ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

15 Σεπτεμβρίου 2015

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

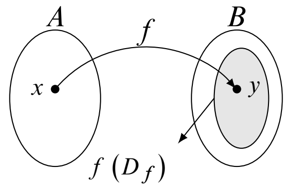
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.
Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή και του ελληνικού αλφαβήτου f, g, h, t, $s, \sigma \ldots$ και γράφουμε :

$$f : A \to B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης $(x \in A)$, του πρώτου συνόλου, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης $(y \in B)$, του δεύτερου συνόλου.



- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$. Η τιμή $f(x)$ ονομάζεται επίσης και **εικόνα** του x μέσω της f.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται D_f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in D_f$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\left(D_f\right)$ και ισχύει $f\left(D_f\right) \subseteq B$.

$$f\left(D_f\right) = \{y \in B | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in D_f\}$$

- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \ \ , \ \ D_f \overset{f}{\to} f\left(D_f\right)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \ \ , \ \ g(t) \ \ , \ \ h(s) \ldots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε

  1. Το πεδίο ορισμού D_f.
  2. Το σύνολο B.

3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in D_f$.

- Εαν τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

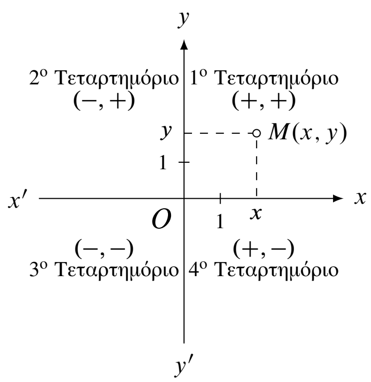
Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα τότε οι πράξεις μεταξύ των δύο συναρτήσεων ορίζονται ως εξής.

Τύπος	**Πεδίο ορισμού**
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \vert x \in D_f \cap D_g\}$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = \{x \in \mathbb{R} \vert x \in D_f \cap D_g\}$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} \vert x \in D_f \cap D_g\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \vert x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.



- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.

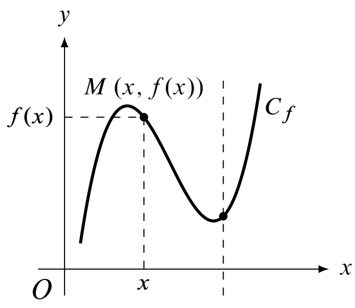
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A \ \ , \ \ y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

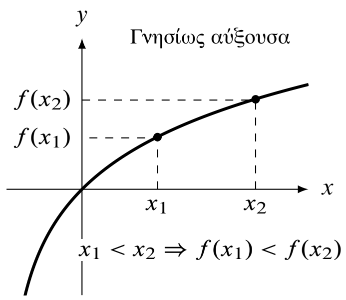
$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

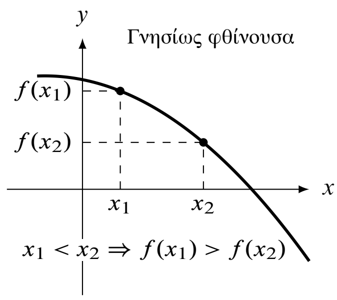


- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράστασης είναι της μορφής $M\ (x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΜΟΝΟΤΟΝΗ - ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα, χαρακτηρίζεται ως **μονότονη**, ενώ μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως **γνησίως μονότονη**. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αφορούν τη **μονοτονία** μιας συνάρτησης, μια ιδιότητα των συναρτήσεων η οποία δείχνει την αύξηση ή τη μείωση των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού.

1. **Γνησίως αύξουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) < f(x_2)$$
2. **Γνησίως φθίνουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) > f(x_2)$$





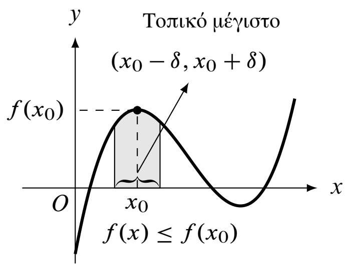
ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΤΟΠΙΚΑ - ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ
Ακρότατα, τοπικά ή ολικά ονομάζονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ τις οποίες παίρνει σε ένα διάστημα ή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

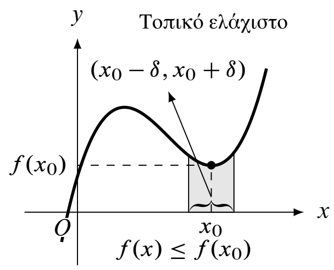
1. **Τοπικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \text{ με } \ \delta > 0$$

2. **Τοπικό ελάχιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \text{ με } \ \delta > 0$$





Αν κάποια τιμή της συνάρτησης αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο για όλες τις τιμές του πεδίου ορισμού τότε οι τιμές αυτές ονομάζονται **ολικό μέγιστο** και **ολικό ελάχιστο** αντίστοιχα. Το ολοκό μέγιστο και ελάχιστο μιας συνάρτησης αποτελούν τα **ολικά ακρότατα**.

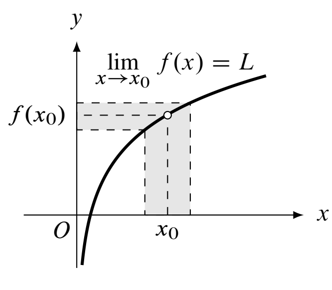
3. **Ολικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 ονομάζεται η προσέγγιση των τιμών της μεταβλητής $f(x)$ σε μια τιμή L καθώς το x πλησιάζει την τιμή x_0. Συμβολίζεται με

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Το όριο L μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ

1. **Συνέχεια σε ανοιχτό διάστημα**
   Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, β) εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

2. **Συνέχεια σε κλειστό διάστημα**
   Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος (a, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ και } \ \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

3. **Συνέχεια σε σύνολο**
   Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΟΡΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Για τα όρια των βασικών συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

i. **Πολυωνυμικές**
   Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

ii. **Ρητές**
   Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού και $Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\beta_\mu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\mu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

iii. **Άρρητες**
   Έστω $f(x) = \sqrt{A(x)}$ μια άρρητη συνάρτηση με $A(x)$ μια παράσταση μιας μεταβλητής. Τότε θα ισχύει :

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{A(x)} = \sqrt{A(x_0)}$$

iv. **Τριγωνομετρικές**
   Για τα όρια των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

   i. $\lim_{x \to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}x_0$
   ii. $\lim_{x \to x_0} \text{συν}x = \text{συν}x_0$
   iii. $\lim_{x \to x_0} \text{εφ}x = \text{εφ}x_0$
   iv. $\lim_{x \to x_0} \text{σφ}x = \text{σφ}x_0$

v. **Εκθετικές - Λογαριθμικές** Τα όρια των βασικών εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων θα είναι :

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \ , \ \lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0} \ , \ \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \ , \ \lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ
Θεωρούμε δύο δυναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0 \in D_f \cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο πεδίων ορισμού. Αν τα όρια των δύο συναρτήσεων στο x_0 υπάρχουν με $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ τότε οι πράξεις μεταξύ των ορίων ακολουθούν τους παρακάτω κανόνες :

Όριο	Κανόνας
Αθροίσματος	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_1\pm l_2$
Πολλαπλάσιου	$\lim\limits_{x\to x_0}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k\cdot l_1$, για κάθε $k\in\mathbb{R}$
Γινομένου	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_1\cdot l_2$
Πηλίκου	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$, $l_2\neq 0$
Απολύτου	$\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=\left\lvert\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right\rvert=\lvert l_1\rvert$
Ρίζας	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\sqrt[\kappa]{l_1}$, $l_1\geq 0$
Δύναμης	$\lim\limits_{x\to x_0}f^{\nu}(x)=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\nu}=l_1^{\nu}$