Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

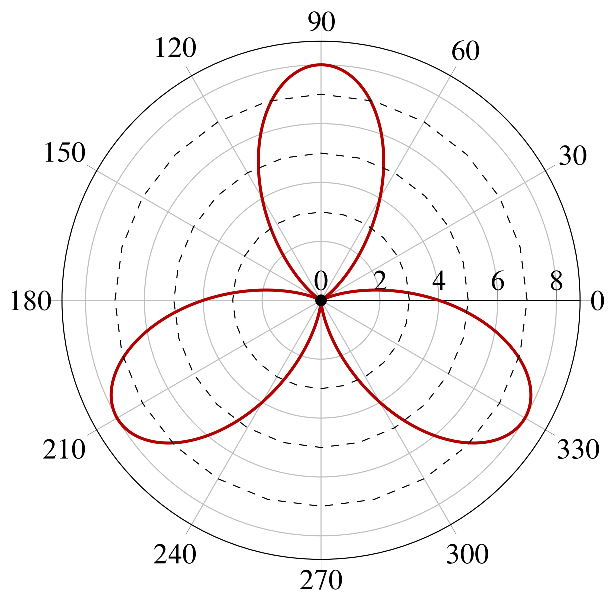
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Άλγεβρα

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

$$(x^2+y^2)^2 = 4y^3 - 12yx^2 + 4\sqrt{x^2+y^2}^3$$



ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Το σύνολο των αριθμών από το 0 εως το άπειρο όπου κάθε αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί**: Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αντίθετους τους.
3. **Ρητοί Αριθμοί**: Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους.
4. **Άρρητοι Αριθμοί**: Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. **Αντίθετοι αριθμοί**
   Αντίθετοι ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι έχουν άθροισμα μηδέν. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές και αντίθετα πρόσημα.
   $$a + (-a) = 0$$
2. **Αντίστροφοι αριθμοί**
   Αντίστροφοι ονομάζονται δύο πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.
   $$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

Πράξη	Όροι	Αποτέλεσμα	Συμβολισμός
Πρόσθεση	Προσθετέοι	Άθροισμα	$a + \beta$
Αφαίρεση	Μειωτέος - Αφαιρετέος	Διαφορά	$a - \beta$
Πολλαπλασιασμός	Παράγοντες	Γινόμενο	$a \cdot \beta$
Διαίρεση	Διαιρετέος - Διαιρέτης	Πηλίκο	$a : \beta$

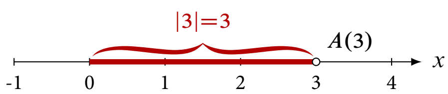
Η αφαίρεση $a-\beta$ και η διαίρεση $a : \beta$ δύο αρθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι οι πράξεις που προκύπτουν από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα και μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια τους.

$$a - \beta = a + (-\beta) \quad , \quad a : \beta = \frac{a}{\beta} = a \cdot \frac{1}{\beta}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται να είναι η απόσταση της εικόνας του αριθμού αυτού απο το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ a \geq 0 \\ -a \ , \ a < 0 \end{cases}$$



- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού a είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού a είναι ίση με τον αντίθετο του αριθμού a.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Δύναμη ενός φυσικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.
- Η δύναμη a^2 ονομάζεται και ***a* στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη a^3 ονομάζεται και ***a* στον κύβο**.
- Σε μία αριθμητική παράσταση, η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις είναι
  1. Δυνάμεις
  2. Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις
  3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις
- Οι πράξεις εκτελούνται μ' αυτή τη σειρά πρώτα μέσα στις παρενθέσεις αν υπάρχουν και ύστερα έξω απ' αυτές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.
- Ο θετικός αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ - ΑΚΕΡΑΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Μια μαθηματική παράσταση ονομάζεται αλγεβρική όταν αυτή περιέχει αριθμούς και μεταβλητές με πράξεις μεταξύ τους.

- Μια αλγεβρική παράσταση θα ονομάζεται **ακέραια** εαν μεταξύ των μεταβλητών της υπάρχουν μόνο οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης, ενώ οι εκθέτες είναι **φυσικοί αριθμοί**.
- **Τιμή** μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται ο αριθμός που θα προκύψει ύστερα από πράξεις εαν αντικατασταθούν οι μεταβλητές της με αριθμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΜΟΝΩΝΥΜΟ

Μονώνυμο ονομάζεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση εαν μεταξύ των μεταβλητών υπάρχει μόνο η πράξη του πολαπλασιασμού.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x^{\nu_1} y^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot z^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}} \quad , \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa \in \mathbb{Z}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΒΑΘΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

Βαθμός μονωνύμου, ως προς μια μεταβλητή, ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής.

- Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές είναι το άθροισμα των βαθμών κάθε μεταβλητής.
- Οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού, ενώ το 0 ονομάζεται **μηδενικό** μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 : ΟΜΟΙΑ - ΙΣΑ - ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

- Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
- Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα που έχουν ίσους συντελεστές.
- Αντίθετα ονομάζονται δύο όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία αποτελεί άθροισμα **ανόμοιων** μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** πολυώνυμα ενώ το 0 **μηδενικό** πολυώνυμο.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P, Q, A, B \ldots$ τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση στην οποία θα βρίσκονται οι μεταβλητές του δηλαδή : $P(x)$, $Q(x, y)$, $A(z, w)$, $B(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.
- Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο βαθμός του **μεγιστοβάθμιου** όρου.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά **φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής** δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Τιμή ενός πολυωνύμου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικατασταθούν οι μεταβλητές του πολυωνύμου με πραγματικούς αριθμούς. Η τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$, για $x = x_0$ συμβολίζεται με $P(x_0)$ και είναι ίση με :

$$P(x_0) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 12 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ

Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας ή αφαιρώντας τους όμοιους όρους της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών της.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ 14 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση, μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο παραγόντων.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. **Κοινός Παράγοντας**
   Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται όταν σ' όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας. Κοινό παράγοντα βγάζουμε

   i. το Μ.Κ.Δ. των συντελεστών και
   ii. τις κοινές μεταβλητές ή παραστάσεις στο μικρότερο εκθέτη.

   Οι όροι μέσα στην παρένθεση προκύπτουν διαιρώντας κάθε όρο με τον κοινό παράγοντα.

2. **Ομαδοποίηση**
   Χρησιμοποιείται στην περίπτωση που δεν υπάρχει σε όλους τους όρους μιας παράστασης κοινός παράγοντας οπότε μοιράζονται οι όροι σε ομάδες έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει δικό της κοινό παράγοντα.

3. **Διαφορά Τετραγώνων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 - \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$

4. **Διαφορά - Άθροισμα Κύβων**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^3 - \beta^3$ ή $a^3 + \beta^3$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) \quad \text{και} \quad a^3 + \beta^3 = (a + \beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right)$$

5. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου**
   Κάθε σχέση της μορφής $a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2 \quad \text{και} \quad a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$

6. **Τριώνυμο**
   Κάθε σχέση της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   $$x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + a)(x + \beta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 15 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Ευκλείδεια διαίρεση μεταξύ δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ ονομάζεται η διαδικασία με την οποία διαρώντας τα πολυώνυμα αυτά προκύπτεί μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει
$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Τα πολυώνυμα $\Delta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ ονομάζονται **Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** και **υπόλοιπο** αντίστοιχα.
- Η ισότητα $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ ονομάζεται **ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι μηδενικό ($\upsilon(x) = 0$) η διαίρεση ονομάζεται τέλεια και ισχύει :
  $$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$
  Στην τέλεια διαίρεση, τα πολυώνυμα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ ονομάζονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του $\Delta(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 16 : Ε.Κ.Π. ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους, τον καθένα υψωμένο στη μεγαλύτερη δύναμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 17 : Μ.Κ.Δ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους, τον καθένα υψωμένο στη μικρότερη δύναμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 : ΡΗΤΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Ρητή ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση η οποία έχει τη μορφή κλάσματος με τουλάχιστον μια μεταβλητη στον παρονομαστή της. Είναι της μορφής : $\frac{A(x)}{B(x)}$.

- Μια ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται αν ο παρονομαστής της είναι **διάφορος του μηδενός** : $B(x) \neq 0$.
- Μια αλγεβρική παράσταση απλοποιείται **μόνο** αν και οι δύο όροι της αποτελούν **γινόμενο** παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$	$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
Επιμεριστική	$a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$	

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a\cdot 0=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς $a,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων πραγματικών αριθμών a,β είναι θετικό.
- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων πραγματικών αριθμών a,β είναι αρνητικό.

$$a,\beta \text{ ομόσημοι } \Rightarrow a\cdot\beta>0 \text{ και } \frac{a}{\beta}>0$$
$$a,\beta \text{ ετερόσημοι } \Rightarrow a\cdot\beta<0 \text{ και } \frac{a}{\beta}<0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δυναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a ισχύει :

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

Επίσης για κάθε δυναμη με βάση οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β και φυσικούς εκθέτες ν, μ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \ , \ \beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu\cdot\mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu \ , \ a, \beta \neq 0$

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}$$
$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^\nu = a_1^\nu \cdot a_2^\nu \cdot \ldots \cdot a_\kappa^\nu$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την τετραγωνική ρίζα.

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Τετράγωνο ρίζας	$(\sqrt{x})^2 = x \ , \ x \geq 0$
2	Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \ , \ x$ πραγματικός
3	Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \ , \ x, y \geq 0$
4	Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \ , \ x \geq 0$ και $y > 0$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_\nu}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$ και ν φυσικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ
Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα **μονώνυμο** με κοινό κύριο μέρος και συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ
Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα **μονώνυμο** με κύριο μέρος το γινόμενο των κύριων μερών τους και συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους. Ο βαθμός του γινομένου ως προς κάθε μεταβλητή είναι το άθροισμα των αντίστοιχων βαθμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ
Δίνονται τα πολυώνυμα $\Delta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ τα οποία συνδέονται με τη σχέση :

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Η ισότητα αυτή παριστάνει ταυτότητα Ευκλέιδειας διαίρεσης αν και μόνο αν ο βαθμός του υπολοίπου $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη $\delta(x)$.
- Ένα πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι παράγοντας ενός πολυωνύμου $\Delta(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ ώστε να ισχύει $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$.