

27 Ιουλίου 2016

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Θ. ROLLE - Θ.Μ.Τ. - ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A.1** Να αποδειχθεί ότι αν για μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in A$  τότε η αυτή είναι 1-1. **Μονάδες 10**
- A.2** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . **Μονάδες 5**
- A.3** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).
- i. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $f(a) = f(\beta)$  τότε θα υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  ώστε  $f'(x_0) = 0$ .
  - ii. Έστω μια συνάρτηση  $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε να ισχύει  $f(\beta) - f(a) = f'(\xi)(\beta - a)$ .
  - iii. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με γνησίως φθίνουσα παράγωγο. Αν  $f(0) = 0$  τότε θα ισχύει  $f(x) > xf'(x)$  για κάθε  $x > 0$ .
  - iv. Αν  $f, g$  είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με  $f'(x) = g'(x)$  τότε θα ισχύει  $f(x) = g(x)$ .
  - v. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία να είναι παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  και  $a, \beta$  δύο αριθμοί του πεδίου ορισμού της με  $1 < a < \beta$ . Να δειχθεί ότι:

- B.1** Η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[a, \beta]$ . **Μονάδες 10**
- B.2** Ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$\frac{1}{\beta} < \frac{\ln\left(\frac{a}{\beta}\right)}{a - \beta} < \frac{1}{a}$$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ Γ**

- Γ.1** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = 0$  και  $f'(1) = 1$  για την οποία ισχύει η σχέση

$$x^2 f''(x) + = 6x - 2f(x) + 4xf'(x)$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

- Γ.2** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $a, \beta$  δύο σημεία του πεδίου ορισμού της με  $a < \beta$ . Αν η  $f$  έχει ρίζα το  $\beta$  να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε να ισχύει :

$$(x - a)f'(\xi) = f(x)$$

**Μονάδες 8**

- Γ.3** Έστω μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f : (0, +\infty)$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της για την οποία ισχύουν οι σχέσεις  $f(\sqrt{2}) = 0$ ,  $f'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$  και  $f''(x) = e^{f(x)}$  για κάθε  $x > 0$ .

**Δ.1** Ναδειχθεί ότι  $[f'(x)]^2 = 2f''(x)$

**Μονάδες 8**

**Δ.2** Ναδειχθεί ότι  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ.3** Ναδειχθεί ότι  $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2}\right)$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 9**