Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

30 Μαρτίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κωνικές Τομές

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

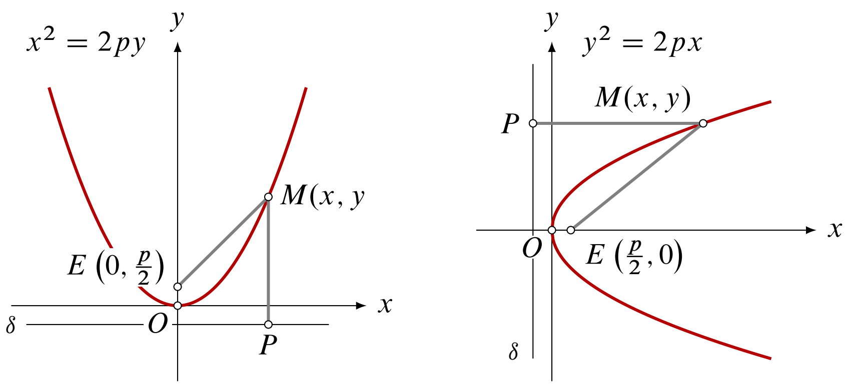
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν ίσες αποστάσεις από ένα σταθερό σημείο και μια ευθεία.

$$ME = MP$$

- Το σταθερό σημείο E ονομάζεται **εστία** της παραβολής.
- Η ευθεία δ ονομάζεται **διευθετούσα**.
- Το σημείο το οποίο βρίσκεται στο μέσο της απόστασης της εστίας από τη διευθετούσα ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.



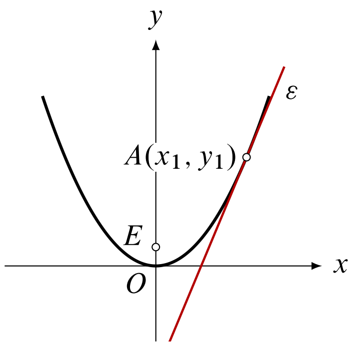
- Η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα συμβολίζεται με $|p|$, όπου p είναι η **παράμετρος** της παραβολής, με $p \in \mathbb{R}$.
- Κάθε παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων περιγράφεται από εξισώσεις της μορφής

$$x^2 = 2py \quad \text{και} \quad y^2 = 2px$$

- Η εστία της παραβολής $x^2 = 2py$ βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ ενώ της $y^2 = 2px$ στον οριζόντιο άξονα $x'x$.
- Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο O. Αντίστοιχα η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο.

- Η ευθεία που είναι κάθετη στη διευθετούσα και διέρχεται από την εστία της παραβολής ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ
Εφαπτομένη μιας παραβολής ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία έχει ένα κοινό σημείο με την παραβολή. Λέμε οτι εφάπτεται αυτής. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο επαφής**.



Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την παραβολή. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή παραβολής από της παραπάνω θα είναι :

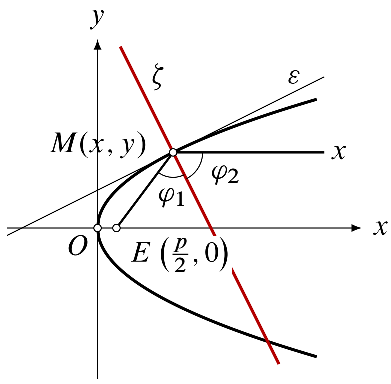
- Για την παραβολή με εστίες στον άξονα $x'x$: $(\varepsilon) : xx_1 = p(y + y_1)$
- Για την παραβολή με εστίες στον άξονα $y'y$: $(\varepsilon) : yy_1 = p(x + x_1)$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ
Για τα σημεία μιας παραβολής και τη γραφική της παράσταση ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1. Η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα και η εστία της παραβολής.
2. Παραβολή $x^2 = 2py$.
   i. Για την παραβολή $x^2 = 2py$ οι αριθμοί p και y είναι ομόσημοι.
   ii. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής τότε και το σημείο $M_2(-x, y)$ θα είναι επίσης σημείο της παραβολής.
3. Παραβολή $y^2 = 2px$.
   i. Για την παραβολή $y^2 = 2px$ οι αριθμοί p και x είναι ομόσημοι.
   ii. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής τότε και το σημείο $M_1(x, -y)$ θα είναι επίσης σημείο της παραβολής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Η ευθεία που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο μιας παραβολής και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία Mx που είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής και το ευθύγραμμο τμήμα ME που ενώνει το σημείο με την εστία της παραβολής.



Η ιδιότητα αυτή της έλλειψης ονομάζεται **ανακλαστική** και δείχνει ότι κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από την εστία της παραβολής, ανακλάται πάνω στην παραβολή με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης της με αποτέλεσμα να γίνει παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας.