ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2 Ιουλίου 2015

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών της.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ

Προκειμένου να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα μιας από τις βασικές ταυτότητες

1ο Βήμα : Εξετάζουμε τη μορφή της παράστασης που θέλουμε να αναπτύξουμε ώστε να αναγνωρίσουμε το είδος της ταυτότητας που θα χρησιμοποιήσουμε

2ο Βήμα : Επιλέγουμε την κατάλληλη ταυτότητα από αυτές της λίστας στον **Ορισμό 1** και γράφουμε το ανάπτυγμα, κάνοντας απλή αντικατάσταση στη θέση των αριθμών a, β τις μεταβλητές που μας δίνει η άσκηση.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ

Αν θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας ταυτότητας, γνωρίζοντας από τον **Ορισμό 1** ότι μια ταυτότητα είναι μια ισότητα τότε

1ος Τρόπος : **Πράξεις σε ένα μέλος**
Εκτελούμε τις πράξεις στο πιο πολύπλοκο μέλος της ισότητας και με τη χρήση των βασικών ταυτοτήτων και άλλων κανόνων της Άλγεβρας, με διαδοχικά βήματα καταλλήγουμε στο άλλο μέλος της.

2ος Τρόπος : **Πράξεις και στα δύο μέλη**
Αν οι πράξεις σε ένα μόνο μέλος της ταυτότητας δε μας οδηγήσουν στο άλλο μέλος της με ευκολία, τότε μπορούμε να εκτελέσουμε πράξεις και στα δύο μέλη της, αν αυτό είναι δυνατό και με διαδοχικά βήματα να καταλλήξουμε σε μια ισότητα που είναι φανερά αληθής.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ

Σε μεγάλο αριθμό ασκήσεων μας ζητείται να υπολογίσουμε την τιμή μιας πολύπλοκης αριθμητικής παράστασης και παρατηρούμε οτι με τις βασικές πράξεις, αυτό είναι αρκετά χρονοβόρο. Έτσι μπορούμε να εκμεταλευτούμε μια ταυτότητα ώστε να απλοποιηθεί η διαδικασία αυτή. Ετσι

1ο Βήμα : Εξετάζουμε αν η δοσμένη αριθμητική παράσταση έχει τη μορφή ενός μέλους κάποιας βασικής ή άλλης αποδεδειγμένης ταυτότητας.

2ο Βήμα : Βρίσκουμε την αντιστοιχία μεταξύ αριθμών της παράστασης και μεταβλητών της ταυτότητας.

3ο Βήμα : Γράφουμε το άλλο μέλος της ταυτότητας αντικαθιστόντας τις μεταβλητές με τους αριθμούς της παράστασης και εκτελούμε τις πράξεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΡΡΗΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΣΕ ΡΗΤΟ

Κάθε κλάσμα με άρρητο παρονομαστή της μορφής $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{\beta}}$ με a, β, A πραγματικούς αριθμούς, μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή κάνοντας χρήση της ταυτότητας **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά** που βλέπουμε στον **Ορισμό 1**.

1ο Βήμα : Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή. (Συζυγή παράσταση του παρονομαστή ονομάζουμε την παράσταση που χρειάζεται για να σχηματιστεί η ταυτότητα. Αν ο παρονομαστής έχει άθροισμα, τότε χρειαζόμαστε τη διαφορά και αντίστροφα.)

Παρονομαστής		**Συζυγής παράσταση**
$\sqrt{a}+\sqrt{\beta}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{a}-\sqrt{\beta}$
$\sqrt{a}-\sqrt{\beta}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{a}+\sqrt{\beta}$

2ο Βήμα : Μετά τις πράξεις, στον παρονομαστή προκύπτει το ανάπτυγμα της ταυτότητας με αποτέλεσμα οι ρίζες να υψωθούν στο τετράγωνο και να απαλοιφθούν.

$$\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{\beta}}=\frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{\beta}\right)}=\frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{a}^2-\sqrt{\beta}^2}=\frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\right)}{a-\beta}$$