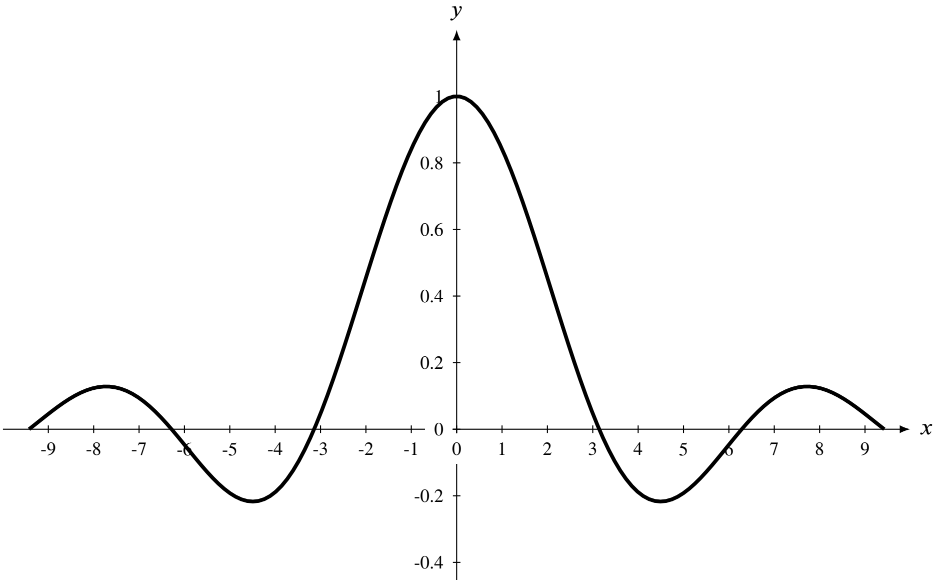
Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$



ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ
Γυμνασίου - Λυκείου

Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ISBN : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :
Ιωάννα Γραμμένου - - e-mail : predouli@yahoo.com
Σπύρος Φρόνιμος

Εξώφυλλο :
Δημήτρης Πρεντουλής

Στους γονείς μου.

Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πίνακας Συμβόλων

Σύμβολο	Όνομα	Περιγραφή
$+\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ :$	Συν, Πλην, Επί, Δια	Τα σύμβολα της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αντίστοιχα.
$=$	Ίσον	Δηλώνει ισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία.
$\equiv$	Ταυτίζεται	
$\neq$	Διάφορο	Εκφράζει οτι δύο στοιχεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
$>$	Μεγαλύτερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μεγαλύτερο του $2^{ου}$).
$<$	Μικρότερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μικρότερο του $2^{ου}$).
$\geq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $>$.
$\leq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $<$.
$\pm$	Συν Πλην	Συνδυασμός των προσήμων $+$ και $-$.
$\mp$	Πλην Συν	Έχει την ίδια σημασία με το συμβολισμό $\pm$ και χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία θα εμφανιστούν τα πρόσημα $+\ ,\ -$.
$\Rightarrow$	Συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις, όταν η μια έχει σαν συμπέρασμα την άλλη.
$\Leftarrow$	Αντίστροφη συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με φορά αντίστροφη από το σύνδεσμο $\Rightarrow$.
$\Leftrightarrow$	Διπλή συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με διπλή φορά. Δηλώνει ισοδυναμία μεταξύ τους.
$\%$	Ποσοστό τοις εκατό	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 100 ίσα κομμάτια.
‰	Ποσοστό τοις χιλίοις	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 1000 ίσα κομμάτια.

Σύμβολο	**Όνομα**	**Περιγραφή**
$\lvert \; \rvert$	Απόλυτη τιμή	Απόσταση ενός αριθμού από το 0.
$\sqrt{\;}$	Τετραγωνική ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**
$\sqrt[\nu]{\;}$	ν-οστή ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**
$\in$	Ανήκει	Σύμβολο το οποίο δηλώνει οτι ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο.
$\ni$	Ανήκει	Έχει την ίδια χρησιμότητα με το σύμβολο $\in$ και χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να γράψουμε το όνομα του συνόλου πριν από το όνομα του στοιχείου.
$\notin$	Δεν ανήκει	Έχει την αντίθετη σημασία από το σύμβολο $\in$ και δηλώνει οτι ένα στοιχείο δεν ανήκει σε ένα σύνολο.
$\subseteq$	Υποσύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
$\supseteq$	Υπερσύνολο	
$\subset$, $\supset$	Γνήσιο υποσύνολο, γν. υπερσύνολο	
$\cup$, $\cap$	Ένωση, Τομή	Βλ. **Ορισμό ...**
$\varnothing$	Κενό σύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
∞	Άπειρο	
$\forall$	Για κάθε	Βλ. **Ορισμό ...**
$\exists$	Υπάρχει	Βλ. **Ορισμό ...**
$\nexists$	Δεν υπάρχει	
$\perp$	Κάθετο	
$\sum$	Άθροισμα	
$\prod$	Γινόμενο	
$\int$	Ολοκλήρωμα	Βλ. **Ορισμό ...**

Σύμβολο	**Όνομα**	**Περιγραφή**
lim	Όριο	Βλ. **Ορισμό ...**
log, ln	Λογάριθμός	Βλ. **Ορισμό ...**
$\binom{\nu}{\kappa}$	Διωνυμικός συντελεστής	

Βασικές Έννοιες

Η επιστήμη των μαθηματικών

A-1. Αλγεβρα

A-2. Γεωμετρία

A-3. Στατιστική

A-4. Πιθανότητες

A-5. Ανάλυση

A-6. Εφαρμοσμένα μαθηματικά

Πριν δούμε αναλυτικά τους ορισμούς, τους κανόνες και τις βασικές μεθόδους της θεωρίας των μαθηματικών θα πρέπει να ερμηνεύσουμε αυτές τις βασικές έννοιες καθώς και κάθε έννοια που προκύπτει μέσα απ'αυτές ή είναι χρήσιμη για τη δομή ενός μαθηματικού κειμένου.

B-1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορισμός ονομάζεται μια πρόταση η οποία εισάγει και ερμηνεύει πλήρως μια νέα μαθηματική έννοια, με τρόπο σαφή και σύντομο.

B-2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεώρημα καλείται κάθε πρόταση η οποία αποτελεί ένα βασικό και αποδεδειγμένο κανόνα μεταξύ μαθηματικών εννοιών.

- Αποτελείται από δύο μέρη τα οποία είναι μαθηματικές προτάσεις και ονομάζονται **υπόθεση** και **συμπέρασμα**.
- Η υπόθεση αποτελείται από μια ή περισσότερες προτάσεις οι οποίες είναι αναγκαίες για να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα το οποίο είναι λογική συνέπεια αυτών.
- Η ισχύς ενός θεωρήματος είναι γενική. Μαθηματικές προτάσεις με μικρότερη βαρύτητα αποτελούν υποκατηγορίες της έννοιας του θεωρήματος. Αυτές είναι τα πορίσματα, οι προτάσεις, τα κριτήρια και οι ιδιότητες.

B-3. Πόρισμα

Πόρισμα λέγεται μια πρόταση η οποία προκυπτει άμεσα από ένα θεώρημα και αποδεικνύεται με τη βοήθεια αυτού. Είναι ένας κανόνας με συμπέρασμα πιο ειδικό απ'αυτό ενός θεωρήματος.

B-4. Κριτήριο

Κριτήριο ονομάζεται μια πρόταση η οποία αποτελεί έναν κανόνα με τον οποίο ελέχεται η ισχύς μιας ιδιότητας ή ενός χαρακτηριστικού. Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες ενός κριτηρίου τότε ως συμπέρασμα έχουμε τη ζητούμενη ιδιότητα ή χαρακτηριστικό ενός μαθηματικού αντικειμένου.

B-5. Ιδιότητα

B-6. Χαρακτηριστικό

B-7. Παράδειγμα

B-8. Αντιπαράδειγμα

B-9. Αξίωμα

B-10. Γεωμετρική ερμηνεία

B-11. Διερεύνηση

B-12. Ισχυρισμός

B-13. Περιορισμός

B-14. Παρατήρηση

B-15. Σχόλιο

B-16. Γενίκευση

B-17. Εικασία

B-18. Ιδιότητα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΑΛΓΕΒΡΑ

1.1 Αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Το σύνολο των αριθμών από το 0 εως το άπειρο όπου κάθε αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο. Συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και είναι : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αντίθετους τους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ και είναι : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$ και είναι : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \middle| a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$.
4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός. Κατά κύριο λόγο, άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες που δεν έχουν ρητό αποτέλεσμα, ο αριθμός π κ.τ.λ.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και είναι : $\mathbb{R} = \{$όλοι οι αριθμοί$\}$.
6. **Μιγαδικοί Αριθμοί** : Οι αριθμοί που αποτελούν άθροισμα ενός πραγματικού με ένα φανταστικό αριθμό. Οι αριθμοί είναι της μορφής $a + \beta i$ ενώ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ και είναι $\mathbb{C} = \{z = a + \beta i | a, \beta \in \mathbb{R}$ με $i^2 = -1\}$.

Τα παραπάνω σύνολα χωρίς το μηδενικό τους στοιχείο συμβολίζονται αντίστοιχα με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$.
Με το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην **Παράγραφο 1.5** όπου θα ορίσουμε κάθε έννοια, που αφορά το σύνολο αυτό, αναλυτικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ
Δεκαδικό ονομάζεται το σύστημα αρίθμησης στο οποίο κάθε αριθμός σχηματίζεται με τη χρήση των δέκα συμβόλων - ψηφίων : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 τοποθετημένα διαδοχικά το ένα μετά το άλλο. Καθένα απ' αυτά έχει διαφορετική αξία ανάλογα με το πλήθος των μονάδων που εκφράζει. Στο δεκαδικό σύστημα έχουμε σαν βάση τον αριθμό δέκα.

Ψηφία Ακέραιου Αριθμού							
Δεκαδική Τάξη	Εκατομμύρια	Εκατοντάδες Χιλιάδες	Δεκάδες Χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
Συμβ.	Εκ	ΕΧ	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
Αξία	**1.000.000**	**100.000**	**10.000**	**1.000**	**100**	**10**	**1**

Πίνακας 1.1: Ψηφία ακέραιου αριθμού

- Κάθε αριθμός έχει διαφορετική αξία ανάλογα με τη θέση και την αξία των ψηφίων που τον αποτελούν.
- Σε κάθε αριθμό η θέση κάθε ψηφίου καθορίζει την αξία του. Η θέση αυτή ονομάζεται **δεκαδική θέση**.
- Η αξία των δεκαδικών θέσεων αυξάνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά.
- Κάθε δεκαδική θεση έχει αξία δεκαπλάσια της προηγούμενης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 ΑΡΤΙΟΙ - ΠΕΡΙΤΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Άρτιοι (ζυγοί) ονομάζονται οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2 ενώ περιττοί (μονοί) όσοι δεν διαιρούνται με το 2. Η μορφή που έχουν αντίστοιχα είναι:

$$\text{Άρτιοι} : a = 2\kappa \quad , \quad \text{Περιττοί} : a = 2\kappa + 1 \quad , \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Το τελευταίο ψηφίο κάθε άρτιου αριθμού είναι ένα από τα $0, 2, 4, 6, 8$ ενώ ένας περιττός αριθμός τελείώνει σε ένα από τα $1, 3, 5, 7, 9$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 ΘΕΤΙΚΟΣ - ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Θετικός ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι μεγαλύτερος του μηδενός ενώ αρνητικός ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι μικρότερος του μηδενός.

- Τα σύμβολα $+$ και $-$ τα οποία χρησιμοποιούμε για να δείξουμε αν κάποιος αριθμός είναι θετικός ή αρνητικός ονομάζονται **πρόσημα**.
- Το 0 δεν έχει πρόσημο.
- Δύο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο ονομάζονται **ομόσημοι**.
- Δύο αριθμοί με το διαφορετικά πρόσημα ονομάζονται **ετερόσημοι**.
- Το 0 είναι μικρότερο από κάθε θετικό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Ανάμεσα σε δύο αρνητικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι εκείνος με τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Αντίθετοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν ίσες απόλυτες τιμές και αντίθετα πρόσημα.

Ο αντίθετος ενός αριθμού x είναι ο $-x$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

Πράξη	Όροι	Αποτέλεσμα	Συμβολισμός
Πρόσθεση	Προσθετέοι	Άθροισμα	$a+\beta$
Αφαίρεση	Μειωτέος - Αφαιρετέος	Διαφορά	$a-\beta$
Πολλαπλασιασμός	Παράγοντες	Γινόμενο	$a\cdot\beta$
Διαίρεση	Διαιρετέος - Διαιρέτης	Πηλίκο	$a:\beta$

Πίνακας 1.2: Βασικές πράξεις

1. **Πρόσθεση**
   Πρόσθεση ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αριθμούς $a,\beta\in\mathbb{R}$ να υπολογίσουμε τον αριθμό $a+\beta$ που ονομάζεται **άθροισμα**.
2. **Πολλαπλασιασμός**
   Πολλαπλασιασμός ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αριθμούς $a,\beta\in\mathbb{R}$ να υπολογίσουμε τον αριθμό $a\cdot\beta$ που ονομάζεται **γινόμενο**.
3. **Αφαίρεση - Διαίρεση**
   Η αφαίρεση $a-\beta$ και η διαίρεση $a:\beta$ δύο αρθμών $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι οι πράξεις που προκύπτουν από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα και μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια τους.

$$a-\beta=a+(-\beta)\ \ ,\ \ a:\beta=\frac{a}{\beta}=a\cdot\frac{1}{\beta}$$

   - Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης ονομάζεται **διαφορά** ενώ το αποτέλεσμα της διαίρεσης ονομάζεται **πηλίκο**.
   - Η διαίρεση ενός αριθμού a με το 0 **δεν** ορίζεται.
   - Η διαίρεση $0:0$ είναι απροσδιόριστη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαίρεση δύο αριθμών Δ (**Διαιρετέος**) και δ (**διαιρέτης**) από την οποία προκύπτουν φυσικοί αριθμοί π (**πηλίκο**) που είναι το απότέλεσμα της διαίρεσης και υ (**υπόλοιπο**).

- Οι φυσικοί αριθμοί $\Delta, \delta, \pi, \upsilon$ ικανοποιούν την ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ η οποία ονομάζεται **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Αν σε μια διαίρεση το υπόλοιπο είναι 0 τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** και ισχύει :

$$\Delta = \delta \cdot \pi \quad , \quad \upsilon = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Πολλαπλάσιο ενός αριθμού a ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που προκύπτει από πολλαπλασιασμό του a με οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. :

$$\beta \text{ πολλαπλάσιο του } a : \beta = \nu \cdot a \quad , \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}$$

Ένας αριθμός $a \in \mathbb{N}$ λέμε ότι **διαιρεί** έναν αριθμό $\beta \in \mathbb{N}$ όταν ο β είναι πολλαπλάσιο του a. Όταν συμβαίνει αυτό, η διαίρεση $\beta : a$ δίνει υπόλοιπο 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Διαιρέτης ενός φυσικού αριθμου $a \in \mathbb{N}$ ονομάζεται ένας φυσικός αριθμός $\beta \in \mathbb{N}$ ο οποίος εαν διαιρεθεί με τον a αφήνει υπόλοιπο 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10 Ε.Κ.Π.

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο τους. Συμβολίζεται

$$E.K.\Pi.(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) \quad , \quad \text{όπου } a_1, \ldots, a_\nu \in \mathbb{N}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11 Μ.Κ.Δ.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.Συμβολίζεται

$$M.K.\Delta.(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) \quad , \quad \text{όπου } a_1, \ldots, a_\nu \in \mathbb{N}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12 ΠΡΩΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Πρώτος ονομάζεται ένας αριθμός που διαιρείται **μόνο** με τον εαυτό του και το 1. Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός λέγεται **σύνθετος**.

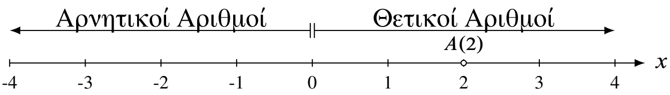
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13 ΠΡΩΤΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

Πρώτοι μεταξύ τους ονομάζονται δύο φυσικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{N}$ των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι η μονάδα :

$$M.K.\Delta.\,(a, \beta) = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14 ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. ¨Αρχή¨ του άξονα είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.

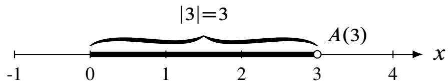


Σχήμα 1.1: Ευθεία των αριθμών

- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται να είναι η απόσταση της εικόνας του αριθμού αυτού απο το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ a \geq 0 \\ -a \ , \ a < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1.2: Απόλυτη τιμή

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού a είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού a είναι ίση με τον αντίθετο του αριθμού δηλαδή: $-a$.
- Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός αφού εξ' ορισμού παριστάνει απόσταση, που σαν μέγεθος παιρνει μόνο θετικές τιμές.
- Απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών είναι η απόσταση μεταξύ τους.

$$|a - \beta| = d(a, \beta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16 ΔΙΑΤΑΞΗ
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών κατά την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι

$<$: μικρότερο , $>$: μεγαλύτερο , $\leq$ μικρότερο ίσο , $\geq$ μεγαλύτερο ισο

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17 ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ - ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ

- Ένας αριθμός a ονομάζεται **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β όταν ισχύει $a - \beta > 0$ και γράφουμε $a > \beta$.
- Ένας αριθμός a ονομάζεται **μικρότερος** από έναν αριθμό β όταν ισχύει $a - \beta < 0$ και γράφουμε $a < \beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18 ΔΙΑΣΤΗΜΑ - ΚΕΝΤΡΟ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ
Διάστημα ονομάζεται κάθε υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών του οποίου τα στοιχεία βρίσκονται ανάμεσα από δύο πραγματικούς αριθμούς a, β που ονομάζονται **άκρα** του διαστήματος.

- Κάθε διάστημα μπορεί να εκφραστεί σαν ανισότητα.

- Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $x \in \mathbb{R}$ με $a \leq x \leq \beta$ ονομάζεται **κλειστό διάστημα** και συμβολίζεται $[a, \beta]$.
- Αν από το κλειστό διάστημα παραλείψουμε τα άκρα a, β τό διάστημα που προκύπτεί ονομάζετα **ανοιχτό διάστημα** (a, β).
- Το διάστημα στη μεριά των απείρων $(\pm\infty)$ είναι πάντα ανοιχτό καθώς πρόκειται για έννοιες και όχι πραγματικούς αριθμούς.
- Ο αριθμός $x = \frac{a+\beta}{2}$ ονομάζεται **κέντρο**, ο αριθμός $\mu = \beta - a$ ονομάζεται **μήκος** και ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-a}{2}$ **ακτίνα** του διαστήματος.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε όλους τους τύπους διαστημάτων, τη γραφική παράστασή τοτς καθώς και το πως παριστάνεται το καθένα σαν ανισότητα.

Διάστημα	**Ανισότητα**	**Σχήμα**	**Περιγραφή**
$[a, \beta]$	$a \leq x \leq \beta$		Κλειστό a, β
(a, β)	$a < x < \beta$		Ανοιχτό a, β
$[a, \beta)$	$a \leq x < \beta$		Κλειστό a ανοιχτό β
$(a, \beta]$	$a < x \leq \beta$		Ανοιχτό a κλειστό β
$[a, +\infty)$	$x \geq a$		Κλειστό a συν άπειρο
$(a, +\infty)$	$x > a$		Ανοιχτό a συν άπειρο
$(-\infty, a]$	$x \leq a$		Μείον άπειρο a κλειστό
$(-\infty, a)$	$x < a$		Μείον άπειρο a ανοιχτό

Πίνακας 1.3: Διαστήματα αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.19 ΚΛΑΣΜΑ
Κλάσμα ονομάζεται ένας αριθμός της μορφής $\frac{a}{\beta}$, όπου a, β ακέραιοι αριθμοί.

- Με το κλάσμα εκφράζουμε ένα μέρος μιας ποσότητας.
- Ο αριθμός a ονομάζεται **αριθμητής** ενώ ο β **παρονομαστής** του κλάσματος.
- Το κλάσμα σαν πράξη είναι διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή.
- Ο παρονομαστής του κλάσματος δεν πρέπει να είναι 0 : $\beta \neq 0$.
- Τα σύμβολα των πράξεων $(+, -, \cdot, :)$ μεταξύ κλασμάτων σε μια αριθμητική παράσταση καθώς και τα σύμβολα σχέσεων $(=, >, <)$ γράφονται στην ίδια ευθεία με τη γραμμή κλάσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.20 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ
Κλασματική μονάδα ονομάζεται το κλάσμα το οποίο έχει αριθμητή τον αριθμό 1 : $\frac{1}{\nu}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.21 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ
Δεκαδικό ονομάζεται το κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10.

$$\frac{a}{10^\nu} \ , \quad \nu \in \mathbb{N}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.22 ΙΣΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ
Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που εκφράζουν ίσα μέρη μιας ποσότητας ή ίσων ποσοτήτων.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.23 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ
Απλοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία, ένα κλάσμα το μετατρέπουμε σε ένα ισοδύναμό του με μικρότερους όρους, διαιρώντας τους αρχικούς με το $M.K.\Delta$ τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.24 ΑΝΑΓΩΓΟ ΚΛΑΣΜΑ
Ανάγωγο ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο δεν απλοποιείται. Ο $M.K.\Delta$ αριθμητή και παρονομαστή ενός ανάγωγου κλάσματος είναι το 1.

$$\frac{a}{\beta} : \text{ανάγωγο} \ \Leftrightarrow M.K.\Delta.(a, \beta) = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.25 ΟΜΩΝΥΜΑ - ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ
Ομώνυμα ονομάζονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ενώ ετερώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα με διαφορετικούς παρονομαστές.

$$\text{Ομώνυμα} : \frac{a}{\gamma} \ , \ \frac{\beta}{\gamma} \qquad \text{Ετερώνυμα} : \frac{a}{\beta} \ , \ \frac{\gamma}{\delta}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.26 ΜΕΙΚΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Μεικτός ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος είναι άθροισμα ενός ακεραίου και ενός κλάσματος

μικρότερου της μονάδας.

$$\text{Μεικτός} : a + \frac{\beta}{\gamma} = a\frac{\beta}{\gamma} \quad , \quad \frac{\beta}{\gamma} < 1$$

Το άθροισμα αυτό μετατρέπεται σε μεικτό παραλείποντας το σύμβολο της πρόσθεσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.27 ΣΥΝΘΕΤΟ ΚΛΑΣΜΑ
Σύνθετο ονομάζεται ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον από τους δύο όρους του είναι κλάσμα.

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} \quad , \quad \frac{a}{\frac{\beta}{\gamma}} \quad , \quad \frac{\frac{a}{\beta}}{\gamma}$$

Σε κάθε σύνθετο κλάσμα, η κύρια κλασματική γραμμή σχεδιάζεται μεγαλύτερη από αυτές των απλών κλασμάτων, ώστε να διακρίνονται οι όροι του καθώς και ποιοί από αυτούς είναι κλάσματα ή ακέραιοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.28 ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Δεκαδικός ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος αποτελείται από ακέραιο και δεκαδικό μέρος χωρισμένα με ένα κόμμα που ονομάζεται υποδιαστολή.

- Ακέραιο μέρος ονομάζεται το μέρος ενός δεκαδικού αριθμού το οποίο αποτελείται από εκείνα τα ψηφία τα οποία βρίσκονται αριστερά από την υποδιαστολή.
- Δεκαδικό ονομάζεται το μέρος ενός δεκαδικού αριθμού που βρίσκεται δεξιά από την υποδιαστολή και αποτελείται από τα ψηφία που είναι υποπολλαπλάσια της μονάδας.
- Τα ψηφία αυτά προκύπτουν από διαιρέσεις τις μονάδας με δυνάμεις του 10 και ονομάζονται από τα από τα δεκαδικά κλάσματα με την αντίστοιχη δύναμη του 10.
- Τα μηδενικά τα οποία βρίσκονται στο τέλος του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού δε δίνουν αξία στον αριθμό και μπορούν να παραλείπονται.

Μέρος	**Ακέραιο Μέρος**								**Δεκαδικό Μέρος**		
Όνομα Ψηφίου	Εκατομμύρια	Εκατοντάδες Χιλιάδες	Δεκάδες Χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
Συμβ.	Εκ	ΕΧ	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ	,	δεκ	εκ	χιλ
Αξία	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Παράδ.	3	7	5	4	8	0	2	,	9	6	1

Πίνακας 1.4: Ψηφία δεκαδικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.29 ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΑΡΙΘΜΟΥ
Τυποποιημένη ονομάζεται η μορφή $a \cdot 10^{\nu}$ στην οποία μπορεί να γραφτεί οποιοσδήποτε αριθμός ως γινόμενο ενός αριθμού a επί μιας δύναμης του 10.

$$A = a \cdot 10^{\nu} \quad , \quad 1 < a < 10$$

- Ο αριθμός a είναι δεκαδικός αριθμός μικρότερος του 10.
- Η μορφή αυτή γραφής ενός αριθμού, ονομάζεται και επιστημονική.

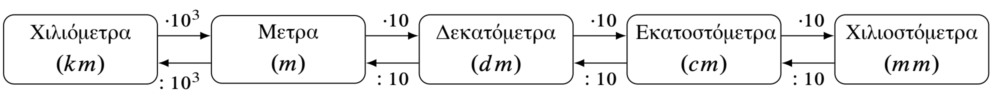
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.30 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
Μονάδες μέτρησης ονομάζονται τα μεγέθη - ποσότητες τα οποία χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση άλλων όμοιών τους ποσοτήτων.
Τα κυριότερα ποσά που συναντάμε είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, και άλλα. Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται μερικά απ' αυτά.

ΜΗΚΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	**Συμβολισμός**	**Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.**
Χιλιόμετρο	$1km$	$1km = 1000m$
Μέτρο	$1m$	$1m = 10dm = 100cm = 1000mm$
Δεκατόμετρο	$1dm$	$\frac{1}{10}m = 1dm = 10cm = 100mm$
Εκατοστόμετρο	$1cm$	$\frac{1}{100}m = \frac{1}{10}dm = 1cm = 10mm$
Χιλιοστόμετρο	$1mm$	$\frac{1}{1000}m = \frac{1}{100}dm = \frac{1}{10}cm = 1mm$

Πίνακας 1.5: Μονάδες μέτρησης μήκους

Στο διάγραμμα φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη :



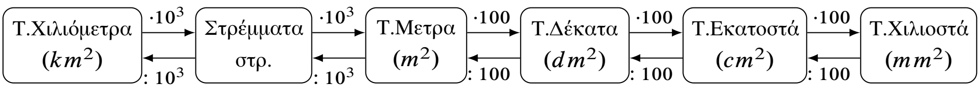
Σχήμα 1.3: Μετατροπές μονάδων μέτρησης μήκους

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τ.Χιλιόμετρο	$1km^2$	$1km^2 = 1000$ στρέμματα $= 10^6 m^2$
Στρέμμα	1 στρέμμα	$\frac{1}{1000}km^2 = 1$ στρέμμα $= 1000m^2$
Τ.Μέτρο	$1m^2$	$1m^2 = 100dm^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2$
Τ.Δεκατόμετρο	$1dm^2$	$\frac{1}{100}m^2 = 1dm^2 = 100cm^2 = 10^4 mm^2$
Τ.Εκατοστόμετρο	$1cm^2$	$\frac{1}{10^4}m^2 = \frac{1}{100}dm^2 = 1cm^2 = 100mm^2$
Τ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^2$	$\frac{1}{10^6}m^2 = \frac{1}{10^4}dm^2 = \frac{1}{100}cm^2 = 1mm^2$

Πίνακας 1.6: Μονάδες μέτρησης επιφάνειας

Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από μια μονάδα μέτρησης σε άλλη φαίνονται στο διάγραμμα :



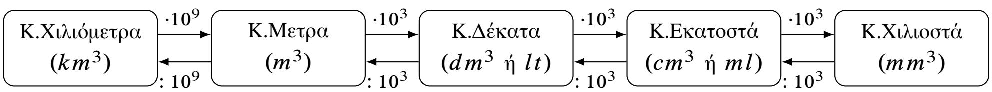
Σχήμα 1.4: Μετατροπές μονάδων μέτρησης επιφάνειας

ΟΓΚΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Κ.Χιλιόμετρο	$1km^3$	$1km^3 = 10^9 m^3$
Κ.Μέτρο	$1m^3$	$1m^3 = 1000dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^9 mm^3$
Κ.Δεκατόμετρο	$1dm^3$	$\frac{1}{1000}m^3 = 1dm^2 = 1000cm^3 = 10^6 mm^3$
Κ.Εκατοστόμετρο	$1cm^3$	$\frac{1}{10^6}m^3 = \frac{1}{1000}dm^3 = 1cm^3 = 1000mm^3$
Κ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^3$	$\frac{1}{10^9}m^3 = \frac{1}{10^6}dm^3 = \frac{1}{1000}cm^3 = 1mm^3$

Πίνακας 1.7: Μονάδες μέτρησης όγκου

Οι σχέσεις μςταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη φαίνονται στο διάγραμμα



Σχήμα 1.5: Μετατροπές μονάδων μέτρησης όγκου

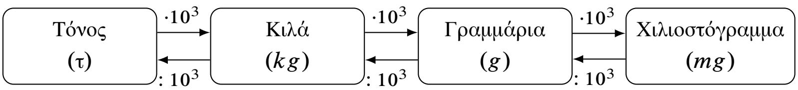
Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) ονομάζεται και **λίτρο** και συμβολίζεται : $1lt$ ενώ το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) ονομάζεται και **χιλιοστόλιτρο** και συμβολίζεται : $1ml$.

ΜΑΖΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τόνος	1τ	$1\tau = 1000kg = 10^6 g = 10^9 mg$
Κιλό	$1kg$	$\frac{1}{1000}\tau = 1kg = 1000g = 10^6 mg$
Γραμμάριο	$1dm^3$	$\frac{1}{10^6}\tau = \frac{1}{1000}kg = 1g = 1000mg$
Χιλιοστόγραμμο	$1cm^3$	$\frac{1}{10^9}\tau = \frac{1}{10^6}kg = \frac{1}{1000}g = 1mg$

Πίνακας 1.8: Μονάδες μέτρησης μάζας

Στο διάγραμμα φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης μάζας και ο τρόπος μετατροπής ενός μεγέθους από τη μία στην άλλη :



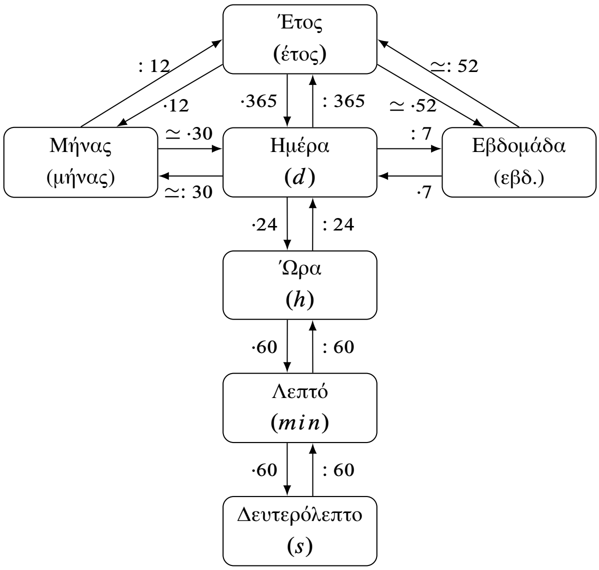
Σχήμα 1.6: Μετατροπές μονάδων μέτρησης μάζας

ΧΡΟΝΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Έτος	1 έτος	1 έτος $=$ 12 μήνες $\simeq$ 52 εβδομάδες $= 365d$
Μήνας	1 μήνας	1 μήνας $\simeq 30d$
Εβδομάδα	1 εβδομάδα	1 εβδομάδα $= 7d = 168h$
Ημέρα	$1d$	$1d = 24h = 1440min = 86400s$
Ώρα	$1h$	$1h = 60min = 3600s$
Λεπτό	$1min$	$\frac{1}{60}h = 1min = 60s$
Δευτερόλεπτο	$1s$	$\frac{1}{3600}h = \frac{1}{60}min = 1s$

Πίνακας 1.9: Μονάδες μέτρησης χρόνου

Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης χρόνου :



Σχήμα 1.7: Μετατροπές μονάδων μέτρησης χρόνου

Επιπλέον μονάδες μέτρησης χρόνου είναι

- η δεκαετία
- ο αιώνας (100 χρόνια)
- η χιλιετία.

Στις μετατροπές που κάνουμε ανάμεσα στις μονάδες μέτρησης χρόνου χρησιμοποιούμε, όπου η μετατροπή δεν είναι ακριβής, προσεγγιστικά τους αριθμούς που φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα όπως στην περίπτωση της μετατροπής ενός χρονικού διαστήματος από μέρες σε μήνες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.31 ΠΟΣΟΣΤΟ
Ποσοστό ονομάζεται ο λόγος ο οποίος εκφράζει μέρος μιας ποσότητας.

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Μέρος μιας Ποσότητας}}{\text{Ολόκληρη Ποσότητα}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.32 ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΤΟΙΣ 100
Ποσοστό επί τις 100 ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή το 100.

$$\text{Ποσοστό τοις 100} : \frac{a}{100} = a\%$$

- Συμβολίζεται με $a\%$ όπου a ο αριθμητής του κλάσματος.
- Το ποσοστό τις χιλίοις είναι το κλάσμα $\frac{a}{1000}$ και συμβολίζεται με $a‰$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.33 ΑΝΑΛΟΓΙΑ
Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

- Οι όροι a, δ ονομάζονται **άκροι** όροι, ενώ οι β, γ **μέσοι** όροι της αναλογίας.
- Μια αναλογία ονομάζεται **συνεχής** αν οι μέσοι όροι της είναι ίσοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.34 ΚΛΙΜΑΚΑ
Κλίμακα ονομάζεται ο λόγος της απόστασης δύο σημείων στην εικόνα ενός αντικειμένου,

προς την πραγματική απόσταση των σημείων αυτών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.35 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ
Ανάλογα ονομάζονται δύο ποσά x, y όταν ο λόγος των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερός.

- Για τα ανάλογα ποσά αυτά ισχύει η σχέση $\frac{y}{x} = a$ όπου ο σταθερός αριθμός a ονομάζεται **συντελεστής αναλογίας**.
- Ισχύει η ισοδυναμία $\frac{y}{x} = a \Leftrightarrow y = a \cdot x$ που μας δίνει τη σχέση που συνδέει τα ανάλογα ποσά.
- Εαν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, θα πολλαπλασιαστούν οι τιμές του άλλου με τον **ίδιο** αριθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.36 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ
Αντιστρόφως ανάλογα ονομάζονται δύο ποσά x, y όταν το γινόμενό τους είναι σταθερό.

- Για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά ισχύει η σχέση $y \cdot x = a$
- Εαν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, θα **διαιρεθούν** οι τιμές του άλλου με τον **ίδιο** αριθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.37 ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός φυσικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.
- Η δύναμη a^2 ονομάζεται και ***a* στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη a^3 ονομάζεται και ***a* στον κύβο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.38 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.39 ΡΙΖΑ ν-ΤΑΞΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Ρίζα ν-οστής τάξης ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στη δύναμη ν δίνει αποτέλεσμα x (υπόριζο) και συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{x}$.

$$\sqrt[\nu]{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.40 ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ
Δύναμη ενός μη αρνητικού αριθμού a με εκθέτη ενα ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$ ορίζεται να είναι η ρίζα ν-τάξης του αριθμού a υψωμένο στη δύναμη μ

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

όπου $a \geq 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^{+}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.41 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ
Λογάριθμος με βάση ένα θετικό αριθμό a, διάφορο της μονάδας, ενός θετικού αριθμού β ονομάζεται ο εκθέτης στον οποίο θα υψωθεί ο αριθμός a ώστε η δύναμη να έχει αποτέλεσμα τον αριθμό β. Συμβολίζεται :

$$\log_a \beta$$

με $0 < a \neq 1$ και $\beta > 0$.

