1 Σύνθεση συναρτήσεων

1.1 : Εύρεση σύνθεσης

Για να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της για κάθε $x \in D_{f \circ g}$

1º Βήμα : Για το πεδίο ορισμού ισχύουν οι σχέσεις

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

Οι περιορισμοί αυτοί μα οδηγούν σε εξισώσει και ανισώσεις των οποίων οι κοινές λύσεις σχηματίζουν το πεδίο ορισμού.

2º Βήμα : Ο τύπος της $f \circ g$ θα ισούται με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

που σημαίνει ότι στον τύπο της f αντικαθιστούμε το x με $g(x)$.

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για τις συναρτήσεις $g \circ f$, $f \circ f \ldots$

2 Συνάρτηση $1-1$ - Αντίστροφη

2.1 : Συνάρτηση 1 – 1

Υπάρχουν οι εξής τρόποι για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$.

1^{ος} Τρόπος : Αποδεικνύοντας ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο D_f. (Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα.)

2^{ος} Τρόπος : Με τη βοήθεια του ορισμού της $1-1$ συνάρτησης

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων, αρκεί ο τύπος να επιτρέπει την επίλυση της εξίσωσης.)

3^{ος} Τρόπος : Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f. Κάθε οριζόντια ευθεία πρέπει να τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο.

4^{ος} Τρόπος : Αν η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε $y \in f(D_f)$ και η λύση ανήκει στο D_f τότε η f είναι $1-1$.

5^{ος} Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η f δεν είναι $1-1$.

Πηγή: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Η επανάληψη. Ανδρέας Πάτσης - Παύλος Τρύφων, Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική

2.2 : Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

1^{ος} Τρόπος :

- ***1^{ο} Βήμα :*** Εύρεση συνόλου τιμών της f με τη βοήθεια μονοτονίας.
- ***2^{ο} Βήμα :*** Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x με $x \in D_f$.

2^{ος} Τρόπος :

- ***1^{ο} Βήμα :*** Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x με $x \in D_f$.
- ***2^{ο} Βήμα :*** Κατά τη διάρκεια επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης, παίρνουμε περιορισμούς που αφορούν τη μεταβλητή y. Όταν λυθεί ως προς x επιπλέον περιορισμός είναι $x \in D_f$.

3 Όρια

Οι απροσδιόριστες μορφές που μπορεί να έχει ένα όριο είναι οι ακόλουθες :

α. Μορφή κλάσματος : $\dfrac{0}{0}$ και $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

β. Μορφή γινομένου : $0 \cdot (\pm\infty)$

γ. Μορφή δύναμης : $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

δ. Μορφή αθροίσματος : $\infty - \infty$

Θα μελετήσουμε επίσης τη μορφή $\frac{a}{0}$.

3.1 : Όρια με απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$

Α. Με ρητή συνάρτηση

1ος Τρόπος : Παραγοντοποίηση

2ος Τρόπος : Κανόνας De L'Hospital

Β. Με ρίζες :
Πολλαπλασιασμός με συζυγείς παραστάσεις.

Γ. Με απόλυτες τιμές

1ο Βήμα : Υπολογίζω τα όρια των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές.

2ο Βήμα : Διώχνω τις απόλυτες τιμές με τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Αν κάποια απόλυτη τιμή μηδενίζεται στο x_0 τότε υπολογίζω πλευρικά όρια.

3ο Βήμα : Υπολογίζω όριο ρητής $\frac{0}{0}$

Δ. Με τριγωνομετρικές παραστάσεις

1ος Τρόπος : Κατασκευάζω και χρησιμοποιώ τριγωνομετρικές ταυτότητες.

2ος Τρόπος : Κατασκευάζω με πράξεις κάποιο βασικό τριγωνομετρικό όριο, αρκεί όταν $x \to x_0$ να μηδενίζεται η γωνία του τριγωνομετρικού αριθμού.

3ος Τρόπος : Κανόνας De L' Hospital. (Χρειάζεται προσοχή εδώ γιατί μπορεί η εφαρμογή του κανόνα να με οδηγήσει σε δυσκολότερο όριο.)

Ε. Με εκθετικές, λογαριθμικές και συνδυασμό αυτών : Κανόνας De L' Hospital

3.2 : Όρια με απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$

Α. Με ρητή συνάρτηση όταν $x \to \infty$ υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος μόνο με τους μεγιστοβάθμιους όρους.

Β. Με ρίζες : Μέθοδος κοινού παράγοντα.

Γ. Διάφορες συναρτήσεις : Κανόνας De L' Hospital

3.3 : Όρια με απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$

1ο Βήμα : Γράφουμε το γινόμενο με μορφή σύνθετου κλάσματος ως εξής

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ή } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

2ο Βήμα : Το όριο παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital

3.4 : Όρια με απροσδιοριστία $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

1ο Βήμα : Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

2ο Βήμα : Υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη το οποίο έχει απροσδιοριστία $0\cdot(\pm\infty)$. Στη συνέχεια με αντικατάσταση υπολογίζουμε το αρχικό όριο.

3.5 : Όρια με απροσδιοριστία $\infty - \infty$

Για τον υπολογισμό ορίου $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ με απροσδιοριστία $\infty - \infty$ ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος Τρόπος : Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια από τις δύο συναρτήσεις.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος $\frac{g(x)}{f(x)}$ με μορφή $\infty - \infty$.

2ος Τρόπος : Αν οι $f(x), g(x)$ είναι κλάσματα, τα κάνουμε ομώνυμα.

3ος Τρόπος : Σχηματίζουμε διαφορά λογαρίθμων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\ln a - \ln\beta = \ln\frac{a}{\beta}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος.

3.6 : Όρια της μορφής $\frac{a}{0}$

1ο Βήμα : Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.

2ο Βήμα : Γράφουμε σε ξεχωριστό κλάσμα τον παράγοντα που μηδενίζεται.

3ο Βήμα : Αν αυτός ο παράγοντας έχει σταθερό πρόσημο τότε προχωράμε στον υπολογισμό. Αν όχι υπολογίζουμε πλευρικά όρια.

3.7 : Όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ$f(x)$, συν$f(x)$ - Μηδενική επί φραγμένη

Αν το όριο περιέχει σύνθετες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με γωνία $f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε

1ο Βήμα : Γράφουμε τη συνάρτηση μέσα στο όριο ως γινόμενο συναρτήσεων.

2ο Βήμα : Κλείνουμε τη συνάρτηση του ορίου σε απόλυτη τιμή και σχηματίζουμε διπλή ανισότητα ώστε να εφαρμοστεί κριτήριο παρεμβολής.

3.8 : Γνωστό όριο που περιέχει την $f(x)$ - Βοηθητική συνάρτηση

1ο Βήμα : Θέτουμε $g(x)$ τη συνάρτηση του ορίου και λύνουμε ως προς $f(x)$.

2ο Βήμα : Υπολογίζουμε το όριο της f στο x_0.

3.9 : Κριτήριο παρεμβολής

Το κριτήριο παρεμβολής για τον υπολογισμό ορίων εφαρμόζεται σε ανισότητες της μορφής

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \text{ ή } |f(x)| \le g(x) \Rightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x)$$

4 Εφαπτομένη

4.1 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστό σημείο επαφής

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού, παράγωγος f' και θέτουμε όπου $x = x_0$ ώστε να βρεθούν οι αριθμοί x_0, $f(x_0)$ και $f'(x_0)$.

2ο Βήμα : Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

και αντικαθιστώντας λύνουμε ως προς y.

4.2 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστή κλίση λ

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο Βήμα : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και θέτουμε το σ.δ. της εφαπτομένης να ισούται με τη δοσμένη κλίση λ.

$$f(x_0) = \lambda$$

Αν δεν μας δίνεται ο συντελεστής λ της εφαπτομένης ε τότε τον βρίσκουμε έχοντας τις εξής περιπτώσεις.

Συνθήκη	**Εξίσωση**
Ευθείες παράλληλες $\varepsilon \parallel \zeta$	$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Ευθείες κάθετες $\varepsilon \perp \zeta$	$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Οριζόντια ευθεία $\varepsilon \parallel x'x$	$\lambda_\varepsilon = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
Η ε σχηματίζει γωνία ω	$\lambda_\varepsilon = \text{εφ}\omega \Rightarrow f'(x_0) = \text{εφ}\omega.$

3ο Βήμα : Λύνουμε την εξίσωση, βρίσκουμε το x_0 και στη συνέχεια το $f(x_0)$.

4ο Βήμα : Εξίσωση ευθείας $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

4.3 : Εφαπτομένη που διέρχεται από εξωτερικό σημείο $P(a, \beta)$

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο Βήμα : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και γράφουμε τον τύπο της ευθείας.

3ο Βήμα : Αντικαθιστούμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ στην εξίσωση.

4ο Βήμα : Αφού $P \in \varepsilon$ τότε θέτουμε $x = a$ και $y = \beta$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς x_0.

5ο Βήμα : Για κάθε x_0 υπολογίζουμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ και βρίσκουμε την ευθεία.

4.4 : Ευθεία εφάπτεται στη C_f στο $M(x_0 f(x_0))$

$$\text{Η ευθεία } y = ax + \beta \text{ εφάπτεται στη } C_f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$$

4.5 : Κοινή εφαπτομένη C_f, C_g σε κοινό σημείο $M(x_0, f(x_0))$

$$\text{Οι } C_f \text{ και } C_g \text{ έχουν κοινή εφαπτομένη στο } M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

5 Ρυθμός μεταβολής

5.1 : Εύρεση ρυθμού μεταβολής συνάρτησης

1º Βήμα : Δίνουμε ονόματα στις συναρτήσεις του προβλήματος, προσέχοντας ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.

2º Βήμα : Γράφουμε τα στοιχεία του προβλήματος με σύμβολα. Προσέχουμε στους ρυθμούς μεταβολής να βάλουμε το σωστό πρόσημο.

3º Βήμα : Γράφουμε τον κατάλληλο τύπο που περιέχει τη ζητούμενη συνάρτηση, ώστε παραγωγίζοντας να εμφανιστεί ο ρυθμός μεταβολής της.

4º Βήμα : Αν το πρόβλημα ζητάει παράγωγο σε σημείο (π.χ. σε κάποια χρονική στιγμή) συμβολίσουμε με $x_0, t_0 \ldots$ το σημείο αυτό και θέτουμε $x = x_0, t = t_0 \ldots$ στον τύπο της παραγώγου.*

*Αν η ζητούμενη παράγωγος δεν είναι ο μοναδικός άγνωστος, πρέπει να γράψουμε κι άλλον τύπο ώστε να υπολογίσουμε τους άγνωστους που μας εμποδίζουν.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τύπος για την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων καθώς και τύπους για εμβαδόν και όγκο τρισδιάστατων στερεών.

	Περίμετρος	**Εμβαδόν**		**Εμβαδόν**	**Όγκος**
Τετράγωνο	$\Pi = 4a$	$E = a^2$	Κύβος	$E = 6a^2$	$V = a^3$
Ορθογώνιο	$\Pi = 2(\mu + \pi)$	$E = \mu\pi$	Παραλλ/δο	$E = 2(a\beta + \beta\gamma + a\gamma)$	$V = a\beta\gamma$
Παραλλ/μο	$\Pi = 2(a + \beta)$	$E = \beta\upsilon$	Κύλινδρος	$E = 2\pi\rho h + 2\pi\rho^2$	$V = \pi\rho^2 h$
Τρίγωνο	$\Pi = a + \beta + \gamma$	$E = \frac{\beta\upsilon}{2}$	Κώνος	$E = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$	$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h$
Τραπέζιο	$\Pi = a + \beta + \gamma + \delta$	$E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$	Σφαίρα	$E = 4\pi\rho^2$	$V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$
Κύκλος	$\Pi = 2\pi\rho$	$E = \pi\rho^2$	Πυραμίδα	$E = \ldots E_\beta$	

6 Μονοτονία - Ακρότατα

6.1 : Εύρεση μονοτονίας - ακρότατων - συνόλου τιμών - πλήθος ριζών συνάρτησης

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού της f και έλεγχος συνέχειας

2ο Βήμα : Παράγωγος f'.

3ο Βήμα : Υπολογίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f' με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ και τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.
- Με επιλογή τιμής σε κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού. Οι ρίζες βρίσκονται και εδώ λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Παραγωγίζοντας δεύτερη ή ακόμα και τρίτη φορά. Με τη μονοτονία κάθε παραγώγου βρίσκουμε τα πρόσημά της ώσπου να φτάσουμε στη μονοτονία της f. Οι ρίζες βρίσκονται με δοκιμές.

4ο Βήμα : Σχεδιάζουμε πίνακα με τα πρόσημα της παραγώγου και τη μονοτονία της f. (Συμπληρώνουμε αν χρειαστεί και επιπλέον γραμμές για τις ανώτερης τάξης παραγώγους που βρήκαμε.)

5ο Βήμα :

Για εύρεση μονοτονίας	**Για εύρεση ακροτάτων**	**Για εύρεση συνόλου τιμών**
Αναφέρουμε το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για ακρότατα στα κρίσιμα σημεία και στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού	Βρίσκουμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας και τις ενώνουμε

6ο Βήμα : Για την εύρεση του πλήθους ριζών της συνάρτησης, ελέγχουμε αν το 0 ανήκει στην εικόνα κάθε διαστήματος. Αναλυτικά

$$0 \in f(\Delta_1) \Rightarrow \text{Υπάρχει } x_0 : f(x_0) = 0$$

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική μέσα στο κάθε διάστημα γιατί η f είναι γνησίως μονότονη.

7 Κυρτότητα - Σημεία καμπής

7.1 : Εύρεση κυρτότητας - σημείων καμπής

1^{o} Βήμα : Πεδίο ορισμού και έλεγχος συνέχειας.

2^{o} Βήμα : Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο f''.

3^{o} Βήμα : Βρίσκουμε ρίζες και πρόσημα της f'' με τους τρόπους που περιγράψαμε στη μονοτονία.

4^{o} Βήμα : Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα της f'' και την κυρτότητα της f.

5^{o} Βήμα :

Για εύρεση κυρτότητας	**Για εύρεση σημείων καμπής**
Αναφέρουμε το είδος της κυρτότητας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για σημεία καμπής στα σημεία που αλλάζει η κυρτότητα αρκεί η f να είναι μια φορά παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

7.2 : Κυρτότητα και εφαπτομένες - Απόδειξη ανισότητας

1^{o} Βήμα : Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

2^{o} Βήμα : Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο που ζητάει ή σε κάποιο σημαντικό σημείο. Αυτή θα έχει τη μορφή $y = ax + \beta$

3^{o} Βήμα : Χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$f \smile \Delta \Rightarrow f(x) \geq ax + \beta \ , \ f \curvearrowright \Delta \Rightarrow f(x) \leq ax + \beta$$

και με πράξεις φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή που τη ζητάει η άσκηση.

8 Ασύμπτωτες

8.1 : Κατακόρυφες ασύμπτωτες

1º Βήμα : Πεδίο ορισμού της f.

2º Βήμα : Υπολογισμός κάποιου πλευρικού ορίου στα σημεία x_0 που είναι ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της f ή στα σημεία που δεν είναι συνεχής η συνάρτηση.

3º Βήμα : Αν κάποιο πλευρικό όριο ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

8.2 : Οριζόντια ασύμπτωτη

1º Βήμα : Όριο της f στο $+\infty$ ή $-\infty$ εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$.

2º Βήμα : Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ τότε η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

8.3 : Πλάγια ασύμπτωτη

1º Βήμα : Εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$ υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \ , \ \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) = \beta$$

και αντίστοιχα στο $-\infty$.

2º Βήμα : Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

8.4 : Ασύμπτωτες γενικά

1º Βήμα : Αναζητούμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία που αναφέραμε.

2º Βήμα : Ανάμεσα σε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ξεκινάμε με τις πλάγιες και από το συντελεστή διεύθυνσης λ θα εξαρτηθεί αν η ευθεία είναι πλάγια ή οριζόντια. Ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \begin{cases} \lambda \neq 0 \to \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - \lambda x) = \beta \begin{cases} \beta \in \mathbb{R} : \text{Πλάγια ασύμπτωτη} : \ y = \lambda x + \beta \\ \beta = \pm\infty : \text{ Όχι πλάγια ασύμπτωτη} \end{cases} \\ \lambda = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l \begin{cases} l \in \mathbb{R} : \text{Οριζόντια ασύμπτωτη } y = l \\ l \notin \mathbb{R} : \text{ Όχι οριζόντια ασύμπτωτη} \end{cases} \\ \lambda = \pm\infty \to \text{Όχι πλάγια ασύμπ.} \end{cases}$$

9 Εύρεση παραμέτρων

Η γενική μέθοδος για την εύρεση μιας παραμέτρου είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση ή ανίσωση που να την περιέχει, ώστε λύνοντάς την να την προσδιορίσουμε. Κάποια συνθήκη της υπόθεσης είναι αυτή που θα μας οδηγήσει σ΄ αυτή την εξίσωση-ανίσωση.

Συνθήκη	**Εξίσωση - Ανίσωση**
Το σημείο $A(a, \beta)$ ανήκει στη C_f	$f(a) = \beta$
Γνωστό όριο που περιέχει παραμέτρους $a, \beta \dots$	Βοηθητική συνάρτηση
Η f είναι συνεχής σε σημείο $x_0 \in D_f$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in D_f$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Η ευθεία $y = ax + \beta$ εφάπτεται στη C_f	$\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$
Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$	$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$
Η f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο Δ	$f'(x) \geq 0$ (ή $f'(x) \leq 0$)
Η f παρουσιάζει **ακρότατο** στο **εσωτερικό** σημείο $x_0 \in \Delta$ και είναι **παραγωγίσιμη** σ΄ αυτό. (Αν επιπλέον το ακρότατο είναι β)	$f'(x_0) = 0$ (τότε $f(x_0) = \beta$) - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η f είναι κυρτή (ή κοίλη) στο Δ	$f''(x) \geq 0$ (ή $f''(x) \leq 0$)
Η C_f έχει **σημείο καμπής** $M(x_0, y_0)$ στο **εσωτερικό** σημείο $x_0 \in \Delta$ στο οποίο είναι **δύο φορές παραγωγίσιμη** και **ορίζεται εφαπτομένη** στο σημείο αυτό.	$f''(x_0) = 0$ και $f(x_0) = y_0$ - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$	$x_0 =$ ανοιχτό άκρο διαστήματος ή σημείο ασυνέχειας.
Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = l$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$

10 Λύση εξισώσεων - ανισώσεων + Ύπαρξη λύσης

10.1 : Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης

Μπορούμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος Τρόπος : Με θεώρημα Bolzano

2ος Τρόπος : Με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

3ος Τρόπος : Με σύνολο τιμών : Αν $a \in f(D_f)$ τότε υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε $f(x_0) = a$.

4ος Τρόπος : Με θεώρημα Rolle : Βρίσκουμε την αρχική F της f οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $F'(x) = a$.

5ος Τρόπος : Με Θεώρημα Μέσης Τιμής.

6ος Τρόπος : Αλγεβρικά

7ος Τρόπος : Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα.

8ος Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Πηγή: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Η επανάληψη. Ανδρέας Πάτσης - Παύλος Τρύφων, Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική

10.2 : Εξίσωση που έχει το πολύ μια ρίζα

Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα έχουμε τους τρόπους

1ος Τρόπος : Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και $1-1$.

2ος Τρόπος : Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 ρίζες x_1, x_2 και εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

10.3 : Μοναδική ρίζα εξίσωσης

Χρησιμοποιούμε έναν τρόπο για να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και έναν τρόπος για να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ μια ρίζα. Άρα η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

10.4 : Επίλυση εξίσωσης

Για την επίλυση μιας εξίσωσης ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1η Περίπτωση : **Συνάρτηση $1-1$**

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(a)$ και δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$. Συνεπώς θα ισχύει

$$f(x) = f(a) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} x = a$$

Η μέθοδος αυτή ακολουθείται και για εξισώσεις της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$.

2η Περίπτωση : **Με ολικό ακρότατο**

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = a$ και αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός a είναι ολικό ακρότατο της f. Οι θέσεις των ακρότατων είναι οι λύσεις της εξίσωσης.