Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διαφορική εξίσωση ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άγνωστη συνάρτηση και μια τουλάχιστον παράγωγό της οποιασδήποτε τάξης.

- Αν η άγνωστη συνάρτηση περιέχει μια μεταβλητή η εξίσωση ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**.
- Αν η άγνωστη συνάρτηση περιέχει δύο ή περισσότερες μεταβλητές ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση**.
- Η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου σε μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται **τάξη της εξίσωσης**.
- Η **πεπλεγμένη** ή γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

  όπου y είναι η άγνωστη συνάρτηση μεταβλητής x και F μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της έως τάξης n. Η **λυμένη** ή κανονική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ
Έστω μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $y_0 \in \mathbb{R}$. Πρόβλημα αρχικών τιμών ονομάζεται η αναζήτηση μιας συνάρτησης $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(a) = y_0, \ y'(a) = y_1, \ldots, \ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση y είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης $n-$οστού βαθμού για την οποία γνωρίζουμε την τιμή της και τις τιμές όλων των παραγώγων της, έως τάξης $n-1$, στο κάτω άκρο του διαστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 1ησ ΤΑΞΗΣ
Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης ονομάζεται κάθε διαφορική εξίσωση της οποίας η τάξη είναι ίση με 1. Θα είναι της μορφής :

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \ \text{ή} \ y' = f(x, y)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x)$$

όπου p, q είναι συνεχής συναρτήσεις της ανρξάρτητης μεταβλητής. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τον τύπο :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

Αν $y(x_0) = y_0$, με $x_0 \in D_y$, είναι μια αρχική συνθήκη για την εξίσωση τότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα δίνεται από τη σχέση :

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt}\left[y_0 + \int_a^x q(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} dt\right]$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI
Κάθε διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής :

$$y' + p(x)y = q(x)y^r$$

όπου p, q είναι συνεχείς συναρτήσεις, ονομάζεται διαφορική εξίσωση Bernoulli. Η αντικατάσταση $z = y^{1-r} \Rightarrow z' = (1-r)y^{-r}y'$ μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση Bernoulli σε **γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης** της μορφής :

$$z' + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x)$$

- Για μια εξίσωση Bernoulli θα πρέπει να ισχύει $r \neq 0$ και $r \neq 1$.
- Αν $r = 0$ ή $r = 1$ η εξίσωση αποτελεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 ΕΞΙΣΩΣΗ RICATTI
Διαφορική εξίσωση Ricatti ονομάζεται κάθε διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής :

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + a(x) = 0$$

όπου p, q, a είναι συνεχείς συναρτήσεις και $a(x) \neq 0$. Ο μετασχηματισμός $z = \frac{1}{y-y_0} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{(y-y_0)^2}$ όπου y_0 είναι μια μερική λύση της εξίσωσης, μετατρέπει την εξίσωση Ricatti στη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης :

$$z' + [p(x) + 2y_0 q(x)]\, z = a(x)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών ονομάζεται κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' = \frac{A(x)}{B(y)}$$

όπου A είναι μια συνεχής συνάρτηση του x και B μια συνεχής συνάρτηση του y. Οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$\int A(x)dx = \int B(x)dx + c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 ΕΞΙΣΩΣΗ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κάθε διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

ονομάζεται ομογενής διαφορική εξίσωση αν και μόνο αν οι συναρτήσεις f, g είναι ομογενείς συναρτήσεις.

- Οι συναρτήσεις f, g είναι **ομογενείς** με βαθμό ομογένειας n αν και μόνο αν ισχύει γι αυτές $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ και $g(\mu x, \mu y) = \mu^n g(x,y)$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Η ομογενής διαφορική εξίσωση έχει βαθμό ομογένειας n αν οι συναρτήσεις f, g είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού n.
- Θέτοντας $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$ η ομογενής εξίσωση μετατρέπεται σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10 ΑΜΕΣΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.1}$$

θα ονομάζεται αμέσως ολοκληρώσιμή ή πλήρης με M, N συνεχείς συναρτήσεις, αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε να ισχύει

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

- Για κάθε αμέσως ολοκληρώσιμη διαφορική εξίσωση θα ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.
- Όλες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τη σχέση $f(x,y) = c$.
- Μια εξίσωση της μορφής (1.1) θα είναι αμέσως ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν ισχέι η σχέση :
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Στην περίπτωση όπου μια εξίσωση της μορφής (1.1) δεν είναι αμέσως ολοκληρώσιμη τότε η μη μηδενική συνάρτηση $\rho(x,y)$ με την οποία

Κεφάλαιο 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

2.1 Α - ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ Α.1

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = \tan y$, να αποδειχθεί ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\tan y + x\tan^3 y = 0 \quad , \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει λύση την $y = 0$ η οποία όμως δεν πληροί την αρχική συνθήκη του προβλήματος $y(0) = \frac{\pi}{4}$. Εκτελώντας το μετασχηματισμό $z = \tan y$ θα έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = (\tan y)' = \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην αρχική εξίσωση θα προκύψει

$$z' + xz + xz^3 = 0 \tag{2.1}$$

Η εξίσωση (1) είναι μια εξίσωση **Bernoulli**. Επίσης σύμφωνα με το μετασχηματισμό αυτό η αρχική συνθήκη θα έχει ως εξής.

$$\text{Για } x = 0 \ : \ y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z(0) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό $u = z^{1-r}$ με $r = 3$ δηλαδή $u = \dfrac{1}{z^2}$ ο οποίος μας δίνει $u' = -\dfrac{2z'}{z^2}$. Ο μετασχηματισμός αυτός θα μετατρέψει την εξίσωση (1.1) σε μια **γραμμική εξίσωση 1ης τάξης** :

$$u' - 2xu - 2x = 0 \tag{2.2}$$

Η γενική λύση αυτής είναι η

$$u(x) = e^{\int 2x dx}\left[c + \int 2xe^{-\int 2x dx}dx\right] = e^{x^2}\left[c - e^{-x^2}\right] = ce^{x^2} - 1$$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε

$$z = \frac{1}{\sqrt{ce^{x^2} - 1}} = \tan y \Rightarrow y = \arctan\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2} - 1}}$$

Για $y\,(0) = \dfrac{\pi}{4}$ θα γίνει

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{c-1}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c-1}} = 1 \Rightarrow c = 2$$

Επομένως η λύση του προβλήματος θα είναι

$$y\,(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{2e^{x^2}-1}}$$

Επιπλέον όταν $x \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2e^{x^2}-1}} \to 0$ άρα θα ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty} y\,(x) = 0.$

ΑΣΚΗΣΗ Α.2

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$q(x)y' = q'(x)y - y^2\ ,\ y(0) = 1$$

όπου q είναι μια θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $q(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της αρχικής εξίσωσης $q(x)y' = q'(x)y - y^2$ με τη θετική συνάρτηση $q(x) > 0$ προκύπτει

$$y' = \frac{q'(x)}{q(x)}y - \frac{y^2}{q(x)} \tag{2.3}$$

η οποία είναι μια εξίσωση **Bernoulli** με $r = 2$. Παρατηρούμε ότι η $y = 0$ είναι λύση της εξίσωσης που όμως δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ άρα την απορρίπτουμε. Με την αντικατάσταση $z = \frac{1}{y}$ η οποία δίνει $z' = -\frac{y'}{y^2}$ η (2.3) μετασχηματίζεται στην γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης :

$$z' - \frac{q'(x)}{q(x)}z = \frac{1}{q(x)} \tag{2.4}$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$z(x) = e^{-\int \frac{q'(x)dx}{q(x)}} \left[c + \int \frac{e^{-\int \frac{q'(x)dx}{q(x)}}}{q(x)} dx \right] \overset{q>0}{=\!=} \tag{2.5}$$

$$e^{-\log q(x)} \left(c + \int \frac{e^{\log q(x)}}{q(x)} dx \right) = \frac{1}{q(x)} \left(c + \int dx \right) = \frac{x+c}{q(x)} \tag{2.6}$$

Επιπλέον, μετά το μετασχηματισμό, η αρχική συνθήκη θα γίνει :

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{z(0)} = 1 \Rightarrow z(0) = 1$$

Σύμφωνα μ' αυτήν θα έχουμε

$$z(0) = 1 \Rightarrow \frac{0+c}{q(0)} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει τη λύση του προβλήματος η οποία θα είναι :

$$z = \frac{x+1}{q(x)} \Rightarrow y = \frac{q(x)}{x+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.3

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y-x)e^{y/x}\frac{dy}{dx}+y\left(1+e^{y/x}\right)=0$$

Ισχύει ότι $\displaystyle\int \frac{z-1}{ze^{-1/z}+z^2}dz=\log\left|1+ze^{1/z}\right|+c.$

ΛΥΣΗ

1ος Τρόπος

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\left(1+e^{y/x}\right)}{(y-x)e^{x/y}}$$

η οποία είναι μια ομογενής εξίσωση με βαθμό ομογένειας 1. Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $y=xz$ και τότε θα έχουμε $y'=xz'+z$

$$xz'+z=-\frac{xz\left(1+e^{1/z}\right)}{(xz-x)\,e^{1/z}}\Rightarrow xz'+z=-\frac{xz\left(1+e^{1/z}\right)}{x(z-1)e^{1/z}}\Rightarrow \tag{2.7}$$

$$xz'=-\frac{z+z^2e^{1/z}}{(z-1)e^{1/z}}\Rightarrow z'=\frac{1}{x}\cdot\frac{ze^{-1/z}+z^2}{z-1} \tag{2.8}$$

η οποία είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών άρα μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{z-1}{ze^{-1/z}+z^2}dz=-\frac{1}{x}dx$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο

$$\begin{gathered}\int\frac{z-1}{ze^{-1/z}+z^2}dz=-\int\frac{1}{x}dx+c'\Rightarrow\\ \log\left|1+ze^{1/z}\right|=-\log|x|+c'\Rightarrow\\ \log\left|1+ze^{1/z}\right|+\log|x|=c'\Rightarrow\left|x\left(1+ze^{1/z}\right)\right|=e^{c'}\Rightarrow\\ x\left(1+ze^{1/z}\right)=\pm e^{c'}\end{gathered}$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θέτοντας $\pm e^{c'}=c$ και κάνοντας ανα-δρομική αντικατάσταση παίρνουμε οτι όλες οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$x\left(1+\frac{y}{x}e^{x/y}\right)=c\Rightarrow x+ye^{x/y}=c$$

2ος Τρόπος

Η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται και στη μορφή

$$\underbrace{y\left(1+e^{x/y}\right)}_{M}dx+\underbrace{(y-x)e^{x/y}}_{N}dy=0 \tag{2.9}$$

Εξετάζουμε αν πρόκειται για μια εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη. Θα έχουμε :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(1+e^{x/y}\right)\right]=1+e^{x/y}-\frac{x}{y}e^{x/y}\quad\text{και}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(y-x)e^{x/y}\right]=-\frac{x}{y}e^{x/y}$$

Διαπιστώνουμε οτι δεν πρόκειται για μια εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη αφού $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ Θα αναζητήσουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[(y-x)e^{x/y}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(1+e^{x/y}\right)\right]}{y\left(1+e^{x/y}\right)} = \\ &= \frac{-\frac{x}{y}e^{x/y}-1-e^{x/y}+\frac{x}{y}e^{x/y}}{y\left(1+e^{x/y}\right)} = \frac{-\left(1+e^{x/y}\right)}{y\left(1+e^{x/y}\right)} = -\frac{1}{y}\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι μια παράσταση μόνο του y οπότε η συνάστηση $\rho(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\log|y|dy} = \frac{1}{y}$ είναι ο ζητούμενος ολοκληρωτικός παράγοντας. Πολλαπλασιάζοντας μ' αυτόν την εξίσωση (2.9) θα προκύψει :

$$\frac{1}{y}y\left(1+e^{x/y}\right)dx+\frac{1}{y}(y-x)e^{x/y}dy = 0 \Rightarrow \tag{2.10}$$

$$\underbrace{\left(1+e^{x/y}\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}}_{N}dy = 0 \tag{2.11}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι η εξίσωση (2.10) είναι μια αμέσως ολοκληρώσιμη εξίσωση αφού $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Αυτό σημαίνει οτι θα υπάρχει μια συνάρτηση $f(x,y)$ τέτοια ώστε η (2.10) να γίνεται $df(x,y) = Mdx+Ndy = 0$. Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y) = c$. Θα έχουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1+e^{x/y} \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} = \left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y} \tag{2.12}$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει :

$$f(x,y) = \int\left(1+e^{x/y}\right)dx+g(y) = x+ye^{x/y}+g(y)$$

για κάποια συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x/y}-\frac{x}{y}e^{x/y}+g'(y) \tag{2.13}$$

Από τις σχέσεις (2.12) και (2.13) έχουμε $\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y} = e^{x/y}-\frac{x}{y}e^{x/y}+g'(y)$ άρα $g'(y) = 0$. Αυτή μας δίνει $g(y) = c'$ και επιλέγοντας $c' = 0$ δηλαδή $g(y) = 0$ προκύπτει οτι η συνάρτηση $f(x,y)$ θα δίνεται απο τη σχέση

$$f(x,y) = x+ye^{x/y}$$

Όλες οι λύσεις λοιπόν της αρχικής εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$f(x,y) = c \Rightarrow x+ye^{x/y} = c$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.4

Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y+1)}{x(x+3y+2)}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε οτι μια λύση της εξίσωσης είναι η $y = 0$. Γράφουμε τώρα την εξίσωση στη μορφή

$$\underbrace{y(x+y+1)}_{M}dx+\underbrace{x(x+3y+2)}_{N}dy = 0$$

η οποία είναι ισοδύμανη με την αρχική εξίσωση. Παρατηρούμε οτι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y(x+y+1)\right] = x+2y+1$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x(x+3y+2)\right] = 2x+3y+2$$

Συμπερένουμε οτι δεν είναι αμέσως ολοκληρώσιμη άρα θα εξετάσουμε την ύπαρξη ενός ολοκληρωτικού παράγοντα. Θα έχουμε

