

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

30 Δεκεμβρίου 2014

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

i. $3x^2 - 7 + (x - 1)i + x^2 = y^2 + (y - x)i$

ii. $\eta\mu x - \frac{1}{2} = i(1 + 2\sigma\upsilon\nu y) \quad x, y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2iz - w = 1 - 6i \\ z + 2iw = i \end{cases}$$

3. Να αποδείξεις ότι

$$\left(\frac{a+i}{1-ai}\right)^{2\nu} + \left(\frac{i-a}{1+ai}\right)^{2\nu} = 2(-1)^\nu$$

4. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$(3 - 2i)^2 z + (1 + i)^6 + (1 - i)z = 45 - 3i$$

5. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και ο $w = z^2 + 2\bar{z} + 1$. Να αποδείξεις ότι αν $w \in \mathbb{R}$ τότε $x = 1$ ή $y = 0$.

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i. $z^2 - 4z + 13 = 0$

ii. $z^2 = 5 - 12i$

7. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z+1}{z-2i}$. Να βρεις το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z ώστε

i. $w \in \mathbb{R}$

ii. $w^2 \in I$

8. Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο $(C) : x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξεις ότι και η εικόνα του $w = z + \frac{4i}{\bar{z}}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός