α. Για να ορίζεται η f πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $D_{f'} = (0, +\infty)$.

β. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = +\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Άρα $f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $D_{f'} = (0, +\infty)$.

γ. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = (\sqrt[5]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{2}{5}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = +\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Άρα $f'(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$, $D_{f'} = (0, +\infty)$.

δ. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x^7})' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7\sqrt[4]{x^3}}{4}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^7}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{7}{4}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}} = 0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 0$. Άρα $f'(x) = \dfrac{7\sqrt[4]{x^3}}{4}$, $D_{f'} = [0, +\infty)$.

ε. Πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Η f γράφεται

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Έτσι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 0$. Άρα $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$, $D_{f'} = [0, +\infty)$.

στ. Πρέπει $x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Η f γράφεται

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{11}{4}}$$

Έτσι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \left(x^{\frac{11}{4}}\right)' = \frac{11}{4} x^{\frac{11}{4}-1} = \frac{11}{4} x^{\frac{7}{4}} = \frac{11\sqrt[4]{x^7}}{4}$$

Επιπλέον

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{11}{4}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{7}{4}} = 0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 0$. Άρα $f'(x) = \frac{11\sqrt[4]{x^7}}{4}$, $D_{f'} = [0, +\infty)$.