Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
11 Αυγούστου 2016

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Συστήματα

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για την επίλυση ενός συστήματος με δύο μεταβλητές έστω x, y με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

***1ο Βήμα :* Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε μια απ' τις δύο εξισώσεις ώστε να λύσουμε ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή. Θα προκύψει μια σχέση (1) που θα μας δίνει την μεταβλητή αυτή ως συνάρτηση της άλλης.

***2ο Βήμα :* Αντικατάσταση**
Τη μεταβλητή αυτή την αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Λύνοντας την εξίσωση υπολογίζουμε τον άγνωστο αυτό.

***3ο Βήμα :* Υπολογισμός 2ου αγνώστου**
Την τιμή που θα βρούμε για τη μια μεταβλητή λύνοντας την εξίσωση, την αντικαθιστούμε στη σχέση (1) ώστε να βρεθεί και η άλλη μεταβλητή του συστήματος.

***4ο Βήμα :* Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε οτι η $2^η$ εξίσωση είναι εύκολο να λυθεί ως προς x οπότε έχουμε

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 4y - 3 \tag{1}$$

Αντικάθιστώντας το αποτέλεσμα της σχέσης (1) στην $1^η$ εξίσωση προκύπτει :

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 5 &\Rightarrow 2(4y-3) + 3y = 5 \Rightarrow 8y - 6 + 3y = 5 \\ &\Rightarrow 8y + 3y = 5 + 6 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Τη λύση της εξίσωσης (2) την αντικαθιστούμε στη σχέση (1) για να υπολογίσουμε τον άγνωστο x

$$x = 4y - 3 = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι η $(x, y) = (1, 1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για την επίλυση ενός συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

***1ο Βήμα :* Επιλογή μεταβλητής**
Επιλέγουμε ποιά από τις δύο μεταβλητές θα απαλείψουμε χρησιμοποιώντας τη μέδοδο αυτή.

***2ο Βήμα :* Πολλαπλασιασμός εξισώσεων**
Τοποθετούμε δίπλα από κάθε εξίσωση τους συντελεστές την μεταβλητής που επιλέξαμε "χιαστί" αλλάζοντας το πρόσημο του ενός από τους δύο. Πολλαπλασιάζουμε την κάθε εξίσωση με τον αριθμό που προκύπτει.

***3ο Βήμα :* Πρόσθεση κατά μέλη**
Προσθέτουμε κατά μέλη τις νέες εξισώσεις οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και υπολογίζουμε λύνοντας την.

***4ο Βήμα :* Εύρεση 2ης μεταβλητής**
Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα σε οποιαδήποτε εξίσωση του αρχικού συστήματος ώστε να υπολογίσουμε και τη δεύτερη μεταβλητή.

***5ο Βήμα :* Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Επιλέγουμε με τη μέθοδο αυτή να απαλοίψουμε τη μεταβλητή y του συστήματος. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \left|\begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Οπότε προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \\ \hline 11x = 22 \end{array} \Rightarrow x = 2 \tag{3}$$

Την τιμή αυτή της μεταβλητής x από τη σχέση (3) την αντικαθιστούμε σε οποιαδήποτε εξίσωση και υπολογίζουμε τη δεύτερη μεταβλητή y.

$$\begin{aligned} 3x + 2y = 12 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 2y = 12 \Rightarrow 6 + 2y = 12 \\ \Rightarrow 2y = 12 - 6 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε τη λύση του συστήματος η οποία είναι $(x, y) = (2, 3)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους μπορούμε πλέον να το λύσουμε με τη χρήση οριζουσών ως εξής.

1ο Βήμα : Υπολογισμός ορίζουσας
Υπολογίζουμε την ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος και εξετάζουμε αν είναι μηδενική η όχι.

2ο Βήμα : Υπολογισμός λύσεων
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν $D \neq 0$ τότε υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών σύμφωνα με το **Θεώρημα 3** οπότε η μοναδική λύση θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.
- Αν $D = 0$ τότε προκειμένου να φανεί αν το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε μια ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό ώστε να προκύψουν τα πρώτα μέλη ίσα.
  - Αν τα δεύτερα μέλη δεν είναι ίσα τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
  - Αν και τα δεύτερα μέλη είναι ίσα τότε το σύστημα είναι αόριστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 4x - 3y = -5 \end{cases}$$

με τη μέθοδο των οριζουσών.

ΛΥΣΗ

Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) = -3 + 20 = 17$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι διάφορη του μηδενός οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οι ορίζουσες των μεταβλητών θα είναι

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-5) = -34 \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 4 \cdot 3 = -17$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι τιμές των μεταβλητών του συστήματος θα είναι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-34}{17} = -2 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{17} = -1$$

οι οποίες μας δίνουν τη λύση του συστήματος $(x, y) = (-2, -1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών

$$\begin{cases} \mathbf{4x - \ \ 8y = 1} \\ \mathbf{6x - 12y = 4} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-12) - 6 \cdot (-8) = -48 + 48 = 0$$

Η μηδενική ορίζουσα μας δείχνει οτι το σύστημα είναι είτε αόριστο είτε αδύνατο. Για να προσδιορίσουμε το είδος του διαιρούμε τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς :

$$\begin{cases} 4x - \ \ 8y = 1 \\ 6x - 12y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} :4 \\ :6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{1}{4} \\ x - 2y = \frac{4}{6} \end{cases} \tag{5}$$

Τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων είναι άνισα οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών

$$\begin{cases} \mathbf{3x - \ \ y = 5} \\ \mathbf{6x - 2y = 10} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η ορίζουσα του συστήματος θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$$

Θα πρέπει κι εδώ να προσδιορίσουμε αν το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλους αριθμούς θα έχουμε :

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases} \tag{6}$$

Οι δύο εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν άρα το σύστημα είναι αόριστο. Για να βρούμε τη μορφή όλων των λύσεων τις εκφράζουμε με τη βοήθεια μιας παραμέτρου ως εξής : Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y :

$$3x - y = 5 \Rightarrow -y = 5 - 3x \Rightarrow y = 3x - 5 \tag{7}$$

Εξισώνουμε τη δεύτερη μεταβλητή με μια παράμετρο λ δηλαδή $x = \lambda$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (7) έχουμε επίσης $y = 3\lambda - 5$. Επομένως οι άπειρες λύσεις δίνονται παραμετρικά από τη σχέση

$$(x, y) = (\lambda, 3\lambda - 5)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να λυθεί και γεωμετρικά με τη βοήθεια των καμπυλών των εξισώσεων όπου στην περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων παριστάνουν ευθείες γραμμές.

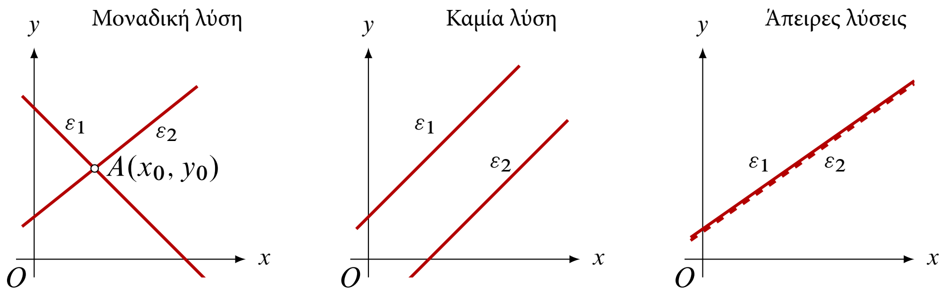
***1ο Βήμα* : Χάραξη των ευθειών**

Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες του συστήματος βρίσκοντας για κάθεμια δύο σημεία της με τη βοήθεια της εξίσωσής της.

***2^o Βήμα* : Σχετική θέση ευθειών**

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τη σχετική θέση των δύο ευθειών

- Αν οι ευθείες **τέμνονται** σε ένα σημείο τότε οι συντεταγμένες του κοινού αυτού σημείου είναι η ζητούμενη λύση του συστήματος. Τις συντεταγμένες αυτές τις βρίσκουμε σχεδιάζοντας από το σημείο, κάθετες γραμμές προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Αν οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε **δεν υπάρχουν κοινά σημεία** μεταξύ τους και κατά συνέπεια το σύστημα δεν έχει λύση οπότε είναι **αδύνατο**.
- Τέλος αν οι ευθείες **ταυτίζονται** τότε έχουν μεταξύ τους άπειρα κοινά σημεία οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις δηλαδή είναι **αόριστο**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα

i. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ **iii.** $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$

Για κάθε μια από τις εξισώσεις των παραπάνω συστημάτων θα βρούμε δύο ζεύγη αριθμών που τις επαληθεύουν τα οποία θα παριστάνουν σημεία στο επίπεδο.

i. Στην πρώτη εξίσωση επιλέγουμε $x = 0$ οπότε έχουμε

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 2y = 4 \Rightarrow y = -2$$

Αποκτάμε έτσι το σημείο $A(0, -2)$. Ένα δεύτερο σημείο θα βρεθεί παίρνοντας π.χ. $y = 0$ οπότε με πράξεις προκύπτει

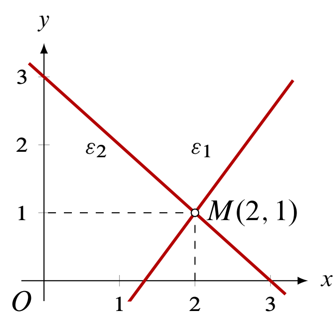
$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3 - 2 \cdot 0 = 4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

Προκύπτει έτσι το σημείο $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε δύο σημεία και της $2^{ης}$ ευθείας. Έχουμε από τη $2^η$ εξίσωση για $y = 0$

$$x + y = 3 \Rightarrow x + 0 = 3 \Rightarrow x = 3$$

και παίρνουμε έτσι το σημείο $\Gamma(3, 0)$. Επίσης για $x = 0$

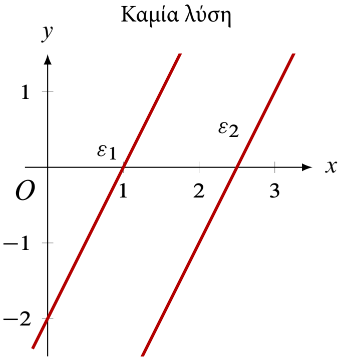
$$x + y = 3 \Rightarrow 0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$$

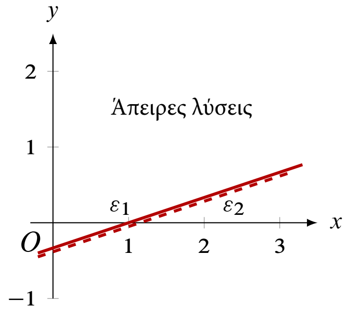


άρα το δεύτερο σημείο της θα είναι το $\Delta(0, 3)$. Σχεδιάζοντας τις δύο ευθείες προκύπτει το διπλανό σχήμα. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε οτι οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινο σημείο M. Από το σημείο αυτό αν σχεδιάσουμε κάθετες γραμμές πάνω στους άξονε $x'x$ και $y'y$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου οι οποίες είναι $(x, y) = (2, 1)$. Οι συντεταγμένες αυτές είναι η λύση του συστήματος.

ii. Με παρόμοιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα δύο σημεία για κάθε ευθεία είναι τα $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(2, -1)$, $\Delta(2{,}5, 0)$ αντίστοιχα. Σχεδιάσοντας τις δύο ευθείες στο σύστημα συντεταγμένων παρατηρούμε οτι είναι παράλληλες άρα δεν έχουν κοινά σημεία οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Σχεδιάζοντας τις ευθείες και του τρίτου συστήματος με τον τρόπο που είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε οτι ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει οτι έχουν άπειρα κοινά σημεία και κατά συνέπεια το σύστημα είναι αόριστο.





ΜΕΘΟΔΟΣ 5 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Αν μας ζητείται να λύσουμε ένα σύστημα του οποίου οι εξισώσεις δεν είναι στην απλή γραμμική μορφή όπως φαίνεται στον **Ορισμό 3**, τότε

***1ο Βήμα :* Πράξεις**
Εκτελούμε πράξεις και στα δύο μέλη κάθε εξίσωσης και διαχωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους, ώστε να τις φέρουμε σε γραμμική μορφή.

***2ο Βήμα :* Λύση γραμμικού συστήματος**
Λύνουμε το γραμμικό πλέον σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο μας συμφέρει, επιλέγοντας μια από τις **Μεθόδους 1,2,3** και **4**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 : ΣΥΝΘΕΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x+2}{3}+\frac{1-y}{2}&=2\\ \frac{2x-1}{5}+\frac{y}{3}&=-\frac{2}{15}\end{aligned}\right.$$

ΛΥΣΗ
Η μορφή στην οποία βρίσκεται κάθε εξίσωση του συστήματος δεν είναι η απλή γραμμική. Αυτό σημαίνει οτι δεν μπορεί να εφαρμοστεί ακόμα κάποια από τις μεθόδους επίλυσης. Κάνοντας πράξεις θα απλοποιήσουμε τη μορφή του συστήματος.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x+2}{3}+\frac{1-y}{2}&=2\\ \frac{2x-1}{5}+\frac{y}{3}&=-\frac{2}{15}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 6\frac{x+2}{3}+6\frac{1-y}{2}&=2\cdot 6\\ 15\frac{2x-1}{5}+15\frac{y}{3}&=-15\frac{2}{15}\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 2(x+2)+3(1-y)&=12\\ 3(2x-1)+5y&=-2\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2x+4+3-3y&=12\\ 6x-3+5y&=-2\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2x-3y&=5\\ 6x+5y&=1\end{aligned}\right.$$

Το τελευταίο σύστημα έχει τη ζητούμενη μορφή οπότε μπορούμε να το λύσουμε με μια από τις μεθόδους. Με τη μέθοδο των οριζουσών έχουμε :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 28 \;,\; D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 28 \;,\; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

Οπότε οι τιμές των δύο μεταβλητών είναι $x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{28} = 1$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{28} = -1$ που μας δίνουν τη λύση $(x, y) = (1, -1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 3×3

Για να λυθεί ένα 3×3 γραμμικό σύστημα με μεταβλητές έστω x, y, z, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ώστε να μεταβούμε σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα.

***1º Βήμα :* Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε μια από τις τρεις εξισώσεις για να λύσουμε ως προς οποιονδήποτε άγνωστο.

***2º Βήμα :* Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή αυτή στις υπόλοιπες δύο εξισώσεις του συστήματος με αποτέλεσμα να μετατραπούν σε γραμμικές εξισώσεις με δύο άγνωστους.

***3º Βήμα :* Επίλυση συστήματος 2×2**
Απλοποιούμε τις δύο νέες εξισώσεις ώστε να τις φέρουμε στην απλή γραμμικλή μορφή και λύνουμε το 2×2 σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο.

***4º Βήμα :* Εύρεση τρίτου αγνώστου**
Όταν βρεθούν οι τιμές των δύο μεταβλητών του 2×2 συστήματος τις αντικαθιστούμε στη σχέση που προέκυψε στο **1º Βήμα** και υπολογίζουμε και τον τρίτο άγνωστο.

***5º Βήμα :* Λύση συστήματος**
Σχηματίζουμε τη λύση του αρχικού συστήματος η οποία θα είναι μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών της μορφής $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 3×3
Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x + 4y - z = 1 \\ x + y - 4z = -3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Επιλέγουμε την 3η εξίσωση προκειμένου να λύσουμε ως προς τη μεταβλητή x οπότε θα έχουμε

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x + 4y - z = 1 \\ x + y - 4z = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 4z - y - 3 \tag{8}$$

Αντικάθιστώντας τη μεταβλητη x απο τη σχέση (8) στις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος προκύπτει

$$\begin{cases} 2(4z - y - 3) - y + 3z = 8 \\ 3(4z - y - 3) + 4y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8z - 2y - 6 - y + 3z = 8 \\ 12z - 3y - 9 + 4y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y + 11z = 14 \\ y + 11z = 10 \end{cases}$$

Η μορφή του συστήματος μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα για να φτάσουμε γρήγορα στη λύση. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\begin{cases} -3y + 11z = 14 \\ \quad y + 11z = 10 \end{cases} \qquad (9)$$
$$\overline{\quad -4y = 4 \quad} \Rightarrow y = -1$$

Από την πρώτη εξίσωση και τη σχέση (9) υπολογίζουμε τον άγνωστο z

$$-3y + 11z = 14 \Rightarrow -3 \cdot (-1) + 11z = 14 \Rightarrow 3 + 11z = 14 \Rightarrow 11z = 11 \Rightarrow z = 1 \qquad (10)$$

Τις τιμές των μεταβλητών y, z από τις σχέσεις (9) και (10) τις αντικαθιστούμε στην ισότητα (8) και υπολογίζουμε τη μεταβλητή x.

$$x = 4z - y - 3 = 4 \cdot 1 - (-1) - 3 = 4 + 1 - 3 = 2$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 7 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Συχνά καλούμαστε να λύσουμε προβλήματα τα οποία μας ζητούν την εύρεση δύο άγνωστων αριθμών, οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ τους. Τότε χρειάζεται η κατασκευή και επίλυση ενός συστήματος ώστε να βρεθούν συγχρόνως και οι δύο άγνωστοι. Για να γίνει αυτό

***1ο Βήμα :* Εντοπισμός αγνώστων**
Εντοπίζουμε τους ζητούμενους άγνωστους αριθμούς του προβλήματος και τους ονομάζουμε χρησιμοποιώντας δύο γράμματα ώστε να σχηματιστούν οι μεταβλητές.

***2ο Βήμα :* Κατασκευή συστήματος**
Με τη βοήθεια των δεδομένων του προβλήματος, αναγνωρίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των δύο αγνώστων και κατασκευάζουμε τις εξισώσεις.

***3ο Βήμα :* Επίλυση συστήματος**
Με τις εξισώσεις αυτές σχηματίζουμε το γραμμικό σύστημα το οποίο και λυνουμε.

***4ο Βήμα :* Λύση συστήματος - Εξέταση περιορισμών**
Αφού βρεθεί η λύση του συστήματος, επαληθεύουμε τη λύση αυτή εξετάζοντας τυχόν περιορισμούς του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
Θέλουμε να μοιράσουμε 210 βιβλία σε 40 πακέτα των 4 και 6 βιβλίων. Πόσα μικρά πακέτα των 4 βιβλίων και πόσα μεγάλα πακέτα των 6 θα χρειαστούμε?

ΛΥΣΗ
Από την εκφώνηση του προβλήματος παρατηρούμε οτι αυτό που ζητάει το πρόβλημα είναι ο αριθμός των μικρών πακέτων, δηλαδή των πακέτων με τα 4 βιβλία, και ο αριθμός των μεγάλων πακέτων, αυτών με τα 6 βιβλία. Έτσι θα πρέπει να κατασκευάσουμε 2 εξισώσεις με 2 άγνωστους αριθμούς και συνδυαζοντας τες να βρούμε μοναδική λύση γι αυτούς. Συμβολίζουμε τους άγνωστους αριθμούς με μεταβλητές :

$$x \ : \ \text{Το πλήθος των μικρών πακέτων με τα 4 βιβλία} \qquad (11)$$
$$y \ : \ \text{Το πλήθος των μεγάλων πακέτων με τα 6 βιβλία} \qquad (12)$$

Κατασκευάζουμε τις 2 εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος.

1ο στοιχείο
Όλα τα πακέτα μαζί θα πρέπει να είναι 40. Άρα η πρόταση αυτή με συμβολισμό θα γραφτεί

$$x + y = 40 \qquad (13)$$

2º στοιχείο
Όλα τα βιβλία είναι 210. Αναλυτικά θα έχουμε :

- Ένα μικρό πακέτο έχει 4 βιβλία οπότε x μικρά πακέτα θα έχουν $4 \cdot x$ βιβλία.
- Ένα μεγάλο πακέτο έχει 6 βιβλία οπότε x μικρά πακέτα θα έχουν $6 \cdot y$ βιβλία.

Επομένως θα ισχύει η ισότητα

$$4x + 6y = 210 \tag{14}$$

Ο συνδυασμός 2 εξισώσεων με 2 άγνωστους ονομάζεται σύστημα. Συνδυάζοντας λοιπόν τις ισότητες (13) και (14) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 4x + 6y = 210 \\ \ \ x + \ \ y = 40 \end{cases} \tag{15}$$

Λύνοντας το σύστημα (15) θα φτάσουμε στο ζητούμενο. Έχουμε λοιπόν με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} 4x + 6y = 210 \\ \ \ x + \ \ y = 40 \end{cases} \Rightarrow x = 40 - y \tag{16}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$4x + 6y = 210 \Rightarrow 4(40 - y) + 6y = 210 \Rightarrow 160 - 4y + 6y = 210 \Rightarrow 2y = 50 \Rightarrow y = 25$$

Βρίκαμε λοιπόν οτι ο αριθμός των μεγάλων πακέτων είναι 25. Άρα από τη σχέση (16) ο αριθμός των μικρών πακέτων θα είναι

$$x = 40 - y = 40 - 25 = 15$$

Έχουμε λοιπόν $(x, y) = (15, 25)$ άρα 15 μικρά και 25 μεγάλα πακέτα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 8 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση-διερεύνηση ενός παραμετρικού συστήματος γίνεται ευκολότερα με τη μέθοδο των οριζουσών.

1º Βήμα : **Υπολογισμός ορίζουσας**
Υπολογίζουμε την ορίζουσα D του συστήματος η οποία θα αποτελεί μια παράσταση που θα περιέχει την παράμετρο.

2º Βήμα : **Περιπτώσεις**
Η ορίζουσα, ως αλγεβρική παράσταση, παίρνει διάφορες τιμές οπότε στο βήμα αυτό εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με τη **Μέθοδο 3**.Η λύση γράφεται με τη βοήθεια της παραμέτρου.
- Αν $D = 0$ τότε τοποθετούμε στο αρχικό σύστημα τις τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν την ορίζουσα και λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα καταλήγουμε σε άπειρες λύσεις για το αόριστο και καμία λύση για το αδύνατο σύστημα που θα προκύψει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Να βρεθούν οι λύσεις του παρακάτω συστήματος για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ (\lambda - 2)x + \lambda y = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος η οποία θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda - 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda - 2) \cdot (-1) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Εξετάζουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις

i. Έστω $D \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$. Τότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση την οποία υπολογίζουμε με τη βοήθεια των τύπων. Έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 \ , \ D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{vmatrix} = \lambda + 2$$

Επομένως οι τιμές των μεταβλητών του συστήματος θα γραφτούν με τη βοήθεια της παραμέτρου ως εξής

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda - 2} = \frac{\lambda + 2}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda - 1} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda - 2} = \frac{\lambda + 2}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

Η λύση λοιπόν του συστήματος θα δίνεται από τον τύπο $(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\lambda-1}\right)$.

ii. Αν $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$. Εδώ διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

- Αν $\lambda = 1$ τότε το αρχικό σύστημα θα πάρει τη μορφή

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι οι εξισώσεις του συστήματος έχουν ίσα πρώτα μέλη ενώ τα δεύτερα τους μέλη είναι άνισα. Οπότε το σύστημα θα είναι αδύνατο άρα δεν έχει καμία λύση.

- Αν $\lambda = -2$ τότε θα προκύψει το σύστημα

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ -4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 1 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

το οποίο παρατηρούμε οτι οι εξισώσεις του συστήματος είναι ίδιες άρα το σύστημα είναι αόριστο οπότε θα έχει άπειρες λύσεις. Για τη μορφή των λύσεων θα έχουμε :

$$-2x - y = 1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

και θέτοντας όπου $x = \kappa$ προκύπτουν οι λύσεις : $(x, y) = (\kappa, -2\kappa - 1)$.