Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

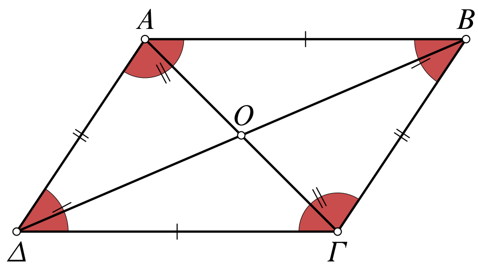
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

27 Οκτωβρίου 2018

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παραλληλόγραμμα

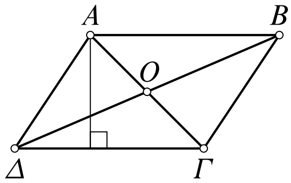
ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



1 Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρομβος - Τετράγωνο
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

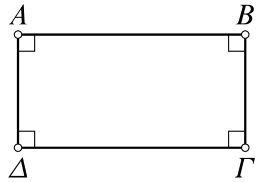
Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του ανα δύο παράλληλες.



- Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις απέναντι κορυφές του παραλληλογράμμου ονομάζονται **διαγώνιοι**.
- Το σημείο τομής των διαγωνίων του ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σ' αυτές ονομάζεται **ύψος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το ορθογώνιο ως το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει μια ορθή γωνία και κατά συνέπεια από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, προκύπτουν και οι υπόλοιπες γωνίες του ορθές.

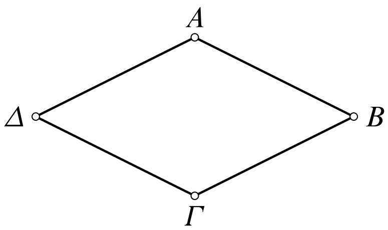


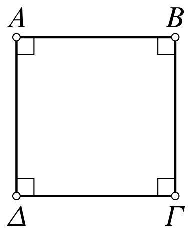
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΡΟΜΒΟΣ

Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει τις διαδοχικές πλευρές του μεταξύ τους ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος συγχρόνως.



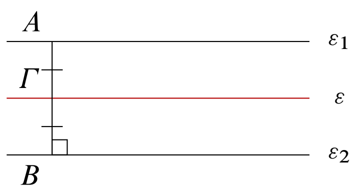


ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ

Μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του ίδιου επιπέδου τα οποία έχουν ίσες αποστάσεις από τις ευθείες αυτές.

$$\varepsilon \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \qquad A\Gamma = B\Gamma$$

Είναι ευθεία γραμμή, παράλληλη με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και βρίσκεται στο μέσο της απόστασής τους.

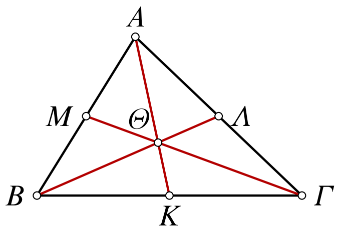


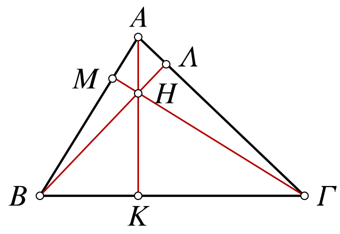
ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους ενός τριγώνου ονομάζεται το σημείο τομής των τριών διαμέσων του τριγώνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ορθόκεντρο ενός τριγώνου ονομάζεται το σημείο τομής των τριών υψών ή των φορέων των υψών του τριγώνου.

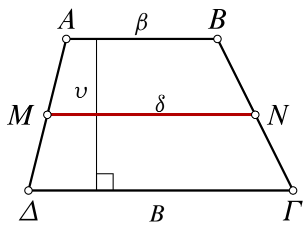


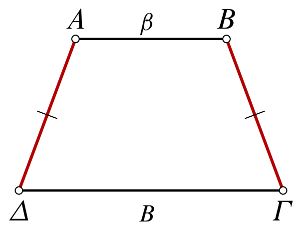


ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΕΤΡΑΔΑ
Ορθοκεντρική τετράδα ονομάζεται ένα σύνολο τεσσάρων σημείων για τα οποία κάθε τρίγωνο με κορυφές τρια απ' αυτά τα σημεία έχει ορθόκεντρο το τέταρτο σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΤΡΑΠΕΖΙΟ - ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ
Τραπέζιο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες.

- Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου ονομάζονται **βάσεις** του. Οι βάσεις ενός τραπεζίου δεν είναι ίσες. Ονομάζονται **μικρή** και **μεγάλη** βάση αντίστοιχα.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου ονομάζεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



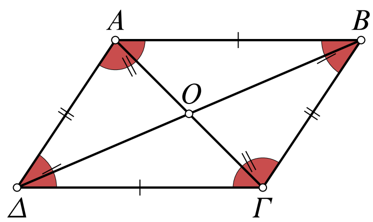


- Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις δύο βάσεις ενός τραπεζίου ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.
- Το τραπέζιο το οποίο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο**. Συμβολίζεται με δ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι :

i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες : $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.
ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
iii. Δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές : $\hat{A} + \hat{B} = 180°$.
iv. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

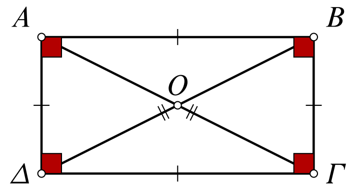
i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
ii. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
iii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.
iv. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
v. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

i. Το κέντρο ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι κέντρο συμμετρίας του.
ii. Εάν δύο ή περισσότερα παράλληλα τμήματα έχουν τα άκρα τους πάνω σε παράλληλες ευθείες τότε είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Σε κάθε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :



i. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες : $A\Gamma = B\Delta$.
ii. Όλες του οι γωνίες είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90°$.
iii. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.

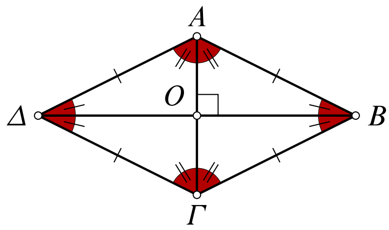
ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.
ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
iii. Έχει 3 ορθές γωνίες.
iv. Έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΟΜΒΟΥ

Σε κάθε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.



i. Οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες : $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$.
ii. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα : $A\Gamma \perp B\Delta$.
iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του :
   - $A\Gamma$ διχ. των $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
   - $B\Delta$ διχ. των $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.
iv. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.

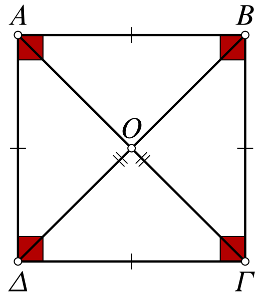
ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΡΟΜΒΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
ii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
iii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει διαγώνιους κάθετες.
iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Κάθε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει όλες τις ιδιότητες του παρραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου :



i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες : $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta$.
ii. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90°$.
iii. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες : $AB \parallel \Gamma\Delta$, $A\Delta \parallel B\Gamma$.
iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες,διχοτομούνται , διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
   - $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$.
   - $A\Gamma$ διχ. των $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
   - $AO = O\Gamma$, $BO = O\Delta$.
   - $B\Delta$ διχ. των $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο εάν είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει και μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Έχει μια ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
ii. Έχει μια ορθή γωνία και διαγώνιους κάθετες.
iii. Έχει μια ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.
iv. Έχει διαγώνιους ίσες και κάθετες.
v. Έχει διαγώνιους ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
vi. Έχει διαγώνιους ίσες και μια απ' αυτές διχοτομεί μια γωνία.

Από τα παραπάνω κριτήρια παρατηρούμε ότι συνδυάζονται δύο ιδιότητες του ορθογωνίου με τρεις ιδιότητες του ρόμβου προκειμένου να οριστούν τα κριτήρια αυτά. Οι συνδυασμοί αυτοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

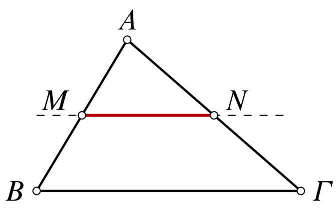
<table>
<tr><th colspan="4">$AB\Gamma\Delta$ Παραλληλόγραμμο και</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><th colspan="2">Ιδιότητες Ορθογωνίου</th></tr>
<tr><td>Μια ορθή γωνία</td><td>Διαγώνιοι ίσες</td></tr>
<tr><th rowspan="3">Ιδιότητες ρόμβου</th><td>Διαδοχικές πλευρές ίσες</td><td>1ο Κριτήριο</td><td>4ο Κριτήριο</td></tr>
<tr><td>Διαγώνιοι κάθετες</td><td>2ο Κριτήριο</td><td>5ο Κριτήριο</td></tr>
<tr><td>Διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία</td><td>3ο Κριτήριο</td><td>6ο Κριτήριο</td></tr>
</table>

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΤΜΗΜΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΕΣΑ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

$$MN \parallel= \frac{B\Gamma}{2}$$

για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με M, N τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΑΠΟ ΜΕΣΟ

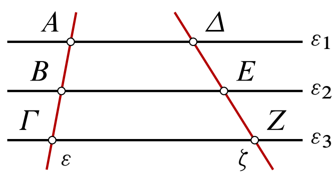
Η ευθεία που διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια δεύτερη πλευρά, θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

$$M \text{ μέσο } AB \text{ και } MN \parallel B\Gamma \Rightarrow N \text{ μέσο } A\Gamma$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια τέμνουσα, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη τέμνουσα ευθεία.

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ και } AB = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = EZ$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το βαρύκεντρο του. Το βαρύκεντρο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου και κάθε απόσταση είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 : ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ
Οι ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές ενός τριγώνου και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, ορίζουν τρίγωνο του οποίου τα μέσα των πλευρών είναι οι κορυφές του αρχικού τριγώνου.

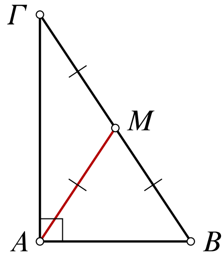
ΘΕΩΡΗΜΑ 15 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις :

i. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, το ορθόκεντρο του τριγώνου.
ii. Οι κορυφές του τριγώνου μαζί με το ορθόκεντρο αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 : ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΑΠΟ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις που αφορούν τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

i. Η διάμεσος που άγεται από την ορθή γωνία προς την υποτείνουσα σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
ii. (Αντίστροφο) Αν σε ένα τρίγωνο, μια διάμεσος ισούται με τη μισή πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πελυρά αυτή.



ΘΕΩΡΗΜΑ 17 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΜΕ ΓΩΝΙΑ 30°
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια οξεία γωνία ισούται με $30°$ αν και μόνο αν η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με τη μισή υποτείνουσα.

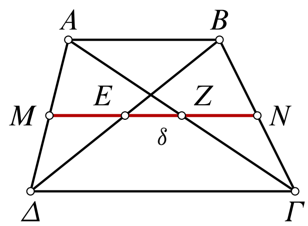
ΘΕΩΡΗΜΑ 18 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΜΕΣΟ
Έστω ένα τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$ και $ΓΔ > AB$ ενώ M, N είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών. Επίσης E, Z ορίζουμε τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ, ΒΔ$. Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος MN του τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις $AB, ΓΔ$ και ίση με το ημιάθροισμά τους.

$$\delta = MN = \frac{AB + ΓΔ}{2}$$

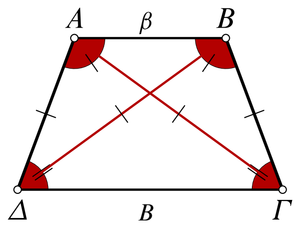
ii. Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ, ΒΔ$ είναι παράλληλο με τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

$$EZ = \frac{ΓΔ - AB}{2}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 19 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ
Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B}$ ή $\hat{Γ} = \hat{Δ}$.
ii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες : $ΑΓ = ΒΔ$.

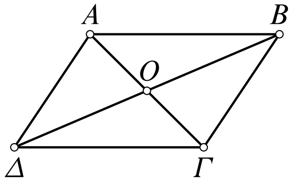
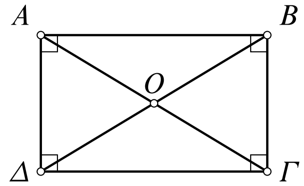
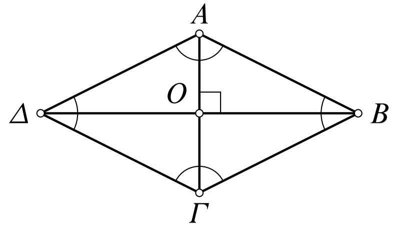
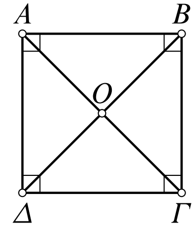


ΘΕΩΡΗΜΑ 20 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ θα είναι ισοσκελές αν ισχύει μια από τις προτάσεις :

i. Οι προσκείμενες γωνίες μιας βάσης είναι ίσες.

ii. Οι διχοτόμοι είναι ίσες.

	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο
Σχήμα				
Ορισμός	Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες.	Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει όλες τις γωνίες του ορθές.	Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει τις διαδοχικές πλευρές του μεταξύ τους ίσες.	Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.
Ιδιότητες	i. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. ii. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. iii. Δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές. iv. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.	i. Οι διαγώνιοι είναι ίσες. ii. Όλες οι γωνίες είναι ίσες. iii. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.	i. Οι διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. ii. Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. iii. Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του. iv. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.	i. Όλες οι πλευρές είναι ίσες. ii. Όλες οι γωνίες είναι ίσες. iii. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. iv. Οι διαγώνιοι είναι ίσες, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Κριτήρια	i. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. ii. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. iii. Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες. iv. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. v. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.	i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία. ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι είναι ίσες. iii. Έχει 3 ορθές γωνίες. iv. Έχει όλες τις γωνίες ίσες.	i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες. ii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. iii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει διαγώνιους κάθετες. iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.	Παραλληλόγραμμο και i. Έχει μια ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. ii. Έχει μια ορθή γωνία και διαγώνιους κάθετες. iii. Έχει μια ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία. iv. Έχει διαγώνιους ίσες και κάθετες. v. Έχει διαγώνιους ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. vi. Έχει διαγώνιους ίσες και μια απ’ αυτές διχοτομεί μια γωνία.