Ασκήσεις για επανάληψη

1ο Κεφάλαιο Διαφορικός Λογισμός

Συναρτήσεις

🧨 ΄Ασκηση 1.1 : Πεδίο ορισμού - Ρητές συναρτήσεις

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού σε καθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$\alpha. \ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\gamma. \ f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$\varepsilon. \ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x - 12}$$

$$\beta. \ f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\delta. \ f(x) = \frac{1}{|x| - 2}$$

$$\sigma\tau. \ f(x) = \frac{3 - 2x}{x^3 - 1}$$

'Ασκηση 1.2: Πεδίο ορισμού - 'Αρρητες συναρτήσεις

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού σε καθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$\alpha. \ f(x) = \sqrt{2x - 4}$$

$$\gamma. \ f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\epsilon. \ f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$

β.
$$f(x) = \sqrt{9-3x}$$

$$\delta. \ f(x) = \sqrt{|x+1|-3}$$

$$στ. f(x) = \sqrt{3 - |1 - 2x|}$$

'Ασκηση 1.3: Πεδίο ορισμού - Ρίζα στον παρονομαστή

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού σε καθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$\alpha. \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\gamma. \ f(x) = \frac{\eta \mu x}{\sqrt{|x+2|-5}}$$

$$\varepsilon. \ f(x) = \frac{\sigma v x}{\sqrt{1 - x^2} + 2}$$

$$\beta. \ f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$\delta. \ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}-3}$$

$$\delta. \ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1-3}}$$
 $\sigma\tau. \ f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+9}-25}$

Όρια μορφής $\frac{0}{0}$

'Ασκηση 1.4: Ρητές συναρτήσεις

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha. \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

$$\epsilon. \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 16}$$

$$\theta. \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$$

$$\beta. \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 6x - 8}$$

1.
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$$

$$\gamma. \lim_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$$

$$\zeta. \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

ia.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\delta. \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$$

$$\eta. \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^4 - 5x}$$

1β.
$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

'Ασκηση 1.5 : 'Αρρητες συναρτήσεις

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha$$
. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\gamma. \lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{5x - 1} - 3}$$

$$\epsilon. \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$\beta. \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}$$

$$\delta. \lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$$

1

στ.
$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5}}{x-4}$$

ζ.
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+7}}$$
 η. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{8}}{\sqrt{x} - 2}$

$$\eta. \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{8}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\theta. \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$$

Μονοτονία - Ακρότατα

'Ασκηση 1.6: Μονοτονία - Ακρότατα

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

$$\alpha$$
. $f(x) = x^2 + 8x - 2$

$$\beta. \ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

$$y. \ f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x + 1$$

$$\delta. \ f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$\epsilon. \ f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$$

στ.
$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\zeta. \ f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$\eta. \ f(x) = x \cdot \eta \mu x \ , \ x \in [-\pi, \pi]$$

Εξίσωση εφαπτομένης

🧪 ΄Ασκηση 1.7 : Εφαπτομένη σε γνωστό σημείο

Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας, στο δοσμένο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

$$\alpha. \ f(x) = x^2 - 4x \ , \ M(1, f(1))$$

$$\beta. \ f(x) = \frac{1}{x}, \ M(2, f(2))$$

$$\gamma. \ f(x) = \eta \mu x \ , \ M\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

δ.
$$f(x) = \sqrt{x}$$
, $M(4, f(4))$

$$\epsilon. \ f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \ M(3, f(3))$$

στ.
$$f(x) = συν2x$$
, $M\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\zeta. \ f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \ M(-1, f(-1))$$

$$\eta. \ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \ , \ M(2, f(2))$$

'Ασκηση 1.8: Εφαπτομένη με γνωστή κλίση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:

- α. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$.
- β. είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta: y = 5x + 1$.
- γ. είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = \frac{1}{3}x + 2$.
- δ. σχηματίζει γωνία $\omega = 45^{\circ}$ με τον άξονα x'x.
- ε. είναι παράλληλη με τον άξονα x'x.

΄Ασκηση 1.9 : Εφαπτομένη με γνωστή κλίση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+ax-2$ με $a\in\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M(1,f(1)) είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta: y = 2x + 1$

- α. να δείξετε ότι a=-1
- β. να βρείτε όλες τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες με την ζ .

2ο Κεφάλαιο Στατιστική

Μεταβολές των παρατηρήσεων - Κανονική κατανομή

🖍 ΄Ασκηση 2.1 : Μεταβολές των παρατηρήσεων

Οι τιμές μιας συγκεκριμένου τύπου τηλεόρασης σε 10 καταστήματα ηλεκτρονικών ειδών είναι οι ακόλουθες:

(Πηγή: skroutz.gr 15/5/2024).

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
- β. Αν για την αγορά αυτής της τηλεόρασης χρησιμοποιήσουμε εκπτωτικό κουπόνι αξίας 35€, να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση του νέου δείγματος των μειωμένων τιμών.
- γ. Αν λόγω ζήτησης, οι τιμές του προϊόντος αυτού αυξηθούν κατά 15%, εξετάστε αν το νέο δείγμα είναι ή όχι ομοιογενές.

🧨 'Ασκηση 2.2: Μεταβολές των παρατηρήσεων - Εξίσωση ευθείας

Δίνεται η ευθεία ε : y=2x-3 και τα σημεία $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\dots,A_{10}(x_{10},y_{10})$ τα οποία ανήκουν στην ευθεία αυτή. Αν το δείγμα των τετμημένων $x_i,\ i=1,2,\dots,10$ των σημείων, έχει μέση τιμή $\bar x=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση του δείγματος των τεταγμένων y_i των σημείων και να εξετάσετε το δείγμα αυτό ως προς την ομοιογένεια.