1 Η έννοια της συνάρτησης

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1. Συνάρτηση
2. Πεδίο ορισμού
3. Σύνολο τιμών
4. Τιμή της f στο x_0.
5. Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1. Σημείο ανήκει στη C_f

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Εύρεση πεδίου ορισμού.
- ☐ Εύρεση τιμής συνάρτησης.
- ☐ Λύση εξίσωσης - Ανίσωσης που περιέχει την $f(x)$.

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$
2. Πεδίο ορισμού: D_f
3. Σύνολο τιμών: $f(D_f)$
4. Τιμή της f στο x: $f(x)$.
5. Γραφική παράσταση συνάρτησης:

$$C_f = \{(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in D_f\}$$

6. Σημείο που ανήκει στη C_f: $M(x, f(x))$.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Συνάρτηση

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1.1 Όνομα

Περιγραφή

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1.1 Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης

1ο Βήμα : Θέτω τους απαραίτητους περιορισμούς και λύνω την εξίσωση ή ανίσωση προκύπτει.

2ο Βήμα : Γράφω τις λύσεις ως σύνολο.

1.2 Εύρεση τιμής συνάρτησης

Θέτω όπου $x = x_0$ στον τύπο της συνάρτησης και κάνω πράξεις.

1.3 Λύση εξίσωσης - ανίσωσης που περιέχει την $f(x)$

1ο Βήμα : Θέτω στη θέση της $f(x)$ τον τύπο της συνάρτησης και λύνω την εξίσωση - ανίσωση.

2ο Βήμα : Δέχομαι μόνο τις λύσεις που βρίσκονται μέσα στο πεδίο ορισμού.

1.4 Σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση

- Αν θέλω να εξετάσω αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε θέτω όπου $x = a$ και ελέγχω αν $f(a) = \beta$.
- Αν γνωρίζω ότι ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε βάζω όπου $x = a$ και $f(x) = \beta$.

ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Είδος	Τύπος	Πεδίο Ορισμού
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0$	$A = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$
Τριγωνομετρική	$f(x) = \text{ημ}x \ , \ \text{συν}x$	$A = \mathbb{R}$
	$f(x) = \text{εφ}x$	$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$
	$f(x) = \text{σφ}x$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$

2 Όριο - Συνέχεια συνάρτησης

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1. Όριο συνάρτησης σε σημείο
2. Συνεχής συνάρτηση σε σημείο
3. Συνεχής συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1. Όρια βασικών συναρτήσεων
2. Ιδιότητες ορίων
3. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων
4. Πράξεις και συνέχεια συναρτήσεων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Όριο συνάρτησης σε σημείο
- ⚠ ☐ Όριο $\frac{0}{0}$ με ρητή συνάρτηση.
- ⚠ ☐ Όριο $\frac{0}{0}$ με ρίζες.
- ⚠ ☐ Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο.
- ⚠ ☐ Συνέχεια συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού.
- ☐ Εύρεση παραμέτρων.

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Όριο στο x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Συνεχής στο x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ΟΡΙΣΜΟΙ

2.1 Συνεχής συνάρτηση σε σημείο
Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

2.1 Όνομα
Περιγραφή

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1 Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0

1ο Βήμα : Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και την τιμή $f(x_0)$.

2ο Βήμα : Αν είναι ίσα μεταξύ τους απαντάμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0.

2.2 Συνέχεια συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού με δίκλαδη συνάρτηση

1ο Βήμα : Αναφέρουμε για ποιο λόγο είναι η f συνεχής στα σημεία $x \neq x_0$.

2ο Βήμα : Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0.

3 Η έννοια της παραγώγου

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1. Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο
2. Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου
3. Παράγωγος συνάρτηση
4. Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων
2. Κανόνες παραγώγισης
3. Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο
- ⚠ ☐ Παράγωγος βασικών συναρτήσεων
- ☐ Παράγωγος δίκλαδων συναρτήσεων
- ⚠ ☐ Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων
- ☐ Εύρεση παραμέτρων

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Παράγωγος στο x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου:

$$f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$$

3. Παράγωγος συνάρτηση: $f'(x)$

ΟΡΙΣΜΟΙ

3.1 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο

Παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και θα λέμε οτι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 αν το όριο της παραγώγου υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε δηλαδή

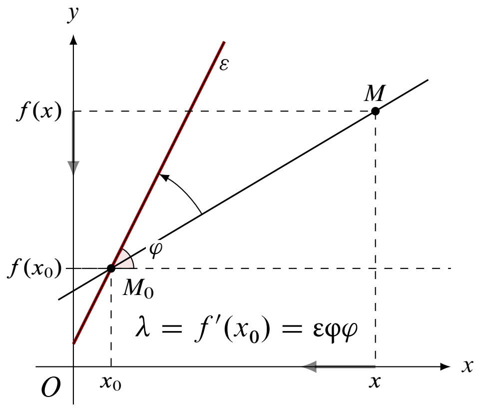
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3.2 Γεωμετρική Ερμηνεία Παραγώγου

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in A$ παριστάνει το **συντελεστή διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο επαφής ${}_0(x_0, f(x_0))$.

$$\lambda = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \text{εφ}\varphi$$

Ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.



3.3 Παράγωγος συνάρτηση

Η συνάρτηση με την οποία κάθε τιμή $x_0 \in A$ μιας μεταβλητής x αντιστοιχεί στην παράγωγο $f'(x_0)$ στο σημείο x_0, μιας συνάρτησης f, ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση** της συνάρτησης f. Συμβολίζεται με f' και η τιμή της $f'(x)$ στο x ισούται με

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ , \ x \in D_{f'} \subset D_f$$

- Το σύνολο $D_{f'}$ είναι το υποσύνολο του πεδίου ορισμού D_f της συνάρτησης f στο οποίο είναι παραγωγίσιμη.
- Η παράγωγος της f λέγεται **πρώτη παράγωγος** της.
- Η παράγωγος της πρώτης παραγώγου f' ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** και συμβολίζεται f''.
- Ομοίως η παράγωγος της f'' λέγεται **τρίτη παράγωγος** και συμβολίζεται f'''.
- Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης ονομάζεται **παραγώγιση**.
- Ο αριθμός που μας δίνει το πλήθος των παραγωγίσεων ονομάζεται **τάξη** της παραγώγου.
- Οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 3 συμβολίζονται $f^{[\nu]}$ όπου $\nu > 3$ είναι η τάξη της παραγώγου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

3.1 Όνομα
Περιγραφή

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο x_0

1ο Βήμα :

3.2 Παράγωγος συνάρτησης

1ο Βήμα : Αναφέρουμε για ποιο λόγο είναι η f συνεχής στα σημεία $x \neq x_0$.

2ο Βήμα : Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΠΛΕΣ		ΣΥΝΘΕΤΕΣ	
Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση $g \circ f$	Παράγωγος $(g \circ f)'$
c	0		
x	1		
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$f^\nu(x)$	$\nu f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu f(x)$	$\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu f(x)$	$-\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
$\sigma\varphi x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\sigma\varphi f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Πράξη	Συνάρτηση	Παράγωγος
Άθροισμα - Διαφορά	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
Πολλαπλάσιο	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Γινόμενο	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Πηλίκο	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Σύνθεση	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4 Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1. Εξίσωση εφαπτομένης
2. Συντελεστής διεύθυνσης

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1.

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Εύρεση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής.
- ☐ Εύρεση εφαπτομένης όταν γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης.
- ☐ Εύρεση εφαπτομένης που διέρχεται από εξωτερικό σημείο της C_f.

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Εξίσωση εφαπτομένης: $y = \lambda x + \beta$.
2. Συντελεστής διεύθυνσης: $\lambda = f'(x_0)$ όπου $M(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

4.1 **Εφαπτόμενη ευθεία** Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και $x_0 \in A$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο

$$y = f'(x_0)x + \beta$$

5 Ρυθμός μεταβολής

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1. Ρυθμός μεταβολής

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐ Εύρεση ρυθμού μεταβολής ενός ποσού.

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1.

ΟΡΙΣΜΟΙ

5.1 Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας $f(x)$ ως προς x σε μια συγκεκριμένη θέση $x = x_0$ ονομάζεται η παράγωγος $f'(x_0)$ της ποσότητας αυτής στο x_0.

- Ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας f σε κάθε θέση είναι η ποσότητα $f'(x)$, $x \in A$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $s(t)$ ως προς το χρόνο t, ενός αντικειμένου είναι η ταχύτητά του: $x'(t) = v(t)$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ ως προς το χρόνο t, ενός αντικειμένου είναι η επιτάχυνσή του: $v'(t) = a(t)$. Επίσης η επιτάχυνση του αντικειμένου ισούται και με τη δεύτερη παράγωγο της απόστασης: $a(t) = x''(t)$.
- Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός ποσού $f(x)$ σε κάποια θέση x_0 είναι θετικός τότε το ποσό αυτό **αυξάνεται**. Εάν ο ρυθμός είναι αρνητικός το ποσό **μειώνεται**.

6 Μονοτονία - Ακρότατα

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1. Κριτήριο $1^{ης}$ παραγώγου
2. Κριτήριο τοπικών ακρότατων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης
- ☐ Εύρεση ακρότατων συνάρτησης
- ☐ Εύρεση παραμέτρων
- ☐ Απόδειξη ανισότητας με χρήση μονοτονίας
- ☐ Απόδειξη ανισότητας με τη βοήθεια ακρότατων

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \Delta$
2. $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \Delta$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

6.1 Κριτήριο 1ης παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

i. Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.
ii. Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

6.2 Κριτήριο τοπικών ακρότατων

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ η οποία είναι παραγωγίσιμη και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

i. Αν ισχύουν οι σχέσεις
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f'(x) > 0$ για κάθε $x < x_0$ και
   - $f'(x) < 0$ για κάθε $x > x_0$

   τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0.
ii. Αν ισχύουν οι σχέσεις
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f'(x) < 0$ για κάθε $x < x_0$ και
   - $f'(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$

   τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

6.1 Εύρεση μονοτονίας

1ο Βήμα : Υπολογίζουμε την $f'(x)$.

2ο Βήμα : Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

3ο Βήμα : Σχηματίζουμε πίνακα προσήμων της f' και μονοτονίας της f.

4ο Βήμα : Απαντάμε γράφοντας τα διαστήματα μονοτονίας.

6.2 Εύρεση ακρότατων

1ο Βήμα : Ακολουθούμε όλα τα βήματα ώστε να φτιάξουμε πίνακα μονοτονίας της f.

2ο Βήμα : Στα σημεία που αλλάζει η μονοτονία της f απαντάμε τι ακρότατο παρουσιάζει (μέγιστο ή ελάχιστο) και σε ποια θέση.

6.3 Απόδειξη ανισότητας με τη βοήθεια μονοτονίας

6.4 Απόδειξη ανισότητας με τη χρήση ακρότατων

7 Βασικές έννοιες στατιστικής
ΟΡΙΣΜΟΙ

7.1 Πληθυσμός
Πληθυσμός ονομάζεται ένα σύνολο όμοιων στοιχείων τα οποια εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Το πλήθος των στοιχείων ενός πληθυσμού ονομάζεται **μέγεθος** του πληθυσμού.

7.2 Δείγμα
Δείγμα ονομάζεται ένα υποσύνολο ενός πληθυσμού.

- Ένα δείγμα λέγεται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού όταν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του είναι αρκετά αξιόπιστα ώστε να μπορούν να γενικευτούν για ολόκληρο τον πληθυσμό.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός δείγματος ονομάζεται **μέγεθος** του δείγματος.

7.3 Μεταβλητή - Είδη μεταβλητών
Μεταβλητή ονομάζεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζονται τα στοιχεία ενός πληθυσμού.

- Συμβολίζεται με οποιοδήποτε κεφαλαίο γράμμα : $X, Y, A, B, \ldots$
- Οι τιμές οι οποίες μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ονομάζονται **τιμές της μεταβλητής**. Συμβολίζονται με το ίδιο μικρό γράμμα του ονόματος της μεταβλητής π.χ. x_i, y_i $\ldots$ όπου ο δείκτης i φανερώνει τον αύξοντα αριθμό της τιμής.
- Τα στατιστικά δεδομένα που συλλέγονται από ένα πληθυσμό ή δείγμα που εξετάζεται ως προς κάποια μεταβλητή ονομάζονται **παρατηρήσεις**. Συμβολίζονται με t_i όπου ο δείκτης i φανερώνει τον αύξοντα αριθμό της παρατήρησης.

Οι μεταβλητές διακρίνονται στις εξής κατηγορίες :

1. **Ποιοτικές**
   Ποιοτική ονομάζεται κάθε μεταβλητή της οποίας οι τιμές δεν είναι αριθμητικές.
2. **Ποσοτικές**
   Ποσοτική ονομάζεται κάθε μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι αριθμοί. Οι ποσοτικές μεταβλητές χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς.
   i. **Διακριτές** ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές που παίρνουν μεμωνομένες τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή ένα διάστημα αυτού.
   ii. **Συνεχείς** ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές που παίρνουν όλες τις τιμές στο σύνολο ή σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

7.4 Απογραφή - Δειγματοληψία

1. **Απογραφή**
   Απογραφή ονομάζεται η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων από έναν ολόκληρο πληθυσμό.
2. **Δειγματοληψία**
   Δειγματοληψία ονομάζεται η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων από ένα δείγμα ενός πληθυσμού.

8 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

ΟΡΙΣΜΟΙ

8.1 **Στατιστικοί πίνακες** Οι πίνακες στους οποίους συγκεντρώνουμε τα στατιστικά δεδομένα καθώς και πληροφορίες που μας βοηθούν να εξάγουμε συμπεράσματα για το δείγμα ή πληθυσμό ονομάζονται στατιστικοί πίνακες. Οι κατηγορίες πινάκων είναι :

1. **Γενικοί πίνακες**
   Οι γενικοί πίνακες περιέχουν αναλυτικά όλες τις πληροφορίες που αφορούν τα δεδομένα που συλλέξαμε.
2. **Ειδικοί πίνακες**
   Οι ειδικοί πίνακες είναι συνοπτικοί και περιέχουν πληροφορίες από τους γενικούς πίνακες.

8.2 **Συχνότητες** Συχνότητες ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν πληροφορίες για τις τιμές των μεταβλητών των δεδομένων που έχουμε συλλέξει από ένα δείγμα ή πληθυσμό, όπως ο αριθμός εμφανίσεων, το ποσοστό και άλλα. Έστω ένα δείγμα μεγέθους ν το οποίο μελετάται ως προς μια μεταβλητή X με κ σε πλήθος τιμές x_i , $1 \leq i \leq \kappa \leq \nu$. Οι βασικές συχνότητες είναι οι ακόλουθες :

1. **Απόλυτη συχνότητα ή Συχνότητα**
   Συχνότητα μιας τιμής x_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός ν_i ο οποίος μας δίνει το πλήθος των εμφανίσεων της τιμής αυτής μέσα στο δείγμα.
2. **Σχετική συχνότητα**
   Σχετική συχνότητα μιας τιμής x_i ονομάζεται το κλάσμα $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ το οποίο μας δίνει το ποσοστό εμφάνισης της τιμής ως μέρος του δείγματος. Μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό επί τοις 100 και είναι
   $$f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100\%$$
3. **Αθροιστική συχνότητα**
   Αθροιστική συχνότητα ονομάζεται ο φυσικός αριθμός N_i ο οποίος μας δίνει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες την τιμή x_i.
   $$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$$
   Υπολογίζεται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.
4. **Σχετική αθροιστική συχνότητα**
   Σχετική αθροιστική συχνότητα ονομάζεται ο φυσικός αριθμός F_i ο οποίος μας δίνει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες την τιμή x_i.
   $$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$$
   Υπολογίζεται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές. Μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό επί τοις 100 και είναι $F_i\% = F_i \cdot 100\%$.

8.3 **Ομαδοποίηση παρατηρήσεων** Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι η διαδικασία με την οποία μοιράζονται οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής σε ομάδες. Χρησιμοποιείται όταν παρουσιάζεται μεγάλο πλήθος διαφορετικών μεταξύ τους παρατηρήσεων ώστε να μελετηθεί καλύτερα το δείγμα.

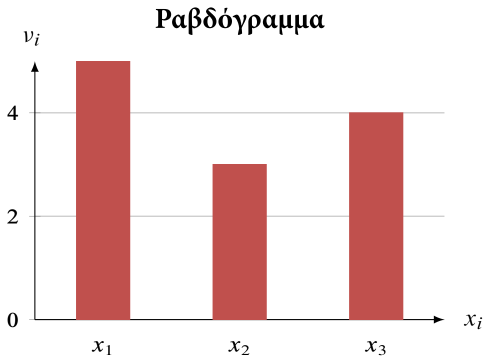
- Οι ομάδες στις οποίες μοιράζονται οι παρατηρήσεις ονομάζονται **κλάσεις**. Αποτελούν διαστήματα τιμών της μορφής [,).
- Τα άκρα των κλάσεων ονομάζονται **όρια**. Επιλέγουμε το άνω όριο της τελευταίας κλάσης να είναι κλειστό ώστε αυτή να έχει τη μορφή [,].
- Το μέγεθος κάθε κλάσης δίνεται από τον τύπο $c = \frac{R}{\kappa}$ όπου R είναι το εύρος των παρατηρήσεων και κ το πλήθος των κλάσεων.

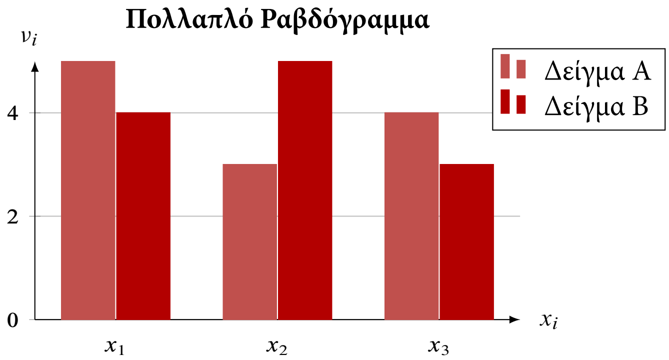
- Το κέντρο κάθε κλάσης ονομάζεται **κεντρική τιμή** και συμβολίζεται x_i.

8.4 Γραφική παράσταση δεδομένων Τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει σε μια κατανομή συχνοτήτων μπορούμε να τα παραστήσουμε γραφικά με τη χρήση διαφόρων ειδών διαγραμμάτων ανάλογα το είδος της μεταβλητής. Έστω μια μεταβλητή X με τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$. Βασικοί τρόποι γραφικής παράστασης δεδομένων είναι οι ακόλουθοι :

1. **Ραβδόγραμμα**

   Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση δεδομένων ενός δείγματος το οποίο έχει εξεταστεί ως προς **ποιοτική** μεταβλητή X. Σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων θέτουμε στον οριζόντιο άξονα τις τιμές της μεταβλητής X ενώ στον κατακόρυφο οποιαδήποτε συχνότητα θέλουμε να μελετήσουμε. Σχεδιάζουμε κάθετες μπάρες στη θέση κάθε τιμής x_i , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ των οποίων το ύψος ισούται με την τιμή της αντίστοιχης συχνότητας.

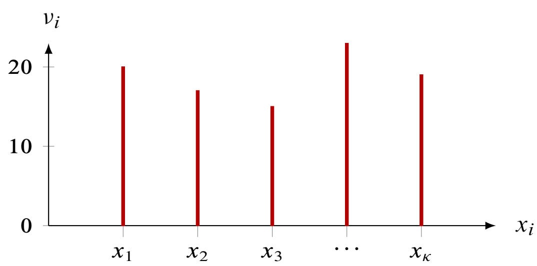




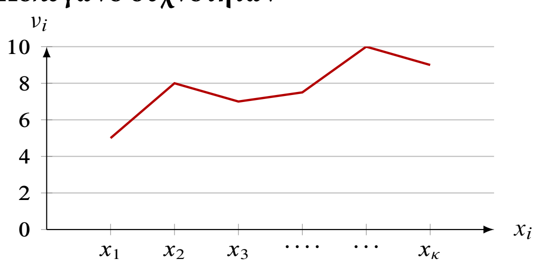
   Αν εξετάζονται δύο η περισσότερα δείγματα ως προς την ίδια ποιοτική μεταβλητή τότε χρησιμοποιούμε το πολλαπλό ραβδόγραμμα το οποίο περιέχει σε κάθε θέση x_i τις ράβδους συχνοτήτων από όλα τα δείγματα.

2. **Διάγραμμα**

   Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται στην περίπτωση μιας **ποσοτικής** μεταβλητής και σε αντίθεση με το ραβδόγραμμα αποτελείται από κατακόρυφες ευθείες τοποθετημένες στις θέσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ των τιμών της μεταβλητής. Κάθε ευθεία έχει ύψος ίσο με την τιμή της συχνότητας που αντιστοιχεί σε κάθε x_i.



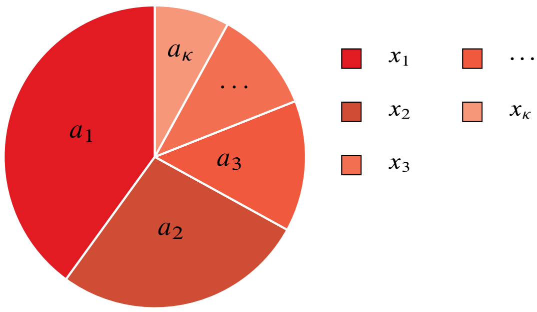
3. **Πολύγωνο συχνοτήτων**



   Το πολύγωνο συχνοτήτων χρησιμοποιείται στην παράσταση δεδομένων που μελετήθηκαν ως προς **ποσοτική μεταβλητή**. Είναι μια τεθλασμένη γραμμή η οποία ενώνει τα σημεία της μορφής (x_i, ν_i) ή (x_i, f_i) κ.τ.λ. δηλαδή τα σημεία με συντεταγμένες τις τιμές x_i και τις αντίστοιχες συχνότητες.

4. **Κυκλικό διάγραμμα**

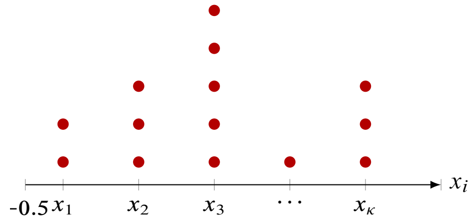
Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παράσταση δεδομένων που έχουν μελετηθεί και ως προς ποιοτική και ως προς ποσοτική μεταβλητή X με τιμές $x_2, x_2, \ldots, x_\kappa$. Ένας κύκλος χωρίζεται σε κ κυκλικούς τομείς όπου το μέγεθος του κάθε κυκλικού τομέα είναι αντίστοιχο της τιμής της συχνότητας που μελετάμε. Το μέτρο του τόξου κάθε τομέα συμβολίζεται με a_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και είναι :



$$a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360° = f_i \cdot 360°$$

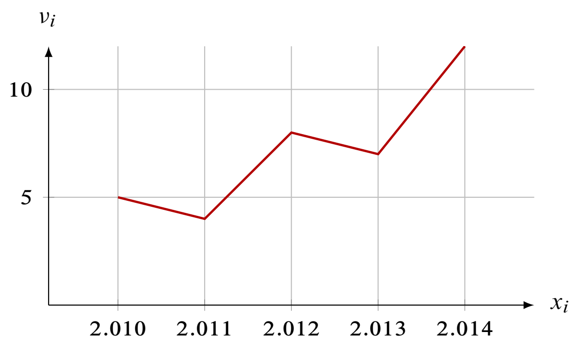
5. Σημειόγραμμα

Το σημειόγραμμα αποτελείται από έναν άξονα στον οποίο τοποθετούμε τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ της μεταβλητής X και σε κάθε θέση σχεδιάζονται κατακόρυφα τόσα σημεία όσα και η συχνότητα της κάθε τιμής.



6. Χρονόγραμμα

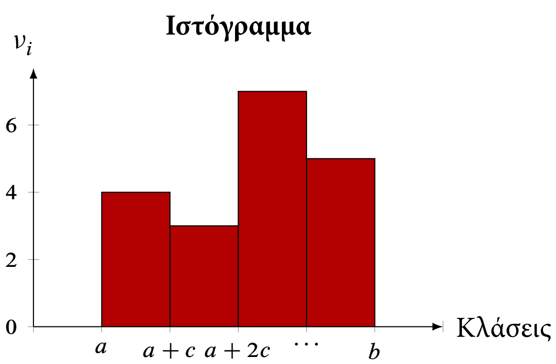
Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται στην περίπτωση μιας ποσοτικής μεταβλητής όταν αυτή παριστάνει χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής του χρόνου ενώ στονα κατακόρυφο οποιαδήποτε από τις συχνότητες των τιμών αυτών.

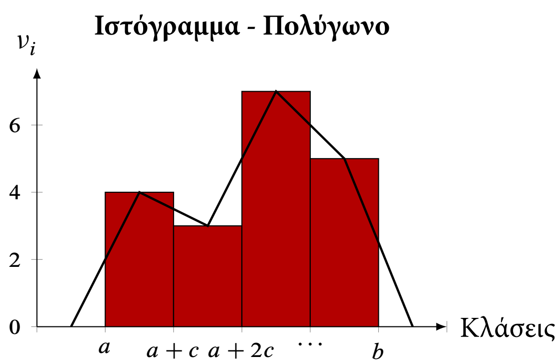


Το χρονόγραμμα μας δίνει μια εικόνα για τις διάφορες μεταβολές της εκάστοτε συχνότητας κατά την πάροδο του χρόνου.

7. Ιστόγραμμα

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παρουσίαση ομαδοποιημένων δεδομένων. Οριζόντιος άξονας είναι ό άξονας των ομάδων ενώ κατακόρυφος ο άξονας της οποιαδήποτε συχνότητας.



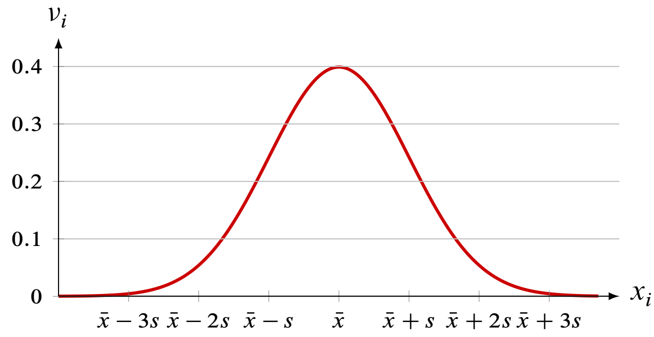


Αποτελείται από μπάρες (ιστοί) ίσου πλάτους μιας κλάσης και ύψους ίσου με την τιμή της συχνότητας.

- Το εμβαδόν κάθε ιστού ισούται με την τιμή της αντίστοιχης συχνότητας αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το πλάτος c της ομάδας.

- Το εμβαδόν όλων των ιστών ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος.
- Ενώνοντας το μέσο της άνω πλευράς κάθε ιστού συμπεριλαμβάνοντας την αμέσως προηγούμενη και αμέσως επόμενη κλάση, πορκύπτει το **πολύγωνο συχνοτήτων**.

8.5 Καμπύλη συχνοτήτων Η καμπύλη συχνοτήτων αποτελεί ένα πολύγωνο συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων στην περίπτωση όπου το πλήθος των ομάδων είναι αρκετά μεγάλο ενώ το πλάτος κάθε ομάδας πολύ μικρό. Έτσι το πολύγωνο τείνει να γίνει μια ομαλή καμπύλη.



Βασική περίπτωση καμπύλης συχνοτήτων είναι αυτή της κανονικής κατανομής στην οποία οι παρατηρήσεις είναι εξίσου κατανεμημένες εκατέρωθεν της μέσης τιμής ενώ το μεγαλύτερο πλήθος τους συσπειρώνεται γύρω της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

8.1 Ιδιότητες συχνοτήτων
Έστω ένα δείγμα μεγέθους ν το οποίο μελετάται ως προς μια μεταβλητή X με κ σε πλήθος τιμές x_i , $1 \leq i \leq \kappa \leq \nu$. Για τις συχνότητες των τιμών του ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :
Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα ν_i

i. Για κάθε συχνότητα ν_i , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ισχύει $0 \leq \nu_i \leq \nu$.
ii. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ν_i , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ισούται με το μέγεθος του δείγματος.

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$$

iii. $\nu_i = N_i - N_{i-1}$

Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα f_i

iv. Για κάθε σχετική συχνότητα f_i και σχετική συχνότητα τοις 100 $f_i\%$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ισχύουν οι σχέσεις $0 \leq f_i \leq 1$ και $0 \leq f_i\% \leq 100\%$.
v. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων f_i , $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ισούται με τη μονάδα ενώ το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων επί τοις 100 είναι ίσο με 100%.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1 \text{ και } f_1\% + f_2\% + \ldots + f_\kappa\% = 100\%$$

vi. $f_i = F_i - F_{i-1}$
vii. $f_i\% = F_i\% - F_{i-1}\%$

Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική συχνότητα N_i

viii. $N_1 = \nu_1$
ix. $N_\kappa = \nu$

Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική σχετική συχνότητα F_i

x. $F_i = \frac{N_i}{\nu}$
xi. $F_i\% = \frac{N_i}{\nu} \cdot 100\%$
xii. $F_1 = f_1$
xiii. $F_1\% = f_1\%$
xiv. $F_\kappa = 1$
xv. $F_\kappa\% = 100\%$

9 Μέτρα θέσης και διασποράς

ΟΡΙΣΜΟΙ

9.1 Μέτρο θέσης
Μέτρα θέσης ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν τη θέση του κέντρου των παρατηρήσεων μιας δειγματοληψίας. Τα μέτρα θέσης ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ για μια μεταβλητή X είναι τα εξής :

1. **Μέση τιμή**
Η μέση τιμή ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήρεων ενός δείγματος προς το πλήθος τους. Συμβολίζεται $\bar{x}$ και είναι :

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

Εναλλακτικοί τύποι για τη μέση τιμή είναι οι ακόλουθοι οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε κατανομές συχνοτήτων. Αν κάποια μεταβλητή X έχει τιμές $x_1, x_2 \ldots, x_\kappa$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_\kappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ τότε θα έχουμε :

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i \quad \text{και} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

Για τα ομαδοποιημένα δεδομένα το x_i συμβολίζει την κεντρική τιμή κάθε κλάσης.

2. **Σταθμικός μέσος**
Ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως η μέση τιμή των παρατηρήσεων όταν αυτές έχουν ξεχωριστό συντελεστή βαρύτητας. Ισούται με

$$\bar{x} = \frac{t_i w_1 + t_2 w_2 + \ldots + t_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

όπου w_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι οι συντελεστές βαρύτητας των παρατηρήσεων.

3. **Διάμεσος**
Διάμεσος ονομάζεται η κεντρική παρατήρηση ν σε πλήθους παρατηρήσεων όταν αυτές έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά. Συμβολίζεται με δ. Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις :

i. Αν το πλήθος των ν παρατηρήσεων είναι περιττό τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση.

$$\delta = t_{\frac{\nu}{2}}$$

ii. Αν το πλήθος των ν παρατηρήσεων είναι άρτιο τότε η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\delta = \frac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$$

Η διάμεσος σε κατανομή συχνοτήτων ισούται με την τιμή x_i για την οποία η σχετική αθροιστική συχνότητα $F_i\%$ είτε ισούται είτε ξεπερνάει για πρώτη φορά το 50%. Δηλαδή

$$\delta = x_i \text{ για την οποία } F_{i-1}\% < 50\% \leq F_i\%$$

9.2 Μέτρο διασποράς Μέτρα διασποράς ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων μιας δειγματοληψίας γύρω από το κέντρο. Τα μέτρα θέσης ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ για μια μεταβλητή X είναι τα εξής :

1. **Εύρος**
   Εύρος ονομάζεται η διαφορά την μέγιστης μείον την ελάχιστη παρατήρηση του δείγματος. Συμβολίζεται με R και είναι :
   $$R = t_{max} - t_{min}$$

2. **Διακύμανση**
   Διακύμανση ονομάζεται η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή $\bar{x}$ τους. Συμβολίζεται με s^2.
   $$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$$
   Ισοδύναμος τύπος που χρησιμοποιείται περισσότερο όταν η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν είναι ακέραιος είναι ο
   $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$
   Σε μια κατανομή συχνοτήτων αν μια μεταβλητή έχει τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ τότε η διακύμανση δίνεται από τους παρακάτω τύπους :
   Τύποι με τη συχνότητα ν_i

   i. $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2\nu_i$
   (για ακέραιο μέσο όρο.)

   ii. $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$
   (για μη ακέραιο μέσο όρο.)

   Τύπος με τη συχνότητα f_i

   iii. $s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 f_i$

   Επιπλέον τύποι

   iv. $s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$

   v. $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ όπου $\overline{x^2} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i$

3. **Τυπική απόκλιση**
   Η τυπική απόκλιση ορίζεται ως η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.
   $$s = \sqrt{s^2}$$

4. **Συντελεστής μεταβλητότητας**
   Συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας ονομάζεται ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς την απόλυτη τιμή του μέσου όρου του δείγματος. Συμβολίζεται CV.
   $$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$$

- Μας δίνει την ομοιογένεια των δεδομένων ενός δείγματος.
- Ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής του είναι μικρότερος του 10%.
- Μεταξύ δύο δειγμάτων, αυτό που έχει μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.