

17 Φεβρουαρίου 2025

‘Αλγεβρα Α’ Λυκείου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Τυπολόγιο

1ο Κεφάλαιο Σύνολα

1.1 Η έννοια του συνόλου

- 1.1 Σύνολο : Ομάδα όμοιων αντικειμένων.
- 1.2 Το x ανήκει στο σύνολο A : $x \in A$.
- 1.3 Κενό σύνολο : Το σύνολο χωρίς στοιχεία : \emptyset .
- 1.4 Βασικά σύνολα αριθμών
- α. Φυσικοί αριθμοί : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
 - β. Ακέραιοι αριθμοί : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - γ. Ρητοί Αριθμοί : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \mid a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$.
 - δ. Άρρητοι Αριθμοί : Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.
 - ε. Πραγματικοί Αριθμοί : $\mathbb{R} = \{\text{όλοι οι αριθμοί}\}$.
- 1.5 Ίσα σύνολα : $A = B$ αν έχουν τα ίδια στοιχεία.
- 1.6 Υποσύνολο : $A \subseteq B$.

1.2 Πράξεις συνόλων

- 1.7 Πράξεις μεταξύ συνόλων
- α. Ένωση : $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$
 - β. Τομή : $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$
 - γ. Συμπλήρωμα : $A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$
 - δ. Διαφορά : $A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$

2ο Κεφάλαιο Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Πράξεις πραγματικών αριθμών

- 2.1 Δύναμη πραγματικού αριθμού: $a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^v$. Ο a λέγεται **βάση** και ο v **εκθέτης**.
- 2.2 Ιδιότητες δυνάμεων :

α. $a^1 = a$	ε. $a^v : a^\mu = a^{v-\mu}$	η. $(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}$
β. $a^0 = 1, a \neq 0$	στ. $(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$	θ. $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^v$
γ. $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$	ζ. $\left(\frac{a}{\beta}\right)^v = \frac{a^v}{\beta^v}$	
δ. $a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$		

- 2.3 **Ταυτότητα:** Μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

- | | |
|--|---|
| 1. Άθροισμα στο τετράγωνο
$(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$ | 4. Διαφορά στον κύβο
$(a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$ |
| 2. Διαφορά στο τετράγωνο
$(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$ | 5. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά
$(a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2$ |
| 3. Άθροισμα στον κύβο
$(a + \beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$ | |

6. Άθροισμα κύβων

$$(a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2) = a^3 + \beta^3$$

7. Διαφορά κύβων

$$(a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2) = a^3 - \beta^3$$

2.2 Διάταξη

2.4 Είδη διαστημάτων

Διάστημα	Ανισότητα	Σχήμα	Περιγραφή
$[a, \beta]$	$a \leq x \leq \beta$		Κλειστό a, β
(a, β)	$a < x < \beta$		Ανοιχτό a, β
$[a, \beta)$	$a \leq x < \beta$		Κλειστό a ανοιχτό β
$(a, \beta]$	$a < x \leq \beta$		Ανοιχτό a κλειστό β
$[a, +\infty)$	$x \geq a$		Κλειστό a συν άπειρο
$(a, +\infty)$	$x > a$		Ανοιχτό a συν άπειρο
$(-\infty, a]$	$x \leq a$		Μείον άπειρο a κλειστό
$(-\infty, a)$	$x < a$		Μείον άπειρο a ανοιχτό

2.5 Μήκος διαστήματος $[a, \beta]$: $\mu = \beta - a$

2.6 Κέντρο διαστήματος $[a, \beta]$: $x_0 = \frac{a + \beta}{2}$

2.7 Ακτίνα διαστήματος $[a, \beta]$: $\rho = \frac{\beta - a}{2}$

2.3 Απόλυτη τιμή

2.8 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού a : $|a|$: η απόστασή του από το 0.

2.9 Ιδιότητες απόλυτων τιμών

α. $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

β. $-|a| \leq a \leq |a|$

γ. $|a|^2 = a^2$

δ. $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

ε. $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}$

στ. $||a| - |\beta|| \leq |a + \beta| \leq |a| + |\beta|$

ζ. $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

2.10 Απόσταση δύο αριθμών a, β : $d(a, \beta) = |a - \beta|$

2.4 Ρίζες

2.11 Τετραγωνική ρίζα : \sqrt{x} με $x \geq 0$ και $a \geq 0$

2.12 N-οστή ρίζα: $\sqrt[n]{x}$ με $x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$ και $a \geq 0$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

2.13 Ιδιότητες ριζών

- α. $(\sqrt{x})^2 = x, x \geq 0$
 β. $\sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$
 γ. $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x, y \geq 0$
 δ. $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, x \geq 0 \text{ και } y > 0$
 ε. $\sqrt{x \pm y} \neq \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, x, y \geq 0$
 στ. $(\sqrt[n]{x})^n = x, x \geq 0$
 ζ. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{R} \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ x, & x \geq 0 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$
- η. $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}, x, y \geq 0$
 θ. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, x \geq 0 \text{ και } y > 0$
 ι. $\sqrt[n]{x \pm y} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}, x, y \geq 0$
 ια. $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \sqrt[n]{y}, x, y \geq 0$
 ιβ. $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x_n}$
 όπου $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

3ο Κεφάλαιο Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

3.1 Εξίσωση 1ου βαθμού: $ax + \beta$

3.2 Εξισώσεις με απόλυτες τιμές.

- α. $|A(x)| = \theta \Leftrightarrow A(x) = \pm \theta$
 β. $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$
 γ. $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x) \text{ με } B(x) \geq 0$

3.2 Εξισώσεις της μορφής $x^n = a$

	$a > 0$	$a < 0$
$n : \text{άρτιος}$	$x = \pm \sqrt[n]{a}$	Αδύνατη
$n : \text{περιττός}$	$x = \sqrt[n]{a}$	$x = -\sqrt[n]{ a }$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

3.1 Εξίσωση 2ου βαθμού: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

3.2 Τύποι Vieta: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.

3.3 Τύπος εξίσωσης 2ου βαθμού με λύσεις x_1, x_2 : $x^2 - Sx + P = 0$.

4ο Κεφάλαιο Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

4.1 Ανίσωση 1ου βαθμού: $ax + \beta \geq 0$.

4.2 Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

- $|A(x)| < \theta \Leftrightarrow -\theta < A(x) < \theta$.
- $|A(x)| > \theta \Leftrightarrow A(x) < -\theta \text{ ή } A(x) > \theta$.

4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

4.1 Ανίσωση 2ου βαθμού : $ax^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ με $a \neq 0$.

4.2 Παραγοντοποίηση τριωνύμου

- Αν $\Delta > 0$ τότε $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.
- Αν $\Delta = 0$ τότε $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$ όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
- Αν $\Delta < 0$ τότε δεν παραγοντοποιείται.

4.3 Πίνακες προσήμων τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$

$\Delta > 0 \rightarrow x_1, x_2$: ρίζες

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του a	Ετερόσημο του a	Ομόσημο του a

$\Delta = 0 \rightarrow x_0$: διπλή ρίζα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του a	Ομόσημο του a

$\Delta < 0 \rightarrow$ Καμία ρίζα

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του a	

5ο Κεφάλαιο Ακολουθίες

5.1 Η έννοια της ακολουθίας

5.2 Αριθμητική πρόοδος

5.1 Αριθμητική πρόοδος : $a_{v+1} = a_v + \omega$, $v \in \mathbb{N}^*$.

5.2 Γενικός τύπος αριθμητικής προόδου : $a_v = a_1 + (v - 1) \cdot \omega$

5.3 Διαφορά αριθμητικής προόδου : $\omega = a_{v+1} - a_v$.

5.4 Οι a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow \beta = \frac{a + \gamma}{2}$.

Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των a, γ .

5.5 Άθροισμα v πρώτων όρων αριθμητικής προόδου : $S_v = \frac{v}{2} (a_1 + a_v)$ ή $S_v = \frac{v}{2} [a_1 + (v - 1)\omega]$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

5.6 Γεωμετρική πρόοδος : $a_{v+1} = \lambda \cdot a_v$, $v \in \mathbb{N}^*$.

5.7 Γενικός τύπος γεωμετρικής προόδου : $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$

5.8 Λόγος γεωμετρικής προόδου : $\lambda = \frac{a_{v+1}}{a_v} \neq 0$.

5.9 Οι a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\Leftrightarrow \beta^2 = a\gamma$.

Αν $a, \gamma > 0$ ο $\beta = \sqrt{a\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των a, γ .

5.10 Άθροισμα v πρώτων όρων αριθμητικής προόδου : $S_v = a_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$

6ο Κεφάλαιο Συναρτήσεις

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

6.2 Γραφική παράσταση

6.3 Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$