ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΛΥΣΗ

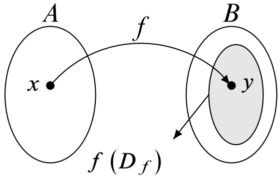
1.1 Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.
Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή και του ελληνικού αλφαβήτου f, g, h, t, $s, \sigma \ldots$ και γράφουμε :

$$f : A \to B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης ($x \in A$), του πρώτου συνόλου, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης ($y \in B$), του δεύτερου συνόλου.



Σχήμα 1.1: Συνάρτηση

- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$. Η τιμή $f(x)$ ονομάζεται επίσης και **εικόνα** του x μέσω της f.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται D_f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in D_f$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\left(D_f\right)$ και ισχύει $f\left(D_f\right) \subseteq B$.
$$f\left(D_f\right) = \{y \in B | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in D_f\}$$
- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \quad , \quad D_f \xrightarrow{f} f\left(D_f\right)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \quad , \quad g(t) \quad , \quad h(s) \ldots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε
  1. Το πεδίο ορισμού D_f.
  2. Το σύνολο B.
  3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in D_f$.

- Εαν τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Στον ορισμό αυτό θα κατονομάσουμε και θα ορίσουμε πλήρως καθένα από τα βασικά είδη των συναρτήσεων που θα συναντήσουμε.

1. **Πολυωνυμική συνάρτηση**
   Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f θα ονομάζεται πολυωνυμική αν για κάθε $x \in D_f$, η τιμή της $f(x)$ δίνεται από ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού. Θα είναι της μορφής :

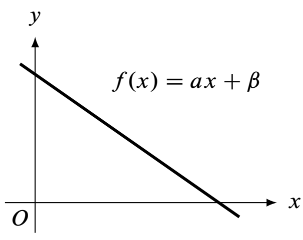
$$f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

   - Οι αριθμοί a_i , $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ ονομάζονται **συντελεστές** της συνάρτησης και είναι πραγματικοί αριθμοί.
   - Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

   i. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

   Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις των οποίων οι τιμές δίνονται από ένα πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού της μορφής $f(x) = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$ πραγματικούς συντελεστές και $a \neq 0$, ονομάζονται **$1^{ου}$ βαθμού**.

   - Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $1^{ου}$ βαθμού είναι ευθεία γραμμή.
   - Ο συντελεστής a του πολυωνύμου ονομάζεται **κλίση** ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας.

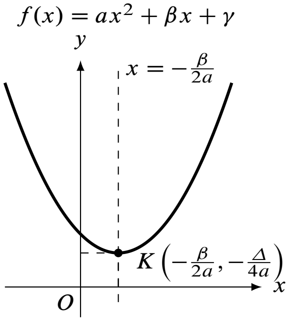


Σχήμα 1.2: Συνάρτηση $1^{ου}$ βαθμού

   ii. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις των οποίων οι τιμές δίνονται από ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ πραγματικούς συντελεστές και $a \neq 0$, ονομάζονται **2ου βαθμού**.

- Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης 2ου βαθμού ονομάζεται **παραβολή**.
- Το σημείο με συντεταγμένες $K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.
- Η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ είναι ο **άξονας συμμετρίας** της παραβολής.



Σχήμα 1.3: Συνάρτηση 2ου βαθμού

2. Ρητή συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f θα ονομάζεται ρητή αν η τιμή της $f(x)$ δίνεται από μια ρητή αλγεβρική παράσταση, για κάθε $x \in D_f$. Θα είναι της μορφής :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- Οι παραστάσεις $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα της ίδιας μεταβλητής.
- Για να ορίζεται μια ρητή συνάρτηση πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διάφορος του μηδενός : $Q(x) \neq 0$.
- Το πεδίο ορισμού κάθε ρητής συνάρτησης προκύπτει αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, εξαιρέσουμε τις τιμές της μεταβλητής x οι οποίες μηδενίζουν τον παρονομαστή $Q(x)$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$$

3. Άρρητη συνάρτηση

Άρρητη θα ονομάζεται μια συνάρτηση f εαν ο τύπος της $f(x)$ είναι μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Μια άρρητη συνάρτηση θα είναι της μορφής :

$$f(x) = \sqrt{A(x)}$$

- Η παράσταση $A(x)$ ονομάζεται **υπόριζη ποσότητα** και παριστάνει μια οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση.
- Το πεδίο ορισμού μιας άρρητης συνάρτησης αποτελείται από όλες εκείνες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x για τις οποίες η παράσταση $A(x)$ παίρνει μη αρνητικές τιμές.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq 0\}$$

4. Τριγωνομετρική συνάρτηση

Τριγωνομετρική ονομάζεται κάθε συνάρτηση f της οποίας η τιμή της $f(x)$ δίνεται με τη βοήθεια ενός τριγωνομετρικού αριθμού, για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού $x \in D_f$. Τα είδη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι τα εξής.

$$f(x) = \text{ημ}x \quad , \quad f(x) = \text{συν}x \quad , \quad f(x) = \text{εφ}x \quad , \quad f(x) = \text{σφ}x$$

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \text{ημ}x$ και $f(x) = \text{συν}x$ έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών : $D_f = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ σύμφωνα με το **Θεώρημα ...**.
- Οι τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{N}\right\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Οι τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο : $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ καθώς και της $f(x) = \text{συν}x$ ονομάζεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.

5. Εκθετική συνάρτηση

Εκθετική ονομάζεται κάθε συνάρτηση f της οποίας ο τύπος αποτελεί δύναμη με θετική βάση, διάφορη της μονάδας και εκθέτη που περιέχει την ανεξάρτητη μετβλητή. Η απλή εκθετική συνάρτηση θα είναι της μορφής :

$$f(x) = a^x \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

- Το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών : $D_f = \mathbb{R}$.
- Το σύνολο τιμών της εκθετικής συνάρτησης f είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών : $f\left(D_f\right) = (0, +\infty)$.
- Αν η βάση a γίνει ίση με τη μονάδα τότε αποκτάμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$ η οποία δεν είναι εκθετική.
- Αν η βάση a γίνει ίση με τον αριθμό e τότε αποκτάμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.

6. Λογαριθμική συνάρτηση

Λογαριθμική ονομάζεται κάθε συνάρτηση f της οποίας η τιμή της $f(x)$ δίνεται με τη βοήθεια ενός λογαρίθμου, για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού $x \in D_f$. Θα είναι :

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

- Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης f είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών : $D_f = (0, +\infty)$.
- Το σύνολο τιμών της εκθετικής συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών : $f\left(D_f\right) = \mathbb{R}$.
- Αν η βάση a του λογαρίθμου γίνει ίση με τον αριθμό 10 ή e τότε αποκτάμε τη συνάρτηση $f(x) = \log x$ ή $f(x) = \ln x$ αντίστοιχα.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα βασικά είδη συναρτήσεων τον τύπο τους καθώς και το πεδίο ορισμού τους.

Είδος	**Τύπος**	**Πεδίο Ορισμού**
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu \ldots + a_0$	$D_f = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$
	$f(x) = \eta\mu x \ \ , \ \ \sigma\upsilon\nu x$	$D_f = \mathbb{R}$
Τριγωνομετρική	$f(x) = \varepsilon\varphi x$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$
	$f(x) = \sigma\varphi x$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$
Εκθετική	$f(x) = a^x \ \ , \ \ 0 < a \neq 1$	$D_f = \mathbb{R}$
Λογαριθμική	$f(x) = \log x \ \ , \ \ \ln x$	$D_f = (0, +\infty)$

Πίνακας 1.1: Είδη συναρτήσεων

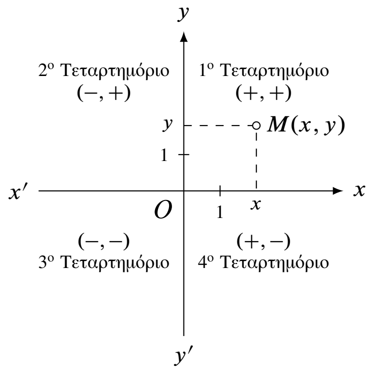
Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνιμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις :

Ταυτοτική	**Σταθερή**	**Μηδενική**
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.

- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.



Σχήμα 1.4: Ορθοκανονικό Σύστημα Συντεταγμένων

- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

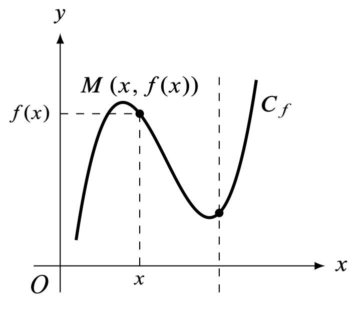
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A \ \ , \ \ y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

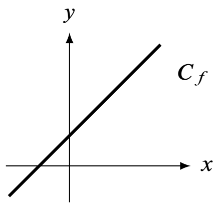
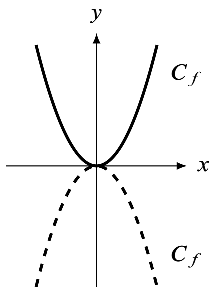
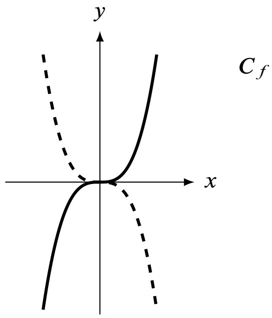
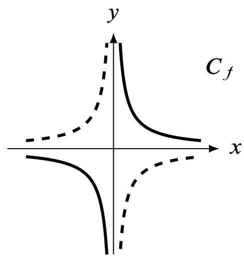
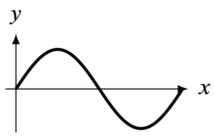
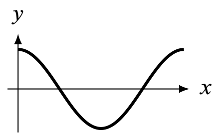
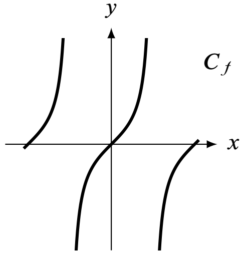
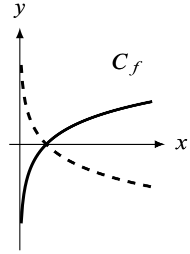
- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράσταστασης είναι της μορφής $M\ (x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.



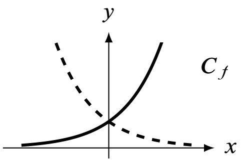
Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

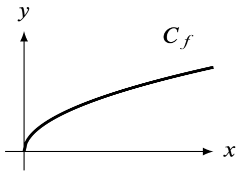
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων καθώς και το είδος τους.

Συνάρτηση	**Γρ. Παράσταση**	**Συνάρτηση**	**Γρ. Παράσταση**
Πολυωνυμική $f(x) = ax + \beta$ $a, \beta \in \mathbb{R}$		**Πολυωνυμική** $f(x) = ax^2$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -	
Πολυωνυμική $f(x) = ax^3$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -		**Ρητή** $f(x) = \frac{a}{x}$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -	
Τριγωνομετρική $f(x) = \text{ημ}x$		**Τριγωνομετρική** $f(x) = \text{συν}x$	
Τριγωνομετρική $f(x) = \text{εφ}x$		**Λογαριθμική** $f(x) = \log_a x$ $a > 1$ —— $0 < a < 1$ - - -	

Εκθετική
$f(x) = a^x$
$a > 1$ —
$0 < a < 1$ - - -



Άρρητη
$f(x) = \sqrt{x}$



Πίνακας 1.2: Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

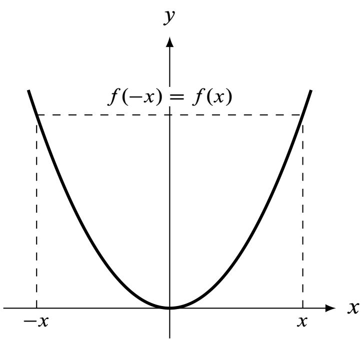
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. **Άρτια συνάρτηση**
   Άρτια ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

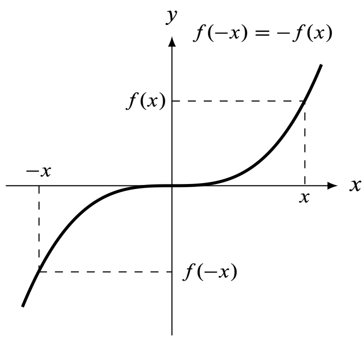
   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

2. **Περιττή συνάρτηση**
   Περιττή ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$



Σχήμα 1.6: Άρτια συνάρτηση



Σχήμα 1.7: Περιττή συνάρτηση

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $y'y$.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Η αρχή των αξόνων για μια περιττή συνάρτηση ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας** της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιοδική εαν υπάρχει ένας θετικός αριθμός T ώστε οι τιμές της να επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους T του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή θα ισχύει :

i. Για κάθε $x \in D_f$ έχουμε $x + T \in D_f$ και $x - T \in D_f$.
ii. $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$ για κάθε $x \in D_f$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
Δύο συναρτήσεις f, g ονομάζονται ίσες εαν

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού δηλαδή $D_f = D_g$ και ισχύει
ii. $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D_f, D_g$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα τότε οι πράξεις μεταξύ των δύο συναρτήσεων ορίζονται ως εξής.

Τύπος	**Πεδίο ορισμού**
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\}$

Πίνακας 1.3: Πράξεις συναρτήσεων

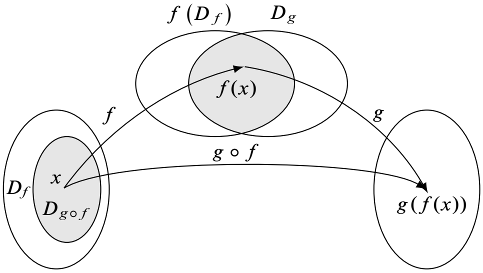
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα. Σύνθεση της f με την g ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο των στοιχείων του πεδίου ορισμού D_f της συνάρτησης f των οποίων οι τιμές ανήκουν στο πεδίο ορισμού D_g της συνάρτησης g.

