ΘΕΩΡΙΑ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

24 Δεκεμβρίου 2013

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Σύνολα Αριθμών.

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Ξεκινώντας απ' το 0 οι φυσικοί αριθμοί είναι 0, 1, 2, 3,...
2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετους τους :...-2, -1, 0, 1, 2...
3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος : $\frac{a}{\beta}$ όπου α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$.
4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Οποιοσδήποτε αριθμός δεν είναι ρητός π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.

Απόλυτη τιμή. Απόλυτη τιμή ενός αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του αριθμού αυτού απο το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.
Για την απόλυτη τιμή ενός αριθμού a έχουμε τις περιπτώσεις

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς.

1. **Πρόσθεση**
   - Όταν έχουμε **ομόσημους** αριθμούς κάνουμε **πρόσθεση** τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε στο αποτέλεσμα το κοινό πρόσημο.
   - Όταν έχουμε **ετερόσημους** αριθμούς κάνουμε **αφαίρεση** τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε στο αποτέλεσμα το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
2. **Πολλαπλασιασμός**
   - Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς το αποτέλεσμα είναι **θετικό**.
   - Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**.

Ιδιότητες των πράξεων.

Ιδιότητες	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$ $a + (-a) = 0$	$a \cdot 1 = a$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $a \neq 0$
Επιμεριστική	$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$	

- $a \cdot 0 = 0$
- Αν $a \cdot \beta = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.

Αφαίρεση - Διαίρεση. Η αφαίρεση και η διαίρεση προκύπτουν με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα αν :

1. Προσθέσουμε τον αντίθετο του μειωτέου : $a - \beta = a + (-\beta)$.
2. Πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο του διαιρέτη : $a : \beta = \dfrac{a}{\beta} = a \cdot \dfrac{1}{\beta}$.

Δύναμη πραγματικού αριθμού. Δύναμη με **βάση** ένα πραγματικό αριθμό a και **εκθέτη** ένα πραγματικό αριθμό $\nu \geq 2$ λέγεται το γινόμενο ν παραγόντων ισων με a και συμβολίζεται με a^ν

$$a^\nu = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

Για κάθε δυναμη ορίζουμε

$a^1 = a \qquad a^0 = 1$ (με $a \neq 0$) $\qquad$ και $\qquad a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^\nu}$ (με $a \neq 0$)

Επίσης για κάθε δυναμη με εκθέτη ακέραιο αριθμό και εφόσον ορίζεται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητες		Παραδείγματα
1	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$	4	$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^\nu = \dfrac{a^\nu}{\beta^\nu}$
2	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$	5	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu\cdot\mu}$
3	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$	6	$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{a}\right)^\nu$

Σειρά των πράξεων.

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις
3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

Αν η παράσταση περιέχει παρενθέσεις, εκτελούμε τις πράξεις με τη σειρά αυτή, πρώτα μέσα στις παρενθέσεις και μετά με την ίδια σειρά απ′ έξω.

Τετραγωνική ρίζα. Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού x είναι ένας **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x (υπόριζο) και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \text{ με } a > 0$$

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού διότι κανένας αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο, δεν είναι δυνατόν να δώσει αρνητικό αποτέλεσμα.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ και
2. $(\sqrt{x})^2 = x$ για $x \geq 0$.

Για εξισώσεις της μορφής $x^2 = a$ έχουμε

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Ρίζα γινομένου - πηλίκου. Αν α, β μη αρνητικοί αριθμοί τότε :

1. Το γινόμενο των ριζών τους ισούται με τη ρίζα του γινομένου τους.
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$$
2. Το πηλίκο των ριζών τους ισούται με τη ρίζα του πηλίκου τους.
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$$

Τα παραπάνω δεν ισχύουν για την προσθεση και την αφαιρεση. Δηλαδή :

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta} \neq \sqrt{a \pm \beta}$$

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

Αλγεβρική παράσταση. Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια παράσταση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές με πράξεις ανάμεσά τους.

Ακέραια αλγεβρική παράσταση. Ακεραία αλγεβρική παράσταση καλείται μια αλγεβρική παράσταση με μόνες πράξεις τον **πολλαπλασιασμό** και την **πρόσθεση** και με εκθέτες **φυσικούς** αριθμούς.

Μονώνυμο. Μονώνυμο ονομάζεται μια **ακέραια** αλγεβρική παράσταση που ανάμεσα από τις μεταβλητές έχει **μόνο** πολλαπλασιασμό.

Ένα μονώνυμο αποτελείται από 2 μέρη :

1. Ο αριθμός που βρίσκεται μέσα στην παράσταση λέγεται **συντελεστής**.
2. Το σύνολο των μεταβλητών ονομάζεται **κύριο μέρος**.

Βαθμός μονωνύμου.

- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή.
- Ο βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές είναι **το άθροισμα των βαθμών**.

Όμοια - Ίσα - Αντίθετα μονώνυμα.

- Όμοια λέγονται δύο μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος
- Ίσα λέγονται δύο μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος και ίδιο συντελεστη.
- Αντίθετα λέγονται δύο μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος και αντίθετους συντελεστές.

Οι αριθμοί λέγονται **σταθερά** μονώνυμα. Το 0 λέγεται και **μηδενικό** μονώνυμο.

Πράξεις μονωνύμων.

1. **Πρόσθεση - Αφαίρεση** :
   Το άθροισμα (ή η διαφορά) δύο ή περισσότερων όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο **όμοιο** με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

2. **Πολαπλασιασμός** :
   Το γινόμενο δυο ή περισσότερων μονωνύμων είναι μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και κύριο μέρος το γινόμενο των κύριων μερών των μονωνύμων.

3. **Διαίρεση** :
   Το πηλίκο 2 ή περισσότερων μονωνύμων είναι μονώνυμο που έχει συντελεστή το πηλίκο των συντελεστών και κύριο μέρος το πηλίκο των κύριων μερών των μονωνύμων.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πολυώνυμο. Πολυώνυμο ονομάζεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

Κάθε μονώνυμο που βρίσκεται μέσα σε ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
Κατά συνέπεια αν ένα μονώνυμο έχει :

1. 2 όρους ονομάζεται **δυώνυμο**.
2. 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.

Βαθμός πολυωνύμου. Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του (των μονωνύμων).

Επίσης κάθε αριθμός ονομάζεται και **σταθερό** πολυώνυμο το οποίο είναι μηδενικού βαθμού.
Το 0 ονομάζεται και **μηδενικό** πολυώνυμο το οποίο **δεν** έχει βαθμό.

Τιμή πολυωνύμου. Τιμή πολυωνύμου ονομάζεται η αριθμητική τιμή που παίρνει ένα πολυώνυμο για κάποια τιμή της μεταβλητής του.

Πράξεις πολυωνύμων.

1. **Πρόσθεση - Αφαίρεση πολυωνύμων**. Το άθροισμα και η διαφορά δύο πολυωνύμων είναι πολυώνυμο που προκύπτει με αναγωγη ομοίων όρων.

2. **Πολλαπλασιασμός**. Το γινόμενο ενός μονωνύμου με ένα πολυώνυμο ή δύο πολυωνύμων ειναι πολυώνυμο το οποίο προκύπτει με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και λέγεται ανάπτυγμα του γινομένου.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ταυτότητα. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες.

1. **Άθροισμα στο Τετράγωνο** :
$(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο Τετράγωνο** :
$(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον Κύβο** :
$(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον Κύβο** :
$(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γιν. Αθροίσματος επί Διαφοράς** :
$(a+\beta)\cdot(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα Κύβων** :
$(a+\beta)\cdot\left(a^2 - a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά Κύβων** :
$(a-\beta)\cdot\left(a^2 + a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

Το δεύτερο μέλος κάθε ταυτότητας ονομάζεται **ανάπτυγμα**.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση. Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση, η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων όρων, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

Κατηγορίες παραγοντοποίησης.

1. **Κοινός Παράγοντας**
Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιήται όταν σ' όλους τους προσθετέους μιας παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας.
Κοινός παράγοντας στα πολυώνυμα βγαίνει το μονώνυμο που έχει συντελεστη το Μ.Κ.Δ των συντελεστών των όρων και κύριο μέρος το γινόμενο των κοινών μεταβλητών υψωμένες στο μικρότερο εκθέτη.

2. **Ομαδοποίηση**
Στην περίπτωση που δεν υπάρχει σε όλους τους όρους μιας σχέσης κάτι κοινό τότε κοιτάζουμε να τα χωρίσουμε σε ομάδες έτσι ώστε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά να υπάρχει κοινός παράγοντας.

