

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1

1.1 Σύνολα - Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 ΣΥΝΟΛΟ

Σύνολο ονομάζεται μια συλλογή όμοιων αντικειμένων, τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακριτά μεταξύ τους.

- Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **στοιχεία**.
- Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.

Βασικά σύνολα αριθμών

- Φυσικοί Αριθμοί** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Ακέραιοι Αριθμοί** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Ρητοί Αριθμοί** : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \mid a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$
- Πραγματικοί Αριθμοί** : $\mathbb{R} = \{\text{όλοι οι αριθμοί}\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

Τσα ονομάζονται δύο σύνολα A, B τα οποία έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Ισοδύναμα, τα σύνολα A, B λέγονται ίσα εαν ισχύουν οι σχέσεις :

- Κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B
- Κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

$$A \subseteq B$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

Κενό ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ

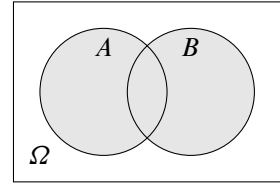
Βασικό ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία που μπορούμε να επιλέξουμε, από τα οποία φτιάχνουμε άλλα σύνολα. Συμβολίζεται με Ω .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ**1. Ένωση**

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A και B . Συμβολίζεται με $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Η ένωση των συνόλων A και B περιέχει τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Τα κοινά στοιχεία αναγράφονται μια φορά.



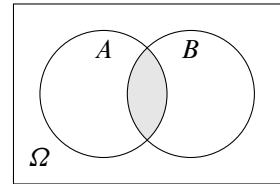
Σχήμα 1.1: Ένωση

2. Τομή

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B . Συμβολίζεται με $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Η τομή των συνόλων A και B περιέχει μόνο τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.



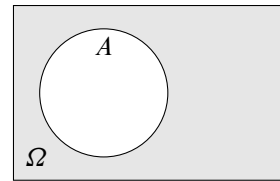
Σχήμα 1.2: Τομή

3. Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία **δεν** ανήκουν στο σύνολο A . Συμβολίζεται με A' .

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Ονομάζεται συμπλήρωμα του A γιατί η ένωσή του με το σύνολο αυτό μας δίνει το βασικό σύνολο Ω .

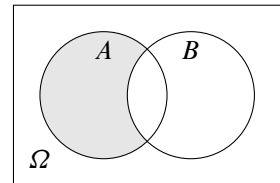


Σχήμα 1.3: Συμπλήρωμα

4. Διαφορά

Διαφορά ενός συνόλου B από ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία ανήκουν μόνο στο σύνολο A , το πρώτο σύνολο της διαφοράς. Συμβολίζεται με $A - B$.

$$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



Σχήμα 1.4: Διαφορά συνόλων

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ

Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί με απόλυτη βεβαιότητα όσες φορές κι αν αυτό επαναληφθεί, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Δειγματικός χώρος ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. Ο δειγματικός αποτελεί βασικό σύνολο.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

Ενδεχόμενο ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία του δειγματικού χώρου ενός πειράματος.

- Κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού του χώρου.
- Συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα π.χ. : A, B, \dots
- Τα ενδεχόμενα που έχουν ένα στοιχείο ονομάζονται **απλά** ενδεχόμενα, ενώ αν περιέχουν περισσότερα στοιχεία ονομάζονται **σύνθετα**.
- Εάν το αποτέλεσμα ενός πειράματος είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου τότε το ενδεχόμενο **πραγματοποιείται**.
- Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις.
- Ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται **βέβαιο** ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο ονομάζεται **αδύνατο** ενδεχόμενο.
- Εάν δύο ενδεχόμενα A, B δεν έχουν κοινά στοιχεία τότε ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή ξένα μεταξύ τους δηλαδή :

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων ορίζονται ακριβώς όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Κάθε ορισμός προσαρμόζεται ώστε να περιγράψει την ισχύ του ενδεχομένου σε κάθε περίπτωση.

1. Ένωση

Ένωση δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η ένωση πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A ή B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ή } x \in B$$

2. Τομή

Τομή δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η τομή πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα A και B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B$$

3. Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα στοιχεία εκείνα τα οποία **δεν** ανήκουν στο σύνολο A . Το συμπλήρωμα πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A .

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

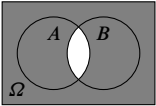
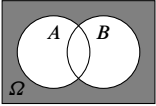
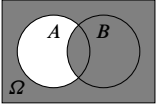
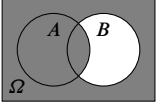
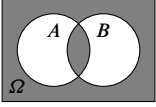
4. Διαφορά

Διαφορά ενός ενδεχομένου A από ένα ενδεχόμενο B ονομάζεται το ενδεχόμενο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο στο ενδεχόμενο A . Η διαφορά πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A .

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \notin B$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ενδεχόμενα, οι πράξεις μεταξύ δύο ενδεχομένων A, B , οι συμβολισμοί τους, λεκτική περιγραφή καθώς και διάγραμμα για κάθε περίπτωση.

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Περιγραφή	Διάγραμμα
$x \in A$	Ενδεχόμενο A	Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται.	
$x \in A'$	Συμπλήρωμα του A	Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται.	
$x \in A \cup B$	Ένωση του A με το B	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .	
$x \in A \cap B$	Τομή του A με το B	Πραγματοποιούνται συνγχρόνως τα ενδ. A και B .	
$x \in A - B$	Διαφορά του B απ' το A	Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A .	
$x \in B - A$	Διαφορά του A απ' το B	Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο B .	
$x \in (A - B) \cup (B - A)$	Ένωση διαφορών	Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα δύο σύνολα (ή μόνο το A ή μόνο το B).	
$A \subseteq B$ $x \in A \Rightarrow x \in B$	A υποσύνολο του B	Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται πραγμ/ση του B .	

$x \in (A \cap B)'$	Συμπλήρωμα τομής	Δεν πραγματοποιούνται συγχρονως τα ενδ. A και B .	
$x \in (A \cup B)'$	Συμπλήρωμα ένωσης	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδ. A και B .	
$x \in (A - B)'$	Συμπλήρωμα διαφοράς	Δεν πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A .	
$x \in (B - A)'$	Συμπλήρωμα διαφοράς	Δεν πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο B .	
$x \in ((A - B) \cup (B - A))'$	Συμπλήρωμα ένωσης διαφορών	Δεν πραγματοποιείται μόνο ένα από τα δύο σύνολα (ή κανένα από τα δύο ή και τα δύο).	

Πίνακας 1.1: Πράξεις ενδεχομένων

1.2 Πιθανότητες

- ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

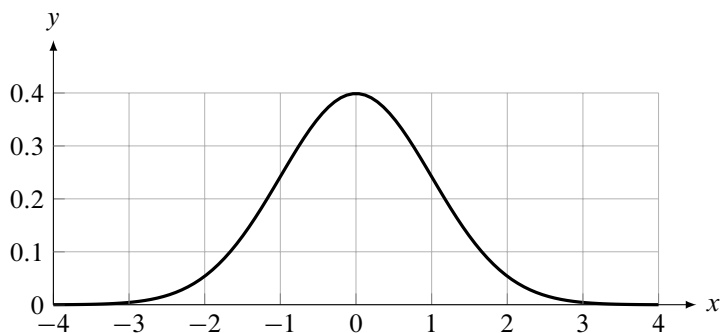
1.3 Στατιστική

- ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14 ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15 ΔΕΙΓΜΑ
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

1.4 Κατανομές

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18 ΚΑΤΑΝΟΜΗ STUDENT-T

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.19 ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2_v

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.20 ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.21 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.22 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.23 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.24 ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