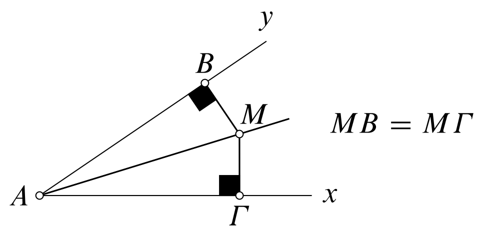
Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ
18 Οκτωβρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μαθηματικά

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Αλγεβρικές Παραστάσεις

1.1 Πραγματικοί Αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$. Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί**: Όλοι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετους τους. Αναλυτικά είναι οι:
$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$
3. **Ρητοί Αριθμοί**: Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν στη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους.
4. **Άρρητοι Αριθμοί**: Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί αριθμοί μαζί με τους άρρητους μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.

Ορισμός 1.2 : ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. **Αντίθετοι αριθμοί**
Αντίθετοι ονομάζονται δύο πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν άθροισμα μηδέν. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές και αντίθετα πρόσημα.
$$a + (-a) = 0$$
2. **Αντίστροφοι αριθμοί**
Αντίστροφοι ονομάζονται δύο πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ορισμός 1.3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

Πράξη	Όροι	Αποτέλεσμα	Συμβολισμός
Πρόσθεση	Προσθετέοι	Άθροισμα	$a + \beta$
Αφαίρεση	Μειωτέος - Αφαιρετέος	Διαφορά	$a - \beta$
Πολλαπλασιασμός	Παράγοντες	Γινόμενο	$a \cdot \beta$
Διαίρεση	Διαιρετέος - Διαιρέτης	Πηλίκο	$a : \beta$

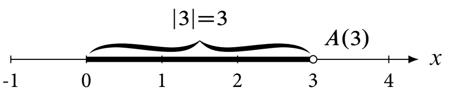
Πίνακας 1.1: Πράξεις αριθμών

Η αφαίρεση $a-\beta$ και η διαίρεση $a:\beta$ δύο αρθμών $a,\beta \in$ είναι οι πράξεις που προκύπτουν από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα και μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια τους.

$$a-\beta = a+(-\beta) \quad , \quad a:\beta = \frac{a}{\beta} = a\cdot\frac{1}{\beta}$$

Ορισμός 1.4 : ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a είναι η απόσταση του σημείου του αριθμού αυτού απο την αρχή του άξονα των αριθμών και συμβολίζεται με $|a|$. Συντομότερα είναι η απόσταση του αριθμού από το 0.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ \text{αν } a \geq 0 \\ -a \ , \ \text{αν } a < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1.1: Απόλυτη τιμή

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού a είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού a είναι ίση με τον αντίθετο του αριθμού a.

Ορισμός 1.5 : ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός φυσικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου ν είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.
- Η δύναμη a^2 ονομάζεται και ***a* στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη a^3 ονομάζεται και ***a* στον κύβο**.

Ορισμός 1.6 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x. Συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και ισχύει:

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- **Δεν** ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.
- Ο θετικός αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$	$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
Επιμεριστική	$a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$	

Πίνακας 1.2: Ιδιότητες των πράξεων

Ισχύουν επίσης οι ιδιότητες:

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a\cdot 0=0$
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

Θεώρημα 1.2 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς a, β ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων πραγματικών αριθμών a, β είναι θετικό.
- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων πραγματικών αριθμών a, β είναι αρνητικό.

$$\text{Αν } a,\beta \text{ ομόσημοι } \Rightarrow a\cdot\beta>0 \text{ και } \frac{a}{\beta}>0$$
$$\text{Αν } a,\beta \text{ ετερόσημοι } \Rightarrow a\cdot\beta<0 \text{ και } \frac{a}{\beta}<0$$

Θεώρημα 1.3 : ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών a, β είναι μηδέν τότε τουλάχιστον ένας απ' αυτούς είναι ίσος με το μηδέν.

$$a\cdot\beta=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ **ή** } \beta=0$$

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί και για γινόμενο περισσοτέρων των δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ έχουμε

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_\nu=0 \Leftrightarrow a_1=0 \text{ ή } a_2=0 \text{ ή } \ldots \text{ ή } a_\nu=0$$

Θεώρημα 1.4 : ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
Εάν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών a, β είναι διάφορο του μηδενός τότε κανένας απ' αυτούς δεν είναι ίσος με το μηδέν.

$$a\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0 \text{ **και** } \beta\neq 0$$

Το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων από δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ θα ισχύει

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_\nu\neq 0 \Leftrightarrow a_1\neq 0 \text{ και } a_2\neq 0 \text{ και } \ldots \text{ και } a_\nu\neq 0$$

Θεώρημα 1.5 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και φυσικό εκθέτη ν ισχύει:

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

Επίσης για κάθε δύναμη με βάση οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β και φυσικούς εκθέτες ν, μ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu}$, όπου $\beta \neq 0$
Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$
Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu$, όπου $a, \beta \neq 0$

Πίνακας 1.3: Ιδιότητες δυνάμεων

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}$$
$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^\nu = a_1^\nu \cdot a_2^\nu \cdot \ldots \cdot a_\kappa^\nu$$

Θεώρημα 1.6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την τετραγωνική ρίζα.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, όπου $x \geq 0$
Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \|x\|$, όπου x πραγματικός
Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, όπου $x, y \geq 0$
Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, όπου $x \geq 0$ και $y > 0$

Πίνακας 1.4: Ιδιότητες ριζών

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_\nu} \ , \text{ όπου } x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$$

1.2 Μονώνυμα - Πράξεις μεταξύ μονωνύμων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ - ΑΚΕΡΑΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Μια παράσταση ονομάζεται αλγεβρική όταν περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές

- Μια αλγεβρική παράσταση θα ονομάζεται **ακέραια** εάν μεταξύ των μεταβλητών της υπάρχουν μόνο οι πράξεις του **πολλαπλασιασμού** και της **πρόσθεσης**, ενώ οι εκθέτες είναι **φυσικοί αριθμοί**.
- **Τιμή** μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται ο αριθμός που θα προκύψει ύστερα από πράξεις εάν αντικατασταθούν οι μεταβλητές της με αριθμούς.

Ορισμός 1.8 : ΜΟΝΩΝΥΜΟ
Μονώνυμο ονομάζεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών υπάρχει μόνο η πράξη του **πολλαπλασιασμού**.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot x_\kappa^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.

Ορισμός 1.9 : ΒΑΘΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ
Βαθμός μονωνύμου, **ως προς μια** μεταβλητή, ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

- Βαθμός ενός μονωνύμου **ως προς όλες** τις μεταβλητές είναι το άθροισμα των βαθμών κάθε μεταβλητής.
- Οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού, ενώ το 0 ονομάζεται **μηδενικό** μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

$$a \cdot x^\nu y^\mu \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c} \nu \text{ βαθμού ως προς } x \\ \mu \text{ βαθμού ως προς } y \\ \nu + \mu \text{ βαθμού ως προς } x \text{ και } y \end{array}}$$

Ορισμός 1.10 : ΟΜΟΙΑ - ΙΣΑ - ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

- Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
- Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα που έχουν ίσους συντελεστές.
- Αντίθετα ονομάζονται δύο όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.7 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ
Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με κοινό κύριο μέρος και συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

Θεώρημα 1.8 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ
Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με κύριο μέρος το γινόμενο των κύριων μερών τους και συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους. Ο βαθμός του γινομένου ως προς κάθε μεταβλητή είναι το άθροισμα των αντίστοιχων βαθμών.

1.3 Πολυώνυμα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.11 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ
Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** πολυώνυμα ενώ το 0 **μηδενικό** πολυώνυμο.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : P, Q, A, B ... τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση στην οποία θα βρίσκονται οι μεταβλητές του δηλαδή : $P(x)$, $Q(x,y)$, $A(z,w)$, $B(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.
- Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο βαθμός του μεγιστοβάθμιου όρου.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ορισμός 1.12 : ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Τιμή ενός πολυωνύμου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικατασταθούν οι μεταβλητές του πολυωνύμου με πραγματικούς αριθμούς. Η τιμή κάθε πολυωνύμου μιας μεταβλητής $P(x)$, με βαθμό ν, για $x = \lambda$ συμβολίζεται με $P(\lambda)$ και είναι ίση με :

$$P(\lambda) = a_\nu \lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

Ορισμός 1.13 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ
Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας ή αφαιρώντας τους όμοιους όρους της.