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$$

Με τη σύνθεση $g \circ f$, κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της $f(x)$ η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της $g(f(x))$.

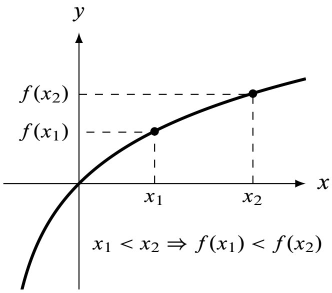


Σχήμα 1.8: Σύνθεση συναρτήσεων

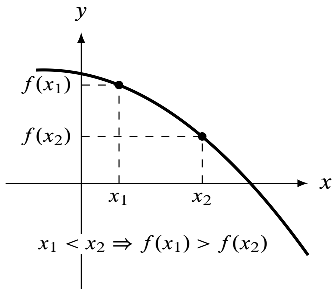
- Η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται αν $f\left(D_f\right) \cap D_g \neq \varnothing$.
- Η σύνθεση της g με την f συμβολίζεται αντίστοιχα με $f \circ g$, έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10 ΜΟΝΟΤΟΝΗ - ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα, χαρακτηρίζεται ως **μονότονη**, ενώ μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως **γνησίως μονότονη**. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αφορούν τη **μονοτονία** μιας συνάρτησης, μια ιδιότητα των συναρτήσεων η οποία δείχνει την αύξηση ή τη μείωση των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού.

1. **Αύξουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) \leq f(x_2)$$
2. **Φθίνουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) \geq f(x_2)$$
3. **Γνησίως αύξουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) < f(x_2)$$
4. **Γνησίως φθίνουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) > f(x_2)$$



Σχήμα 1.9: Γνησίως αύξουσα



Σχήμα 1.10: Γνησίως φθίνουσα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11 ΤΟΠΙΚΑ - ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

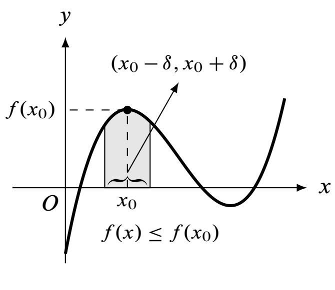
Ακρότατα, τοπικά ή ολικά ονομάζονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ τις οποίες παίρνει σε ένα διάστημα ή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

1. **Τοπικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

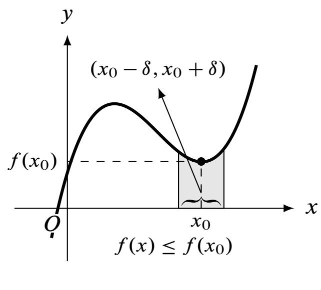
$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \forall x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{με} \quad \delta > 0$$

2. **Τοπικό ελάχιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \forall x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{με} \quad \delta > 0$$



Σχήμα 1.11: Τοπικό μέγιστο



Σχήμα 1.12: Τοπικό ελάχιστο

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 – 1 - (ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΥΜΑΝΤΗ)

Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1 - 1$ εαν κάθε στοιχείο $x \in D_f$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της. Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της f θα ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Μια συνάρτηση $1-1$ ονομάζεται και **αμφιμονοσήμαντη** συνάρτηση ενώ ο συμβολισμός $1-1$ τον οποίο χρησιμοποιούμε διαβάζεται : "ένα προς ένα ".

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Αντίστροφη συνάρτηση μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται η συνάρτηση f^{-1} με την οποία κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της f. Η συνάρτηση f^{-1} έχει :

i. πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών της f

ii. σύνολο τιμών, το πεδίο ορισμού της f και επιπλέον ισχύει

iii. $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$.

Το -1 στο συμβολισμό f^{-1} δεν αποτελεί εκθέτη της f ενώ ο όρος "αντίστροφη" αφορά την πράξη της σύνθεσης και όχι του πολλαπλασιασμού.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

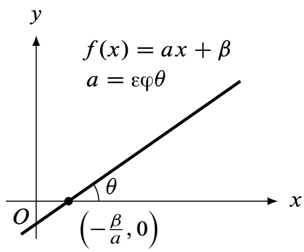
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των πολυωνυμικών συναρτήσεων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού.

1. **Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$**
   Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 1^{ου} βαθμού της μορφής $f(x) = ax + \beta$ με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχλυουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.
ii. Ο συντελεστής a ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

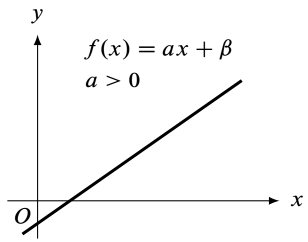
$$a = \varepsilon\varphi\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 180°$$

iii. Αν $a \neq 0$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a = 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή $f(x) = \beta$ οπότε έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $f\left(D_f\right) = \{\beta\}$.

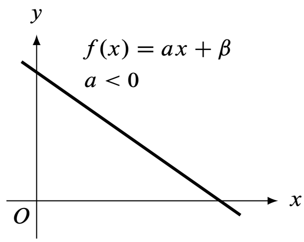


Σχήμα 1.13: Κλίση - Ρίζα συνάρτησης 1$^{\text{ου}}$ βαθμού

iv. Αν $a \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$, ενώ αν $a = 0$ η ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα.
v. Αν $\beta = 0$ τότε η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ax$ με την ευθεία της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
vi. Αν $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα την $x = -\frac{\beta}{a}$, αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ δεν έχει ρίζες, ενώ αν $a = 0$ και $\beta = 0$ έχει άπειρες ρίζες.
vii. Ισοδύναμα με την προηγούμενη ιδιότητα η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα, κανένα ή άπειρα σημεία αντίστοιχα.
viii. Αν $a > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.



Σχήμα 1.14: Γνησίως αύξουσα 1$^{\text{ου}}$ βαθμού



Σχήμα 1.15: Γνησίως φθίνουσα 1$^{\text{ου}}$ βαθμού

2. **Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$**

Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 2$^{\text{ου}}$ βαθμού της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες. Ο αριθμός Δ είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου.

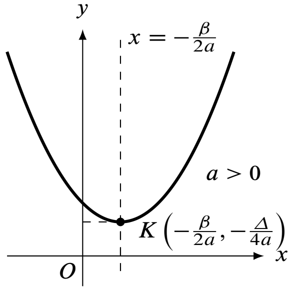
i. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$.

A. Αν $a > 0$

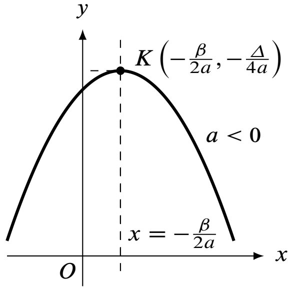
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$ ενώ είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$.

