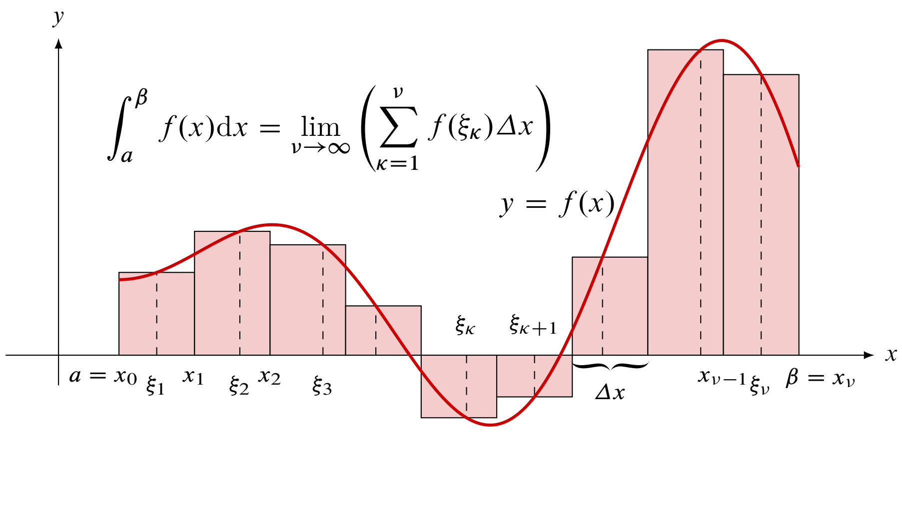
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

12 Ιουνίου 2025

# Μαθηματικά Γ' Λυκείου

## ΟΡΙΣΜΟΙ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

## ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ




Φρόνιμος Σπύρος

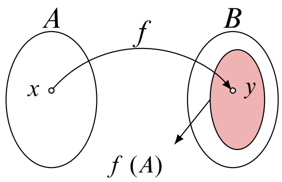
# 1ο Κεφάλαιο Ορισμοί

### Ορισμός 1 : Πραγματική Συνάρτηση

Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $A$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$ είναι μια διαδικασία (κανόνα) $f$ με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το $y$ λέγεται **τιμή** της συνάρτησης $f$ στο $x$ και συμβολίζεται $f(x)$.




### Ορισμός 2 : Σύνολο τιμών

Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού $A$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού $A$ λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

### Ορισμός 3 : Γραφική παράσταση

Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Έστω $f$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A$ και $Oxy$ ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της $f$ και συμβολίζεται συνήθως με $C_f$.

$$C_f = \{M(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

### Ορισμός 4 : Ίσες συναρτήσεις

Πότε δύο συναρτήσεις $f, g$ ονομάζονται ίσες;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Δύο συναρτήσεις $f, g$ λέγονται ίσες όταν

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $A$ και
- ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

### Ορισμός 5 : Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Έστω συναρτήσεις $f, g$ με πεδία ορισμού $A, B$ αντίστοιχα. Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g$ με πεδία ορισμού $A, B$ αντίστοιχα.

1. Η συνάρτηση $f + g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.

2. Η συνάρτηση $f - g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.
3. Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.
4. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

### Ορισμός 6 : Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g$ με πεδία ορισμού $A, B$ αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της $f$ με την $g$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

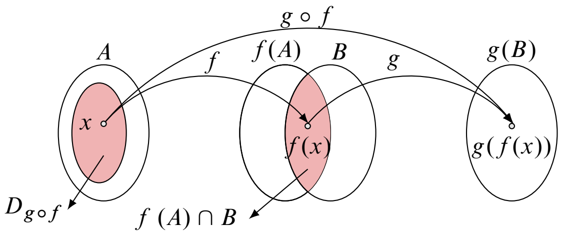
Αν $f, g$ είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $A, B$ αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της $f$ με την $g$**, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της $f$ για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\ B \neq \varnothing$.




Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

(Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in B \text{ και } g(x) \in A\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.)

### Ορισμός 7 : Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Πότε μία συνάρτηση $f$ ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Έστω μια συνάρτηση $f$ και $\Delta$ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η $f$ θα ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο $\Delta$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

### Ορισμός 8 : Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Πότε μία συνάρτηση $f$ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Έστω μια συνάρτηση $f$ και $\Delta$ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η $f$ θα ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο $\Delta$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η $f$ σε κάθε περίπτωση λέγεται **γνησίως μονότονη**.

**Ορισμός 9 : Ολικό μέγιστο**

Έστω μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$. Τι ονομάζεται τοπικό μέγιστο της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$ θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0$ το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

**Ορισμός 10 : Ολικό ελάχιστο**

Έστω μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$. Τι ονομάζεται τοπικό ελάχιστο της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$ θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0$ το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται **ολικά ακρότατα**. Το $x_0$ λέγεται **θέση** ακροτάτου.

**Ορισμός 11 : Συνάρτηση $1-1$**

Πότε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ ονομάζεται συνάρτηση $1-1$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1-1$ εάν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της $f$ ισχύει

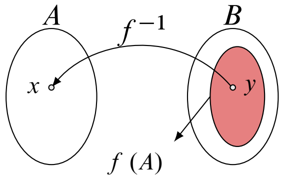
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Ορισμός 12 : Αντίστροφη συνάρτηση**

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση μία $1-1$ συνάρτηση. Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της $f$.




- Συμβολίζεται με $f^{-1}$ και είναι $f^{-1} : f(A) \to A$.
- Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της $f$, ενώ το σύνολο τιμών της $f^{-1}$ είναι το πεδίο ορισμού $A$ της $f$.
- Ισχύει ότι $x = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f(A)$.

**Ορισμός 13 : Συνεχής συνάρτηση σε σημείο**

Πότε μια συνάρτηση $f$ ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Ορισμός 14 : Συνεχής συνάρτηση**

Πότε μια συνάρτηση $f$ ονομάζεται συνεχής;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής**, εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Ορισμός 15 : Συνεχής συνάρτηση σε διάστημα**

Πότε μια συνάρτηση $f$ ονομάζεται συνεχής σε ένα

1. ανοικτό διάστημα $(a, \beta)$;
2. κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

1. Μια συνάρτηση $f$ θα λέγεται συνεχής σε ένα **ανοιχτό** διάστημα $(a, \beta)$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.
2. Μια συνάρτηση $f$ θα λέγεται συνεχής σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

**Ορισμός 16 : Παράγωγος σε σημείο**

Πότε μια συνάρτηση $f$ ονομάζεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της $f$ στο $x_0$ και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

**Ορισμός 17 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση**

Πότε μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού $A$, λέγεται παραγωγίσιμη;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ θα λέγεται παραγωγίσιμη στο **πεδίο ορισμού** της ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in D_f$.

**Ορισμός 18 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα**

Πότε μια συνάρτηση $f$ λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα

1. ανοικτό διάστημα $(a, \beta)$;
2. κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

1. Μια συνάρτηση $f$ θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **ανοικτό** διάστημα $(a, \beta)$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.
2. Μια συνάρτηση $f$ θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

**Ορισμός 19 : Πρώτη παράγωγος**

Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα σύνολο $A$. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Έστω μια συνάρτηση $f : \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $A_1$ το σύνολο των σημείων $x \in A$ για τα οποία η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχεί στο $f'(x)$ ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της $f$ η απλά **παράγωγος** της $f$. Συμβολίζεται με $f'$.

