ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Εξισώσεις - Ανισώσεις

1.1 Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου όπως $a, \beta, x, y, \ldots$

Ορισμός 1.2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αριθμητική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών.

Ορισμός 1.3 : ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αλγεβρική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

- **Τιμή** μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει ύστερα από πράξεις εαν αντικατασταθούν οι μεταβλητές της με αριθμούς.
- Κάθε προσθετέος μέσα σε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **όρος** της παράστασης.

Ορισμός 1.4 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ
Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας τους όμοιους όρους της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Αν a, β, γ είναι τρεις οποιοιδήποτε αριθμοί τότε το γινόμενο του ενός με το άθροισμα των άλλων δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

1.2 Εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.5 : ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή. Μια εξίσωση με έναν άγνωστο θα είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου a, β είναι οποιοιδήποτε αριθμοί.

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.

$$1\text{ο μέλος} = 2\text{ο μέλος}$$

- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εαν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εαν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.

Ορισμός 1.6 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ
Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Σε κάθε ισότητα εαν τοποθετήσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, η σχέση που προκύπτει είναι ξανά ισότητα :

$$a=\beta \Rightarrow \begin{cases} a+\gamma=\beta+\gamma \\ a-\gamma=\beta-\gamma \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} a\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma \\ \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}\ ,\ \gamma\neq 0 \end{matrix}$$

Θεώρημα 1.3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ
Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων $a=\beta$ και $\gamma=\delta$ προκύπτει ισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κατά μέλη.

$$\text{Αν } a=\beta \ \text{ και } \ \gamma=\delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{1. Πρόσθεση κατά μέλη}} & a+\gamma=\beta+\delta \\ \textbf{\textit{2. Αφαίρεση κατά μέλη}} & a-\gamma=\beta-\delta \\ \textbf{\textit{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} & a\cdot\gamma=\beta\cdot\delta \\ \textbf{\textit{4. Διαίρεση κατά μέλη}} & \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}\ ,\ \gamma\cdot\delta\neq 0 \end{cases}$$

1.3 Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή. Μια ανίσωση μιας μεταβλητής θα έχει τη μορφή

$$ax+\beta>0 \text{ ή } ax+\beta<0$$

όπου a,β οποιοιδήποτε αριθμοί.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x), Q(x), R(x)$ είναι αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Εαν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ a - \gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περπτώσεις :

   i. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.

   ii. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

Θεώρημα 1.5 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων προκύπτει ανισότητα, με 1^o μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και 2^o μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους με φορά ίδια της αρχικής. Ομοίως πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη δύο ανισότητες προκύπτει ανισότητα με φορά ίδια της αρχικής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο ανισότητες κατά μέλη πρέπει όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \quad \text{και} \quad \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{1. Πρόσθεση κατά μέλη}} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{\textit{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \quad , \quad \text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

**ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

Θεώρημα 2.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για οποιουσδήποτε αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν την τετραγωνική τους ρίζα.

Ιδιότητα	Συνθήκη
Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad x \geq 0$
Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \quad , \quad x$ πραγματικός
Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad , \quad x, y \geq 0$
Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad , \quad x \geq 0$ και $y > 0$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_\nu} \quad , \quad x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$$

2.2 Άρρητοι - Πραγματικοί αριθμοί

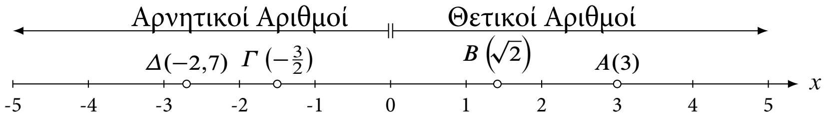
ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.2 : ΡΗΤΟΣ - ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Ρητός ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος μπορεί να γραφτεί στη μορφή κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με ακέραιους όρους a, β. Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός ονομάζεται **άρρητος**.

Ορισμός 2.3 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο O στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.



- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y με την οποία **κάθε** τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε **μια μόνο** τιμή της μεταβλητής y.

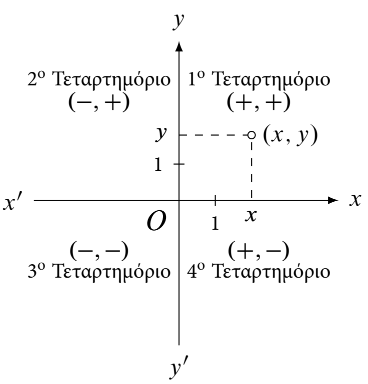
- Κάθε συνάρτηση γράφεται σαν ισότητα η οποία περιέχει και τις δύο μεταβλητές. Η ισότητα αυτή λέγεται **εξίσωση** της συνάρτησης.
- Αν $y = A(x)$ όπου $A(x)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση του x, τότε λέμε ότι η μεταβλητή y γραφεται **ως συνάρτηση** του x.

3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.

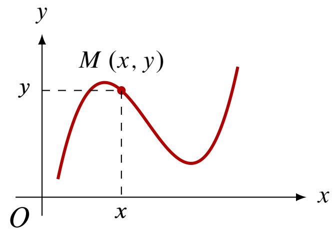


- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.

- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

Ορισμός 3.3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση της.

- Το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Η εξίσωση $y = A(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.

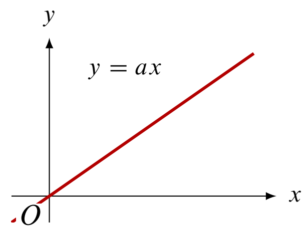


3.3 Η συνάρτηση $y = ax$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.4 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax$
Η συνάρτηση $y = ax$ είναι η συνάρτηση που συνδέει δύο **ανάλογα** ποσά x, y.

- Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **κλίση** της ευθείας. Ισούται με $a = \frac{y}{x}$.

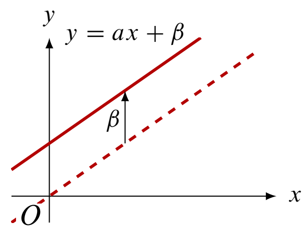


3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.5 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax + \beta$
Η συνάρτηση $y = ax + \beta$ παριστάνει ευθεία γραμμή η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $y = ax$.

- Ο αριθμός a ονομάζεται **κλίση** της ευθείας.
- Η ευθεία $y = ax + \beta$ με $\beta \neq 0$ αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση της ευθείας $y = ax$ ίση με β μονάδες.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.1 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $ax + \beta y = \gamma$
Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία γραμμή αν ισχύει $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

- Οι εξισώσεις της μορφής $y = \kappa$ παριστάνουν οριζόντιες ευθείες.
- Οι εξισώσεις της μορφής $x = \kappa$ παριστάνουν κατακόρυφες ευθείες.

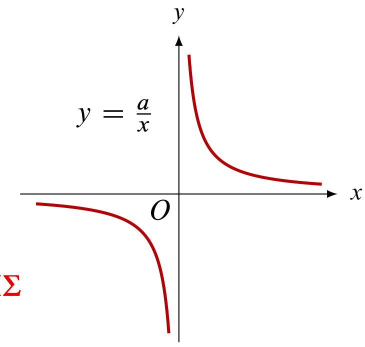
3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.6 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$

Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ είναι η συνάρτηση η οποία συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x, y.

- Η γραφική της παράσταση ονομάζεται **υπερβολή**. Αποτελείται από δύο κλάδους όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Ο αριθμός a είναι διάφορος του μηδενός.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.2 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$

Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ ισχύουν τα εξής:

i. Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ii. Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής.

iii. Αν $a > 0$ η υπερβολή βρίσκεται στο 1^o και στο 3^o τεταρτημόριο ενώ αν $a < 0$ βρίσκεται στο 2^o και στο 4^o τεταρτημόριο.