



Άλγεβρα - Α' Λυκείου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

11 Φεβρουαρίου 2025

■ Ερωτήσεις θεωρίας

1.

- α. Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- β. Ποιος αριθμός μας δείχνει το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.
- γ. Πότε μια εξίσωση έχει 2 ρίζες, πότε μια και πότε είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .
- δ. Να γραφούν οι τύποι του Ίετα.

2. Σωστό - Λάθος

Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω εξισώσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- α. Αν για μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχουμε $\Delta > 0$ τότε έχει 2 άνισες λύσεις.
- β. Αν για μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχουμε $\Delta < 0$ τότε έχει μια διπλή λύση.
- γ. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ παριστάνει μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού για κάθε τιμή του a .
- δ. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού τότε : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
- ε. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με $x_1 = -x_2$ τότε $b = 0$.

■ Επίλυση εξισώσεων

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| α. $x^2 - 5x + 6 = 0$ | στ. $x^2 - 6x + 5 = 0$ |
| β. $x^2 - 3x + 2 = 0$ | ζ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ |
| γ. $x^2 - 7x + 12 = 0$ | η. $2x^2 - 9x + 10 = 0$ |
| δ. $x^2 + 3x - 4 = 0$ | θ. $3x^2 - x - 4 = 0$ |
| ε. $x^2 - 6x + 8 = 0$ | |

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| α. $x^2 - 4x + 4 = 0$ | δ. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ |
| β. $x^2 - 6x + 9 = 0$ | ε. $36x^2 + 12x + 1 = 0$ |
| γ. $x^2 - 10x + 25 = 0$ | στ. $4x^2 + 12x + 9 = 0$ |

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| α. $x^2 + x + 4 = 0$ | γ. $2x^2 - 3x + 8 = 0$ |
| β. $x^2 + 3x + 12 = 0$ | δ. $2x^2 + x + 5 = 0$ |

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- α. $x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$
- β. $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
- γ. $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$
- δ. $x^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})x - 4 = 0$

■ Τύποι Vieta

7. Για καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεων, εφόσον υπάρχουν.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| α. $x^2 - 3x + 1 = 0$ | ε. $x^2 - 2x + 3 = 0$ |
| β. $x^2 - 4x + 4 = 0$ | στ. $9x^2 + 6x + 1 = 0$ |
| γ. $2x^2 + x - 4 = 0$ | ζ. $\frac{x^2}{2} - x - 3 = 0$ |
| δ. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ | |

8. Για καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεων, εφόσον υπάρχουν.

- α. $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$
- β. $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$
- γ. $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{18}x - \sqrt{8} = 0$

■ Κατασκευή εξίσωσης 2ου βαθμού

9. Να βρεθεί η εξίσωση 2ου βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς x_1, x_2

- | | |
|--|---|
| α. $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$ | στ. $x = 4$ διπλή λύση |
| β. $x_1 = -2$ και $x_2 = 4$ | ζ. $x_1 = 3$ και $x_2 = 5$ |
| γ. $x_1 = 1$ και $x_2 = -5$ | η. $x_1 = -2$ και $x_2 = -4$ |
| δ. $x_1 = -4$ και $x_2 = -1$ | θ. $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -\frac{3}{4}$ |
| ε. $x_1 = \sqrt{8}$ και $x_2 = \sqrt{2}$ | ι. $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = 3$ |

ια. $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ και $x_2 = 1 + \sqrt{3}$

ιβ. $x_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{4}$ και $x_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}$

10. Να βρεθούν οι λύσεις x_1, x_2 , μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, οι οποίες έχουν άθροισμα S και γινόμενο P με:

α. $S = 9$ και $P = -10$ δ. $S = 0$ και $P = 4$

β. $S = -7$ και $P = 12$ ε. $S = 12$ και $P = 0$

γ. $S = 6$ και $P = 9$ στ. $S = 8$ και $P = -8$

11. Να βρεθούν, εάν υπάρχουν, αριθμοί x_1, x_2 οι οποίοι έχουν

α. άθροισμα 4 και γινόμενο -5

β. άθροισμα -3 και γινόμενο -10

γ. άθροισμα 7 και γινόμενο 6

δ. άθροισμα 4 και γινόμενο 4

ε. άθροισμα 1 και γινόμενο 3

στ. άθροισμα -2 και γινόμενο -8

ζ. άθροισμα $\frac{3}{2}$ και γινόμενο $\frac{1}{2}$

η. άθροισμα 3 και γινόμενο -5

12. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, να βρεθεί η εξίσωση, αν γι αυτήν ισχύει

α. $x_1 + x_2 = 7$ και $x_1 \cdot x_2 = 6$

β. $x_1 + x_2 = 8$ και $x_1 \cdot x_2 = 12$

γ. $x_1 + x_2 = -3$ και $x_1 \cdot x_2 = -28$

δ. $x_1 + x_2 = -12$ και $x_1 \cdot x_2 = 20$

13. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

τότε να βρεθεί να βρεθεί η εξίσωση η οποία έχει λύσεις τις $y_1 = 2x_1 + x_2$ και $y_2 = x_1 - 3x_2$.

■ Παραστάσεις των x_1, x_2

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5x + 3 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της, τότε να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων.

α. $x_1 + x_2$

δ. $x_1^3 + x_2^3$

β. $x_1 \cdot x_2$

ε. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

γ. $x_1^2 + x_2^2$

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x - 5 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της, τότε να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων.

α. $x_1 + x_2$

δ. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

β. $x_1 \cdot x_2$

γ. $x_1^2x_2 + x_2x_2^2$

ε. $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

16. Να βρεθεί εξίσωση 2ου βαθμού, με λύσεις x_1, x_2 για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α. $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = 3$

β. $x_1^2 + x_2^2 = -8$ και $x_1 \cdot x_2 = 2$

γ. $x_1 + x_2 = 3$ και $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 6$

δ. $x_1^2 + x_2^2 = 29$ και $(x_1 + x_2)^2 = 49$

■ Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

17. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

δ. $x^2 + 7|x| + 10 = 0$

β. $x^2 - 4|x| + 3 = 0$

ε. $2x^2 - |x| - 10 = 0$

γ. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

στ. $x^2 - 10|x| + 25 = 0$

18. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

δ. $x^6 - 2x^3 - 15 = 0$

β. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

ε. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$

γ. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

στ. $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$

19. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $\frac{x-3}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{3-x}{x^2-x}$

β. $\frac{2x-1}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{3-2x}{x^2-3x+2}$

γ. $\frac{x+4}{x^2-4} + \frac{2x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}$

δ. $\frac{x+4}{x^2-2x} + 2 = \frac{x-2}{x}$

20. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $(x-1)^2 - 5|x-1| + 6 = 0$

β. $(2x-3)^2 - 7|2x-3| + 12 = 0$

γ. $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 = 0$

δ. $(x+3)^6 + 19(x+3)^3 - 216 = 0$

21. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $(x^2-x)^2 + 4|x^2-x| - 12 = 0$

β. $(x + \frac{1}{x})^2 - 7(x + \frac{1}{x}) + 10 = 0$

γ. $(x^3-2)^2 + 19(x^3-2) - 150 = 0$

δ. $(|x|-3)^2 + 8(|x|-3) - 12 = 0$

■ Παραμετρικές - Είδη ριζών

22. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2ου βαθμού

$$x^2 + (\lambda - 2)x + 2\lambda^2 = 0$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία παράμετρος.

- α. Να βρεθεί η διακρίνουσα του τριωνύμου.
- β. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες λύσεις.
- γ. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.
- δ. Για ποιές τιμές της παραμέτρου λ είναι αδύνατη η εξίσωση.

23. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2ου βαθμού

$$x^2 + 3\lambda x + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία παράμετρος.

- α. Να βρεθεί η διακρίνουσα του τριωνύμου.
- β. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.

24. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + x - \lambda^2 = 0$$

έχει 2 άνισες λύσεις για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

25. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$ax^2 + (a - 1)x - 1 = 0$$

- α. έχει λύσεις για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$.
- β. έχει μια διπλή λύση για $a = -1$.

26. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + (a - 3)x + a^2 + 4 = 0$$

δεν έχει λύσεις για καμία τιμή του a .

27. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$2ax^2 + (a - 4)x + a + 2 = 0$$

να έχει μια διπλή ρίζα.

28. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$ax^2 + (2a - 3\beta)x + (a - \beta + 2) = 0$$

να έχει λύσεις τις $x_1 = -2, x_2 = 1$.

29. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + 2(\beta - 1)x + a + \beta^2 - 7 = 0$$

να έχει μια διπλή λύση τη $x = -2$.

30. Να βρεθούν οι σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (a + 3\beta - 2)x + 4a - 2a\beta - 2 = 0$$

να έχει λύσεις τις $x_1 = 4 - 2a$ και $x_2 = \beta - 3$.

31. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (\lambda - 2)x + 2\lambda + 8 = 0$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ έτσι ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες

- α. αντίθετες
- β. αντίστροφες

32. Δίνεται η εξίσωση

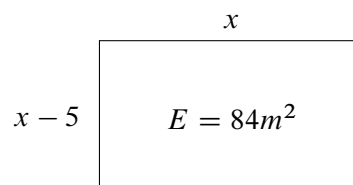
$$x^2 + (3 - \lambda)x + \lambda - 4 = 0$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ έτσι ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες

- α. ομόσημες
- β. ετερόσημες

■ Προβλήματα

33. Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής x για την οποία το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος ισούται με $E = 84m^2$.



34. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24cm και εμβαδόν 32cm². Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.