

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0 το οποίο είναι το κάτω άκρο του διαστήματος. Έτσι υπολογίζουμε το όριο της  $f$  στο 0 και έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + x) = -\infty < 0$$

Άρα θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $x_1$  κοντά στο 0 έτσι ώστε  $f(x_1) < 0$ . Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θ. Βολζανο για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[x_1, 1]$  και ισχύει ότι:

- i. η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, 1]$  ενώ
- ii.
  - $f(x_1) < 0$
  - $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$

άρα παίρνουμε  $f(x_1) \cdot f(1) < 0$ .

Έτσι, από το θεώρημα Βολζανο, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (x_1, 1) \subseteq (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .