Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

10 Αυγούστου 2017

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

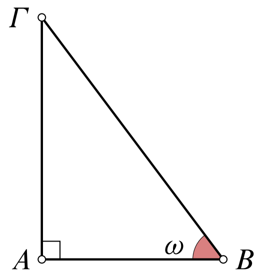
Τριγωνομετρία

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Έστω $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με $A = 90°$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξείων γωνιών του τριγώνου ορίζονται ως εξής :



Σχήμα 1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{ημ}\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{συν}\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.

$$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad \text{εφ}\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την απέναντι κάθετη.

$$\text{Συνεφαπτομένη} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}} \quad , \quad \text{σφ}\omega = \frac{AB}{A\Gamma}$$

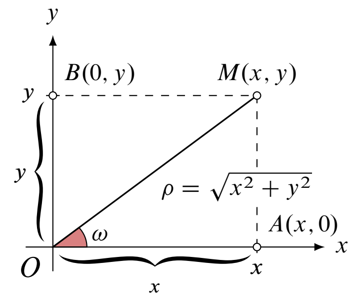
Υπάρχουν και επιπλέον δύο τριγωνομετρικοί αριθμοί τους οποίους συναντούμε σπανιότερα από τους άλλους και τους βλέπουμε κυρίως σε εφαρμογές της τριγωνομετρίας στη μηχανική στη ναυσιπλοοία και άλλες επιστήμες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΤΡΙΓ. ΑΡ. ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και $M(x, y)$ ένα σημείο του. Ενώνοντας το σημείο M με την αρχή των αξόνων, το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει δημιουργεί μια γωνία ω με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ox. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM είναι :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}y$ ορίζονται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του σημείου και είναι



Σχήμα 2: Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων.

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την τεταγμένη του.

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{y} \quad . \quad y \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ - ΤΟΞΩΝ

Μονάδες μέτρησης γωνιών - τόξων λέγονται οι γωνίες ή τα τόξα αντίστοιχα με τα οποία μετράμε το μέτρο (άνοιγμα) των πλευρών μιας γωνίας ή αντίστοιχα το μέτρο ενός τόξου. Οι βασικές μονάδες μέτρησης για τη μέτρηση γωνιών ή τόξων είναι :

1. **Μοίρα**
   Μοίρα ονομάζεται το τόξο το οποίο είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε τη μοίρα ως τη γωνία η οποία αν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου του κύκλου.
   - Συμβολίζεται με 1°.
   - Μια μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά $(60')$ και κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά $(60'')$.

2. **Ακτίνιο**
   Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Συμβολίζεται με $1rad$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες και ακτίνια αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

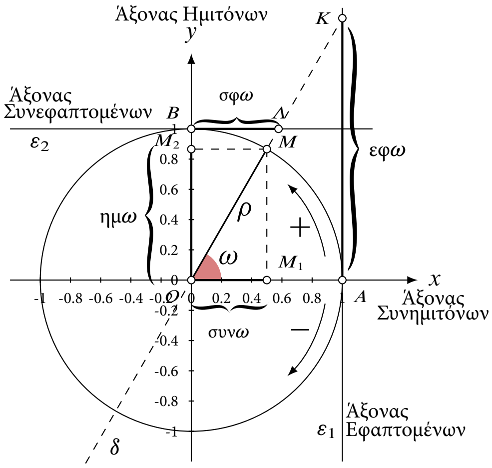
Βασικές Γωνίες									
Μοίρες	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Σχήμα									
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

Πίνακας 1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

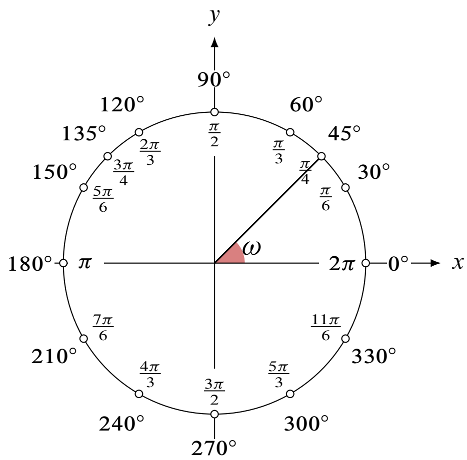
ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος με ακτίνα ίση με τη μονάδα και κέντρο την αρχή των αξόνων ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών.

Τριγωνομετρικός Κύκλος



Σχήμα 3: Τριγωνομετρικός κύκλος



Σχήμα 4: Βασικές γωνίες

- Κάθε γωνία ω έχει πλευρές, τον θετικό ημιάξονα Ox και την ακτίνα ρ του κύκλου, μετρώντας τη γωνία αυτή αριστερόστροφα, φορά που ορίζεται ως **θετική**.
- Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ είναι ο άξονας συνημιτόνων ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ ο άξονας ημιτόνων.
- Κάθε σημείο M του κύκλου έχει συντεταγμένες $M(\text{συν}\omega, \text{ημ}\omega)$.
- Η τετμημένη του σημείου είναι ίση με το συνημίτονο της γωνίας, ενώ η τεταγμένη ίση με το ημίτονο της.

$$x = \text{συν}\omega \quad , \quad y = \text{ημ}\omega$$

- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $A(1, 0)$ είναι ο **άξονας των εφαπτομένων**. Η εφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας ε_1 με το φορέα δ της ακτίνας.

$$y_K = \text{εφ}\omega$$

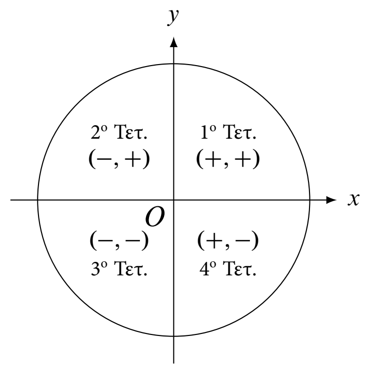
- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $B(0,1)$ είναι ο **άξονας των συνεφαπτομένων**. Η συνεφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας ε_2 με το φορέα δ της ακτίνας.

$$x_\kappa = \sigma\varphi\omega$$

Πιο κάτω βλέπουμε τα τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία χωρίσουν οι άξονες το επίπεδο και τον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών σε κάθε τεταρτημόριο.

Τεταρτημ./Τρ. Αριθμός	**ημω**	**συνω**	**εφω**	**σφω**
1° Τεταρτημόριο	+	+	+	+
2° Τεταρτημόριο	+	−	−	−
3° Τεταρτημόριο	−	−	+	+
4° Τεταρτημόριο	−	+	−	−

Πίνακας 2: Πρόσημα τριγωνομετρικών αριθμών



Σχήμα 5: Τεταρτημόρια και πρόσημα τεταρτημορίων τριγωνομετρικού κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας ω παίρνει τιμές από -1 μέχρι 1. Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες :

i. $-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1 \ , \ -1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$

ii. $|\text{ημ}\omega| \leq 1 \ , \ |\text{συν}\omega| \leq 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΤΡ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω της οποίας το μέτρο είναι μικρότερο του ενός κύκλου είναι ίσοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας που θα προκύψει εαν στρέψουμε την ω κατά πολλαπλάσια του κύκλου.

$$\begin{array}{ll} \text{ημ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{ημ}\omega & \text{συν}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{συν}\omega \\ \text{εφ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{εφ}\omega & \text{σφ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{σφ}\omega \end{array}$$

ή ισοδύναμα με τη βοήθεια ακτινίων

$$\begin{array}{ll} \text{ημ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{ημ}\omega & \text{συν}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{συν}\omega \\ \text{εφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{εφ}\omega & \text{σφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{σφ}\omega \end{array}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ
Αν μ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και a το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{a}{\pi}$$