέχει ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα παρακάτω τρία είδη τριγώνων.

Οξυγώνιο	Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο
<p>$\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} < 90^\circ$</p>	<p>$\hat{B} = 90^\circ$</p>	<p>$\hat{B} > 90^\circ$</p>
Ένα τρίγωνο ονομάζεται οξυγώνιο εαν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο εαν έχει μια ορθή γωνία.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο εαν έχει μια αμβλεία γωνία.

2. Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

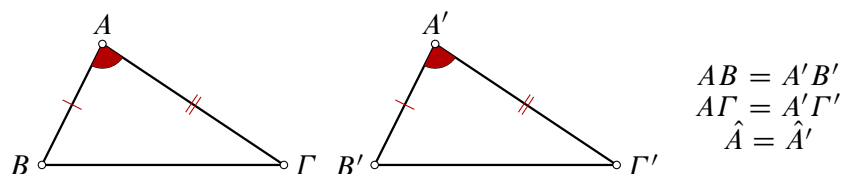
Με βάση τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου χωρίζουμε τα τρίγωνα στις παρακάτω τρεις κατηγορίες.

Σκαληνό	Ισοσκελές	Ισόπλευρο
<p>$AB \neq A\Gamma \neq B\Gamma$</p>	<p>$AB = A\Gamma$</p>	<p>$AB = A\Gamma = B\Gamma$</p>
Ένα τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό εαν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους άνισες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισοσκελές εαν έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται βάση .	Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισόπλευρο εαν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

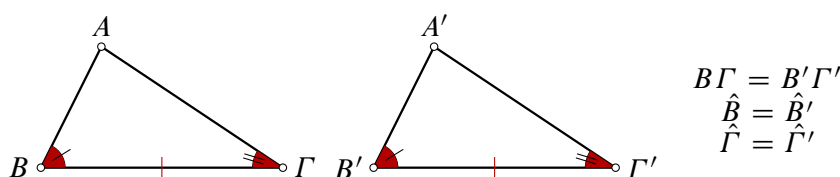
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : 1^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αν ένα τρίγωνο έχει δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες μεταξύ τους ίσες τότε είναι ίσα.



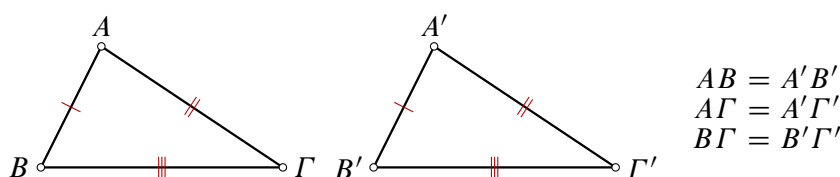
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : 2^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : 3^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

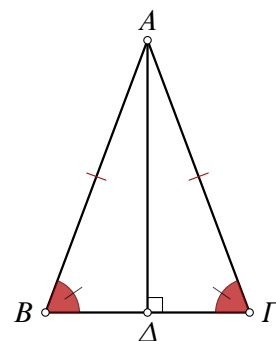
Αν δυο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : 1^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο

- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος και ύψος.



ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : 2^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

Οι γωνίες ισοπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : 3^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

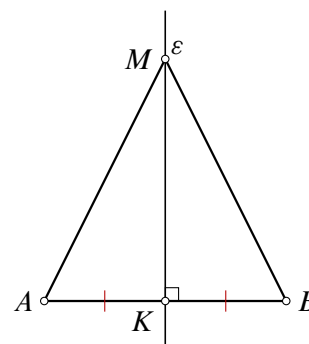
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος και διχοτόμος του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : 1^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : 2^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο το οποίο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα ανήκει στη μεσοκάθετό του.



ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : 1^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : 2^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν οι χορδές δύο τόξων μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : 3^ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν οι χορδές δύο τόξων μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

