



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ - 11 Οκτωβρίου 2017

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΟΡΙΟ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ - ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ - ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

ΘΕΜΑ Α

A.1 Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$. **Μονάδες 8**

A.2 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια ρητή συνάρτηση με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ πολυώνυμα βαθμών n και μ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

εξετάζοντας περιπτώσεις για τη σχέση μεταξύ των βαθμών n και μ των δύο πολυωνύμων. **Μονάδες 7**

A.3 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.

α. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 τότε τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

θα είναι μεταξύ τους ίσα.

β. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

γ. Αν για μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε προκύπτει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

δ. Δίνεται μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$

κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε. Έστω μια εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$. Τότε θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$4\sqrt{x+1} - 3 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

- B.1** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **Μονάδες 5**
- B.2** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ **Μονάδες 8**
- B.3** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)(1 - \sin^2(x-1))}{x^2 - x}$ **Μονάδες 7**
- B.4** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x) - 2}{f^2(x) - f(x)}$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^2 + x + 6} - \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{ax^2 + \beta x + 5}{x - x^2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

για την οποία υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

- Γ.1** Να αποδείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = -3$. **Μονάδες 8**
- Γ.2** Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. **Μονάδες 9**
- Γ.3** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(f(x) + 2) + \eta\mu 3x}{\sqrt{x+4} - 2} = 24$$

Να βρείτε τα όρια:

- Δ.1** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **Μονάδες 7**
- Δ.2** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{|f(x) + 1| - |f^2(x) - 3f(x)|}$ **Μονάδες 8**
- Δ.3** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \ln(f^2(x) - 2f(x) + \sin^2(f(x) - 1)) - \ln(f^2(x) - 2f(x) + 1)$$

Αν η f είναι $1 - 1$ και $f(0) = 1$, να βρείτε

- i. το πεδίο ορισμού της g , ii. το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Μονάδες 4+6

Καλή Επιτυχία!