1 Γραμμικά Συστήματα

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

1.1 Γραμμική Εξίσωση
1.2 Γραμμικό σύστημα 2×2 και 3×3
1.3 Ορίζουσα

Θεωρήματα - Ιδιότητες

1.1 Σημείο σε ευθεία
1.2 Είδη ευθειών
1.3 Κανόνας οριζουσών

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Γρ. εξίσωση - Λύση - Σημείο σε ευθεία
- ☐ Ευθεία - Χάραξη
- ☐ Σημεία τομής με άξονες
- ☐ Μέθοδος αντικατάστασης
- ☐ Μέθοδος αντίθετων συντελεστών
- ☐ Μέθοδος οριζουσών
- ☐ Γραφική επίλυση
- ☐ Προβλήματα
- ☐ Σύνθετα συστήματα
- ☐ Συστήματα 3×3
- ☐ Παραμετρικά συστήματα

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Ευθεία : $ax + \beta y = \gamma$, $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
2. Οριζόντια ευθεία : $y = k$
3. Κατακόρυφη ευθεία : $x = k$
4. Συντελεστής διεύθυνσης : $\lambda = -\frac{a}{\beta}$
5. Γραμμικό σύστημα 2×2
$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$
6. Λύση συστήματος : $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$
7. Ορίζουσα συντελεστών : $D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}$
8. Ορίζουσες μεταβλητών :
$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$

Πίνακες - Σχήματα

2 Μη Γραμμικά Συστήματα

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Μέθοδος αντικατάστασης
- ☐ Επίλυση με ανάθεση

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Εξίσωση κύκλου: $x^2 + y^2 = \rho^2$
2. Εξίσωση παραβολής: $y = ax^2$
3. Εξίσωση υπερβολής: $y = \frac{a}{x}$

3 Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Μελέτη μονοτονίας συνάρτησης
- ☐ Μελέτη μονοτονίας δίκλαδης συνάρτησης - Συνάρτησης με απόλυτες τιμές
- ☐ Μελέτη μονοτονίας της $f(x) = ax + \beta$
- ☐ Μελέτη μονοτονίας σε ένωση διαστημάτων
- ☐ Σύγκριση τιμών συνάρτησης
- ☐ Επίλυση εξίσωσης
- ☐ Επίλυση ανίσωσης
- ☐ Μελέτη ακρότατων συνάρτησης
- ☐ Απόδειξη ότι ένας αριθμός αποτελεί ακρότατο
- ☐ Απόδειξη ανισότητας
- ☐ Προσδιορισμός ακρότατων με μονοτονία
- ☐ Μελέτη άρτιας ή περιττής συνάρτησης
- ☐ Γραφικές παραστάσεις άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Γν. αύξουσα $f \nearrow \Delta$

   Για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2. Γν. φθίνουσα $f \searrow \Delta$

   Για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3. Μέγιστο $f(x) \leq f(x_0)$, $x \in D_f$
4. Ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$, $x \in D_f$
5. Άρτια συνάρτηση
   i. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $-x \in D_f$
   ii. $f(-x) = f(x)$
6. Περιττή συνάρτηση
   i. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $-x \in D_f$
   ii. $f(-x) = -f(x)$

Πίνακες - Σχήματα

4 Μετατόπιση γραφικής παράστασης

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων
- ☐ Κατακόρυφη μετατόπιση
- ☐ Οριζόντια μετατόπιση
- ☐ Συνδυασμός μετατοπίσεων
- ☐ Γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Κατακόρυφη μετατόπιση:
   $g(x)=f(x)\pm c$
2. Οριζόντια μετατόπιση:
   $g(x)=f(x\pm c)$
3. Συνδυασμός μετατοπίσεων:
   $g(x)=f(x\pm c)\pm d$

Πίνακες - Σχήματα

5 Η έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

5.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων

5.3 Ακτίνιο

5.4 Τριγωνομετρικός κύκλος

Θεωρήματα - Ιδιότητες

5.1 Μετατροπή Μοίρες ↔ Ακτίνια

5.2 Τρ. αριθμοί βασικών γωνιών

5.3 Πρόσημα τριγωνομετρικών αριθμών

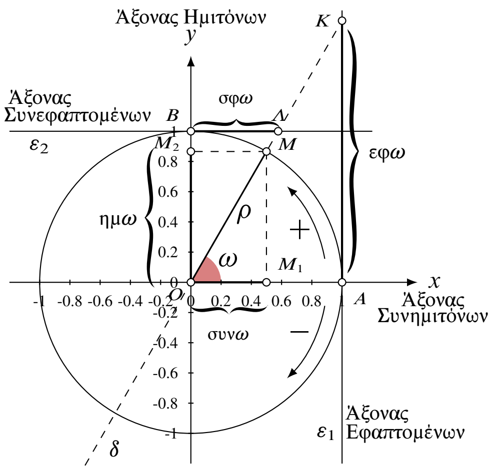
5.4 Τρ. αριθμοί γωνιών που ξεπερνούν τον κύκλο

5.5 Βασικές ανισότητες για ημίτονο και συνημίτονο

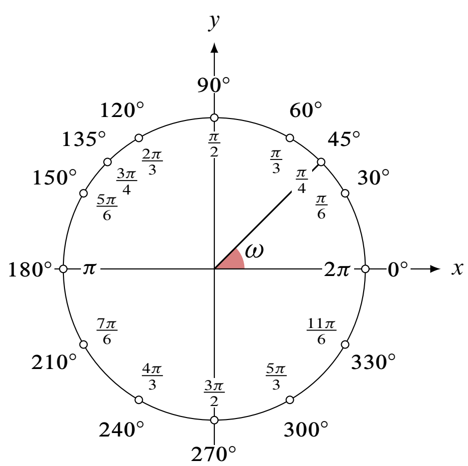
Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών σε τρίγωνο
- ☐ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών από σημείο xOy
- ☐ Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια και αντίστροφα
- ☐ Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών
- ☐ Τριγωνομετρικός κύκλος
- ☐ Πρόσημα τρ. Αριθμών σε κάθε τεταρτημόριο
- ☐ Γωνίες μεγαλύτερες του κύκλου
- ☐ Μέγιστη και ελάχιστη τιμή τριγωνομετρικών παραστάσεων

Πίνακες - Σχήματα

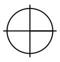
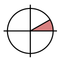
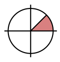
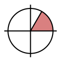
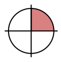
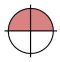
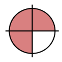
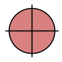


Σχήμα 5.1: Τριγωνομετρικός κύκλος



Σχήμα 5.2: Βασικές γωνίες πάνω στον κύκλο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Θέση	**Σημείο άξονα**	**1° Τεταρτημόριο**			**Σημείο άξονα**			
Μοίρες	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Σχήμα								
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται

Πίνακας 5.1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Ημίτονο : ημ$\omega = \dfrac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$
2. Συνημίτονο : συν$\omega = \dfrac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$
3. Εφαπτομένη : εφ$\omega = \dfrac{\text{Απέναντι κ.}}{\text{Προσκείμενη κ.}}$
4. Συνεφαπτομένη : σφ$\omega = \dfrac{\text{Προσκείμενη κ.}}{\text{Απέναντι κ.}}$
5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων:

   α. ημ$\omega = \frac{y}{\rho}$ γ. εφ$\omega = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$
   β. συν$\omega = \frac{x}{\rho}$ δ. σφ$\omega = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$
6. Απόσταση σημείου από την αρχή των αξόνων: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. Μετατροπή μεταξύ μοιρών και ακτινίων: $\frac{\mu}{180°} = \frac{a}{\pi}$
8. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών $> 360°$

   α. ημ$(360°\kappa + \omega) =$ ημω
   β. συν$(360°\kappa + \omega) =$ συνω
   γ. εφ$(360°\kappa + \omega) =$ εφω
   δ. σφ$(360°\kappa + \omega) =$ σφω
9. $-1 \leq$ ημ$\omega \leq 1$
10. $-1 \leq$ συν$\omega \leq 1$

6 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

6.1 Τριγωνομετρική ταυτότητα

Θεωρήματα - Ιδιότητες

6.1 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Έλεγχος ύπαρξης γωνίας
- ☐ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών με χρήση ταυτοτήτων
- ☐ Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων
- ☐ Απόδειξη ανισοτήτων

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
2. $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$
3. $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $\eta\mu x \neq 0$
4. $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$, $\eta\mu x \neq 0, \sigma\upsilon\nu x \neq 0$
5. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$
6. $\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

7 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που καταλήγουν σε 2ο, 3ο, 4ο.
- ☐ Συμπληρωματικές γωνίες
- ☐ Υπολογισμός παράστασης
- ☐ Γωνίες μεγαλύτερες του κύκλου

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Παραπληρωματικές γωνίες ($2o \leftrightarrow 1o$)

   α. $\eta\mu(180° - \omega) = \eta\mu\omega$
   β. $\sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
   γ. $\varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$
   δ. $\sigma\varphi 180° - \omega = -\sigma\varphi\omega$

2. Παραπληρωματικές γωνίες ($2o \leftrightarrow 1o$)

   α. $\eta\mu(180° - \omega) = \eta\mu\omega$
   β. $\sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
   γ. $\varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$
   δ. $\sigma\varphi 180° - \omega = -\sigma\varphi\omega$

3. Γωνίες με διαφορά 180° ($3o \leftrightarrow 1o$)

   α. $\eta\mu(180° + \omega) = -\eta\mu\omega$
   β. $\sigma\upsilon\nu(180° + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
   γ. $\varepsilon\varphi(180° + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$
   δ. $\sigma\varphi 180° + \omega = \sigma\varphi\omega$

4. Αντίθετες γωνίες ($4o \leftrightarrow 1o$)

   α. $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
   β. $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
   γ. $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$
   δ. $\sigma\varphi - \omega = -\sigma\varphi\omega$

5. Συμπληρωματικές γωνίες

   α. $\eta\mu(90° - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
   β. $\sigma\upsilon\nu(90° - \omega) = \eta\mu\omega$
   γ. $\varepsilon\varphi(90° - \omega) = \sigma\varphi\omega$
   δ. $\sigma\varphi 90° - \omega = \varepsilon\varphi\omega$

Πίνακες - Σχήματα

Σχέση γωνίας φ με την ω	**Τεταρτ.**	**Συμβολισμός $\varphi =$**	**ημφ**	**συνφ**	**εφφ**	**σφφ**
Αντίθετη	4ο	$-\omega$	$-\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$-\varepsilon\varphi\omega$	$-\sigma\varphi\omega$
Παραπληρωματική	2ο	$180° - \omega$	$\eta\mu\omega$	$-\sigma\upsilon\nu\omega$	$-\varepsilon\varphi\omega$	$-\sigma\varphi\omega$

Με διαφορά 180°	3ο	$180° + \omega$	$-$ημω	$-$συνω	εφω	σφω
Συμπληρωματική	1ο	$90° - \omega$	συνω	ημω	σφω	εφω
Με διαφορά 90°	2ο	$90° + \omega$	συνω	$-$ημω	$-$σφω	$-$εφω
Με άθροισμα 270°	3ο	$270° - \omega$	$-$συνω	$-$ημω	σφω	εφω
Με διαφορά 270°	4ο	$270° + \omega$	$-$συνω	ημω	$-$σφω	$-$εφω
Με άθροισμα 360°	4ο	$360° - \omega$	$-$ημω	συνω	$-$εφω	$-$σφω
Με διαφορά $\kappa \cdot 360°$	1ο	$\kappa \cdot 360° + \omega$	ημω	συνω	εφω	σφω

Πίνακας 7.2: Αναγωνή στο 1° τεταρτημόριο

8 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $f(x) = \eta\mu x$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$
3. $f(x) = \varepsilon\varphi x$
4. $f(x) = \sigma\varphi x$
5. $f(x) = \rho \cdot \eta\mu x$
6. Περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(\omega x)$: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(\omega x))$
7. $f(x) = \rho \cdot \varepsilon\varphi(\omega x)$
8. $f(x) = \rho \cdot \sigma\varphi(\omega x)$
9. $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x + c) + \delta$
10. $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x + c) + \delta$
11. $f(x) = \rho \cdot \varepsilon\varphi(\omega x + c) + \delta$
12. $f(x) = \rho \cdot \sigma\varphi(\omega x + c) + \delta$

Πίνακες - Σχήματα

9 Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

9.1 Τριγωνομετρική εξίσωση

Θεωρήματα - Ιδιότητες

9.1 Σύνολα λύσεων βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Λύση απλής τριγωνομετρικής εξίσωσης
- ☐ Λύση απλής τριγωνομετρικής εξίσωσης με αρνητικό αριθμό
- ☐ Σύνθετες τριγωνομετρικές εξισώσεις
- ☐ Επίλυση με αναγωγή στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτ.
- ☐ Επίλυση με τριγωνομετρικές ταυτότητες
- ☐ Τριγωνομετρικές εξισώσεις πολυωνυμικής μορφής
- ☐ Λύση εξίσωσης σε διάστημα
- ☐ Συστήματα
- ☐ Γεωμετρικές εφαρμογές

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Rightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
2. $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
3. $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow x = \kappa\pi + \theta\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
4. $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Rightarrow x = \kappa\pi + \theta\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

10 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $\etaμ(\varphi+\omega)=\etaμ\varphi\cdot\sigmaυν\omega+\sigmaυν\varphi\cdot\etaμ\omega$
2. $\sigmaυν(\varphi+\omega)=\sigmaυν\varphi\cdot\sigmaυν\omega-\etaμ\varphi\cdot\etaμ\omega$
3. $\varepsilon\varphi(\varphi+\omega)=\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}$
4. $\sigma\varphi(\varphi+\omega)=\dfrac{\sigma\varphi\varphi\sigma\varphi\omega-1}{\sigma\varphi\varphi+\sigma\varphi\omega}$
5. $\etaμ(\varphi-\omega)=\etaμ\varphi\cdot\sigmaυν\omega-\sigmaυν\varphi\cdot\etaμ\omega$
6. $\sigmaυν(\varphi-\omega)=\sigmaυν\varphi\cdot\sigmaυν\omega+\etaμ\varphi\cdot\etaμ\omega$
7. $\varepsilon\varphi(\varphi-\omega)=\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}$
8. $\sigma\varphi(\varphi-\omega)=\dfrac{\sigma\varphi\varphi\sigma\varphi\omega+1}{\sigma\varphi\varphi-\sigma\varphi\omega}$

11 Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ειδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $\eta\mu 2\varphi = 2\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$
2. $\sigma\upsilon\nu 2\varphi = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu^2\varphi \\ 1 - 2\eta\mu^2\varphi \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1 \end{cases}$
3. $\varepsilon\varphi 2\varphi = \dfrac{2\varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi^2\varphi}$
4. $\sigma\varphi 2\varphi = \dfrac{\sigma\varphi^2\varphi - 1}{2\sigma\varphi\varphi}$
5. $\eta\mu^2\varphi = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
6. $\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
7. $\varepsilon\varphi^2\varphi = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}$
8. $\sigma\varphi^2\varphi = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi}$

12 Πολυώνυμα

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Ορισμός πολυωνύμου - Όροι - Συντελεστές
- ☐ Βαθμός πολυωνύμου
- ☐ Ισότητα πολυωνύμων
- ☐ Τιμή πολυωνύμου - Ρίζα
- ☐ Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων
- ☐ Προσδιορισμός πολυωνύμου

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Μονώνυμο: ax^{ν}
   - Συντελεστής: a
   - Κύριο μέρος: x^{ν}

   όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.
2. Πολυώνυμο:
   $P(x) = a_{\nu}x^{\nu} + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
3. Όροι πολυωνύμου:
   $a_{\nu}x^{\nu}, a_{\nu-1}x^{\nu-1}, \ldots, a_1 x, a_0$
4. Συντελεστές πολυωνύμου:
   $a_{\nu}, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
5. Όροι πολυωνύμου $a_{\nu}x^{\nu}, a_{\nu-1}x^{\nu-1}, \ldots, a_1 x, a_0$
6. Σταθερός όρος: a_0
7. Βαθμός πολυωνύμου: ν
8. Σταθερό πολυώνυμο: $P(x) = c$
9. Μηδενικό πολυώνυμο: $P(x) = 0$
10. Τιμή πολυωνύμου για $x = \rho$: $P(\rho)$
11. Ρίζα πολυωνύμου:
    $P(\rho) = 0 \rightarrow \rho$ ρίζα του $P(x)$

: Σημαντική άσκηση
: Ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας

13 Διαίρεση πολυωνύμων

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Διαίρεση πολυωνύμων
- ☐ Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με τη χρήση διαίρεσης.
- ☐ Διαίρεση με διαιρέτη $x-\rho$ - Σχήμα Horner.
- ☐ Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με τη χρήση σχήματος Horner.
- ☐ Υπολογισμός υπολοίπου διαίρεσης.
- ☐ Ρίζα πολυωνύμου.
- ☐ Εύρεση παραμέτρου.
- ☐ Σχήμα Horner με διαιρέτες άλλης μορφής.

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Ταυτότητα διαίρεσης:
   $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$
2. Συνθήκη διαίρεσης:
   βαθμός $\upsilon(x)$ < βαθμός $\delta(x)$.
3. Τέλεια διαίρεση: $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)$
4. Υπόλοιπο: $\upsilon=P(\rho)$
5. Θεώρημα ρίζας:
   $x-\rho$: παράγοντας του $P(x) \Leftrightarrow P(\rho)=0$

Πίνακες - Σχήματα

Σχήμα Horner

Συντελεστές $P(x)$ →

a_ν	$a_{\nu-1}$	$\dots$	a_1	a_0	ρ

→ υπόλοιπο υ

Συντελεστές πηλίκου $\pi(x)$

: Σημαντική άσκηση
: Ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας

14 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Ημερομηνια: ....

Πίνακας ύλης

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

- ☐ Εξίσωση 1$^{\text{ου}}$ βαθμού
- ☐ Εξίσωση 2$^{\text{ου}}$ βαθμού
- ☐ Εξίσωση 3$^{\text{ου}+}$ βαθμού με παραγοντοποίηση
- ☐ Εξίσωση 3$^{\text{ου}+}$ βαθμού με σχήμα Horner
- ☐ Εξισώσεις της μορφής $(P(x))^\nu = a$.
- ☐ Ανίσωση 1$^{\text{ου}}$ βαθμού
- ☐ Ανίσωση 2$^{\text{ου}}$ βαθμού
- ☐ Ανίσωση σε μορφή γινομένου
- ☐ Ανίσωση 3$^{\text{ου}+}$ βαθμού με παραγοντοποίηση
- ☐ Ανίσωση 3$^{\text{ου}+}$ βαθμού με σχήμα Horner

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Θεώρημα ακέραιων ριζών ρ: ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow \rho$: διαιρέτης του a_0

Πίνακες - Σχήματα

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$\cdots$		ρ_μ		$+\infty$
$A_1(x)$			0								
$A_2(x)$					0						
$\vdots$					0		0				
$A_\nu(x)$			0						0		
$P(x)$		$\pm$	0	$\pm$	0	$\pm$	0	$\pm$	0	$\pm$	

Πίνακας 14.1: Πίνακας προσήμων του πολυωνύμου $P(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x)$

15 Εκθετική συνάρτηση

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐ Εύρεση πεδίου ορισμού εκθετικής συνάρτησης

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$
2. Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$.
3. Σύνολο τιμών $f(D_f) = (0, +\infty)$
4. Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, 1)$.
5. Η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.
6. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

7. Για τη συνάρτηση $f(x) = g(x)^{h(x)}$ πρέπει να ισχύει $g(x) > 0$.

Α. Για $a > 1$

- f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον ημιάξονα x'.
- για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Β. Για $0 < a < 1$

- f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον ημιάξονα x.
- για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

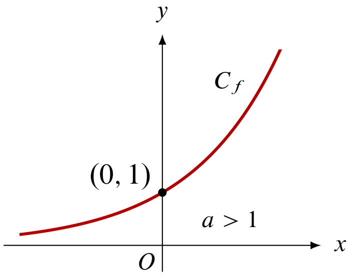
$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Πίνακες - Σχήματα

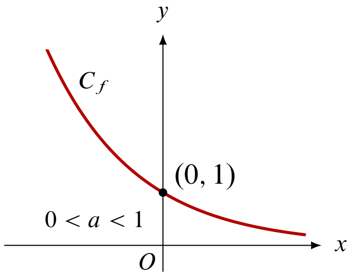
Περιγραφή	Ιδιότητα
Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^{x_1} : a^{x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$
Γινόμενο υψωμένο σε δύναμη - Δυνάμεις με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^x = a^x \cdot \beta^x$
Πηλίκο υψωμένο σε δύναμη - Δυνάμεις με κοινό εκθέτη	$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^x = a^x \cdot \beta^x$
Δύναμη υψωμένη σε εκθέτη	$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

Πίνακας 15.1: Ιδιότητες δυνάμεων με πραγματικό εκθέτη

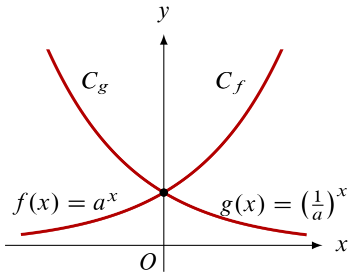
Πίνακες - Σχήματα



Σχήμα 15.1: Αύξουσα εκθετική συνάρτηση



Σχήμα 15.2: Φθίνουσα εκθετική συνάρτηση



Σχήμα 15.3: Συμμετρικες εκθετικές συναρτήσεις

16 Η έννοια του λογαρίθμου

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

16.1 Λογάριθμος

16.2 Λογάριθμοι $\log \theta$ και $\ln \theta$

Θεωρήματα - Ιδιότητες

16.1 Ιδιότητες λογαρίθμων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. $\log_a \theta = x \ , \ a$: βάση του λογαρίθμου
2. $\log_a \beta = x \Leftrightarrow a^x = \beta$
3. Δεκαδικός λογάριθμος: $\log x \ , \ a = 10$
4. Φυσικός λογάριθμος: $\ln x \ , \ a = e$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a a = 1$

Πίνακες - Σχήματα

Ιδιότητα	Συνθήκη
Λογάριθμος γινομένου	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Λογάριθμος πηλίκου	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
Λογάριθμος δύναμης	$\log_a x^\kappa = \kappa \cdot \log_a x \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$
Λογάριθμος ρίζας	$\log_a \sqrt[\nu]{x} = \frac{1}{\nu} \log_a x \ , \ \nu \in \mathbb{N}$
Λογάριθμος ως εκθέτης	$a^{\log_a x} = x$
Λογάριθμος δύναμης με κοινή βάση	$\log_a a^x = x$
Αλλαγή βάσης	$\log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$

Πίνακας 16.2: Ιδιότητες λογαρίθμων

17 Λογαριθμική συνάρτηση

Ημερομηνία: ....

Πίνακας ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες

Θεωρήματα - Ιδιότητες

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω

☐

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Λογαριθμική συνάρτηση: $f(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1$
2. Με $a = 10, a = e$: $f(x) = \log x\ ,\ f(x) = \ln x$
3. Πεδίο ορισμού $D_f = (0, +\infty)$.
4. Σύνολο τιμών $f(D_f) = \mathbb{R}$
5. Η f δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
6. Η f έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$. Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $A(1, 0)$.
7. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$
8. Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(g(x))$ πρέπει να ισχύει $g(x) > 0$.

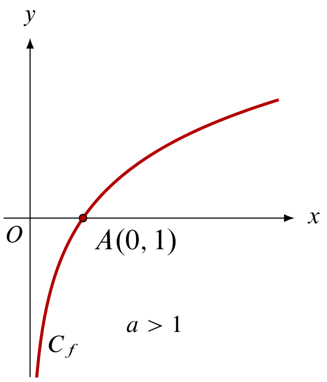
A. Για $a > 1$

- f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον ημιάξονα Oy'
- για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$
- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x > 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x < 0$.

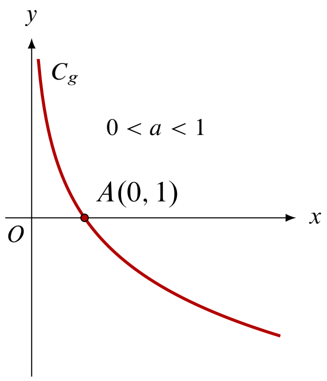
B. Για $0 < a < 1$

- f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον ημιάξονα Oy'
- για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$
- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x < 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x > 0$.

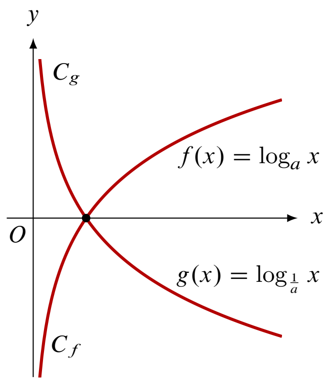
Πίνακες - Σχήματα



Σχήμα 17.1: Αύξουσα λογαριθμική συνάρτηση



Σχήμα 17.2: Φθίνουσα λογαριθμική συνάρτηση



Σχήμα 17.3: Συμμετρικές λογαριθμικές συναρτήσεις