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[x(x+3y+2)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[y(x+y+1)\right]}{y(x+y+1)} =$$
$$= \frac{2x+3y+2-x-2y-1}{y(x+y+1)} = \frac{x+y+1}{y(x+y+1)} = \frac{1}{y}$$

Η τελευταία παράσταση αποτελέι μαι συνάρτηση με μόνη μεταβλητή το y οπότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η συνάρτηση $\rho(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\log|y|} = y$. Πολλαπλασιάζοντας την αρχική εξίσωση με y προκύπτει :

$$\underbrace{y^2(x+y+1)}_{M}\,dx + \underbrace{xy(x+3y+2)}_{N}\,dy = 0 \tag{2.14}$$

η οποία είναι αμέσως ολοκληρώσιμη αφού $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy+3y^2+2y$. Επομένως $\exists f(x,y)$ συνάρτηση τέτοια ώστε η εξίσωση (2.14) να γίνει $df(x,y) = 0$. Οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y) = c$. Σύμφωνα μ' αυτά θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(x+y+1) \;\text{ και }\; \frac{\partial f}{\partial y} = xy(x+3y+2) \tag{2.15}$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση της (2.15) ως προς x αποκτάμε τη σχέση

$$f(x,y) = \int y^2(x+y+1)\,dx + g(y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right) + g(y) =$$
$$\frac{y^2x^2}{2} + xy^3 + xy^2 + g(y)$$

για κάποια συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς y έχουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 3xy^2 + 2xy + g'(y)$$

Θα πρέπει όμως να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, σχέση η οποία μας δίνει

$$2yx^2 + 3xy^2 + 2xy + g'(y) = xy(x+3y+2) \Rightarrow g'(y) = 0$$

Επιλέγοντας $g(y) = 0$ θα έχουμε τον τύπο

$$f(x,y) = c \Rightarrow \frac{y^2x^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Όλες οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης θα δίνονται από τις σχέσεις $y = 0$ και $\frac{y^2x^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$ οι οποίες συμπτύσονται στον γενικό τύπο

$$\frac{y^2x^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.5

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2 + xy^2\right) y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x, y) = x^n \varphi(y)$.

ΛΥΣΗ

Η αρχική διαφορική εξίσωση έχει προφανή λύση την $y = 0$. Επίσης γράφεται ισοδύναμα

$$\left(2y^3 - 3xy\right) dx + \left(x^2 + xy^2\right) dy = 0 \tag{2.16}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\rho(x, y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} x^n\varphi(y)\left(2y^3 - 3xy\right) dx + x^n\varphi(y)\left(x^2 + xy^2\right) dy = 0 \Rightarrow \\ \underbrace{\varphi(y)\left(2y^3x^n - 3x^{n+1}y\right)}_{M} dx + \underbrace{\varphi(y)\left(x^{n+2} + x^{n+1}y^2\right)}_{N} dy = 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω θα είναι μια εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(y)\left(2y^3x^n - 3x^{n+1}y\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)\left(x^{n+2} + x^{n+1}y^2\right)\right] \Rightarrow \\ \varphi'(y)\left(2x^ny^3 - 3x^{n+1}y\right) + \varphi(y)\left(6x^ny^2 - 3x^{n+1}\right) = \\ = \varphi(y)\left[(n+2)x^{n+1} + (n+1)y^2x^n\right] \Rightarrow \\ \varphi'(y)2x^ny^3 - \varphi'(y)3x^{n+1}y + \varphi(y)\cdot 6x^ny^2 - \varphi(y)\cdot 3x^{n+1} = \\ = \varphi(y)\cdot(n+2)x^{n+1} + \varphi(y)\cdot(n+1)y^2x^n \Rightarrow \\ x^{n+1}\left[-3y\varphi'(y) - 3\varphi(y)\right] + x^n\left[2y^3\varphi'(y) + 6y^2\varphi(y)\right] = \\ = (n+2)\varphi(y)x^{n+1} + (n+1)y^2\varphi(y)x^n \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους ομοβάθμιους όρους παίρνουμε τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} -3y\varphi'(y) - 3\varphi(y) = (n+2)\varphi(y) \Rightarrow \\ -3y\varphi'(y) = 3\varphi(y) + (n+2)\varphi(y) \Rightarrow \\ -3y\varphi'(y) = (n+5)\varphi(y) \Rightarrow \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\frac{n+5}{3y} \quad \text{και} \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} 2y^3\varphi'(y) + 6y^2\varphi(y) = (n+1)y^2\varphi(y) \Rightarrow \\ 2y^3\varphi'(y) = -6y^2\varphi(y) + (n+1)y^2\varphi(y) \Rightarrow \\ 2y^3\varphi'(y) = \left(-6y^2 + (n+1)y^2\right)\varphi(y) \Rightarrow \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\frac{n-5}{2y} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.17) και (2.18) έχουμε

$$-\frac{n+5}{3y} = \frac{n-5}{2y} \Rightarrow 2n + 10 = -3n + 15 \Rightarrow n = 1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2.17) παίρνουμε την εξίσωση

$$\varphi'(y) + \frac{2}{y}\varphi(y) = 0 \tag{2.19}$$

η οποία είναι μαι γραμμική φιαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η γενική λύσης της (2.19) θα δίνεται από τον τύπο :

$$\varphi(y) = c'e^{-\int \frac{2}{y} dy} = c'e^{-\log(y^2)} = \frac{c'}{y^2}$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επιλέγουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $\varphi(y) = \frac{c'}{y^2}$ η οποία μας δίνει τον ζητούμενο ολοκληρωτικό παράγοντα $\rho(x,y) = x^n\varphi(y) = \frac{x}{y^2}$. Πολλαπλασιάζοντας τώρα την αρχική εξίσωση (2.16) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα που μόλις υπολογίσαμε παίρνουμε την αμέσως ολοκληρώσιμη εξίσωση :

$$\frac{x}{y^2}\left(2y^3 - 3xy\right)dx + \frac{x}{y^2}\left(x^2 + xy^2\right)dy = 0 \Rightarrow \tag{2.20}$$

$$\underbrace{\left(2xy - \frac{3x^2}{y}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{x^3}{y^2} + x^2\right)}_{N} dy = 0 \tag{2.21}$$

Εύκολα επαλυθεύουμε οτι ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ άρα θα υπάρχει μια συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε να ισχύει $df(x,y) = Mdx + Ndy = 0$. Τότε οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y) = c$. Έχουμε λοιπόν οτι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{3x^2}{y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{y^2} + x^2 \tag{2.22}$$

Προκύπτει οτι

$$f(x,y) = \int\left(2xy - \frac{3x^2}{y}\right)dx + g(y) = x^2y - \frac{x^3}{y} + g(y)$$

για κάποια συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς y έχουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{x^3}{y^2} + g'(y)$$

Από τη δεύτερη σχέση της (2.22) παίρνουμε οτι

$$x^2 - \frac{x^3}{y^2} + g'(y) = \frac{x^3}{y^2} + x^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

Επιλέγοντας $g(y) = c$ αποκτάμε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2y - \frac{x^3}{y}$ οπότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$y = 0 \;\; \text{και} \;\; x^2y - \frac{x^3}{y} = c$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.6

Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

i. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y\log y = -\dfrac{y}{2\log y}, \;\; y(-1) = e^2$

ii. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(1+y)^2}{x - x^2 + xy}, \;\; y(1) = 1$

ΛΥΣΗ

i. Η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x}\log y = -\frac{1}{2\log y}$$

και θέτοντας $z = \log y \Rightarrow z' = \frac{y'}{y}$ παίρνουμε την

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{z^{-1}}{2} \tag{2.23}$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r = -1$. Εκτελούμε λοιπόν το μετασχηματισμό $u = z^{1-(-1)} = z^2$ που δίνει $u' = 2zz'$, με τον οποίο μετατρέπουμε την (2.23) σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης :

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{2} \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = -1 \tag{2.24}$$

Η γενική λύση αυτής θα είναι :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int(-\frac{2}{x})dx}\left[c + \int (-1)\cdot e^{\int(-\frac{2}{x})dx}dx\right] = \\ &= e^{\log x^2}\left[c - \int e^{\log\frac{1}{x^2}}dx\right] = x^2\left(c - \int\frac{dx}{x^2}\right) = \\ &= x^2\left(c + \frac{1}{x}\right) = cx^2 + x \end{aligned}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Με αναδρομική αντικατάσταση όλες οι λύσεις y θα δίνονται από τον τύπο

$$u(x) = cx^2 + x \Rightarrow z^2(x) = cx^2 + x \Rightarrow z(x) = \pm\sqrt{cx^2 + x} \Rightarrow \tag{2.25}$$

$$\log y = \pm\sqrt{cx^2 + x} \Rightarrow y(x) = e^{\pm\sqrt{cx^2+x}} \tag{2.26}$$

Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη $y(-1) = e^2$ θα προκύψει :

$$y(-1) = e^2 \Rightarrow e^2 = e^{\sqrt{c(-1)^2-1}} \Rightarrow c - 1 = 4 \Rightarrow c = 5$$

Η τιμή αυτή μας δίνει τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών η οποία θα είναι

$$y(x) = e^{\sqrt{5x^2+x}}$$

ii. Η αρχική διαφορική εξίσωση έχει λύση την $y = -1$ η οποία όμως δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$. Θέτοντας τώρα $z = 1 + y \Rightarrow z' = y'$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$z' = -\frac{z^2}{z - x^2} \tag{2.27}$$

και πρόκειται για μια ομογενή εξίσωση με βαθμό ομογένιας 2. Η τελευταία έχει λύση την $z = 0 \Rightarrow y = -1$ την οποία όμως έχουμε απορρίψει προηγουμένως. Με το μετασχηματισμό $z = xu$ ο οποίος δίνει $z' = xu' + u$ η (2.27) παίρνει τη μορφή

$$z' = -\frac{z^2}{z - x^2} \Rightarrow xu' + u = -\frac{x^2u^2}{x^2u - x^2} \Rightarrow xu' + u = \frac{u^2}{1 - u} \Rightarrow \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow xu' = \frac{2u^2 - u}{1 - u} \Rightarrow \frac{1 - u}{2u^2 - u}du = \frac{dx}{x} \tag{2.29}$$

Φτάσαμε σε μια διαφοριική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών οπότε με άμεση ολοκλήρωση και στα δύο μέλη της (2.28) θα έχουμε

$$\int\frac{1 - u}{2u^2 - u}du = \int\frac{dx}{x} + c' \Rightarrow -\int\frac{1}{u}du + \int\frac{1}{2u - 1}du = \int\frac{dx}{x} + c' \Rightarrow$$

$$-\log|u| + \frac{1}{2}\log|2u - 1| = \log|x| + c' \Rightarrow \log\left|\frac{2u - 1}{x^2u^2}\right| = 2c' \Rightarrow$$

$$\frac{2u - 1}{x^2u^2} = \pm e^{2c'} \text{ και θέτοντας } \pm e^{2c'} = c \text{ παίρνουμε } \frac{2u - 1}{x^2u^2} = c$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$\frac{2u-1}{x^2u^2}=c \xRightarrow{u=\frac{z}{x}} \frac{2\frac{z}{x}-1}{x^2\left(\frac{z}{x}\right)^2}=c \xRightarrow{z=y+1} \frac{2\frac{y+1}{x}-1}{(y+1)^2}=c$$

Από την παραπάνω σχέση οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο :

$$2\frac{y+1}{x}-1=c(y+1)^2 \Rightarrow cx(y+1)^2-2(y+1)+x=0 \Rightarrow \tag{2.30}$$

$$y=\frac{1-cx\pm\sqrt{1-cx^2}}{cx} \tag{2.31}$$

Από την αρχική συνθήκη του προβλήματος $y(1)=1$ υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς c :

$$c1(1+1)^2-2(1+1)+1=0 \Rightarrow 4c-3=0 \Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

η οποία συμφωνεί με την αρχική συνθήκη μόνο τη λύση για τη θετική ρίζα $(+)$ της (2.31) οπότε και αποκτάμε τον τύπο που μας δίνει τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών :

$$y=\frac{4-3x+\sqrt{4-3x^2}}{3x}$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.7

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x+2y-3)y'+x-y+3=0$$

με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t=x+a, z=y+\beta$ (όπου a και β είναι σταθερέςπου πρέπει να προσδιοριστούν).

ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+y-3}{x+2y-3}$$

Θέτουμε $t=x+a \Rightarrow x=t-a$ και $z=y+\beta \Rightarrow y=z-\beta$. Επιπλέον θα ισχύει οτι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=1\cdot\frac{dz}{dt}\cdot 1=\frac{dz}{dt}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση γίνεται

$$\frac{dz}{dt}=\frac{-(t-a)+(z-\beta)-3}{(t-a)+2(z-\beta)-3} \Rightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{-t+a+z-\beta-3}{t-a+2z-2\beta-3} \Rightarrow \tag{2.32}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{-t+z+(a-\beta-3)}{t+2z+(-a-2\beta-3)} \tag{2.33}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλες τιμές για τα a και β ώστε η (2.33) να γίνει ομογενής διαφορική εξίσωση με βαθμό ομογένειας 1. Λύνουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} a-\ \ \beta-3=0 \\ -a-2\beta-3=0 \end{cases} \xRightarrow{(+)} -3\beta-6=0 \Rightarrow \beta=-2 \Rightarrow a=1$$

Οι τιμές αυτές των σταθερών α και β μας δίνουν τους μετασχηματισμούς $x = t - 1$ και $y = z + 2$ και καταλήγουμε στην ομογενή εξίσωση :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-t + z}{t + 2z} \tag{2.34}$$

Θέτουμε λοιπόν σ' αυτήν $z = tu \Rightarrow z' = tu' + u$ και παίρνουμε :

$$tu' + u = \frac{-t + tu}{t + 2tu} \Rightarrow tu' = \frac{t(-1 + u)}{t(1 + 2u)} - u \Rightarrow \tag{2.35}$$

$$\Rightarrow tu' = -\frac{2u^2 + 1}{1 + 2u} \Rightarrow \frac{1 + 2u}{2u^2 + 1} du = -\frac{dt}{t} \tag{2.36}$$

