Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- 100 Ορισμοί
- 250 Θεωρήματα
- 400 Μέθοδοι για λύση ασκήσεων
- 200 Λυμένα παραδείγματα
- 500 Άλυτες ασκήσεις και προβλήματα
- 200 Επαναληπτικά θέματα
- Απαντήσεις ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ Γυμνασίου

Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ΙΣΒΝ : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :**Σπύρος Φρόνιμος**

Εξώφυλλο :
Δημήτρης Πρεντουλής

Στη γυναίκα μου.

Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ 1 ΑΛΓΕΒΡΑ . . . .

Κεφάλαιο 1

Πραγματικοί Αριθμοί — Σελίδα 3

1.1 Πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών 3

1.2 Δυνάμεις 5

1.3 Τετραγωνική ρίζα 6

Κεφάλαιο 2

Μονώνυμα — Σελίδα 15

2.1 Η έννοια του μονωνύμου 15

2.2 Πράξεις μεταξύ μονωνυμων 15

Κεφάλαιο 3

Πολυώνυμα — Σελίδα 17

3.1 Η έννοια του πολυωνύμου 17

3.2 Πράξεις μεταξύ των πολυωνύμων 17

Κεφάλαιο 4

Ταυτότητες Ι — Σελίδα 19

4.1 Τετράγωνο αθροίσματος 19

4.2 Τετράγωνο διαφοράς 19

4.3 Κύβος αθροίσματος 19

4.4 Κύβος διαφοράς 20

4.5 Γινόμενο αθροίσματος επι διαφορά 20

4.6 Άθροισμα κύβων 20

4.7 Διαφορά κύβων 20

Κεφάλαιο 5

Ταυτότητες ΙΙ — Σελίδα 21

Κεφάλαιο 6

Παραγοντοποίηση Σελίδα 23

6.1 Κοινός παράγοντας 23
6.2 Ομαδοποίηση 23
6.3 Διαφορά τετραγώνων 23
6.4 Διαφορά - Άθροισμα κύβων 23
6.5 Ανάπτυγμα τετραγώνου 23
6.6 Τριώνυμο 23

Κεφάλαιο 7

Διαίρεση πολυωνύμων Σελίδα 25

7.1 Ο αλγόριθμος της διαίρεσης πολυωνύμων 25
7.2 Παραγοντοποίηση με χρήση διαίρεσης 25

Κεφάλαιο 8

Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ. Αλγ. Παραστάσεων Σελίδα 27

8.1 Ε.Κ.Π. 27
8.2 Μ.Κ.Δ. 27

Κεφάλαιο 9

Ρητές παραστάσεις Σελίδα 29

9.1 Η έννοια της ρητής παράστασης 29
9.2 Απλοποίηση παραστάσεων 29

Κεφάλαιο 10

Πράξεις με Ρητές Παραστάσεις Σελίδα 31

10.1 Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων 31
10.2 Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων 31

Κεφάλαιο 11

Εξισώσεις 1ου Βαθμού Σελίδα 33

Κεφάλαιο 12

Εξισώσεις 2ου Βαθμού Σελίδα 35

12.1 Επίλυση με τη χρήση τύπου 35
12.2 Επίλυση με παραγοντοποίηση 36

Κεφάλαιο 13

Προβλήματα Εξισώσεων 2ου Βαθμού Σελίδα 37

Κεφάλαιο 14

Κλασματικές Εξισώσεις Σελίδα 39

14.1 Επίλυση κλασματικών εξισώσεων 39

14.2 Προβλήματα 39

Κεφάλαιο 15

Ανισότητες - Ανισώσεις Σελίδα 41

15.1 Ανισότητες 41

15.2 Ανισώσεις 41

Κεφάλαιο 16

Η γραμμική εξίσωση Σελίδα 43

Κεφάλαιο 17

Γραμμικά συστήματα Σελίδα 45

17.1 Το γραμμικό σύστημα 45

17.2 Γραφική επίλυση συστήματος 45

Κεφάλαιο 18

Αλγεβρική Επίλυση Σελίδα 47

18.1 Η μέθοδος της αντικατάστασης 47

18.2 Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών 47

Κεφάλαιο 19

Η συνάρτηση ax^2 με $a \neq 0$ Σελίδα 49

19.1 Η συνάρτηση $\boldsymbol{ax^2}$ με $\boldsymbol{a > 0}$ 49

19.2 Η συνάρτηση $\boldsymbol{ax^2}$ με $\boldsymbol{a < 0}$ 49

Κεφάλαιο 20

Η συνάρτηση $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ Σελίδα 51

Κεφάλαιο 21

Σύνολα Σελίδα 53

21.1 Η έννοια του συνόλου 53

21.2 Πράξεις μεταξύ συνόλων 53

Κεφάλαιο 22

Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα Σελίδα 55

22.1 Πειράματα - Δειγματικός χώρος 55

22.2 Ενδεχόμενα 55

Κεφάλαιο 23

Πιθανότητες Σελίδα 57

23.1 Κλασσικός ορισμός πιθανότητας 57

23.2 Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων 57

ΜΕΡΟΣ 2 Γεωμετρία - Τριγωνομετρία .....

