

# Η έννοια της συνάρτησης

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10 Ιουλίου 2024

### 1 Τιμές συνάρτησης

1.1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  με  $x \in \mathbb{R}$ . Υπολογίστε τις τιμές  $f(2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$  και  $f(f(4))$ .

1.2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  με  $x \neq 1$ . Υπολογίστε τις τιμές  $f(2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$  και  $f(f(2))$ .

1.3. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{5-x}$  με  $x \leq 5$  να βρείτε τις ακόλουθες τιμές:  $f(1)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(3)$  και  $f(7)$ .

1.4. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x \geq 1 \\ x^2 + 2x & , x < 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές  $f(3)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$  και  $f(f(-3))$ .

1.5. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να βρείτε τις τιμές του  $x \in D_f$  έτσι ώστε  $f(x) = 8$ .

1.6. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x > 0 \\ x^2 - 2x & , x \leq 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in D_f$  τέτοιες ώστε να ισχύει  $f(x) = 3$ .

1.7. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

α. Υπολογίστε τις τιμές  $f(-1)$ ,  $f(3)$  και  $f(0)$ .

β. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  έτσι ώστε  $f(x) = 0$ .

γ. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  έτσι ώστε  $f(x) \geq 6$ .

1.8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2x+4} - \sqrt{7-x}$ .

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(-2)$  και  $f(f(0))$ .

γ. Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει  $f(x) = 0$ ;

α.  $f(x) = \frac{2}{x}$

γ.  $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

β.  $f(x) = \frac{x}{x-3}$

δ.  $f(x) = \frac{2x+1}{3x+12}$

2.2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \frac{1}{|x|}$

γ.  $f(x) = \frac{x}{|x+1|-2}$

β.  $f(x) = \frac{4-x}{|x|-2}$

δ.  $f(x) = \frac{3}{|4-x|-3}$

2.3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

γ.  $f(x) = \frac{2-x}{18-2x^2}$

β.  $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

δ.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x}$

2.4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

γ.  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x-12}$

β.  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3x-10}$

δ.  $f(x) = \frac{4}{x^2+x-6}$

2.5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

β.  $f(x) = \frac{2-3x}{x^3-7x+6}$

γ.  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^3-2x^2-5x+6}$

δ.  $f(x) = \frac{e^x}{x^3+x^2-12}$

2.6. Βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \sqrt{x-1}$

γ.  $f(x) = \sqrt{2x-3}$

β.  $f(x) = \sqrt{4-x}$

δ.  $f(x) = \sqrt{9-4x}$

### 2 Πεδίο ορισμού

2.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

2.7. Βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{lll} \alpha. f(x) = \sqrt{|x| - 2} & \delta. f(x) = \sqrt{5 - |2x - 1|} & \beta. f(x) = \sqrt{\ln(x - 1) - 1} \\ \beta. f(x) = \sqrt{3 - |x|} & \epsilon. f(x) = \sqrt{|3x| + 2} & \gamma. f(x) = \sqrt{\log(2 - x)} \\ \gamma. f(x) = \sqrt{|x + 3| - 5} & \sigma\tau. f(x) = \sqrt{|x| + x} & \delta. f(x) = \sqrt{-2 \log(x + 1)} \end{array}$$

2.8. Βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & \delta. f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} \\ \beta. f(x) = \sqrt{4 - x^2} & \epsilon. f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8} \\ \gamma. f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} & \sigma\tau. f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \end{array}$$

2.9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{l} \alpha. f(x) = \sqrt{x^3 + x - 2} \\ \beta. f(x) = \sqrt{8 - x^3} \\ \gamma. f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 2x + 8} \\ \delta. f(x) = \sqrt{x^3 - x} \end{array}$$

2.10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{\frac{1}{x - 3}} & \gamma. f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4 - x}} \\ \beta. f(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{3 - x}} & \delta. f(x) = \sqrt{\frac{2x + 3}{x^2 - 2x}} \end{array}$$

2.11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \sqrt{e^x - 1} & \gamma. f(x) = \sqrt{27 - 3^x} \\ \beta. f(x) = \sqrt{2^x - 4} & \delta. f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8} \end{array}$$

2.12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \ln(x - 1) & \gamma. f(x) = \ln(2x + 5) \\ \beta. f(x) = \ln(3 - x) & \delta. f(x) = \ln(8 - 4x) \end{array}$$

2.13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\begin{array}{l} \alpha. f(x) = \ln(x^2 - 1) \\ \beta. f(x) = \ln(4 - x^2) \\ \gamma. f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3) \\ \delta. f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 12) \\ \epsilon. f(x) = \ln(x^2 + 4x) \\ \sigma\tau. f(x) = \ln(-x^2 + 2x) \end{array}$$

2.14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$\alpha. f(x) = \sqrt{\ln x}$$

2.15. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\begin{array}{l} \alpha. f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x > 2 \\ 3x^2 & , x \leq 2 \end{cases} \\ \beta. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & , 1 \leq x < 3 \\ 2x + 4 & , x \geq 3 \end{cases} \\ \gamma. f(x) = \begin{cases} \eta\mu\pi x & , x < 2 \\ e^x + 1 & , 2 < x \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

### 3 Παράμετροι

3.1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + (\lambda - 1)x + 3$  με  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(2) = 3$ . Να δείξετε ότι  $\lambda = -1$ .

3.2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x - 4$  με  $x \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(\lambda) = \lambda$  με  $\lambda > 0$ .

α. Να δείξετε ότι  $\lambda = 4$ .

β. Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(3)$ ,  $f(-1)$  και  $f(4)$ .

3.3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 4$  με  $x \in \mathbb{R}$  και  $a \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(3) = 5$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = -3$ .

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2$ .

γ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 5$ .

3.4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x + a} - 3$  με  $a \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(4) = 1$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = 5$ .

β. Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

γ. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = -x$ .

### 4 Προβλήματα

4.1. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές  $x$ ,  $y$  και σταθερή περίμετρο  $40 \text{ cm}$ .

α. Να εκφράσετε το πλάτος  $y$  του ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους  $x$ .

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $E$  που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

4.2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές  $x$ ,  $y$  και σταθερό εμβαδόν  $24 \text{ cm}^2$ .

- α. Να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$  του τριγώνου.
- β. Να κατασκευάσετε τη συνάρτηση  $d(x)$  με την οποία δίνεται η υποτείνουσα του τριγώνου.
- 4.3. Σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών, ένας υπάλληλος παίρνει βασικό μισθό 900€ το μήνα. Για κάθε προϊόν που θα καταφέρει να πουλήσει σε έναν πελάτη, παίρνει ένα επιπλέον χρηματικό ποσό της τάξης του 7% επί της τιμής του προϊόντος. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f$  με την οποία δίνεται ο συνολικός μισθός του υπαλλήλου. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
- 4.4.

## 5 Θεωρία

- 5.1. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$ ;
- 5.2. Πως ορίζεται το σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης  $f$ ;
- 5.3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$ .
- β. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$  μπορεί να έχει σύνολο τιμών το  $B = \{-4, 1, 2, 5, 7\}$ .
- γ. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$  μπορεί να έχει σύνολο τιμών το  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- δ. Αν μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών  $f(D_f) = \{3\}$ , τότε είναι σταθερή.
- ε. Έστω δύο ποσά  $x, y$ . Αν συνδέονται με τη σχέση

$$y = \begin{cases} 3x + 4 & , x \geq 0 \\ -2x + 5 & , x \leq 0 \end{cases}$$

τότε η σχέση αυτή ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .