ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23 Απριλίου 2020

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Αποδείξεις Θεωρημάτων

ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

Θεώρημα 1 : Γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x;\hat{O}y'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη. Θα ισχύει γι αυτήν ότι

$$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $M(a, \beta)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε

$$f(a) = \beta \Rightarrow a = f^{-1}(\beta)$$

κάτι που σημαίνει ότι το σημείο $M'(\beta, a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία όμως M και M' είναι συμμετρικά ως προς της ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x;\hat{O}y'$. Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.

Θεώρημα 2 : Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης - Σελ. 167

Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x) = P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1x + a_0\right) = \\ &= \lim_{x\to x_0} a_\nu x^\nu + \lim_{x\to x_0} a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_1x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\ &= a_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + a_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\ &= a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0 = P(x_0)\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Θεώρημα 3 : Όριο ρητής συνάρτησης - Σελ. 167

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι μια ρητή συνάρτηση και $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Q(x_0) \neq 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Θεώρημα 4 : Διατύπωση 1 Θεώρημα Bolzano - Σελ. 192

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i. Θεώρημα

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

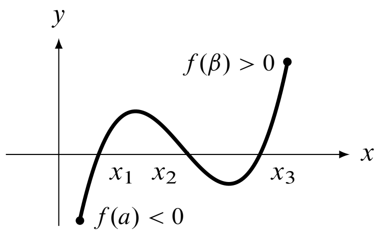
α. η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και

β. $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$.

ii. Γεωμετρική ερμηνεία

Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ η συνθήκη $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ σημαίνει ότι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f, λόγω της συνέχειας, θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.



Θεώρημα 5 : Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών - Σελ. 194

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

i. η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και

ii. $f(a) \neq f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a), f(\beta)$ να ισχύει $f(x_0) = \eta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ με $x \in [a, \beta]$ και η είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$[1]. Γι αυτήν θα ισχύει ότι:

i. είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και επιπλέον
ii. $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ άρα παίρνουμε $g(a) \cdot g(\beta) < 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta$$

Θεώρημα 6 : Παραγωγίσιμη ⇒ Συνεχής - Σελ. 217

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow \\ \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα 7 : Παράγωγος σταθερής συνάρτησης. - Σελ 223

Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω $f(x) = c$ μια σταθερή συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως παίρνοντας το όριο της παραγώγου θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Άρα προκύπτει ότι $(c)' = 0$.

Θεώρημα 8 : Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης. - Σελ. 223

Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$.

[1] Μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε $f(\beta) < \eta < f(a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως η παράγωγος της f στο x_0 θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Έτσι για κάθε x θα ισχύει ότι $(x)' = 1$.

Θεώρημα 9 : Παράγωγος δύναμης - Σελ. 224

Να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right)}{x - x_0} =$$
$$= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της παραγώγου θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right) =$$
$$= x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \ldots + x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} = \nu \cdot x_0^{\nu-1}$$

Έτσι η παράγωγος της f, για κάθε $x \in D_f$ θα είναι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Θεώρημα 10 : Παράγωγος άρρητης συνάρτησης. - Σελ. 224

Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Άρα για την παράγωγο θα έχουμε ότι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ θα ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θεώρημα 11 : Παράγωγος αθροίσματος. - Σελ. 229

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $S = f + g$ και για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} &= \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

Έτσι για την παράγωγο της συνάρτησης S θα έχουμε ότι:

$$S'(x_0) = (f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης $f+g$ στο x_0 θα είναι η $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

Θεώρημα 12 : Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων - Σελ. 229

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ του γινομένου τριών παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με

$$[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου δύο συναρτήσεων και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}[(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x)]' &= (f(x)\cdot g(x))'\cdot h(x) + (f(x)\cdot g(x))\cdot h'(x) = \\ &= [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x) = \\ &= f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)\end{aligned}$$

Θεώρημα 13 : Παράγωγος δύναμης με αρνητικό εκθέτη - Σελ. 231-232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου δύο συναρτήσεων θα έχουμε για κάθε $x \neq 0$ ότι:

$$f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'\cdot x^\nu - 1\cdot(x^\nu)'}{x^{2\nu}} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

Θεώρημα 14 : Παράγωγος εφαπτομένης - Σελ. 232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | \text{συν}x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$f'(x) = (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \\ = \frac{(\text{ημ}x)' \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Θεώρημα 15 : Παράγωγος συνεφαπτομένης - Σελ. 232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | \text{ημ}x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\text{σφ}x = \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$f'(x) = (\text{σφ}x)' = \left(\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\right)' = \\ = \frac{(\text{συν}x)' \cdot \text{ημ}x - \text{συν}x \cdot (\text{ημ}x)'}{\text{ημ}^2 x} = \frac{-\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x} = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$$

Θεώρημα 16 : Παράγωγος δύναμης με μη ακέραιο εκθέτη - Σελ. 234

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = ax^{a-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Η αρχική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

Οπότε η παράγωγός της θα ισούται με

$$f'(x) = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

Θεώρημα 17 : Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης - Σελ. 234-235

Να αποδείξετε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ ενώ η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι

$$f'(x) = (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

Θεώρημα 18 : Παράγωγος λογαρίθμου - Σελ. 235

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $x > 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln x$ επομένως παίρνουμε $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
ii. Αν $x < 0$ τότε η f γίνεται $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ και άρα η παράγωγός της, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ θα ισούται με
$$f'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Θεώρημα 19 : Θεώρημα Rolle - Σελ. 246

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

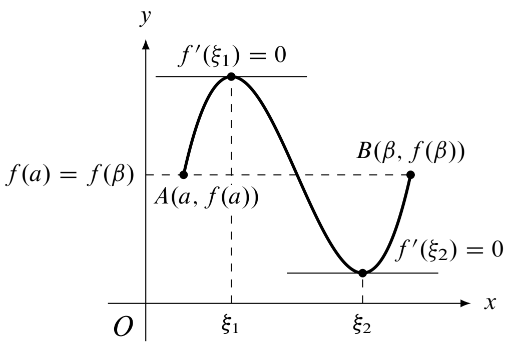
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i. Θεώρημα
Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι

α. συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$,
β. παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και ισχύει
γ. $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

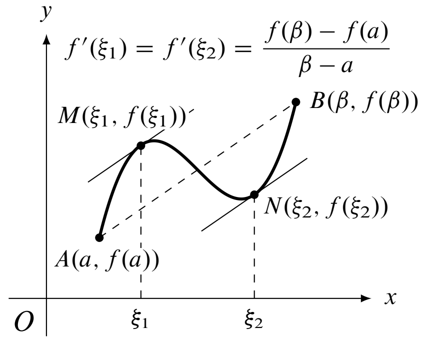
ii. Γεωμετρική ερμηνεία
Αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.



Θεώρημα 20 : Θεώρημα μέσης τιμής - Σελ. 246-247

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



i. Θεώρημα
Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν αυτή είναι

α. συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και

β. παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

ii. Γεωμετρική ερμηνεία
Αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ στα άκρα του διαστήματος.

Θεώρημα 21 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 1 - Σελ. 251

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

i. η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει

ii. $f'(x) = 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

ii. Αν $x_2 \neq x_2$ θεωρούμε ότι είναι $x_1 < x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι

α. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και

β. παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2).

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$ οπότε και $f'(\xi) = 0$. Άρα παίρνουμε ότι

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Ομοίως και για $x_1 > x_2$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα οπότε σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Θεώρημα 22 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 2 - Σελ. 251

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

i. **οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και**
ii. **$f'(x) = g'(x)$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Ορίζουμε τη συνάρτηση $h = f - g$ με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Γι αυτήν θα ισχύει

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ. Έτσι η h θα είναι σταθερή άρα θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

Θεώρημα 23 : Κριτήριο μονοτονίας συνάρτησης - Σελ. 253

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

i. **αν ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
ii. **αν ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Εργαζόμαστε για την περίπτωση $f'(x) > 0$ και ομοίως αποδεικνύεται και για $f'(x) < 0$. Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι

i. η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και
ii. παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2)

οπότε θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ άρα προκύπτει

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \xRightarrow{x_1 < x_2} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

Θεώρημα 24 : Θεώρημα Fermat - Σελ. 260

Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat:
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

i. x_0 είναι ένα *εσωτερικό* σημείο του Δ

ii. η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και

iii. είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Θα υπάρχει έτσι ένας θετικός αριθμός $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$ τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \tag{1}$$

ii. Αν $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$ τότε παίρνουμε ομοίως ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $f'(x_0) = 0$. Εργαζόμαστε αναλόγως και για την περίπτωση όπου η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Θεώρημα 25 : Κριτήριο τοπικών ακρότατων - Σελ. 262

Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι

i. αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

ii. αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

iii. αν η f' διατηρεί το πρόσημό της σε κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i. Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0]$. Σύμφωνα με το κριτήριο μονοτονίας η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι για κάθε $x \in (a, x_0]$ θα ισχύει

$$x \leq x_0 \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Επίσης από το γεγονός ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ παίρνουμε ότι f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Άρα προκύπτει

$$x \geq x_0 \overset{f \searrow}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in (a, \beta)$ παίρνουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

ii. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

iii. Θεωρούμε ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Έτσι η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ οπότε

$$\text{για } x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα (a, β). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

β. Ομοίως αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει επίσης $f(x_1) < f(x_2)$.

γ. Τέλος αποδείξαμε προηγουμένως ότι $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα (a, β). Εργαζόμαστε αναλόγως και για $f'(x) < 0$.

Πηγές:

1. https://mathkanavis.blogspot.com
2. Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου, Οδηγός προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις - Συλλογικό Έργο - Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική - 2016
lysari team