



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

📍: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος 📞: 26610 20144 📠: 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14 Μαρτίου 2024

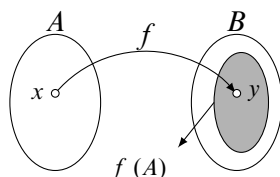
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ορισμοί

ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι μια διαδικασία (αντιστοίχιση) με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται **τιμή** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.



ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των σημείων της μορφής $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με C_f

$$C_f = \{M(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΟΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Δύο συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε δεν είναι ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

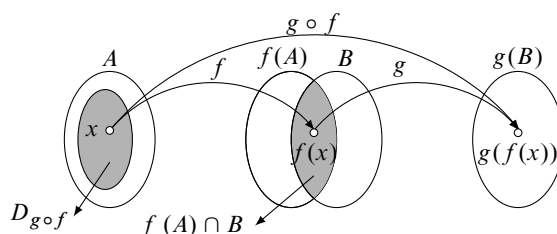
1. Η συνάρτηση $f + g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.
2. Η συνάρτηση $f - g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.
3. Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.
4. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο και πεδίο ορισμού

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , \quad D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$$



Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

(Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in B \text{ και } g(x) \in A\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του Δ . Η f θα ονομάζεται

1. γνησίως αύξουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. γνησίως φθίνουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η f σε κάθε περίπτωση λέγεται **γνησίως μονότονη**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και έστω $x_0 \in A$. Η f θα λέμε ότι παρουσιάζει

1. ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

2. ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται **ολικά ακρότατα**. Το x_0 λέγεται **θέση ακρότατου**.

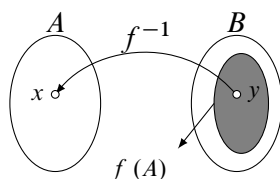
ΟΡΙΣΜΟΣ 10 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 – 1

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται 1 – 1 εάν κάθε στοιχείο $x \in A$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της. Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της f θα ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f .



- Συμβολίζεται με f^{-1} και είναι $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$.
- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , ενώ το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f .
- Ισχύει ότι $x = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ

1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **ανοιχτό** διάστημα (a, β) εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.
3. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 14 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 15 : ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη στο **πεδίο ορισμού** της ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in D_f$.
2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **ανοικτό** διάστημα (a, β) του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.
3. Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 16 : ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω A_1 το σύνολο των σημείων $x \in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχεί στο $f'(x)$ ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της f ή απλά **παράγωγος** της f . Συμβολίζεται με f' .

ΟΡΙΣΜΟΣ 17 : ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f'' . Επαγωγικά ορίζεται και η ν -οστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)} \right]'$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 19 : ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 20 : ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 21 : ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα της f ονομάζονται **τοπικά ακρότατα** της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 22 : ΚΥΡΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

ΟΡΙΣΜΟΣ 23 : ΚΟΙΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ΟΡΙΣΜΟΣ 24 : ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν:

- η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) η αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της C_f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 25 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 26 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$) τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$).

ΟΡΙΣΜΟΣ 27 : ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντίστοιχα στο $-\infty$ αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

- Αν $\lambda = 0$ η ασύμπτωτη είναι οριζόντια.
- Αν $\lambda \neq 0$ η ασύμπτωτη είναι πλάγια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 28 : ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \text{ , για κάθε } x \in \Delta$$

Πηγή:

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου, Οδηγός προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις - Συλλογικό Έργο - Εκδόσεις Ελληνικοεκδοτική - 2016
Iysari team