**Ορισμός 20 : Δεύτερη παράγωγος**

Έστω μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$. Τι ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της $f$. Πως ορίζεται η $\nu-$οστή παράγωγος της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Έστω $A_1$ το σύνολο των σημείων για τα οποία η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Αν υποθέσουμε ότι το $A_1$ είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων τότε η παράγωγος της $f'$, αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της $f$ και συμβολίζεται με $f''$. Επαγωγικά ορίζεται και η $\nu-$οστή παράγωγος της $f$ και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)}\right]'$$

**Ορισμός 21 : Ρυθμός μεταβολής**

Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής ενός ποσού $y = f(x)$ ως προς ένα ποσό $x$ σε ένα σημείο $x_0$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη $x, y$ συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν $f$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του $y$ ως προς το $x$ στο σημείο $x_0$ την παράγωγο $f'(x_0)$.

**Ορισμός 22 : Τοπικό μέγιστο**

Πότε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού $A$, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $x_0$ λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της $f$.

**Ορισμός 23 : Τοπικό ελάχιστο**

Πότε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού $A$, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $x_0$ λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της $f$.

**Ορισμός 24 : Τοπικά ακρότατα**

Τι ονομάζουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα της $f$ ονομάζονται τοπικά ακρότατα της $f$.

**Ορισμός 25 : Κυρτή συνάρτηση**

Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$ . Πότε λέμε οτι η συνάρτηση $f$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο $\Delta$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**
Μια συνάρτηση $f$ λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο $\Delta$, αν η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta$.

### Ορισμός 26 : Κοίλη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$ . Πότε λέμε οτι η συνάρτηση $f$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο $\Delta$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Μια συνάρτηση $f$ λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο $\Delta$, αν η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta$.

### Ορισμός 27 : Σημείο καμπής

Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(a, \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(a, \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0$. Αν:

- η $f$ είναι κυρτή στο $(a, x_0)$ και κοίλη στο $(x_0, \beta)$ η αντιστρόφως και
- η $C_f$ έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της $C_f$.

### Ορισμός 28 : Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $x = x_0$ ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της $C_f$.

### Ορισμός 29 : Οριζόντια ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $y = y_0$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$) τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της $C_f$ στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$).

### Ορισμός 30 : Πλάγια ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντίστοιχα στο $-\infty$ αν

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

- Αν $\lambda = 0$ η ασύμπτωτη είναι οριζόντια.
- Αν $\lambda \neq 0$ η ασύμπτωτη είναι πλάγια.

### Ορισμός 31 : Αρχική συνάρτηση

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της $f$ στο $\Delta$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης $f$ σε ένα διάστημα $\varDelta$ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $F$ για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \ \text{, για κάθε } x \in \varDelta$$

# 2ο Κεφάλαιο Αποδείξεις - Διατυπώσεις Θεωρημάτων

## Θεώρημα 1 : Συμμετρία $C_f$ και $C_{f^{-1}}$

**Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων $f$ και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω μια συνάρτηση $f$ η οποία είναι $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη. Θα ισχύει γι αυτήν ότι

$$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $M(a, \beta)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της $f$ τότε

$$f(a) = \beta \Rightarrow a = f^{-1}(\beta)$$

κάτι που σημαίνει ότι το σημείο $M'(\beta, a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f^{-1}$. Τα σημεία όμως $M$ και $M'$ είναι συμμετρικά ως προς της ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x;\hat{O}y'$. Άρα οι $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.

## Θεώρημα 2 : Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης - Σελ. 167

**Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \\
&= \lim_{x\to x_0} a_\nu x^\nu + \lim_{x\to x_0} a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\
&= a_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + a_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\
&= a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

## Θεώρημα 3 : Όριο ρητής συνάρτησης - Σελ. 167

**Αν $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι μια ρητή συνάρτηση και $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Q(x_0) \neq 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως ισχύει $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

**Θεώρημα 4 : Διατύπωση 1 Θεώρημα Bolzano - Σελ. 192**

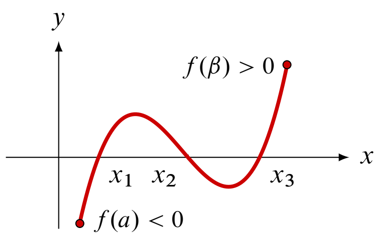
**Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

1. **Θεώρημα**
   Θεωρούμε μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$. Αν
   - η $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και
   - $f(a)\cdot f(\beta)<0$

   τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0\in(a,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0)=0$.

2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Για μια συνεχή συνάρτηση $f$ στο διάστημα $[a,\beta]$ η συνθήκη $f(a)\cdot f(\beta)<0$ σημαίνει ότι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία $A(a,f(a))$ και $B(\beta,f(\beta))$ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση $C_f$, λόγω της συνέχειας, θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(a,\beta)$.




**Θεώρημα 5 : Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών - Σελ. 194**

**Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.**

**ΘΕΩΡΗΜΑ**
Θεωρούμε μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$. Αν

- η $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και
- $f(a)\neq f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(a,\beta)$ ώστε για κάθε αριθμό $\eta$ μεταξύ των $f(a)$, $f(\beta)$ να ισχύει $f(x_0)=\eta$.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$ με $x\in[a,\beta]$ και $\eta$ είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει $f(a)<\eta<f(\beta)$[1]. Γι αυτήν θα ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και επιπλέον
- $g(a)=f(a)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$ άρα παίρνουμε $g(a)\cdot g(\beta)<0$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(a,\beta)$ ώστε να ισχύει

$$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)-\eta=0\Rightarrow f(x_0)=\eta$$

**Θεώρημα 6 : Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ Συνεχής - Σελ. 217**

**Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.**

[1] Μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε $f(\beta)<\eta<f(a)$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow \\ \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ άρα η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**Θεώρημα 7 : Παράγωγος σταθερής συνάρτησης. - Σελ 223**

**Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω $f(x) = c$ μια σταθερή συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως παίρνοντας το όριο της παραγώγου θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Άρα προκύπτει ότι $(c)' = 0$.

**Θεώρημα 8 : Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης. - Σελ. 223**

**Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως η παράγωγος της $f$ στο $x_0$ θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Έτσι για κάθε $x$ θα ισχύει ότι $(x)' = 1$.

**Θεώρημα 9 : Παράγωγος δύναμης - Σελ. 224**

**Να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu - 1}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} &= \frac{(x - x_0)\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right)}{x - x_0} = \\ &= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1} \end{aligned}$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της παραγώγου θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right) = \\ = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \ldots + x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} = \nu \cdot x_0^{\nu-1}$$

Έτσι η παράγωγος της $f$, για κάθε $x \in D_f$ θα είναι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

**Θεώρημα 10 : Παράγωγος άρρητης συνάρτησης. - Σελ. 224**

**Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάζουμε αν η $f$ είναι παγαγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

άρα η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Στη συνέχεια για κάθε $x \neq x_0 > 0$ θα ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**Θεώρημα 11 : Παράγωγος αθροίσματος. - Σελ. 229**

**Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει:**

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $S = f + g$ και για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Έτσι για την παράγωγο της συνάρτησης $S$ θα έχουμε ότι:

$$S'(x_0) = (f + g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης $f + g$ στο $x_0$ θα είναι η $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

**Θεώρημα 12 : Παράγωγος γινομένου - Σελ.**

**Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$**

**και ισχύει:**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

### Θεώρημα 13 : Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων - Σελ. 229

**Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ του γινομένου τριών παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με**

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου δύο συναρτήσεων και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} [(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' &= (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

### Θεώρημα 14 : Παράγωγος δύναμης με αρνητικό εκθέτη - Σελ. 231-232

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου δύο συναρτήσεων θα έχουμε για κάθε $x \neq 0$ ότι:

$$f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^\nu - 1 \cdot (x^\nu)'}{x^{2\nu}} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

### Θεώρημα 15 : Παράγωγος εφαπτομένης - Σελ. 232

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | \text{συν}x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' &= \\ = \frac{(\text{ημ}x)' \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} &= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x} \end{aligned}$$

**Θεώρημα 16 : Παράγωγος συνεφαπτομένης - Σελ. 232**

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | \text{ημ}x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\text{σφ}x = \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$f'(x) = (\text{σφ}x)' = \left(\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\right)' = \frac{(\text{συν}x)' \cdot \text{ημ}x - \text{συν}x \cdot (\text{ημ}x)'}{\text{ημ}^2 x} = \frac{-\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x} = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$$

**Θεώρημα 17 : Παράγωγος δύναμης με μη ακέραιο εκθέτη - Σελ. 234**

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = ax^{a-1}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η αρχική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

Οπότε η παράγωγός της θα ισούται με

$$f'(x) = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

**Θεώρημα 18 : Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης - Σελ. 234-235**

**Να αποδείξετε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ ενώ η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι

$$f'(x) = (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

**Θεώρημα 19 : Παράγωγος λογαρίθμου - Σελ. 235**

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x > 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln x$ επομένως παίρνουμε $f'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β. Αν $x < 0$ τότε η $f$ γίνεται $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ και άρα η παράγωγός της, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ θα ισούται με

$$f'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Θεώρημα 20 : Θεώρημα Rolle - Σελ. 246**

**Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.**

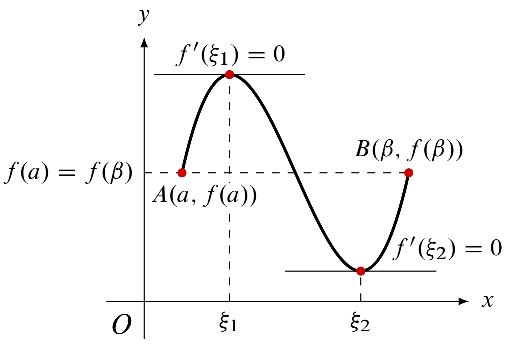
**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

1. **Θεώρημα**
   Δίνεται μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η $f$ είναι

   - συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$,
   - παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a, \beta)$ και ισχύει
   - $f(a) = f(\beta)$

   τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

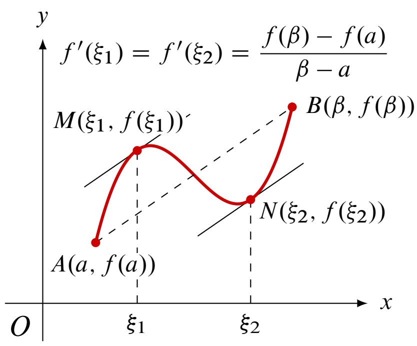
2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της $C_f$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.




**Θεώρημα 21 : Θεώρημα μέσης τιμής - Σελ. 246-247**

**Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**




1. **Θεώρημα**
   Δίνεται μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν αυτή είναι

   - συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και
   - παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a, \beta)$

   τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Αν για τη συνάρτηση $f$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα $AB$ που ενώνει τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ στα άκρα του διαστήματος.

**Θεώρημα 22 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 1 - Σελ. 251**

**Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Να αποδείξετε ότι αν**

- **η $f$ είναι συνεχής στο $\Delta$ και ισχύει**
- **$f'(x) = 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος**

**τότε η $f$ είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $\Delta$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν $x_2 \neq x_2$ θεωρούμε ότι είναι $x_1 < x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι

- Η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1, x_2)$.

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$ οπότε και $f'(\xi) = 0$. Άρα παίρνουμε ότι

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Ομοίως και για $x_1 > x_2$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα οπότε σε κάθε περίπτωση η $f$ είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $\Delta$.

**Θεώρημα 23 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 2 - Σελ. 251**

**Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες σε ένα διάστημα $\Delta$. Να αποδείξετε ότι αν**

- **οι συναρτήσεις $f, g$ είναι συνεχείς στο διάστημα $\Delta$ και**
- **$f'(x) = g'(x)$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του $\Delta$**

**τότε υπάρχει σταθερά $c$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h = f - g$ με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Γι αυτήν θα ισχύει

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\Delta$. Έτσι η $h$ θα είναι σταθερή άρα θα υπάρχει σταθερά $c$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

**Θεώρημα 24 : Κριτήριο μονοτονίας συνάρτησης - Σελ. 253**

**Έστω μια συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$. Να αποδείξετε ότι αν**

**α. αν ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Delta$.**

**β. αν ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\Delta$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Εργαζόμαστε για την περίπτωση $f'(x) > 0$ και ομοίως αποδεικνύεται και για $f'(x) < 0$. Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε

- η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1, x_2)$

οπότε θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$ άρα προκύπτει

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \xRightarrow{x_1 < x_2} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta$.

**Θεώρημα 25 : Θεώρημα Fermat - Σελ. 260**

**Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat:**
**Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Αν**

- **$x_0$ είναι ένα *εσωτερικό* σημείο του $\Delta$**
- **η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ και**
- **είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε**

$$f'(x_0) = 0$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό μέγιστο. Θα υπάρχει έτσι ένας θετικός αριθμός $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$. Επίσης η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$ τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \tag{1}$$

β. Αν $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$ τότε παίρνουμε ομοίως ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $f'(x_0) = 0$. Εργαζόμαστε αναλόγως και για την περίπτωση όπου η $f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$.

**Θεώρημα 26 : Κριτήριο τοπικών ακρότατων - Σελ. 262**

**Δίνεται μια συνάρτηση $f$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(\alpha, \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι**

**α. αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0$.**

**β. αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η $f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$.**

**γ. αν η $f'$ διατηρεί το πρόσημό της σε κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha, \beta)$ και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

α. Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. Σύμφωνα με το κριτήριο μονοτονίας η $f$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ θα ισχύει

$$x \leq x_0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Επίσης από το γεγονός ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ παίρνουμε ότι $f$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Άρα προκύπτει

$$x \geq x_0 \xRightarrow{f \searrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ παίρνουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ άρα η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0$.

β. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

γ. Θεωρούμε ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Έτσι η συνάρτηση $f$ θα είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ οπότε

$$\text{για } x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

άρα η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα $(\alpha, \beta)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ αφού η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- Ομοίως αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει επίσης $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος αποδείξαμε προηγουμένως ότι $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα $(\alpha, \beta)$. Εργαζόμαστε αναλόγως και για $f'(x) < 0$.

**Θεώρημα 27 : Αρχική συνάρτηση - Σελ. 304**

**Δίνεται μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ και έστω $F$ μια παράγουσα της $f$ στο $\Delta$. Να αποδείξετε ότι**

**α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής**

$$G(x) = F(x) + c$$

**είναι παράγουσες της $f$ στο $\Delta$ και ότι**

**β. κάθε άλλη παράγουσα $G$ της $f$ στο $\Delta$ παίρνει τη μορφή**

$$G(x) = F(x) + c$$

**για κάθε $x \in \Delta$, με $c \in \mathbb{R}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

α. Για να είναι η $G$ παράγουσα της $f$ στο διάστημα $\Delta$ θα πρέπει να ισχύει $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Έχουμε λοιπόν

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x) \ , \ x \in \Delta$$

β. Έστω $G$ μια άλλη παράγουσα της $f$ στο διάστημα $\Delta$. Θα ισχύει γι αυτήν ότι $G'(x) = f(x)$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε επίσης ότι $F'(x) = f(x)$ άρα παίρνουμε $G'(x) = F'(x)$ οπότε θα υπάρχει σταθερά $c$ ώστε

$$G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

σύμφωνα με το πόρισμα του Θ.Μ.Τ.

**Θεώρημα 28 : Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού - Σελ. 334-335**

**Δίνεται μια συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε ισχύει**

$$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = G(\beta) - G(a)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Σύμφωνα με το θεώρημα της αρχικής συνάρτησης, η $F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $f$ στο $[a, \beta]$. Έτσι κάθε άλλη παράγουσα της γράφεται ως $G(x) = F(x) + c$. Θέτοντας όπου $x = a$ παίρνουμε:

$$G(a) = F(a) + c \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x + c \Rightarrow c = G(a)$$

Θέτοντας επίσης όπου $x = \beta$ προκύπτει ότι:

$$G(\beta) = F(\beta) + c \Rightarrow G(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + G(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = G(\beta) - G(a)$$

**Θεώρημα 29 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 1 - Σελ. 343**

**Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοιες ώστε**

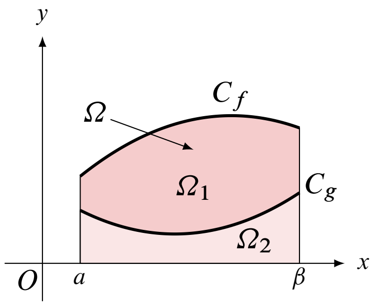
- **$f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και**
- **$f, g$ μη αρνητικές στο $[a, \beta]$.**

**Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ μεταξύ των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_g$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο**

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν των χωρίων $\Omega_1, \Omega_2$ μεταξύ της $C_f$ και αντίστοιχα της $C_g$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ ομοίως και για την $C_g$ είναι




$$E(\Omega_1) = \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ , \ E(\Omega_2) = \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ θα είναι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) =$$
$$= \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

**Θεώρημα 30 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 2 - Σελ. 344**

**Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοιες ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ μεταξύ των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_g$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο**

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Για τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g$ θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός $c$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0.$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $f(x) + c, g(x) + c$ από $x = a$ έως $x = \beta$ θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)]\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta [f(x) + c - g(x) - c]\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

**Θεώρημα 31 : Εμβαδόν χωρίου από αρνητική συνάρτηση - Σελ. 344**

**Δίνεται συναρτήση $g$ ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ μεταξύ της $C_g$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο**

$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x))\,\mathrm{d}x$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τη μηδενική συνάρτηση $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ παίρνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των $C_f, C_g$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (0 - g(x))\,\mathrm{d}x = -\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

**Θεώρημα 32 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 3 - Σελ. 344-345**

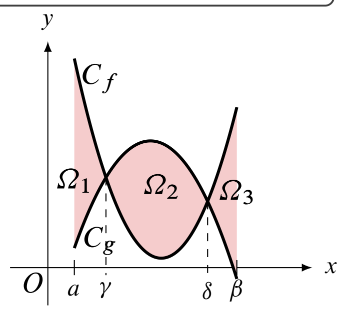
**Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ μεταξύ των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_g$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον**

**τύπο**

$$\boldsymbol{E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο. Θεωρούμε ότι μηδενίζεται σε δύο εσωτερικά σημεία $\gamma, \delta$ του διαστήματος $[a, \beta]$. Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ μεταξύ των $C_f, C_g$ και των ευθειών $x = a, x = \gamma, x = \delta, x = \beta$.




$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$$

$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

# 3ο Κεφάλαιο Ιδιότητες

## Ιδιότητα 1 : Όρια

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \cdot l_1 \ \ , \ \ k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \ \ , \ \ l_2 \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right| = |l_1|$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[\kappa]{l_1} \ \ , \ \ l_1 \geq 0$
7. $\lim\limits_{x \to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^{\nu} = l_1^{\nu}$

# 4ο Κεφάλαιο Προτάσεις χωρίς απόδειξη

# 5ο Κεφάλαιο Προτάσεις με απόδειξη

# 6ο Κεφάλαιο Αντιπαραδείγματα

## 7ο Κεφάλαιο Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος

# 8ο Κεφάλαιο Τυπολόγιο - Πίνακες