

# Γραμμικά συστήματα

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ■ Γραμμική εξίσωση

1. Για καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις να γραφτούν οι συντελεστές καθώς και ο σταθερός όρος.

α.  $2x + y = 8$

δ.  $y = 9$

β.  $-3x + 7y = -1$

ε.  $\sqrt{2}x + \frac{y}{4} = 1$

γ.  $x = 2$

στ.  $2x = y$

2. Να εξεταστεί αν το σημείο  $A(2, 1)$  ανήκει σε καθεμία από τις παρακάτω ευθείες.

α.  $x - 3y = 4$

δ.  $8x - 7y = 9$

β.  $2x + 3y = 7$

ε.  $y = 3$

γ.  $4x + 2y = 5$

στ.  $x = 2$

3. Να βρεθεί ποιο ή ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία  $x + 4y = 9$ .

α.  $A(2, -3)$

γ.  $A(-3, 3)$

β.  $A(1, 2)$

δ.  $A(0, 2)$

4. Να βρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

α.  $x - 2y = 4$

γ.  $2x - 3y = -6$

β.  $4x - y = 8$

δ.  $7x - 4y = 11$

5. Να βρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

α.  $x = 3$

γ.  $-2x = -7$

β.  $y = 5$

δ.  $2y = 4$

6. Να βρεθεί η μορφή των λύσεων καθεμιάς από τις παρακάτω εξισώσεις.

α.  $x - 2y = 4$

γ.  $x = 7$

β.  $3x + 4y = 7$

δ.  $y = -4$

7. Να σχεδιαστούν οι ακόλουθες ευθείες σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

α.  $x - 3y = 6$

γ.  $x = 5$

β.  $2x - y = -3$

δ.  $y = 3$

### ■ Γραμμικό Σύστημα

8. Για καθένα από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα, να γράψετε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους.

α.  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{1}{5} \\ \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{1}{5} \end{cases}$

β.  $\begin{cases} x - y = 4 \\ 8x + 5y = 0 \end{cases}$

δ.  $\begin{cases} 0,1x + 1,2y = 2 \\ x - 0,4y = 3 \end{cases}$

ε.  $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 4 \\ (\sqrt{5} - 1)x - y = 9 \end{cases}$

9. Για καθένα από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα, να γράψετε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους.

α.  $\begin{cases} x - y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} x = 2y \\ x - y = 2 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

δ.  $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

### ■ Μέθοδος Αντικατάστασης

10. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

α.  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} x = 4 \\ x - y = 9 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 3 \end{cases}$

δ.  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$

11. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

α.  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} x + 4y = -2 \\ 3x - 7y = 13 \end{cases}$

δ.  $\begin{cases} 7x + 2y = 29 \\ 3x - y = 18 \end{cases}$

12. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\alpha. \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -6x + 8y = -2 \end{cases}$$

13. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\alpha. \begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 7 - 2x \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4x - 8y = 5 \end{cases}$$

### ■ Μεθοδος Αντιθετων Συντελεστων

14. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\alpha. \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} -x - y = 4 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases}$$

15. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\alpha. \begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 10 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} 11x - 8y = 27 \\ 5x + 9y = -13 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} 8x + 6y = 28 \\ 7x - 5y = 4 \end{cases}$$

### ■ Μεθοδος Οριζουσων

16. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών.

$$\alpha. \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -2 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x + 5y = 12 \\ 7x + 3y = 20 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} 6x - y = 20 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases}$$

17. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών.

$$\alpha. \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$$

### ■ Γραφικη Επίλυση

18. Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω γραμμικά συστήματα.

$$\alpha. \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 13 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 4y = 8 \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$$

19. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των παρακάτω ευθειών.

$$\alpha. x + 3y = 6 \text{ και } 2x + y = 8$$

$$\beta. 3x + 4y = 5 \text{ και } -x + 5y = 3$$

$$\gamma. 2x - y = 10 \text{ και } 4x - 2y = 7$$

$$\delta. 3x - y = 2 \text{ και } 6x - 2y = 4$$

### ■ Συνθετα Συστηματα

20. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

$$\alpha. \begin{cases} 2(x - 1) + 3(y + 2) = 11 \\ x + 3 - (4 - y) = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3(x + y) - 2y = 1 + x \\ x - 4y + 2 = 3x + 4 \end{cases}$$

21. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

$$\alpha. \begin{cases} 4(x - 3) + 3(y + 2) = 1 \\ 3x - 5 = 2(3 - y) + 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 5(x - y) + 3(2x + y) = 16 \\ 15 - x - y = 3x + 2y - 2 \end{cases}$$

22. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

$$\alpha. \begin{cases} 2(x - 1) - (y - 2) = 9 \\ -(1 - x) + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2(x - 1) + 3(y + 2) = 13 \\ x - (2y - 1) = 2 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} 2(x - 2) + 3(y + 1) = 1 \\ 4x - (2 - y) = 2 \end{cases}$$

23. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο.

$$\text{i.} \begin{cases} (2x-1)(y+1) - (x+4)(2y-3) = 1 \\ (1-x)(3y+1) + (x+2)(3y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\text{ii.} \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{3(y-2)}{4} = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{2-y}{2} = x+y \end{cases}$$

$$\text{iii.} \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{x-y}{3} = 1-2x \\ \frac{3y-x}{4} - \frac{3(y-2x)}{2} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{iv.} \begin{cases} \frac{3x^2-x+1}{3} - \frac{2x^2-y}{2} = -2 \\ \frac{5y^2-x}{5} - \frac{y(3y-2)}{3} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

### ■ Γραμμικά Συστήματα $3 \times 3$

24. Να επιλυθούν τα παρακάτω  $3 \times 3$  γραμμικά συστήματα.

$$\alpha. \begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x-3y-z=3 \\ 2x+y-4z=-3 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x-4y+6z=12 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x-2y+z=4 \\ x-y-z=2 \\ 2x+3y-3z=0 \end{cases}$$

### ■ Σχέσεις οριζουσών

25. Ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με μεταβλητές  $x, y$  έχει μοναδική λύση και οι ορίζουσες  $D, D_x, D_y$  ικανοποιούν τι σχέσεις

$$4D_x - D_y = 2D \quad \text{και} \quad -3D_x + 5D_y = 7D$$

Να βρείτε τη λύση  $(x, y)$  του συστήματος.

26. Οι ορίζουσες  $D, D_x, D_y$  ενός  $2 \times 2$  γραμμικού συστήματος με μεταβλητές  $x, y$  ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{cases} D - 2D_x - 2D_y = -6 \\ 4D - 3D_x - 2D_y = -1 \\ 2D + 3D_x - D_y = -4 \end{cases}$$

Να βρεθεί η λύση  $(x, y)$  του  $2 \times 2$  γραμμικού συστήματος.

### ■ Προβλήματα

27. Ένα ξενοδοχείο έχει 45 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα. Συνολικά τα κρεβάτια είναι 110. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια.

28. Ένας μαθητής έχει στο πορτοφόλι του 15 χαρτονομίσματα. Κάποια είναι των 5€ και κάποια των 10€. Με τα χρήματα αυτά αγοράζει ένα κινητό τηλέφωνο αξίας 112€ και παίρνει ρέστα 8€. Πόσα χαρτονομίσματα είναι των 5€ και πόσα των 10€.

29. Μια εταιρία κινητής τηλεφωνίας έχει τις εξής χρεώσεις : 0,07€/σμς και 0,09€/1' ομιλίας. Ένας συνδρομητής, με μια κάρτα των 10€ ξόδεψε συνολικά 120 λεπτά και μηνύματα. Πόσα ήταν τα λεπτά ομιλίας και πόσα τα μηνύματα.

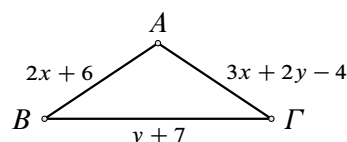
30. Ένας πατέρας είναι 32 χρόνια μεγαλύτερος από το γιο του. Σε 8 χρόνια ο πατέρας θα έχει τα 3πλάσια χρόνια από το γιο του. Ποια είναι η ηλικία του πατέρα και του γιου.

31. Σε ένα κουτί υπάρχουν κόκκινες και πράσινες μπάλες. Αν προσθέσουμε στο κουτί 3 κόκκινες μπάλες, οι πράσινες θα είναι διπλάσιες από τις κόκκινες ενώ αν προσθέσουμε 4 πράσινες τότε, κόκκινες και πράσινες θα είναι ίσες. Πόσες μπάλες από το κάθε χρώμα υπάρχουν.

32. Σε μια φάρμα ζουν 80 σε πλήθος κότες και αγελάδες. Αν όλα τα ζώα έχουν συνολικά 260 πόδια να βρεθούν πόσες κότες και πόσες αγελάδες ζουν στη φάρμα.

33. Σε ένα ορθογώνιο, το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους ενώ η περίμετρος είναι ίση με το μήκος αυξημένο κατά 12 μέτρα. Να βρεθούν οι πλευρές του ορθογωνίου.

34. Η περίμετρος του τριγώνου του παρακάτω σχήματος είναι 38 εκατοστά. Να βρεθούν πραγματικοί οι αριθμοί  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές.



### ■ Παραμετρικά Συστήματα - Εύρεση παραμέτρου

35. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία  $\lambda x + (\lambda - 1)y = 4$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$ .

36. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία  $(\lambda^2 - 1)x + (1 - \lambda)y = 2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1, 3)$ .

37. Αν γνωρίζουμε ότι το σημείο  $A(3\lambda - 1, 4 - \lambda)$  ανήκει στην ευθεία  $2x + 3y = 1$  τότε να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

38. Δίνεται το παρακάτω παραμετρικό σύστημα με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 2)y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda - 1 \end{cases}$$

α. Να βρεθούν οι ορίζουσες  $D, D_x, D_y$  του συστήματος με τη βοήθεια της παραμέτρου  $\lambda$ .

β. Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου το σύστημα έχει μοναδική λύση.

γ. Για ποια τιμή της παραμέτρου το σύστημα είναι αδύνατο και για ποια αδύνατο.

39. Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α. 
$$\begin{cases} 2\lambda x + (\lambda + 3)y = 2 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

β. 
$$\begin{cases} x + \lambda y = 2 - \lambda \\ \lambda x + y = \lambda \end{cases}$$

40. Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α. 
$$\begin{cases} (\lambda^2 + 1)x - y = 2 \\ 2\lambda x + y = 4 \end{cases}$$

β. 
$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - 3y = \lambda + 2 \\ \lambda x + (\lambda - 2)y = 1 \end{cases}$$

γ. 
$$\begin{cases} \lambda^2 x + 4y = 2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y = \lambda - 1 \end{cases}$$

41. Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α. 
$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 3)y = -1 \\ 2x + (\lambda - 3)y = 1 \end{cases}$$

β. 
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - 3y = -1 \\ x + (\lambda - 3)y = 1 \end{cases}$$

42. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = ax^2 + (2a - \beta)x + \beta^2 - 3a + 1$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A()$  και  $B()$ . Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

43. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής  $y = ax^2 + \beta x + \gamma$  η οποία διέρχεται από τα σημεία

α.  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, 0)$  και  $\Gamma(1, -2)$

β.  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 3)$  και  $\Gamma(0, -2)$

γ.  $A(-4, 3)$ ,  $B(1, 2)$  και  $\Gamma(0, 1)$

δ.  $A(-2, 4)$ ,  $B(3, 9)$  και  $\Gamma(1, 1)$