Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

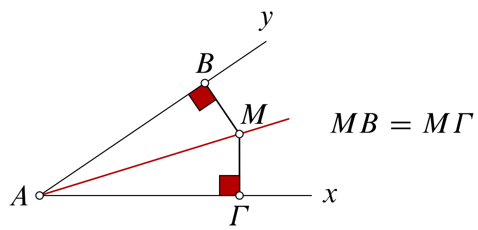
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

6 Σεπτεμβρίου 2016

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μαθηματικά

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Αλγεβρικές Παραστάσεις

1.1 Φυσικοί Αριθμοί - Διάταξη - Στρογγυλοποίηση

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Φυσικοί ονομάζονται οι αριθμοί από το 0 εως το άπειρο όπου κάθε αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο.

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Ορισμός 1.2 : ΑΡΤΙΟΙ - ΠΕΡΙΤΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Άρτιοι ή ζυγοί ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 ενώ περιττοί ή μονοί όσοι δεν διαιρούνται με το 2.

- Το τελευταίο ψηφίο κάθε άρτιου αριθμού είναι ένα από τα $0, 2, 4, 6, 8$.
- Ένας περιττός αριθμός τελείώνει σε ένα από τα ψηφία $1, 3, 5, 7, 9$.

Ορισμός 1.3 : ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ
Δεκαδικό ονομάζεται το σύστημα αρίθμησης στο οποίο κάθε αριθμός σχηματίζεται με τη χρήση των δέκα συμβόλων - ψηφίων : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ τοποθετημένα διαδοχικά το ένα μετά το άλλο. Καθένα απ' αυτά έχει διαφορετική αξία ανάλογα με το πλήθος των μονάδων που εκφράζει. Στο δεκαδικό σύστημα έχουμε σαν βάση τον αριθμό δέκα.

Ψηφία Ακέραιου Αριθμού

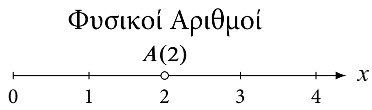
Δεκαδική Τάξη	Εκατομμύρια	Εκατοντάδες Χιλιάδες	Δεκάδες Χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
Συμβ.	Εκ	ΕΧ	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
Αξία	1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1

- Κάθε αριθμός έχει διαφορετική αξία ανάλογα με τη θέση και την αξία των ψηφίων που τον αποτελούν.
- Σε κάθε αριθμό η θέση κάθε ψηφίου καθορίζει την αξία του. Η θέση αυτή ονομάζεται **δεκαδική θέση**.
- Η αξία των δεκαδικών θέσεων αυξάνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά.
- Κάθε δεκαδική θεση έχει αξία δεκαπλάσια της προηγούμενης.

Ορισμός 1.4 : ΔΙΑΤΑΞΗ
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών με την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο ή αντίστροφα. Τα σύμβολα διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι:

$$< : \text{μικρότερο} \ , \ > : \text{μεγαλύτερο} \ , \ \leq \text{μικρότερο ίσο} \ , \ \geq \text{μεγαλύτερο ισο}$$

Ορισμός 1.5 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Ο άξονας των φυσικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ημιευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά.



- **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.
- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

Ορισμός 1.6 : ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ
Στρογγυλοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία αντικαθιστούμε έναν αριθμό με έναν άλλον ο οποίος είναι μια πιο **απλή** προσέγγισή του. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται σε οποιοδήποτε ψηφίο του, το οποίο ονομάζεται **τάξη στρογγυλοποίησης**.

1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλ/μος φυσικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

Πράξη	Όροι	Αποτέλεσμα	Συμβολισμός
Πρόσθεση	Προσθετέοι	Άθροισμα	$a+\beta$
Αφαίρεση	Μειωτέος - Αφαιρετέος	Διαφορά	$a-\beta$
Πολλαπλασιασμός	Παράγοντες	Γινόμενο	$a\cdot\beta$

1. **Πρόσθεση**
   Πρόσθεση ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αριθμούς $a,\beta\in\mathbb{R}$ να υπολογίσουμε τον αριθμό $a+\beta$ που ονομάζεται **άθροισμα**.
2. **Πολλαπλασιασμόσ**
   Πολλαπλασιασμός ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αριθμούς a,β να υπολογίσουμε τον αριθμό $a\cdot\beta$ που ονομάζεται **γινόμενο**.
3. **Αφαίρεση - Διαίρεση**
   Αφαίρεση ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αριθμούς a και β να υπολογίσουμε τον αριθμό $a-\beta$ η τον $\beta-a$ ο οποίος ονομάζεται **διαφορά**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Επιμεριστική	$\alpha\cdot(\beta\pm\gamma)=\alpha\cdot\beta\pm\alpha\cdot\gamma$	

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.8 : ΔΥΝΑΜΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός φυσικού αριθμού α ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με α^ν όπου ν είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}=\alpha^\nu$$

- Ο αριθμός ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.
- Η δύναμη α^2 ονομάζεται και ***α* στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη α^3 ονομάζεται και ***α* στον κύβο**.

Ορισμός 1.9 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Αριθμητική ονομάζεται κλαθε παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών. Η προτεραιότητα των πράξεω σε μια αριθμητική παράσταση είναι η εξής:

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις
3. Προσθέσεις και αφαιρέσεις

Οι πράξεις εκτελούνται με τη σειρά αυτή πρώτα μέσα στις παρενθέσεις και ύστερα έξω απ' αυτές.

1.4 Ευκλείδεια Διαίρεση

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.10 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαίρεση δύο αριθμών $\varDelta$ (**Διαιρετέος**) και δ (**διαιρέτης**) από την οποία προκύπτουν φυσικοί αριθμοί π (**πηλίκο**) που είναι το απότέλεσμα της διαίρεσης και υ (**υπόλοιπο**).

- Οι φυσικοί αριθμοί $\varDelta,\delta,\pi,\upsilon$ ικανοποιούν την ισότητα $\varDelta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ η οποία ονομάζεται **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Αν σε μια διαίρεση το υπόλοιπο είναι 0 τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** και ισχύει : $\varDelta=\delta\cdot\pi\ ,\ \upsilon=0$. Η τέλεια διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.
- Για να είναι μια διαίρεση Ευκλείδεια θα πρέπει να ισχύει $\upsilon<\delta$.

- Αν $\Delta = \delta$ τότε $\pi = 1$.
- Αν $\delta = 1$ τότε $\pi = \Delta$.
- Αν $\Delta = 0$ τότε $\pi = 0$.
- Αν $\delta = 0$ η διαίρεση δεν ορίζεται.

1.5 Διαιρετότητα - Μ.Κ.Δ - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.11 : ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ
Πολλαπλάσιο ενός αριθμού a ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που προκύπτει από πολλαπλασιασμό του a με οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. :

$$\beta \text{ πολλαπλάσιο του } a \rightarrow \beta = \nu \cdot a$$

Ένας αριθμός a λέμε ότι **διαιρεί** έναν αριθμό β όταν ο β είναι πολλαπλάσιο του a. Όταν συμβαίνει αυτό, η διαίρεση $\beta : a$ δίνει υπόλοιπο 0.

Ορισμός 1.12 : ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ
Διαιρέτης ενός φυσικού αριθμου a ονομάζεται ένας φυσικός αριθμός β ο οποίος εαν διαιρεθεί με τον a αφήνει υπόλοιπο 0.

Ορισμός 1.13 : Ε.Κ.Π.
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο τους. Συμβολίζεται

$$E.K.\Pi.(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$$

Ορισμός 1.14 : Μ.Κ.Δ.
Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.Συμβολίζεται

$$M.K.\Delta.(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$$

Ορισμός 1.15 : ΠΡΩΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Πρώτος ονομάζεται ένας αριθμός που διαιρείται **μόνο** με τον εαυτό του και το 1. Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός λέγεται **σύνθετος**.

Ορισμός 1.16 : ΠΡΩΤΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ
Πρώτοι μεταξύ τους ονομάζονται δύο φυσικοί αριθμοί a, β των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι η μονάδα :

$$M.K.\Delta.\,(a, \beta) = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.2 : ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ - ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ
Έστω δύο φυσικοί αριθμοί a, β.

i. Κάθε αριθμός a διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
ii. Αν ένας αριθμός a διαιρείται από έναν άλλον αριθμό β, τότε είναι πολλαπλάσιό του β.
iii. Αν ένας αριθμός a διαιρεί έναν άλλον αριθμό β, τότε διαρεί και τα πολλαπλάσια του β.

Θεώρημα 1.3 : ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ
Οι παρακάτω κανόνες μας επιτρέπουν να εξετάζουμε πότε ένας αριθμός διαιρείται με καθέναν από τους βασικούς διαιρέτες που φαίνονται στον πίνακα.

Κανόνας	Περιγραφή
Κανόνας του 2	Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι ένα από τα 0,2,4,6,8.
Κανόνας του 5	Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.
Κανόνας του 10	Ένας αριθμός διαιρείται με το 10 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0.
Κανόνας του 3 (ή του 9)	Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 (με το 9) αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3 (του 9).
Κανόνας του 4 (ή του 25)	Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 (το 25) αν το τελευταίο διψήφιο μέρος του είναι πολλαπλάσιο του 4 (του 25).

Θεώρημα 1.4 : Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ.
Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ φυσικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

i. Το Ε.Κ.Π. των αριθμών αυτών ισούται με το γινόμενο **όλων** των παραγόντων, υψωμένο τον καθένα στο **μεγαλύτερο** εκθέτη.
ii. Ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών ισούται με το γινόμενο **μόνο των κοινών** παραγόντων, υψωμένο τον καθένα στο **μικρότερο** εκθέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Κλάσματα

2.1 Η έννοια του κλάσματος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΚΛΑΣΜΑ
Κλάσμα ονομάζεται ένας αριθμός της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι φυσικοί αριθμοί. Εκφράζει τα α μερη μιας ποσότητας που έχει μοιραστεί σε β κομμάτια.

- Με το κλάσμα εκφράζουμε ένα μέρος μιας ποσότητας.
- Ο αριθμός α ονομάζεται **αριθμητής** ενώ ο β **παρονομαστής** του κλάσματος. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **όροι** του κλάσματος.
- Το κλάσμα σαν πράξη είναι διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή.
- Ο παρονομαστής του κλάσματος δεν πρέπει να είναι 0 : $\beta \neq 0$.
- Τα σύμβολα των πράξεων $(+, -, \cdot, :)$ μεταξύ κλασμάτων σε μια αριθμητική παράσταση καθώς και τα σύμβολα σχέσεων $(=, >, <)$ γράφονται στην ίδια ευθεία με τη γραμμή κλάσματος.
- Το κλάσμα το οποίο έχει αριθμητή τον αριθμό 1 ονομάζεται **κλασματική μονάδα**: $\frac{1}{\nu}$.

2.2 Ισοδύναμα Κλάσματα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.2 : ΙΣΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ
Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που εκφράζουν ίσα μέρη μιας ποσότητας ή ίσων ποσοτήτων.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Ορισμός 2.3 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ
Απλοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία, ένα κλάσμα το μετατρέπουμε σε ένα ισοδύναμό του με μικρότερους όρους, διαιρώντας τους αρχικούς με το Μ.Κ.Δ. τους.

Ορισμός 2.4 : ΑΝΑΓΩΓΟ ΚΛΑΣΜΑ
Ανάγωγο ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο δεν απλοποιείται. Ο Μ.Κ.Δ. αριθμητή και παρονομαστή ενός ανάγωγου κλάσματος είναι το 1.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \text{ανάγωγο} \Leftrightarrow M.K.\varDelta.(\alpha, \beta) = 1$$

Ορισμός 2.5 : ΟΜΩΝΥΜΑ - ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ
Ομώνυμα ονομάζονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ενώ ετερώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα με διαφορετικούς παρονομαστές.

$$\text{Ομώνυμα : } \frac{a}{\gamma} \ , \ \frac{\beta}{\gamma} \qquad \text{Ετερώνυμα : } \frac{a}{\beta} \ , \ \frac{\gamma}{\delta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ
Δύο κλάσματα είναι ίσα αν και μόνο αν τα «χιαστί» γινομενά τους είναι ίσα.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \ \ , \ \ \beta, \delta \neq 0$$

Θεώρημα 2.2 : ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΛΑΣΜΑ
Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό.

2.3 Σύγκριση κλασμάτων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.3 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟ 1
Για τη σύγκριση ενός κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με τον αριθμό 1 ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες :

i. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.
ii. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.
iii. Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

$$a > \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} > 1 \qquad a < \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} < 1 \qquad a = \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} = 1$$

Θεώρημα 2.4 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ
Στο θεώρημα αυτό βλέπουμε τρεις κανόνες που αφορούν τη σύγκριση κλασμάτων μεταξύ τους :

i. Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο αριθμητή.
ii. Αν δύο κλάσματα έχουν κοινό αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

$$a > \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \ \ , \ \ \gamma \neq 0 \qquad a > \beta \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} < \frac{\gamma}{\beta} \ \ , \ \ a, \beta, \gamma \neq 0$$

iii. Για να συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα οπότε τα συγκρίνουμε όπως στην πρώτη περίπτωση.

2.4 Πρόσθεση - Αφαίρεση κλασμάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.6 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ - ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

i. Άθροισμα δύο ή περισσότερων ομόνυμων κλασμάτων ονομάζεται το κλάσμα που είναι ομόνυμο μ' αυτά και έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών τους.

ii. Άθροισμα δύο ομόνυμων κλασμάτων ονομάζεται το κλάσμα που είναι ομόνυμο μ' αυτά και έχει αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών τους.

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a+\beta}{\gamma} \quad , \quad \frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a-\beta}{\gamma}$$

Ορισμός 2.7 : ΜΕΙΚΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Μεικτός ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος είναι άθροισμα ενός ακεραίου και ενός κλάσματος μικρότερου της μονάδας.

$$\text{Μεικτός} : a + \frac{\beta}{\gamma} = a\frac{\beta}{\gamma} \quad , \quad \frac{\beta}{\gamma} < 1$$

Το άθροισμα αυτό μετατρέπεται σε μεικτό παραλείποντας το σύμβολο της πρόσθεσης.

2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.8 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Γινόμενο δύο κλασμάτων ονομάζεται το κλάσμα με αριθμητή, το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή, το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Το γινόμενο ενός κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με ένα φυσικό αριθμό λ ισούται με $\lambda \cdot \frac{a}{\beta}$.