Κεφάλαιο 24

Ισότητα τριγώνων Σελίδα 61

24.1 Κριτήρια ισότητας τριγώνων 61

24.2 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων 65

Κεφάλαιο 25

Λόγοι - Αναλογίες Σελίδα 67

25.1 Λογοι ευθυγράμμων τμημάτων 67

25.2 Αναλογίες 67

25.3 Θεώρημα Θαλή 67

Κεφάλαιο 26

Ομοιοθεσία Σελίδα 69

Κεφάλαιο 27

Ομοιότητα Σελίδα 71

27.1 Όμοια πολύγωνα 71

27.2 Όμοια τρίγωνα 71

Κεφάλαιο 28

Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων Σελίδα 73

Κεφάλαιο 29

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0 \leq \omega \leq 180$ Σελίδα 75

Κεφάλαιο 30

Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών Σελίδα 77

Κεφάλαιο 31

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες Σελίδα 79

31.1 Η ταυτότητα $\etaμ^2 x + συν^2 x = 1$ ... 79

31.2 Η ταυτότητα $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ ... 79

Κεφάλαιο 32

Μέτρηση τριγώνου Σελίδα 81

32.1 Νόμος ημιτόνων ... 81

32.2 Νόμος συνημιτόνων ... 81

Μέρος 1

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
Τα βασικά σύνολα αριθμών που έχουμε μελετήσει συνοψίζονται στην παρακάτω λίστα.

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Το σύνολο των αριθμών από το 0 εως το άπειρο όπου κάθε αριθμός έχει διαφορά μιας μονάδας από τον προηγούμενο.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί**: Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αντίθετους τους.
3. **Ρητοί Αριθμοί**: Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους.
4. **Άρρητοι Αριθμοί**: Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός. Κατά κύριο λόγο, άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες που δεν έχουν ρητό αποτέλεσμα, ο αριθμός π κ.τ.λ.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Για τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ορίζουμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών τα εξής :

1. **Αντίθετοι αριθμοί**
   Αντίθετοι ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι έχουν άθροισμα μηδέν. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές και αντίθετα πρόσημα.
   $$a + (-a) = 0$$
2. **Αντίστροφοι αριθμοί**
   Αντίστροφοι ονομάζονται δύο πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.
   $$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

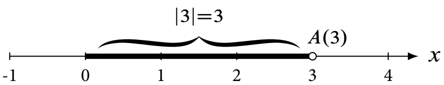
Πράξη	Όροι	Αποτέλεσμα	Συμβολισμός
Πρόσθεση	Προσθετέοι	Άθροισμα	$a+\beta$
Αφαίρεση	Μειωτέος - Αφαιρετέος	Διαφορά	$a-\beta$
Πολλαπλασιασμός	Παράγοντες	Γινόμενο	$a\cdot\beta$
Διαίρεση	Διαιρετέος - Διαιρέτης	Πηλίκο	$a:\beta$

Η αφαίρεση $a-\beta$ και η διαίρεση $a:\beta$ δύο αρθμών $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι οι πράξεις που προκύπτουν από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα και μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια τους.

$$a-\beta=a+(-\beta)\ \ ,\ \ a:\beta=\frac{a}{\beta}=a\cdot\frac{1}{\beta}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται να είναι η απόσταση της εικόνας του αριθμού αυτού απο το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.

$$|a|=\begin{cases} a\ ,\ a\geq 0\\ -a\ ,\ a<0\end{cases}$$



- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού a είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού a είναι ίση με τον αντίθετο του αριθμού a.

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός αφού εξ' ορισμού παριστάνει απόσταση, που σαν μέγεθος παιρνει μόνο θετικές τιμές.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$

Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Επιμεριστική	$a \cdot (\beta \pm \gamma) = a \cdot \beta \pm a \cdot \gamma$	

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a \cdot 0 = 0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων πραγματικών αριθμών a, β είναι θετικό.
- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων πραγματικών αριθμών a, β είναι αρνητικό.

$$a, \beta \text{ ομόσημοι } \Rightarrow a \cdot \beta > 0 \text{ και } \frac{a}{\beta} > 0$$
$$a, \beta \text{ ετερόσημοι } \Rightarrow a \cdot \beta < 0 \text{ και } \frac{a}{\beta} < 0$$

1.2 Δυνάμεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου ο φυσικός αριθμός ν είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.
- Η δύναμη a^2 ονομάζεται και ***a* στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη a^3 ονομάζεται και ***a* στον κύβο**.