Φτάσαμε σε μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο

$$\int \frac{1 + 2u}{2u^2 + 1} du = -\int \frac{dt}{t} + c'$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι έχουμε :

$$\int \frac{1 + 2u}{2u^2 + 1} du = -\int \frac{dt}{t} + c' \Rightarrow \tag{2.37}$$

$$\int \frac{1}{2u^2 + 1} du + \int \frac{2u}{2u^2 + 1} du = -\int \frac{dt}{t} + c' \Rightarrow \tag{2.38}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\sqrt{2}u\right) + \frac{1}{2} \log\left|2u^2 + 1\right| = -\log|t| + c' \Rightarrow \tag{2.39}$$

$$\sqrt{2} \arctan\left(\sqrt{2}u\right) + \log\left|t^2\left(2u^2 + 1\right)\right| = 2c' \tag{2.40}$$

Αντικαθιστώντας $u = \frac{z}{t}$, $z = y - 2$ και $t = x + 1$ και θέτοντας $c = 2c'$ οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$\sqrt{2} \arctan\left(\sqrt{2}\frac{y - 2}{x + 1}\right) + \log\left[(x + 1)^2 + (y - 2)^2\right] = c$$

όπου c είναι μια αναθαίρετη σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ Α.8

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + x + y + 1 = (x + y)^2 e^{2x}\ ,\ y(0) = 1$$

ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση αυτή έχει λύση την $y = -x$ η οποία όμως δεν πληροί την αρχική συνθήκη του προβλήματος αφού $y(0) = 1 \Rightarrow 0 = 1$. Για να βρούμε τις υπόλοιπες λύσεις χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $z = x + y$ από τον οποίο παίρνουμε $z' = y' + 1$. Έτσι η εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$z' + z = z^2 e^{2x} \tag{2.41}$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r = 2$. Η (2.41) έχει λύση την $z = 0$ η οποία ισοδυναμεί με την $y = -x$ την οποία έχουμε απορρίψει διότι δεν πληροί την αρχική συνθήκη. Η τελευταία εξίσωση όμως γράφεται στη μορφή

$$z^{-2} \cdot z' + z \cdot z^{-2} = z^{-2} \cdot z^2 e^{2x} \Rightarrow z^{-2} \cdot z' + z^{-1} = e^{2x}$$

Σ' αυτήν θέτουμε $u = z^{1-2} = z^{-1} \Rightarrow u' = -z^{-2} z'$ και παίρνουμε τη γραμμική εξίσωση 1ης τάξης :

$$u' - u = -e^{2x} \tag{2.42}$$

Η γενική λυση αυτής θα δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = e^{-\int(-1)dx}\left[c + \int -e^{2x} \cdot e^{\int(-1)dx} dx\right] = \tag{2.43}$$

$$= e^{x}\left(c + \int -e^{2x} \cdot e^{-x} dx\right) = \tag{2.44}$$

$$= e^{x}\left(c - \int e^{x} dx\right) = e^{x}\left(c - e^{x} dx\right) = ce^{x} - e^{2x} \tag{2.45}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Αντικαθιστώντας ξανά $u = z^{-1}$ και $z = x + y$ στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε τους τύπους που μας δίνουν όλες τις λύσεις της εξίσωσης :

$$y = -x \quad \text{και} \quad y = -x + \frac{1}{ce^{x} - e^{2x}}$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η λύση $y = -x$ δεν πληροί την αρχική συνθήκη του προβλήματος, ενώ από τον τύπο $y = -x + \frac{1}{ce^{x}-e^{2x}}$ παίρνουμε :

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{ce^{0} - e^{2\cdot 0}} = 1 \Rightarrow c = 2$$

Έτσι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα είναι η

$$y = -x + \frac{1}{2e^{x} - e^{2x}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.9

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = x + y$ να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = (x + y)\left(x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 - 1\right) - 1$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή έχει λύση την $y = -x$. Για τις υπόλοιπες λύσεις γράφεται ισοδύναμα

$$y' = (x + y)\left(x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 - 1\right) - 1 \Rightarrow \tag{2.46}$$

$$y' = (x + y)\left[x^2\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - 1\right] - 1 \Rightarrow \tag{2.47}$$

$$y' + 1 = (x + y)\left[x^2 (x + y)^2 - 1\right] \tag{2.48}$$

Ο μετασχηματισμός $z = x + y \Rightarrow z' = y' + 1$ φέρνει την (2.48) στη μορφή

$$z' = xz(x^2 z^2 - 1) \Rightarrow z' + xz = z^3 x^3 \tag{2.49}$$

Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r = 3$. Μια λύση αυτής είναι η $z = 0$ η οποία αντιστοιχεί στην $y = -x$ που είδαμε προηγουμένως. Επιπλέον θέτοντας $u = z^{1-3} = z^{-2}$ παίρνουμε $u' = -2z^{-3}z'$ οπότε η (2.49) μετατρέπεται σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης :

$$z' + xz = z^3 x^3 \Rightarrow z^{-3}z' + xz^{-2} = x^3 \Rightarrow u' - 2xu = -2x^3 \tag{2.50}$$

Η γενική λύση αυτή θα δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = e^{-\int -2x dx}\left[c + \int -2x^3 \cdot e^{\int -2x dx} dx\right] =$$

$$= e^{x^2}\left[c + \int x^2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} dx\right] =$$

$$= e^{x^2}\left[c + \int x^2 \cdot d\left(e^{-x^2}\right)\right] =$$

$$= e^{x^2}\left(c + x^2 \cdot e^{-x^2} - \int 2x \cdot e^{-x^2} dx\right) = e^{x^2}\left(c + x^2 \cdot e^{-x^2} - e^{-x^2}\right)$$

όπου c είναι μια αυαθαίρετη σταθερά. Αντικαθιστώντας αναδρομικά στην τελευταία σχέση τους μετασχηματισμούς που χρησιμοποιήσμε έχουμε :

$$u(x) = e^{x^2}\left(c + x^2\cdot e^{-x^2} - e^{-x^2}\right) \xRightarrow{u=z^{-2}\ ,\ z=y+x} y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}+x^2+1}}$$

Όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης θα δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$y = -x \ \text{ και } \ y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}+x^2+1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.10

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(y - xy + y^3\cos y\right)y' + xy^3 + y^2 = 0$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή έχει προφανή λύση την $y = 0$. Για να βρούμε τις υπόλοιπες λύσεις την γράφουμε ισοδύναμα στη μορφή :

$$\underbrace{\left(xy^3+y^2\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(y - xy + y^3\cos y\right)}_{N}dy = 0 \tag{2.51}$$

Οι συναρτήσεις $M(x,y) = xy^3 + y^2$ και $N(x,y) = y - xy + y^3\cos y$ είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Εξετάζουμε στη συνέχεια αν η (2.51) αποτελεί μια αμέσως ολοκληρώσιμη εξίσωση. Παρατηρούμε ότι :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 + 2y \neq -y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

κάτι που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν είναι αμέσως ολοκληρώσιμη άρα θα εξετάσουμε την ύπαρξη ενός ολοκληρωτικού παράγοντα. Έχουμε :

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-y-3xy^2-2y}{xy^3+y^2} = \frac{-3\left(xy^2+y\right)}{y\left(xy^2+y\right)} = -\frac{3}{y}$$