Ορισμός 2.9 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αντίστροφοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα.

- Το αντίστροφο ενός κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ είναι το $\frac{\beta}{a}$.
- Ο αντίστροφος ενός φυσικού αριθμού λ είναι $\frac{1}{\lambda}$.

2.6 Διαίρεση κλασμάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.10 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ
Το πηλίκο δύο κλασμάτων ισούται με το γινόμενο του διαιρετέου επί το αντίστροφο κλάσμα του διαιρέτη.

$$\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Ορισμός 2.11 : ΣΥΝΘΕΤΟ ΚΛΑΣΜΑ
Σύνθετο ονομάζεται ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον από τους δύο όρους του είναι κλάσμα.

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} \quad , \quad \frac{a}{\frac{\beta}{\gamma}} \quad , \quad \frac{\frac{a}{\beta}}{\gamma}$$

Σε κάθε σύνθετο κλάσμα, η κύρια κλασματική γραμμή σχεδιάζεται μεγαλύτερη από αυτές των απλών κλασμάτων, ώστε να διακρίνονται οι όροι του καθώς και ποιοί από αυτούς είναι κλάσματα ή ακέραιοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Δεκαδικοί αριθμοί

3.1 Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Δεκαδικός ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος αποτελείται από ακέραιο και δεκαδικό μέρος χωρισμένα με ένα κόμμα που ονομάζεται υποδιαστολή.

- **Ακέραιο** μέρος ονομάζεται το μέρος ενός δεκαδικού αριθμού το οποίο αποτελείται από εκείνα τα ψηφία τα οποία βρίσκονται αριστερά από την υποδιαστολή.
- **Δεκαδικό** ονομάζεται το μέρος ενός δεκαδικού αριθμού που βρίσκεται δεξιά από την υποδιαστολή και αποτελείται από τα ψηφία που είναι υποπολλαπλάσια της μονάδας.
- Τα ψηφία αυτά προκύπτουν από διαιρέσεις τις μονάδας με δυνάμεις του 10 και ονομάζονται από τα από τα δεκαδικά κλάσματα με την αντίστοιχη δύναμη του 10.
- Τα μηδενικά τα οποία βρίσκονται στο τέλος του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού δε δίνουν αξία στον αριθμό και μπορούν να παραλείπονται.

Μέρος	**Ακέραιο Μέρος**								**Δεκαδικό Μέρος**		
Όνομα Ψηφίου	Εκατομμύρια	Εκατοντάδες Χιλιάδες	Δεκάδες Χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
Συμβ.	Εκ	ΕΧ	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ	,	δεκ	εκ	χιλ
Αξία	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Ορισμός 3.2 : ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ
Δεκαδικό ονομάζεται το κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10: $\frac{a}{10^\nu}$.

3.2 Μονάδες μέτρησης

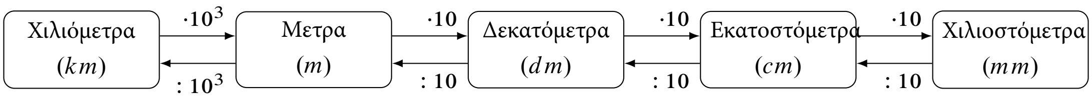
ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.3 : ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
Μονάδες μέτρησης ονομάζονται τα μεγέθη - ποσότητες τα οποία χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση άλλων όμοιών τους ποσοτήτων.
Τα κυριότερα ποσά που συναντάμε είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, και άλλα. Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται μερικά απ’ αυτά.

ΜΗΚΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Χιλιόμετρο	$1km$	$1km = 1000m$
Μέτρο	$1m$	$1m = 10dm = 100cm = 1000mm$
Δεκατόμετρο	$1dm$	$\frac{1}{10}m = 1dm = 10cm = 100mm$
Εκατοστόμετρο	$1cm$	$\frac{1}{100}m = \frac{1}{10}dm = 1cm = 10mm$
Χιλιοστόμετρο	$1mm$	$\frac{1}{1000}m = \frac{1}{100}dm = \frac{1}{10}cm = 1mm$

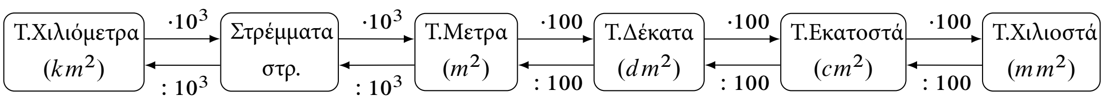
Στο διάγραμμα φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη :



ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τ.Χιλιόμετρο	$1km^2$	$1km^2 = 1000$ στρέμματα $= 10^6m^2$
Στρέμμα	1 στρέμμα	$\frac{1}{1000}km^2 = 1$ στρέμμα $= 1000m^2$
Τ.Μέτρο	$1m^2$	$1m^2 = 100dm^2 = 10^4cm^2 = 10^6mm^2$
Τ.Δεκατόμετρο	$1dm^2$	$\frac{1}{100}m^2 = 1dm^2 = 100cm^2 = 10^4mm^2$
Τ.Εκατοστόμετρο	$1cm^2$	$\frac{1}{10^4}m^2 = \frac{1}{100}dm^2 = 1cm^2 = 100mm^2$
Τ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^2$	$\frac{1}{10^6}m^2 = \frac{1}{10^4}dm^2 = \frac{1}{100}cm^2 = 1mm^2$

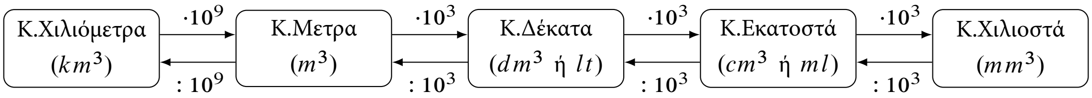
Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από μια μονάδα μέτρησης σε άλλη φαίνονται στο διάγραμμα :



ΟΓΚΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Κ.Χιλιόμετρο	$1km^3$	$1km^3 = 10^9m^3$
Κ.Μέτρο	$1m^3$	$1m^3 = 1000dm^3 = 10^6cm^3 = 10^9mm^3$
Κ.Δεκατόμετρο	$1dm^3$	$\frac{1}{1000}m^3 = 1dm^2 = 1000cm^3 = 10^6mm^3$
Κ.Εκατοστόμετρο	$1cm^3$	$\frac{1}{10^6}m^3 = \frac{1}{1000}dm^3 = 1cm^3 = 1000mm^3$
Κ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^3$	$\frac{1}{10^9}m^3 = \frac{1}{10^6}dm^3 = \frac{1}{1000}cm^3 = 1mm^3$

Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη φαίνονται στο διάγραμμα

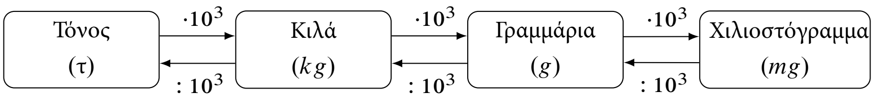


Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) ονομάζεται και **λίτρο** και συμβολίζεται : $1lt$ ενώ το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) ονομάζεται και **χιλιοστόλιτρο** και συμβολίζεται : $1ml$.

ΜΑΖΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τόνος	1τ	$1\tau = 1000kg = 10^6 g = 10^9 mg$
Κιλό	$1kg$	$\frac{1}{1000}\tau = 1kg = 1000g = 10^6 mg$
Γραμμάριο	$1dm^3$	$\frac{1}{10^6}\tau = \frac{1}{1000}kg = 1g = 1000mg$
Χιλιοστόγραμμο	$1cm^3$	$\frac{1}{10^9}\tau = \frac{1}{10^6}kg = \frac{1}{1000}g = 1mg$

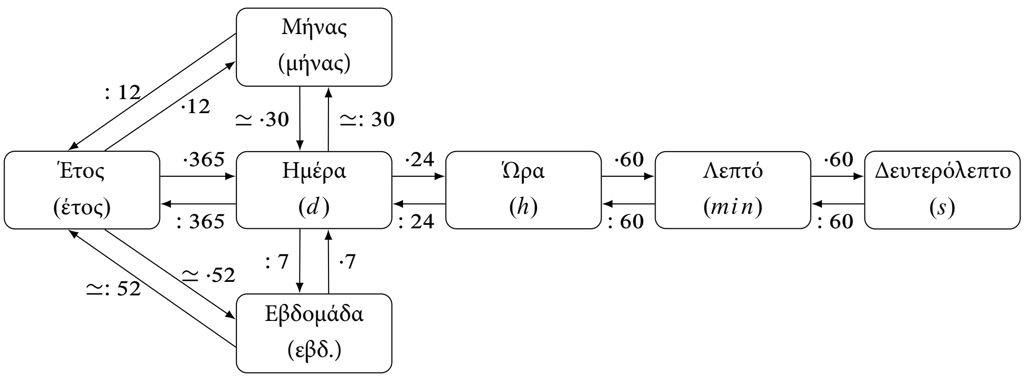
Στο διάγραμμα φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης μάζας και ο τρόπος μετατροπής ενός μεγέθους από τη μία στην άλλη :



ΧΡΟΝΟΣ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Έτος	1 έτος	1 έτος $=$ 12 μήνες $\simeq$ 52 εβδομάδες $= 365d$
Μήνας	1 μήνας	1 μήνας $\simeq 30d$
Εβδομάδα	1 εβδομάδα	1 εβδομάδα $= 7d = 168h$
Ημέρα	$1d$	$1d = 24h = 1440min = 86400s$
Ώρα	$1h$	$1h = 60min = 3600s$
Λεπτό	$1min$	$\frac{1}{60}h = 1min = 60s$
Δευτερόλεπτο	$1s$	$\frac{1}{3600}h = \frac{1}{60}min = 1s$

Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης χρόνου :



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Εξισώσεις

4.1 Εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.

$$1^{\text{ο}} \text{ Μέλος} = 2^{\text{ο}} \text{ Μέλος}$$

- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εαν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εαν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα είδη των εξισώσεων ως προς την πράξη, καθώς και τη λύση τους.

Πράξη	Εξίσωση	Λύση
Πρόσθεση	$x + a = \beta$	$x = \beta - a$
Αφαίρεση	$x - a = \beta$	$x = a + \beta$
	$a - x = \beta$	$x = a - \beta$
Πολλαπλασιασμός	$x \cdot a = \beta$	$x = \frac{\beta}{a}$
Διαίρεση	$x : a = \beta$	$x = a \cdot \beta$
	$a : x = \beta$	$x = \frac{a}{\beta}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Ποσοστά

5.1 Ποσοστά

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.1 : ΠΟΣΟΣΤΟ
Ποσοστό ονομάζεται ο λόγος ο οποίος εκφράζει μέρος μιας ποσότητας.

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Μέρος μιας Ποσότητας}}{\text{Ολόκληρη Ποσότητα}}$$

Ορισμός 5.2 : ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΤΟΙΣ 100
Ποσοστό επί τις 100 ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή το 100.

$$\text{Ποσοστό τοις 100} : \frac{a}{100} = a\%$$

- Συμβολίζεται με $a\%$ όπου a ο αριθμητής του κλάσματος.
- Το ποσοστό τις χιλίοις είναι το κλάσμα $\frac{a}{1000}$ και συμβολίζεται με $a‰$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

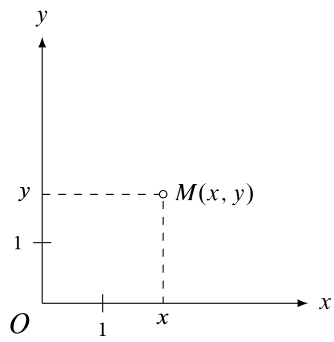
Θεώρημα 5.1 : ΠΟΣΟΣΤΟ ΜΙΑΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ
Το ποσοστό $a\%$ μιας ποσότητας β ισούται με $a\% \cdot \beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Αναλογίες

6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.1 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους ημιάξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.



- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με Ox.
- Ο κατακόρυφος άξονας λέγεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με Oy.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.

6.2 Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.2 : ΛΟΓΟΣ ΜΕΓΕΘΩΝ
Λόγος δύο μεγεθών a, β με την ίδια μονάδα μέτρησης ονομάζεται το πηλίκο των μέτρων των μεγεθων αυτών.

$$\text{Λόγος} : \lambda = \frac{a}{\beta}$$

Ορισμός 6.3 : ΑΝΑΛΟΓΙΑ
Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Ορισμός 6.4 : ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ
Όμοια ονομάζονται δύο σχήματα αν το ένα αποτελεί μεγένθυση ή σμίκρυνση του άλλου.

Ορισμός 6.5 : ΚΛΙΜΑΚΑ
Κλίμακα ονομάζεται ο λόγος της απόστασης δύο σημείων στην εικόνα ενός αντικειμένου, προς την πραγματική απόσταση των σημείων αυτών.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

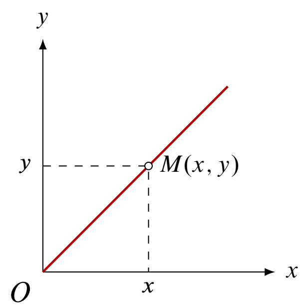
Θεώρημα 6.1 : ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ
Για κάθε αναλογία $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ισχύει η σχέση $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

6.3 Ανάλογα ποσά

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.6 : ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ
Ανάλογα ονομάζονται δύο ποσά x, y όταν ο λόγος των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερός.

- Για τα ανάλογα ποσά αυτά ισχύει η σχέση $\frac{y}{x} = a$ όπου ο σταθερός αριθμός a ονομάζεται **συντελεστής αναλογίας**.
- Ισχύει η ισοδυναμία $\frac{y}{x} = a \Leftrightarrow y = a \cdot x$ που μας δίνει τη σχέση που συνδέει τα ανάλογα ποσά.
- Εαν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, θα πολλαπλασιαστούν οι τιμές του άλλου με τον **ίδιο** αριθμό.
- Τα σημεία (x, y) όπου x, y είναι ποσά ανάλογα, σχηματίζουν ημιευθεία που ξεκινά από την αρχή των ημιαξόνων.

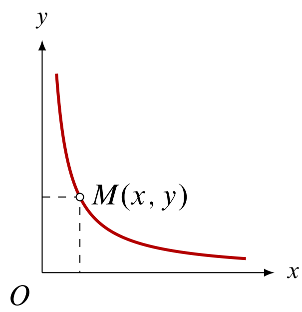


6.4 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.7 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ
Αντιστρόφως ανάλογα ονομάζονται δύο ποσά x, y τα οποία έχουν σταθερό γινόμενο τιμών.

- Για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά ισχύει η σχέση $y \cdot x = a$.
- Εαν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, θα **διαιρεθούν** οι τιμές του άλλου με τον **ίδιο** αριθμό.
- Τα σημεία (x, y) όπου x, y είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, σχηματίζουν μια καμπύλη που ονομάζεται **υπερβολή**.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

7.1 Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 7.1 : ΘΕΤΙΚΟΣ - ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ - ΠΡΟΣΗΜΑ
Θετικός ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι μεγαλύτερος του μηδενός ενώ αρνητικός ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι μικρότερος του μηδενός.

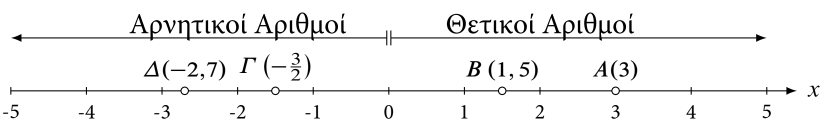
- Τα σύμβολα $+$ και $-$ τα οποία χρησιμοποιούμε για να δείξουμε αν κάποιος αριθμός είναι θετικός ή αρνητικός ονομάζονται **πρόσημα**.
- Ο αριθμός 0 δεν έχει πρόσημο.

Ορισμός 7.2 : ΟΜΟΣΗΜΟΙ - ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Ομόσημοι ονομάζονται δύο ή περισσότεροι αριθμοί οι οποίοι έχουν το ίδιο πρόσημο. Ετερόσημοι ονομάζονται δύο αριθμοί με διαφορετικά πρόσημα.

Ορισμός 7.3 : ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Ακέραιοι ονομάζονται οι αριθμοί $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Ορισμός 7.4 : ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Ρητοί ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι μπορούν να γραφτούν στη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους. Τέτοιοι είναι οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί και τα κλάσματα.

Ορισμός 7.5 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Ο άξονας των ρητών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι ρητοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο O στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.



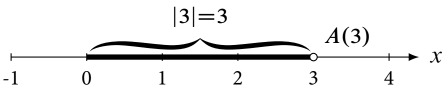
- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.
- Δεξιά του O βρίσκονται οι θετικοί αριθμοί ενώ αριστερά οι αρνητικοί.

7.2 Απόλυτη τιμή αριθμού - Αντίθετοι αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 7.6 : ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Αν a ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός στον άξονα των πραγματικών αριθμών, θα ονομάζουμε **απόλυτη τιμή του** a και θα συμβολίζουμε με $|a|$ την απόστασή του απο το 0.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ a \geq 0 \\ -a \ , \ a < 0 \end{cases}$$



- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ίση με τον αντίστοιχο θετικό αριθμό.
- Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι 0.

Ορισμός 7.7 : ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί οι οποίοι έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικά πρόσημα.

- Ο αντίθετος ενός θετικού αριθμού είναι αρνητικός.
- Ο αντίθετος ενός αρνητικού αριθμού είναι θετικός.
- Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίθετο.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.1 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι ακόλουθοι κανόνες μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε ρητούς αριθμούς μεταξύ τους.

i. Ανάμεσα σε δύο θετικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι εκείνος με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
ii. Ανάμεσα σε δύο αρνητικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι εκείνος με τη μικρότερη απόλυτη τιμή.
iii. Οποιοσδήποτε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από οποιονδήποτε αρνητικό.
iv. Ο αριθμός 0 είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό και μικρότερος από κάθε θετικό αριθμό.

7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.2 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι κανόνες με τους οποίους προσθέτουμε ρητούς αριθμούς είναι οι εξής:

i. Το άθροισμα δύο ομόσημων αριθμών ισούται με το άθροισμα των απόλυτων τιμών τους και έχει το ίδιο πρόσημο με τους προσθετέους.
ii. Το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών ισούται με το διαφορά των απόλυτων τιμών τους και έχει το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Θεώρημα 7.3 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$
Αντίθετοι αριθμοί	$a+(-a)=0$

7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.4 : ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Η διαφορά δύο ρητών αριθμών a και β ισούται με το άθροισμα του a με τον αντίθετο του β.

$$a-\beta=a+(-\beta)$$

Θεώρημα 7.5 : ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ
Οι ακόλουθοι κανόνες μας δείχνουν τον τρόπο με τον οποίον απαλοίφουμε τις παρενθέσεις σε μια παράσταση.

i. Αν μια παρένθεση έχει απ’ έξω το πρόσημο $+$ τότε διώχνουμε την παρένθεση μαζί με το $+$ και οι αριθμοί που βρίσκονται μέσα παραμένουν όπως είναι.

ii. Αν μια παρένθεση έχει απ’ έξω το πρόσημο $-$ τότε διώχνουμε την παρένθεση μαζί με το $-$ ενώ αλλάζουμε τα πρόσημα των αριθμών που βρίσκονται μέσα.

7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.6 : ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι κανονες του γινομένου δύο η περισσότερων αριθμών είναι οι εξής:

i. Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο ή περισσότερων αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους.

ii. Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικό.

iii. Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικό.

Θεώρημα 7.7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$
Προσεταιριστική	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a \cdot 1 = a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Επιμεριστική	$a \cdot (\beta \pm \gamma) = a \cdot \beta \pm a \cdot \gamma$

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a \cdot 0 = 0$
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

7.6 Δισίρεση ρητών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.8 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι κανονες της διαίρεσης δύο αριθμών είναι οι εξής:

i. Το πηλίκο δύο αριθμών ισούται με το γινόμενο του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{a}{\beta} = a \cdot \frac{1}{\beta}$$

ii. Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών τους.
iii. Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικό.
iv. Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικό.
v. Η διαίρεση οποιουδήποτε αριθμού με το 0 δεν ορίζεται.

7.7 Δυνάμεις ρητών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 7.8 : ΔΥΝΑΜΗ ΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός ρητού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

Ο ρητού αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο φυσικός αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.9 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δυναμη με βάση έναν ρητό αριθμό a ορίζουμε

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \ \text{όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \ \text{όπου } a \neq 0$$

Επίσης για δυνάμεις με βάσεις οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς a, β και φυσικούς εκθέτες ν, μ εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \ , \ \beta \neq 0$
Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$
Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu \ , \ a, \beta \neq 0$

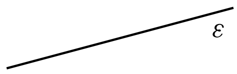
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
Βασικές γεωμετρικές έννοιες

8.1 Σημείο - Ευθεία - Ημιευθεία - Ευθύγραμμο τμήμα - Επίπεδο - Ημιεπίπεδο

ΟΡΙΣΜΟΙ

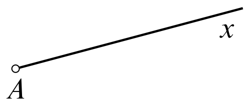
Ορισμός 8.1 : ΣΗΜΕΙΟ
Σημείο ονομάζεται το σχήμα που δηλώνει θέση στο επίπεδο η στο χώρο. Παριστάνεται με τελεία, δεν έχει διαστάσεις και συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου.

Ορισμός 8.2 : ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ



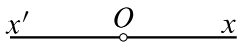
Ευθεία ονομάζεται σύνολο των σημείων τα οποία ορίζουν μια ίσια και με άπειρο μήκος γραμμή χωρίς αρχή και τέλος. Συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου.

Ορισμός 8.3 : ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

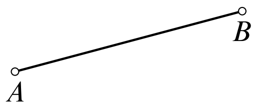


Ημιευθεία ονομάζεται το μέρος μιας ευθείας, με αρχή ένα σημείο της η οποία επεκτείνεται απεριόριστα.

- Συμβολίζεται με το γράμμα του σημείου της αρχής και ένα μικρό γράμμα προς το μέρος που επεκτείνεται.
- Αν δυο ημιευθείες έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουν ευθεία γραμμή τότε λέγονται **αντικείμενες**.



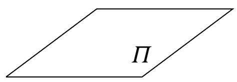
Ορισμός 8.4 : ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ



Ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται το τμήμα μιας ευθείας γραμμής το οποίο βρίσκεται ανάμεσα από δύο σταθερά σημεία αυτής.

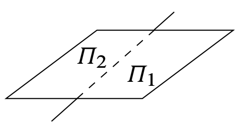
- Τα σταθερά αυτά σημεία ονομάζονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος.
- Συμβολίζεται γράφοντας τα ονόματα των άκρων του με οποιαδήποτε σειρά: AB ή BA.

Ορισμός 8.5 : ΕΠΙΠΕΔΟ



Επίπεδο ονομάζεται μια λεία ομοιόμορφη επιφάνεια στην οποία μπορεί να εφαρμόσει πλήρως μια ευθεία γραμμή.

Ορισμός 8.6 : ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ

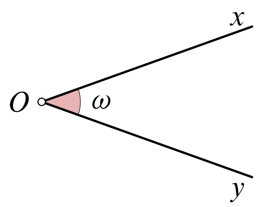


Ημιεπίπεδο ονομάζεται καθένα από τα μέρη ενός επιπέδου στα οποία χωρίζεται από μια ευθεία γραμμή.

8.2 Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 8.7 : ΓΩΝΙΑ



Γωνία ονομάζεται το σχημα που αποτελειται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή και το κοινό μέρος των ημιεπιπέδων που ορίζουν οι δύο ημιευθείες.

- Οι ημιευθείες ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας.
- Το κοινό σημείο των δύο ημιευθειών ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας.
- Μια γωνία συμβολίζεται είτε με το όνομα της κορυφής : $\hat{O}$, είτε γράφοντας και τα τρία γράμματα διαδοχικά : $x\hat{O}y$, είτε με ένα μικρό γράμμα στο εσωτερικό της : ω.