Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | ☐ : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

20 Οκτωβρίου 2015

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ακολουθίες - Πρόοδοι

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία $(a_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον προηγούμενο όρο με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Θα ισχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Γεωμετρικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Πιο γενικά, ο γεωμετρικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ γεωμετρικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός μ για τον οποίο ισχύει

$$\mu^\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ
Γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β ονομάζονται ν σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των a και β ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν, $\nu + 2$ σε πλήθος, διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 1$, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τους τύπους

$$S_\nu = \frac{a_\nu \cdot \lambda - a_1}{\lambda - 1} \quad , \quad S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Εαν ο λόγος είναι $\lambda = 1$ τότε το άθροισμα θα δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \nu a_1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Εαν οι τρεις όροι a, β, γ είναι θετικοί έχουμε ισοδύναμα $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$.
Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$a_\nu^2 = a_{\nu+1} \cdot a_{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΛΟΓΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι γεωμετρικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ τότε για το λόγο της γεωμετρικής προόδου στην οποία ανήκουν ισχύει :

1. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και a, β ομόσημοι τότε $\lambda = \pm \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$.
2. Αν ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι περιττός έχουμε
   i. Αν a, β ομόσημοι τότε $\lambda = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{a}}$
   ii. Αν a, β ετερόσημοι τότε $\lambda = -\sqrt[\nu+1]{\left|\frac{\beta}{a}\right|}$

Στην περίπτωση όπου ο εκθέτης $\nu + 1$ είναι άρτιος και a, β ετερόσημοι τότε δεν ορίζεται λόγος λ και κατά συνέπεια δε σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Εαν (a_ν) είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τους όρους της :

i. Εαν $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ είναι ν σε πλήθος διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ο $\mu-$οστός όρος από το τέλος βρίσκεται στη θέση $\nu - \mu + 1$ και δίνεται από τον τύπο

$$a_{\nu-\mu+1} = a_\nu \cdot \lambda^{1-\mu}$$

ii. Το άθροισμα S των μ τελευταίων όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_ν) είναι

$$S = S_\nu - S_{\nu-\mu}$$