3. **Διαφορά Τετραγώνων**
Κάθε σχέση της μορφής $a^2 - \beta^2$ παραγοντοποιήται ως εξής :
$$a^2 - \beta^2 = (a-\beta)(a+\beta)$$

4. **Διαφορά - Άθροισμα Κύβων**
Κάθε σχέση της μορφής $a^3 + \beta^3$ ή $a^3 - \beta^3$ παραγοντοποιήται ως εξής :
$$a^3 + \beta^3 = (a+\beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)$$
$$a^3 - \beta^3 = (a-\beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$$

5. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 + 2a\beta + \beta^2$ ή $a^2 - 2a\beta + \beta^2$ παραγοντοποιήται ως εξής :
$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$$
$$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$

6. **Τριώνυμο**
   Κάθε σχέση της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ παραγοντοποιήται ως εξής :
$$x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x - a)(x - \beta)$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων. Αν έχουμε δυο πολυώνυμα $\varDelta(x)$ (Διαιρετέος) και $\delta(x)$ (διαιρέτης) τότε η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης ορίζεται να είναι :

$$\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

όπού $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο.
Θα πρέπει ο βαθμος του υπολοίπου $\upsilon(x)$ να είναι **μικρότερος** από το βαθμό του διαιρέτη $\delta(x)$.

Αν το υπόλοιπο μιας διαίρεσης $\upsilon(x)$ είναι 0 τότε η ταυτότητα γινεται

$$\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

Μια τέτοια διαίρεση λέγεται **τέλεια** και τα πολυώνυμα $\delta(x), \pi(x)$ λέγονται **παράγοντες ή διαιρέτες**.

Διαδικασία Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων. Τα βήματα μιας διαίρεσης πολυωνύμων είναι :

1. Γράφουμε τα πολυώνυμα $\varDelta(x)$ και $\delta(x)$ κατά φθίνουσες δυνάμεις του x. Αν σε κάποιο από τα δύο λείπει κάποιος όρος, αφήνεουμε κενό διάστημα στη θέση αυτή ή συμπληρώνουμε με μηδενικό μονώνυμο.

2. Διαιρούμε τον 1^o όρο του Διαιρετέου $\varDelta)(x)$ με τον 1^o όρο του διαιρέτη $\delta(x)$ και γράφουμε το αποτέλεσμα στο πηλίκο το οποίο ειναι ο $1^{ος}$ όρος του πηλίκου $\pi(x)$.

3. Πολλαπλασιάζουμε τον 1^o όρο του πηλίκου $\pi(x)$ με το διαιρέτη $\delta(x)$ και γράφουμε το αποτέλεσμα κάτω από το Διαιρετέο $\varDelta(x)$ με αντίθετα πρόσημα.

4. Προσθέτουμε τα δυο πολυώνυμα και βρίσκουμε το 1^o **μερικό υπόλοιπο**.

5. Διαιρούμε τον 1^o όρο του μερικού υπολοίπου με τον 1^o όρο του διαιρέτη $\delta(x)$ και βρίσκουμε το 2^o όρο του πηλίκου $\pi(x)$.

6. Πολλαπλασιάζουμε οτι βρίκαμε με το διαιρέτη $\delta(x)$ και γράφουμε το αποτέλεσμα κάτω από το 1^o μερικό υπόλοιπο. Αφαιρώντας βρίσκουμε το 2^o μερικό υπόλοιπο.

7. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι ντο τελικό υπόλοιπο $\upsilon(x)$ να είναι βαθμού μικρότερου από το διαιρέτη $\delta(x)$.

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ. Πριν υπολογίσοπυμε Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. δυο ή περισσότερων πολυωνύμων τα **παραγοντοποιούμε**. Αν πρόκειται για μονώνυμα τότε δεν χρειάζεται παραγοντοποίηση.

1. Για να υπολογίσουμε Ε.Κ.Π. δυο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων επιλέγουμε το γινόμενο των **κοινών και μη κοινών παραγόντων** το καθένα υψωμένο στο **μεγαλύτερο** εκθέτη.

2. Για να υπολογίσουμε Μ.Κ.Δ. δυο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων επιλέγουμε το γινόμενο **μόνο των κοινών παραγόντων** το καθένα υψωμένο στο **μικρότερο** εκθέτη.

Σπύρος Φρόνιμος