1.4 Ταυτότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.14 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών της.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**: $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**: $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**: $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**: $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**: $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**: $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**: $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

1.5 Παραγοντοποίηση

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.15 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ
Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση, μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο παραγόντων.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. **Κοινός Παράγοντας**
   Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται όταν σ' όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας.
2. **Ομαδοποίηση**
   Χρησιμοποιείται στην περίπτωση που δεν υπάρχει σε όλους τους όρους μιας παράστασης κοινός παράγοντας οπότε μοιράζονται οι όροι σε ομάδες έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει δικό της κοινό παράγοντα.
3. **Διαφορά Τετραγώνων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 - \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$
4. **Διαφορά - Άθροισμα Κύβων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^3 - \beta^3$ ή $a^3 + \beta^3$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right)$$
   $$a^3 + \beta^3 = (a + \beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right)$$
5. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$$
   $$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$
6. **Τριώνυμο**
   Κάθε σχέση της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + a)(x + \beta)$$

1.6 Διαίρεση Πολυωνύμων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.16 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Ευκλείδεια διαίρεση μεταξύ δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ ονομάζεται η διαδικασία με την οποία διαρώντας τα πολυώνυμα αυτά προκύπτει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Τα πολυώνυμα $\varDelta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ ονομάζονται **Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** και **υπόλοιπο** αντίστοιχα.
- Η ισότητα $\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ ονομάζεται **ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι μηδενικό ($\upsilon(x) = 0$) η διαίρεση ονομάζεται τέλεια και ισχύει :

$$\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

  Στην τέλεια διαίρεση, τα πολυώνυμα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ ονομάζονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του $\varDelta(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.9 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Δίνονται τα πολυώνυμα $\varDelta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ τα οποία συνδέονται με τη σχέση :

$$\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Η ισότητα αυτή παριστάνει ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης αν και μόνο αν ο βαθμός του υπολοίπου $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη $\delta(x)$.
- Ένα πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι παράγοντας ενός πολυωνύμου $\varDelta(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ ώστε να ισχύει $\varDelta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$.

1.7 Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ. Αλγεβρικών Παραστάσεων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.17 : Ε.Κ.Π. ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο όλων των παραγόντων τους, με τον καθένα υψωμένο στη μεγαλύτερη δύναμη.

Ορισμός 1.18 : Μ.Κ.Δ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους, με τον καθένα υψωμένο στη μικρότερη δύναμη.

1.8 Ρητές Παραστάσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.19 : ΡΗΤΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Ρητή ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση η οποία έχει τη μορφή κλάσματος με τουλάχιστον μια μεταβλητη στον παρονομαστή της. Είναι της μορφής : $\frac{A(x)}{B(x)}$.

- Μια ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται αν ο παρονομαστής της είναι **διάφορος του μηδενός** : $B(x) \neq 0$.
- Μια αλγεβρική παράσταση απλοποιείται **μόνο** αν και οι δύο όροι της αποτελούν **γινόμενο** παραγόντων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Εξισώσεις - Ανισώσεις

2.1 Εξισώσεις $1^{ου}$ Βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

Όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Αν ο συντελεστής της μεταβλητής x είναι διάφορος του 0 τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με a, β πραγματικούς αριθμούς, τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.
2. Αν $a = 0$ και
   i. $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.
   ii. $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

Πίνακας 2.1: Λύσεις εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού

2.2 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.2 : ΤΡΙΩΝΥΜΟ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Τριώνυμο 2^{ου} βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού με τρεις όρους και είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma \ \text{ με } \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ονομάζονται **συντελεστές** του τριωνύμου.
- Ο συντελεστής γ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

Ορισμός 2.3 : ΕΞΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ a \neq 0$$

Ορισμός 2.4 : ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ
Διακρίνουσα ενός τριωνύμου 2^{ου} βαθμού ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.2 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

1. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο :
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Αν ισχύει $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την
$$x = -\frac{\beta}{a}$$
3. Αν τέλος $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον παραπάνω πίνακα.

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 λύσεις	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή λύση	$x = -\dfrac{\beta}{2a}$
$\Delta < 0$	Καμία λύση	

Πίνακας 2.2: Λύσεις εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

Θεώρημα 2.3 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\,(x - x_0)^2$$

όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

2.3 Κλασματικές Εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.5 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται κάθε εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Είναι της μορφής

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \Gamma(x) = 0$$

όπου $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$ είναι πολυώνυμα του x, με $B(x) \neq 0$.

2.4 Ανισότητες - Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.6 : ΔΙΑΤΑΞΗ
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών κατά την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι

$<$: μικρότερο , $>$: μεγαλύτερο , $\leq$ μικρότερο ίσο , $\geq$ μεγαλύτερο ισο

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που είναι τοποθετημένοι πάνω στην ευθεία των πραγμωτικών αριθμών ονομάζονται **διατεταγμένοι**.

Ορισμός 2.7 : ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ - ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ
Ένας αριθμός a είναι **μεγαλύτερος** απο έναν αριθμό β, και γράφουμε $a > \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

$$a > \beta \Leftrightarrow a - \beta > 0$$

Ένας αριθμός a είναι **μικρότερος** απο έναν αριθμό β, και γράφουμε $a < \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

$$a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$$

Ορισμός 2.8 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \quad , \quad P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x), Q(x), R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

Ορισμός 2.9 : ΑΝΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \quad , \quad ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές a, β.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Εαν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ a - \gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περπτώσεις :

   i. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.
   ii. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

Θεώρημα 2.5 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ
Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων με ίδια φορά και να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες ίδιας φοράς αρκεί όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \ \ , \ \ \text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

Θεώρημα 2.6 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ
Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού a είναι μη αρνητικός αριθμός :

$$a^2 \geq 0 \ \ , \ \ \kappa \text{ ακέραιος}$$

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $a^2 + \beta^2 = 0$ τότε $a = 0$ και $\beta = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

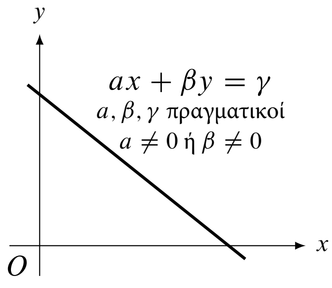
ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών, ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση στην οποία κάθε όρος της είναι μονώνυμο $1^{ου}$ βαθμού μιας μεταβλητής. Έχει τη μορφή

$$ax + \beta y = \gamma$$

όπου οι συντελεστές a, β και ο σταθερός όρος γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Η καμπύλη της εξίσωσης είναι ευθεία γραμμή αν οι συντελεστές a, β των μεταβλητών x, y αντίστοιχα, δεν μηδενίζονται συγχρόνως δηλ. $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.



Σχήμα 3.1: Γραμμική εξίσωση

- Οι ευθείες της μορφής $x = \kappa$ ονομάζονται **κατακόρυφες** ευθείες ενώ οι ευθείες της μορφής $y = \kappa$ οριζόντιες ευθείες.
- Ο πραγματικός αριθμός $\lambda = -\frac{a}{\beta}$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας $ax + \beta y = \gamma$.

Ορισμός 3.2 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$ax + \beta y = \gamma$$

ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.3 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται ο συνδυασμός - σύζευξη δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Οι συντελεστές του συστήματος a, a', β, β' και οι σταθεροί όροι γ, γ' είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.

- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εαν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.

Ορισμός 3.4 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εαν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

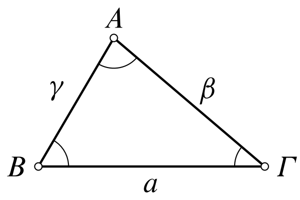
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Γεωμετρία

4.1 Ισότητα Τριγώνων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1 : ΤΡΙΓΩΝΟ - ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τρίγωνο ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες.



Σχήμα 4.1: Τρίγωνο

- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές, οι γωνίες και οι κορυφές του.
- Κάθε τρίγωνο συμβολίζεται με τη χρήση των ονομάτων των τριών κορυφών του για παράδειγμα $AB\Gamma$.

$$B\Gamma \to a \quad , \quad A\Gamma \to \beta \quad , \quad AB \to \gamma$$

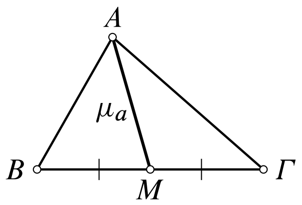
- Οι πλευρές ενός τριγώνου, εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος, μπορούν εναλλακτικά να συμβολιστούν με ένα μικρό γράμμα, αντίστοιχο του ονόματος της απέναντι κορυφής.

Ορισμός 4.2 : ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

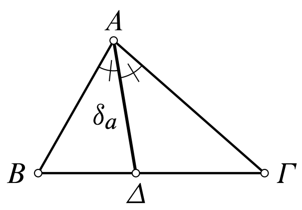
Τα δευτερεύοντα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος του. Αναλυτικά ορίζονται ως εξής :

1. **Διάμεσος**
   Διαμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

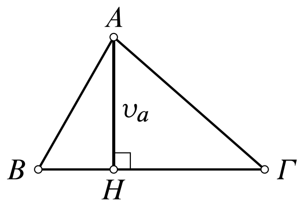
2. **Διχοτόμος**
   Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο χωρίζει μια γωνία του τριγώνου σε δύο ίσα μέρη.



Σχήμα 4.2: Διάμεσος



Σχήμα 4.3: Διχοτόμος



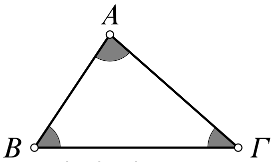
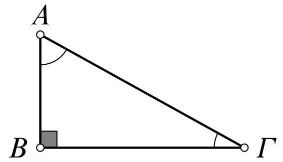
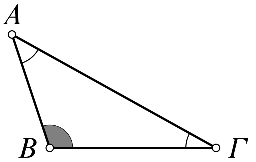
Σχήμα 4.4: Ύψος

3. **Ύψος**
   Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει το ένα άκρο του σε μια κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο με την απέναντι πλευρά.

Ορισμός 4.3 : ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

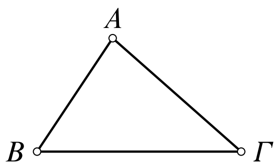
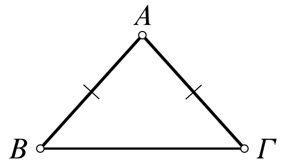
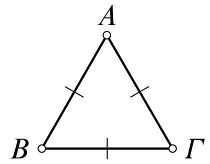
Τα τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς το είδος των γωνιών που περιέχουν και ως προς τη σχέση των πλευρων μεταξύ τους.

1. **Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες**
   Με κριτήριο το είδος των γωνιών που περιέχει ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα παρακάτω τρία είδη τριγώνων.

Οξυγώνιο	**Ορθογώνιο**	**Αμβλυγώνιο**
 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} < 90°$	 $\hat{B} = 90°$	 $\hat{B} > 90°$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **οξυγώνιο** εαν έχει **όλες** τις γωνίες του οξείες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ορθογώνιο** εαν έχει μια ορθή γωνία.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **αμβλυγώνιο** εαν έχει μια αμβλεία γωνία.

Πίνακας 4.1: Είδη τριγώνων ως προς γωνίες

2. **Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές**
   Με βάση τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου χωρίζουμε τα τρίγωνα στις παρακάτω κατηγορίες.

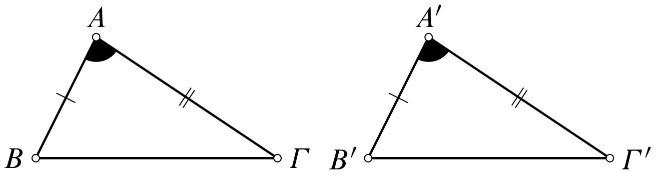
Σκαληνό	**Ισοσκελές**	**Ισόπλευρο**
 $AB \neq A\Gamma \neq B\Gamma$	 $AB = A\Gamma$	 $AB = A\Gamma = B\Gamma$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **σκαληνό** εαν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους άνισες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισοσκελές** εαν έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση**.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισόπλευρο** εαν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Πίνακας 4.2: Είδη τριγώνων ως προς πλευρές

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.1 : 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

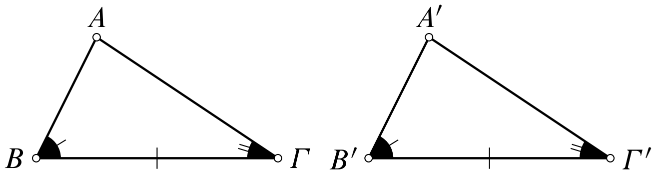
Αν ένα τρίγωνο έχει δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες μεταξύ τους ίσες τότε είναι ίσα.



$$AB = A'B'$$
$$A\Gamma = A'\Gamma'$$
$$\hat{A} = \hat{A}'$$

Σχήμα 4.5: 1ο Κρητίριο ισότητας τριγώνων

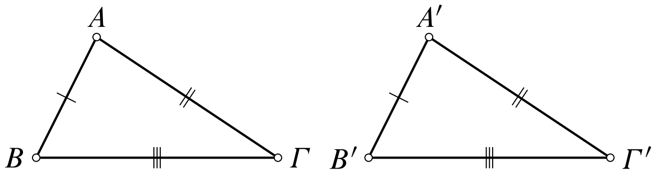
Θεώρημα 4.2 : 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες, τότε ειναι ίσα.



$$B\Gamma = B'\Gamma' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

Σχήμα 4.6: 2ο Κρητίριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα 4.3 : 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, τότε ειναι ίσα.

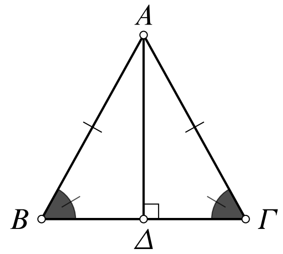


$$AB = A'B' \quad A\Gamma = A'\Gamma' \quad B\Gamma = B'\Gamma'$$

Σχήμα 4.7: 3ο Κρητίριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα 4.4 : 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ισοσκελές τριγωνο

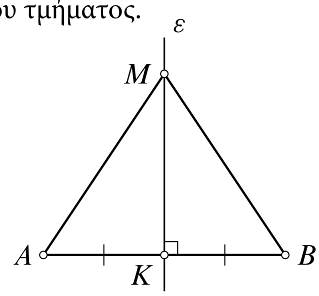
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
- Η διάμεσος το ύψος και η διχοτόμος της γωνίας της κορυφης του ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν.



Σχήμα 4.8: Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

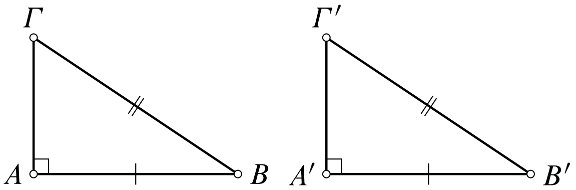
Θεώρημα 4.5 : 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.

Θεώρημα 4.6 : 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ
Κάθε σημείο το οποίο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα ανήκει στη μεσοκάθετό του τμήματος.



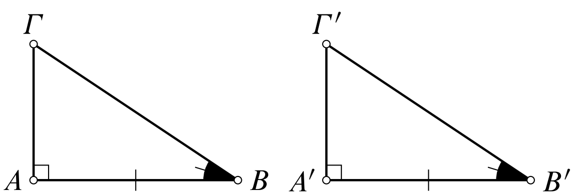
Σχήμα 4.9: Ιδιότητες μεσοκαθέτου

Θεώρημα 4.7 : 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες τότε έιναι ίσα.