Επίσης για κάθε δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a ορίζουμε

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1\ ,\ a \neq 0$
- $a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}\ ,\ a \neq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δυναμη με βάση οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β και φυσικούς εκθέτες ν, μ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu}\ ,\ \beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu\cdot\mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu\ ,\ a, \beta \neq 0$

Οι ιδιότητες 1 και 3 επεκτείνονται και για το γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων. Για οπουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, a_1, a_2, \ldots, a_\kappa$ και φυσικούς εκθέτες $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ θα ισχύει :

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}$$
$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^\nu = a_1^\nu \cdot a_2^\nu \cdot \ldots \cdot a_\kappa^\nu$$

1.3 Τετραγωνική ρίζα

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.
- Ο θετικός αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν την τετραγωνική τους ρίζα.

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \ , \ \ x \geq 0$
2	Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \ , \ \ x$ πραγματικός
3	Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \ , \ \ x, y \geq 0$
4	Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \ , \ \ x \geq 0$ και $y > 0$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων. Έτσι αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν σε πλήθος θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε θα ισχύει :

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_\nu}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots x_\nu \geq 0$ και ν φυσικός.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σε αριθμητικές παραστάσεις όπου καλούμαστε να κάνουμε πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα για κάθε πράξη

1. **Πρόσθεση**

   i. Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και γράφουμε μπροστά από το αποτέλεσμα το κοινό τους πρόσημο.

ii. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και γράφουμε μπροστά από το αποτέλεσμα το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

2. Πολλαπλασιασμός

i. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και γράφουμε μπροστά από το αποτέλεσμα το πρόσημο $+$.

ii. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και γράφουμε μπροστά από το αποτέλεσμα το πρόσημο $-$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΡΙΘΜΩΝ
Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω αθροισμάτων και γινομένων

.i $17+23$	**.iii $28-15$**	**.v $8\cdot 9$**	**.vii $25\cdot(-8)$**
.ii $32-47$	**.iv $-54-27$**	**.vi $(-14)\cdot 15$**	**.viii $(-32)\cdot(-100)$**

ΛΥΣΗ
Σε κάθε πράξη απο τις παραπάνω εξετάζουμε αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι.

i. Οι αριθμοί της παράστασης είναι ομόσημοι οπότε προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους. Το αποτέλεσμα θα έχει το ίδιο πρόσημο.

$$17+23=+(17+23)=+40=40$$

ii. Στην παράσταση αυτή θα αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών αφού είναι ετερόσημοι. Το αποτέλεσμα θα έχει το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$32-47=-(47-32)=-15$$

Συνεχίζουμε και στα επόμενα παραδείγματα με τον ίδιο τρόπο.

iii. $28-15=+(28-15)=+13=13$

iv. $-54-27=-(54+27)=-81$

v. Οι παράγοντες του γινομένου είναι ομόσημοι. Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι θετικο.

$$8\cdot 9=+72=72$$

vi. Το γινόμενο αυτό περιέχει ετερόσημους παράγοντες. Το αποτέλεσμα του γινομένου θα είναι αρνητικό.

$$(-14)\cdot 15=-14\cdot 15=-210$$

Ομοίως και στα επόμενα παραδείγματα θα έχουμε

vii. $25\cdot(-8)=-25\cdot 8=-200$

viii. $(-32)\cdot(-100)=+32\cdot 100=3200$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σε σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις, οι οποίες περιέχουν πολλές πράξεις, ακολουθούμε τη σειρά των πράξεων που γνωρίζουμε από την Α' Γυμνασίου δηλαδή

1. Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις
2. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

Οι πράξεις εκτελούνται με τη σειρά αυτή πρώτα μέσα σε παρενθέσεις, αν υπάρχουν και ύστερα έξω απ' αυτές. Μπορούν οι πολλπλασιασμοί και διαιρέσεις μεταξύ προσήμων και μεταξύ αριθμών να γίνουν σε ξεχωριστά βήματα προκειμένου να αποφύγουμε τα λάθη. Αν υπάρχει εμπειρία μπορούμε να βγάλουμε και κατευθείαν το αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
Να βρεθεί η τιμή της παρακάτω αλγεβρικής παράστασης.

$$\mathbf{-2\cdot 5+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{35}{4}:\left(-\frac{15}{2}\right)}$$

ΛΥΣΗ
Ακολουθώντας τα βήματα που μας υποδεικνύει η μέθοδος θα έχουμε

$$\begin{aligned}
-2\cdot 5+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{35}{4}:\left(-\frac{15}{2}\right) &\overset{\text{Πρόσημα}}{=\!=\!=} -2\cdot 5-4\cdot\frac{3}{5}+\frac{35}{4}:\frac{15}{2}\\
\text{Πολλ/μοι - Διαιρέσεις} \qquad &= -10-\frac{12}{5}+\frac{35}{4}\cdot\frac{2}{15}=-10-\frac{12}{5}+\frac{7}{6}\\
\text{Προσθ.-Αφαιρ.} \qquad &= -\frac{300}{30}-\frac{72}{30}+\frac{35}{30}=\frac{337}{30}
\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕ ΑΓΝΩΣΤΟ ΑΡΙΘΜΟ

Εαν μια αριθμητική παράσταση περιέχει έναν άγνωστο αριθμό ή αγνωστη παράσταση, των οποίων όμως η τιμή δίνεται γνωστή από την εκφώνηση της άσκησης, τότε προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης :

***1ο Βήμα :* Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε τον άγνωστο αριθμό με την τιμή του. Στην περίπτωση άγνωστης παράστασης με πολλούς άγνωστους αριθμούς, αντικαθιστούμε ολόκληρη την παράσταση αυτή με την τιμή που μας δίνεται χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τιμή κάθε αγνώστου ξεχωριστά.

2ο Βήμα : **Πράξεις**
Στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τις οδηγίες της **Μεθόδου 1** για πραγματικούς αριθμούς ώστε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΑΡΙΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΑΓΝΩΣΤΟ
Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή των παρακάτω παραστάσεων

i. $\mathbf{3x - 4 + 2y - 8 - 4y + x - 5}$ **για** $\mathbf{x = -2}$ **και** $\mathbf{y = 3}$
ii. $\mathbf{2 - 7y - 3 - 3x + 1 - x + 3y + 9}$ **όταν** $\mathbf{x + y = 4}$

ΛΥΣΗ

i. Στην 1η παράσταση γνωρίζουμε την τιμή κάθε μεταβλητής ξεχωριστά. Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με τους αριθμούς και να υπολογίσουμε την τιμή. Πριν απ' αυτό θα χρειαστεί να γίνει αναγωγή ομοίων όρων.

$$3x - 4 + 2y - 8 - 4y + x - 5 = 4x - 2y - 17$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε όπου $x = -2$ και $y = 3$

$$4x - 2y - 17 = 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 - 17 = -8 - 6 - 17 = -31$$

ii. Στην παράσταση αυτή θα χρειαστεί να απλοποιήσουμε τη μορφή της κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων και να εμφανίσουμε την παράσταση $x + y$ μιας και δεν γνωρίζουμε την τιμή κάθε μεταβλητής ξεχωριστά.

$$2 - 7y - 3 - 3x + 1 - x + 3y + 9 = -4x - 4y + 9 \overset{\text{Επιμ. Ιδ.}}{=\!=\!=} -4(x + y) + 9$$

Αντικαθιστώντας όπου $x + y = 4$ θα έχουμε

$$-4(x + y) + 9 = -4 \cdot 4 + 9 = -16 + 9 = -7$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων οι οποίες περιέχουν και δυνάμεις πραγματικών αριθμών, ακολουθούμε τα βήματα που μας υποδεικνύει ο **Ορισμός 1** για τη σειρά των πράξεων δηλαδή

1ο Βήμα : **Υπολογισμός δυνάμεων**
Ξεκινώντας από τις πράξεις που βρίσκονται μέσα σε παρενθέσεις, υπολογίζουμε τις δυνάμεις, κάνοντας χρήση αν χρειαστεί των ιδιοτήτων του **Θεωρήματος 1**.

2ο Βήμα : **Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις**
Στη συνέχεια εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις τις αριθμητικής παράστασης.

3ο Βήμα : **Προσθέσεις - Αφαιρέσεις**
Τέλος, εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις της παράστασης.

Οι πράξεις αυτές επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά και έξω από τις παρενθέσεις, οποτε και προκύπτει το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να υπολογιστεί η τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης.

$$\mathbf{4 \cdot \left(7^2 - 6 \cdot 8\right) - 125 : \left(3^4 - 7 \cdot 8\right)}$$

ΛΥΣΗ
Ακολουθώντας τα βήματα της **Μεθόδου 1** θα υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης εμφανίζοντας μέσα στην επίλυση την εφαρμογή κάθε βήματος.

$$\begin{aligned}
\text{Δυνάμεις} \quad & 4 \cdot \left(7^2 - 6 \cdot 8\right) - 125 : \left(3^4 - 7 \cdot 8\right) = \\
\text{Πολλαπλασιασμοι} \quad & 4 \cdot (49 - 6 \cdot 8) - 125 : (81 - 7 \cdot 8) = \\
\text{Προσθ. - Αφαιρ.} \quad & 4 \cdot (49 - 48) - 125 : (81 - 56) = \\
\text{Πολλ/σμοί - Διαιρέσεις / Πρ. - Αφ.} \quad & 4 \cdot 1 - 125 : 25 = 4 - 5 = -1
\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 5 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Παραστάσεις οι οποίες περιέχουν δυνάμεις αριθμών ή και μεταβλητών, απλοποιούνται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα :

1ο Βήμα : **Κοινοί εκθέτες - Κοινές βάσεις**
Εκτελούμε κατάλληλες πράξεις στις δυνάμεις αυτές ώστε να γραφτούν με τη βοήθεια κοινής βάσης ή κοινού εκθέτη.

2ο Βήμα : **Μετατροπή αριθμών σε δυνάμεις**
Εξετάζουμε αν οι υπόλοιποι αριθμοί της παράστασης μπορούν να μετατραπούν κι αυτοί σε δυνάμεις, με βάση ή εκθέτη κοινό με τις υπόλοιπες δυνάμεις της παράστασης.

3ο Βήμα : **Ιδιότητες δυνάμεων**
Τέλος, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του **Θεωρήματος 1** απλοποιούμε την παράσταση μαζεύοντας τις δυνάμεις με τα κοινά στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να γραφτούν οι παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας δύναμης.

i. $\left(3^5 \cdot 3^7\right) : 3^4$

ii. $2{,}5^3 \cdot 4^3$

iii. $5^2 \cdot \dfrac{1}{125}$

iv. $\left(4^4\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^5$

v. $4^6 : 2^{10}$

vi. $3{,}5^8 \cdot \dfrac{7^5}{2^5}$

vii. $3^2 \cdot 81 \cdot 25^3$

viii. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{4}{15}\right)^{-3}$

ΛΥΣΗ

Ακολουθώντας τα βήματα της **Μεθόδου 2** απλοποιούμε τις παραπάνω παραστάσεις ως εξής :

i. Για τη συγκεκριμένη παράσταση παραλείπουμε το **1ο και 2ο Βήμα** της **Μεθόδου 2** μιας και όλες οι δυνάμεις έχουν κοινή βάση τον αριθμό 3 ενώ δεν περιέχει άλλους αριθμούς ώστε να μετατραπούν σε δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων θα έχουμε

$$\left(3^5 \cdot 3^7\right) : 3^4 = 3^{5+7} : 3^4 = 3^{12} : 3^4 = 3^{12-4} = 3^8$$

ii. Για την παράσταση $2{,}5^3 \cdot 4^3$ ομοίως με προηγουμένως παραλείπουμε το **1ο και 2ο Βήμα** και έχουμε

$$2{,}5^3 \cdot 4^3 = (2{,}5 \cdot 4)^3 = 10^3$$

iii. Συνεχίζουμε και στα υπόλοιπα ερωτήματα ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο. Για να απλοποιηθεί η παράσταση θα πρέπει να μετατρέψουμε τον αριθμό 125 σε δύναμη του 5. Εκτελώντας πράξεις και χρησιμοποιώντας την 2η ιδιότητα προκύπτει

$$5^2 \cdot \frac{1}{125} = 5^2 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$$

iv. Ομοίως και για την παρακάτω παράσταση

$$\left(4^4\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 4^{4\cdot 2} \cdot \frac{1^5}{4^5} = 4^8 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{4^8}{4^5} = 4^{8-5} = 4^3$$

v. Στην παράσταση $4^6 : 2^{10}$ οι δύο δυνάμεις θα πρέπει να μετατραπούν ώστε να αποκτήσουν είτε κοινές βάσεις είτε κοινούς εκθέτες. Γράφουμε τον αριθμό 4 ως δύναμη του 2 και προκύπτει

$$4^6 : 2^{10} = \left(2^2\right)^6 : 2^{10} = 2^{12} : 2^{10} = 2^{12-10} = 2^2$$

vi. Ομοίως θα έχουμε

$$3{,}5^8 \cdot \frac{7^5}{2^5} = 3{,}5^8 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^5 = 3{,}5^8 \cdot 3{,}5^5 = 3{,}5^{8+5} = 3{,}5^{13}$$

vii. Στο ερώτημα αυτό θα χρειαστεί να αλλάξουμε τη σειρά των βημάτων **1** και **2**. Θα χρειαστεί να γράψουμε τον αριθμό 81 ως δύναμη του 3. Γράφοντας επίσης το 25 ως δύναμη του 5 θα προκύψει μετά από πράξεις κοινός εκθέτης στις δύο δυνάμεις.

$$3^2 \cdot 81 \cdot 25^3 = 3^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 3^{2+4} \cdot 5^6 = 3^6 \cdot 5^6 = (3 \cdot 5)^6 = 15^6$$

viii. Τέλος για τη συγκεκριμένη παράσταση κάνουμε χρήση της 6ης ιδιότητας και προκύπτει

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^3 = \left(\frac{2\cdot 15}{5\cdot 4}\right)^3 = \left(\frac{30}{20}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να απλοποιηθεί η παρακάτω αλγεβρική παράσταση.

$$\boldsymbol{x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2 : \left[\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3\right]}$$

ΛΥΣΗ
Θα χρησιμοποιήσουμε της ιδιότητες των δυνάμεων όπως τις είδαμε στο **Θεώρημα 1** καταλλήγοντας σε μια απλούστερη αλγεβρική παράσταση. Για λόγους ευκολίας μετατρέπουμε το σύμβολο : της διαίρεσης σε γραμμή κλάσματος ώστε αναγνωρίσουμε καλύτερα διαιρετέο και διαιρέτη.

$$x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2 : \left[\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3\right] = \frac{x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2}{\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3} =$$
$$\frac{x^4 \cdot \left(x^2\right)^2 \cdot \left(y^3\right)^2}{x^{-1} \cdot \left(y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3} = \frac{x^4 \cdot x^4 \cdot y^6}{x^{-1} \cdot y^2 \cdot y^3} =$$
$$\frac{x^8 \cdot y^6}{x^{-1} \cdot y^5} = x^9 \cdot y$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μονώνυμα

2.1 Η έννοια του μονωνύμου

2.2 Πράξεις μεταξύ μονωνυμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πολυώνυμα

3.1 Η έννοια του πολυωνύμου

3.2 Πράξεις μεταξύ των πολυωνύμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Ταυτότητες Ι

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών της.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

4.1 Τετράγωνο αθροίσματος

Κάθε παράσταση της μορφής $(a+\beta)^2$ ονομάζεται

4.2 Τετράγωνο διαφοράς

4.3 Κύβος αθροίσματος

4.4 Κύβος διαφοράς

4.5 Γινόμενο αθροίσματος επι διαφορά

4.6 Άθροισμα κύβων

4.7 Διαφορά κύβων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ταυτότητες ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Παραγοντοποίηση

6.1 Κοινός παράγοντας

6.2 Ομαδοποίηση

6.3 Διαφορά τετραγώνων

6.4 Διαφορά - Άθροισμα κύβων

6.5 Ανάπτυγμα τετραγώνου

6.6 Τριώνυμο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Διαίρεση πολυωνύμων

7.1 Ο αλγόριθμος της διαίρεσης πολυωνύμων

7.2 Παραγοντοποίηση με χρήση διαίρεσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ. Αλγ. Παραστάσεων

8.1 Ε.Κ.Π.

8.2 Μ.Κ.Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ρητές παραστάσεις

9.1 Η έννοια της ρητής παράστασης

9.2 Απλοποίηση παραστάσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Πράξεις με Ρητές Παραστάσεις

10.1 Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

10.2 Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

12

12.1 Επίλυση με τη χρήση τύπου

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.1 ΤΡΙΩΝΥΜΟ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Τριώνυμο 2ου βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο 2ου βαθμού με τρεις όρους και είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma \ \text{ με } \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ονομάζονται **συντελεστές** του τριωνύμου.
- Ο συντελεστής γ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.2 ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι τριώνυμο 2ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ a \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.3 ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ
Διακρίνουσα ενός τριωνύμου 2ου βαθμού ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.1 ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

1. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την

$$x = -\frac{\beta}{a}$$

3. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$. Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον παραπάνω πίνακα :

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 λύσεις	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή λύση	$x = -\frac{\beta}{a}$
$\Delta < 0$	Καμία λύση	

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής
$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$
όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.
2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :
$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\,(x - x_0)^2$$
όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

12.2 Επίλυση με παραγοντοποίηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Προβλήματα Εξισώσεων 2ου Βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Κλασματικές Εξισώσεις

14.1 Επίλυση κλασματικών εξισώσεων

14.2 Προβλήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Ανισότητες - Ανισώσεις

15.1 Ανισότητες

15.2 Ανισώσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Η γραμμική εξίσωση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17
Γραμμικά συστήματα

17.1 Το γραμμικό σύστημα

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 17.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται ο συνδυασμός - σύζευξη δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Οι συντελεστές του συστήματος a, a', β, β' και οι σταθεροί όροι γ, γ' είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.
- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εαν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 17.2 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εαν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

17.2 Γραφική επίλυση συστήματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18
Αλγεβρική Επίλυση

18.1 Η μέθοδος της αντικατάστασης

18.2 Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19

Η συνάρτηση ax^2 με $a \neq 0$

19.1 Η συνάρτηση ax^2 με $a > 0$

19.2 Η συνάρτηση ax^2 με $a < 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

Η συνάρτηση $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21

Σύνολα

21.1 Η έννοια του συνόλου

21.2 Πράξεις μεταξύ συνόλων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22

Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

22.1 Πειράματα - Δειγματικός χώρος

22.2 Ενδεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23
Πιθανότητες

23.1 Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

23.2 Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Μέρος 2

Γεωμετρία - Τριγωνομετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

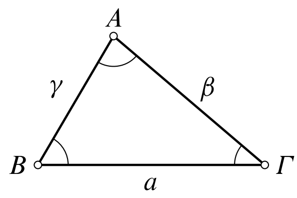
Ισότητα τριγώνων

24

24.1 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 24.1 ΤΡΙΓΩΝΟ - ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Τρίγωνο ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες.



- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές, οι γωνίες και οι κορυφές του.
- Κάθε τρίγωνο συμβολίζεται με τη χρήση των ονομάτων των τριών κορυφών του για παράδειγμα $AB\Gamma$.

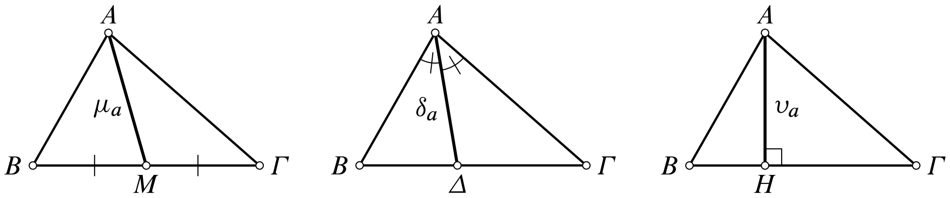
$$B\Gamma \to a \quad , \quad A\Gamma \to \beta \quad , \quad AB \to \gamma$$

- Οι πλευρές ενός τριγώνου, εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος, μπορούν εναλλακτικά να συμβολιστούν με ένα μικρό γράμμα, αντίστοιχο του ονόματος της απέναντι κορυφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 24.2 ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Τα δευτερεύοντα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος του. Αναλυτικά ορίζονται ως εξής :

1. **Διάμεσος**
   Διαμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
   - Κάθε διάμεσος συμβολίζεται είτε με τα γράμματα των δύο άκρων της είναι με το γράμμα μ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διάμεσος.
   - Οι διάμεσοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\mu_a, \mu_\beta, \mu_\gamma$.
2. **Διχοτόμος**
   Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο χωρίζει μια γωνία του τριγώνου σε δύο ίσα μέρη.

- Κάθε διχοτόμος συμβολίζεται εναλλακτικά με το γράμμα δ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
- Οι διχοτόμοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$.

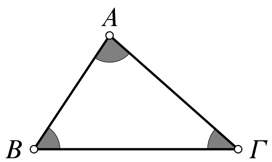
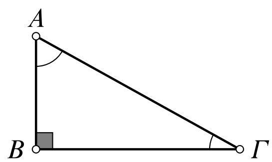
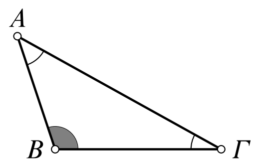


3. **Ύψος**
   Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει το ένα άκρο του σε μια κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο με την απέναντι πλευρά.

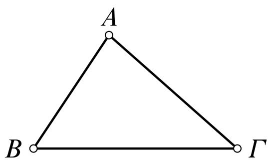
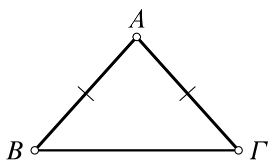
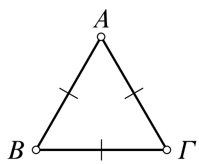
   - Τα ύψη ενός τριγώνου συμβολίζονται με το γράμμα υ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
   - Τα ύψη για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\upsilon_a, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 24.3 ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Τα τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς το είδος των γωνιών που περιέχουν και ως προς τη σχέση των πλευρων μεταξύ τους.

1. **Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες**
   Με κριτήριο το είδος των γωνιών που περιέχει ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα παρακάτω τρία είδη τριγώνων.

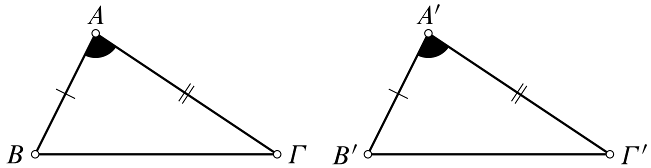
Οξυγώνιο	**Ορθογώνιο**	**Αμβλυγώνιο**
 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} < 90°$	 $\hat{B} = 90°$	 $\hat{B} > 90°$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **οξυγώνιο** εαν έχει **όλες** τις γωνίες του οξείες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ορθογώνιο** εαν έχει μια ορθή γωνία.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **αμβλυγώνιο** εαν έχει μια αμβλεία γωνία.

2. **Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές**
   Με βάση τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου χωρίζουμε τα τρίγωνα στις παρακάτω τρεις κατηγορίες.

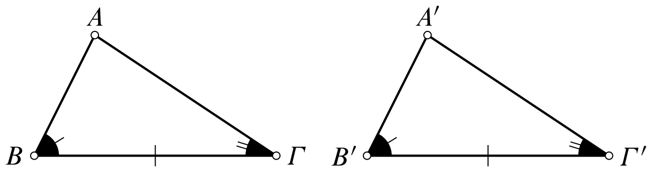
Σκαληνό	**Ισοσκελές**	**Ισόπλευρο**
 $AB \neq A\Gamma \neq B\Gamma$	 $AB = A\Gamma$	 $AB = A\Gamma = B\Gamma$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **σκαληνό** εαν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους άνισες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισοσκελές** εαν έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση**.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισόπλευρο** εαν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

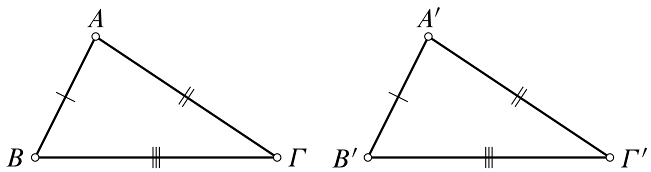
ΘΕΩΡΗΜΑ 24.1 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν ένα τρίγωνο έχει δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες μεταξύ τους ίσες τότε έιναι ίσα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 24.2 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες, τότε ειναι ίσα.

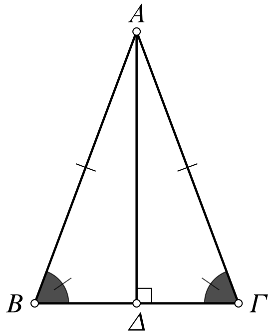


ΘΕΩΡΗΜΑ 24.3 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, τότε ειναι ίσα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 24.4 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ισοσκελές τριγωνο

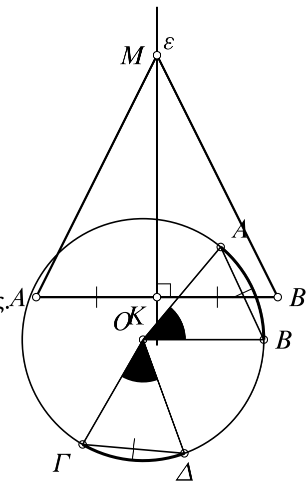
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφης του ισοσκελούς τριγώνου ειναι και διάμεσος και ύψος.



ΘΕΩΡΗΜΑ 24.5 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Οι γωνίες ισοπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24.6 3ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ισοσκελές τριγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος και διχοτόμος του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24.7 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



ΘΕΩΡΗΜΑ 24.8 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ
Κάθε σημείο το οποίο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24.9 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ
Αν δύο τόξα ενός κύκλου ειναι ίσα τότε και οι χορδές τους ειναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24.10 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ
Αν οι χορδές δύο τόξων μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24.11 3ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ
Αν οι χορδές δύο τόξων μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

24.2 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25

Λόγοι - Αναλογίες

25.1 Λογοι ευθυγράμμων τμημάτων

25.2 Αναλογίες

25.3 Θεώρημα Θαλή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26
Ομοιοθεσία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 27
Ομοιότητα

27.1 Όμοια πολύγωνα

27.2 Όμοια τρίγωνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 28

Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 29

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0 \leq \omega \leq 180$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 31

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

31.1 Η ταυτότητα $ημ^2 x + συν^2 x = 1$

31.2 Η ταυτότητα $εφx = \frac{ημx}{συνx}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 32
Μέτρηση τριγώνου

32.1 Νόμος ημιτόνων

32.2 Νόμος συνημιτόνων