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση του λογαρίθμου**.
- Ο αριθμός β έχει το ρόλο του αποτελέσματος της δύναμης με βάση a, ενώ ολόκληρος ο λογάριθμος, το ρόλο του εκθέτη.
- Αν ο λογάριθμος (εκθέτης) με βάση a του β είναι ίσος με x τότε θα ισχύει :

$$\log_a \beta = x \Leftrightarrow a^x = \beta$$

- Εαν η βάση ενός λογαρίθμου είναι ο αριθμός 10 τότε ο λογάριθμος ονομάζεται **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται : $\log x$.
- Εαν η βάση τοψ λογαρίθμου είναι ο αριθμός e τότε ο λογάριθμος ονομάζεται **φυσικός λογάριθμος** και συμβολίζεται : $\ln x$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Επιμεριστική	$a \cdot (\beta \pm \gamma) = a \cdot \beta \pm a \cdot \gamma$	

Πίνακας 1.10: Ιδιότητες πράξεων

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a \cdot 0 = 0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι θετικό.
- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι αρνητικό.

$$a, \beta \text{ ομόσημοι } \Rightarrow a \cdot \beta > 0 \text{ και } \frac{a}{\beta} > 0$$
$$a, \beta \text{ ετερόσημοι } \Rightarrow a \cdot \beta < 0 \text{ και } \frac{a}{\beta} < 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ
Οι παρακάτω κανόνες μας επιτρέπουν να εξετάζουμε πότε ένας αριθμός διαιρείται με καθέναν από τους βασικούς διαιρέτες που φαίνονται στον πίνακα.

Κανόνας	**Περιγραφή**
Κανόνας του 2	Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι ένα από τα 0,2,4,6,8.
Κανόνας του 5	Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.
Κανόνας του 10	Ένας αριθμός διαιρείται με το 10 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0.
Κανόνας του 3 (ή του 9)	Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 (με το 9) αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3 (του 9).
Κανόνας του 4 (ή του 25)	Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 (το 25) αν το τελευταίο διψήφιο μέρος του είναι πολλαπλάσιο του 4 (του 25).
Κανόνας του 6	Ένας αριθμός διαιρείται με το 6 διαιρείται συγχρόνως με το 2 και το 3.

Κανόνας του 8	Ένας αριθμός διαιρείται με το 8 εαν τα τρία τελευταία ψηφία του διαιρούνται με το 8.
Κανόνας του 12	Ένας αριθμός διαιρείται με το 12 εαν διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 4.
Κανόνας του 14	Ένας αριθμός διαιρείται με το 14 εαν διαιρείται συγχρόνως με το 2 και το 7.
Κανόνας του 15	Ένας αριθμός διαιρείται με το 15 εαν διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 5.

Πίνακας 1.11: Κανόνες διαιρερότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι μηδενικό τότε τουλάχιστον ένας απΆ αυτούς είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί και για γινόμενο περισσοτέρων των δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ ή } a_2 = 0 \text{ ή } \ldots \text{ ή } a_\nu = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5 ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι διάφορο του μηδενός τότε κανένας απΆ αυτούς δεν είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων από δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 0 \text{ και } a_2 \neq 0 \text{ και } \ldots \text{ και } a_\nu \neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6 ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, x, y \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y \quad \text{και} \quad a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές, μπορούμε να διαγράψουμε από μια ισότητα το μη μηδενικό προσθετέο ή παράγοντα που βρίσκεται και στα δύο μέλη μαις ισότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Ανακλαστική	Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x$ ή $x \geq x$
Μεταβατική	Αν $x > y$ και $y > z \Rightarrow x > z$
Αντισυμμετρική	Αν $x \leq y$ και $x \geq y \Rightarrow x = y$

Πίνακας 1.12: Ιδιότητες διάταξης

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

i. Σε κάθε ισότητα εαν τοποθετήσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, η σχέση που προκύπτει είναι ξανά ισότητα :

$$a = \beta \Rightarrow \begin{cases} a + \gamma = \beta + \gamma \\ a - \gamma = \beta - \gamma \\ a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \\ \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma} \;\; , \;\; \gamma \neq 0 \end{cases}$$

ii. Εαν δύο πραγματικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές δυνάμεις τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a = \beta \Leftrightarrow a^{\nu} = \beta^{\nu}$$

iii. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a, \beta > 0$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ

Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων προκύπτει ισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\text{ων}}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\text{ων}}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διάιρεση κατά μέλη.

$$a = \beta \;\text{ και }\; \gamma = \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma = \beta + \delta \\ \textbf{2. Αφαίρεση κατά μέλη} & a - \gamma = \beta - \delta \\ \textbf{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \\ \textbf{4. Διαίρεση κατά μέλη} & \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \;\; , \;\; \gamma \cdot \delta \neq 0 \end{cases}$$

Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται και για πράξεις κατα μέλη σε περισσότερες από δύο ισότητες, στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Εαν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ a - \gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περπτώσεις :

   i. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.
   ii. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

3. Για να υψώσουμε κάθε μέλος μιας ανισότητας $a > \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ σε έναν ακέραιο εκθέτη $\nu \in \mathbb{Z}$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

   i. Αν $\nu > 0$ **άρτιος** εκθέτης και
      - $a, \beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$ (Η φορά παραμένει ίδια.)
      - $a, \beta < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu < \beta^\nu$ (Η φορά αλλάζει.)
      - $a \cdot \beta < 0$ δηλαδή ετερόσημοι τότε δεν υψώνουμε σε δύναμη.

   ii. Αν $\nu > 0$ **περιττός** εκθέτης τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$

4. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a, \beta > 0$ είναι άνισοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με την ίδια φορά άνισες και αντίστροφα.

$$a > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} > \sqrt[\nu]{\beta}$$

Τις περιπτώσεις όπου ο εκθέτης είναι αρνητικός θα τις δούμε αναλυτικά στο επόμενο θεώρημα. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΛΩΝ - ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ
Εαν αντιστρέψουμε τα μέλη μιας ανισότητας, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά

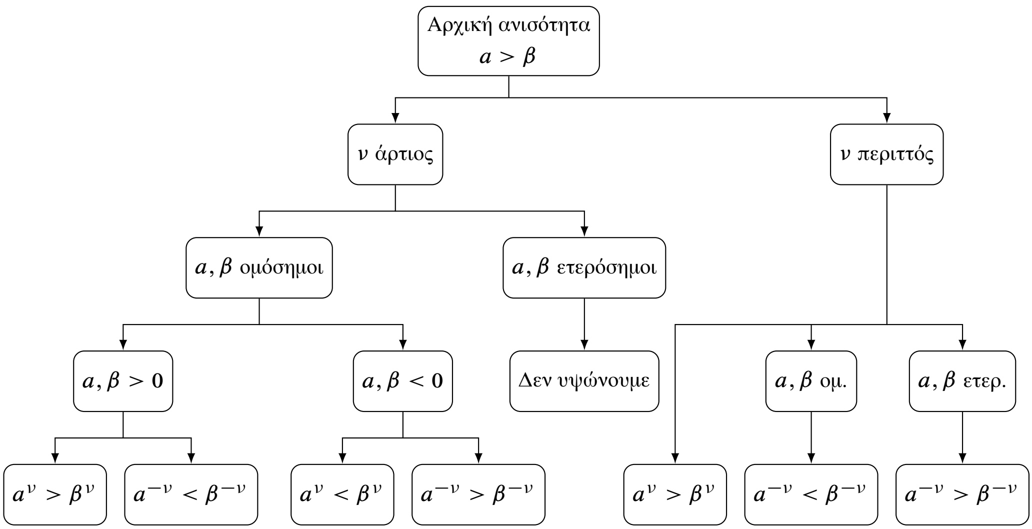
- αντίθετη της αρχικής αν τα μέλη της είναι ομόσημα και
- ίδια της αρχικής αν τα μέλη της είναι ετερώσημα.

$$\text{Αν } a, \beta \text{ ομόσημοι τότε } a > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$$
$$\text{Αν } a, \beta \text{ ετερόσημοι τότε } a > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{\beta}$$

Το θεώρημα αυτό είναι μια ειδική περίπτωση του **Θεωρήματος 1.10** όπου ο εκθέτης είναι **αρνητικός** και **περιττός** και πιο συγκεκριμένα $\nu = -1$. Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε τον κανόνα αυτό για αρνητικό εκθέτη, συνεχίζοντας να διακρίνουμε τις περιπτώσεις του προηγούμενου θεωρήματος.

1. Αν $\nu > 0$ **άρτιος** εκθέτης και
   i. $a, \beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^{-\nu} < \beta^{-\nu}$ (Η φορά αλλάζει.)
   ii. $a, \beta < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^{-\nu} > \beta^{-\nu}$ (Η φορά παραμένει ίδια.)
   iii. $a \cdot \beta < 0$ δηλαδή ετερόσημοι τότε δεν υψώνουμε σε δύναμη.
2. Αν $\nu > 0$ **περιττός** εκθέτης και
   i. a, β ομόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^{-\nu} < \beta^{-\nu}$ (Η φορά αλλάζει.)
   ii. a, β ετερόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^{-\nu} > \beta^{-\nu}$ (Η φορά παραμένει ίδια.)

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται πιο καθαρά και συγκεντρωτικά στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 1.8: Δυνάμεις μελών ανίσωσης

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.12 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων προκύπτει ανισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\text{ων}}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\text{ων}}$ μελών τους με φορά ίδια της αρχικής. Ομοίως πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη δύο ανισότητες προκύπτει ανισότητα με φορά ίδια της αρχικής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο ανισότητες κατά μέλη πρέπει όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{1. Πρόσθεση κατά μέλη}} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{\textit{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \ \ , \ \ \text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13 ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Δύο κλάσματα είνα ίσα αν και μόνο αν τα «χιαστί» γινομενά τους είναι ίσα.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \ \ , \ \ \beta, \delta \neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Για κάθε αναλογία με όρους $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ πραγματικούς αριθμούς με $a\beta, \gamma, \delta \neq 0$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Χιαστί γινόμενα	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
2	Εναλλαγή μέσων και άκρων όρων	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{a}$
3	Άθροισμα - Διαφορά στους αριθμητές	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$
4	Άθροισμα - Διαφορά στους παρονομαστές	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
5	Άθροισμα - Διαφορά αριθμ. και παρονομ.	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \pm \beta}{\gamma \pm \delta}$

Πίνακας 1.13: Ιδιότητες αναλογιών

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.15 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟ 1

Για τη σύγκριση ενός κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με τον αριθμό 1 ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες :

i. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.

$$a > \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} > 1$$

ii. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.

$$a < \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} < 1$$

iii. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

$$a = \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.16 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ
Στο θεώρημα αυτό βλέπουμε τρεις κανόνες που αφορούν τη σύγκριση κλασμάτων μεταξύ τους :

i. Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο αριθμητή.

$$a > \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \quad , \quad \gamma \neq 0$$

ii. Αν δύο κλάσματα έχουν κοινό αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

$$a > \beta \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} < \frac{\gamma}{\beta} \quad , \quad a, \beta, \gamma \neq 0$$

iii. Για να συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα οπότε τα συγκρίνουμε όπως στην πρώτη περίπτωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.17 ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ
Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού $a \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός :

$$a^2 \geq 0$$

Η ιδιότητα ισχύει και για οποιοδήποτε άρτιο εκθέτη του αριθμού a.

$$a^{2\kappa} \geq 0 \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η ισότητα ισχύει όταν ο πραγματικός αριθμός, δηλαδή η βάση της δύναμης, είναι 0.

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.18 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ
Το άθροισμα τετραγώνων οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $a, \beta\nu \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός

$$a^2 + \beta^2 \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει όταν οι βάσεις των δυνάμεων, είναι 0.

$$a^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \beta = 0$$

Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται και για άθροισμα πολλών πραγματικών αριθμών υψωμένων σε οποιοδήποτε άρτιο εκθέτη.

$$a_1^{2\kappa_1} + a_2^{2\kappa_2} + \ldots + a_\nu^{2\kappa_\nu} \geq 0 \ , \ \kappa_i \in \mathbb{Z} \ , \ i = 1, 2, \ldots, \nu$$

Η ισότητα ισχύει όταν οι βάσεις των δυνάμεων είναι μηδενικές.

$$a_1^{2\kappa_1} + a_2^{2\kappa_2} + \ldots + a_\nu^{2\kappa_\nu} = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ldots = a_\nu = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.19 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δυναμη με βάση έναν αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \ \text{όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \ \text{όπου } a \neq 0$$

Επίσης για δυνάμεις με βάσεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ και φυσικούς εκθέτες $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \ , \ \beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu \ , \ a, \beta \neq 0$

Πίνακας 1.14: Ιδιότητες δυνάμεων

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}$$
$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^\nu = a_1^\nu \cdot a_2^\nu \cdot \ldots \cdot a_\kappa^\nu$$

Για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ιδιότητες 1 - 6 με την προϋπόθεση οι βάσεις να είναι θετικοί αριθμοί δηλαδή $a, \beta > 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.20 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις απόλυτες τιμές τους :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Πρόσημο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert \geq 0$
2	Απόλυτη τιμή μηδενός	$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3	Όρια αριθμού	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$
4	Απόλυτη τιμή γινομένου	$\lvert a \cdot \beta\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert\beta\rvert$
5	Απόλυτη τιμή πηλίκου	$\left\lvert \frac{a}{\beta} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert\beta\rvert}$
6	Τετράγωνο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
7	Τριγωνική ανισότητα	$\lvert\lvert a - \beta\rvert\rvert \leq \lvert a \pm \beta\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert\beta\rvert$

Πίνακας 1.15: Ιδιότητες απόλυτης τιμής

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.21 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ πραγματικούς αριθμούς και $\nu, \mu, \rho \in \mathbb{N}$ φυσικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την τετραγωνική και ν-οστή ρίζα τους.

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\,\right)^2 = x \ , \ \forall x \geq 0$
2	Ν-οστή δύναμη ν-οστής ρίζας	$\left(\sqrt[\nu]{x}\,\right)^\nu = x \ , \ \forall x \geq 0$
3	Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$
4	Ν-οστή ρίζα ν-οστής δύναμης	$\sqrt[\nu]{x^\nu} = \begin{cases} \lvert x\rvert & \forall x \in \mathbb{R} \text{ αν } \nu \text{ άρτιος} \\ x & \forall x \geq 0 \text{ και } \forall \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
5	Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \ , \ \forall x, y \geq 0$ $\sqrt[\nu]{x \cdot y} = \sqrt[\nu]{x} \cdot \sqrt[\nu]{y} \ , \ \forall x, y \geq 0$

6	Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $\forall x \geq 0$ και $y > 0$ $\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\sqrt[\nu]{y}}$, $\forall x \geq 0$ και $y > 0$
7	Μ-οστή ρίζα ν-οστής ρίζας	$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{x}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{x}$, $\forall x \geq 0$
8	Απλοποίηση ρίζας	$\sqrt[\nu]{x^\nu \cdot y} = x \sqrt[\nu]{y}$, $\forall x, y \geq 0$
9	Απλοποίηση τάξης και δύναμης	$\sqrt[\mu \cdot \rho]{x^{\nu \cdot \rho}} = \sqrt[\mu]{x^\nu}$, $\forall x \geq 0$

Πίνακας 1.16: Ιδιότητες ριζών

- Η ιδιότητα 5 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$\sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt[\nu]{x_1} \cdot \sqrt[\nu]{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{x_\nu}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

- Η ιδιότητα 7 ισχύει και για παραστάσεις που περιέχουν πολλές ρίζες διαφόρων τάξεων στις οποίες η μια ρίζα βρίσκεται μέσα στην άλλη.

$$\sqrt[\mu_1]{\sqrt[\mu_2]{\ddots \sqrt[\mu_\nu]{x}}} = \sqrt[\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_\nu]{x}$$

με $x \geq 0$ και $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.22 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Για οπουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}^+$ έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες που αφορούν το λογάριθμο τους με βάση έναν θετικό πραγματικό αριθμό a.

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Λογάριθμος γινομένου	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2	Λογάριθμος πηλίκου	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3	Λογάριθμος δύναμης	$\log_a x^\kappa = \kappa \cdot \log_a x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
4	Λογάριθμος ρίζας	$\log_a \sqrt[\nu]{x} = \frac{1}{\nu} \log_a x$, $\nu \in \mathbb{N}$
5	Λογάριθμος ως εκθέτης	$a^{\log_a x} = x$
5	Αλλαγή βάσης	$\log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$

Πίνακας 1.17: Ιδιότητες ριζών

Επίσης για κάθε λογάριθμο με οποιαδήποτε βάση $a \in \mathbb{R}^+$ έχουμε :

i. $\log_a 1 = 0$

ii. $\log_a a = 1$

1.2 Αλγεβρικές Παραστάσεις - Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.42 ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου όπως $a, \beta, x, y, \ldots$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.43 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αριθμητική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.44 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αλγεβρική ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

- Τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται ο αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις εαν αντικατασταθούν οι μεταβλητές της με αριθμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.45 ΑΚΕΡΑΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Ακέραια ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ανάμεσα στις μεταβλητές οι οποίες έχουν εκθέτες φυσικούς αριθμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.46 ΜΟΝΩΝΥΜΟ
Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία έχει ανάμεσα στις μεταβλητές μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x^{\nu_1} y^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot z^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}} \quad , \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa \in \mathbb{N}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.47 ΒΑΘΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

Βαθμός μονωνύμου, ως προς μια μεταβλητή, ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής.

- Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του είναι το άθροισμα των βαθμών κάθε μεταβλητής.
- Οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού, ενώ το 0 ονομάζεται **μηδενικό** μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

$a \cdot x^\nu y^\mu \longleftarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} \nu \text{ βαθμού ως προς } x \\ \mu \text{ βαθμού ως προς } y \\ \nu+\mu \text{ βαθμού ως προς } x \text{ και } y \end{array}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.48 ΟΜΟΙΑ - ΙΣΑ - ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

- Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
- Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα που έχουν ίσους συντελεστές.
- Αντίθετα ονομάζονται δύο όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

$a \cdot x^\nu y^\mu \ , \ \beta \cdot x^\nu y^\mu \longleftarrow \boxed{\text{Όμοια μονώνυμα}}$

$a \cdot x^\nu y^\mu \ , \ a \cdot x^\nu y^\mu \longleftarrow \boxed{\text{Ίσα μονώνυμα}}$

$a \cdot x^\nu y^\mu \ , \ -a \cdot x^\nu y^\mu \longleftarrow \boxed{\text{Αντίθετα μονώνυμα}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.49 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά πολυώνυμα** ενώ το 0 **μηδενικό πολυώνυμο**.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P, Q, A, B \ldots$ τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση η οποία περιέχει τις μεταβλητές του δηλαδή : $P(x), Q(x, y), A(z, w), B(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.
- Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο βαθμός του μεγιστοβάθμιου όρου.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.50 ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικαταστίσουμε τη μεταβλητή του πολυωνύμου με έναν αριθμό x_0. Συμβολίζεται με $P(x_0)$ και είναι ίσο με :

$$P(x_0) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.51 ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ ο οποίος μηδενίζει το πολυώνυμο.

$$\rho \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.52 ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ
Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας τους όμοιους όρους της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.53 ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

Εκτός τις βασικές συναντούμε επίσης και τις παρακάτω εξίσου αξιοσημείωτες ταυτότητες μερικές των οποίων γράφονται με τη βοήθεια των βασικών :

8. **Άθροισμα τετραγώνων δύο όρων**
   Η ακόλουθη ταυτότητα μας δίνει μια σχέση για το άθροισμα των τετραγώνων δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ με τη βοήθεια των βασικών ταυτοτήτων **1** και **2** :
   $$a^2 + \beta^2 = (a+\beta)^2 - 2a\beta = (a-\beta)^2 + 2a\beta$$
9. **Άθροισμα τετραγώνων τριών όρων**
   Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι :
   $$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (a+\beta+\gamma)^2 - 2(a\beta + \beta\gamma + a\gamma)$$
10. **Άθροισμα κύβων**
    Μια επιπλέον σχέση η οποία μας δίνει το άθροισμα κύβων δύο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι η εξής :
    $$a^3 + \beta^3 = (a+\beta)^3 - 3a\beta(a+\beta)$$
11. **Διαφορά κύβων**
    Αντίστοιχη σχέση για τη διαφορά κύβων δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι :
    $$a^3 - \beta^3 = (a-\beta)^3 + 3a\beta(a-\beta)$$

12. Τετράγωνο τριωνύμου
Το ανάπτυγμα του τετραγώνου ενός αθροίσματος τριών πραγματικών αριθμών $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι :

$$(a+\beta+\gamma)^2 = a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2\beta\gamma+2a\gamma$$

13. Κύβος τριωνύμου Το ανάπτυγμα του κύβου ενός αθροίσματος τριών πραγματικών αριθμών $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι αντίστοιχα :

$$(a+\beta+\gamma)^3 = a^3+\beta^3+\gamma^3+3(a+\beta)(\beta+\gamma)(a+\gamma)$$

14. Τετράγωνο πολυωνύμου
Μια γενίκευση των **ταυτοτήτων 1, 2 και 12** είναι η ακόλουθη η οποία μας δίνει το ανάπτυγμα τετραγώνου του αθροίσματος περισσότερων των τριών προσθετέων :

$$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 + 2\sum_{i,j=1}^{\nu} x_i x_j \quad , \quad i \neq j$$

15. Άθροισμα - Διαφορά ν-οστών δυνάμεων
Η ακόλουθη ταυτότητα αποτελεί μια γενική σχέση για το άθροισμα δύο δυνάμεων δύο πραγματικών αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$ με κοινό εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \in \mathbb{N}$:

$$x^\nu \pm y^\nu = (x \pm y)\left(x^{\nu-1} \mp x^{\nu-2}y + x^{\nu-3}y^2 \mp \ldots \mp xy^{\nu-2} + y^{\nu-1}\right)$$

16. Τριώνυμο
Η παρακάτω ταυτότητα αφορά τα τριώνυμα δευτέρου βαθμου με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με τη μονάδα.

$$(x+a)(x+\beta) = x^2+(a+\beta)x+a\beta$$

17. Ταυτότητα Lagrange
Η παρακάτω σχέση αποτελεί μια ειδική περίπτωση της γενικής ταυτότητας του Γάλλου μαθηματικού Joseph-Louis Lagrange. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\left(a^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right) = (ax+\beta y)^2+(ay-\beta x)^2$$

18. Διώνυμο Newton
Η παρακάτω σχέση, γνωστή και ως διώνυμο του Newton (Νεύτονα)[1] μας δίνει το ανάπτυγμα της $\nu-$οστής δύναμης του αθροίσματος δύο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$.[2]

$$(x+y)^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \binom{\nu}{\nu-i} x^{\nu-i} y^i$$

[1] Ισαάκ Νεύτων : (1642-1727) Βρετανός φυσικομαθηματικός από τους σημαντικότερους της εποχής του. Θεμελιωτής του Απειροστικού Λογισμού, γνωστός για τους νόμους του περί βαρύτητας και κίνησης των σωμάτων.

[2] Η ερμυνεία των συμβόλων $\pm, \mp, \sum$ και $\binom{a}{\beta}$ βρίσκεται στη σελίδα ...

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.54 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ
Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση από άθροισμα, σε γινόμενο παραγόντων.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. **Κοινός Παράγοντας**
   Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται όταν σ′ όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας.

2. **Ομαδοποίηση**
   Χρησιμοποιείται στην περίπτωση που δεν υπάρχει σε όλους τους όρους μιας παράστασης κοινός παράγοντας οπότε μοιράζονται οι όροι σε ομάδες έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει δικό της κοινό παράγοντα.

3. **Διαφορά Τετραγώνων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 - \beta^2$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή την :
   $$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$

4. **Διαφορά - Άθροισμα Κύβων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^3 - \beta^3$ ή $a^3 + \beta^3$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή την :
   $$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right)$$
   $$a^3 + \beta^3 = (a + \beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right)$$

5. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή την :
   $$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$$
   $$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$

6. **Τριώνυμο**
   Κάθε σχέση της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή την :
   $$x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + a)(x + \beta)$$
   Αν το τριώνυμο είναι της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$ τότε υπολογίζοντας τις ρίζες του, με τον τρόπο που βλέπουμε στη Μέθοδο... παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

7. **Ανάπτυγμα Κύβου**
   $$a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 = (a + \beta)^3$$
   $$a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3 = (a - \beta)^3$$

8. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου Τριωνύμου**

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a\beta + 2\beta\gamma + 2a\gamma = (a + \beta + \gamma)^2$$

9. **Ανάπτυγμα Κύβου Τριωνύμου**

$$a^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(a + \beta)(\beta + \gamma)(a + \gamma) = (a + \beta + \gamma)^3$$

10. **Άθροισμα - Διαφορά ν-οστών δυνάμεων**

$$x^\nu \pm y^\nu = (x \pm y)\left(x^{\nu-1} \mp x^{\nu-2}y + x^{\nu-3}y^2 \mp \ldots \mp xy^{\nu-1} + y^{\nu-1}\right)$$

Σε γενικές γραμμές, κάθε ταυτότητα μας δίνει μια μορφή παραγοντοποίησης εαν μετατρέψουμε το ανάπτυγμα της στην αρχική του μορφή η οποία αποτελεί γινόμενο παραγόντων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.55 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x), \delta(x)$ (Διαιρετέος και διαιρέτης αντίστοιχα) προκύπτουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x), \upsilon(x)$ (πηλίκο και υπόλοιπο) για τα οποία ισχύει :

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Η παραπάνω ισότητα ονομάζεται **ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Εαν $\upsilon(x) = 0$ τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** ενώ η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

- Στην τέλεια διαίρεση τα πολυώνυμα $\delta(x), \pi(x)$ ονομάζονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.56 Ε.Κ.Π. ΚΑΙ Μ.Κ.Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το πολυώνυμο που αποτελείται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες τους, υψωμένους στον μεγαλύτερο εκθέτη.
2. Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το πολυώνυμο που αποτελείται μόνο από τους κοινούς παράγοντες τους, υψωμένους τον καθένα στο μικρότερο εκθέτη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.57 ΡΗΤΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Ρητή ονομάζεταικάθεα αλγεβρική παράσταση η οποία έχει τη μορφή κλάσματος. Είναι δηλαδή της μορφής

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα με } Q(x) \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.58 ΑΡΡΗΤΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Άρρητη ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση η οποία δεν είναι ρητή. Είναι της μορφής

$$\sqrt[\nu]{(A(x))}$$

περιέχει δηλαδή τουλάχιστον μια ρίζα οποιασδήποτε τάξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.59 ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για εκφράσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Η μεταβλητή μπορεί να βρίσκεται μέσα σε μια εξίσωση και γενικά σε μια αλγεβική παράσταση. Συμβολίζεται με ένα γράμμα όπως $a, \beta, x, y, \ldots$ κ.τ.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.60 ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή δηλαδή κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) = 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Εξίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ισότητα η οποία περιέχει μια μεταβλητή.
- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.
- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Δύο ή περισσότερες εξισώσεις που έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμες**.
- Εαν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εαν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.
- Εαν σε μια εξίσωση πολλών μεταβλητών, ορίσουμε ένα μέρος των μεταβλητών αυτών ώς κύριες μεταβλητές της εξίσωσης τότε οι επιπλέον μεταβλητές ονομάζονται **παράμετροι** ενώ η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.
- Η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.61 ΕΞΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

Όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν ο συντελεστής της μεταβλητής x είναι διάφορος του 0 τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.62 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ
Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.63 ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ \ , \ \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
- Ο συντελεστής $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.64 ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ
Διακρίνουσα ενός τριωνύμου 2ου βαθμού ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.65 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x), R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.66 ΑΡΡΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Άρρητη ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.67 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΒΑΘΜΟΥ ν
Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_\kappa \in \mathbb{R} \ \ , \ \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.68 ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διτετράγωνη ονομάζεται κάθε εξίσωση 4ου βαθμού της μορφής :

$$ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$ η οποία έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x. Οι εκθέτες του τριωνύμου είναι διπλάσιοι απ' αυτούς της εξίσωσης 2ου βαθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.69 ΔΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διώνυμη εξίσωση ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση η οποία περιέχει 2 όρους και είναι της μορφής :

$$ax^{\nu} + \beta x^{\mu} = 0$$

όπου οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί $\nu > \mu \ \nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $a \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.70 ΤΡΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Τριώνυμη ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πολυώνυμο 3 όρων της μορφής :

$$ax^{\nu} + \beta x^{\mu} + \gamma x^{\kappa} = 0$$

όπου οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί $\nu > \mu > \kappa \ \nu, \mu, \kappa \in \mathbb{N}$ με $a \neq 0$.

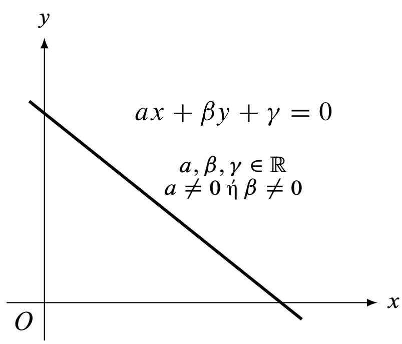
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.71 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική εξίσωση ν μεταβλητών, ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση στην οποία κάθε όρος της είναι μονώνυμο $1^{ου}$ βαθμού μιας μεταβλητής. Έχει τη μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{\nu}x_{\nu} + \beta = 0$$

όπου οι συντελεστές και ο σταθερός όρος είναι πραγματικοί αριθμοί $\beta, a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Ειδικότερα η γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές θα είναι της μορφής

$$ax + \beta y + \gamma = 0$$



Σχήμα 1.9: Γραμμική εξίσωση

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η καμπύλη είναι ευθεία γραμμή αν οι συντελεστές a, β των μεταβλητών x, y αντίστοιχα, δεν μηδενίζονται συγχρόνως : $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.72 ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{\nu}x_{\nu} + \beta = 0$$

ονομάζεται κάθε διατεταγμένη $\nu-$άδα αριθμών $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\nu})$ η οποία επαληθεύει την εξίσωση. Για της ειδική περίπτωση της γραμμικής εξίσωσης δύο μεταβλητών,

$$ax + \beta y + \gamma = 0$$

η λύση θα είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο την επαληθεύει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.73 ΣΥΣΤΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
Σύστημα εξισώσεων ονομάζεται μια σύζευξη - συνδυασμός εξισώσεων με κοινές μεταβλητές. Ο γενική περίπτωση συνδυασμού ν γραμμικών εξισώσεων με μ σε πλήθος μεταβλητές

θα γράφεται στη μορφή :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases}$$

με πραγματικούς συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, \nu\ ,\ j = 1, 2, \ldots, \mu$ και πραγματικούς σταθερούς όρους $\beta_i \in \mathbb{R}$.

- Κάθε διατεταγμένη $\mu-$άδα αριθμών $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu)$ που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\nu \times \mu$ γραμμικού συστήματος ονομάζεται **λύση** του συστήματος.
- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εαν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.
- Εαν οι σταθεροί όροι β_i είναι μηδενικοί, το σύστημα λέγεται **ομογενές**.
- Ο συμβολισμός a_{ij} για τους συντελεστές των εξισώσεων έχει δείκτη τον αριθμό ij ώστε να μας βοηθάει να γνωρίζουμε σε ποιά θέση βρίσκεται ο κάθε όρος της εξίσωσης.

Πιο αναλυτική περιγραφή θα δούμε στην **Παράγραφο 1.6** όπου συσχετίζουμε την έννοια του γραμμικού συστήματος με αυτή του πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.74 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2×2
Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται η σύζευξη ενός ζεύγους γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

- Οι συντελεστές του συστήματος και οι σταθεροί όροι είναι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος 2×2.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.75 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εαν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.76 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2
Ορίζουσα των συντελεστών ενός συστήματος 2×2 ονομάζεται ο αριθμός $a\beta' - a'\beta$ η οποία συμβολίζεται με

$$D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}$$

D_x, D_y είναι οι ορίζουσες των μεταβλητών που προκύπτουν αν αντικαταστίσουμε στην ορίζουσα D τη στήλη των συντελεστών των μεταβλητών x, y αντίστοιχα με τους σταθερούς όρους γ, γ'.

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} \quad , \quad D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.77 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3 × 3
Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους ονομάζεται ένας συνδυασμός από τρεις γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ a_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

με $a_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Κάθε διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x_0, y_0, z_0) η οποία επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος 3×3.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.78 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 3×3
Ορίζουσα ενός 3×3 συστήματος ονομάζεται ο αριθμός

$$a_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

η οποία συμβολίζεται με D και είναι

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

D_x, D_y, D_z είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν αν αντικαταστίσουμε στην ορίζουσα D τους συντελεστές των μεταβλητών x, y, z αντίστοιχα με τους σταθερούς όρους $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.79 ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση δηλαδή της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \quad , \quad P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.

- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.80 ΑΝΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \ , \ ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.81 ΑΝΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \ . \ ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.82 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΙΣΩΣΗ
Κλασματική ανίσωση ονομάζεται κάθε ανίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Κάθε κλασματική ανίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) > 0 \ , \ \frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) < 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.83 ΑΡΡΗΤΗ ΑΝΙΣΩΣΗ
Άρρητη ονομάζεται κάθε ανίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) > 0 \ , \ \sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) < 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.23 ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.

2. Αν $a = 0$ και
   i. $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.
   ii. $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

Πίνακας 1.18: Λύσεις εξίσωσης $1^{\text{ου}}$ βαθμού

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.24 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

1. Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :
   i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις :
   $$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$$
   ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 :
   $$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
   iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
2. Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει :
$$|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$$
3. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :
$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) \quad , \quad \text{με } g(x) \geq 0$$
$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.25 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$
Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το είδος του εκθέτη ν και του πραγματικού αριθμού a.

1. Για ν άρτιο έχουμε :

   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις αντίθετες :

   $$x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \pm a$$

   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Για ν περιττό έχουμε :

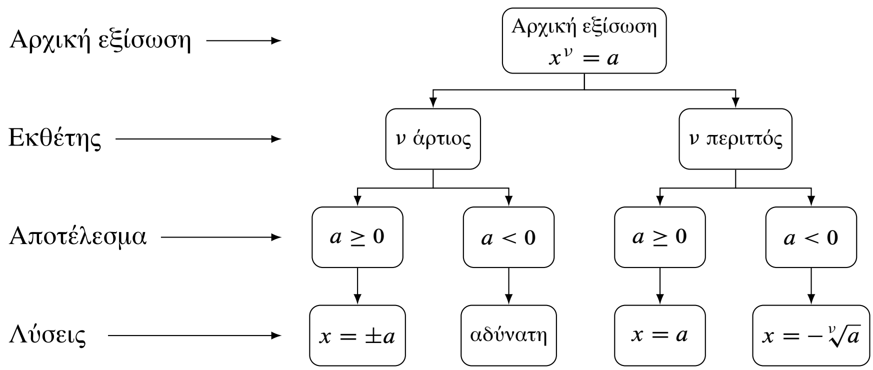
   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 θετική λύση :

   $$x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = a$$

   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 αρνητική λύση :

   $$x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{a}$$

Οι λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^{\nu} = a$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε :



Σχήμα 1.10: Λύσεις εξίσωσης $x^{\nu} = a$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.26 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^{\nu} = a^{\nu}$
Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^{\nu} = a^{\nu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

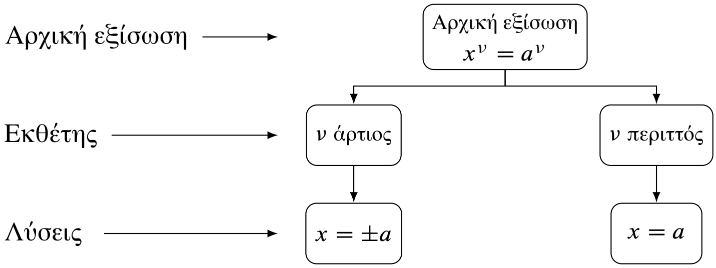
i. Αν ν άρτιος τότε η εξίσωση έχει δύο αντίθετες λύσεις :

$$x^{\nu} = a^{\nu} \Leftrightarrow x = \pm a$$

ii. Αν ν περιττός τότε η εξίσωση έχει μια λύση :

$$x^{\nu} = a^{\nu} \Leftrightarrow x = a$$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών φαίνονται στο αντίστοιχο διάγραμμα :



Σχήμα 1.11: Λύσεις εξίσωσης $x^\nu = a^\nu$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.27 ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

i. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ii. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$.

iii. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον πίνακα :

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 πραγματικές άνισες λύσεις	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή πραγματική λύση	$x = -\frac{\beta}{a}$
$\Delta < 0$	Καμία πραγματική λύση - Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	

Πίνακας 1.19: Λύσεις εξίσωσης 2ου βαθμού

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.28 ΤΥΠΟΙ VIETA

Έστω $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωση τότε το άθροισμα S και το γινομενό τους P δίνονται από τους τύπους :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

