

Παράγωγος συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Απλές συναρτήσεις

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = x^2$

ζ. $f(x) = \sin x$

β. $f(x) = x^3$

η. $f(x) = \cos x$

γ. $f(x) = x^7$

θ. $f(x) = e^x$

δ. $f(x) = \sqrt{x}$

ι. $f(x) = \ln x$

ε. $f(x) = \frac{1}{x}$

ια. $f(x) = 3^x$

στ. $f(x) = \eta\mu x$

ιβ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = 2x^3$

ε. $f(x) = -3\cos x$

β. $f(x) = 4\sqrt{x}$

στ. $f(x) = \sqrt{3}\sin x$

γ. $f(x) = \frac{5}{x}$

ζ. $f(x) = 5e^x$

δ. $f(x) = -2\eta\mu x$

η. $f(x) = \sqrt{2}\ln x$

θ. $f(x) = 3 \cdot 2^x$

3. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

δ. $f(x) = \sqrt[4]{x^7}$

β. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

ε. $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

γ. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

στ. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = x - 1$

δ. $f(x) = 8 - 5x$

β. $f(x) = 2x + 3$

ε. $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

γ. $f(x) = 4 - x$

στ. $f(x) = 5 - \frac{3x}{4}$

5. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

β. $f(x) = x^2 - 5x$

γ. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

δ. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 5$

ε. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7$

στ. $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 3$

6. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 2$

β. $f(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{2x}{3} + 1$

γ. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x$

δ. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + 4x - 7$

7. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

β. $f(x) = \eta\mu x + \sin x + \sqrt{3}$

γ. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \sin x$

δ. $f(x) = \eta\mu x - x^4 + 2$

ε. $f(x) = \frac{1}{x} - \pi + \eta\mu \frac{\pi}{5}$

στ. $f(x) = \sin x - \cos x + \frac{1}{2}$

ζ. $f(x) = 3e^x - 2\eta\mu x - 4x^3$

η. $f(x) = 3 \ln x - 5 \cdot 3^x + \ln 2$

θ. $f(x) = 3e^x - \frac{4}{x}$

8. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = x \cdot \sin x$

ε. $f(x) = xe^x$

β. $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$

στ. $f(x) = x^2 \ln x$

γ. $f(x) = 4x^3 \cdot \ln x$

ζ. $f(x) = e^x \eta\mu x$

δ. $f(x) = \eta\mu x \cdot \sin x$

η. $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$

9. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

δ. $f(x) = \frac{2x-1}{x}$

β. $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

ε. $f(x) = \frac{4-3x}{2-x}$

γ. $f(x) = \frac{x+4}{3-x}$

στ. $f(x) = \frac{3x+5}{2x-4}$

10. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

δ. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

β. $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$

ε. $f(x) = \frac{4-x}{x^3}$

γ. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-1}$

στ. $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

11. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 4} & \delta. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2} \\ \beta. f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x} & \epsilon. f(x) = \frac{1 - 2x}{x^3 - 1} \\ \gamma. f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 + 1} & \sigma\tau. f(x) = \frac{x}{x^3 + 8} \end{array}$$

12. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} & \sigma\tau. f(x) = \frac{x^2}{e^x} \\ \beta. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x + 1} & \zeta. f(x) = \frac{\ln x - x}{x^2} \\ \gamma. f(x) = \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x} & \eta. f(x) = \frac{x}{\ln x} \\ \delta. f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}} & \theta. f(x) = \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ \epsilon. f(x) = \frac{\ln x}{x} & \end{array}$$

13. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 - x} & \gamma. f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{x} \\ \beta. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} & \delta. f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

■ Σύνθετες συναρτήσεις

14. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = (x + 3)^4 & \epsilon. f(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^4 \\ \beta. f(x) = (2x - 5)^3 & \\ \gamma. f(x) = (3 - x)^7 & \sigma\tau. f(x) = \left(2 - \frac{3x}{4}\right)^3 \\ \delta. f(x) = (1 - 4x)^5 & \end{array}$$

15. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \eta\mu^3 x & \\ \beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x & \\ \gamma. f(x) = \ln^5 x & \\ \delta. f(x) = \epsilon\phi^2 x & \\ \epsilon. f(x) = (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^3 & \\ \sigma\tau. f(x) = (\ln x + x)^2 & \end{array}$$

16. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{2x + 4} & \delta. f(x) = \sqrt{3x + x^2} \\ \beta. f(x) = \sqrt{3 - x} & \epsilon. f(x) = \sqrt{x^3} \\ \gamma. f(x) = \sqrt{x^2 - 4} & \sigma\tau. f(x) = \sqrt{1 - x^3} \end{array}$$

17. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{\eta\mu x}, x \in (0, \frac{\pi}{2}) & \\ \beta. f(x) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}, x \in (0, \frac{\pi}{2}) & \\ \gamma. f(x) = \sqrt{\ln x + x}, x \in (1, \frac{\pi}{2}) & \\ \delta. f(x) = \sqrt{e^x} & \\ \epsilon. f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} & \end{array}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt{2^x}$$

18. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \frac{1}{x^2} & \delta. f(x) = \frac{1}{\epsilon\phi x} \\ \beta. f(x) = \frac{1}{2x - 4} & \epsilon. f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \gamma. f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} & \sigma\tau. f(x) = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x} \end{array}$$

19. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \eta\mu(2x) & \delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x}) \\ \beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x + 2) & \epsilon. f(x) = \eta\mu \frac{1}{x} \\ \gamma. f(x) = \eta\mu(x^2 + x) & \sigma\tau. f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3) \end{array}$$

20. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \ln(x^3) & \epsilon. f(x) = e^{\frac{1}{x}} \\ \beta. f(x) = e^{3x+4} & \sigma\tau. f(x) = \ln(\eta\mu x) \\ \gamma. f(x) = \ln(x^2 - 4x) & \zeta. f(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x} \\ \delta. f(x) = 2^{\eta\mu x} & \eta. f(x) = \ln(e^x + x) \end{array}$$

21. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{9 - x^2} & \\ \beta. f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 - 1} & \\ \gamma. f(x) = \eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x & \\ \delta. f(x) = (x^3 + 2x)^4 + (1 - 2x)^5 & \\ \epsilon. f(x) = \epsilon\phi(3x + \pi) + \sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) & \\ \sigma\tau. f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x^2 & \end{array}$$

ζ. $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \ln(4 - x^2)$

η. $f(x) = e^{2x+1} + 2^{2x}$

22. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = x \cdot \eta\mu(2x)$

β. $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

γ. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x-8}$

δ. $f(x) = 3x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

ε. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \epsilon\varphi(2x)$

στ. $f(x) = \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu 2x$

ζ. $f(x) = x^2 \cdot \ln(x^3)$

η. $f(x) = e^{3x} \cdot \sigma\upsilon\nu(2x)$

θ. $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln \frac{x}{2}$

23. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

γ. $f(x) = \frac{x+2}{\sigma\upsilon\nu(2x)}$

β. $f(x) = \frac{\eta\mu(3x)}{x-4}$

δ. $f(x) = \frac{(2x-1)^4}{\sqrt{x-2}}$

24. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$

γ. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{x}}$

β. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

δ. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln x}}$

25. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

δ. $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^4}$

β. $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$

ε. $f(x) = \sqrt[4]{\eta\mu^3 x}$

γ. $f(x) = \sqrt[5]{(x+3)^4}$

στ. $f(x) = \sqrt[3]{\ln^4 x}$

■ Συνδυαστικές ασκήσεις

26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - ax + 3$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$.

α. Να δείξετε ότι $a = 2$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

γ. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x} + \beta$ για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και $f'(4) = \frac{1}{2}$.

α. Να δείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = 3$.

β. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1}$$