Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

# Άλγεβρα
# Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΗΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

- 100 Ορισμοί
- 250 Θεωρήματα
- 400 Μέθοδοι για λύση ασκήσεων
- 200 Λυμένα παραδείγματα
- 500 Άλυτες ασκήσεις και προβλήματα
- 200 Επαναληπτικά θέματα
- Απαντήσεις ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**Β΄ Λύκειου**

**Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός**
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ΙΣΒΝ : ...
Εκδόσεις : ...


Φιλολογική Επιμέλεια :
**Μαρία Πρεντουλή** - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :**Σπύρος Φρόνιμος**

Εξώφυλλο :
**Δημήτρης Πρεντουλής**

*Στη γυναίκα μου.*

# Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.

# Περιεχόμενα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Σύνολα - Πιθανότητες

## *1.1 Σύνολα*

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΣΥΝΟΛΟ**
Σύνολο ονομάζεται μια συλλογή όμοιων αντικειμένων, τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακριτά μεταξύ τους.

- Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **στοιχεία**.
- Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.

**ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ**

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Το σύνολο των αριθμών από το 0 εως το άπειρο όπου κάθε αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο. Συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και είναι : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αντίθετους τους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ και είναι : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$ και είναι : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \middle| a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$.
4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός. Κατά κύριο λόγο, άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες που δεν έχουν ρητό αποτέλεσμα, ο αριθμός $\pi$ κ.τ.λ.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και είναι : $\mathbb{R} = \{\text{όλοι οι αριθμοί}\}$.

Τα παραπάνω σύνολα χωρίς το μηδενικό τους στοιχείο συμβολίζονται αντίστοιχα με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$.

**Ορισμός 2 : ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ**
Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα $A, B$ τα οποία έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Ισοδύναμα, τα σύνολα , λέγονται ίσα εαν ισχύουν οι σχέσεις :

1. Κάθε στοιχείο του $A$ είναι και στοιχείο του $B$

2. Κάθε στοιχείο του $B$ είναι και στοιχείο του $A$.

### Ορισμός 3 : ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

Ένα σύνολο $A$ λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου $B$ όταν κάθε στοιχείο του $A$ είναι και στοιχείο του $B$. Συμβολίζεται με τη χρήση του συμβόλου $\subseteq$ ως εξής :

$$A \subseteq B$$

### Ορισμός 4 : ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

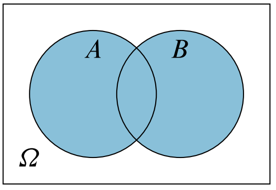
Κενό ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\}$.

### Ορισμός 5 : ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ

Βασικό ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία που μπορούμε να επιλέξουμε, από τα οποία φτιάχνουμε άλλα σύνολα. Συμβολίζεται με $\Omega$.

### Ορισμός 6 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

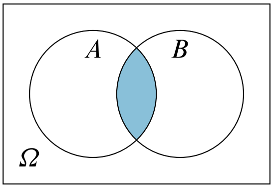
1. **Ένωση**
Ένωση δύο υποσυνόλων $A, B$ ενός βασικού συνόλου $\Omega$ ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του $\Omega$ τα οποία ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $A$ και $B$. Συμβολίζεται με $A \cup B$.




$$A \cup B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Η ένωση των συνόλων $A$ και $B$ περιέχει τα κοινά και μή κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Τα κοινά στοιχεία αναγράφονται μια φορά.

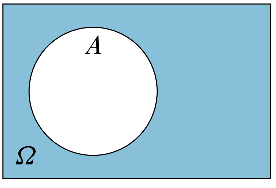
2. **Τομή**
Τομή δύο υποσυνόλων $A, B$ ενός βασικού συνόλου $\Omega$ ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του $\Omega$ τα οποία ανήκουν και στα δύο σύνολα $A$ και $B$. Συμβολίζεται με $A \cap B$.




$$A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Η τομή των συνόλων $A$ και $B$ περιέχει μόνο τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.

3. **Συμπλήρωμα**
Συμπλήρωμα ενός συνόλου $A$ ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου $\Omega$ τα οποία **δεν** ανήκουν στο σύνολο $A$. Συμβολίζεται με $A'$.

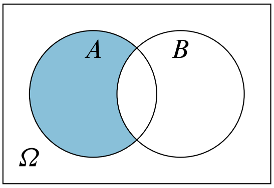



$$A' = \{x \in \Omega \,|\, x \notin A\}$$

Ονομάζεται συμπλήρωμα του  γιατί η ένωσή του με το σύνολο αυτό μας δίνει το βασικό σύνολο $\Omega$.

4. **Διαφορά**

Διαφορά ενός συνόλου $B$ από ένα σύνολο $A$ ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου $\Omega$ τα οποία ανήκουν μόνο στο σύνολο $A$, το πρώτο σύνολο της διαφοράς. Συμβολίζεται με $A - B$.




$$A - B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ**
Για οποιαδήποτε σύνολα $A, B, \Gamma$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες που αφορούν τη σχέση του υποσυνόλου :

i. Για κάθε σύνολο $A$ ισχύει : $A \subseteq A$.
ii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$.
iii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

# 1.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 7 : ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ**
Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλευθεί με απόλυτη βεβαιότητα όσες φορές κι αν αυτό επαναληφθεί, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

**Ορισμός 8 : ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ**
Δειγματικός χώρος ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. Ο δειγματικός αποτελέι βασικό σύνολο.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$$

**Ορισμός 9 : ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ**
Ενδεχόμενο ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία του δειγματικού χώρου ενός πειράματος.

- Κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού του χώρου.
- Συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα π.χ. : $A, B, \ldots$
- Τα ενδεχόμενα που έχουν ένα στοιχείο ονομάζονται **απλά** ενδεχόμενα, ενώ αν περιέχουν περισσότερα στοιχεία ονομάζονται **σύνθετα**.

- Εαν το αποτέλεσμα ενός πειράματος είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου τότε το ενδεχόμενο **πραγματοποιείται**.
- Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις.
- Ο δειγματικός χώρος $\Omega$ ονομάζεται **βέβαιο** ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο ονομάζεται **αδύνατο** ενδεχόμενο.
- Εαν δύο ενδεχόμενα $A, B$ δεν έχουν κοινά στοιχεία τότε ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή ξένα μεταξύ τους δηλαδή :
$$A, B \text{ ασυμβίβαστα } \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

**Ορισμός 10 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ**
Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων ορίζονται ακριβώς όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Κάθε ορισμός προσαρμόζεται ώστε να περιγράψει την ισχύ του ενδεχομένου σε κάθε περίπτωση.

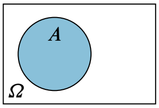
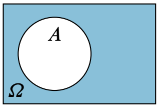
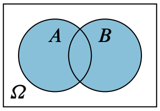
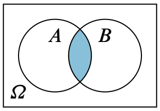
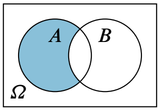
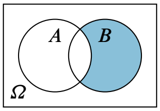
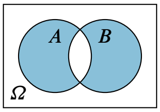
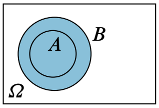
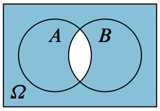
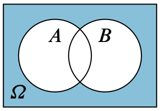
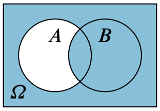
1. **Ένωση**
Ένωση δύο ενδεχομένων $A, B$ ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η ένωση πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα $A$ ή $B$.
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ή } x \in B$$

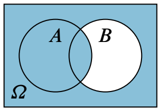
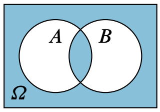
2. **Τομή**
Τομή δύο ενδεχομένων $A, B$ ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η τομή πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$.
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B$$

3. **Συμπλήρωμα**
Συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου $A$ ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα στοιχεία εκείνα τα οποία **δεν** ανήκουν στο σύνολο $A$. Το συμπλήρωμα πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το $A$.
$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

4. **Διαφορά**
Διαφορά ενός ενδεχομένου $A$ από ένα ενδεχόμενο $B$ ονομάζεται το ενδεχόμενο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο στο ενδεχόμενο $A$. Η διαφορά πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο $A$.
$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \notin B$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ενδεχόμενα, οι πράξεις μεταξύ δύο ενδεχομένων $A, B$, οι συμβολισμοί τους, λεκτική περιγραφή καθώς και διάγραμμα για κάθε περίπτωση.

| **Συμβολισμός** | **Ενδεχόμενο** | **Περιγραφή** | **Διάγραμμα** |
|---|---|---|---|
| $x \in A$ | Ενδεχόμενο A | Το ενδεχόμενο $A$ πραγματοποιείται. |  |
| $x \in A'$ | Συμπλήρωμα του $A$ | Το ενδεχόμενο $A$ **δεν** πραγματοποιείται. |  |
| $x \in A \cup B$ | Ένωση του $A$ με το $B$ | Πραγματοποιείται ένα **τουλάχιστον** από τα ενδεχόμενα $A$ και $B$. |  |
| $x \in A \cap B$ | Τομή του $A$ με το $B$ | Πραγματοποιούνται **συγχρόνως** τα ενδ. $A$ και $B$. |  |
| $x \in A - B$ | Διαφορά του $B$ απ' το $A$ | Πραγματοποιείται **μόνο** το ενδεχόμενο $A$. |  |
| $x \in B - A$ | Διαφορά του $A$ απ' το $B$ | Πραγματοποιείται **μόνο** το ενδεχόμενο $B$. |  |
| $x \in (A - B) \cup (B - A)$ | Ένωση διαφορών | Πραγματοποιείται **μόνο** ένα από τα δύο ενδ. (ή μόνο το $A$ ή μόνο το $B$). |  |
| $A \subseteq B$<br>$x \in A \Rightarrow x \in B$ | $A$ υποσύνολο του $B$ | Η πραγματοποίηση του $A$ συνεπάγεται πραγμ/ση του $B$. |  |
| $x \in (A \cap B)'$ | Συμπλήρωμα τομής | **Δεν** πραγματοποιούνται **συγχρονως** τα ενδ. $A$ και $B$. |  |
| $x \in (A \cup B)'$ | Συμπλήρωμα ένωσης | Δεν πραγματοποιείται **κανένα** από τα ενδ. $A$ και $B$. |  |
| $x \in (A - B)'$ | Συμπλήρωμα διαφοράς | **Δεν** πραγματοποιείται αποκλειστικά το ενδεχόμενο $A$. |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x \in (B - A)'$ | Συμπλήρωμα διαφοράς | **Δεν** πραγματοποιείται αποκλειστικά το ενδεχόμενο $B$. |   |
| $x \in ((A - B) \cup (B - A))'$ | Συμπλήρωμα ένωσης διαφορών | **Δεν** πραγματοποιείται αποκλειστικά ένα από τα δύο ενδ. (ή κανένα ή και τα δύο). |   |

## 1.3 Πιθανότητες

**Ορισμός 11 : ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ**
Πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ ονομάζεται ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του $A$ προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο $A$ αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$ , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου $A$ συμβολίζεται με $N(A)$.

**Ορισμός 12 : ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ**
Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ορίζεται ώς το άθροισμα των πιθανοτήτων $P(a_i)$ , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ των απλών ενδεχομένων του.

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_\kappa)$$

- Για κάθε στοιχείο $\omega_i$ , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ του δειγματικού χώρου $\Omega$ ονομάζουμε τον αριθμό $P(\omega_i)$ πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **αξιωματικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο $A$ δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$ , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**
Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες :

i. Πιθανότητα κενού συνόλου : $P(\varnothing) = 0$.

ii. Πιθανότητα δειγματικού χώρου : $P(\Omega) = 1$.
iii. Για κάθε ενδεχόμενο $A$ ισχύει : $0 \leq P(A) \leq 1$.

**Θεώρημα 1.3 : ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**
Οι παρακάτω ιδιότητες μας δείχνουν τις σχέσεις με τις οποίες συνδέονται οι πιθανότητες οποιονδήποτε ενδεχομένων $A, B$ με τις πιθανότητες των ενδεχομένων των πράξεων που περιέχουν τα ενδεχόμενα αυτά.

| **Ενδεχόμενο** | **Πιθανότητα** |
|---|---|
| Ένωση | $P(a \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ , \ \text{αν } A \cap B \neq \varnothing \\ P(A) + P(B) \ , \ \text{αν } A \cap B = \varnothing \end{cases}$ |
| Συμπλήρωμα | $P(A') = 1 - P(A)$ |
| Διαφορά | $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$<br>$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ |
| Υποσύνολο | $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ |

**Θεώρημα 1.4 : ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**
Μεταξύ των πιθανοτήτων δύο οποιονδήποτε ενδεχομένων $A, B$ καθώς και των ενδεχομένων που προκύπτουν από πράξεις που τα περιέχουν, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες.

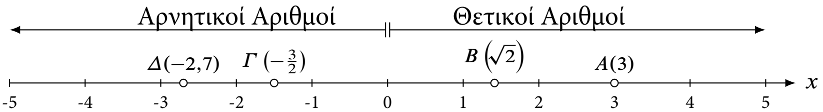
i. $P(A) \leq P(A \cup B)$
ii. $P(B) \leq P(A \cup B)$
iii. $P(A \cap B) \leq P(A)$
iv. $P(A \cap B) \leq P(B)$
v. $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$
vi. $P(A - B) \leq P(A)$
vii. $P(B - A) \leq P(B)$
viii. $P(A - B) \leq P(A \cup B)$
ix. $P(B - A) \leq P(A \cup B)$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
# Πραγματικοί αριθμοί

## 2.1 Πράξεις πραγματικών αριθμών

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**
Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο $O$ στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.




- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

**Ορισμός 2 : ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**
Δύναμη ενός πραγματικού αριθμού $a$ ονομάζεται το γινόμενο $\nu$ ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με $a^\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

Ο αριθμός $a$ ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός $\nu$ **εκθέτης** της δύναμης.

**Ορισμός 3 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ**
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών. Παρακάτω βλέπουμε τις βασικές ταυτότητες.

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$

5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
$(a+\beta)(a-\beta)=a^2-\beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
$(a+\beta)\left(a^2-a\beta+\beta^2\right)=a^3+\beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
$(a-\beta)\left(a^2+a\beta+\beta^2\right)=a^3-\beta^3$

## Ορισμός 4 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πρώτος ονομάζεται κάθε παράγοντας που δεν παραγοντοποιείται περαιτέρω.

## Ορισμός 5 : ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

1. **Ευθεία απόδειξη**
Με την ευθεία απόδειξη αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από την υπόθεση και καταλλήγοντας στο συμπέρασμα.

2. **Απαγωγή σε άτοπο**
Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από το αντίθετο του συμπεράσματος και καταλλάγουμε σε μια πρόταση που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

# ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

## Θεώρημα 2.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

| Ιδιότητα | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|---|---|---|
| **Αντιμεταθετική** | $a+\beta=\beta+a$ | $a\cdot\beta=\beta\cdot a$ |
| **Προσεταιριστική** | $a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$ | $a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$ |
| **Ουδέτερο στοιχείο** | $a+0=a$ | $a\cdot 1=a$ |
| **Αντίθετοι / Αντίστροφοι** | $a+(-a)=0$ | $a\cdot\frac{1}{a}=1$ |
| **Επιμεριστική** | $a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$ | |

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό $a$ ισχύει $a\cdot 0=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.

- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

**Θεώρημα 2.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ**
Για κάθε ισότητα της μορφής $a = \beta$ με $a, \beta$ πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. Τοποθετούμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

$$a = \beta \Rightarrow \begin{cases} a + \gamma = \beta + \gamma \\ a - \gamma = \beta - \gamma \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \\ \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma} \ , \ \gamma \neq 0 \end{matrix}$$

ii. Εαν δύο πραγματικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές δυνάμεις τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι ίσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

$$a = \beta \Rightarrow a^\nu = \beta^\nu$$

iii. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a, \beta > 0$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{\beta}$$

**Θεώρημα 2.3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΙΣΟΤΗΤΩΝ**
Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων $a = \beta$ και $\gamma = \delta$ προκύπτει ισότητα, με $1^o$ μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και $2^o$ μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κατά μέλη.

$$a = \beta \ \text{ και } \ \gamma = \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma = \beta + \delta \\ \textbf{2. Αφαίρεση κατά μέλη} & a - \gamma = \beta - \delta \\ \textbf{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \\ \textbf{4. Διαίρεση κατά μέλη} & \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \ , \ \gamma \cdot \delta \neq 0 \end{cases}$$

Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται και για πράξεις κατα μέλη σε περισσότερες από δύο ισότητες, στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

**Θεώρημα 2.4 : ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ**
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y \quad \text{και} \quad a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

Διαγράφουμε κι απ τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο **μη μηδενικό** παράγοντα.

**Θεώρημα 2.5 : ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**
Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι μηδενικό τότε τουλάχιστον ένας απ' αυτούς είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί και για γινόμενο περισσοτέρων των δύο παραγόντων. Για $\nu$ πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ ή } a_2 = 0 \text{ ή } \ldots \text{ ή } a_\nu = 0$$

**Θεώρημα 2.6 : ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**
Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι διάφορο του μηδενός τότε κανένας απ' αυτούς δεν είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων από δύο παραγόντων. Για $\nu$ πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 0 \text{ και } a_2 \neq 0 \text{ και } \ldots \text{ και } a_\nu \neq 0$$

**Θεώρημα 2.7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**
Για κάθε δυναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \quad , \quad a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

Επίσης για δυνάμεις με βάσεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ και φυσικούς εκθέτες $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

| | **Ιδιότητα** | **Συνθήκη** |
|---|---|---|
| **1** | Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση | $a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$ |
| **2** | Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση | $a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$ |
| **3** | Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη | $(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$ |
| **4** | Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη | $\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \ , \ \beta \neq 0$ |
| **5** | Δύναμη υψωμένη σε δύναμη | $(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$ |
| **6** | Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη | $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu \ , \ a, \beta \neq 0$ |

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa} \ \text{ και } \ (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^\nu = a_1^\nu \cdot a_2^\nu \cdot \ldots \cdot a_\kappa^\nu$$

Για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ιδιότητες 1 - 6 με την προϋπόθεση οι βάσεις να είναι θετικοί αριθμοί δηλαδή $a, \beta > 0$.

# 2.2 Διάταξη

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 6 : ΔΙΑΤΑΞΗ**
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών κατά την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι

$<$ : μικρότερο , $>$ : μεγαλύτερο , $\leq$ μικρότερο ίσο , $\geq$ μεγαλύτερο ισο

**Ορισμός 7 : ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ - ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ**
Λέμε οτι, ένας αριθμός $a$ είναι **μεγαλύτερος** απο έναν αριθμό $\beta$, και γράφουμε $a > \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

$$a > \beta \Leftrightarrow a - \beta > 0$$

Λέμε οτι, ένας αριθμός $a$ είναι **μικρότερος** απο έναν αριθμό $\beta$, και γράφουμε $a < \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

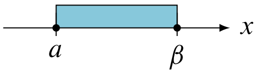
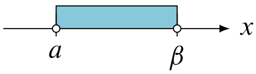
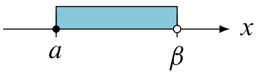
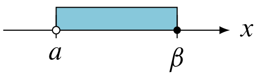
$$a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$$

**Ορισμός 8 : ΔΙΑΣΤΗΜΑ - ΚΕΝΤΡΟ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ**
Διάστημα ονομάζεται κάθε υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών του οποίου τα στοιχεία βρίσκονται ανάμεσα από δύο πραγματικούς αριθμούς $a, \beta$ που ονομάζονται **άκρα** του διαστήματος.

- Κάθε διάστημα μπορεί να εκφραστεί σαν ανισότητα και αντίστροφα.
- Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $x \in \mathbb{R}$ με $a \leq x \leq \beta$ ονομάζεται **κλειστό διάστημα** και συμβολίζεται $[a, \beta]$.
- Αν από το κλειστό διάστημα παραλείψουμε τα άκρα $a, \beta$ τό διάστημα που προκύπτει ονομάζεται **ανοιχτό διάστημα** $(a, \beta)$.
- Το διάστημα στη μεριά των απείρων $(\pm\infty)$ είναι πάντα ανοιχτό καθώς πρόκειται για έννοιες και όχι πραγματικούς αριθμούς.

- Ο αριθμός $x_0 = \frac{a+\beta}{2}$ ονομάζεται **κέντρο**, ο αριθμός $\mu = \beta - a$ ονομάζεται **μήκος** και ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - a}{2}$ ονομάζεται **ακτίνα** του διαστήματος.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε όλους τους τύπους διαστημάτων, τη γραφική παράστασή τοτς καθώς και το πως παριστάνεται το καθένα σαν ανισότητα.

| **Διάστημα** | **Ανισότητα** | **Σχήμα** | **Περιγραφή** |
|---|---|---|---|
| $[a, \beta]$ | $a \leq x \leq \beta$ |  | Κλειστό $a, \beta$ |
| $(a, \beta)$ | $a < x < \beta$ |  | Ανοιχτό $a, \beta$ |
| $[a, \beta)$ | $a \leq x < \beta$ |  | Κλειστό $a$ ανοιχτό $\beta$ |
| $(a, \beta]$ | $a < x \leq \beta$ |  | Ανοιχτό $a$ κλειστό $\beta$ |
| $[a, +\infty)$ | $x \geq a$ |  | Κλειστό $a$ συν άπειρο |
| $(a, +\infty)$ | $x > a$ |  | Ανοιχτό $a$ συν άπειρο |
| $(-\infty, a]$ | $x \leq a$ |  | Μείον άπειρο $a$ κλειστό |
| $(-\infty, a)$ | $x < a$ |  | Μείον άπειρο $a$ ανοιχτό |

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 2.8 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ**
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και φυσικό αριθμό $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. Αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow a > \gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα).
2. i. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$ τότε $a + \beta > 0$.

   ii. Αν $a < 0$ και $\beta < 0$ τότε $a + \beta < 0$.

3. Αν $a, \beta$ ομόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta > 0$ και $\frac{a}{\beta} > 0$.