οι οποίοι ονομάζονται τύποι του Vieta.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.29 ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς αυτούς δίνεται από τον τύπο :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.30 ΕΙΔΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εαν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι λύσεις της, S το άθροισμα και P το γινομενό τους τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το είδος των λύσεων της :

<table>
<tr><th>Δ</th><th>P</th><th>S</th><th>Είδος λύσεων</th><th>Συμβολισμός</th></tr>
<tr><td rowspan="10">$\Delta > 0$</td><td rowspan="3">$P > 0$</td><td>$S > 0$</td><td>Δύο θετικές πραγματικές</td><td>$x_1 > x_2 > 0$</td></tr>
<tr><td>$S < 0$</td><td>Δύο αρνητικές λύσεις</td><td>$x_1 < x_2 < 0$</td></tr>
<tr><td>$S = 0$</td><td colspan="2">Αδύνατη περίπτωση</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$P < 0$</td><td>$S > 0$</td><td rowspan="2">Ετερόσημες (όχι αντίθετες)</td><td>$x_1 < 0 < x_2$, $|x_2| < |x_1|$</td></tr>
<tr><td>$S < 0$</td><td>$x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| < |x_2|$</td></tr>
<tr><td>$S = 0$</td><td>Αντίθετες</td><td>$x_1 = -x_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$P = 0$</td><td>$S > 0$</td><td>Μηδενική και θετική</td><td>$x_1 = 0$, $x_2 > 0$</td></tr>
<tr><td>$S < 0$</td><td>Μηδενική και αρνητική</td><td>$x_1 = 0$, $x_2 < 0$</td></tr>
<tr><td>$S = 0$</td><td colspan="2">Αδύνατη περίπτωση</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P = 1$</td><td>Αντίστροφες</td><td>$x_1 = \frac{1}{x_2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">$P > 0$</td><td>$S > 0$</td><td>Θετικές και ίσες</td><td>$x_1 = x_2 > 0$</td></tr>
<tr><td>$S < 0$</td><td>Αρνητικές και ίσες</td><td>$x_1 = x_2 < 0$</td></tr>
<tr><td>$P = 0$</td><td>$S = 0$</td><td>Μηδενικές</td><td>$x_1 = x_2 = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td colspan="4">Αδύνατη στο $\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

Πίνακας 1.20: Είδη λύσεων εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.31 ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
Δύο πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα $\forall x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ με $a_\nu, \beta\mu \neq 0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα, με $\mu \geq \nu$, τότε

$$P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow a_\kappa = \beta_\kappa \;\;,\;\; \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$
$$\beta_\lambda = 0 \;\;,\;\; \lambda = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, \mu$$

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το 0. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ τότε

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_\kappa = 0 \;\;,\;\; \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

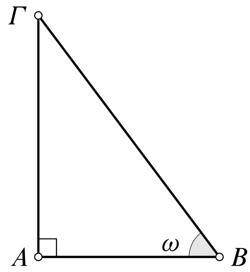
1.3 Τριγωνομετρία

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.84 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Έστω $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με $A = 90°$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξείων γωνιών του τριγώνου ορίζονται ως εξής :

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \;,\; \text{ημ}\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$



Σχήμα 1.12: Τριγωνομετρικοί αριθμοι οξείας γωνίας

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \;,\; \text{συν}\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.

$$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \;,\; \text{εφ}\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την απέναντι κάθετη.

$$\text{Συνεφαπτομένη} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}} \;,\; \text{σφ}\omega = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Υπάρχουν και επιπλέον δύο τριγωνομετρικοί αριθμοί τους οποίους συναντούμε σπανιότερα από τους άλλους και τους βλέπουμε κυρίως σε εφαρμογές της τριγωνομετρίας στη μηχανική στη ναυσιπλοοία και άλλες επιστήμες.

5. **Τέμνουσα**
   Τέμνουσα μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται το πηλίκο της υποτείνουσας προς την απέναντι κάθετη πλευρά.

$$\text{Τέμνουσα} = \frac{\text{Υποτείνουσα}}{\text{Απέναντι Κάθετη}} \;,\; \text{τεμ}\omega = \frac{B\Gamma}{AB}$$

6. **Συντέμνουσα**
   Συντέμνουσα μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται το πηλίκο της υποτείνουσας προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.

$$\text{Συντέμνουσα} = \frac{\text{Υποτείνουσα}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \;,\; \text{στεμ}\omega = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.85 ΤΡΙΓ. ΑΡ. ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

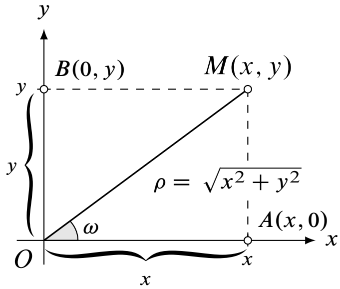
Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και $M(x, y)$ ένα σημείο του. Ενώνοντας το σημείο M με την αρχή των αξόνων, το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει δημιουργεί μια γωνία ω με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ox. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM είναι :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας αυτής ορίζονται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του σημείου και είναι :

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο της γωνίας ω ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$



Σχήμα 1.13: Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο της γωνίας ω ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη της γωνίας ω τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x} \ , \ x \neq 0$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την τεταγμένη του.

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{y} \ . \ y \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.86 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ - ΤΟΞΩΝ

Μονάδες μέτρησης γωνιών - τόξων λέγονται οι γωνίες ή τα τόξα αντίστοιχα με τα οποία μετράμε το μέτρο (άνοιγμα) των πλευρών μιας γωνίας ή αντίστοιχα το μέτρο ενός τόξου. Οι βασικές μονάδες μέτρησης για τη μέτρηση γωνιών ή τόξων είναι :

1. **Μοίρα**

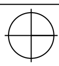
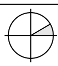
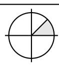
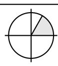
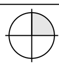
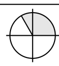
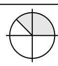
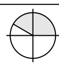
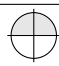
Μοίρα ονομάζεται το τόξο το οποίο είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε τη μοίρα ως τη γωνία η οποία αν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου του κύκλου.

- Συμβολίζεται με 1°.
- Μια μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά ($60'$) και κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά ($60''$).

2. **Ακτίνιο**
Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Συμβολίζεται με 1rad.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες και ακτίνια αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

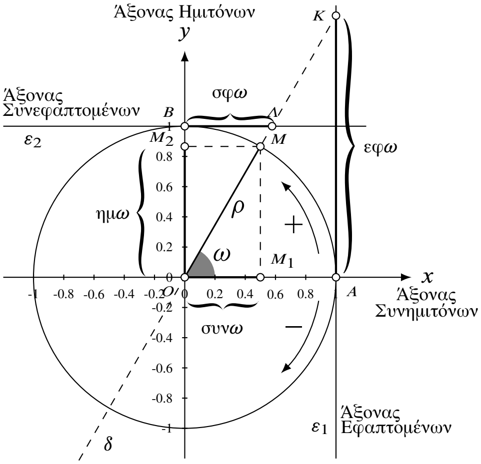
Βασικές Γωνίες

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Σχήμα									
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\varepsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sigma\varphi\omega$	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

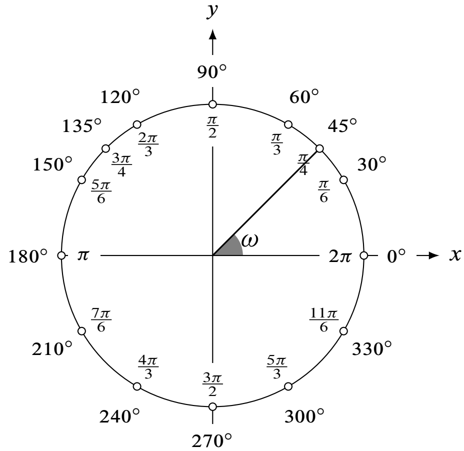
Πίνακας 1.21: Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.87 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος με ακτίνα και κέντρο την αρχή των αξόνων ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών.

Τριγωνομετρικός Κύκλος



Σχήμα 1.14: Τριγωνομετρικός κύκλος



Σχήμα 1.15: Βασικές γωνίες

- Κάθε γωνία ω έχει πλευρές, τον θετικό ημιάξονα Ox και την ακτίνα ρ του κύκλου, μετρώντας τη γωνία αυτή αριστερόστροφα, φορά που ορίζεται ως **θετική**.
- Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ είναι ο άξονας συνημιτόνων ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ ο άξονας ημιτόνων.
- Κάθε σημείο M του κύκλου έχει συντεταγμένες $M(\text{συν}\omega, \text{ημ}\omega)$.
- Η τετμημένη του σημείου είναι ίση με το συνημίτονο της γωνίας, ενώ η τεταγμένη ίση με το ημίτονο της.

$$x = \text{συν}\omega \quad , \quad y = \text{ημ}\omega$$

- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $A(1,0)$ είναι ο **άξονας των εφαπτομένων**. Η εφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας ε_1 με το φορέα δ της ακτίνας.

$$y_K = \text{εφ}\omega$$

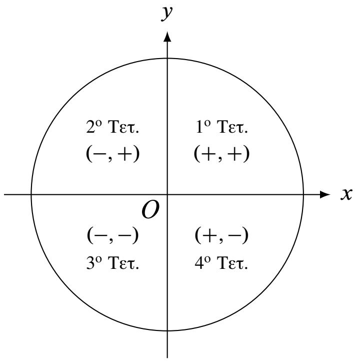
- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $B(0,1)$ είναι ο **άξονας των συνεφαπτομένων**. Η συνεφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας ε_2 με το φορέα δ της ακτίνας.

$$x_K = \text{σφ}\omega$$

Πιο κάτω βλέπουμε τα τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία χωρίσουν οι άξονες το επίπεδο και τον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών σε κάθε τεταρτημόριο.

Τρ. Αριθμός / Τεταρτημόριο	ημω	συνω	εφω	σφω
1ο Τεταρτημόριο	+	+	+	+
2ο Τεταρτημόριο	+	−	−	−
3ο Τεταρτημόριο	−	−	+	+
4ο Τεταρτημόριο	−	+	−	−

Πίνακας 1.22: Πρόσημα



Σχήμα 1.16: Τεταρτημόρια τρ. κύκλου

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.32 ΑΚΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας ω παίρνει τιμές από -1 μέχρι 1.

$$-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1 \ \ , \ \ -1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$$

ή ισοδύναμα $|\text{ημ}\omega| \leq 1$, $|\text{συν}\omega| \leq 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.33 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ
Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι παρακάτω βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες :

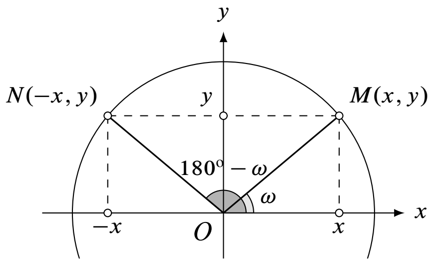
1. $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$
2. $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}$
3. $\text{σφ}\omega = \dfrac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$
4. $\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$
5. $\text{συν}^2\omega = \dfrac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}$
6. $\text{ημ}^2\omega = \dfrac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.34 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αντίθετων, παραπληρωματικών, συμπληρωματικών γωνιών, καθώς και γωνιών που διαφέρουν κατά , 90°, 180° ή 360° ανάγωνται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών του 1ου τεταρτημορίου σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους.

1. **Παραπληρωματικές γωνίες (2ο τεταρτημόριο)**
   Εαν ω είναι μια γωνία του 1ου τεταρτημορίου τότε η παραπληρωματική της θα είναι της μορφής $180° - \omega$. Οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών τους αριθμών φαίνονται

παρακάτω

- ημ $(180° - \omega) = $ ημω
- συν $(180° - \omega) = -$συνω
- εφ $(180° - \omega) = -$εφω
- σφ $(180° - \omega) = -$σφω

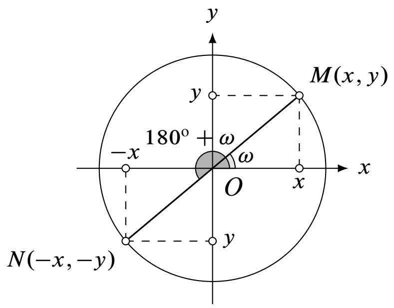


Σχήμα 1.17: Παραπληρωματικές γωνίες

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $180° - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς άξονα $y'y$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τετμημένες.

2. Γωνίες με διαφορά 180°

Εαν ω είναι μια γωνία του 1^{ου} τεταρτημορίου, η γωνία η οποία διαφέρει από την ω κατά $180°$ θα είναι της μορφής $180° - \omega$. Οι σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των δύο γωνιών θα είναι



Σχήμα 1.18: Γωνίες με διαφορά 180°

- ημ $(180° + \omega) = -$ημω
- συν $(180° + \omega) = -$συνω
- εφ $(180° + \omega) = $ εφω
- σφ $(180° + \omega) = $ σφω

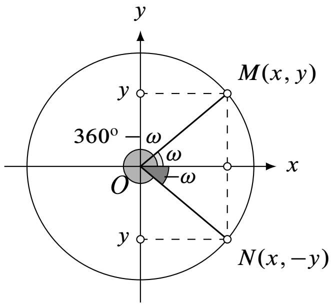
Οι γωνίες με διαφορά 180° έχουν αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα ενώ έχουν ίσες εφαπτομένες και συνεφαπτομένες. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $180° + \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την αρχή των αξόνων και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

3. Αντίθετες γωνίες - Γωνίες με άθροισμα (4^{ο} Τεταρτημόριο)

Η αντίθετη γωνία, μιας γωνίας ω του 1^{ου} τεταρτημορίου, ορίζεται να είναι η γωνία η οποία έχει ίσο μέτρο με τη γωνία ω, με φορά αντίθετη απ′ αυτήν και θα έχει τη μορφή $-\omega$. Επίσης η γωνία η οποία έχει με τη γωνία ω, άθροισμα $360°$ θα είναι $360° - \omega$.

- $\eta\mu\,(-\omega) = \eta\mu\,(360^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\,(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\,(360^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi\,(-\omega) = \varepsilon\varphi\,(360^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\,(-\omega) = \sigma\varphi\,(360^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

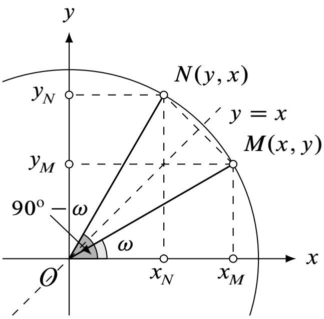
Οι γωνίες με άθροισμα 360° καθώς και οι αντίθετες έχουν ίσα συνημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $360^\circ - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς τον άξονα $x'x$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τεταγμένες. Τα σημεία του κύκλου των γωνιών $360^\circ - \omega$ και $-\omega$ καθώς και οι ακτίνες τους ταυτίζονται.



Σχήμα 1.19: Αντίθετες γωνίες - Γωνίες με άθροισμα 360°

4. **Συμπληρωματικές γωνίες**

Η συμπληρωματική γωνία μιας οξείας γωνίας ω θα είναι της μορφής $90^\circ - \omega$ η οποία ανήκει και αυτή στο 1^o τεταρτημόριο.



Σχήμα 1.20: Συμπληρωματικές γωνίες

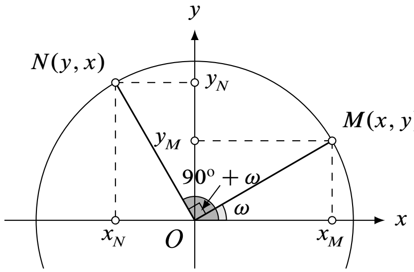
- $\eta\mu\,(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\,(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi\,(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\,(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$

Για δύο συμπληρωματικές γωνίες έχουμε οτι το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $90^\circ - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την ευθεία $y = x$ οπότε έχουν συμμετρικές συντεταγμένες.

5. **Γωνίες με διαφορά 90°**

Γωνίες οι οποίες διαφέρουν κατά 90° έχουν τη μορφή ω και $90^\circ + \omega$, με την ω να βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο.

- $\eta\mu\,(90^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\,(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi\,(90^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\,(90^\circ + \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

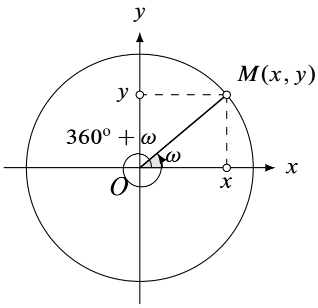


Σχήμα 1.21: Συμπληρωματικές γωνίες

Για δύο γωνίες με διαφορά 90° ισχύει οτι το ημίτονο της αμβλεία είναι ίσο με το συνημίτονο της οξείας, ενώ συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη της αμβλείας γωνίας είναι αντίθετα με τα ημίτονο, συνεφαπτομένη και εφαπτομένη αντίστοιχα, της οξείας γωνίας.

6. Γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$

Εαν σε μια γωνία ω του $1^{ου}$ τεταρτημορίου προσθέσουμε γωνία της μορφής $\kappa \cdot 360^\circ$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ δηλαδή ακέραια πολλαπλάσια ενός κύκλου προκύπτει γωνία του τύπου $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$. Γωνίες αυτής της μορφής διαφέρουν από την ω κατά πολλαπλάσια ενός κύκλου.



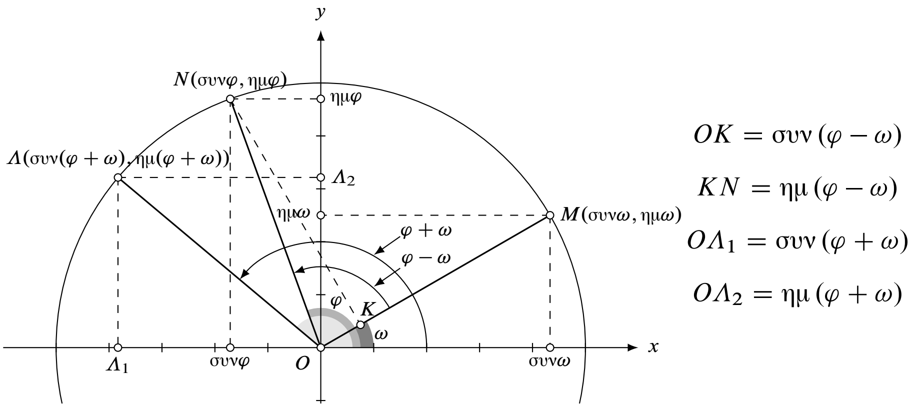
Σχήμα 1.22: Γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$

- $\eta\mu\,(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\,(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi\,(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\,(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Οι γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$ έχουν ίσους όλους τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς καθώς ταυτίζονται και τα σημεία των γωνιών πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και οι ακτίνες των γωνιών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.35 ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ & ΔΙΑΦΟΡΑΣ

Έστω ω, φ δύο γωνίες. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος $\varphi + \omega$ και της διαφοράς τους $\varphi - \omega$ δίνονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών ω, φ από τους παρακάτω τύπους.



