

Άσκηση: Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  και  $g(x) = \sqrt{x-2}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$

Λύση

Για να ορίζεται η  $f$  πρέπει  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  άρα  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$   
ενώ για τη  $g$  πρέπει  $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$  άρα  $D_g = [2, +\infty)$

Η συνάρτηση  $g \circ f$  έχει

- τύπος  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-2} = \sqrt{\frac{1}{x-1}-2}$

- πεδίο ορισμού:  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$

- $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$

- $f(x) \in D_g \Rightarrow \frac{1}{x-1} \in [2, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-2x+2}{x-1} = \frac{3-2x}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3-2x)(x-1) \geq 0 \text{ και } x \neq 1$$

Εστω  $\bullet 3-2x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$\bullet x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3-2x$	+	+	0	-
$x-1$	-	0	+	+
Πιν.ομ.	-	0	+	-

άρα  $x \in (1, \frac{3}{2}]$

Άρα  $D_{g \circ f} = (1, \frac{3}{2}]$