



Άλγεβρα - Α' Λυκείου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

22 Οκτωβρίου 2024

■ Ερωτήσεις θεωρίας

1.

- α. Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
β. Ποιος αριθμός μας δείχνει το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.
γ. Πότε μια εξίσωση έχει 2 ρίζες, πότε μια και πότε είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .
δ. Να γραφούν οι τύποι του Ίετα.

2. Σωστό - Λάθος

Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω εξισώσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- α. Αν για μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχουμε $\Delta > 0$ τότε έχει 2 άνισες λύσεις.
β. Αν για μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχουμε $\Delta < 0$ τότε έχει μια διπλή λύση.
γ. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ παριστάνει μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού για κάθε τιμή του a .
δ. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού τότε : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
ε. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με $x_1 = -x_2$ τότε $b = 0$.

■ Επίλυση εξισώσεων

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- α. $x^2 - 5x + 6 = 0$ στ. $x^2 - 6x + 5 = 0$
β. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ζ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$
γ. $x^2 - 7x + 12 = 0$ η. $2x^2 - 9x + 10 = 0$
δ. $x^2 + 3x - 4 = 0$ θ. $3x^2 - x - 4 = 0$
ε. $x^2 - 6x + 8 = 0$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- α. $x^2 - 4x + 4 = 0$ δ. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
β. $x^2 - 6x + 9 = 0$ ε. $36x^2 + 12x + 1 = 0$
γ. $x^2 - 10x + 25 = 0$ στ. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- α. $x^2 + x + 4 = 0$ γ. $2x^2 - 3x + 8 = 0$
β. $x^2 + 3x + 12 = 0$ δ. $2x^2 + x + 5 = 0$

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- α. $x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$
β. $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
γ. $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$
δ. $x^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})x - 4 = 0$

■ Τύποι Viete

7. Να βρεθούν οι λύσεις x_1, x_2 , μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, οι οποίες έχουν άθροισμα S και γινόμενο P με:

- α. $S = 9$ και $P = -10$ δ. $S = 0$ και $P = 4$
β. $S = -7$ και $P = 12$ ε. $S = 12$ και $P = 0$
γ. $S = 6$ και $P = 9$ στ. $S = 8$ και $P = -8$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, να βρεθεί η εξίσωση, αν γι αυτήν ισχύει

- α. $x_1 + x_2 = 7$ και $x_1 \cdot x_2 = 6$
β. $x_1 + x_2 = 8$ και $x_1 \cdot x_2 = 12$
γ. $x_1 + x_2 = -3$ και $x_1 \cdot x_2 = -28$
δ. $x_1 + x_2 = -12$ και $x_1 \cdot x_2 = 20$

9. Να βρεθεί η εξίσωση 2ου βαθμού, η οποία έχει λύσεις τους παρακάτω αριθμούς x_1, x_2 .

- α. $x_1 = 3$ και $x_2 = 5$
β. $x_1 = -2$ και $x_2 = -4$
γ. $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -\frac{3}{4}$
δ. $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = 3$

10. Να βρεθούν οι λύσεις x_1, x_2 , αν υπάρχουν, μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- α. $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = 3$
β. $x_1 + x_2 = -7$ και $x_1 \cdot x_2 = -8$
γ. $x_1 + x_2 = 3$ και $x_1 \cdot x_2 = 5$
δ. $x_1^2 + x_2^2 = 29$ και $(x_1 + x_2)^2 = 49$

■ Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

11. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ δ. $x^2 + 7|x| + 10 = 0$
β. $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ ε. $2x^2 - |x| - 10 = 0$
γ. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ στ. $x^2 - 10|x| + 25 = 0$

12. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ δ. $x^6 - 2x^3 - 15 = 0$
β. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ ε. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$
γ. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ στ. $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$

13. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $\frac{x-3}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{3-x}{x^2-x}$
β. $\frac{2x-1}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{3-2x}{x^2-3x+2}$
γ. $\frac{x+4}{x^2-4} + \frac{2x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}$
δ. $\frac{x+4}{x^2-2x} + 2 = \frac{x-2}{x}$

14. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $(x-1)^2 - 5|x-1| + 6 = 0$
β. $(2x-3)^2 - 7|2x-3| + 12 = 0$
γ. $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 = 0$
δ. $(x+3)^6 + 19(x+3)^3 - 216 = 0$

15. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $(x^2-x)^2 + 4|x^2-x| - 12 = 0$
β. $(x+\frac{1}{x})^2 - 7(x+\frac{1}{x}) + 10 = 0$
γ. $(x^3-2)^2 + 19(x^3-2) - 150 = 0$
δ. $(|x|-3)^2 + 8(|x|-3) - 12 = 0$

■ Παραμετρικές

16. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2ου βαθμού

$$x^2 + (\lambda - 2)x + 2\lambda^2 = 0$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία παράμετρος.

- α. Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης.
β. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.

δ. Για ποιές τιμές τις παραμέτρου λ είναι αδύνατη η εξίσωση.

17. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2ου βαθμού

$$x^2 + 3\lambda x + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία παράμετρος.

- α. Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης.
β. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.

18. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + x - \lambda^2 = 0$$

έχει 2 άνισες λύσεις για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

19. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$$

- α. έχει λύσεις για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$.
β. έχει μια διπλή λύση για $a = -1$.

20. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + (a-3)x + a^2 + 4 = 0$$

δεν έχει λύσεις για καμία τιμή του a .

21. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$2ax^2 + (a-4)x + a + 2 = 0$$

να έχει μια διπλή ρίζα. 22. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$ax^2 + (2a-3\beta)x + (a-\beta+2) = 0$$

να έχει λύσεις τις $x_1 = -2, x_2 = 1$.

23. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + 2(\beta-1)x + a + \beta^2 - 7 = 0$$

να έχει μια διπλή λύση τη $x = -2$.

24. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (a+3\beta-2)x + 4a - 2a\beta - 2 = 0$$

να έχει λύσεις τις $x_1 = 4 - 2a$ και $x_2 = \beta - 3$.

25. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + 8 = 0$$

τότε χωρίς αυτή να λυθεί, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

α. $x_1 + x_2$

δ. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

β. $x_1 x_2$

ε. $x_1^3 + x_2^3$

γ. $x_1^2 + x_2^2$

στ. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

26. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

τότε να βρεθεί να βρεθεί η εξίσωση η οποία έχει λύσεις τις $y_1 = 2x_1 + x_2$ και $y_2 = x_1 - 3x_2$.

■ Προβλήματα

27. Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής x για την οποία το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος ισούται με $E = 84m^2$.