4. Αν $a, \beta$ ετερόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta < 0$ και $\frac{a}{\beta} < 0$.

5. Αν $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$ και $a - \gamma > \beta - \gamma$.

6. i. Αν $\gamma > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{a}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$

   ii. Αν $\gamma < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{a}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$

7. i. Αν $\nu$ **άρτιος** εκθέτης και
      - $a, \beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$ (Η φορά παραμένει ίδια.)
      - $a, \beta < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu < \beta^\nu$ (Η φορά αλλάζει.)

   ii. Αν $\nu$ **περιττός** εκθέτης τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$

8. Αν $a, \beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} > \sqrt[\nu]{\beta}$

9. i. Αν $a, \beta$ ομόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\beta}$

   ii. Αν $a, \beta$ ετερόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{\beta}$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

**Θεώρημα 2.9 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ**
Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων με ίδια φορά και να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες ίδιας φοράς αρκεί όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \ , \ \text{ με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

**Δεν** μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

**Θεώρημα 2.10 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ**
Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού $a \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός :

$$a^2 \geq 0 \ , \ a^{2\kappa} \geq 0 \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η ιδιότητα ισχύει και για οποιοδήποτε άρτιο εκθέτη του αριθμού $a$. Η ισότητα ισχύει όταν η βάση της δύναμης, είναι 0.

**Θεώρημα 2.11 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ**
Το άθροισμα τετραγώνων οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $a, \beta\nu \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός

$$a^2 + \beta^2 \geq 0$$

Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται και για άθροισμα πολλών πραγματικών αριθμών υψωμένων σε οποιοδήποτε άρτιο εκθέτη.

$$a_1^{2\kappa_1} + a_2^{2\kappa_2} + \ldots + a_\nu^{2\kappa_\nu} \geq 0 \ \ , \ \ \kappa_i \in \mathbb{Z} \ , \ i = 1, 2, \ldots, \nu$$

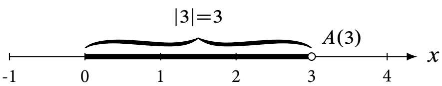
Η ισότητα ισχύει όταν οι βάσεις των δυνάμεων είναι μηδενικές.

# 2.3 Απόλυτη τιμή

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 9 : ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**
Αν $a$ ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός στον άξονα των πραγματικών αριθμών, θα ονομάζουμε **απόλυτη τιμή του** $a$ και θα συμβολίζουμε με $|a|$ την απόστασή του απο το 0.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ a \geq 0 \\ -a \ , \ a < 0 \end{cases}$$




- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού $a$ είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού $a$ είναι ίση με τον αντίθετο του αριθμού δηλαδή: $-a$.
- Η απόσταση δύο αριθμών μεταξύ τους ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

$$|a - \beta| = d(a, \beta)$$

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
## ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 2.12 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ**
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις απόλυτες τιμές τους :

| **Ιδιότητα** | **Συνθήκη** |
|---|---|
| Πρόσημο απόλυτης τιμής | $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert \geq 0$ |
| Απόλυτη τιμή μηδενός | $\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$ |
| Όρια αριθμού | $-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$ |

| | |
|---|---|
| Απόλυτη τιμή γινομένου | $\lvert a \cdot \beta \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert \beta \rvert$ |
| Απόλυτη τιμή πηλίκου | $\left\lvert \frac{a}{\beta} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert \beta \rvert}$ |
| Τετράγωνο απόλυτης τιμής | $\lvert a \rvert^2 = a^2$ |
| Τριγωνική ανισότητα | $\lvert \lvert a - \beta \rvert \rvert \leq \lvert a \pm \beta \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert \beta \rvert$ |

# 2.4 Ρίζες

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 10 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ**
Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού $x$ ονομάζεται ο **μη αρνητικός** αριθμός $a$ ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό $x$. Συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Ο αριθμός $x$ ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

**Ορισμός 11 : ΡΙΖΑ ν-ΤΑΞΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**
Ρίζα $\nu$-οστής **τάξης** ενός μη αρνητικού αριθμού $x$ ονομάζεται ο **μη αρνητικός** αριθμός $a$ που αν υψωθεί στη δύναμη $\nu$ δίνει αποτέλεσμα $x$ (υπόριζο). Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{x}$.

$$\sqrt[\nu]{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

**Ορισμός 12 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ**
Δύναμη ενός **θετικού** αριθμού $a$ με εκθέτη ενα ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται να είναι η ρίζα $\nu$-τάξης του αριθμού $a$ υψωμένο στη δύναμη $\mu$.

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \ , \quad \text{όπου } a > 0$$

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ<br>ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 2.13 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ**
Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ πραγματικούς αριθμούς και $\nu, \mu, \rho \in$ φυσικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την τετραγωνική και ν-οστή ρίζα τους.

| **Ιδιότητα** | **Συνθήκη** |
|---|---|
| Τετράγωνο ρίζας | $\left(\sqrt{x}\,\right)^2 = x \ , \ \ \forall x \geq 0$ |
| Ν-οστή δύναμη ν-οστής ρίζας | $\left(\sqrt[\nu]{x}\,\right)^\nu = x \ , \ \ \forall x \geq 0$ |
| Ρίζα τετραγώνου | $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| Ν-οστή ρίζα ν-οστής δύναμης | $\sqrt[\nu]{x^\nu} = \begin{cases} \lvert x \rvert & \forall x \in \mathbb{R} \text{ αν } \nu \text{ άρτιος} \\ x & \forall x \geq 0 \text{ και } \forall \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$ |
| Ρίζα γινομένου | $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \ , \ \ \forall x, y \geq 0$ <br> $\sqrt[\nu]{x \cdot y} = \sqrt[\nu]{x} \cdot \sqrt[\nu]{y} \ , \ \ \forall x, y \geq 0$ |
| Ρίζα πηλίκου | $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \ , \ \ \forall x \geq 0 \text{ και } y > 0$ <br> $\sqrt[\nu]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{x}}{\sqrt[\nu]{y}} \ , \ \ \forall x \geq 0 \text{ και } y > 0$ |
| Μ-οστή ρίζα ν-οστής ρίζας | $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{x}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{x} \ , \ \ \forall x \geq 0$ |
| Απλοποίηση ρίζας | $\sqrt[\nu]{x^\nu \cdot y} = x\sqrt[\nu]{y} \ , \ \ \forall x, y \geq 0$ |
| Απλοποίηση τάξης και δύναμης | $\sqrt[\mu \cdot \rho]{x^{\nu \cdot \rho}} = \sqrt[\mu]{x^\nu} \ , \ \ \forall x \geq 0$ |

- Η ιδιότητα 5 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$\sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt[\nu]{x_1} \cdot \sqrt[\nu]{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{x_\nu}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

- Η ιδιότητα 7 ισχύει και για παραστάσεις που περιέχουν πολλές ρίζες διαφόρων τάξεων στις οποίες η μια ρίζα βρίσκεται μέσα στην άλλη.

$$\sqrt[\mu_1]{\sqrt[\mu_2]{\ddots \sqrt[\mu_\nu]{x}}} = \sqrt[\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_\nu]{x}$$

με $x \geq 0$ και $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu \in \mathbb{N}$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Εξισώσεις

## 3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

Όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν ο συντελεστής της μεταβλητής $x$ είναι διάφορος του 0 τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.

**Ορισμός 2 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ**
Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό.

**Ορισμός 3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ<br>ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 3.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της $a, \beta$ :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.

2. Αν $a = 0$ και

   i. $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.

   ii. $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

<table>
<tr><th colspan="2">Συντελεστές</th><th>Λύσεις</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a \neq 0$</td><td>$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = 0$</td><td>$\beta = 0$</td><td>$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις</td></tr>
<tr><td>$\beta \neq 0$</td><td>$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση</td></tr>
</table>

***Πίνακας 3.1:*** Λύσεις εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού

**Θεώρημα 3.2 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ**

1. Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :

   i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις : $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

   ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει : $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$

3. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) \quad , \quad \text{με } g(x) \geq 0$$
$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

# *3.2 Διωνυμική εξίσωση*

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
## ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 3.3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$**

Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το είδος του εκθέτη $\nu$ και του πραγματικού αριθμού $a$.

1. Για $\nu$ άρτιο έχουμε :

   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις αντίθετες : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm a$

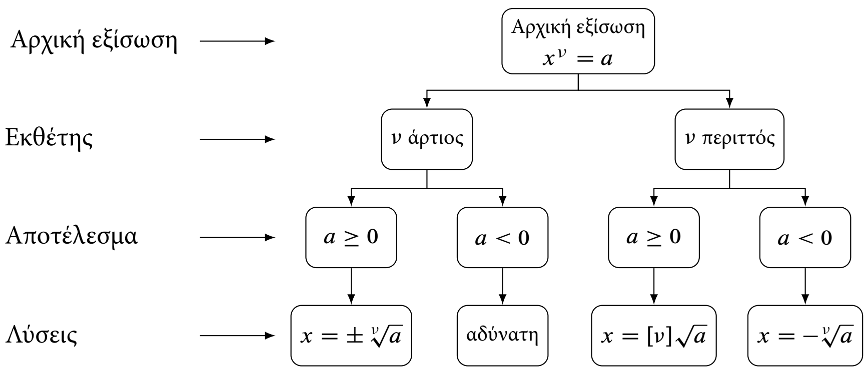
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Για $\nu$ περιττό έχουμε :

   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 θετική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = a$

   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 αρνητική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{a}$

Οι λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε :




***Σχήμα 3.1:*** Λύσεις εξίσωσης $x^\nu = a$

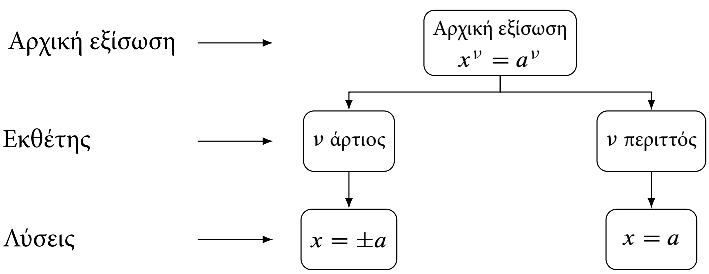
**Θεώρημα 3.4 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a^\nu$**

Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a^\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

i. Αν $\nu$ άρτιος τότε η εξίσωση έχει δύο αντίθετες λύσεις : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = \pm a$

ii. Αν $\nu$ περιττός τότε η εξίσωση έχει μια λύση : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = a$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών φαίνονται στο αντίστοιχο διάγραμμα :




***Σχήμα 3.2:*** Λύσεις εξίσωσης $x^\nu = a^\nu$

## 3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 4 : ΤΡΙΩΝΥΜΟ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με τρεις όρους και είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma \ \text{ με } \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** του τριωνύμου.
- Ο συντελεστής $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

**Ορισμός 5 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ \ , \ \ a \neq 0$$

**Ορισμός 6 : ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ**
Διακρίνουσα ενός τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμού ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

**Ορισμός 7 : ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**
Διτετράγωνη ονομάζεται κάθε εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού της μορφής :

$$ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ η οποία έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του $x$. Οι εκθέτες του τριωνύμου είναι διπλάσιοι απ' αυτούς της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
### ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 3.5 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

1. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

2. Αν $\mathit{\Delta} = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση.
3. Αν $\mathit{\Delta} < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

| **Διακρίνουσα** | **Πλήθος λύσεων** | **Λύσεις** |
|---|---|---|
| $\mathit{\Delta} > 0$ | 2 λύσεις | $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\mathit{\Delta}}}{2a}$ |
| $\mathit{\Delta} = 0$ | 1 διπλή λύση | $x = -\frac{\beta}{a}$ |
| $\mathit{\Delta} < 0$ | Καμία λύση | |

**Θεώρημα 3.6 : ΤΥΠΟΙ VIETA**
Έστω $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Αν $x_1, x_2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης τότε το άθροισμα τους $S$ και το γινομενό τους $P$ δίνονται από τους τύπους :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

οι οποίοι ονομάζονται τύποι του Vieta.

**Θεώρημα 3.7 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**
Εαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς αυτούς δίνεται από τον τύπο :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

**Θεώρημα 3.8 : ΕΙΔΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ**
Εαν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι λύσεις της, $S$ το άθροισμα και $P$ το γινομενό τους τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το είδος των λύσεων της :

| $\mathit{\Delta}$ | $P$ | $S$ | **Είδος λύσεων** | **Συμβολισμός** |
|---|---|---|---|---|
| | $P > 0$ | $S > 0$ | Δύο θετικές πραγματικές | $x_1 > x_2 > 0$ |
| | | $S < 0$ | Δύο αρνητικές λύσεις | $x_1 < x_2 < 0$ |
| | | $S = 0$ | Αδύνατη περίπτωση | |
| | | $S > 0$ | Ετερόσημες (όχι αντίθετες) | $x_1 < 0 < x_2 \quad , \quad \lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert$ |

$\mathit{\Delta} > 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $P<0$ | $S<0$ | | $x_1<0<x_2 \;,\; \lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$ |
| | | $S=0$ | Αντίθετες | $x_1=-x_2$ |
| | $P=0$ | $S>0$ | Μηδενική και θετική | $x_1=0 \;,\; x_2>0$ |
| | | $S<0$ | Μηδενική και αρνητική | $x_1=0 \;,\; x_2<0$ |
| | | $S=0$ | Αδύνατη περίπτωση | |
| | $P=1$ | | Αντίστροφες | $x_1=\frac{1}{x_2}$ |
| $\Delta=0$ | $P>0$ | $S>0$ | Θετικές και ίσες | $x_1=x_2>0$ |
| | | $S<0$ | Αρνητικές και ίσες | $x_1=x_2<0$ |
| | $P=0$ | $S=0$ | Μηδενικές | $x_1=x_2=0$ |
| $\Delta<0$ | Αδύνατη στο $\mathbb{R}$ | | | |

***Πίνακας 3.2:*** Είδη λύσεων εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# Ανισώσεις

4

## *4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού*

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΑΝΙΣΩΣΗ 1ου ΒΑΘΜΟΥ**
Ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \quad , \quad ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

## *4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού*

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 2 : ΑΝΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**
Ανίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \quad . \quad ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Ακολουθίες - Πρόοδοι

## 5.1 Ακολουθίες

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ**
Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ όπου κάθε φυσικός αριθμός $\nu \in \mathbb{N}^*$, εκτός του μηδενός, αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό αριθμό $a(\nu) \in \mathbb{R}$ ή πιο απλά $a_\nu$.

- Η ακολουθία των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται $(a_\nu)$.
- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας.
- Ο όρος $a_\nu$ ονομάζεται **ν-οστός** ή **γενικός** όρος της ακολουθίας.
- Οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να δίνονται είτε από
  - έναν **γενικό τύπο** της μορφής $a_\nu = f(\nu)$, όπου δίνεται κατευθείαν ο γενικός όρος της
  - είτε από **αναδρομικό τύπο** όπου κάθε όρος δίνεται με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων προηγούμενων όρων. Θα είναι της μορφής

    $$a_{\nu+i} = f(a_{\nu+i-1}, \ldots, a_{\nu+1}, a_\nu) \quad , \quad a_1, a_2, \ldots, a_i \text{ γνωστοί όροι.}$$

    Στον αναδρομικό τύπο, ο αριθμός $i \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των προηγούμενων όρων από τους οποίους εξαρτάται ο όρος $a_{\nu+i}$. Είναι επίσης αναγκαίο να γνωρίζουμε τις τιμές των $i$ πρώτων όρων της προκειμένου να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους.
- Μια ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι ονομάζεται **σταθερή**.

**Ορισμός 2 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ**
Μονοτονία ονομάζεται η ιδιότητα μιας ακολουθίας η οποία δείχνει αν αυτή είναι **αύξουσα** ή **φθίνουσα**,**γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα**. Ειδικότερα μια ακολουθία $(a_\nu)$ ονομάζεται

- Αύξουσα αν κάθε όρος της είναι **μεγαλύτερος ή ίσος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} \geq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- Φθίνουσα αν κάθε όρος της είναι **μικρότερος ή ίσος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} \leq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- Γνησίως αύξουσα αν κάθε όρος της είναι **μεγαλύτερος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- Γνησίως φθίνουσα αν κάθε όρος της είναι **μικρότερος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} < a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

**Ορισμός 3 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ**
Άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας $(a_\nu)$ ονομάζεται το άθροισμα $a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$ των $\nu$ πρώτων όρων της. Συμβολίζεται $S_\nu$ και είναι

$$S_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$$

Ο φυσικός αριθμός $\nu$ μας δείχνει το πλήθος των όρων του αθροίσματος.

# 5.2 Αριθμητική Πρόοδος

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 4 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**
Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία $(a_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο, προσθέτοντας κάθε φορά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ισχύει δηλαδή

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$$

Ο αριθμός $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και είναι σταθερός.

**Ορισμός 5 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**
Αριθμητικός μέσος τριών διαδοχικών όρων $a, \beta, \gamma$ μιας αριθμητικής προόδου $(a_\nu)$ ονομάζεται ο μεσαίος όρος $\beta$ για τον οποίο έχουμε

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικότερα, αριθμητικός μέσος $\nu$ διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ μιας αριθμητικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{\nu}$$

**Ορισμός 6 : ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ**
Αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a$ και $\beta$, ονομάζονται $\nu$ σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των $a$ και $\beta$ ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν, $\nu + 2$ σε πλήθος, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 5.1 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**
Εαν $(a_\nu)$ μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega$ τότε ο γενικός όρος της $a_\nu$ θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$$

**Θεώρημα 5.2 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**
Εαν $(a_\nu)$ μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega \neq 0$, τότε το άθροισμα των $\nu$ πρώτων όρων της δίνεται από τους παρακάτω τύπους :

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) \quad , \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu - 1)\omega\right]$$

**Θεώρημα 5.3 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**
Τρεις πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)$ αποτελεί αριθμητική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$2a_\nu = a_{\nu+1} + a_{\nu-1}$$

**Θεώρημα 5.4 : ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ**
Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a$ και $\beta$ τότε η διαφορά της αριθμητικής προόδου στην οποία ανήκουν θα είναι

$$\omega = \frac{\beta - a}{\nu + 1}$$

**Θεώρημα 5.5 : ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**
Εαν $(a_\nu)$ είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τους όρους της :

i. Εαν $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ είναι $\nu$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ο $\mu-$οστός όρος από το τέλος βρίσκεται στη θέση $\nu - \mu + 1$ και δίνεται από τον τύπο

$$a_{\nu-\mu+1} = a_\nu - (\mu - 1)\omega$$

ii. Το άθροισμα $S$ των $\mu$ τελευταίων όρων μιας αριθμητικής προόδου $(a_\nu)$ είναι

$$S = S_\nu - S_{\nu-\mu}$$

# 5.3 Γεωμετρική πρόοδος

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 7 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**
Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία $(a_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον προηγούμενο όρο με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Θα ισχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

**Ορισμός 8 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**
Γεωμετρικός μέσος τριών διαδοχικών όρων $a, \beta, \gamma$ μιας γεωμετρικής προόδου $(a_\nu)$ ονομάζεται ο μεσαίος όρος $\beta$ για τον οποίο ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Πιο γενικά, ο γεωμετρικός μέσος $\nu$ διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ γεωμετρικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\mu$ για τον οποίο ισχύει

$$\mu^\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$$

**Ορισμός 9 : ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ**
Γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a$ και $\beta$ ονομάζονται $\nu$ σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των $a$ και $\beta$ ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 5.6 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**
Εαν $(a_\nu)$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda$ τότε ο γενικός όρος της $a_\nu$ θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

**Θεώρημα 5.7 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**
Εαν $(a_\nu)$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 1$, τότε το άθροισμα των $\nu$ πρώτων όρων της δίνεται από τους τύπους

$$S_\nu = \frac{a_\nu \cdot \lambda - a_1}{\lambda - 1} \quad , \quad S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Εαν ο λόγος είναι $\lambda = 1$ τότε το άθροισμα θα δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \nu a_1$.

**Θεώρημα 5.8 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**
Τρεις πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Εαν οι τρεις όροι $a, \beta, \gamma$ είναι θετικοί έχουμε ισοδύναμα $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$.
Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)$ αποτελεί γεωμετρική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$a_\nu^2 = a_{\nu+1} \cdot a_{\nu-1}$$

**Θεώρημα 5.9 : ΛΟΓΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ**
Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ τότε για το λόγο της γεωμετρικής προόδου στην οποία ανήκουν ισχύει :

1. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και $a, \beta$ ομόσημοι τότε $\lambda = \pm \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$.
2. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι περιττός έχουμε

   i. Αν $a, \beta$ ομόσημοι τότε $\lambda = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$

   ii. Αν $a, \beta$ ετερόσημοι τότε $\lambda = -\sqrt[\nu+1]{\left|\frac{\beta}{a}\right|}$

Στην περίπτωση όπου ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και $a, \beta$ ετερόσημοι τότε δεν ορίζεται λόγος $\lambda$ και κατά συνέπεια δε σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος.

Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνουμε τους τύπους που αφορούν την αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο και βλέπουμε ομοιότητες και διαφορές μεταξύ τους.

| Τύπος | Αριθμητική πρόοδος | Γεωμετρική πρόοδος |
|---|---|---|
| Ορισμός | $a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$ | $a_{\nu+1} = a_\nu \cdot \lambda$ |
| Μέσος | $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$ | $\beta^2 = a \cdot \gamma$ |
| | $\mu = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}{\nu}$ | $\mu^\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$ |
| Διαφορά/Λόγος | $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ | $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ |
| Γενικός όρος | $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$ | $a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ |
| Άθροισμα | $S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu)$ | $S_\nu = \dfrac{a_\nu \cdot \lambda - a_1}{\lambda - 1}$ |
| | $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu - 1)\omega\right]$ | $S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Παρεμβολή | $\omega = \frac{\beta - a}{\nu+1}$ | $\lambda = \pm \sqrt[\nu+1]{\left\lvert \frac{\beta}{a} \right\rvert}$ |