η οποία είναι μια συνάρτηση με μοναδική μεταβλητή το y οπότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι ο $\rho(y) = e^{\int -\frac{3}{y}dy} = \frac{1}{y^3}$. Πολλαπλασιάζοντας μ' αυτόν την (2.51) θα προκύψει η αμέσως ολοκληρώσιμη εξίσωση

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^2} + \cos y\right)dy = 0 \tag{2.52}$$

Θα υπάρχει λοιπόν μια συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να γραφτεί στη μορφή $df(x,y) = Mdx + Ndy = 0$. Οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y) = c$. Θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \ \text{ και } \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^2} + \cos y$$

Έτσι προκύπτει

$$f(x,y) = \int\left(x+\frac{1}{y}\right)dx + g(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + g(y)$$

για κάποια συνάρτηση $g(y)$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) \overset{(2.52)}{=\!=} \frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^2} + \cos y \Rightarrow$$

$$g'(y) = \frac{1}{y^2} + \cos y \Rightarrow g(y) = -\frac{1}{y} + \sin y + c'$$

και επιλέγουμε δίχως βλάβη της γενικότητας $g(y) = -\frac{1}{y} + \sin y$.Συνεπώς η συνάρτηση f θα είναι $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} + \sin y$ άρα οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} + \sin y = c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ Α.11

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(2x^2 + x^3 y + y\right) dx + \left(x + 4xy^4 + 8y^3\right) dy = 0 \quad , \ x > 0, \ y > 0$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y) = \varphi(xy)$ (όπου φ είναι μια συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί).

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $\rho(x,y) = \varphi(xy)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αν και μόνο αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Πολλαπλασιάζοντας την αρχική εξίσωση με τη συνάρτηση $\rho(x,y)$ προκύπτει

$$\underbrace{\varphi(xy)\left(2x^2 + x^3 y + y\right)}_{M} dx + \underbrace{\varphi(xy)\left(x + 4xy^4 + 8y^3\right)}_{N} dy = 0 \tag{2.53}$$

Υπολογίζοντας τις παταγώγους $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ θα έχουμε :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\varphi'(xy)\left(2x^2 + x^3 y + y\right) + \varphi(xy)\left(x^3 + 1\right) \quad \text{και} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = y\varphi'(xy)\left(x + 4xy^4 + 8y^3\right) + \varphi(xy)\left(1 + 4y^4\right) \tag{2.55}$$

οπότε απαιτώντας να ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} &\Rightarrow x\varphi'(xy)\left(2x^2 + x^3 y + y\right) + \varphi(xy)\left(x^3 + 1\right) = \\
&= y\varphi'(xy)\left(x + 4xy^4 + 8y^3\right) + \varphi(xy)\left(1 + 4y^4\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varphi'(xy)\left(2x^3 + x^4 y + xy\right) - \varphi'(xy)\left(xy + 4xy^5 + 8y^4\right) = \\
&= \varphi(xy)\left(1 + 4y^4\right) - \varphi(xy)\left(x^3 + 1\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varphi'(xy)\left(2x^3 + x^4 y - 4xy^5 - 8y^4\right) = \varphi(xy)\left(4y^4 - x^3\right) \Rightarrow \\
&\varphi'(xy)\left(x^3(2 + xy) - 4y^4(xy + 2)\right) = \varphi(xy)\left(4y^4 - x^3\right) \Rightarrow \\
&\varphi'(xy)(xy + 2)\left(x^3 - 4y^4\right) - \varphi(xy)\left(4y^4 - x^3\right) = 0
\end{aligned}$$

Διαρώντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με την παράσταση $x^3 - 4y^4$ παίρνουμε την ομογενή γραμμική εξίσωση 1ης τάξης :

$$\varphi'(xy)(xy + 2) + \varphi(xy) = 0 \Rightarrow \varphi'(xy) + \frac{1}{xy + 2} \cdot \varphi(xy) = 0 \tag{2.56}$$

Θέτοντας $xy = z$ γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(z) = ce^{-\int \frac{1}{z+2} dz} = ce^{-\log z + 2} = \frac{c}{z + 2}$$

Επομένως ο ζητούμενος ολοκληρωτιοκός παράγοντας τα είναι ο $\rho(x,y) = \varphi(xy) = \frac{c}{xy+2}$. Μπορούμε χωρίς βάβη της γενικότητας να επιλέξουμε $c = 1$ και να έχουμε $\rho(x,y) = \frac{1}{xy+2}$. Έτσι η εξίσωση (2.53) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{1}{xy+2}\left(2x^2 + x^3y + y\right)dx + \frac{1}{xy+2}\left(x + 4xy^4 + 8y^3\right)dy = 0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{y}{xy+2}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(\frac{x}{xy+2} + 4y^3\right)}_{N}dy = 0 \tag{2.57}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι η (2.57) είναι μια αμέσως ολοκληρώσιμη εξίσωση αφού

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{(xy+2)^2}$$

Θα υπάρχει λοιπόν μια συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε η (2.57) να ισχύει $df(x,y) = Mdx + Ndy = 0$. Οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y) = c$. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = x^2 + \frac{y}{xy+2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{x}{xy+2} + 4y^3$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς x προκύπτει

$$f(x,y) = \int\left(x^2 + \frac{y}{xy+2}\right)dx + g(y) = \frac{x^3}{3} + \log(xy+2) + g(y)$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση ως προς τη μεταβλητή y και εξισώνουμε την παράσταση που θα προκύψει με τη συνάρτηση $N(x,y)$. Έχουμε λοιπόν :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy+2} + g'(y) = \frac{x}{xy+2} + 4y^3 \Rightarrow$$
$$g'(y) = 4y^3 \Rightarrow g(y) = y^4 + c'$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επιλέγοντας $c' = 0$ αποκτάμε τη ζητούμενη συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \log(xy+2) + y^4$$

οπότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$\frac{x^3}{3} + \log(xy+2) + y^4 = c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ Α.12

Ας είναι $a, \beta, \gamma, a_1, \beta_1, \gamma_1$ σταθερές με $a\beta_1 - a_1\beta \neq 0$ και ας θεωρήσουμε τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος

$$\begin{cases} ax_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \\ a_1x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $X = x - x_0,\ Y = y - y_0$ να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + \beta y + \gamma}{a_1x + \beta_1 y + \gamma_1}$$

Εφαρμογή : Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + y - 3}{x + 2y - 3}$$

ΛΥΣΗ

Για την επίλυση της εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+\beta y+\gamma}{a_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

i. Εαν $(\gamma, \gamma_1) = (0, 0)$ τότε πρόκειται για μια ομογενή διαφορική εξίσωση με βαθμό ομογένειας 1 δηλαδή την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + \beta y}{a_1 x + \beta_1 y} \tag{2.58}$$

ii. Στην περίπτωση όπου $(\gamma, \gamma_1) \neq (0, 0)$ τότε αναπτύσουμε την εξής μέθοδο για την επίλυσή της. Έχουμε :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dY} \cdot \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = 1 \cdot \frac{dY}{dX} \cdot 1 = \frac{dY}{dX}$$

Σύμφωνα μ' αυτό και με τη βοήθεια της αντικατάστασης $X = x - x_0,\ Y = y - y_0$ η αρχική εξίσωση θα πάρει τη μορφή :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a\,(X + x_0) + \beta\,(Y + y_0) + \gamma}{a_1\,(X + x_0) + \beta_1\,(Y + y_0) + \gamma_1} = \frac{aX + \beta Y + (ax_0 + \beta y_0 + \gamma)}{a_1 X + \beta_1 Y + (a_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1)}$$

Από την υπόθεση έχουμε γνωστό ότι $ax_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$ και $a_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0$ και αυτό μας μετατρέπει την εξίσωση στην ακόλουθη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + \beta Y}{a_1 X + \beta_1 Y} \tag{2.59}$$

με βαθμό ομογένειας 1. Παρατηρούμε οτι η τελευταία είναι της ίδιας μορφής με την (2.58) στην περίπτωση i.

Εφαρμογή :
Η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-3}{x+2y-3}$ είναι της ίδιας μορφής με την αρχική από την οποία παίρνουμε τους συντελεστές : $a = -1, \beta = 1, \gamma = -3$ και $a_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = -3$. Με τους συντελεστές αυτούς αποκτάμε το σύστημα

$$\begin{cases} -x_0 + \ \ y_0 - 3 = 0 \\ \ \ x_0 + 2y_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

της οποίας η λύση θα είναι η $(x_0, y_0) = (-1, 2)$. Ακολυθώντας την ίδια διαδικασία επίλυσης με προηγουμένως χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $x = X - 1$ και $y = Y + 2$ θα καταλήξουμε στην ομογενή εξίσωση

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-X + Y}{X + 2Y} \tag{2.60}$$

Έτσι λοιπόν θέτουμε $Y = XZ$ και παίρνουμε $Y' = XZ' + Z$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (2.60) προκύπτει :

$$\begin{aligned} XZ' + Z = \frac{-X + XZ}{X + 2XZ} &\Rightarrow XZ' + Z = \frac{-1 + Z}{1 + 2Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow XZ' = \frac{-1 - 2Z^2}{1 + 2Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dZ}{dX} \cdot \frac{1 + 2Z}{-1 - 2Z^2} = \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1 + 2Z}{1 + 2Z^2} dZ = -\frac{dX}{X} \end{aligned}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο :

$$\begin{gathered}\int \frac{1+2Z}{1+2Z^2}dZ = \int -\frac{dX}{X} + c' \Rightarrow \\ \int \frac{1}{1+2Z^2}dZ + \int \frac{2Z}{1+2Z^2}dZ = -\int \frac{dX}{X} + c' \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}Z\right) + \frac{1}{2}\log\left|1+Z^2\right| = -\log|X| + c' \Rightarrow \\ \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}Z\right) + \log\left|\left(1+Z^2\right)X^2\right| = 2c'\end{gathered}$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θέτοντας στην τελευταία σχέση $Z = Y/X$ και $X = x+1, Y = y-2$ τότε παίρνουμε τον τύπο από τον οποίο θα δίνονται όλες οι λύσεις της εξίσωσης :

$$\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\frac{y-2}{x-1}\right) + \log\left[(x+1)^2 + (y-2)^2\right] = c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά με $c = 2c'$.

ΑΣΚΗΣΗ Α.13

Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $X = x-a, Y = y-\beta$ (όπου a και β κατάλληλοι αριθμοί που θα πρέπει να προσδιοριστούν), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

ΛΥΣΗ

Θέτοντας $X = x-a \Rightarrow x = X+a$ και $Y = y-\beta \Rightarrow y = Y+\beta$ θα ισχύει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dY}\cdot\frac{dY}{dX}\cdot\frac{dX}{dx} = 1\cdot\frac{dY}{dX}\cdot 1 = \frac{dY}{dX}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις λοιπόν η εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+(a+\beta+1)}{X+(a+2)} - e^{\frac{X+Y+(a+\beta+1)}{X+(a+2)}} \tag{2.61}$$

Με κατάλληλες τιμές για τους αριθμούς a και β μπορούμε να μετατρέψουμε την (2.61) σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση με βαθμό ομογένειας 1. Γι αυτό θα πρέπει να ισχύει :

$$\begin{cases} a+\beta+1 = 0 \\ a \qquad +2 = 0\end{cases}$$

Το σύστημα μας δίνει τη λύση $(a,\beta) = (-2,1)$. Έτσι οι μετασχηματισμοί $x = X-2$ και $y = Y+1$ μας δίνουν την ομογενή εξίσωση :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X} - e^{\frac{X+Y}{X}} \tag{2.62}$$

Στην (2.62) θέτοντας $Y = XZ \Rightarrow Y' = XZ' + Z$ οδηγούμεστε σε μια διαφορική εξίσωση **χωριζομένων μεταβλητών** :

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X} - e^{\frac{X+Y}{X}} \Rightarrow XZ' + Z = \frac{X+XZ}{X} - e^{\frac{X+XZ}{X}} \Rightarrow \\ \Rightarrow XZ' + Z = 1 + Z - e^{1+Z} \Rightarrow XZ' = 1 - e^{1+Z}\end{aligned}$$

Η τελευταία έχει λύση την $Z = 1$ η οποία μας δίνει τη λύση της αρχικής εξίσωσης : $y = -x - 1$. Για τις υπόλοιπες λύσεις θα έχουμε :

$$\frac{dZ}{1-e^{1+Z}} = \frac{dX}{X} \Rightarrow \int \frac{dZ}{1-e^{1+Z}} = \int \frac{dX}{X} + c' \Rightarrow$$
$$\int \frac{1+e^{1+Z}-e^{1+Z}}{1-e^{1+Z}} dZ = \int \frac{dX}{X} + c' \Rightarrow$$
$$Z - \log\left|1-e^{1+Z}\right| = \log|X| + c' \Rightarrow \log\left|\left(1-e^{1+Z}\right)X\right| = Z + c' \Rightarrow$$
$$\left(1-e^{1+Z}\right)X = \pm e^{Z} \cdot e^{c'}$$

όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θέτοντας $\pm e^{c'} = c''$ και αντικαθιστώντας ξανά $Y = XZ$ και $X = x+2$, $Y = y-1$ αποκτάμε τον τύπο από τον οποίο δίνεται η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης :

$$\left(1-e^{1+\frac{y-1}{x+2}}\right)(x+2) = c'' e^{\frac{y-1}{x+2}} \Rightarrow x+2-(x+2)e^{1+\frac{y-1}{x+2}} = c'' e^{\frac{y-1}{x+2}} \Rightarrow$$
$$x+2-(x+2)\cdot e \cdot e^{\frac{y-1}{x+2}} = c'' e^{\frac{y-1}{x+2}} \Rightarrow$$
$$x+2 = \left[(x+2)\cdot e + c''\right] e^{\frac{y-1}{x+2}} \Rightarrow e^{\frac{y-1}{x+2}} = \frac{x+2}{x\cdot e + 2e + c''} \Rightarrow$$
$$\frac{y-1}{x+2} = \log\left(\frac{x+2}{x\cdot e+2e+c''}\right)$$

