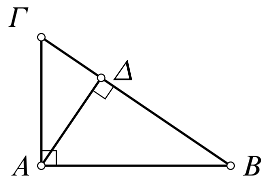
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Θεωρήματα ορθογωνίων τριγώνων.



Θεώρημα προβολής $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$, $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

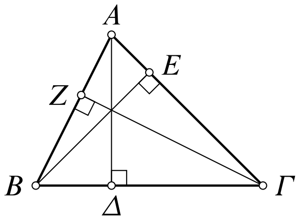
Πυθαγόρειο θεώρημα $\hat{A} = 90° \Rightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

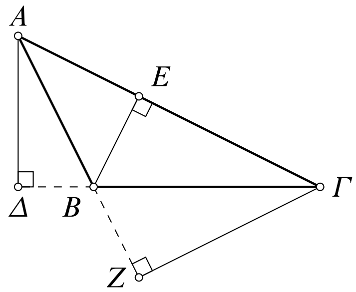
Αντίστροφο Πυθαγορείου $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90°$

Θεώρημα ύψους $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$

2. Γενικευμένο Πυθαγόρειο για οξεία γωνία

$$\hat{A} < 90° \Rightarrow a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AE \quad \text{και} \quad a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AZ$$
$$\hat{B} < 90° \Rightarrow \beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot BZ$$
$$\hat{\Gamma} < 90° \Rightarrow \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a \cdot \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Gamma E$$





3. Γενικευμένο Πυθαγόρειο για αμβλεία γωνία

$$\hat{A} < 90° \Rightarrow a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AE \quad \text{και} \quad a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AZ$$
$$\hat{B} > 90° \Rightarrow \beta^2 = a^2 + \gamma^2 + 2a \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot BZ$$
$$\hat{\Gamma} < 90° \Rightarrow \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a \cdot \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Gamma E$$

4. Είδος τριγώνου ως προς τις γωνίες:

$$a^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} > 90°$$
$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90°$$
$$a^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} < 90°$$

5. Νόμος συνημίτονων:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}$$
$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma\,\text{συν}\hat{B}$$
$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta\,\text{συν}\hat{\Gamma}$$

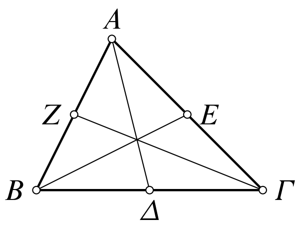
6. Νόμος ημίτονων:

$$\frac{a}{\text{ημ}\hat{A}} = \frac{\beta}{\text{ημ}\hat{B}} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\hat{\Gamma}} = 2R.$$

7. 1ο Θεώρημα διαμέσων:

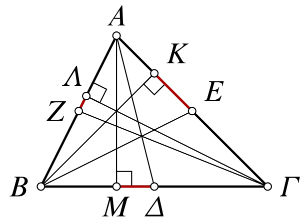
$$a^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \; , \; a^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \; , \; \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - a^2}{4} \; , \; \mu_\beta^2 = \frac{2a^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \; , \; \mu_\gamma^2 = \frac{2a^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$



8. 2ο Θεώρημα Διαμέσων

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma \cdot \mathit{\Lambda} Z$$
$$\alpha^2 - \gamma^2 = 2\beta \cdot KE$$
$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\mathit{\Delta}$$



9. Λόγος εμβαδών με ίσες βάσεις - ίσα ύψη:

$$\text{Ίσες βάσεις} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} \qquad \text{Ίσα ύψη} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

10. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων:

$$AB\mathit{\Gamma} \approx A'B'\mathit{\Gamma}' \Rightarrow \frac{(AB\mathit{\Gamma})}{(A'B'\mathit{\Gamma}')} = \lambda^2 \ \ (\lambda = \text{λόγος ομοιότητας})$$

11. Λόγος εμβαδών τριγώνων με ίσες - παραπληρωματικές γωνίες:

$$\text{Αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \frac{(AB\mathit{\Gamma})}{(A'B'\mathit{\Gamma}')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

---

12. Εμβαδόν τετραγώνου: $E = \alpha^2$.

13. Εμβαδόν ορθογωνίου: $E = \alpha \cdot \beta$.

14. Εμβαδόν παραλληλογράμμου:
$E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$.

15. Εμβαδόν τραπεζίου: $E = \dfrac{(B + \beta)\cdot \upsilon}{2} = \delta \cdot \upsilon$.

16. Εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου: $E = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

17. Εμβαδόν ρόμβου: $E = \dfrac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$.

18. Εμβαδόν τριγώνου:

i. $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$.
ii. $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$.
iii. $E = \tau \cdot \rho$.
iv. $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.
v. $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \text{ημ}\mathit{\Gamma} = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \text{ημ}A = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \text{ημ}B$.

$\left(\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)$

---

19. Στοιχεία κανονικού πολυγώνου:

i. Κεντρική γωνία: $\omega_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$
ii. Γωνία: $\varphi_\nu = 180^\circ - \omega_\nu$
iii. $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
iv. $\alpha_\nu = R \cdot \text{συν}\left(\dfrac{\omega_\nu}{2}\right)$
v. $\lambda_\nu = 2R \cdot \text{ημ}\left(\dfrac{\omega_\nu}{2}\right)$
vi. $\lambda_\nu = 2\alpha_\nu \cdot \text{εφ}\left(\dfrac{\omega_\nu}{2}\right)$
vii. Περίμετρος: $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$
viii. Εμβαδόν: $E_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu \cdot \alpha_\nu$

20. Λόγος στοιχείων κανονικού πολυγώνου

$$\nu - \text{γωνο} \approx \nu - \text{γωνο} \Rightarrow \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{a_\nu}{a'_\nu}$$

21. Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο:

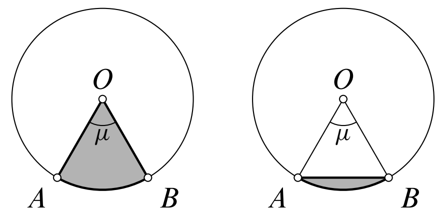
	Ισόπλευρο τρίγωνο $\boldsymbol{\nu = 3}$	**Τετράγωνο** $\boldsymbol{\nu = 4}$	**Κανονικό εξάγωνο** $\boldsymbol{\nu = 6}$
Πλευρά λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
Απόστημα a_ν	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

22. Μήκος Κύκλου: $L = 2\pi R$.

23. Μήκος τόξου: $\ell = \dfrac{\pi R \mu}{180°} = aR$.

24. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$.

25. Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $E = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360°} = \dfrac{1}{2} a R^2$.



26. Εμβαδόν κυκλικού τμήματος:

$$\varepsilon = (\text{τομέα}) - (\text{τριγώνου}) = \underbrace{\frac{\pi R^2 \mu}{360°} - \frac{R^2 \text{ημ}\mu}{2}}_{\text{με μοίρες}} = \underbrace{\frac{R^2}{2}(a - \text{ημ}a)}_{\text{με ακτίνια}}$$