- Η τιμή $-\frac{\Delta}{4a}$ αποτελεί το ελάχιστο της συνάρτησης στη θέση $x = -\frac{\beta}{2a}$.



Σχήμα 1.16: Παραβολή με $a > 0$



Σχήμα 1.17: Παραβολή με $a < 0$

Β. Αν $a < 0$

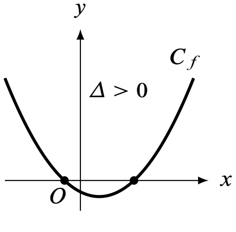
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$.
- Η τιμή $-\frac{\Delta}{4a}$ αποτελεί το μέγιστο της συνάρτησης στη θέση $x = -\frac{\beta}{2a}$.

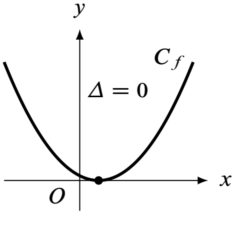
iii. Αν $\Delta > 0$ η f έχει δύο ρίζες, αν $\Delta = 0$ έχει μια ρίζα ενώ αν $\Delta < 0$ τότε δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

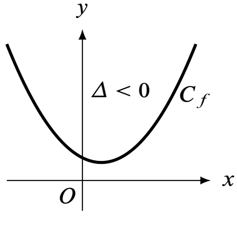
iv. Ισοδύναμα με την προηγούμενη ιδιότητα η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε δύο, ένα ή κανένα σημείο αντίστοιχα.

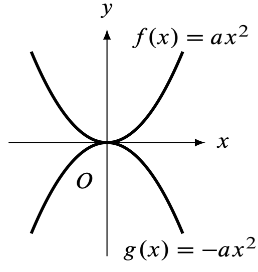
v. Αν $\beta = 0$ και $\gamma = 0$ τότε η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ax^2$ και έχει κορυφή την αρχή των αξόνων.

- Αν $a > 0$ τότε η καμπύλη βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα ενώ το 0 είναι ελάχιστη τιμή στη θέση $x = 0$.
- Αν $a < 0$ τότε η καμπύλη βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα ενώ το 0 είναι μέγιστη τιμή στη θέση $x = 0$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ax^2$ και $g(x) = -ax^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα $x'x$.







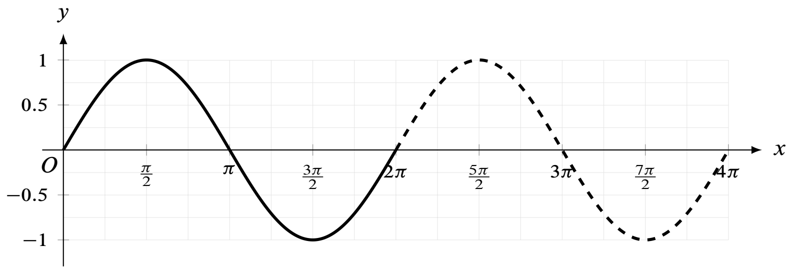


Σχήμα 1.18: Ρίζες παραβολής - Συμμετρικές παραβολές

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \frac{a}{x}$
Η **ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**
Εδώ θα αναφέρουμε τις ιδιότητες των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αφορούν μονοτονία, ακρότατα, περιοδικότητα και άλλα βασικά στοιχεία τους.

1. **Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$**
   Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

   i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
   ii. Το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
   iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
   iv. Μελετώντας τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου έχουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   v. Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 στη θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.



Σχήμα 1.19: Γραφική παράσταση ημιτόνου

   vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι τιμές, η μονοτονία τα ακρότατα και κάθε άλλο χαρακτηριστικό επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου 2π. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
   vii. Κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(\kappa + 1)\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
   viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ την τιμή -1.
   ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η γενική μορφή της παραπάνω συνάρτησης είναι

$$f(x) = \rho \cdot \eta\mu\,(\omega x + a) + \beta$$

με $\rho, a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$. Οι ιδιότητες της γενικής συνάρτησης σύμφωνα και με τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

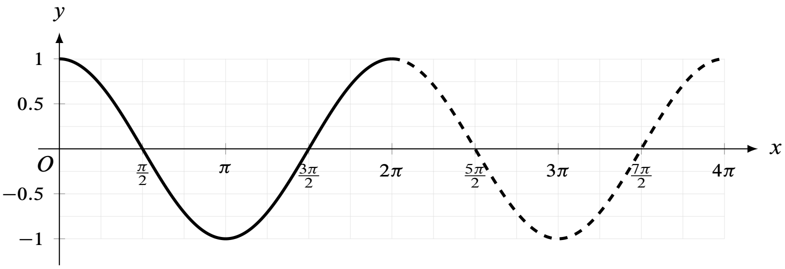
Ιδιότητα	**Συνθήκη**
$D_f \mid f\left(D_f\right)$	$\mathbb{R} \mid [-\rho+\beta, \rho+\beta]$
Περίοδος	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
Ρίζες	$x = \kappa T + \frac{\theta-a}{\omega}$ και $x = \kappa T + \frac{\pi-\theta-a}{\omega}$
Μονοτονία	$f \nearrow \left[\kappa T - a, \kappa T + \frac{T}{4} - a\right]$ και $\left[\kappa T + \frac{3T}{4} - a, (\kappa+1)T - a\right]$
	$f \searrow \left[\kappa T + \frac{T}{4} - a, \kappa T + \frac{3T}{4} - a\right]$
Ακρότατα	Μέγιστο την τιμή $\rho + \beta$ στις θέσεις $x = \kappa T + \frac{T}{4} - a$
	Ελάχιστο την τιμή $-\rho + \beta$ στις θέσεις $x = \kappa T + \frac{3T}{4} - a$

Πίνακας 1.4: Ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης ημιτόνου

με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και θ να είναι η γωνία για την οποία $\eta\mu\theta = -\frac{\beta}{\rho}$ αρκεί να ισχύει $-\frac{\beta}{\rho} \in [-1, 1]$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$
Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
ii. Το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου βλέπουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.
v. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέση $x = 0$ και $x = 2\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 στη θέση $x = \pi$.



Σχήμα 1.20: Γραφική παράσταση συνημιτόνου

vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου 2π. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2\,(\kappa+1)\,\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi+\pi, 2(\kappa+1)\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi$ και $x = 2(\kappa+1)\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \pi$ την τιμή -1.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η γενική μορφή της παραπάνω συνάρτησης είναι

$$f(x) = \rho \cdot \text{συν}\,(\omega x + a) + \beta$$

με $\rho, a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$. Οι ιδιότητες της γενικής συνάρτησης σύμφωνα και με τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
$\boldsymbol{D_f \,\vert\, f\left(D_f\right)}$	$\mathbb{R} \vert [-\rho+\beta, \rho+\beta]$
Περίοδος	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
Ρίζες	$x = \kappa T + \frac{\pm\theta - a}{\omega}$
Μονοτονία	$f \nearrow \left[\kappa T + \frac{T}{2} - a, (\kappa+1)T - a\right]$ $f \searrow \left[\kappa T - a, \kappa T + \frac{T}{2} - a\right]$
Ακρότατα	Μέγιστο την τιμή $\rho+\beta$ στις θέσεις $x = \kappa T - a, (\kappa+1)T - a$ Ελάχιστο την τιμή $-\rho+\beta$ στις θέσεις $x = \kappa T + \frac{T}{2} - a$

Πίνακας 1.5: Ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης συνημιτόνου

με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και θ να είναι η γωνία για την οποία συν$\theta = -\frac{\beta}{\rho}$ αρκεί να ισχύει $-\frac{\beta}{\rho} \in [-1, 1]$.

3. **Η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$**

   Οι ιδιότητες της συνάρτησης της εφαπτομένης είναι οι εξής :

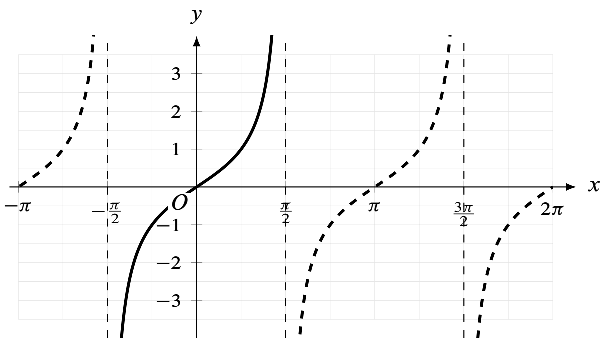
   i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$.

   ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.

   iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$

   iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε παρατηρούμε οτι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα.

   v. Δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.



Σχήμα 1.21: Γραφική παράσταση εφαπτομένης

   vi. Οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της περιοδικής συνάρτησης $f(x) =$ εφx επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right]$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

   vii. Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα $\left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right]$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

   viii. Η γραφική της παράσταση προσεγγίζει τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ οι οποίες ονομάζονται **ασύμπτωτες**.

   ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \rho \cdot \text{εφ}\,(\omega x + a) + \beta$$

με $\rho, a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$. Οι ιδιότητες της γενικής συνάρτησης συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

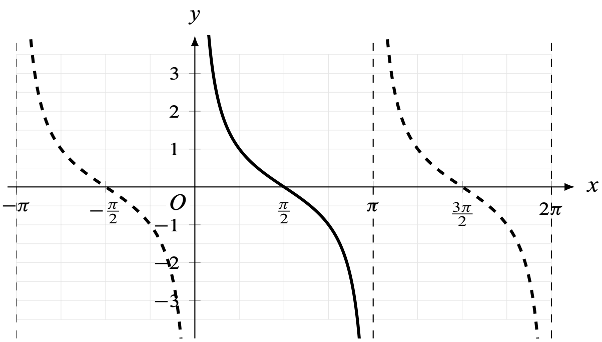
Ιδιότητα	**Συνθήκη**
$\boldsymbol{D_f \,\vert\, f\left(D_f\right)}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \vert x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \vert \mathbb{R}$
Περίοδος	$T = \dfrac{\pi}{\omega}$
Ρίζες	$x = \kappa T + \frac{\theta - a}{\omega}$
Μονοτονία	$f \nearrow \left[\frac{(2\kappa-1)T}{2} - a, \frac{(2\kappa+1)T}{2} - a\right]$

Πίνακας 1.6: Ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης εφαπτομένης

με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και θ να είναι η γωνία για την οποία εφ$\theta = -\frac{\beta}{\rho}$ με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

4. **Η συνάρτηση $f(x) = $ σφx**
Οι ιδιότητες της συνάρτησης της συνεφαπτομένης είναι οι ακόλουθες :

 i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = \{x \in \mathbb{R} \vert x \neq \kappa\pi\}$.
 ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.
 iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$
 iv. Αν γίνει μελέτη της συνάρτησης στο διάστημα $[0, \pi]$ τότε έχουμε οτι είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα.
 v. Δεν έχει ακρότατα δηλαδή δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.



Σχήμα 1.22: Γραφική παράσταση συνεφαπτομένης

 vi. Αφού η συνάρτηση $f(x) = $ σφx είναι περιοδική, οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης είναι οι κατακόρυφες ευθείες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \rho \cdot \text{εφ}\,(\omega x + a) + \beta$$

με $\rho, a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$. Οι ιδιότητες της γενικής συνάρτησης συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
$\boldsymbol{D_f \,|\, f\left(D_f\right)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi\} \,|\mathbb{R}$
Περίοδος	$T = \dfrac{\pi}{\omega}$
Ρίζες	$x = \kappa T + \frac{\theta - a}{\omega}$
Μονοτονία	$f \searrow [\kappa T - a, (\kappa+1)T - a]$

Πίνακας 1.7: Ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης εφαπτομένης

με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και θ να είναι η γωνία για την οποία $\text{σφ}\theta = -\frac{\beta}{\rho}$ με $\theta \neq \kappa\pi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Οι ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$, είναι οι εξής. Σε ορισμένες ιδιότητες διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη βάση a της συνάρτησης.

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

ii. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

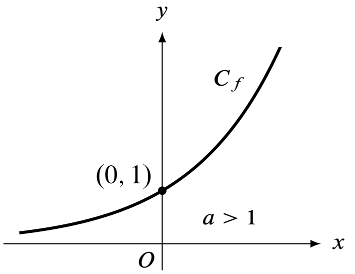
iii. Η συνάρτηση δεν έχει ακρότατες τιμές.

Α. Για $a > 1$

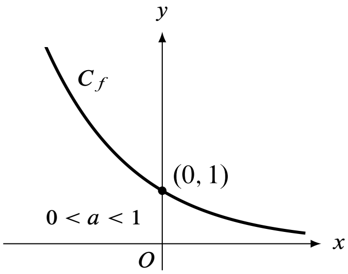
- Αν η βάση a της εκθετικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράστασή της έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στη μεριά του $-\infty$ ενώ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$.

- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$



Σχήμα 1.23: Εκθετική συνάρτηση με $a > 1$



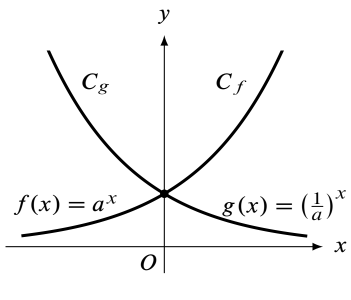
Σχήμα 1.24: Εκθετική συνάρτηση με $0 < a < 1$

B. Για $0 < a < 1$

- Αν η βάση a της εκθετικής συνάρτησης είναι μικρότερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράστασή της έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στη μεριά του $+\infty$ ενώ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

iv. Οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών συναρτήσεων με αντίστροφες βάσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, με $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



Σχήμα 1.25: Εκθετικές συναρτήσεις με αντίστροφες βάσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για κάθε λογαριθμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = \log_a x$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

ii. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

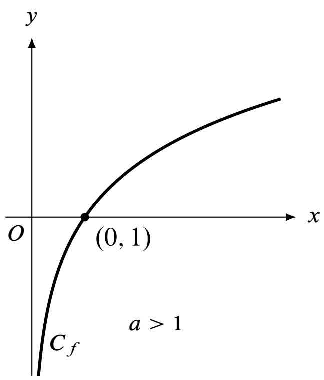
iii. Η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

1. Για $a > 1$

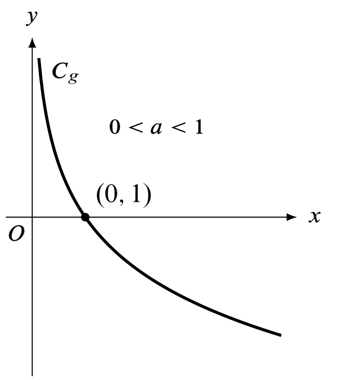
- Αν η βάση a του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως αυξουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.
- Η γραφική παράστασή της έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ στη μεριά του $-\infty$ ενώ τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x > 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x < 0$.



Σχήμα 1.26: Λογαριθμική συνάρτηση με $a > 1$



Σχήμα 1.27: Λογαριθμική συνάρτηση με $0 < a < 1$

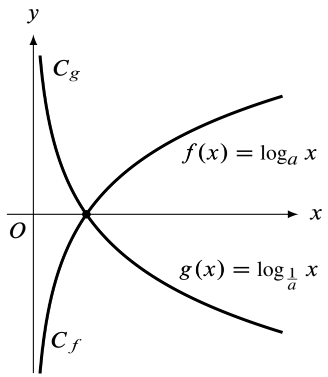
2. Για $0 < a < 1$

- Αν η βάση a του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.
- Η γραφική παράστασή της έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ στη μεριά του $+\infty$ ενώ τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x < 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x > 0$.

iv. Οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών συναρτήσεων με αντίστροφες βάσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, με $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



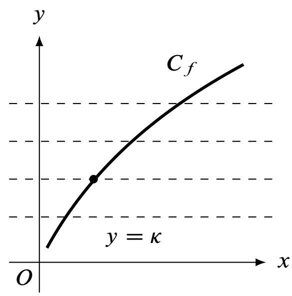
Σχήμα 1.28: Λογαριθμικές συναρτήσεις με αντίστροφες βάσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 – 1 - (ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΥΜΑΝΤΗ)
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση $1-1$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της, η ισότητα των εικόνων τους συναπάγεται την ισότητα μεταξύ τους. Δηλαδή θα ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 1-1
Εαν μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$ τότε γι αυτήν ισχύουν οι παρακάτων ιδιότητες :

i. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
ii. Κάθε οριζόντια ευθεία της μορφής $y = \kappa$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ θα έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
iii. Εαν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε θα είναι και $1-1$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
iv. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο πεδίο ορισμού της f. Εαν $0 \in f(D_f)$ τότε η εξίσωση έχει μια λύση ακριβώς.



Σχήμα 1.29: Συνάρτηση $1-1$

1.2 Όρια - Συνέχεια

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Όριο μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 ονομάζεται η προσέγγιση των τιμών

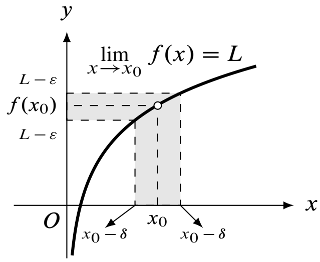
της μεταβλητής $f(x)$ σε μια τιμή L καθώς το x πλησιάζει την τιμή x_0. Συμβολίζεται με

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Το όριο L μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$. Ο αυστηρός ορισμός του ορίου έχει ως εξής :

Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A έχει όριο L σε ένα σημείο x_0 όταν για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει θετικός αριθμός $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ το αποίο βρίσκεται σε μια περιοχή του x_0 ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ \text{ με } \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Σχήμα 1.30: Όριο συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

1. **Όριο από αριστερά**
   Όριο από αριστερά μιας συνάρτησης f στο x_0 ονομάζεται το όριο της καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει την τιμή x_0 από τιμές μικρότερες αυτής. Συμβολίζεται

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

2. **Όριο από δεξιά**
   Όριο από δεξιά μιας συνάρτησης f στο x_0 ονομάζεται το όριο της καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει την τιμή x_0 από τιμές μεγαλύτερες αυτής. Συμβολίζεται

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ

Με τη βοήθεια του **Ορισμού 1.16** για τη συνέχεια μια συνάρτησης σε σημείο, ορίζουμε τη συνέχεια μιας συνάστησης σε διάστημα και γενικότερα σε σύνολο ως εξής :

1. **Συνέχεια σε ανοιχτό διάστημα**
   Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, β) εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.
2. **Συνέχεια σε κλειστό διάστημα**
   Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος (a, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ και } \ \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

3. **Συνέχεια σε σύνολο**
   Μια συνάρτηση f θα λέμε οτι είναι συνεχής εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ
Το όριο μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι ίσα με ℓ.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ 1
Έστω f, g δύο δυναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0 \in D_f \cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο συνόλων. Αν τα όρια των δύο συναρτήσεων στο σημείο x_0 υπάρχουν τότε ισχύουν γι αυτά οι παρακάτω ιδιότητες :

i. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
ii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
iii. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.
iv. Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$.
v. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$ τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.
vi. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.
vii. Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$.
viii. Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ 2
Έστω f, g δύο δυναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0 \in D_f \cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο συνόλων. Οι παρακάτω ιδιότητες αφορούν μη πεπερασμένα όρια των συναρτήσεων στο σημείο x_0.

i. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
ii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ f(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \end{cases}$
iii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.
iv. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = \mp\infty$.

v. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

vi. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ 3
Έστω f, g δύο δυναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0 \in D_f \cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο συνόλων. Οι παρακάτω ιδιότητες αφορούν τα όρια των συναρτήσεων στο άπειρο $\pm\infty$.

i.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.12 ΟΡΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Στις παρακάτω ιδιότητες μελετούμε τον υπολογισμό των ορίων των βασικών συναρτήσεων κάθε είδους σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους καθώς και στο άπειρο.

1. **Όριο σε σημείο**
Για τα όρια των βασικών συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

i. Πολυωνυμικές
Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

ii. Ρητές
Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού και $Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\beta_\mu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\mu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

iii. Άρρητες

iv. Τριγωνομετρικές
Για τα όρια των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

i. $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$

ii. $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

iii. $\lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$

iv. $\lim_{x \to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$

ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=1$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=0$

v. Εκθετικές - Λογαριθμικές

2. Όριο στο άπειρο

i. Πολυωνυμικές
Αν $P(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$ με $a_\nu\neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού τότε θα έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_\nu x^\nu$$

ii. Ρητές
Έστω $P(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$ με $a_\nu\neq 0$ και $Q(x)=\beta_\nu x^\nu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0$ με $\beta_\mu\neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού και $\mu-$οστού βαθμού αντίστοιχα. Θα ισχύει

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\begin{cases}\frac{a_\nu}{\beta_\mu} & \text{αν } \nu=\mu\\ 0 & \text{αν } \nu<\mu\\ \pm\infty & \text{αν } \nu>\mu\end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ
Θεωρούμε δύο δυναρτήσεις f,g με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0\in D_f\cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο πεδίων ορισμού. Αν τα όρια των δύο συναρτήσεων στο x_0 υπάρχουν με $\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$ τότε οι πράξεις μεταξύ των ορίων ακολουθούν τους παρακάτω κανόνες :

Όριο	Κανόνας
Αθροίσματος	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_1\pm l_2$
Πολλαπλάσιου	$\lim\limits_{x\to x_0}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k\cdot l_1\ ,\ \forall k\in\mathbb{R}$
Γινομένου	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_1\cdot l_2$
Πηλίκου	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}\ ,\ l_2\neq 0$
Απολύτου	$\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=\left\lvert\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right\rvert=\lvert l_1\rvert$
Ρίζας	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\sqrt[\kappa]{l_1}\ ,\ l_1\geq 0$
Δύναμης	$\lim\limits_{x\to x_0}f^\nu(x)=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^\nu=l_1^\nu$

Πίνακας 1.8: Πράξεις με όρια

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Εαν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα κοινό σημείο x_0 των πεδίων ορισμού τους τότε και οι συναρτήσεις

$$f+g \ , \ f-g \ , \ c \cdot f \ , \ f \cdot g \ , \ \frac{f}{g} \ , \ |f| \ , \ f^{\nu} \text{ και } \sqrt[\nu]{f}$$

είναι συνεχείς στο σημείο x_0 εφόσον ορίζονται στο σημείο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.15 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Εαν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι σηνεχής στο σημείο $f(x_0)$ η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχείς στο σημείο x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.16 ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι :

i. συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
ii. $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.17 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ BOLZANO
Έστω μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της.

i. Αν η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται πουθενά στο Δ για κάθε $x \in \Delta$ τότε αυτή θα διατηρεί το προσημό της στο διάστημα αυτό.

$$\text{Αν } f(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \Delta \\ f(x) < 0 & \forall x \in \Delta \end{cases}$$

Επιπλέον, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \Delta$ ώστε $f(a) > 0$ ή $f(a) < 0$ τότε $f(x) > 0 \ , \ \forall x \in \Delta$ ή $f(x) < 0 \ , \ \forall x \in \Delta$ αντίστοιχα.

$$\text{Αν } f(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in \Delta \text{ και } \exists a \in \Delta \text{ ώστε } \begin{cases} f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ , & \forall x \in \Delta \\ f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \ , & \forall x \in \Delta \end{cases}$$

ii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες μιας συνάρτησης f τότε αυτή διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα μεταξύ των ριζών.

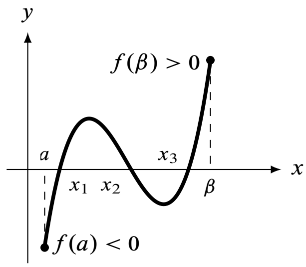
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.18 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι

i. συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει

ii. $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.



Σχήμα 1.31: Θεώρημα Bolzano

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.19 ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν :

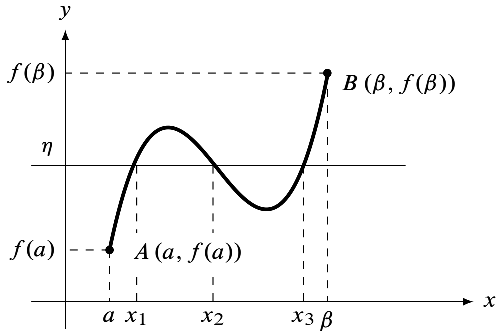
i. η f είναι συνεχής στο (a, β) και

ii. $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Bolzano.



Σχήμα 1.32: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.20 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε παίρνει στο διάστημα αυτό μια **μέγιστη** τιμή M και μια **ελάχιστη** τιμή m.

Υπάρχουν δηλαδή τουλάχιστον δύο πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ έτσι ώστε αν $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$ να ισχύει :

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

1.3 Διαφορικός Λογισμός

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ
Παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και θα λέμε οτι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 αν το όριο της παραγώγου υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
Έχουμε δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

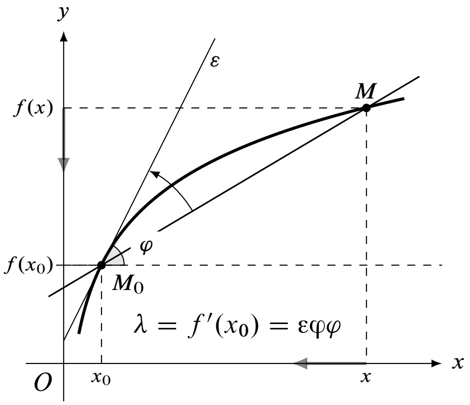
- Το κλάσμα $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ονομάζεται **λόγος μεταβολής** της f.
- Θέτοντας $h = x - x_0$ η παράγωγος της f στο σημείο x_0 μετασχηματίζεται ως εξής

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.19 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ
Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ παριστάνει το **συντελεστή διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο επαφής $M_0(x_0, f(x_0))$.

$$\lambda = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{εφ}\varphi$$

Είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία ε με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.



Σχήμα 1.33: Παράγωγος σε σημείο

Όσο πλησιάζει το x στο x_0 τόσο αλλάζει η θέση του τυχαίου σημείου M ώστε να τείνει να ταυτιστεί με το M_0. Τότε η ευθεία MM_0 τείνει να γίνει εφαπτόμενη στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.21 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τύπους για την παραγώγιση των βασικών συναρτήσεων καθώς και κανόνες παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων. Η απλή συνάρτηση και η σύνθεση συναρτήσεων που βρίσκονται στην ίδια γραμμή έχουν την ίδια μορφή ως προς τον τύπο τους.

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση $g \circ f$	Παράγωγος $(g \circ f)'$
c	0		
x	1		
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$f^\nu(x)$	$\nu f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\text{ημ}x$	$\text{συν}x$	$\text{ημ} f(x)$	$\text{συν} f(x) \cdot f'(x)$
$\text{συν}x$	$-\text{ημ}x$	$\text{συν} f(x)$	$-\text{ημ} f(x) \cdot f'(x)$
$\text{εφ}x$	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$\text{εφ} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\text{συν}^2 f(x)}$
$\text{σφ}x$	$-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	$\text{σφ} f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\text{ημ}^2 f(x)}$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

Πίνακας 1.9: Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.22 ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της. Αν η f είναι :

i. συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$

ii. παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β) και επιπλέον ισχύει

iii. $f(a) = f(\beta)$

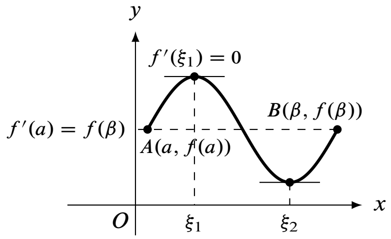
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.23 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ROLLE

Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία ε στο σημείο $M\ (\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f, να είναι παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \varepsilon \parallel x'x$$



Σχήμα 1.34: Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Rolle

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.24 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της. Αν η f είναι :

i. συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και

ii. παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β)

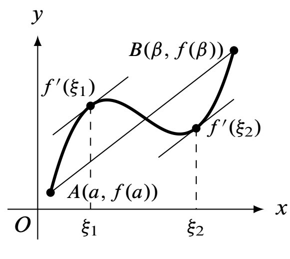
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.25 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ Θ.Μ.Τ.

Εαν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της τότε αυτό γεωμετρικά σημαίνει οτι θα υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στη C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα σημεία στα άκρα του διαστήματος.

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_{AB}$$



Σχήμα 1.35: Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι ίσος με το συντελεστή της ευθείας AB.
- Το κλάσμα $\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$ λέγεται **λόγος μεταβολής**.

1.4 Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.20 ΑΡΧΙΚΗ Η ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα συνάρτηση μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ, ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.21 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
Αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f ονομάζεται το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων της f σε ένα διάστημα Δ. Συμβολίζεται $\int f(x)\mathrm{d}x$ και ισχύει

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

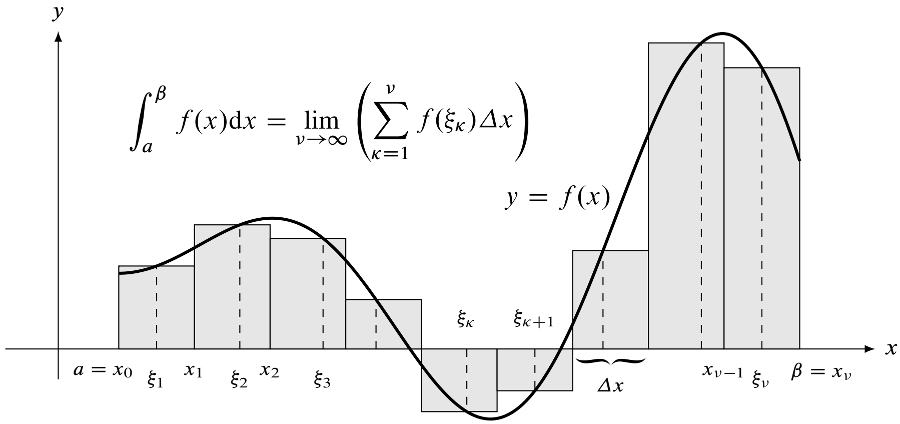
όπου F είναι μια παράγουσα της f και $c \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.22 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
Ορισμένο ολοκλήρωμα, μιας συνεχούς συνάρτησης f από το a ως το β ονομάζεται το όριο

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa) \Delta x \right)$$

το οποίο συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ και για το οποίο έχουμε οτι :

- Δx είναι το μήκος καθενός από τα ισομήκη ν υποδιαστήματα, στα οποία χωρίσαμε το διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $\Delta x = \frac{\beta - a}{\nu}$.
- Τα ν σημεία στα οποία χωρίστηκε το διάστημα $[a, \beta]$ είναι $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ $x_{\nu-1}, x_\nu = \beta$.
- $f(\xi_\kappa)$ είναι η τιμή ενός τυχαία επιλεγμένου σημείου ξ_κ σε καθένα από τα διαστήματα $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ με $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$.
- Το γινόμενο $f(\xi_\kappa)\Delta x$ εκφράζει το εμβαδόν καθενός ορθογωνίου με διαστάσεις Δx και $f(\xi_\kappa)$.



Σχήμα 1.36: Ορισμένο Ολοκλήρωμα

- Αθροίζοντας τα εμβαδά των ορθογωνίων και υπολογίζοντας το όριο του αθροίσματος για $\nu \to \infty$ προκύπτει το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο β.

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \quad , \quad \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

  Κατά συνέπεια, το ορισμένο ολοκλήρωμα δηλώνει άθροισμα απείρων εμβαδών. Το άθροισμα S_ν ονομάζεται άθροισμα Riemann.

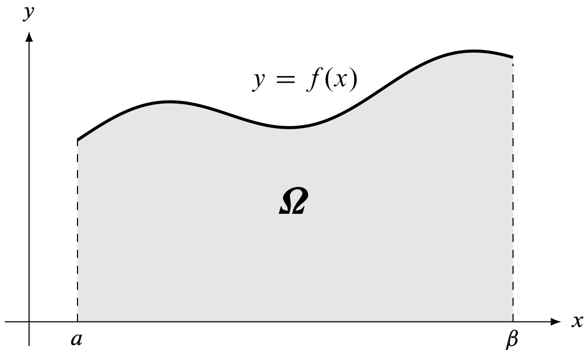
- Οι αριθμοί a και β ονομάζονται **άκρα ολοκλήρωσης**.

- Στον τύπο $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ του ολοκληρώματος, η μεταβλητή x ονομάζεται **βουβή μεταβλητή**, έννοια η οποία δηλώνει οτι μπορεί να αντικατασταθεί με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή, χωρίς να αλλοιωθεί το ολοκλήρωμα.

- Η έκφραση $\mathrm{d}x$ μας δείχνει τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.23 ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ
Έστω $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x = a, x = \beta$ ορίζεται να είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο β.

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$



Σχήμα 1.37: Εμβαδόν χωρίου

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.26 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $a \in \Delta$ ένα τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(u)\mathrm{d}u \quad , \quad x \in \Delta$$

είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ.

- Το άνω άκρο του ολοκληρώματος μας δίνει τη μεταβλητή x της συνάρτησης, η οποία είναι και μεταβλητή παραγώγισης.

- Η μεταβλητή u είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης. Ως βουβή μεταβλητή του ολοκληρώματος, μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε άλλη, εκτός της x η οποία είναι μεταβλητή της συνάρτησης F.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.27 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ
Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Ολοκλήρωμα αθροίσματος	$\int_a^\beta (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_a^\beta g(x)\mathrm{d}x$
Αντιστροφή άκρων	$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = -\int_\beta^a f(x)\mathrm{d}x$
Πολλαπλάσιο συνάρτησης	$\int_a^\beta cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x \quad , \quad c \in \mathbb{R}$
Διάσπαση ολοκληρώματος	$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\gamma f(x)\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R}$

Πίνακας 1.10: Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.28 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,\beta]$ τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = G(\beta) - G(a)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.29 Θ.Μ.Τ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
Αν μια συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,\beta)$ έτσι ώστε

$$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(\beta - a)$$