Αλέξανδρος Πολίτης
Μαθηματικός

Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
ΑΠΟ ΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- 100 Ορισμοί
- 250 Θεωρήματα
- 400 Μέθοδοι για λύση ασκήσεων
- 200 Λυμένα παραδείγματα
- 500 Άλυτες ασκήσεις και προβλήματα
- 200 Επαναληπτικά θέματα
- Απαντήσεις ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2018

Επανάληψη στα μαθηματικά
για τη Γ΄ Λυκείου

Αλέξανδρος Πολίτης - Μαθηματικός
Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ISBN : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Εξώφυλλο :

Στη γυναίκα μου.

Πρόλογος

Περιεχόμενα

Πίνακας Συμβόλων

Σύμβολο	Όνομα	Περιγραφή
$\neq$	Διάφορο	Εκφράζει ότι δύο στοιχεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
$>$	Μεγαλύτερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μεγαλύτερο του $2^{ου}$).
$<$	Μικρότερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μικρότερο του $2^{ου}$).
$\geq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $>$.
$\leq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $<$.
$\gtreqless$	Μεγαλύτερο μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $>$ και $<$.
$\pm$	Συν Πλην	Συνδυασμός των προσήμων $+$ και $-$.
$\mp$	Πλην Συν	Έχει την ίδια σημασία με το συμβολισμό $\pm$ και χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία θα εμφανιστούν τα πρόσημα $+$, $-$.
$\Rightarrow$	Συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις, όταν η μια έχει σαν συμπέρασμα την άλλη.
$\Leftarrow$	Αντίστροφη συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με φορά αντίστροφη από το σύνδεσμο $\Rightarrow$.
$\Leftrightarrow$	Διπλή συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με διπλή φορά. Δηλώνει ισοδυναμία μεταξύ τους.
$\%$	Ποσοστό τοις εκατό	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 100 ίσα κομμάτια.
‰	Ποσοστό τοις χιλίοις	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 1000 ίσα κομμάτια.
$\vert\ \vert$	Απόλυτη τιμή	Απόσταση ενός αριθμού από το 0.
$\sqrt{\ }$	Τετραγωνική ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**

Σύμβολο	Όνομα	Περιγραφή
$\sqrt[\nu]{\ }$	ν-οστή ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**
$\in$	Ανήκει	Σύμβολο το οποίο δηλώνει ότι ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο.
$\ni$	Ανήκει	Έχει την ίδια χρησιμότητα με το σύμβολο $\in$ και χρησιμοποιείται όταν το σύνολο γράφεται πριν το στοιχείο.
$\notin$	Δεν ανήκει	Έχει την αντίθετη σημασία από το σύμβολο $\in$ και δηλώνει ότι ένα στοιχείο δεν ανήκει σε ένα σύνολο.
$\subseteq$	Υποσύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
$\cup$, $\cap$	Ένωση, Τομή	Βλ. **Ορισμό ...**
$\varnothing$	Κενό σύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
∞	Άπειρο	
$\perp$	Κάθετο	

Μέρος Ι

Διαγώνισμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξισωσεισ - Ανισωσεισ

1.1 Εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός 1.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ

Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή.

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.
- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση** της ή **ρίζα** της.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εάν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εάν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.
- Εάν σε μια εξίσωση πολλών μεταβλητών, ορίσουμε ένα μέρος των μεταβλητών αυτών ώς κύριες μεταβλητές της εξίσωσης τότε οι επιπλέον μεταβλητές ονομάζονται **παράμετροι** ενώ η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.
- Η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

Παράδειγμα 1.1 : Είδη εξισώσεων

- Η εξίσωση $2x - 4 = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 2$ διότι μόνο ο αριθμός αυτός την επαληθεύει.
- Η εξίσωση $0x = -3$ είναι αδύνατη γιατί κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.
- Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αόριστη γιατί επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 1.2 : ΕΞΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν πολυώνυμα $1^{ου}$ βαθμού.

Θεώρημα 1.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.
2. Αν $a = 0$ και :

i. αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη** (ταυτότητα).
ii. αν $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

<table>
<tr><th colspan="2">Συντελεστές</th><th>Λύσεις</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a \neq 0$</td><td>$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = 0$</td><td>$\beta = 0$</td><td>$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις</td></tr>
<tr><td>$\beta \neq 0$</td><td>$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση</td></tr>
</table>

Πίνακας 1.1: Λύσεις εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέθοδος 1.1 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

***1^o Βήμα :* Απαλοιφή παρονομαστών**
Αν υπάρχουν παρονομαστές τότε για την απαλοιφή τους θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν όλοι οι όροι της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

***2^o Βήμα :* Απαλοιφή παρενθέσεων**
Αν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε τις απαραίτητες πράξεις ώστε να τις διώξουμε.

***3^o Βήμα :* Χωρισμός γνωστών από αγνώστους**
Μεταφέρουμε τους γνωστούς στο ένα μέλος και τους αγνώστους στο άλλο.

***4^o Βήμα :* Αναγωγή ομοίων όρων**
Προσθέτουμε τους όμοιους όρους σε κάθε μέλος της εξίσωσης.

***5^o Βήμα :* Λύση**
Διαιρούμε κάθε μέλος της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου και έτσι παίρνουμε τη λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 1.2 : Απλή εξίσωση
Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\mathbf{3x - 7 = x - 5}$$

ΛΥΣΗ
Η εξίσωση έχει απλή μορφή κάτι που σημαίνει ότι μπορούμε άμεσα να χωρίσουμε μέλος τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους. Έχουμε λοιπόν αναλυτικά ότι

$$\begin{gathered} 3x - 7 = x - 5 \Rightarrow \\ 3x - x = 7 - 5 \Rightarrow \\ 2x = 2 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \\ x = 1 \end{gathered}$$

Παράδειγμα 1.3 : Εξίσωση με παρενθέσεις

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

α. $3(x-2)-7=-2x-3$ **β.** $5-(4-3x)=x-2(x+5)$

ΛΥΣΗ

α. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα θα πολλαπλασιάσουμε ώστε να διώξουμε την παρένθεση. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

$$\begin{gathered}3(x-2)-7=-2x-3 \Rightarrow\\ 3x-6-7=-2x-3 \Rightarrow\\ 3x+2x=6+7-3 \Rightarrow\\ 5x=10 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{10}{5} \Rightarrow\\ x=2\end{gathered}$$

β. Η εξίσωση που θα δούμε περιέχει δύο παρενθέσεις. Προκειμένου να τις διώξουμε εξετάζουμε τι είδους πράξη υπάρχει έξω απ' αυτές. Η πρώτη έχει μπροστά της αρνητικό πρόσημο, οπότε διώχνοντας την αλλάζουμε τα πρόσημα όλων των όρων που βρίσκονται μέσα της. Για τη δεύτερη χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{gathered}5-(4-3x)=x-2(x+5) \Rightarrow\\ 5-4+3x=x-2x-10 \Rightarrow\\ 3x-x+2x=-5+4-10 \Rightarrow\\ 4x=-11 \Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{-11}{4} \Rightarrow\\ x=-\frac{11}{4}\end{gathered}$$

Παράδειγμα 1.4 : Εξίσωση με κλάσματα

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{6}=x-\frac{1}{3}$$

ΛΥΣΗ

Το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι το 6. Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό και στη συνέχεια διαιρούμε ώστε να διώξουμε τους παρονομαστές. Ακολουθώντας λοιπόν τα βήματα θα έχουμε

$$\begin{gathered}\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{6}=x-\frac{1}{3} \Rightarrow\\ 6\cdot\frac{x-1}{2}-6.\cdot\frac{x+3}{6}=6\cdot x-6\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow\\ 3(x-1)-(x+3)=6x-2 \Rightarrow\\ 3x-3-x-3=6x-2 \Rightarrow\\ 3x-x-6x=3+3-2 \Rightarrow\\ -4x=4 \Rightarrow\\ \frac{-4x}{-4}=\frac{4}{-4} \Rightarrow\\ x=-1\end{gathered}$$

Παρατήρηση 1.1

Όταν πολλαπλασιάζω με το Ε.Κ.Π. πρέπει να πολλαπλασιαστούν όλοι οι όροι. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν έχω κλάσματα ή παρενθέσεις τότε πολλαπλασιάζεται όλος ο αριθμητής και αντίστοιχα όλη η παρένθεση.

Παράδειγμα 1.5 : Αδύνατη εξίσωση

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\mathbf{4x - (3 + 2x) = 2x + 7}$$

ΛΥΣΗ

Ακολουθώντας τα γνωστά βήματα όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα θα καταλήξουμε σε μια εξίσωση που δεν επαληθεύεται από καμία τιμή του x, άρα αδύνατη.

$$\begin{gathered}4x - (3 + 2x) = 2x + 7 \Rightarrow \\ 4x - 3 - 2x = 2x + 7 \Rightarrow \\ 4x - 2x - 2x = 7 + 3 \Rightarrow \\ 0x = 10\end{gathered}$$

Στο βήμα αυτό, καθώς δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του x, σταματάμε και παρατηρούμε ότι κανένας αριθμός δεν επαληθεύει την εξίσωση. Άρα όπως αναφέραμε είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 1.6 : Αόριστη εξίσωση

Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση

$$\mathbf{2(x + 1) + 5 = x - (-7 - x)}$$

ΛΥΣΗ

Ομοίως με τα προηγούμενα παραδείγματα θα έχουμε

$$\begin{gathered}2(x + 1) + 5 = x - (-7 - x) \Rightarrow \\ 2x + 2 + 5 = x + 7 + x \Rightarrow \\ 2x - x - x = 7 - 5 - 2 \Rightarrow \\ 0x = 0\end{gathered}$$

Η τελευταία ισότητα επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του x άρα η εξίσωση είναι αόριστη.

1.2 Ανισώσεις 1ου βαθμού

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός 1.3 : ΑΝΙΣΩΣΗ

Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.

Ορισμός 1.4 : ΑΝΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ανίσωση της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \quad , \quad ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.2 : ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι λύσεις της ανίσωσης $ax + \beta > 0$ (ή $ax + \beta < 0$) φαίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $a > 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x > -\frac{\beta}{a}$ (ή $x < -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
2. Αν $a < 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x < -\frac{\beta}{a}$ (ή $x > -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
3. Αν $a = 0$ τότε

   i. Αν $\beta > 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αδύνατη ενώ η $0x < \beta$ είναι αόριστη.
   ii. Αν $\beta < 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αόριστη ενώ η $0x < \beta$ είναι αδύνατη.
   iii. Αν $\beta = 0$ τότε οι ανισώσεις $0x > 0$ και $0x < 0$ είναι αδύνατες.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέθοδος 1.2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η επίλυση των ανισώσεων 1ου βαθμού γίνεται ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την επίλυση μιας εξίσωσης 1ου βαθμού όπως τα περιγράψαμε στην προηγούμενη μέθοδο. Αν χρειαστεί να διαιρεθεί κάθε μέλος της με αρνητικό αριθμό προσέχουμε να αλλάξουμε τη φορά της.

Παράδειγμα 1.7 : Απλή ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση

$$3x - 4 < 5x + 8$$

ΛΥΣΗ

Μπορούμε άμεσα να χωρίσουμε μέλος τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους.

$$\begin{gathered} 3x - 4 < 5x + 8 \Rightarrow \\ 3x - 5x < 4 + 8 \Rightarrow \\ -2x < 12 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{12}{-2} \Rightarrow \\ x > -6 \end{gathered}$$

Προσοχή 1.1

Στο σημείο που διαιρέσαμε με το συντελεστή -2 αλλάξαμε τη φορά της ανίσωσης.

Παράδειγμα 1.8 : Αόριστη ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση

$$4 - (x + 2) \leq 12 + x - 2(x - 1)$$

ΛΥΣΗΑπαλείφουμε τις παρενθέσεις και ύστερα από πράξεις παίρνουμε ότι

$$\begin{gathered} 4 - (x + 2) \leq 12 - x - 2(x - 1) \Rightarrow \\ 4 - x - 2 \leq 12 - x - 2x + 2 \Rightarrow \\ -x - x + 2x \leq 12 + 2 - 4 \Rightarrow \\ 0x \leq 10 \end{gathered}$$

Η τελευταία ανίσωση επαληθεύεται για κάθε τιμή του x άρα είναι αόριστη.

Παράδειγμα 1.9 : Αδύνατη ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x-1}{4} - \frac{3x+2}{3} \geq 1 - \frac{3x}{4}$$

ΛΥΣΗ

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών της ανίσωσης είναι το 12. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της ανίσωσης με τον αριθμό αυτό και θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} - \frac{3x+2}{3} &\geq 1 - \frac{3x}{4} \Rightarrow \\ 12 \cdot \frac{x-1}{4} - 12 \cdot \frac{3x+2}{3} &\geq 12 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{3x}{4} \Rightarrow \\ 3(x-1) - 4(3x+2) &\geq 12 - 3 \cdot 3x \\ 3x - 3 - 12x - 8 &\geq 12 - 9x \Rightarrow \\ 3x - 12x + 9x &\geq 12 + 3 + 8 \Rightarrow \\ 0x &\geq 23 \end{aligned}$$

Για οποιαδήποτε τιμή του x προκύπτει $0 \geq 23$ που είναι άτοπο άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 1.10 : Κοινές λύσεις ανισώσεων

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων

$$\mathbf{4x - 8 \leq 10 + 2(x+1) \quad \text{και} \quad 5 - 2x + \frac{x}{2} > -4}$$

ΛΥΣΗ

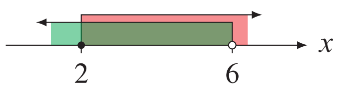
Θα εργαστούμε με κάθε ανίσωση ξεχωριστά και στη συνέχεια, προκειμένου να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων, θα μας βοηθήσει να σχεδιάσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα πραγματικών αριθμών. Εκεί θα φανεί το κοινό μέρος των δύο συνόλων λύσεων το οποίο θα γραφτεί σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. Για την πρώτη απ' αυτές θα έχουμε

$$\begin{aligned} 4x + 8 &\geq 10 + 2(x+1) \Rightarrow \\ 4x + 8 &\geq 10 + 2x + 2 \Rightarrow \\ 4x - 2x &\geq 10 + 2 - 8 \Rightarrow \\ 2x &\geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \end{aligned}$$

Ομοίως για τη δεύτερη από τις δύο οι λύσεις θα είναι

$$\begin{aligned} 5 - 2x + \frac{x}{2} &> -4 \Rightarrow \\ 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot \frac{x}{2} &> 2 \cdot (-4) \Rightarrow \\ 10 - 4x + x &> -8 \Rightarrow \\ -3x &> -18 \Rightarrow x < 6 \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε λοιπόν τις λύσεις των δύο ανισώσεων πάνω στην ευθεία των αριθμών και όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα



οι κοινές λύσεις είναι το διάστημα $[2, 6)$.

Παράδειγμα 1.11 : Διπλή ανίσωση

Να λυθεί η ακόλουθη διπλή ανίσωση

$$\mathbf{3x - 4 < 2(x-3) + 1 \leq 7 - (x-3)}$$

✔ ΛΥΣΗ

Η διπλή αυτή ανίσωση αναλύεται σε δύο απλές ανισώσεις οι οποίες πρέπει να συναληθεύουν. Αυτές είναι

$$3x - 4 < 2(x-3) + 1 \;\text{ και }\; 2(x-3) + 1 \leq 7 - (x-3)$$

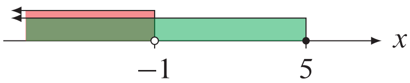
Οι ανισώσεις αυτές θα λυθούν ξεχωριστά και στο τέλος θα αναζητήσουμε τις κοινές τους λύσεις. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{gathered} 3x - 4 < 2(x-3) + 1 \Rightarrow \\ 3x - 4 < 2x - 6 + 1 \Rightarrow \\ 3x - 2x < 4 - 6 + 1 \Rightarrow x < -1 \end{gathered}$$

Ομοίως για τη δεύτερη ανίσωση θα έχουμε

$$\begin{gathered} 2(x-3) + 1 \leq 7 - (x-3) \Rightarrow \\ 2x - 6 + 1 \leq 7 - x + 3 \Rightarrow \\ 2x + x \leq 6 - 1 + 7 + 3 \Rightarrow \\ 3x \leq 15 \Rightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{15}{3} \Rightarrow \\ x \leq 5 \end{gathered}$$

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα



το κοινό μέρος των δύο συνόλων είναι οι αριθμού που βρίσκονται αριστερά του -1 επομένως οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων, δηλαδή της αρχικής διπλής ανίσωσης είναι το σύνολο $(-\infty, -1)$.

1.3 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1.4 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Παράδειγμα 1.12 : Ανίσωση 2^{ου} βαθμού

Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 3 \geq 0}$$

Οι συντελεστές του τριωνύμου είναι οι $a = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 3$. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του, η οποία θα ισούται με

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

άρα οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \;\text{ και }\; x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Σχηματίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

επομένως, όπως βλέπουμε, η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.13 : Ανίσωση 2^{ου} βαθμού

Να λυθεί η ανίσωση

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε όπως συνήθως τη διακρίνουσα και τις ρίζες του τριωνύμου και έχουμε

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Η μοναδική διπλή ρίζα του τριωνύμου ισούται με

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας προσήμων θα σχηματιστεί ως εξής

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

Όπως φαίνεται λοιπόν η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.14 : Ανίσωση 2^{ου} βαθμού

Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης

$$x^2 - x + 2 \leq 0$$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου, με συντελεστές τους $a = 1, \beta = -1$ και $\gamma = 2$ όπως θα δούμε ότι είναι αρνητική

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

οπότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Συνεχίζουμε έτσι στο σχεδιασμό του πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+2		$+$	

από τον οποίο φαίνεται ότι η ανίσωση δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x επομένως είναι αδύνατη.

1.5 Εξισώσεις 3^{ου} βαθμού

Παράδειγμα 1.15 : Εξίσωση 3^{ου} βαθμού

Να βρεθούν οι λύσεις τις εξίσωσης

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

ΛΥΣΗ

1	−5	8	−4	2
	2	−6	4	
1	−3	2	**0**	

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)\left(x^2 - 3x + 2\right)$$