όπου c'' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θέτοντας $c'' + 2e = c$ έχουμε τους τύπους οι οποίοι μας δίνουν όλες τις λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης

$$y = -x-1 \;\; \text{και} \;\; y = (x+2)\log\left(\frac{x+2}{ex+c}\right) + 1$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.14

Με την αντικατάσταση $x = e^t$ να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0\,,\; x > 0$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε οτι η διαφορική εξίσωση αυτή ικανοποιείται από τη σχέση $\frac{dy}{dx} = 0$ η οποία μας δίνει τις λύσεις της μορφής $y = c'$ όπου c' είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επίσης έχει και τις λύσεις $y = \pm x$. Για τις υπόλοιπες λύσεις θέτουμε $x = e^t \Rightarrow t = \log(x)$ και προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \;\; \text{και}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί μετατρέπουν την αρχική εξίσωση στη μορφή :

$$e^t y\frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^t\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)^2 - y\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$y\frac{d^2y}{dt^2} - 2y\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης μη περιέχουσα την ανεξάρτητη μεταβλητή t. Έτσι θέτουμε $\frac{dy}{dt} = z$ και $\frac{d^2y}{dt^2} = z\frac{dy}{dz}$. Τότε η εξίσωση θα γίνει :

$$yz\frac{dy}{dz} - 2yz + z^2 = 0 \tag{2.63}$$

Η (2.63) έχει λύση την $z = 0$ η οποία αντιστοιχεί στην $y = c'$ που συναντήσαμε προηγουμένως. Για τις υπόλοιπες μη μηδενικές λύσεις θα έχουμε

$$yz\frac{dy}{dz} - 2yz + z^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{2yz - z^2}{yz}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια ομογενής εξίσωση με βαθμό ομογένειας 2. Ο μετασχηματισμός $z = uy \Rightarrow z' = u'y + u$ θα την ανάγει σε μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών :

$$\begin{aligned} u'y + u = \frac{2yuy - (uy)^2}{yuy} &\Rightarrow u'y + u = \frac{2y^2u - u^2y^2}{y^2u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u'y = \frac{2u - u^2}{u} - u \Rightarrow u'y = \frac{2u - 2u^2}{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u'y = 2 - 2u \Rightarrow \frac{u}{2 - 2u} = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Όλες οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο

$$\int \frac{du}{2 - 2u} = \int \frac{dy}{y} + a \Rightarrow -\frac{1}{2}\log|1 - u| = \log|y| + a \Rightarrow$$
$$\log|y| + \frac{1}{2}\log|1 - u| = -a \Rightarrow \log\left|y^2(1 - u)\right| = -2a \Rightarrow$$
$$y^2(1 - u) = \beta$$

έχοντας θέσει $\beta = \pm e^{-2a}$ όπου a, β είναι αυθαίρετες σταθερές. Αντικαθιστώντας ξανά $u = \frac{z}{y}$ και $z = y'$ παίρνουμε την

$$y^2(1 - u) = \beta \Rightarrow y^2\left(1 - \frac{z}{y}\right) = \beta \Rightarrow$$
$$z = \frac{y^2 - \beta}{y} \Rightarrow y' = \frac{y^2 - \beta}{y}$$
$$\frac{y}{y^2 - \beta}y' = 1$$

Η εξίσωση αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών οπότε οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο

$$\int \frac{y}{y^2 - \beta}dy = \int dt + \gamma \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|y^2 - \beta\right| = t + \gamma \Rightarrow$$
$$\log\left|y^2 - \beta\right| = 2t + 2\gamma \Rightarrow y^2 - \beta = \pm e^{2t+2\gamma} \xRightarrow{t=\log(x)}$$
$$y = \pm\sqrt{c_1x^2 + c_2}\ ,\ x > 0$$

όπου έχουμε θέσει $c_1 = \pm e^{2\gamma}$ και $c_2 = \beta$ με $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, \gamma$ είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης θα δίνονται από τους τύπους

$$y = a\ ,\ y = \pm x \ \text{ και }\ y = \pm\sqrt{c_1x^2 + c_2}\ ,\ x > 0$$

όπου συμπτίσσοντας αυτές έχουμε

$$y = a \ \text{ και }\ y = \pm\sqrt{c_1x^2 + c_2}\ ,\ x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.15

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(2y^3 - 3xy\right) dx + \left(x^2 + xy^2\right) dy = 0$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x, y) = \frac{1}{y}\Phi\left(\frac{1}{y}\right)$, όπου Φ είναι κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να βρεθεί).

Η συνάρτηση $\rho(x, y) = \frac{1}{y}\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$ αποτελεί ολοκληρωτικό παράγοντα αν και μόνο αν πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης μ' αυτήν η εξίσωση που θα προκύψει είναι αμέσως ολοκληρώσιμη. Θα έχουμε λοιπόν :

$$\frac{1}{y}\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(2y^3 - 3xy\right) dx + \frac{1}{y}\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^2 + xy^2\right) dy = 0$$

$$\underbrace{\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(2y^2 - 3x\right)}_{M} dx + \underbrace{\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y} + xy\right)}_{N} dy = 0 \qquad (2.64)$$

Απαιτούμε λοιπόν να ισχύει η ισότητα $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(2y^2 - 3x\right)\right] = \\
&= \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\left(2y^2 - 3x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot 4y = \\
&= \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{3x^2}{y^2} - 2x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot 4y \quad \text{και} \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y} + xy\right)\right] = \\
&= \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{y} + xy\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{y} + y\right) = \\
&= \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{y} + y\right)
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν θα ισχύει :

$$\Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{3x^2}{y^2} - 2x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot 4y =$$

$$\Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{y} + y\right) \Rightarrow$$

$$\Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{2x^2}{y^2} - 3x\right) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(3y - \frac{2x}{y}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{x}{y}\left(\frac{2x}{y} - 3x\right)\right] - \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{y} - 3x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y} - \Phi\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Θέτοντας στην τελευταία εξίσωση $z = \frac{x}{x}$ αποκτάμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού :

$$\Phi'(z)\cdot z - \Phi(z) = 0 \Rightarrow \Phi'(z) - \frac{1}{z}\Phi(z) = 0$$

Η γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\Phi(z) = ce^{-\int -\frac{1}{z}dz} = ce^{\log z} = cz$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Χωρίς βλάβη της γενικοτητας επιλέγουμε $c = 1$ και παίρνουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\rho(x, y) = \frac{x}{y^2}$. Ο παράγοντας αυτός φέρνει την εξίσωση (2.64) στη μορφή

$$\frac{x}{y^2}\left(2y^3 - 3xy\right)dx + \frac{x}{y^2}\left(x^2 + xy^2\right)dy = 0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{\left(2xy - \frac{3x^2}{y}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{x^3}{y^2} + x^2\right)}_{N} dy = 0$$

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι η παραπάνω εξίσωση είναι αμέσως ολοκληρώσιμη αφού

2.2 B - Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

2.3 C - Δυναμοσειρές λύσεις γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Κεφάλαιο 3

Ασκήσεις βιβλίου

Κεφάλαιο 4

ΘΈΜΑΤΑ ΕΞΕΤΆΣΕΩΝ