Μέθοδος 1.3 : ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Μια γραμμική εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ όπως είδαμε έχει άπειρες λύσεις. Δεν αποτελούν όμως όλα τα ζεύγη αριθμών λύσεις της. Προκειμένου λοιπόν να βρεθεί η μορφή την οποία έχουν

1^o Βήμα : Λύνουμε της εξίσωση ως προς κάποιον άγνωστο.

2^o Βήμα : Θέτουμε την άλλη μεταβλητή ίση με μια παράμετρο λ, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

3^o Βήμα : Γράφουμε το ζεύγος αριθμών με τη βοήθεια της παραλέτρου λ.

Παράδειγμα 1.5 : Μορφή λύσεων γραμμικής εξίσωσης

Να βρεθεί η μορφή των λύσεων των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων

α. $3x+y=5$ **β.** $x=3$ **γ.** $y=-2$

ΛΥΣΗ

α. Στην εξίσωση που μας δίνεται είναι απλό να λύσουμε ως προς τη μεταβλητή y. Θα είναι λοιπόν

$$3x+y=7\Rightarrow y=7-3x$$

Θέτοντας όπου $x=\lambda$, με $\lambda\in\mathbb{R}$, θα πάρουμε $y=7-3\lambda$ άρα οι λύσεις τη εξίσωσης θα έχουν τη μορφή

$$(x,y)=(\lambda,7-3\lambda)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

β. Η πλήρης μορφή της γραμμικής εξίσωσης $x=3$ είναι $x+0y=3$. Έτσι μιας και είναι ήδη λυμένη ως προς τη μεταβλητή x θέτουμε $y=\lambda$ και οι λύσεις της θα είναι της μορφής.

$$(x,y)=(3,\lambda)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

γ. Η εξίσωση γίνεται στη γραμμική της μορφή $0x+y=-2$. Θέτουμε λοιπόν $x=\lambda$ και παίρνουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(\lambda,-2)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Μέθοδος 1.4 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για την επίλυση ενός συστήματος με δύο μεταβλητές έστω x,y με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1^o Βήμα : **Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε μια απ' τις δύο εξισώσεις ώστε να λύσουμε ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή. Θα προκύψει μια σχέση (1) που θα μας δίνει την μεταβλητή αυτή ως συνάρτηση της άλλης.

2^o Βήμα : **Αντικατάσταση**

Τη μεταβλητή αυτή την αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση οπότε προκύπτει μια νέα εξίσωση με έναν άγνωστο. Λύνοντας την υπολογίζουμε τον άγνωστο αυτό.

3^{o} Βήμα : **Υπολογισμός 2^{ου} αγνώστου**
Την τιμή που θα βρούμε για τη μια μεταβλητή λύνοντας την εξίσωση, την αντικαθιστούμε στη σχέση (1) ώστε να βρεθεί και η άλλη μεταβλητή του συστήματος.

4^{o} Βήμα : **Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 1.6 : Λύση συστήματος με αντικατάσταση
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 5} \\ \mathbf{x - 4y = -3} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι η 2^{η} εξίσωση είναι εύκολο να λυθεί ως προς x οπότε έχουμε

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 4y - 3 \tag{1.3}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της σχέσης (1.3) στην 1^{η} εξίσωση προκύπτει :

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 5 &\Rightarrow 2(4y - 3) + 3y = 5 \\ &\Rightarrow 8y - 6 + 3y = 5 \\ &\Rightarrow 8y + 3y = 5 + 6 \\ &\Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1 \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη λύση της εξίσωσης (1.4) στην (1.3) για να υπολογίσουμε τη μεταβλητή x

$$x = 4y - 3 = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι η $(x, y) = (1, 1)$.

Μέθοδος 1.5 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για την επίλυση ενός συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

1^{o} Βήμα : **Επιλογή μεταβλητής - Πολλαπλασιασμός εξισώσεων**
Επιλέγουμε ποια από τις δύο μεταβλητές θα απαλείψουμε οπότε τοποθετούμε τους συντελεστές της "χιαστί" δίπλα από κάθε εξίσωση, αλλάζοντας το πρόσημο του ενός από τους δύο. Πολλαπλασιάζουμε κάθε εξίσωση με τον αριθμό που προκύπτει.

2^{o} Βήμα : **Πρόσθεση κατά μέλη**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις νέες εξισώσεις οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και υπολογίζουμε λύνοντας την.

***3ο Βήμα :* Εύρεση 2ης μεταβλητής**
Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα σε οποιαδήποτε εξίσωση του αρχικού συστήματος ώστε να υπολογίσουμε και τη δεύτερη μεταβλητή.

***4ο Βήμα :* Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 1.7 : Λύση συστήματος με αντίθετους συντελεστές
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} \mathbf{4x - y = 5} \\ \mathbf{3x + 2y = 12} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Επιλέγουμε με τη μέθοδο αυτή να απαλείψουμε τη μεταβλητή y του συστήματος. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Οπότε προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \\ \hline 11x = 22 \end{array} \Rightarrow x = 2 \tag{1.5}$$

Την τιμή αυτή της μεταβλητής x από τη σχέση (1.5) την αντικαθιστούμε σε οποιαδήποτε εξίσωση και υπολογίζουμε τη δεύτερη μεταβλητή y.

$$\begin{aligned} 3x + 2y = 12 &\Rightarrow 3 \cdot 2 + 2y = 12 \\ &\Rightarrow 6 + 2y = 12 \\ &\Rightarrow 2y = 12 - 6 \\ &\Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Από τις σχέσεις (1.5) και (1.6) παίρνουμε τη λύση του συστήματος $(x, y) = (2, 3)$.

Μέθοδος 1.6 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους μπορούμε πλέον να το λύσουμε με τη χρήση οριζουσών ως εξής.

***1ο Βήμα :* Υπολογισμός οριζουσών**