Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
13 Απριλίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κωνικές Τομές

ΕΛΛΕΙΨΗ

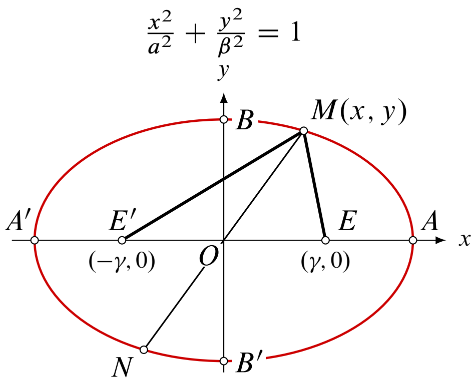
ΟΡΙΣΜΟΙ

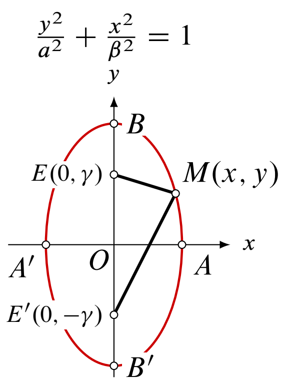
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΕΛΛΕΙΨΗ
Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία παραμένει σταθερό.

- Τα δύο σταθερά σημεία έστω E, E' ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης.
- Το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου M από τις εστίες συμβολίζεται με $2a$.

$$ME + ME' = 2a$$

- Η απόσταση EE' μεταξύ των εστιών ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με 2γ.





- Τα σημεία στα οποία τέμνει η έλλειψη τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' και BB' με άκρα τις κορυφές της έλλειψης κατά μήκος ενός άξονα ονομάζονται **άξονες** της έλλειψης.
- Οι δύο άξονες είναι άξονες συμμετρίας της καμπύλης της έλλειψης ενώ η αρχή O των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας της και ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα MN με άκρα δύο συμμετρικά σημεία M, N της έλλειψης ως προς το κέντρο της ονομάζεται **διάμετρος** της έλλειψης.

- Κάθε έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ ή } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

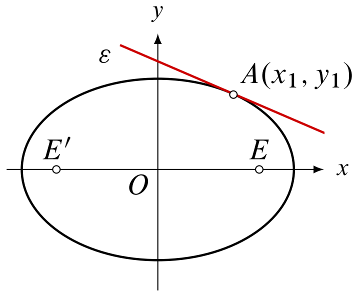
όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$, η οποία περιέχει τις συντεταγμένες x, y των σημείων της.

- Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον οριζόντιο άξονα $x'x$, μεγάλο άξονα τον $AA' = 2a$ και μικρό τον $BB' = 2\beta$. Αντίστοιχα η έλλειψη με εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, μεγάλο άξονα τον $BB' = 2a$ και μικρό τον $AA' = 2\beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ
Εφαπτομένη μιας έλλειψης ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία έχει ένα κοινό σημείο με την έλλειψη και λέμε οτι εφάπτεται αυτής. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο επαφής**.

Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την έλλειψη. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή έλλειψης από της παραπάνω είναι :

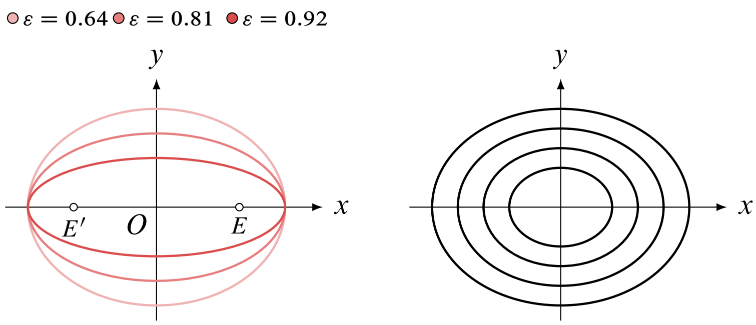
- Για την έλλειψη με εστίες στον άξονα $x'x$: (ε) : $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
- Για την έλλειψη με εστίες στον άξονα $y'y$: (ε) : $\frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$



ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ
Εκκεντρότητα μιας έλλειψης ονομάζεται ο θετικός πραγματικός αριθμός $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ που ορίζεται ο λόγος της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου της άξονα.

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$$

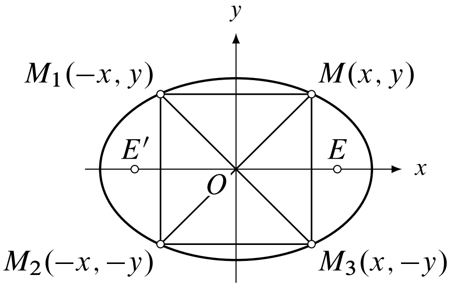
Η εκκεντρότητας μιας έλλειψης χαρακτηρίζει το σχήμα της. Όσο μεγαλύτερη εκκεντρότητα έχει μια έλλειψη, τόσο επιμήκης είναι κατα μήκος του μεγάλου της άξονα.

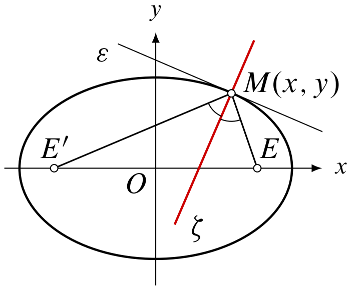


Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα ονομάζονται **όμοιες**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ
Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο μιας έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε τα συμμετρικά του σημεία : $M_1(-x, y)$ ως προς τον άξονα $y'y$, $M_2(-x, -y)$ ως προς την αρχή των αξόνων και $M_3(x, -y)$ ως προς τον άξονα $x'x$ ανήκουν κι αυτά στην καμπύλη της έλλειψης.





ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Η ευθεία που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο M μιας έλλειψης και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το σημείο με τις εστίες της έλλειψης.

$$\zeta\hat{M}E = E'\hat{M}\zeta$$

Η ιδιότητα αυτή της έλλειψης ονομάζεται **ανακλαστική** και δείχνει οτι κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από τη μια εστία της έλλειψης, ανακλάται πάνω στην έλλειψη με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης της με αποτέλεσμα να συναντήσει την άλλη εστία της έλλειψης.