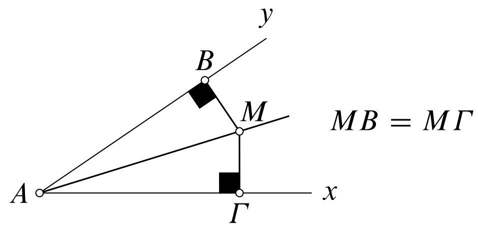
Σχήμα 4.10: 1ο Κρητίριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θεώρημα 4.8 : 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες αντίστοιχα τότε είναι ίσα.



Σχήμα 4.11: 2ο Κρητίριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θεώρημα 4.9 : ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ
Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της. Αντίστροφα, κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας θα ανήκει στη διχοτόμο της.



Σχήμα 4.12: Ιδιότητες διχοτόμου γωνίας

Προκύπτει λοιπόν ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

4.2 Λόγος ευθυγράμων τμημάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.4 : ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ ο οποίος είναι ίσος με το πηλίκο τους ή ισοδύναμα το πηλίκο των μέτρων τους.

$$\lambda = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$$

Ορισμός 4.5 : ΑΝΑΛΟΓΙΑ
Αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων ευθυγράμμων τμημάτων. Αν a, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα τότε η αναλογία έχει ως εξής

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$$

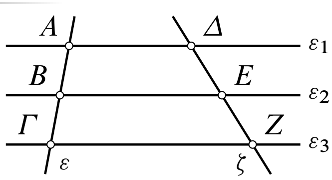
- Τα ευθύγραμμα τμήματα a, β, γ, δ ονομάζονται **όροι** της αναλογίας.
- Οι αριθμητές της αναλογίας είναι ανάλογοι προς τους παρονομαστές της δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα a, γ είναι ανάλογα προς τα β, δ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα a και δ ονομάζονται **άκροι όροι** ενώ τα β, γ **μέσοι όροι** της αναλογίας.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται μέσα στον ίδιο λόγο (κλάσμα) ονομάζονται **ομόλογα** ή **αντίστοιχα**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.10 : ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια τέμνουσα, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη τέμουσα ευθεία.

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ και } AB = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = EZ$$



Σχήμα 4.13: Ισότητα τμημάτων σε τέμνουσα

Θεώρημα 4.11 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ
Για κάθε αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα a, β, γ, δ θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Χιαστί γινόμενα	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
Εναλλαγή μέσων και άκρων όρων	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{a}$
Άθροισμα - Διαφορά αριθμ. και παρονομ.	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \pm \beta}{\gamma \pm \delta}$

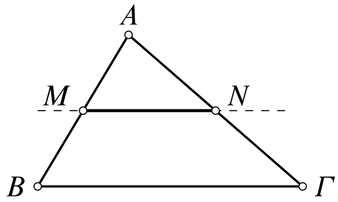
Πίνακας 4.3: Ιδιότητες αναλογιών

Θεώρημα 4.12 : ΤΜΗΜΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΕΣΑ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της. Θα ισχύει

$$MN \parallel= \frac{B\Gamma}{2}$$

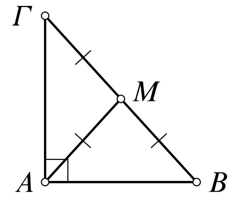
για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.



Σχήμα 4.14: Τμήμα από τα μέσα πλευρών

Θεώρημα 4.13 : ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΑΠΟ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ

Η διάμεσος που άγεται από την ορθή γωνία προς την υποτείνουσα σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.



Σχήμα 4.15: Διάμεσος προς την υποτείνουσα

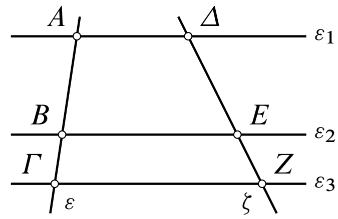
4.3 Θεώρημα Θαλή

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.14 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται σ' αυτές είναι ανάλογα. Τα τμήματα της πρώτης ευθείας είναι ανάλογα προς τα τμήματα της δεύτερης.

$$\text{Αν } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

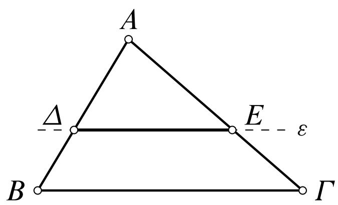


Σχήμα 4.16: Θεώρημα Θαλή

Θεώρημα 4.15 : ΑΝΑΛΟΓΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μια ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$. Αν αυτή τέμνει τις άλλες δύο πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα τότε τα τμήματα $A\Delta, AE$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα $\Delta B, E\Gamma$ αντίστοιχα.

$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$$



Σχήμα 4.17: Ανάλογα τμήματα τριγώνου

4.4 Ομοιότητα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.6 : ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ
Όμοια ονομάζονται δύο πολύγωνα τα οποία έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες μια προς μια.

- Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες ονομάζονται **ομόλογες**.
- Ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών δύο όμοιων σχημάτων ονομάζεται **λόγος ομοιότητας**. Συμβολίζεται λ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.16 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μια.

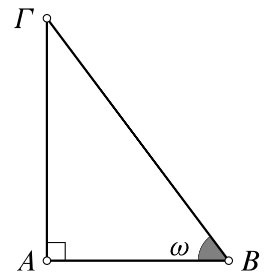
Θεώρημα 4.17 : ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ
Σε δύο όμοια τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές και αντίστροφα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Τριγωνομετρία

5.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.1 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Έστω $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με $A = 90^\circ$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξείων γωνιών του τριγώνου ορίζονται ως εξής :



Σχήμα 5.1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
   $$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{ημ}\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$
2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
   $$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{συν}\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$
3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.
   $$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad \text{εφ}\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$

Ορισμός 5.2 : ΤΡΙΓ. ΑΡ. ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και $M(x, y)$ ένα σημείο του. Ενώνοντας το σημείο M με την αρχή των αξόνων, το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει δημιουργεί μια γωνία ω με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ox. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM είναι :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}y$ ορίζονται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του σημείου και είναι

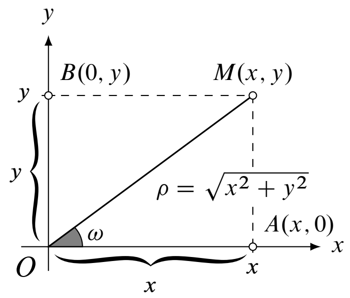
1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.
   $$\text{ημ}\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.

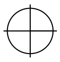
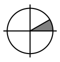
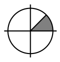
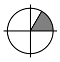
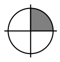
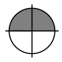
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x} \ , \ \ x \neq 0$$



Σχήμα 5.2: Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες και ακτίνια αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

Βασικές Γωνίες

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Σχήμα						
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	0

Πίνακας 5.1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.1 : ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω εξαρτόνται από το είδος της γωνίας:

i. Αν η γωνία ω είναι οξεία τότε $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \varepsilon\varphi\omega > 0$.
ii. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \varepsilon\varphi\omega < 0$.

5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.2 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ
Οι παραπληρωματικές γωνίες ω και $180° - \omega$ έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

- $\etaμ\,(180° - \omega) = \etaμ\omega$
- $συν\,(180° - \omega) = -συν\omega$
- $εφ\,(180° - \omega) = -εφ\omega$

Αν δύο γωνίες φ, ω, με $0 \leq \varphi, \omega \leq 180°$, έχουν ίσα ημίτονα τότε είναι είτε ίσες είτε παραπληρωματικές.

5.3 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.3 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, οι ταυτότητες οι οποίες περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς θα ονομάζονται **τριγωνομετρικές** ταυτότητες.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.3 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ
Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι παρακάτω βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες :

1. $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$
2. $εφ\omega = \dfrac{ημ\omega}{συν\omega}$

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων