Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
26 Ιουλίου 2017

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πολυώνυμα

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για εκφράσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Η μεταβλητή μπορεί να βρίσκεται μέσα σε μια εξίσωση και γενικά σε μια αλγεβική παράσταση. Συμβολίζεται με ένα γράμμα όπως $a, \beta, x, y, \ldots$ κ.τ.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΜΟΝΩΝΥΜΟ
Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία έχει μεταξύ των μεταβλητών μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x^{\nu_1} y^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot z^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}} \quad , \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa \in \mathbb{N}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.
- Τα μονώνυμα μιας μεταβλητής είναι της μορφής ax^ν, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ
Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά πολυώνυμα** ενώ το 0 **μηδενικό πολυώνυμο**.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P, Q, A, B \ldots$ τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση η οποία περιέχει τις μεταβλητές του δηλαδή :

$$P(x), Q(x, y), A(z, w), B(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ορίζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης της κάθε μεταβλητής. Ο όρος που περιέχει τη μεταβλητή με το μεγαλύτερο εκθέτη ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος**.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Τιμή ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικαταστίσουμε τη μεταβλητή του πολυωνύμου με έναν αριθμό x_0. Συμβολίζεται με $P(x_0)$ και είναι ίση με :

$$P(x_0) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ ο οποίος μηδενίζει το πολυώνυμο.

$$P(\rho) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Έστω δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Ο βαθμός του αθροίσματος ή της διαφοράς $A(x) \pm B(x)$ είναι μικρότερος ίσος του μέγιστου των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) + B(x)) \leq \max\{\nu, \mu\}$.

ii. Ο βαθμός του γινομένου $A(x) \cdot B(x)$ ισούται με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) \cdot B(x)) = \nu + \mu$.

iii. Ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης $A(x) : B(x)$ ισούται με τη διαφορά των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) : B(x)) = \nu - \mu$.

iv. Ο βαθμός της δύναμης $[A(x)]^\kappa$ του πολυωνύμου $A(x)$ ισούται με το γινόμενο του εκθέτη κ με το βαθμό του $A(x)$: βαθμός$([A(x)]^\kappa) = \nu \cdot \kappa$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΣΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$ θα είναι μεταξύ τους ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_i = \beta_i \text{ , για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \mu$$
$$\text{και } a_i = 0 \text{ , για κάθε } i = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, \nu$$

Ένα πολυώνυμο $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ισούται με το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν όλοι του οι συντελεστές είναι μηδενικοί.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ , για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$