Σχήμα 1.23: Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

1. $\eta\mu\,(\varphi+\omega)=\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\omega$
2. $\sigma\upsilon\nu\,(\varphi+\omega)=\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\varphi\cdot\eta\mu\omega$
3. $\varepsilon\varphi\,(\varphi+\omega)=\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}$
4. $\sigma\varphi\,(\varphi+\omega)=\dfrac{\sigma\varphi\varphi\sigma\varphi\omega-1}{\sigma\varphi\varphi+\sigma\varphi\omega}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΓΩΝΙΩΝ

1. $\eta\mu\,(\varphi-\omega)=\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\omega$
2. $\sigma\upsilon\nu\,(\varphi-\omega)=\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\varphi\cdot\eta\mu\omega$
3. $\varepsilon\varphi\,(\varphi-\omega)=\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}$
4. $\sigma\varphi\,(\varphi-\omega)=\dfrac{\sigma\varphi\varphi\sigma\varphi\omega+1}{\sigma\varphi\varphi-\sigma\varphi\omega}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.36 ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΓΩΝΙΑΣ
Οι τριγωνομετρικοί των ακέραιων πολλαπλάσιων $\kappa\cdot\varphi$ μιας γωνίας φ γράφονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της αρχικής γωνίας και δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

1. $\eta\mu 2\varphi=2\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$
2. $\sigma\upsilon\nu 2\varphi=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi\\ 1-2\eta\mu^2\varphi\\ 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-1\end{cases}$
3. $\varepsilon\varphi 2\varphi=\dfrac{2\varepsilon\varphi\varphi}{1-\varepsilon\varphi^2\varphi}$
4. $\sigma\varphi 2\varphi=\dfrac{\sigma\varphi^2\varphi-1}{2\sigma\varphi\varphi}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

1. $\eta\mu 3\varphi = 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi$
2. $\sigma\upsilon\nu 3\varphi = 4\sigma\upsilon\nu^3\varphi - 3\sigma\upsilon\nu\varphi$
3. $\varepsilon\varphi 3\varphi = \dfrac{3\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi^3\varphi}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\varphi}$
4. $\sigma\varphi 3\varphi = \dfrac{\sigma\varphi^3\varphi - 3\sigma\varphi\varphi}{3\sigma\varphi^2\varphi - 1}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

1. $\eta\mu\,(\kappa\cdot\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa-1)\varphi - \sigma\upsilon\nu(\kappa-2)\varphi \;\;,\;\; \kappa = 2,3,\ldots$
2. $\sigma\upsilon\nu\,(\kappa\cdot\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu(\kappa-1)\varphi - \eta\mu(\kappa-2)\varphi \;\;,\;\; \kappa = 2,3,\ldots$
3. $\varepsilon\varphi\,(\kappa\cdot\varphi) = \dfrac{\varepsilon\varphi\,(\kappa-1)\,\varphi + -\varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi\,(\kappa-1)\,\varphi\cdot\varepsilon\varphi\varphi} \;\;,\;\; \kappa = 2,3,\ldots$
4. $\sigma\varphi\,(\kappa\cdot\varphi) = \dfrac{\sigma\varphi\,(\kappa-1)\,\varphi\cdot\sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\,(\kappa-1)\,\varphi + \sigma\varphi\varphi} \;\;,\;\; \kappa = 2,3,\ldots$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.37 ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι ακόλουθες ταυτότητες μας δίνουν σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να γράψουμε τα τετράγωνα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιασδήποτε γωνίας φ ως συνάρτηση του συνημιτόνου της διπλασιας γωνίας 2φ :

1. $\eta\mu^2\varphi = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
2. $\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
3. $\varepsilon\varphi^2\varphi = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}$
4. $\sigma\varphi^2\varphi = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.38 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Οι παρακάτω σχέσεις μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε τριγωνομετρικές παραστάσεις από άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο και αντίστροφα.

1. **Μετατροπή αθροίσματος σε γινόμενο**
   Έστω φ, ω δύο οποιεσδήποτε γωνίες. Εαν θέσουμε $\varphi + \omega = \Phi$ και $\varphi - \omega = \Omega$ τότε ισχύει :

   i. $\eta\mu\Phi + \eta\mu\Omega = 2\eta\mu\dfrac{\Phi+\Omega}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Phi-\Omega}{2}$

   ii. $\eta\mu\Phi - \eta\mu\Omega = 2\eta\mu\dfrac{\Phi-\Omega}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Phi+\Omega}{2}$

   iii. $\sigma\upsilon\nu\Phi + \sigma\upsilon\nu\Omega = 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Phi+\Omega}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Phi-\Omega}{2}$

   iv. $\sigma\upsilon\nu\Phi - \sigma\upsilon\nu\Omega = 2\eta\mu\dfrac{\Phi+\Omega}{2}\eta\mu\dfrac{\Phi-\Omega}{2}$

   v. $\varepsilon\varphi\Phi + \varepsilon\varphi\Omega = \dfrac{\eta\mu\,(\Phi+\Omega)}{\sigma\upsilon\nu\Phi\cdot\sigma\upsilon\nu\Omega}$

   vi. $\varepsilon\varphi\Phi - \varepsilon\varphi\Omega = \dfrac{\eta\mu\,(\Phi-\Omega)}{\sigma\upsilon\nu\Phi\cdot\sigma\upsilon\nu\Omega}$

   vii. $\sigma\varphi\Phi + \sigma\varphi\Omega = \dfrac{\eta\mu\,(\Omega+\Phi)}{\eta\mu\Phi\cdot\eta\mu\Omega}$

   viii. $\sigma\varphi\Phi + \sigma\varphi\Omega = \dfrac{\eta\mu\,(\Omega-\Phi)}{\eta\mu\Phi\cdot\eta\mu\Omega}$

2. **Μετατροπή γινομένου σε άθροισμα**
   Για οποιεσδήποτε γωνίες φ, ω ισχύουν οι σχέσεις :

i. $2\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu(\varphi + \omega) + \eta\mu(\varphi - \omega)$
ii. $2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu(\varphi + \omega) - \eta\mu(\varphi - \omega)$
iii. $2\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(\varphi + \omega) + \sigma\upsilon\nu(\varphi - \omega)$
iv. $2\eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu(\varphi - \omega) - \sigma\upsilon\nu(\varphi + \omega)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.39 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι ακόλουθες ταυτότητες αποτελούν εφαρμογή των παραπάνω ταυτοτήτων και των σχέσεων που αφορούν αναγωγή στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο του **Θεωρήματος 1.34** στις γωνίες οποιουδήποτε τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ γωνίες $A+B$ και Γ είναι παραπληρωματικές ενώ οι γωνίες $\frac{A+B}{2}$ και $\frac{\Gamma}{2}$ συμπληρωματικές. Η επιλογή των γωνιών $A + B$ και Γ είναι αυθαίρετη και οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν και για τα υπόλοιπα ζεύγη γωνιών.

ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

1. $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$
2. $\sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu\Gamma$
3. $\varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi\Gamma$
4. $\sigma\varphi(A + B) = -\sigma\varphi\Gamma$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

5. $\eta\mu\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$
6. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A + B}{2}\right) = \eta\mu\frac{\Gamma}{2}$
7. $\varepsilon\varphi\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$
8. $\sigma\varphi\left(\frac{A + B}{2}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$

ΑΛΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

9. $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$
10. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$
11. $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma$
12. $\sigma\varphi A \cdot \sigma\varphi B + \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi A \cdot \sigma\varphi\Gamma = 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.40 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι σχέσεις που ακολουθούν, συνδέουν τους τριγωνομετρικους αριθμούς των γωνιών ενός τριγώνου με τις πλευρές του τριγώνου αυτού. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ ισχυουν οι σχέσεις :

1. $\frac{\beta + \gamma}{a}\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B - \Gamma}{2}$
2. $\frac{\beta - \gamma}{a}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B - \Gamma}{2}$
3. $\frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma}\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sigma\varphi\frac{B - \Gamma}{2}$
4. $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2} = \varepsilon\varphi\frac{B - \Gamma}{2}$

Από τις σχέσεις αυτές, εναλλάσοντας κυκλικά τις γωνίες A, B, Γ συγχρόνως με τις πλευρές β, γ, a προκύπτουν οι υπόλοιπες παρόμοιες ταυτότητες. Επιπλέον, οι παρακάτω τύποι συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών του τριγώνου με την ημιπερίμετρό του τ

5. $\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$

6. $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-a)}{\beta\gamma}}$

7. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-a)}}$

8. $\sigma\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-a)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$

Ομοίως με προηγουμένως, εναλλάσοντας τις γωνίες και τις πλευρές με τη σειρά A, B, Γ και a, β, γ αντίστοιχα, τότε προκύπτουν και οι τύποι που αφορούν τις υπόλοιπες γωνίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.41 ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ ισχύει η σχέση :

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.42 ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned} a^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= a^2 + \beta^2 - 2a\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \end{aligned}$$

1.4 Ακολουθίες αριθμών - Πρόοδοι

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.88 ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ
Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ όπου κάθε φυσικός αριθμός $\nu \in \mathbb{N}^*$, εκτός του μηδενός, αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό αριθμό $a(\nu) \in \mathbb{R}$ ή πιο απλά a_ν.

- Η ακολουθία των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται (a_ν).
- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας.
- Ο όρος a_ν ονομάζεται **ν-οστός** ή ***γενικός*** όρος της ακολουθίας.
- Οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να δίνονται είτε από
  - έναν **γενικό τύπο** της μορφής $a_\nu = f(\nu)$, όπου δίνεται κατευθείαν ο γενικός όρος της

– είτε από **αναδρομικό τύπο** όπου κάθε όρος δίνεται με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων προηγούμενων όρων. Θα είναι της μορφής

$$a_{\nu+i} = f(a_{\nu+i-1}, \ldots, a_{\nu+1}, a_\nu) \ , \ a_1, a_2, \ldots, a_i \text{ γνωστοί όροι.}$$

Στον αναδρομικό τύπο, ο αριθμός $i \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των προηγούμενων όρων από τους οποίους εξαρτάται ο όρος $a_{\nu+i}$. Είναι επίσης αναγκαίο να γνωρίζουμε τις τιμές των i πρώτων όρων της προκειμένου να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους.

- Μια ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι ονομάζεται **σταθερή**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.89 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ
Μονοτονία ονομάζεται η ιδιότητα μιας ακολουθίας η οποία δείχνει αν αυτή είναι **αύξουσα** ή **φθίνουσα**,**γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα**. Ειδικότερα μια ακολουθία (a_ν) ονομάζεται

- Αύξουσα αν κάθε όρος της είναι **μεγαλύτερος ή ίσος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} \geq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- Φθίνουσα αν κάθε όρος της είναι **μικρότερος ή ίσος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} \leq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- Γνησίως αύξουσα αν κάθε όρος της είναι **μεγαλύτερος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- Γνησίως φθίνουσα αν κάθε όρος της είναι **μικρότερος** από τον προηγούμενο του δηλαδή $a_{\nu+1} < a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.90 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ
Άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας (a_ν) ονομάζεται το άθροισμα $a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$ των ν πρώτων όρων της. Συμβολίζεται S_ν και είναι

$$S_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$$

Ο φυσικός αριθμός ν μας δείχνει το πλήθος των όρων του αθροίσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.91 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο, προσθέτοντας κάθε φορά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ισχύει δηλαδή

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$$

Ο αριθμός $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και είναι σταθερός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.92 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Αριθμητικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο έχουμε

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικότερα, αριθμητικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ μιας αριθμητικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{\nu}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.93 ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ
Αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β, ονομάζονται ν σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των a και β ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν, $\nu + 2$ σε πλήθος, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.94 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον προηγούμενο όρο με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Θα ισχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.95 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Γεωμετρικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Πιο γενικά, ο γεωμετρικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ γεωμετρικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός μ για τον οποίο ισχύει

$$\mu^\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.96 ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ
Γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β ονομάζονται ν σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των a και β ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.43 ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.44 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega \neq 0$, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τους παρακάτω τύπους :

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) \quad , \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu - 1)\omega\right]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.45 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί αριθμητική πρόοδο αν και μόνο αν γιια κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$2a_\nu = a_{\nu+1} + a_{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.46 ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β τότε η διαφορά της αριθμητικής προόδου στην οποία ανήκουν θα είναι

$$\omega = \frac{\beta - a}{\nu + 1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.47 ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τους όρους της :

i. Εαν $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ είναι ν διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ο $\mu-$οστός όρος από το τέλος βρίσκεται στη θέση $\nu - \mu + 1$ και δίνεται από τον τύπο

$$a_{\nu-\mu+1} = a_\nu - (\mu - 1)\omega$$

ii. Το άθροισμα S των μ τελευταίων όρων μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) είναι

$$S = S_\nu - S_{\nu-\mu}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.48 ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.49 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 1$, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τους τύπους

$$S_\nu = \frac{a_\nu \cdot \lambda - a_1}{\lambda - 1} \quad , \quad S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Εαν ο λόγος είναι $\lambda = 1$ τότε το άθροισμα θα δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \nu a_1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.50 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Εαν οι τρεις όροι a, β, γ είναι θετικοί έχουμε ισοδύναμα $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$.
Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$a_\nu^2 = a_{\nu+1} \cdot a_{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.51 ΛΟΓΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ τότε για το λόγο της γεωμετρικής προόδου στην οποία ανήκουν ισχύει :

1. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και a, β ομόσημοι τότε $\lambda = \pm \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$.
2. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι περιττός έχουμε
   i. Αν a, β ομόσημοι τότε $\lambda = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$
   ii. Αν a, β ετερόσημοι τότε $\lambda = -\sqrt[\nu+1]{\left|\frac{\beta}{a}\right|}$

Στην περίπτωση όπου ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και a, β ετερόσημοι τότε δεν ορίζεται λόγος λ και κατά συνέπεια δε σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος.

1.5 Μιγαδικοί Αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.97 ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
Μιγαδικό σύνολο ονομάζεται το συνολο των αριθμών για το οποίο έχουμε :

- Είναι **υπερσύνολο** των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$) και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.
- Περιέχει όλες τις ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν και στο $\mathbb{R}$.
- Περιέχει το στοιχειο i που ικανοποιεί τη σχέση $i^2 = -1$ το οποίο ονομάζεται **φανταστική μονάδα**.

- Τα στοιχεια του συνόλου $\mathbb{C}$ ονομάζονται **μιγαδικοί αριθμοί**.
- Η ιδιότητα της διάταξης που ισχύει στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών **δεν** μεταφέρεται και στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών. Κατά συνέπεια αν $z = a + \beta i$ ειναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε δεν έχει νόημα μια σχέση της μορφής $z > 0$ παρά μόνο αν ο αριθμός z είναι πραγματικός ώστε να ισχύει η διάταξη δηλαδή έχουμε

$$z > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ και } \beta = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.98 ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Μιγαδικός αριθμός ονομάζεται κάθε στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ του μιγαδικού συνόλου και είναι της μορφής $z = a + \beta i$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

- Ο αριθμός $a \in \mathbb{R}$ λέγεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z .
- Ο αριθμός $\beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z.

Συμβολίζονται ως εξής :

$$a = Re(z) \qquad \beta = Im(z)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.99 ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
Φανταστικό ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων z της μορφής βi τα οποία ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί** και συμβολίζεται με $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \{\beta i | \beta \in \mathbb{R}\}$$

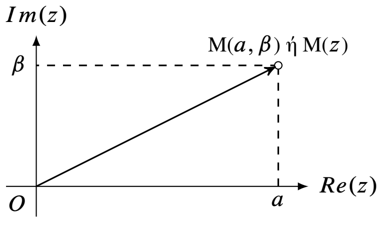
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.100 ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Αν $z = a + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε ο μιγαδικός

$$\overline{z} = a - \beta i$$

ονομάζεται **συζυγής** του z.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.101 ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
Μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές τα μέρη των μιγαδικών αριθμών.

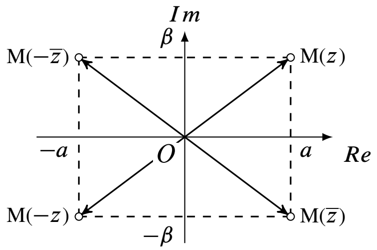
- Ο οριζόντιος άξονας λέγεται **πραγματικός** και είναι ο άξονας των πραγματικών μερών των μιγαδικών αριθμών
- ο κατακόρυφος άξονας λέγεται **φανταστικός** και είναι ο άξονας των φανταστικών μερών των μιγαδικών αριθμών.
- Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$ παριστάνεται γραφικά με δύο τρόπους
  - Σαν σημείο με συντεταγμένες (a, β) το οποίο ονομάζεται **εικόνα** του μιγαδικού.
  - Σαν διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας την εικόνα του μιγαδικού. Ονομάζεται **διανυσματική ακτίνα** του z.



Σχήμα 1.24: Μιγαδικό επίπεδο - Εικόνα μιγαδικού

Εαν $z = a + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε

- η εικόνα του συζυγή του $\overline{z} = a - \beta i$ ειναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον πραγματικό άξονα.
- η εικόνα του αντίθετου $-z = -a - \beta i$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς την αρχή των αξόνων O.
- η εικόνα του αντίθετου του συζυγή $-\overline{z} = -a + \beta i$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον φανταστικό άξονα.



Σχήμα 1.25: Εικόνες συζυγή, αντίθετου και συζηγή του αντίθετου

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.102 ΙΣΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ
Ίσοι ονομάζονται δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί οι οποίοι έχουν τα πραγματικά μέρη τους ίσα και τα φανταστικά μέρη τους αντίστοιχα ίσα.

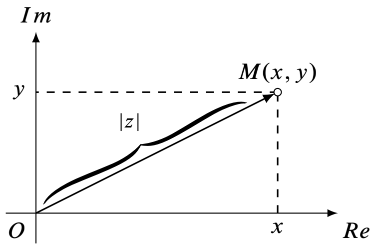
$$\text{Για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 = z_2 \Rightarrow Re\,(z_1) = Re\,(z_2) \text{ και } Im\,(z_1) = Im\,(z_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.103 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$ ονομάζεται η απόσταση της εικόνας του $M(z)$ από την αρχή O των αξόνων. Ισοδύναμα το μέτρο ενός μιγαδικού $z \in \mathbb{C}$ είναι το μήκος της διανυσματικής ακτίνας του. Συμβολίζεται με $|z|$

$$|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}|$$

Αν η εικόνα του μιγαδικού z είναι το σημείο $M(x, y)$ το μέτρο του μιγαδικού δίνεται από τη σχέση

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



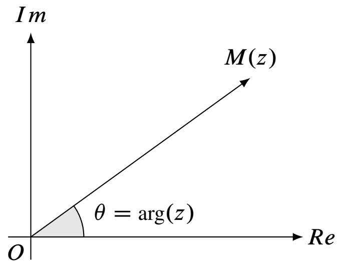
Σχήμα 1.26: Μέτρο μιγαδικού

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.104 ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού z ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από τον ημιάξονα Ox και τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μιγαδικού όπου $M(z)$ είναι η εικόνα του. Συμβολίζεται με $\arg z$.

$$\arg\,(z) = \theta = x\hat{O}M$$

Αν η γωνία του μιγαδικού ανήκει στο διάστημα ενός κύκλου τότε το όρισμα ονομάζεται πρωτεύον όρισμα και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}(z)$.

$$\mathrm{Arg}(z) = \theta \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi)$$



Σχήμα 1.27: Όρισμα μιγαδικού

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.105 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Τριγωνομετρική ή πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z λέγεται ή έκφραση του με τη χρήση του μέτρου $|z| = \rho$ και ενός ορίσματος του $\arg(z) = \theta$.

$$z = \rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$$

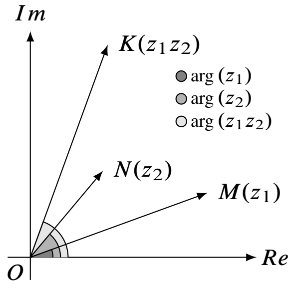
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.52 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.53 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.54 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.55 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.56 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
Εαν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί με μέτρα ρ_1, ρ_2 και ορίσματα $\arg(z_1) = \theta_1$ και $\arg(z_2) = \theta_2$ αντίστοιχα τότε η τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ των μιγαδικών είναι

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\,(\text{συν}\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{ημ}\,(\theta_1 + \theta_2))$$

- Το μέτρο του γινομένου $z_1 z_2$ είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των z_1 και z_2.
- Το όρισμα του γινομένου $z_1 z_2$ είναι ίσο με το άθροισμα των ορισμάτων $\arg(z_1)$ και $\arg(z_2)$.

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 \quad , \quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$$



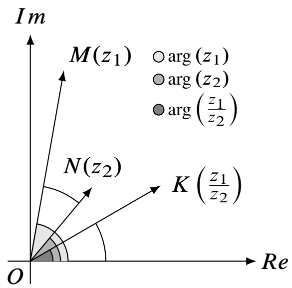
Σχήμα 1.28: Όρισμα γινομένου μιγαδικών

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.57 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΗΛΙΚΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
Εαν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί με μέτρα ρ_1, ρ_2 και ορίσματα $\arg(z_1) = \theta_1$ και $\arg(z_2) = \theta_2$ αντίστοιχα τότε η τριγωνομετρική μορφή του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ των μιγαδικών είναι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,(\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{ημ}\,(\theta_1 - \theta_2))$$

- Το μέτρο του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με το πηλίκο των μέτρων των z_1 και z_2.
- Το όρισμα του πηλίκου $z_1 z_2$ είναι ίσο με τη διαφορά των ορισμάτων $\arg(z_1)$ και $\arg(z_2)$.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad , \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$



Σχήμα 1.29: Όρισμα πηλίκου μιγαδικών

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.58 ΘΕΩΡΗΜΑ DE MOIVRE
Έστω $z \in \mathbb{C}$ ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο ρ και όρισμα $\arg(z) = \theta$. Η τριγωνομετρική

μορφή της δύναμης z^ν του μιγαδικού, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ δίνεται από τον τύπο

$$z^\nu = \rho^\nu \left(\text{συν}\nu\theta + i\,\text{ημ}\nu\theta\right)$$

1.6 Πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.106 ΠΙΝΑΚΑΣ
Πίνακας ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες. Αν ν είναι το πλήθος των γραμμών και μ το πλήθος των στήλων της διάταξης, τότε ο πίνακας ονομάζεται **πίνακας $\boldsymbol{\nu \times \mu}$**. Κάθε πίνακας συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα όπως A, B, κ.τ.λ.

$$\begin{array}{ccc} & j-\text{στήλη} & \\ & \downarrow & \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} & \leftarrow i-\text{γραμμή} \end{array}$$

- Οι αριθμοί που βρίσκονται μέσα στον πίνακα ονομάζεται **στοιχεία** του πίνακα.
- Τη θέση ενός στοιχείου στον πίνακα την προσδιορίζουμε συνδυάζοντας τον αριθμό της γραμμής με τον αριθμό της στήλης στην οποία βρίσκεται.
- Κάθε στοιχείο ενός πίνακα συμβολίζεται με μικρό γράμμα π.χ. a με δείκτη ij δηλαδή a_{ij}. Ο αριθμός i με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ μας δίνει τη θέση της γραμμής στην οποία βρίσκεται το στοιχείο a_{ij} ενώ ο αριθμός j με $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$ μας δίνει τη θέση της στήλης στη οποία βρίσκεται. Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας A συμβολίζεται εν συντομία $A = [a_{ij}]$ με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$.
- Ο πίνακας όπου όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται O.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.107 ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για ειδικές τιμές των αριθμών ν και μ καθώς και για συνθήκες που αφορούν τα στοιχεία a_{ij} ενός πίνακα και τους δίκτες i, j προκύπτουν οι παρακάτω ειδικά είδη πινάκων.

1. **Πίνακας γραμμή**
   Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A έχουμε $\nu = 1$ τότε ο $1 \times \mu$ πίνακας που προκύπτει έχει μια γραμμή και τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Πίνακας } 1 \times \mu$$

2. Πίνακας στήλη
Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A έχουμε $\mu = 1$ τότε ο $\nu \times 1$ πίνακας που προκύπτει έχει μια στήλη και τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\nu 1} \end{bmatrix} \quad , \ \text{Πίνακας } \nu \times 1$$

3. Πίνακας στοιχείο
Αν σε ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A θέσουμε $\mu = 1$ και $\mu = 1$ τότε ο 1×1 πίνακας που προκύπτει έχει ένα στοιχείο και τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \quad , \ \text{Πίνακας } 1 \times 1$$

4. Άνω κλιμακωτός - Κάτω κλιμακωτός
Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A ισχύει η σχέση $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$ τότε ο πίνακας λέγεται **άνω κλιμακωτός**. Αντίστοιχα αν ισχύει a_{ij} για κάθε $i < j$ ονομάζεται **κάτω κλιμακωτός**. Οι πίνακες αυτοί είναι της μορφής

Άνω κλιμακωτός **Κάτω κλιμακωτός**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\mu} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

5. Τετραγωνικός πίνακας
Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας ονομάζεται τριγωνικός εαν έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στήλων δηλαδή $\nu = \mu$. Ο πίνακας ονομάζεται **τάξης $\boldsymbol{\nu}$**. Τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα $\nu \times \nu$ της μορφής a_{ii} με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ δηλαδή σε θέση όπου ο αριθμός της γραμμής και της στήλης είναι ίδιος, αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \boldsymbol{a_{ii}} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu j} & \dots & \boldsymbol{a_{\nu\nu}} \end{bmatrix} \quad , \ \text{Πίνακας } \nu \times \nu$$

6. Άνω τριγωνικός - Κάτω τριγωνικός
Ένας κλιμακωτός και τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας ονομάζεται **άνω τριγωνικός** ή **κάτω τριγωνικός** εαν είναι άνω κλιμακωτός ή κάτω κλιμακωτός αντίστοιχα.

Άνω τριγωνικός **Κάτω τριγωνικός**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

7. **Διαγώνιος πίνακας**
   Ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$ ονομάζεται **διαγώνιος** εαν όλα τα στοιχεία του εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδενικά. Δηλαδή $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ με $i, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

8. **Μοναδιαίος πίνακας**
   Ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$ ονομάζεται **μοναδιαίος** αν είναι διαγώνιος με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι ίσα με τη μονάδα. Δηλαδή $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ και $a_{ii} = 1$ με $i, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$. Συμβολίζεται με I_ν.

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.108 ΙΣΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
Ίσοι ονομάζονται δύο $\nu \times \mu$ πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ όταν όλα τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα μεταξύ τους.

$$A = B \text{ εαν } a_{ij} = \beta_{ij} \quad , \forall i, j$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.109 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ
Άθροισμα δύο $\nu \times \nu$ τετραγωνικών πινάκων $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ ίδιας τάξης ν ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ ο οποίος έχει στοιχεία τα αθροίσματα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B.

$$\Gamma = A + B \quad \text{με} \quad \gamma_{ij} = a_{ij} + \beta_{ij} \quad , \forall i, j$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.110 ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Αντίθετος ενός $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας $-A$ του οποίου τα στοιχεία είναι αντίθετα από τα αντίστοιχα στοιχεία του A

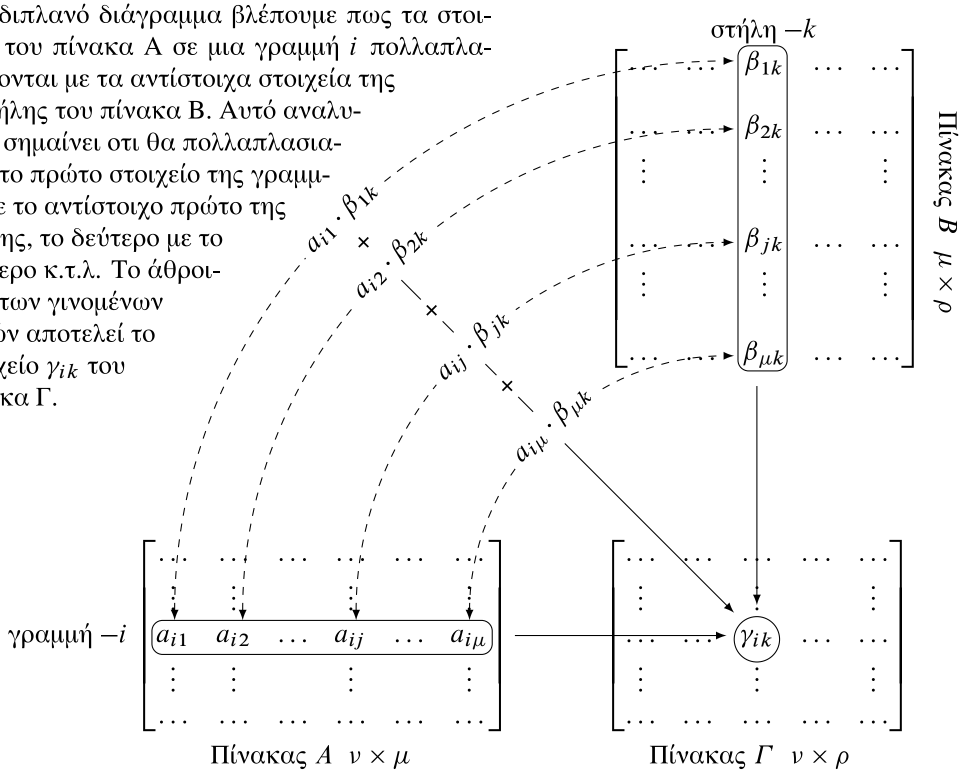
$$-A = [-a_{ij}] \ \ , \forall i, j$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.111 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ
Γινόμενο ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με έναν $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας λA του οποίου τα στοιχεία είναι πολλαπλάσια των αντιστοιχων στοιχείων του A.

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \ \ , \forall i, j$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.112 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ
Γινόμενο ενός $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ με έναν $\mu \times \rho$ πίνακα $B = [\beta_{jk}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \rho$ πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ik}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} αποτελεί το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της $i-$γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της $k-$στήλης του B.

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε πως τα στοιχεία του πίνακα A σε μια γραμμή i πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα στοιχεία της k στήλης του πίνακα B. Αυτό αναλυτικά σημαίνει οτι θα πολλαπλασιαστεί το πρώτο στοιχείο της γραμμής με το αντίστοιχο πρώτο της στήλης, το δεύτερο με το δεύτερο κ.τ.λ. Το άθροισμα των γινομένων αυτών αποτελεί το στοιχείο γ_{ik} του πίνακα Γ.



Σχήμα 1.30: Γινόμενο πινάκων

- Κάθε στοιχείο του πίνακα γινόμενο θα είναι

$$\gamma_{ij} = a_{i1} \cdot \beta_{1k} + a_{i2} \cdot \beta_{2k} + \ldots a_{\mu 1} \cdot \beta_{\mu k} = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} \cdot \beta_{jk}$$

- Το γινόμενο δύο πινάκων A, B ορίζεται όταν ο πρώτος πίνακας A έχει αριθμό στηλών ίσο με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα B.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.113 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν ονομάζεται ο $\nu \times \nu$ πίνακας A^{-1} ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τον A μας δίνει το μοναδιαίο πίνακα I_ν.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_\nu$$

Αντιστρέψιμος ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει αντίστροφο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.114 ΠΙΝΑΚΑΣ - ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Πίνακας ενός $\nu \times \mu$ γραμμικού συστήματος ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας, με στοιχεία τους συντελεστές του συστήματος. Επαυξημένος ονομάζεται ο $\nu \times (\mu + 1)$ πίνακας ο οποίος έχει στοιχεία του, τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους ενός γραμμικού συστήματος ν εξισώσεων με μ μεταβλητές. Αν

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{i\mu}x_\mu = \beta_j \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu j}x_j + \ldots + a_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases}$$

είναι το γραμμικό σύστημα με πραγματικούς συντελεστές a_{ij}, β_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$ τότε ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του θα είναι της μορφής

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ **ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu j} & \ldots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1\mu} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2\mu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i\mu} & \beta_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu j} & \ldots & a_{\nu\mu} & \beta_\nu \end{array}\right]$$

- Οι συντελεστές των μεταβλητών στο γραμμικό σύστημα συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο συμβολίζονται και σε έναν αντίστοιχο πίνακα.

- Ο κάθε συντελεστής a_{ij} έχει διπλό δείκτη ij. Ο δείκτης i μας δίνει τη θέση της εξίσωσης στην οποία ανήκει. Ο δείκτης j μας βοηθάει να παρατηρούμε καλύτερα με ποιά μεταβλητή πολλαπλασιάζεται ο συντελεστής.
- Η τελευταία στήλη του αποτελείται από τους σταθερούς όρους του συστύματος και χωρίζεται με μια γραμμή από τον υπόλοιπο πίνακα με τους συντελεστές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.115 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΠΙΝΑΚΑ
Ορίζουσα ενός ν τάξης τετραγωνικού πίνακα A ονομάζεται ο αριθμός $|A|$ ο οποίος είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1\nu}A_{1\nu}$$

- Για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ έχουμε $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.
- D_{ij} είναι η $\nu - 1$ τάξης ορίζουσα που προκύπτει αν παραλείψουμε από την ορίζουσα $|A|$, τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} και ονομάζεται **ελλάσων** ορίζουσα του στοιχείου αυτού.
- Το γινόμενο $(-1)^{i+j} D_{ij}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του κάθε στοιχείου a_{ij}.
- Ο αριθμός $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1\nu}A_{1\nu}$ ονομάζεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς την 1^{η} γραμμή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.116 ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Προσαρτημένος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν ονομάζεται ο πίνακας με στοιχεία του τα αλγεβρικά συμπληρώματα A_{ij} των στοιχείων a_{ij} του πίνακα A. Είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \dots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.117 ΑΝΗΓΜΕΝΟΣ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟΣ
Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας A ονομάζεται ανηγμένος κλιμακωτός όταν

i. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές.

ii. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο από αριστερά μιας μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.

$$a_{ij} = 1 \text{ και } a_{i,j-\kappa} = 0\ ,\ \forall \kappa \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$$

iii. Κάθε άλλο στοιχείο μετά τη μονάδα στην ίδια γραμμή, είναι διάφορο του 1

$$\text{Αν } a_{ij} = 1 \text{ τότε } a_{i,j+\kappa} \neq 1\ ,\ \forall \kappa \in \{1, 2, \ldots, \mu - j\}$$

iv. Η μονάδα σε κάθε μη μηδενική γραμμή θα πρέπει να βρίσκεται αριστερά από τη μονάδα της επόμενης γραμμής.

$$\exists \kappa \in \{1, 2, \ldots, \mu - j\} : a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{i+1, j+\kappa} = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.118 ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΙΣ
Γραμμοπράξεις ονομάζονται οι πράξεις οι οποίες εκτελούνται μεταξύ των γραμμών ενός πίνακα και είναι οι ακόλουθες :

1. **Εναλλαγή γραμμών**
   Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών. $\Gamma_\kappa \leftrightarrow \Gamma_\lambda$
2. **Πολλαπλασιασμός με αριθμό**
   Πολλαπλασιασμός των στοιχείων μιας γραμμής με έναν πραγματικό μη μηδενικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $\Gamma_\kappa \to \lambda\Gamma_\kappa$
3. **Γραμμικός συνδυασμός**
   Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής με τα πολλαπλάσια των στοιχείων μιας άλλης γραμμής. $\Gamma_\kappa \to \Gamma_\kappa + \lambda\Gamma_\rho$

- Με το σύμβολο Γ_κ με δείκτη κ συμβολίζουμε τη γραμμή ενός πίνακα στη θέση κ.
- Αν από έναν πίνακα A προκύπτει ένας πίνακας B ύστερα από γραμμοπράξεις τότε οι πίνακες ονομάζονται **ισοδύναμοι**.

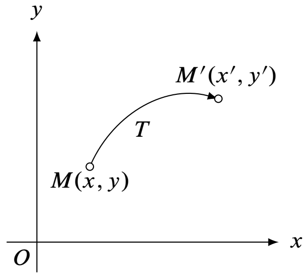
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.119 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
Γεωμετρικός μετασχηματισμός στο επίπεδο ή απλά γεωμετρικός μετασχηματισμός, ονομάζεται μια συνάρτηση (απεικόνιση) T από το σύνολο $\mathcal{E}$ των σημείων του επιπέδου xOy στο ίδιο σύνολο $\mathcal{E}$

$$T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

μέσω του οποίου, κάθε σημείο $M(x, y)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων xOy αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο $M'(x', y')$.

- Το σημείο $M'(x', y')$ ονομάζεται **εικόνα** του M και συμβολίζεται $T(M)$.
- Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός συμβολίζεται και

$$M(x, y) \xrightarrow{T} M'(x', y')$$



Σχήμα 1.31: Γεωμετρικός μετασχηματισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.120 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός εαν οι συντεταγμένες x', y' της εικόνας M' ενός σημείου $M(x, y)$ αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των συντεταγμένων x, y δηλαδή είναι της μορφής

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα του γραμμικού μετασχηματισμού μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση πινάκων :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ονομάζεται **πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού**.

Βασικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. **Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων**
   Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί στο συμμετρικό του $M'(x', y')$ ως προς την αρχή των αξόνων. Ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού είναι

$$A = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **Συμμετρία ως προς ευθεία**
   Συμμετρία ως προς ευθεία ε ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί στο συμμετρικό του $M'(x', y')$ ως προς την ευθεία ε. Οι πίνακες των μετασχηματισμών ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $y = x$ είναι οι παρακάτω :

   i. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   ii. Συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   iii. Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. **Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ**
   Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο $M'(x', y')$ ύστερα από στροφή του κατα γωνία θ με κέντρο την αρχή O των αξόνων με σταθερή ακτίνα OM. Ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι :

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$$

   Για τις παρακάτω τιμές της γωνίας θ οι πίνακες των αντίστοιχων μετασχηματισμών είναι οι εξής :

   i. $\theta = 0 \Rightarrow A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   ii. $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   iii. $\theta = \pi \Rightarrow A = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   iv. $\theta = 2\pi \Rightarrow A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. **Ομοιοθεσία**
   Ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί στο σημείο $M'(x', y')$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM'}$ να είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   Ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι

$$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

5. **Παράλληλη μεταφορά**
   Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ονομάζεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο $M'(x', y')$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ να είναι παράλληλο με το δεδομένο διάνυσμα $\vec{a}$.

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$

   Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των σημείων M και M' είναι

$$\begin{cases} x' = 1x + 0y + a_1 \\ y' = 0x + 1y + a_2 \end{cases}$$

   που με τη χρήση πινάκων γράφεται

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

   i. Ο πίνακας της παράλληλης μεταφοράς είναι $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   ii. Η παράλληλη μεταφορά **δεν** είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.121 ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ
Ισομετρία ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων A, B και των εικόνων τους A', B' αντίστοιχα παραμένουν ίσες.

$$T \text{ ισομετρία} : AB \to A'B' \text{ με } AB = A'B'$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.59 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B, Γ ίδιων διαστάσεων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη της πρόσθεσης :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$A + B = B + A$
Προσεταιριστική	$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$A + O = A$
Αντίθετοι πίνακες	$A + (-A) = O$
Νόμος διαγραφής	$A + B = A + \Gamma \Rightarrow B = \Gamma$

Πίνακας 1.23: Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.60 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B ίδιων διαστάσεων και για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη του γινομένου αριθμού με πίνακα :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Νόμοι διαγραφής	$\lambda A = \lambda B \Rightarrow A + B \ \ , \ \lambda \neq 0$
	$\lambda A = \mu A \Rightarrow \lambda = \mu \ \ , \ A \neq O$
Προσεταιριστική	$\lambda (AB) = (\lambda A) B$
	$\lambda (\mu B) = (\lambda \mu) B$
Επιμεριστική	$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
	$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda A = O \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = O$

Πίνακας 1.24: Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.61 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B, Γ ίδιων διαστάσεων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη του πολλαπλασιασμού :

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Προσεταιριστική	$A\,(B\Gamma) = (AB)\,\Gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$AI = IA = A$
Αντίστροφοι πίνακες	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Επιμεριστική	$A\,(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$

Πίνακας 1.25: Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων **δεν** είναι αντιμεταθετική πράξη.
- Αν για δύο πίνακες A, B ίδιας τάξης ισχύει $AB = O$ τότε **δεν** ισχύει υποχρεωτικά $A = O$ ή $B = O$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.62 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ
Κάθε σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με μ άγνωστους μπορεί να γραφτεί με τη χρήση πινάκων ως εξίσωση πινάκων στη μορφή

$$AX = B$$

όπου A είναι ο $\nu \times \mu$ πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος, X είναι ο $\nu \times 1$ πίνακας στήλη των μεταβλητών και B ο $\nu \times 1$ πίνακας στήλη των σταθερών όρων. Ο πίνακας X των μεταβλητών του συστήματος καθώς και ο πίνακας B των σταθερών όρων είναι αντίστοιχα

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση πινάκων $AX = B$ γράφεται αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Ένα ομογενές σύστημα γράφεται $AX = O$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.63 ΑΝΗΓΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Κάθε πίνακας διαστάσεων $\nu \times \mu$ μετατρέπεται σε έναν ανηγμένο πίνακα με τη χρήση πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.64 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Αν σε ένα γραμμικό σύστημα που με τη βοήθεια πινάκων γράφεται στη μορφή $AX = B$, ο πίνακας των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}B$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.65 ΛΥΣΗ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER
Για κάθε γραμμικό $\nu \times \nu$ σύστημα εξισώσεων $AX = B$ ισχύει οτι :

- Αν $|A| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\nu-$άδα αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ με

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, x_\nu = \frac{D_{x_\nu}}{D}$$

  Αν $|A| = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο ή σδύνατο.

όπου $D = |A|$ και $D_{x_i}, i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών της μεταβλητής x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.66 ΛΥΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Ένα ομογενές σύστημα $AX = O$ έχει

- μοναδική λύση τη μηδενική αν $|A| \neq 0$
- άπειρες λύσεις (αόριστο) αν $|A| = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.67 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ
Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός τετραγωνικου πίνακα A τάξης ν ως προς οποιαδήποτε γραμμή i είναι ίσο με το ανάπτυγμα της ως προς οποιαδήποτε στήλη j.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{i\nu}A_{i\nu} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{\nu j}A_{\nu j} \quad \text{ή}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}A_{ij} \quad , \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.68 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

$$A \text{ αντιστρέψιμος } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \ldots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ θα είναι της μορφής

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.69 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ
Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφός του A^{-1} υπάρχει και είναι μοναδικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.70 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΣΩ ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΩΝ
Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν. Ο $\nu \times 2\nu$ πίνακας της μορφής $[A|I_\nu]$ μετασχηματίζεται σε έναν $\nu \times 2\nu$ πίνακα $[B|\Gamma]$ με τη χρήση γραμμοπράξεων με τον πίνακα B να είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

- Αν $B = I_\nu$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = \Gamma$.
- Αν $B \neq I_\nu$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.71 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
Αν A, B δύο ίδιας τάξης ν τετραγωνικοί πίνακες τότε

$$AB = I_\nu \Leftrightarrow BA = I_\nu$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.72 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Για κάθε ζεύγος τετραγωνικών πινάκων A, B ίδιας τάξης ν και πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν τις ορίζουσες των A και B.

i. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με αλλαγή της θέσης δύο γραμμών ή δύο στηλών τότε
$$|B| = -|A|$$

ii. Αν ο πίνακας B προκύπτει από πολλαπλασιασμό κ σε πλήθος γραμμών ή στήλων του πίνακα A με έναν πραγματικό αριθμό λ τότε
$$|B| = \lambda^\kappa |A|$$

iii. Αν τα στοιχεία μια γραμμής (ή στήλης) σε ένα τετραγωνικό πίνακα A είναι πολλαπλάσια μιας άλλης γραμμής (ή στήλης αντίστοιχα) τότε η ορίζουσά του είναι $0 : |A| = 0$.

iv. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A περιέχει τουλάχιστον μια μηδενική γραμμή ή στήλη τότε η ορίζουσά του είναι $0 : |A| = 0$.

v. Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων A, B τάξης ν είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών.
$$|AB| = |A||B|$$

vi. Αν μια ή περισσότερες γραμμές ή στήλές του πίνακα A αποτελούν άθροισμα προσθετέων τότε η ορίζουσά του γράφεται ως άθροισμα οριζουσών.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+\beta_{11} & \dots & a_{1\mu}+\beta_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix}$$

vii. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A προσθέτοντας σε μια γραμμή ή στήλη του τα πολλαπλάσια μιας άλλης πολλαπλασιασμένα με τον ίδιο αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{i1} & \dots & a_{1\mu}+\lambda a_{i\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = |A|$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.73 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ
Η ορίζουσα ενός $\nu \times \nu$ τριγωνικού πίνακα A είναι ίση με το γινόμενο των στοχείων της κύριας διαγωνίου.

$$A \text{ τριγωνικός } \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{\nu\nu} = \prod_{i=1}^{\nu} a_{ii}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.74 ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ
Έστω $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και A ο πίνακάς του. Εαν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει κάθε σχήμα σε ένα σχήμα του ιδίου είδους.

1.7 Μαθηματική Λογική

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.122 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ
Μαθηματική πρόταση ονομάζεται κάθε λογική και σαφής έκφραση με πλήρες νόημα που περιέχει μαθηματικές έννοιες.

- Κάθε μαθηματική πρόταση δέχεται τους χαρακτιρισμούς **αληθής** και **ψευδής** τα οποία ονομάζονται **τιμές** μιας πρότασης.
- Οι μαθηματικές προτάσεις συμβολίζονται με τη χρήση μεταβλητών όπως $p, q, r, s \ldots$
- Προτάσεις που κατασκευάζονται από συνδυασμό απλών προτάσεων με τη χρήση συνδέσμων, ονομάζονται **σύνθετες** προτάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.123 ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
Σύνδεσμοι προτάσεων ονομάζονται οι πράξεις με τις οποίες συνδέονται απλές μαθηματικές προτάσεις, κατασκευάζοντας έτσι σύνθετες λογικές προτάσεις. Συγκεκριμένα οι σύνδεσμοι μεταξύ προτάσεων είναι :

1. **Διάζευξη**
   Ο σύνδεσμος **ή** μεταξύ δύο προτάσεων p, q ονομάζεται **διάζευξη** και δηλώνει οτι η σύνθετη πρόταση p ή q που προκύπτει είναι αληθής αν **τουλάχιστον μια** από τις δύο προτάσεις p και q είναι αληθής.

2. **Αποκλειστική διάζευξη**
   Ο σύνδεσμος **είτε** μεταξύ δύο προτάσεων p, q ονομάζεται **αποκλειστική διάζευξη** και δηλώνει οτι η σύνθετη πρόταση p είτε q που προκύπτει είναι αληθής αν **μόνο μια** από τις δύο προτάσεις p και q είναι αληθής.

3. **Σύζευξη**
   Ο σύνδεσμος **και** μεταξύ δύο προτάσεων p, q ονομάζεται **σύζευξη** και δηλώνει οτι η σύνθετη πρόταση p και q που προκύπτει είναι αληθής αν αληθεύουν **συγχρόνως** οι προτάσεις p και q.

4. **Συνεπαγωγή**
   Ο σύνδεσμος $\Rightarrow$ της **συνεπαγωγής** μεταξύ δύο προτάσεων p, q συνθέτει την πρόταση $p \Rightarrow q$ στην οποία η ισχύς της p **συνεπάγεται**, έχει σαν συμπέρασμα δηλαδή, την ισχύ της q.

   - Η πρόταση $p \Rightarrow q$ μας δίνει τη δομή ενός θεωρήματος όπου η πρόταση p είναι η υπόθεση και η q το συμπέρασμα.
   - Το θεώρημα $q \Rightarrow p$ ονομάζεται **αντίστροφο** του $p \Rightarrow q$ το οποίο έχει ως υπόθεση την πρόταση q και ως θεώρημα την πρόταση q.
   - Η πρόταση p ονομάζεται **ικανή** συνθήκη της q. Η q λέγεται **αναγκαία** της p.
   - Ο σύνδεσμος $\Rightarrow$ της συνεπαγωγής διαβάζεται και **τότε**.

5. **Ισοδυναμία ή Διπλή συνεπαγωγή**
   Ο σύνδεσμος $\Leftrightarrow$ της διπλής συνεπαγωγής εκφράζει **ισοδυναμία** μεταξύ δύο προτάσεων p, q και συμβολίζεται $p \Leftrightarrow q$.

   - Στην πρόταση αυτή, η p συνεπάγεται την q και αντίστροφα. Κάθε πρόταση από τις p, q αποτελεί **ικανή και αναγκαία** συνθήκη για την άλλη.
   - Ο σύνδεσμος $\Leftrightarrow$ της ισοδυναμίας διαβάζεται και **αν και μόνο αν**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.124 ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ - ΑΝΤΙΦΑΣΗ
Ταυτολογία ονομάζεται μια σύνθετη πρόταση που αληθεύει για κάθε τιμή των απλών προτάσεων της. Αντίφαση ονομάζεται μια σύνθετη πρόταση που είναι ψευδής για κάθε τιμή των απλών προτάσεων της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.125 ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ
Προτασιακός τύπος μεταβλητών ονομάζεται κάθε έκφραση που περιέχει μια ή περισσότερες

μεταβλητές οι οποίες αν αντικατασταθούν από οποιαδήποτε στοιχεία δοσμένων συνόλων μετατρέπουν τον προτασιακό τύπο σε μαθηματική πρόταση. Συμβολίζονται με

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

όπου x_i , $i = 1, \ldots, \nu$ είναι μεταβλητές του προτασιακού τύπου. Αν $p(x_1, \ldots, x_\nu)$ ένας προτασιακός τύπος με ν μεταβλητές τότε :

- Το σύνολο Ω_i από το οποίο παίρνει τιμές μια μεταβλητή x_i με $i = 1, \ldots, \nu$ λέγεται **σύνολο αναφοράς** της μεταβλητής.
- Κάθε $\nu-$άδα μεταβλητών παίρνει τιμές από το σύνολο $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_\nu$ το οποίο λέγεται **σύνολο αναφοράς του προτασιακού τύπου**.
- Αν για μια $\nu-$άδα τιμών $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ η πρόταση $p(a_1, a_2, \ldots, a\nu)$ είναι αληθής τότε λέμε οτι το στοιχείο $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ επαληθεύει τον προτασιακό τύπο.
- Το σύνολο των στοιχείων που επαληθεύει ένα προτασιακό τύπο λέγεται **σύνολο αληθείας**.

Στην απλή περίπτωση ένος προτασιακού τύπου $p(x)$ μιας μεταβλητής οι παραπάνω έννοιες έχουν ως εξής.

- Το σύνολο Ω των τιμών της μεταβλητής είναι το σύνολο αναφοράς.
- Το στοιχείο $a \in \Omega$ επαληθεύει τον $p(x)$ αν η πρόταση είναι $p(a)$ είναι αληθής.
- Το σύνολο $A = \{x \in \Omega | p(x) \ \text{ αληθής}\}$ είναι το σύνολο αληθείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.126 ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ
Ποσοδείκτες ονομάζονται τα σύμβολα $\forall, \exists$ με τα οποία εκφράζουμε το πλήθος των στοιχείων για τα οποία ένας προτασιακός τύπος είναι αληθής, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του συνόλου αληθείας.

1. **Γενικός ποσοδείκτης : $\forall$ "για κάθε"**
   Αν το σύνολο αληθείας ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς ενός προτασιακού τύπου τότε χρημοποιείται ο ποσοδείκτης $\forall$ ο οποίος διαβάζεται **για κάθε** και εκφράζει την ισχύ του τύπου για κάθε τιμή της μεταβλητής.
2. **Υπαρξιακός ποσοδείκτης : $\exists$ "υπάρχει"**
   Αν το σύνολο αληθείας είναι υποσύνολο του συνόλου αναφοράς ενός προτασιακού τύπου τότε χρημοποιείται ο ποσοδείκτης $\exists$ ο οποίος διαβάζεται **υπάρχει** και εκφράζει την ισχύ του τύπου για τουλάχιστον μια τιμή της μεταβλητής.
   Αν ο προτασιακός τύπος δεν είναι αληθής για καμία τιμή της μεταβλητής τότε χρησιμοποιείται ο ποσοδείκτης $\nexists$ και διαβάζεται **δεν υπάρχει**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.127 ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Απόδειξη μιας πρότασης ονομάζεται η διαδικασία με την οποία θεμελιώνουμε την ισχύ της κάνοντας χρήση ορισμών, αξιωμάτων, θεωρημάτων με γνωστή ισχύ και άλλων βασικών μαθηματικών εννοιών. Με λογικούς κανόνες και συμπεράσματα συνδέουμε τις μαθηματικές έννοιες μεταξύ τους και συνθέτουμε τη μεθοδολογία της ώστε να οδηγηθούμε στο ζητούμενο. Στη **Μέθοθο...** θα δούμε αναλυτικά την γνωστές μεθόδους απόδειξης προτάσεων.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

Βιβλιογραφία

[1] Ι. Μαρούλας. Γραμμική άλγεβρα. 2005.

[2] Γ. Μπούσγος. *Μαθηματικά Α′ Γυμνασίου, Τόμος πρώτος*. ΟΕΒΔ, 1978.

[3] Θ. Βαβαλετσκος Γ. Μπούσγος. *Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Άλγεβρα - Τριγωνομετρία*. ΟΕΒΔ, 1978.

[4] Θ. Βαβαλετσκος Γ. Μπούσγος. *Μαθηματικά Δ′ Γυμνασίου, Τόμος πρώτος*. ΟΕΒΔ, 1978.

[5] Ν. Αλεξανδρής Δ. Παπακωνσταντίνου Α. Παπαμικρούλης Ν. Βαρουχάκης, Δ. Αδαμόπουλος. *Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Άλγεβρα*. ΟΕΒΔ, 1978.

[6] Ηλία Ντζιώρα. *Μαθηματικά Ε′ Γυμνασίου, Τ˙ομος πρώτος*. ΟΕΒΔ, 1976.

[7] Ηλία Ντζιώρα. *Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Άλγεβρα*. ΟΕΒΔ, 1979.

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων