1 Διαφορικός Λογισμός

ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Συνάρτηση
Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζεται μια διαδικασία με την οποία **κάθε** στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται **σε ένα ακριβώς** στοιχείο του συνόλου B.

1.2 Πράξεις συναρτήσεων
Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A. Τότε ορίζουμε τις συναρτήσεις:

- Άθροισμα $S = f + g$ με τύπο $S(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Διαφορά $D = f - g$ με τύπο $D(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Γινόμενο $P = f \cdot g$ με τύπο $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Πηλίκο $R = f + g$ με τύπο $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A$ με $g(x) \neq 0$.

1.3 Γραφική παράσταση
Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f και συμβολίζεται με C_f.

1.4 Γνησίως αύξουσα
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

1.5 Γνησίως φθίνουσα
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

1.6 Τοπικό μέγιστο
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

$$f(x) \leq f(x_0)$$

1.7 Τοπικό ελάχιστο
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

$$f(x) \geq f(x_0)$$

1.8 Συνεχής στο x_0
Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1.9 Συνεχής συνάρτηση
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής εάν είναι συνεχής **σε κάθε** σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

1.10 Παράγωγος στο x_0

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 και το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0. Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και είναι

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1.11 Παράγωγος συνάρτηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και έστω $B \subseteq A$ το σύνολο των τιμών του $x \in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχεί στην παράγωγο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ονομάζεται **(πρώτη) παράγωγος** της συνάρτησης f. Συμβολίζεται με f'.

1.12 Εφαπτόμενη ευθεία

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο

$$y = f'(x_0) + \beta$$

Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\lambda = f'(x_0) = \text{εφ}\varphi$$

1.13 Ρυθμός Μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$ ορίζεται ως η παράγωγος $f'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

1.14 Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = (c)' = 0$.

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση $f(x) = c$ έχουμε ότι

$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0$$

Για κάθε $h \neq 0$ είναι:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Άρα

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Επομένως $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $(c)' = 0$.

1.15 Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$.

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση $f(x) = x$ έχουμε ότι

$$f(x + h) - f(x) = x + h - x = 0$$

Για κάθε $h \neq 0$ είναι:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

΄Αρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Επομένως $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $(x)' = 0$.

1.16 Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 0$.

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχουμε ότι

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Για κάθε $h \neq 0$ είναι:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

΄Αρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Επομένως $f'(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $(x^2)' = 2x$.

1.17 Να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. ΄Εχουμε ότι

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c\,(f(x+h) - f(x))$$

Για κάθε $h \neq 0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c\,(f(x+h)-f(x))}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

΄Αρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$$

1.18 Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. ΄Εχουμε ότι

$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h)] = [f(x) - g(x)] = f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$$

Για κάθε $h \neq 0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

΄Αρα

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

1.19 Να αποδείξετε ότι $(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$, $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$ έχουμε $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \\ &= \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2 x} = \\ &= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x} \end{aligned}$$

1.20 Να αποδείξετε ότι $(\text{σφ}x)' = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$, $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \kappa\pi\}$ έχουμε $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$. Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{σφ}x)' = \left(\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\right)' = \\ &= \frac{(\text{συν}x)'\text{ημ}x - \text{συν}x(\text{ημ}x)'}{\text{ημ}^2 x} = \frac{-\text{ημ}x \cdot \text{ημ}x - \text{συν}x \cdot \text{συν}x}{\text{ημ}^2 x} = \\ &= \frac{-\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x} = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x} \end{aligned}$$

1.21 Να διατυπώσετε τα κριτήρια μονοτονίας μιας συνάρτησης f.

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

1.22 Να διατυπώσετε τα κριτήρια τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f.

1. Έστω μια συνάρτηση f,παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) και $x_0 \in (a, \beta)$. Αν ισχύει
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$
   - $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$

   τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.
2. Έστω μια συνάρτηση f,παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) και $x_0 \in (a, \beta)$. Αν ισχύει
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$
   - $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$

   τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.