ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

13 Απριλίου 2015

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Να βρεθούν τα αναπτύγματα από τις ταυτότητες.

i. $(x+2)^2$ ii. $(4x-3)^2$ iii. $(x+3)^3$ iv. $(2y-5)^3$ v. $(x+4)(x-4)$

ΛΥΣΗ

Για να βρεθεί το κάθε ανάπτυγμα το μόνο που χρειάζεται είναι να γνωρίζουμε τους τύπους σε κάθε περίπτωση. Οπότε έχουμε :

i. $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

ii. $(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

iii. $(x+3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

iv. $(2y-5)^3 = (2y)^3 - 3 \cdot (2y)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2y \cdot 5^2 - 5^3 = 8y^3 - 60y^2 + 150y - 125$

v. $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα από τις παρακάτω ταυτότητες :

i. $(x+4)^2$
ii. $(3x+2y)^2$
iii. $(2x-5y)^2$
iv. $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$
v. $(4x+1)^3$
vi. $(2-y)^3$
vii. $(x+2y)(x-2y)$
viii. $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις.

i. $3x^2 - 9x$
ii. $2y^2 - 4y + xy - 2x$
iii. $x^2 - 16$
iv. $x^2 + 2x + 1$

ΛΥΣΗ

i. Η παράσταση αυτή παραγοντοποιείται με τον 1ο τρόπο δηλαδή βγάζοντας κοινό παράγοντα. Ο κοινός παράγοντας θα έχει συντελεστή το Μ.Κ.Δ. των συντελεστών των προσθετέων και κύριο μέρος, τις κοινές μεταβλητές στη μικρότερη δύναμη. Διαιρώντας κάθε όρο με τον κοινό παράγοντα προκύπτουν οι όροι μέσα στην παρένθεση

$$3x^2 - 9x = 3x(x-3)$$

ii. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους τότε τους μοιράζουμε σε κατάλληλες ομάδες ώστε από κάθε ομάδα να μπορέσουμε να βγάλουμε κάτι κοινό.

$$2y^2 - 4y + xy - 2x = 2y(y-2) + x(y-2)$$

Στη συνέχεια θα προκύψει μια κοινή παρένθεση η οποία είναι κοινό παράγοντας άρα θα έχουμε

$$2y(y-2) + x(y-2) = (y-2)(2y+x)$$

iii. Σε κάθε ταυτότητα όπου το ανάπτυγμά της πρέπει να γραφτεί με τη μορφή γινομένου έχουμε μια μορφή παραγοντοποίησης. Στη στγκεκριμένη περίπτωση στη διαφορά τετραγώνων θα πρέπει να δούμε ποιοί ήταν οι αριθμοί που υψώθηκαν στο τετράγωνο και να μετατραπεί σε γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$$

iv. Η παράσταση αυτή παριστάνει ανάπτυγμα ταυτότητας άρα θα γραφτεί στην προηγούμενη μορφή

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x+1)^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις.

i. $2x - 4y$
ii. $8x^3y - 4x^2y^3$
iii. $12x^2y - 8xy^3 + 4x^2y^2$
iv. $3x\,(x-2) - 4y\,(x-2)$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις

i. $3x^2 - 9x + 4xy - 12y$
ii. $x^2 - ax + 3x - 3a$
iii. $-xy - 2x + 4y + 8$
iv. $3x^2 + 5xy + 2y^2$

3. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις

i. $x^2 - 25$
ii. $4y^2 - 25$
iii. $9y^2 - 36z^2$
iv. $(x-3)^2 - 9x^2$

4. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις

i. $x^2 + 4x + 4$
ii. $y^2 - 6y + 9$
iii. $4y^2 + 4y + 1$
iv. $z^2 - 10z + 25$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ.

Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. από τις παρακάτω αργεβρικές παραστάσεις.

i. $12x^3y^4z\ ,\ 16x^4y^2x^5\ ,\ 18x^3y^3$
ii. $3x^3 + 9x^2\ ,\ x^2 - 9\ ,\ x^2 - 6x + 9$

ΛΥΣΗ

Οι δύο κανόνες για την εύρεση Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. είναι

1. Ε.Κ.Π. : Όλοι οι παράγοντες ο καθένας στη μεγαλύτερη δύναμη.
2. Μ.Κ.Δ. : Μόνο οι κοινοί παράγοντες ο καθένας στη μικρότερη δύναμη.

Αν θέλουμε να βρούμε Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. από πολυώνυμα, πρώτα τα παραγοντοποιούμε.

i. Τα μονώνυμα δε χρειάζονται παραγοντοποίηση. Θα υπολογίσουμε Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. πρώτα από τους αριθμούς.

$$E.K.\Pi.(12, 16, 18) = 144$$

Οπότε θα έχουμε

$$E.K.\Pi. = 144x^4y^4z^5$$

Για το Μ.Κ.Δ. θα έχουμε $M.K.\Delta.(12, 16, 18) = 2$. Άρα

$$M.K.\Delta. = 2x^3y^2$$

ii. Τα πολυώνυμα πρώτα θα παραγοντοποιηθούν.

α΄. $3x^3 + 9x^2 = 3x^2(x+3)$

β΄. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

γ΄. $x^2 - 6x + 9 = (x+3)^2$

Άρα θα έχουμε $E.K.\Pi.(3,1,1) = 3$ οπότε

$$E.K.\Pi. = 3x^2(x-3)(x+3)^2$$

Επίσης $M.K.\Delta.(3,1,1) = 1$ άρα

$$M.K.\Delta. = x - 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των παρακάτω μονωνύμων

i. $4x^3y^2$, $12x^4y^3z$, $8xy^3z^3$

ii. $9a^4\beta^5\gamma^2$, $27a^3\gamma^2$, $18a^4$

2. Να βρεθούν το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των παρακάτω πολυωνύμων

i. $4x^2 - 8x$, $3x^3 - 27x$, $4x^2 - 24x + 36$

ii. $x^3 - 2x^2 + x$, $x - x^2$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Να βρεθούν οι τιμές τις μεταβλητής x ώστε να ορίζεται η παρακάτω παράσταση. Στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

$$\frac{2x-4}{x^2-4}$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται μια ρητή παράσταση θα πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διάφορος του 0. Οπότε

$$\text{Πρέπει } x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Η παράσταση λοιπόν ορίζεται για όλες τις τιμές εκτός από το -2 και το 2.

Για να απλοποιηθεί μια ρητή παράσταση θα πρέπει να έχουμε και στον αριθμητή και στον παρονομαστή μόνο γινόμενο. Παραγοντοποιούμε και τους δυο όρους και ύστερα διαιρούμε.

$$\frac{2x-4}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι τιμές τις μεταβλητής x ώστε να ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις. Στη συνέχεια να απλοποιηθούν.

i. $\dfrac{x^2 - x}{(x-1)^2}$ ii. $\dfrac{3-x}{x^2-3x}$ iii. $\dfrac{2x^2+2x}{x^3+2x^2+x}$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}=1$$

ΛΥΣΗ

Η διαδικασία για να λυθεί μια εξίσωση 1ου βαθμού είναι η εξής

i. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών (αν υπάρχουν).

ii. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

iii. Απλοποιούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή. (Απαλοιφή παρονομαστών)

iv. Απαλοίφουμε τις παρενθέσεις (αν προκύψουν).

v. Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους.

vi. Αφου προστεθούν οι όμοιοι όροι διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και βρίσκουμε τη λύση.

$$\begin{gathered}
\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}=1 \Rightarrow \\
6\cdot\frac{x-1}{2}+6\cdot\frac{x}{3}=6\cdot 1 \Rightarrow \\
3(x-1)+2x=6 \Rightarrow \\
3x-3+2x=6 \Rightarrow \\
3x+2x=6+3 \Rightarrow \\
5x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{5}
\end{gathered}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i. $2x-1=3$

ii. $4-3x=1$

iii. $5x-4=x+7$

iv. $2x-3=-x+2$

v. $3-4x=-2-3x$

vi. $1-x-3-2x=4x-3+x$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i. $2(x-1)=4$

ii. $1-3(1-x)=4$

iii. $3(2x-1)=2(1-x)$

iv. $3(x+2)-4(2-3x)=5+8x$

v. $2-(2-5x)=1+4(x-3)$

vi. $-(-2-5x)+3=2(x-3)-4(1-4x)$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i. $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-1}{3}=1$

ii. $\frac{x+1}{2}=\frac{1}{5}$

iii. $\frac{2x-4}{2}=5x$

iv. $\frac{3x-8}{4}-\frac{1}{2}=\frac{7x+8}{10}-\frac{x}{2}$

v. $\frac{x+1}{3}=\frac{2x-9}{4}+\frac{1}{6}$

vi. $\frac{2x-3}{2}-\frac{3x+1}{4}=\frac{x-3}{4}-1$