

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Οι εξισώσεις $\eta\mu x = a$, $\sigma\upsilon\nu x = a$, $\epsilon\phi x = a$, $\sigma\phi x = a$

1. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

γ. $\eta\mu x = 1$

β. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

δ. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\sigma\upsilon\nu x = 0$

β. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ. $\sigma\upsilon\nu x = 1$

3. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

γ. $\epsilon\phi x = 1$

β. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

δ. $\epsilon\phi x = 0$

4. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\sigma\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

γ. $\sigma\phi x = 1$

β. $\sigma\phi x = \sqrt{3}$

δ. $\sigma\phi x = 0$

■ Εξισώσεις με αρνητικό αριθμό

5. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

δ. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

β. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ε. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

γ. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

στ. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

δ. $\sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

β. $\sigma\phi x = -1$

ε. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$

γ. $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$

στ. $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$

■ Σύνθετες τριγωνομετρικές εξισώσεις

7. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\eta\mu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\eta\mu(x + \pi) = \frac{1}{2}$

β. $\eta\mu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ. $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$

8. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\sigma\upsilon\nu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

β. $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1}{2}$

γ. $\sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

δ. $\sigma\upsilon\nu(4x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\epsilon\phi(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

β. $\sigma\phi(5x) = 1$

γ. $\sigma\phi(3x + \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{3}$

δ. $\epsilon\phi(3x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\eta\mu(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

β. $\eta\mu(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} - x) = -1$

δ. $\sigma\upsilon\nu(3x - \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\epsilon\phi(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

β. $\sigma\phi(3x - \frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\sigma\phi(\frac{\pi}{4} - 2x) = 1$

δ. $\epsilon\phi(x - \frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}$

■ Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο

12. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α. $\eta\mu(\pi - x) = \frac{1}{2}$

β. $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -1$

γ. $\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\delta. \eta\mu(\pi + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

13. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \epsilon\varphi(\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta. \sigma\varphi(\pi - x) = 0$$

$$\gamma. \sigma\varphi(\pi + x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\delta. \epsilon\varphi(\pi + x) = 1$$

14. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma. \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\delta. \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

■ Τριγωνομετρικές εξισώσεις πολυωνυμικής μορφής

15. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. 2\eta\mu x - 1 = 0$$

$$\beta. 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} = 0$$

$$\gamma. (\eta\mu x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\delta. (2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$$

16. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \epsilon\varphi x - 1 = 0$$

$$\beta. 3\epsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$$

$$\gamma. (\sigma\varphi x - \sqrt{3}) \cdot \sigma\varphi x = 0$$

$$\delta. (2\sigma\varphi x - 2\sqrt{3})(\epsilon\varphi x - \sqrt{3}) = 0$$

17. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = \sqrt{2}$$

$$\gamma. \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu(-x) = \sqrt{3}$$

$$\delta. \sigma\upsilon\nu(2024\pi + x) - \sigma\upsilon\nu x = 1$$

18. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \eta\mu^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\beta. 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$$

$$\gamma. \epsilon\varphi^2 x - 3 = 0$$

$$\delta. \sigma\varphi^2 x = 1$$

19. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. (2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu^2 x - 1) = 0$$

$$\beta. (2\eta\mu x - \sqrt{3})(3 - \epsilon\varphi^2 x) = 0$$

$$\gamma. (1 - \epsilon\varphi^2 x)(\sigma\varphi x - \sqrt{3}) = 0$$

20. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. 4\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 1 = 0$$

$$\beta. 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\gamma. 3\epsilon\varphi^2 x - (3 + \sqrt{3})\epsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$$

21. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. |2\eta\mu x| = 1$$

$$\beta. |\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma. |\sigma\upsilon\nu^2 x - 1| = \frac{1}{4}$$

$$\delta. |\eta\mu x| = |\eta\mu x - 1|$$

22. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. |3\epsilon\varphi x| = \sqrt{3}$$

$$\beta. \left|\frac{1}{2} - \sigma\varphi x\right| = \frac{1}{2}$$

$$\gamma. |\epsilon\varphi^2 x - 2| = 1$$

$$\delta. |\sigma\varphi x| = |\epsilon\varphi x|$$

23. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \eta\mu^4 x = \frac{1}{16}$$

$$\gamma. \eta\mu^6 x = \frac{1}{8}$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu^5 x = 1$$

$$\delta. \sigma\upsilon\nu^7 x = -1$$

24. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\beta. 4\eta\mu^3 x - \eta\mu x = 0$$

$$\gamma. 3\epsilon\varphi^3 x + \epsilon\varphi x = 0$$

$$\delta. \sigma\varphi^4 x = \sigma\varphi^2 x$$

25. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

- α. $2\eta\mu^3x - \eta\mu^2x - 6\eta\mu x + 3 = 0$
 β. $\sigma\upsilon\nu^3x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$
 γ. $\epsilon\varphi^3x - (\sqrt{3} + 1)\epsilon\varphi^2x + \sqrt{3}\epsilon\varphi x = 0$
 δ. $\sigma\varphi^3x - \sigma\varphi^2x + \sigma\varphi x - 1 = 0$

26. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

- α. $\eta\mu^2x + (\sigma\upsilon\nu y - 1)^2 = 0$
 β. $(2\eta\mu x - 1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2y = 0$
 γ. $\epsilon\varphi^4x + (\sigma\varphi^2y - 3)^4 = 0$
 δ. $(2\eta\mu x - 3)^2 + (\epsilon\varphi y - \sqrt{3})^2 = 0$

27. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

- α. $4\eta\mu^2x - 4\eta\mu x + 1 + \sigma\upsilon\nu^2y = 0$
 β. $\eta\mu^2x - 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu^2y - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu y = -4$

■ Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Τρ. ταυτότητες

28. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

- α. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$
 β. $\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2x = 2$
 γ. $\epsilon\varphi x - \sigma\varphi x = 0$
 δ. $\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{\epsilon\varphi^2x}{1+\epsilon\varphi^2x}$

29. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

- α. $\sigma\upsilon\nu^2x + 4\eta\mu x = -2$
 β. $\epsilon\varphi x - 2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3} - 1$
 γ. $\epsilon\varphi x + \sqrt{3}\sigma\varphi x = 4$
 δ. $(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2 = \eta\mu x + 1$

■ Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

30. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\eta\mu x = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
 β. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0, \pi]$
 γ. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 δ. $\eta\mu x = 1, x \in (\pi, 3\pi]$

31. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0, \pi]$
 β. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 γ. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$
 δ. $\sigma\upsilon\nu x = 0, x \in [\pi, 3\pi)$

32. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\epsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [0, \pi]$
 β. $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}, x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$
 γ. $\sigma\varphi x = 1, x \in [0, 2\pi]$
 δ. $\epsilon\varphi x = 0, x \in [3\pi, 4\pi)$

33. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\eta\mu(3x) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
 β. $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi]$
 γ. $\eta\mu(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 δ. $\eta\mu(\frac{x+2\pi}{3}) = 0, x \in [2\pi, 3\pi]$

34. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 β. $\sigma\upsilon\nu(3x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, 2\pi]$
 γ. $\sigma\upsilon\nu(\frac{3x}{4}) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 δ. $\sigma\upsilon\nu(\frac{3x+\pi}{2}) = 1, x \in [\pi, 3\pi]$

35. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- α. $\epsilon\varphi(4x) = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 β. $\sigma\varphi(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}, x \in [0, \pi]$
 γ. $\epsilon\varphi(\frac{3x}{2}) = 1, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 δ. $\sigma\varphi(\frac{2x+\pi}{3}) = \sqrt{3}, x \in [2\pi, 4\pi]$

■ Συστήματα τριγωνομετρικών εξισώσεων

36. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

- α. $\begin{cases} 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu y = 2 \\ 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu y = -1 \end{cases}$
 β. $\begin{cases} \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2y = \frac{1}{4} \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\gamma. \begin{cases} 3\epsilon\phi x - \sigma\phi y = 2 \\ \epsilon\phi x + 2\frac{1}{\sigma\phi y} = -1 \end{cases}$$

37. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η παρακάτω τριγωνομετρική εξίσωση

$$\eta\mu\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

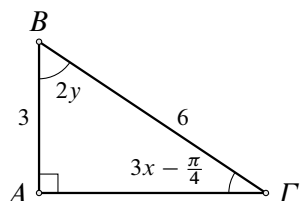
$$\alpha. 4\eta\mu^2(2x) - 3\eta\mu(2x) + 1 = 0$$

$$\beta. 2\sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(2 + \sqrt{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$\gamma. 3\epsilon\phi^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\sqrt{3}\epsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$$

■ Γεωμετρικές εφαρμογές

38. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($\hat{A} = 90^\circ$) του παρακάτω σχήματος έχουμε ότι $AB = 3$ και $B\Gamma = 6$.



Να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών x, γ .

■ Σύνθετες ασκήσεις

39. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. 2\sigma\upsilon\nu(3x) - 1 = 0$$

$$\beta. 3\epsilon\phi(2x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\gamma. 2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$\delta. \sigma\phi(3x - \pi) - 1 = 0$$

40. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. \eta\mu(2x)(\sigma\upsilon\nu(3x) - 1) = 0$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)[\eta\mu(4x) - 1] = 0$$

$$\gamma. \left[\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\right]\sigma\phi(3x) = 0$$

$$\delta. \left[\sigma\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right]\epsilon\phi(2x) = 0$$

41. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

$$\alpha. 4\eta\mu^2(2x) - 1 = 0$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\gamma. 3\epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\delta. \sigma\phi^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

42. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.