ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

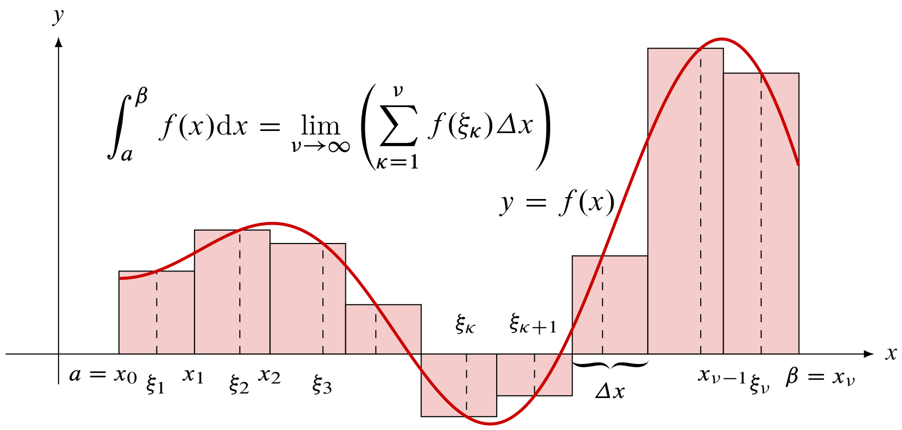
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

26 Μαΐου 2025

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

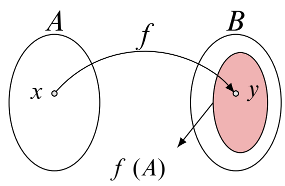


Φρόνιμος Σπύρος

1ο Κεφάλαιο Ορισμοί

Ορισμός 1 :

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι μια διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται **τιμή** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.



Ορισμός 2 :

Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

Ορισμός 3 :

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των σημείων της μορφής $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με C_f

$$C_f = \{M(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

Ορισμός 4 :

Δύο συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 5 :

Δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$. Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε δεν είναι ίσες.

Ορισμός 6 :

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

1.1 Η συνάρτηση $f+g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x)+g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.

1.2 Η συνάρτηση $f-g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x)-g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.

1.3 Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.

1.4 Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

Ορισμός 7 :

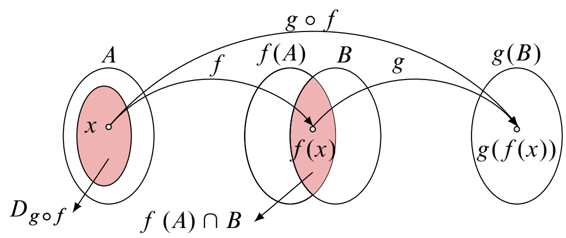
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού , αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \ \text{ και } \ f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\ B \neq \varnothing$.



Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

(Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in B \ \text{ και } \ g(x) \in A\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.)

Ορισμός 8 :

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του Δ. Η f θα ονομάζεται

1.1 γνησίως αύξουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

1.2 γνησίως φθίνουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η f σε κάθε περίπτωση λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Ορισμός 9 :

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και έστω $x_0 \in A$. Η f θα λέμε ότι παρουσιάζει

1.1 ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

1.2 ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται **ολικά ακρότατα**. Το x_0 λέγεται **θέση** ακρότατου.

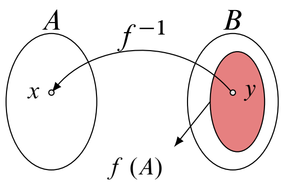
Ορισμός 10 :

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1-1$ εάν κάθε στοιχείο $x \in A$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της. Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της f θα ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ορισμός 11 :

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f.



- Συμβολίζεται με f^{-1} και είναι $f^{-1} : f(A) \to A$.
- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f, ενώ το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.
- Ισχύει ότι $x = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f(A)$.

Ορισμός 12 :

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός 13 :

1.1 Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

1.2 Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **ανοιχτό** διάστημα (a, β) εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

1.3 Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Ορισμός 14 :

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Ορισμός 15 :

1.1 Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη στο **πεδίο ορισμού** της ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in D_f$.

1.2 Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **ανοικτό** διάστημα (a, β) του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.

1.3 Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 16 :

Έστω μια συνάρτηση $f : \to \mathbb{R}$ και έστω A_1 το σύνολο των σημείων $x \in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχεί στο $f'(x)$ ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της f η απλά **παράγωγος** της f. Συμβολίζεται με f'.

Ορισμός 17 :

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''. Επαγωγικά ορίζεται και η $\nu-$οστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)}\right]'$$

Ορισμός 18 :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Ορισμός 19 :

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Ορισμός 20 :

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Ορισμός 21 :

Τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα της f ονομάζονται τοπικά ακρότατα της f.

Ορισμός 22 :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ορισμός 23 :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ορισμός 24 :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0. Αν:

- η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) η αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της C_f.

Ορισμός 25 :

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

Ορισμός 26 :

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$) τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$).