

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ - 11 Ιουλίου 2019  
ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ/ΤΡΙΑ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

# Διαγώνισμα

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

### ΘΕΜΑ Α

- A.1** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ . *Μονάδες 10*
- A.2** Να αναφέρετε ένα παράδειγμα γνησίως αύξουσας και ένα γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. *Μονάδες 5*
- A.3** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.
- α. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ , παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$  τότε ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .
  - β. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα  $\Delta$ .
  - γ. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα  $(a, x_0)$ ,  $(x_0, \beta)$  και είναι συνεχής στο  $x_0$  τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα  $(a, \beta)$ .
  - δ. Αν ισχύει  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
  - ε. Αν ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}^*$ .

*Μονάδες 10*

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 2, & x < 1 \\ x \cdot \ln x - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

- B.1** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία. *Μονάδες 9*
- B.2** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(e, +\infty)$ . *Μονάδες 9*
- B.3** Να λυθεί η ανίσωση

$$x \cdot \ln x > 2 \cdot \ln 2 + 2x - 4$$

για κάθε  $x \in (1, e)$ .

*Μονάδες 7*

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1 - x - 2 \ln x}$ .

**Γ.1** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

*Μονάδες 12*

**Γ.2** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in D_f$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = 2018$ .

*Μονάδες 8*

**Γ.3** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - \ln x$  αφού βρεθεί πρώτα το πεδίο ορισμού της.

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(2) = \ln \frac{16}{e^4}$  και:

$$xf'(x) = f(x) + 2x - x^2, \text{ για κάθε } x > 0$$

**Δ.1** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

*Μονάδες 7*

**Δ.2** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

*Μονάδες 10*

**Δ.3** Να λύσετε την ανίσωση

$$2x \cdot \ln x - 2e > (x - e)(x + e)$$

*Μονάδες 8*

Καλή Επιτυχία!