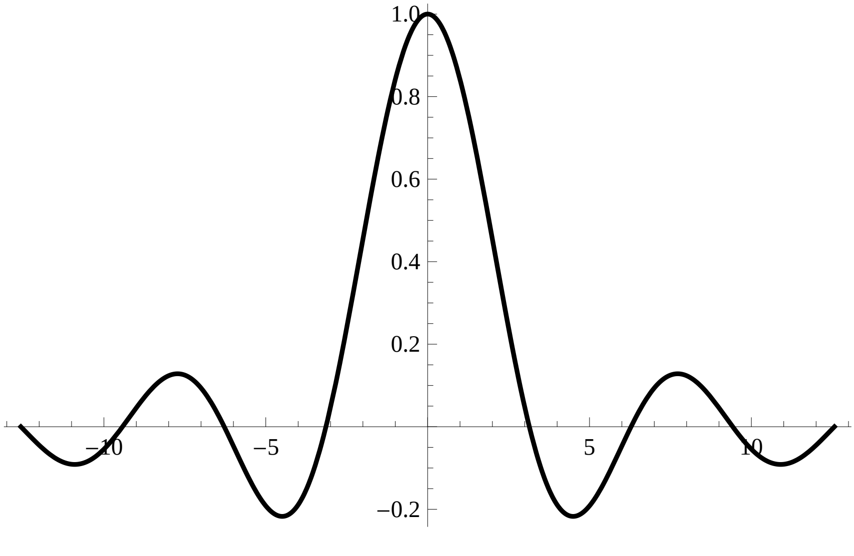
Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

# ΣΧΟΛΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΛΥΚΕΙΟΥ

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$




ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

**ΣΧΟΛΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
**Γυμνασίου - Λυκείου**

**Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός**
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ISBN : ...
Εκδόσεις : ...


Φιλολογική Επιμέλεια :
**Μαρία Πρεντουλή** - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :
**Ιωάννα Γραμμένου -** - e-mail : predouli@yahoo.com
**Σπύρος Φρόνιμος**

Εξώφυλλο :
**Δημήτρης Πρεντουλής**

*Στους γονείς μου.*

# Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.

# Περιεχόμενα

## ΜΕΡΟΣ 1 ΓΥΜΝΑΣΙΟ

### Κεφάλαιο 1



### Κεφάλαιο 2

# Κεφάλαιο 3



# ΜΕΡΟΣ 2 ΛΥΚΕΙΟ

# Κεφάλαιο 4



# Κεφάλαιο 5

## Κεφάλαιο 6



## Κεφάλαιο 7



## Κεφάλαιο 8

# Μέρος 1

# ΓΥΜΝΑΣΙΟ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
# Α Γυμνασιου

## 1.1 Αριθμοί

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.1.1 ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Φυσικοί ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν σαν αρχή το 0 και αυξάνονται με βήμα 1 δηλαδή : $0, 1, 2, 3, \ldots$

**ΟΡ. 1.1.2 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ.** Δεκαδικό ονομάζεται το σύστημα αρίθμησης στο οποίο έχουμε σαν βάση τον αριθμό 10. Χρησιμοποιούμε 10 σύμβολα - αριθμούς : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ για να σχηματίσουμε οποιονδήποτε άλλον αριθμό και οι αξίες των ψηφίων σχηματίζονται ανά 10 και ονομάζονται "ΜΟΝΑΔΕΣ, ΔΕΚΑΔΕΣ..." κ.τ.λ.

**ΟΡ. 1.1.3 ΑΡΤΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Άρτιοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν τελευταίο ψηφίο ένα από τα $0, 2, 4, 6, 8$. Οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.

**ΟΡ. 1.1.4 ΠΕΡΙΤΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Περιττοί ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν τελευταίο ψηφίο ένα από τα $1, 3, 5, 7, 9$. Οι περιττοί αριθμοί δεν διαιρούνται με το 2.

**ΟΡ. 1.1.5 ΔΙΑΤΑΞΗ.** Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών που μας επιτρέπει να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Για τη σύγκριση χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$" > " : \text{ μεγαλύτερο} \qquad " < " : \text{ μικρότερο}$$

**ΟΡ. 1.1.6 ΠΡΟΣΘΕΣΗ.** Πρόσθεση ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αροθμούς $a, \beta$ να βρούμε τον αριθμό $a + \beta$ που ονομάζεται **άθροισμα**.

**ΟΡ. 1.1.7 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.** Πολλαπλασιασμός ονομάζεται η πράξη με την οποία μπορούμε από δύο αροθμούς $a, \beta$ να βρούμε τον αριθμό $a \cdot \beta$ που ονομάζεται **γινόμενο**.

**ΟΡ. 1.1.8 ΑΦΑΙΡΕΣΗ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ.** Η αφαίρεση $a-\beta$ και η διαίρεση $a:\beta$ δύο αρθμών $a,\beta$ είναι πράξεις που προκύπτουν από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ονόματα των αριθμών που αποτελούν μια πράξη, τα ονόματα των αποτελεσμάτων και ο συμβολισμός κάθε πράξης.

| Πράξη | Όροι | Αποτέλεσμα | Συμβολισμός |
|---|---|---|---|
| **Πρόσθεση** | Προσθετέοι | Άθροισμα | $a+\beta$ |
| **Αφαίρεση** | Μειωτέος - Αφαιρετέος | Διαφορά | $a-\beta$ |
| **Πολλαπλασιασμός** | Παράγοντες | Γινόμενο | $a\cdot\beta$ |
| **Διαίρεση** | Διαιρετέος : Διαιρέτης | Πηλίκο | $a:\beta$ |

**ΟΡ. 1.1.9 ΔΥΝΑΜΗ.** Δύναμη ενός φυσικού αριθμού $a$ ονομάζεται το γινόμενο πολλών ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με $a^\nu$ όπου $\nu$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\nu\ \text{παράγοντες}}=a^\nu$$

Ο αριθμός $a$ ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός $\nu$ **εκθέτης** της δύναμης.

- Η δύναμη $a^2$ ονομάζεται και $a$ **στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη $a^3$ ονομάζεται και $a$ **στον κύβο**.
- Σε μία αριθμητική παράσταση, η σειρά με την οποία πρέπει να γίνονται οι πράξεις είναι :

  1. Δυνάμεις
  2. Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις
  3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

  Η σειρά αυτή γίνεται πρώτα μέσα στις παρενθέσεις αν υπάρχουν και μετά απ' έξω.

**ΟΡ. 1.1.10 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ.** Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαίρεση δύο αριθμών $\Delta$ (**Διαιρετέος**) και $\delta$ (**διαιρέτης**) η οποία δίνει αριθμούς $\pi$ (**πηλίκο**) που είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης και $\upsilon$ (**υπόλοιπο**).

Οι αριθμοί $\Delta,\delta,\pi,\upsilon$ είναι φυσικοί αριθμοί και ικανοποιούν τη σχέση :

$$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$$

η οποία είναι η **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. Για να είναι μια διαίρεση ευκλείδεια πρέπει να ισχύει $\upsilon < \delta$.
2. Αν σε μια διαίρεση το υπόλοιπο είναι 0 : $\upsilon = 0$ η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** και ισχύει : $\varDelta = \delta \cdot \pi$.
3. Αν έχουμε $\varDelta = \delta$ τότε $\pi = 1$ ενώ αν $\delta = 1$ τότε $\varDelta = \pi$.

**ΟΡ. 1.1.11 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ.** Πολλαπλάσιο ενος αριθμού $a$ είναι ο φυσικός αριθμός που προκύπτει από πολλαπλασιασμό του $a$ με τους φυσικούς αριθμούς.

$$a \text{ πολλαπλάσιο του } \beta \quad : \quad a = \nu \cdot \beta \quad (\nu \text{ φυσικός αριθμός})$$

Ένας αριθμός $a$ λέμε οτι **διαιρεί** έναν άλλον $\beta$ όταν ο $\beta$ είναι πολλαπλάσιο του $a$. Αν γίνει δηλαδή η διαίρεση $\beta : a$ έχουμε υπόλοιπο 0.

**ΟΡ. 1.1.12 ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ.** Διαιρέτης ενός αριθμου $\beta$ ονομάζεται ένας αριθμός $a$ ο οποίος διαιρεί τον $\beta$.

**ΟΡ. 1.1.13 Ε.Κ.Π.** Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο από δύο ή περισσότερους αριθμούς ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο τους.

**ΟΡ. 1.1.14 Μ.Κ.Δ.** Μέγιστος κοινός διαιρέτης από δύο ή περισσότερους αριθμούς ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.

**ΟΡ. 1.1.15 ΠΡΩΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Πρώτος ονομάζεται ένας αριθμός που διαιρείται **μόνο** με τον εαυτό του και το 1.
Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός λέγεται **σύνθετος**.

**ΟΡ. 1.1.16 ΠΡΩΤΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ.** Πρώτοι μεταξύ τους ονομάζονται δύο αριθμοί $a$ και $\beta$ για τους οποίους ισχύει $M.K.\varDelta(a, \beta) = 1$.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

**Θ. 1.1.1 ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ.** Με τους παρακάτω κανόνες εξετάζουμε αν ένας αριθμός διαιρείται με καθένα από τα παρακάτω νούμερα.

| Αριθμός | Κανόνας |
|---|---|
| **Κανόνας του 2** | Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι ένα από τα 0,2,4,6,8. |
| **Κανόνας του 3 (του 9)** | Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 (με το 9) αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3 (του 9). |
| **Κανόνας του 5** | Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5. |
| **Κανόνας του 10** | Ένας αριθμός διαιρείται με το 10 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0. |
| **Κανόνας του 4 (του 25)** | Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 (το 25) αν το τελευταίο διψήφιο μέρος του είναι πολλαπλάσιο του 4 (του 25). |

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

**Μ. 1.1.1 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ.** Για να εξετάσουμε αν μια σχέση της μορφής $\Delta = \alpha \cdot \beta + \upsilon$ παριστάνει ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης :

- Διακρίνουμε περιπτώσεις για το ποιός από τους αριθμούς $\alpha, \beta$ είναι ο διαιρέτης.
- Εξετάζουμε αν ισχύει η σχέση $\upsilon < \delta$.

**Μ. 1.1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ.** Για να αναλύσουμε ένα σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

1. Ξεκινάμε διαιρόντας τον με τον πρώτο σε σειρά πρώτο αριθμό που τον διαιρεί.
2. Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφουμε κάτω από τον αριθμό και εξετάζουμε αν το αποτέλεσμα αυτό διαιρείται ξανά με τον πρώτο αριθμό που επιλέξαμε. Αν όχι επιλέγουμε τον επόμενο πρώτο αριθμό που διαιρεί το αποτέλεσμα.
3. Συνεχίζουμε τη διαδικασία ώσπου να προκύψει τελικό πηλίκο ο αριθμός 1.
4. Ο αριθμός είναι ίσος με το γινόμενο των πρώτων παραγόντων που χρησιμοποιήσαμε στη διαδικασία αυτή. Τους ίσους παράγοντες τους μαζεύουμε σαν δύναμη.

**Μ. 1.1.3 ΕΥΡΕΣΗ Ε.Κ.Π ΚΑΙ Μ.Κ.Δ.** Για να υπολογίσουμε το Ε.Κ.Π. ή τον Μ.Κ.Δ δύο ή περισσότερων αριθμών

1. Αναλύουμε όλους τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
2. 
   $\alpha$. Για το Ε.Κ.Π. επιλέγουμε **κοινούς και μη κοινούς παράγοντες** από όλους τους αριθμούς τον καθένα στο **μεγαλύτερο** εκθέτη.

   $\beta$. Για το Μ.Κ.Δ. επιλέγουμε **μόνο τους κοινούς παράγοντες** από όλους τους αριθμούς τον καθένα στο **μικρότερο** εκθέτη.

# 1.2 Κλάσματα

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.2.1 ΚΛΑΣΜΑ.** Κλάσμα ονομάζεται ένας αριθμός της μορφής $\frac{a}{\beta}$, όπου $a$, $\beta$ φυσικοί αριθμοί.

- Με το κλάσμα εκφράζουμε ένα μέρος μιας ποσότητας.
- Ο αριθμός $a$ ονομάζεται **αριθμητής** ενώ ο $\beta$ **παρονομαστής** του κλάσματος.
- Το κλάσμα σαν πράξη είναι διαίρεση.
- Ο παρονομαστής $\beta$ του κλάσματος δεν πρέπει να είναι $0$ : $\beta \neq 0$.

**ΟΡ. 1.2.2 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ.** Κλασματική μονάδα ονομάζεται το κλάσμα που έχει αριθμητή το $1$ : $\frac{1}{\nu}$.

**ΟΡ. 1.2.3 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ.** Δεκαδικό ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο έχει ως παρονομαστή μια δύναμη του 10.

$$\frac{1}{10} \quad , \quad \frac{1}{100} \quad , \quad \frac{1}{1000} \quad \text{και γενικά } \frac{1}{10^{\nu}}$$

**ΟΡ. 1.2.4 ΙΣΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.** Ίσα ονομάζονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που εκφράζουν το ίδιο μέρος μιας ποσότητας.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

**ΟΡ. 1.2.5 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ.** Απλοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία, ένα κλάσμα το μετατρέπουμε σε ένα ισοδύναμό του με μικρότερους όρους, διαιρόντας τους αρχικούς με το $M.K.\Delta$ αριθμητή και παρονομαστή.

**ΟΡ. 1.2.6 ΑΝΑΓΩΓΟ ΚΛΑΣΜΑ.** Ανάγωγο λέγεται ένα κλάσμα του οποίου ο $M.K.\Delta.$ αριθμητή και παρονομαστή είναι 1. Ένα ανάγωγο κλάσμα δεν απλοποιείται.

$$\frac{a}{\beta} \text{ ανάγωγο } \Leftrightarrow M.K.\Delta.(a, \beta) = 1$$

**ΟΡ. 1.2.7 ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.** Ομώνυμα λέγονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

**ΟΡ. 1.2.8 ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.** Ετερώνυμα λέγονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

**ΟΡ. 1.2.9 ΜΕΙΚΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Μεικτός ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος είναι άθροισμα ενός ακεραίου και ενός κλάσματος **μικρότερο** της μονάδας.

$$a + \frac{\beta}{\gamma} = a\frac{\beta}{\gamma} \quad \text{όπου} \quad \frac{\beta}{\gamma} < 1$$

Το άθροισμα αυτό μετατρέπεται σε μεικτό παραλείποντας το σύμβολο της πρόσθεσης.

**ΟΡ. 1.2.10 ΣΥΝΘΕΤΟ ΚΛΑΣΜΑ.** Σύνθετο ονομάζεται ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον από τους δύο όρους του είναι κλάσμα.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

**Θ. 1.2.1 ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ.** Δύο κλάσματα είνα ίσα αν και μόνο αν τα "χιαστί" γινομενά τους είναι ίσα.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

**Θ. 1.2.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟ 1.** Για τη σύγκριση ενός κλάσματος $\frac{a}{\beta}$ με τον αριθμό 1 έχουμε

- Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.
- Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.
- Αν σε ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

$$a < \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} < 1 \quad , \quad a > \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} > 1 \quad \text{και} \quad a = \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} = 1$$

**Θ. 1.2.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.** Για τη σύγκριση κλασμάτων μεταξύ τους έχουμε

- Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο αριθμητή.
- Αν δύο κλάσματα έχουν κοινό αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

- Για να συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και τα συγκρίνουμε όπως στην πρώτη περίπτωση.

$$a < \beta \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma} \quad , \quad a < \beta \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} > \frac{\gamma}{\beta}$$

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

**Μ. 1.2.1 ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.** Έχοντας ένα κλάσμα για να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο του

1. Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον **ίδιο** αριθμό.
2. Διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον **ίδιο** αριθμό.

**Μ. 1.2.2 ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.** Για να μετατρέψουμε δύο ή περισσότερα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα

1. Βρίσκουμε το $E.K.\Pi.$ των παρονομαστων.
2. Διαιρούμε το $E.K.\Pi.$ με κάθε παρονομαστή ξεχωριστά.
3. Το αποτέλεσμα κάθε διαίρεσης (καπελάκι) το πολλάπλασιάζουμε και με τους δύο όρους του κλάσματος.

**Μ. 1.2.3 ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.** Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε ομόνυμα και κάνουμε τις πράξεις με τους αριθμητές.

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a+\beta}{\gamma}$$

**Μ. 1.2.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΕΙΚΤΟΥ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ.** Για να μετατρέψουμε ένα μεικτό αριθμό σε κλάσμα

1. Εμφανίζουμε το σύμβολο της πρόσθεσης ανάμεσα στον ακέραιο και το κλάσμα
2. Κάνουμε τους δύο αριθμούς, ομώνυμα κλάσματα και τα προσθέτουμε

**Μ. 1.2.5 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΕΙΚΤΟ.** Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα, **μεγαλύτερο της μονάδας**, σε μεικτό αριθμό

1. Διαιρούμε με **ευκλείδεια διαίρεση** τον αριθμητή με τον παρονομαστή
2. Αντικαθιστούμε τον αριθμητή του κλάσματος με το $2^o$ μέλος της ευκλείδειας ταυτότητας $(\delta \cdot \pi + \upsilon)$

3. Χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο κλάσματα στο σημείο που βρίσκεται η πρόσθεση και απλοποιούμε το $1^{\text{ο}}$ κλάσμα ώστε να προκύψει ακέραιος αριθμός
4. Παραλείπουμε το σύμβολο της πρόσθεσης ανάμεσα στον ακέραιο και το κλάσμα και προκύπτει ο ζητούμενος μεικτός αριθμός.

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\delta \cdot \pi + \upsilon}{\delta} = \frac{\delta \cdot \pi}{\delta} + \frac{\upsilon}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta} = \pi\frac{\upsilon}{\delta}$$

**Μ. 1.2.6 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.** Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα μεταξύ τους πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο αριθμό με τον αριθμητή του κλάσματος.

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$$

**Μ. 1.2.7 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.** Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε το $2^{\text{ο}}$ κλάσμα και **πολλαπλασιάζουμε** το $1^{\text{ο}}$ με το αντίστροφο του $2^{\text{ου}}$.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

**Μ. 1.2.8 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΠΛΟ.** Ένα σύνθετο κλάσμα είναι ίσο με ένα απλό το οποίο έχει αριθμητή το γινόμενο των άκρων όρων του σύνθετου κλάσματος $(\alpha, \delta)$ και παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων $(\beta, \gamma)$.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

## 1.3 Δεκαδικοί Αριθμοί

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.3.1 ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Δεκαδικός ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος αποτελείται από ακέραιο και δεκαδικό μέρος χωρισμένα με ένα κόμμα που ονομάζεται **υποδιαστολή**.

**ΟΡ. 1.3.2 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.** Δεκαδικό ονομάζεται το μέρος ενός δεκαδικού αριθμού το οποίο βρίσκεται δεξιά από την υποδιαστολή και αποτελείται από εκείνα τα ψηφία που είναι μικρότερα της μονάδας.

Τα ψηφία αυτά προκύπτουν από διαιρέσεις τις μονάδας με δυνάμεις του 10 και ονομάζονται από τα από τα δεκαδικά κλάσματα με την αντίστοιχη δύναμη του 10 : "Δέκατα, Εκατοστά, Χιλιοστά, Δεκάκις Χιλιοστά...".

**ΟΡ. 1.3.3 ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΑΡΙΘΜΟΥ.** Τυποποιημένη ονομάζεται η μορφή $a \cdot 10^{\nu}$ στην οποία μπορεί να γραφτεί οποιοσδήποτε αριθμός ως γινόμενο ενός αριθμού $a$ επί μιας δύναμης του 10.

$$A = a \cdot 10^{\nu} \text{ όπου } 1 < a < 10$$

Ο αριθμός $a$ είναι δεκαδικός αριθμός μικρότερος του 10.

**ΟΡ. 1.3.4 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ.** Μονάδες μέτρησης ονομάζονται τα μεγέθη - ποσότητες τα οποία χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση άλλων ποσοτήτων.

Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται μερικές μονάδες μέτρησης βασικών ποσών.

**ΜΗΚΟΣ**

| Μονάδες Μέτρησης | Συμβολισμός | Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ. |
|---|---|---|
| **Χιλιόμετρο** | $1km$ | $1km = 1000m$ |
| **Μέτρο** | $1m$ | $1m = 10dm = 100cm = 1000mm$ |
| **Δεκατόμετρο** | $1dm$ | $\frac{1}{10}m = 1dm = 10cm = 100mm$ |
| **Εκατοστόμετρο** | $1cm$ | $\frac{1}{100}m = \frac{1}{10}dm = 1cm = 10mm$ |
| **Χιλιοστόμετρο** | $1mm$ | $\frac{1}{1000}m = \frac{1}{100}dm = \frac{1}{10}cm = 1mm$ |

**ΕΜΒΑΔΟΝ**

| Μονάδες Μέτρησης | Συμβολισμός | Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ. |
|---|---|---|
| **Τετρ. Χιλιόμετρο** | $1km^2$ | $1km^2 = 1000$στρ. $= 1000000m^2$ |
| **Στρέμμα** | 1στρέμμα | 1στρ. $= 1000m^2$ |
| **Τετραγωνικό Μέτρο** | $1m^2$ | $1m^2 = 100dm^2 = 10^4cm^2 = 10^6mm^2$ |
| **Τετρ. Δεκατόμετρο** | $1dm^2$ | $\frac{1}{100}m^2 = 1dm^2 = 100cm^2 = 10^4mm^2$ |
| **Τετρ. Εκατοστόμετρο** | $1cm^2$ | $\frac{1}{10^4}m^2 = \frac{1}{100}dm^2 = 1cm^2 = 100mm^2$ |
| **Τετρ. Χιλιοστόμετρο** | $1mm^2$ | $\frac{1}{10^6}m^2 = \frac{1}{10^4}dm^2 = \frac{1}{100}cm^2 = 1mm^2$ |

**ΟΓΚΟΣ**

| Μονάδες Μέτρησης | Συμβολισμός | Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ. |
|---|---|---|
| **Κυβικό Χιλιόμετρο** | $1km^3$ | $1km^3 = 10^9m^2$ |
| **Κυβικό Μέτρο** | $1m^3$ | $1m^3 = 10^3dm^3 = 10^6cm^3 = 10^9mm^3$ |
| **Κυβ. Δεκατόμετρο** | $1dm^3/1l$ | $\frac{1}{10^3}m^3 = 1dm^3 = 10^3cm^3 = 10^6mm^3$ |
| **Κυβ. Εκατοστόμετρο** | $1cm^3/1ml$ | $\frac{1}{10^6}m^3 = \frac{1}{10^3}dm^2 = 1cm^2 = 1000mm^2$ |
| **Κυβ. Χιλιοστόμετρο** | $1mm^3$ | $\frac{1}{10^9}m^3 = \frac{1}{10^6}dm^3 = \frac{1}{10^3}cm^3 = 1mm^3$ |

**ΜΑΖΑ**

| Μονάδες Μέτρησης | Συμβολισμός | Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ. |
|---|---|---|
| **Τόνος** | $1\tau$ | $1\tau = 1000kg$ |
| **Κιλό** | $1kg$ | $\frac{1}{10^3}\tau = 1kg = 1000g = 10^6mg$ |
| **Γραμμάριο** | $1g$ | $\frac{1}{10^6}\tau = \frac{1}{10^3}kg = 1g = 1000mg$ |
| **Χιλιοστόγραμμο** | $1mg$ | $\frac{1}{10^9}\tau = \frac{1}{10^6}kg = \frac{1}{10^3}g = 1mg$ |

**ΧΡΟΝΟΣ**

| Μονάδες Μέτρησης | Συμβολισμός | Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ. |
|---|---|---|
| **Έτος** | 1 έτος | 1έτος = 12μήνες = 52,143εβδ. = 365ημέρες |
| **Μήνας** | 1 μήνας | $\frac{1}{12}$έτη = 1μήνας $\simeq$ 30ημέρες |
| **Εβδομάδα** | 1 εβδομάδα | 1εβδομάδα = 7ημέρες = 168$h$ |
| **Ημέρα** | 1 ημέρα | $\frac{1}{7}$εβδ. = 1ημέρα = 24$h$ = 1440$min$ |
| **Ώρα** | 1$h$ | $\frac{1}{24}$ημέρες $= 1h = 60min = 3600s$ |
| **Λεπτό** | 1$min$ | $\frac{1}{1440}$ημέρες $= \frac{1}{60}h = 1min = 60s$ |
| **Δευτερόλεπτο** | 1$s$ | $\frac{1}{86400}$ημέρες $= \frac{1}{3600}h = \frac{1}{60}min = 1s$ |

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

**Μ. 1.3.1 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ.** Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα γράφουμε το δεκαδικό αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή του κλάσματος γράφουμε τη δύναμη του 10 που έχει εκθέτη το πληθος των δεκαδιών ψηφίων του αριθμού.

**Μ. 1.3.2 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ.** Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό, κάνουμε διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή.

**Μ. 1.3.3 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.** Αν θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία :

1. Επιλέγουμε το ψηφίο το στο οποίο θα γίνει η στρογγυλοποίηση
2. Εξετάζουμε αν το ψηφίο της αμέσως μικρότερης αξίας (το ψηφίο στα δεξιά) είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο - ίσο του 5.
3. Αν το ψηφίο αυτό είναι

   $\alpha$. Μικρότερο του 5, τότε το ψηφίο που θα γίνει η στρογυλλοποίηση παραμένει ίδιο και όλα τα ψηφία μικρότερης αξίας μηδενίζονται.

   $\beta$. Μεγαλύτερο ή ίσο του 5, τότε το ψηφίο που θα γίνει η στρογυλλοποίηση αυξάνεται κατά 1 και όλα τα ψηφία μικρότερης αξίας μηδενίζονται.

**Μ. 1.3.4 ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ.** Η πρόσθεση ή η αφαίρεση δύο δεκαδικούς αριθμους γίνεται όπως ακριβώς και στους ακέραιους αριθμούς, τοποθετώντας τους κάθετα ώστε σε κάθε στήλη να βρήσκονται ψηφία ίσης αξίας και οι υποδιαστολές να είναι η μία κάτω απ΄ την άλλη.

Στην περίπτωση της αφαίρεσης αν οι δύο δεκαδικοί δεν έχουν ίσο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, για αποφυγή λαθών, συμπληρώνουμε τον δεκαδικό που έχει τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία με μηδενικα στο δεξίο μέρος του.

**Μ. 1.3.5 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.** Στον πολλαπλασιασμό δεκαδικών, όπως και στον πολλαπλασιασμό ακεραίων, δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία θα τους τοποθετήσουμε κάθετα.

Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς χωρίς να λάβουμε υποψιν μας την υποδιαστολή.
Το απότελεσμα θα έχει τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα και το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων των δύο αριθμών.

**Μ. 1.3.6 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.** Αν σε μια διαίρεση, ένας τουλάχιστον από τους διαιρετέο και διαιρέτη είναι δεκαδικός αριθμός τότε πολλαπλασιάζουμε και τους δύο αριθμούς με τη δύναμη του 10 που χρειάζεται ώστε να γίνουν και οι δύο ακέραιοι οπότε αναγόμαστε στη διαίρεση ακεραίων.

**Μ. 1.3.7 ΔΥΝΑΜΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.** Για να υπολογίσουμε τη δύναμη $a^{\nu}$ όπου $a$ δεκαδικός, υψώνουμε τον αριθμό στη δύναμη $\nu$ χωρίς να λάβουμε υποψιν μας την υποδιαστολή.

Αν ο δεκαδικός αριθμός έχει σε πλήθος $\mu$ δεκαδικά ψηφία τότε το αποτέλεσμα θα έχει $\nu \cdot \mu$ σε πλήθος δεκαδικά ψηφία.

## 1.4 Εξισώσεις

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.4.1 ΕΞΙΣΩΣΗ.** Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό τον οποίο συχνά συμβολίζουμε με το γράμμα $x$.

$$ax + \beta = 0$$

**ΟΡ. 1.4.2 ΛΥΣΗ Η ΡΙΖΑ ΕΞΙΣΩΣΗΣ.** Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που αν τοποθετήσουμε στη θέση του άγνωστου $x$, επαληθεύει την εξίσωση.

- Αν μια εξίσωση έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται **αόριστη ή ταυτότητα**.
- Αν μια εξίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.

**ΟΡ. 1.4.3 ΕΠΙΛΥΣΗ.** Επίλυση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε τη λύση μιας εξίσωσης.

**ΟΡ. 1.4.4 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ.** Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης αντικαθιστώντας τον στη θέση του άγνωστου $x$.

# 1.5 Ποσοστά

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.5.1 ΠΟΣΟΣΤΟ.** Ποσοστό ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο εκφράζει μέρος μιας ποσότητας.

**ΟΡ. 1.5.2 ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΤΙΣ 100.** Ποσοστό επί τις 100 ονομάζεται ένα κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή το 100.

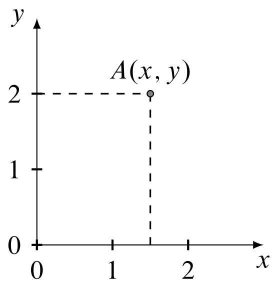
$$\text{Ποσοστό} : \frac{a}{100} = a\%$$

- Συμβολίζεται με $a\%$ όπου $a$ ο αριθμητής του κλάσματος.
- Το ποσοστό τις χιλίοις είναι το κλάσμα $\frac{a}{1000}$ και συμβολίζεται με $a‰$.

# 1.6 Ανάλογα - Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.6.1 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.**
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους ημιάξονες αρίθμησης, με κοινή αρχή, στους οποίους έχουμε ορίσει την ίδια μονάδα μέτρησης.




Το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων λέγεται και **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.**

- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $Ox$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $Oy$.

- Η κοινή αρχή Ο ονομάζεται **αρχή των ημιαξόνων**.

**ΟΡ. 1.6.2 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ.** Διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ονομάζεται κάθε ζευγάρι αριθμών της μορφής $(x, y)$.

Λέγεται διατεταγμένο γιατί οι αριθμοί $x, y$ βρίσκονται σε διάταξη. Μας ενδιαφέρει δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται ο δύο αριθμοί.

**ΟΡ. 1.6.3 ΣΗΜΕΙΟ.** Σημείο στο επίπεδο είναι το σχήμα με το οποίο συμβολίζουμε τη θέση ενός διατεταγμένου ζεύγους αριθμών $(x, y)$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Ένα σημείο ονομάζεται με κεφαλαίο γράμμα για παράδειγμα $A(x, y)$.

**ΟΡ. 1.6.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.** Συντεταγμένες ενός σημείου ονομάζονται οι αριθμοί $x, y$ του ζεύγους αριθμών $(x, y)$ που αντιστοιχεί το σημείο.

- Ο αριθμός $x$ ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.
- Ο αριθμός $y$ ονομάζεται **τεταγμένη** του σημείου.

**ΟΡ. 1.6.5 ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ.** Λόγος δύο όμοιων μεγεθών ονομάζεται το πηλίκο των μέτρων τους και συμβολίζεται με κλάσμα $\frac{a}{\beta}$.

**ΟΡ. 1.6.6 ΑΝΑΛΟΓΙΑ.** Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

**ΟΡ. 1.6.7 ΕΙΚΟΝΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ.** Εικόνα ενος αντικειμένου ονομάζεται ένα αντικείμενο όμοιο με το αρχικό που είναι σμίκρυνση ή μεγένθυση του.

**ΟΡ. 1.6.8 ΚΛΙΜΑΚΑ.** Κλίμακα ονομάζεται ο λόγος της απόστασης δύο σημείων της εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση δύο αντίστοιχων σημείων.

Συνηθέστερη εφαρμογή της κλίμακας είναι στους χάρτες όπου η κλίμακα είναι ο λόγος των αποστάσεων με αριθμητή το 1.

**ΟΡ. 1.6.9 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ.** Ανάλογα ποσά ονομάζονται δύο ποσά $x, y$ που έχουν σταθερό λόγο για αντίστοχες τιμές τους.

$$\frac{y}{x} = a \Leftrightarrow y = a \cdot x \quad \text{όπου } a \text{ σταθερό με } a \neq 0$$

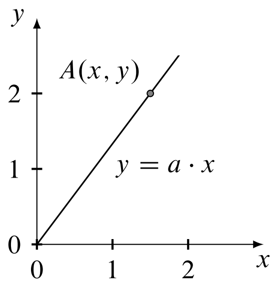
- Ο αριθμός $a$ ονομάζεται συντελεστής αναλογίας.

- Όταν το ποσό $y$ είναι ποσοστό του ποσού $x$ έχουμε τη σχέση

$$y = \frac{a}{100}x \Leftrightarrow y = a\%x$$

**ΟΡ. 1.6.10 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ.**
Γραφική παράσταση δύο ανάλογων ποσών $x, y$ είναι η ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων που αποτελείται από τα σημεία $(x, y)$ που σχηματίζουν τα δύο ανάλογα ποσά.

- Η εξίσωση της ημιευθείας είναι της μορφής $y = a \cdot x$.
- Ένα σημείο ανήκει στην ημιευθεία αυτή αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξισωσή της.

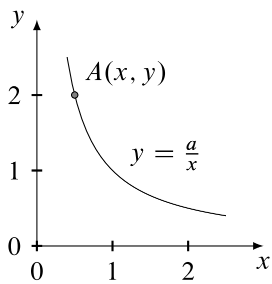



**ΟΡ. 1.6.11 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ.** Αντιστρόφως ανάλογα ονομάζονται δύο ποσά $x, y$ των οποίων το γινόμενο παραμένει σταθερό για αντίστοιχες τιμές τους.

$$y \cdot x = a \Leftrightarrow y = \frac{a}{x} \quad \text{όπου } a \text{ σταθερό με } a \neq 0$$

**ΟΡ. 1.6.12 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ.**
Γραφική παράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών $x, y$ είναι η καμπύλη που ονομάζεται **υπερβολή** και αποτελείται από τα σημεία $(x, y)$ που σχηματίζουν τα δύο ποσά.

- Η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής $y = \frac{a}{x}$.
- Ένα σημείο ανήκει στην ημιευθεία αυτή αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξισωσή της.




# 1.7 Ακέραιοι Αριθμοί

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 1.7.1 ΠΡΟΣΗΜΑ.** Πρόσημα ονομάζονται τα σύμβολα $+$ και $-$ τα οποία γράφονται μπροστά από έναν αριθμό και τον χαρακτιρίζουν ως θετικό ή αρνητικό.

**ΟΡ. 1.7.2 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Θετικοί ονομάζονται οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 0.
Αρνητικοί ονομάζονται αυτοί που είναι μικρότεροι από το 0.

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν αρνητικό.
- Το πρόσημο $+$ για ένα θετικό αριθμό μπορεί να παραλειφθεί ενώ το πρόσημο $-$ γραφεται υποχρεωτικά.

**ΟΡ. 1.7.3 ΟΜΟΣΗΜΟΙ ΚΑΙ ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Ομόσημοι ονομάζονται δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν κοινό πρόσημο.
Ετερόσημοι ονομάζονται δύο αριθμοί με διαφορετικά πρόσημα.

**ΟΡ. 1.7.4 ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.** Ακέραιοι ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους.

**ΟΡ. 1.7.5 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ.** Απόλυτη τιμή ενός αριθμού $a$ ονομάζεται η απόσταση του αριθμού αυτού από το 0 πάνω στην ευθεία των αριθμών.

- Η απόλυτη τιμή του $a$ συμβολίζεται με $|a|$.
- Η απόλυτη τιμή οποιουδήποτε αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός. Παίρνει οποιονδήποτε αριθμό και τον κάνει θετικό.

## 1.8 Βασικά Σχήματα

## 1.9 Συμμετρία

## 1.10 Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
# Β Γυμνασιου

## 2.1 Εξισώσεις - Ανισώσεις

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 2.1.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.** Αριθμητική παράσταση ονομάζεται μια παράσταση η οποία περιέχει αριθμούς με τις βασικές πράξεις ανάμεσά τους.

**ΟΡ. 2.1.2 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.** Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

**ΟΡ. 2.1.3 ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ.** Μεταβλητή ονομάζεται ο άγνωστος αριθμός που βρίσκεται μέσα σε μια εξίσωση και γενικά σε μια αλγεβική παράσταση και γενικά σε μια σχέση.

Συμβολίζεται με ένα γράμμα όπως $x$, $y$, $a$, $\beta$ κ.τ.λ.

**ΟΡ. 2.1.4 ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.** Εξίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ισότητα η οποία περιέχει μια μεταβλητή.

$$ax + \beta = 0$$

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της εξίσωσης δεξιά και αριστερά του $=$.

- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.

- Σε μια εξίσωση μπορούμε να βάλουμε τον ίδιο αριθμό και στα τα δύο μέλη της με οποιαδήποτε πράξη δηλαδή :

$$a=\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a+\gamma=\beta+\gamma \\ a-\gamma=\beta-\gamma \\ a\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma \\ \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma} & \gamma\neq 0 \end{cases}$$

- Αν μια εξίσωση έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται **αόριστη ή ταυτότητα**.
- Αν μια εξίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.

**ΟΡ. 2.1.5 ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ.** Λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει.

**ΟΡ. 2.1.6 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ.** Επαλήθευση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή της εξίσωσης με τον αριθμό αυτό.

**ΟΡ. 2.1.7 ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ.** Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται οι διαδικασία με την οποία απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση ή μια εξίσωση προσθέτοντας τους όμοιους όρους μεταξύ τους.

**ΟΡ. 2.1.8 ΑΝΙΣΩΣΗ.** Ανίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ανισότητα που περιέχει αριθμούς και έναν άγνωστο αριθμό.

$$ax+\beta>0 \quad \text{ή} \quad ax+\beta<0$$

- Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε έναν αριθμό και απ' τα δύο μέλη μιας ανίσωσης δηλαδή :

$$a<\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a+\gamma<\beta+\gamma \\ a-\gamma<\beta-\gamma \end{cases}$$

Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης έχουμε τις εξής περπτώσεις :

$$\text{Αν } \gamma>0 \text{ τότε } a<\beta \Leftrightarrow a\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma<0 \text{ τότε } a<\beta \Leftrightarrow a\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$$

Οταν δηλαδή πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη με **αρνητικό** αριθμό, η φορά της ανίσωσης **αλλάζει**.

- Μια ανίσωση της μορφής $a \leq x \leq \beta$ ονομάζεται **διπλή ανίσωση**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.

## 2.2 Τετραγωνική Ρίζα

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 2.2.1 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ.** Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού $x$ ονομάζεται ο **θετικός** αριθμός $a$ ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αρθμό $x$. Συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \Leftrightarrow a^2 = x \qquad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.
- Για $x \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

**ΟΡ. 2.2.2 ΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Ρητός ονομάζεται οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να γραφτεί στη μρφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ όπου οι $\mu, \nu$ είναι ακέραιοι.

$$\text{Ρητός Αριθμός} : \frac{\mu}{\nu} \qquad \text{όπου } \mu, \nu \text{ ακέραιοι}$$

**ΟΡ. 2.2.3 ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός. Άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες αριθμών που δεν έχουν ακέραιο αποτέλεσμα όπως $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ο αριθμός $\pi = 3{,}14\ldots$ κ.τ.λ.

**ΟΡ. 2.2.4 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.** Πραγματικός ονομάζεται οποιοσδήποτε αριθμός γνωρίζουμε είτε είναι ρητός είτε άρρητος.

## 2.3 Συναρτήσεις

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 2.3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.** Συνάρτηση ονομάζεται μια διαδικασία (σχέση) που συνδέει δύο μεταβλητές $x, y$ με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής $x$ αντιστοιχεί σε **μόνο μια** τιμή της μεταβλητής $y$.

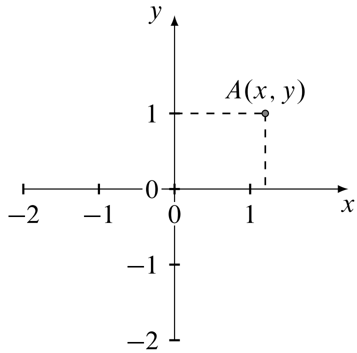
- Η μεταβλητή $x$ ονομάζεται **ανεξάρτητη**.

- Η μεταβλητή $y$ ονομάζεται **εξαρτημένη**.

**ΟΡ. 2.3.2 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ.** Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του ορθοκανονικού σηστήματος συνταταγμένων δίνεται από τον τύπο

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**ΟΡ. 2.3.3 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.**
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σχήμα που αποτελέιται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης, στους οποίους έχουμε ορίσει την ίδια μονάδα μέτρησης.




- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.

**ΟΡ. 2.3.4 ΣΗΜΕΙΟ.** Σημείο στο επίπεδο είναι το σχήμα με το οποίο συμβολίζουμε τη θέση ενός διατεταγμένου ζεύγους αριθμών $(x, y)$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

- Ένα σημείο ονομάζεται με κεφαλαίο γράμμα για παράδειγμα $A(x, y)$.

- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών και αντίστροφα.

**ΟΡ. 2.3.5 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.** Συντεταγμένες ενός σημείου ονομάζονται οι αριθμοί $x$, $y$ του ζεύγους αριθμών $(x, y)$ που αντιστοιχεί το σημείο.

- Ο αριθμός $x$ ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

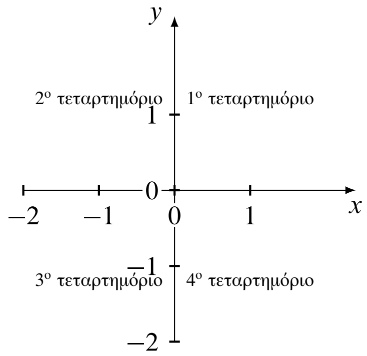
- Ο αριθμός $y$ ονομάζεται **τεταγμένη** του σημείου.

**ΟΡ. 2.3.6 ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ.**

Τεταρτημόριο ονομάζεται το καθένα από τα τέσσερα μέρη του επιπέδου μου ορίζεται από τους 2 κάθετους άξονες συντεταγμένων.

Το $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο είναι το κομμάτι του καρτεσιανού επιπέδου στο οποίο βρίσκονται τα θετικά μέρη των δύο αξόνων.

Τα ονομάζουμε μετρώντας τα από το $1^{\text{ο}}$ με φορά αντίθετη από αυτή του ρολογιού.



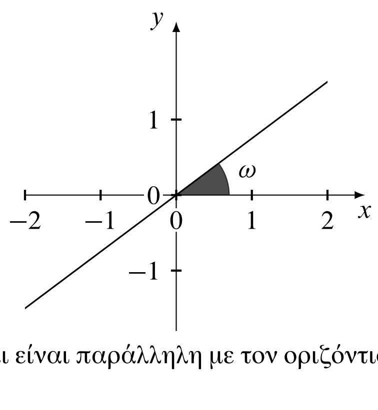

**ΟΡ. 2.3.7 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.** Γραφική παράσταση συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο $(x, y)$ όλων των σημείων του επιπέδου, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν τη σχέση της συνάρτησης.

**ΟΡ. 2.3.8 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax$.** Η συνάρτηση $y = ax$ είναι η συνάρτηση η οποία συνδέει δύο **ανάλογα** ποσά $x$ και $y$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι **ευθεία γραμμή**, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Τα ποσά $x$ και $y$ παίρνουν και αρνητικές τιμές.
- Τα ποσά $x$ και $y$ έχουνα σταθερό λόγο $\dfrac{y}{x} = a$

**ΟΡ. 2.3.9 ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ.**
Κλίση μιας ευθείας, η οποία είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, ονομάζεται ο αριθμός $a$ που λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας και είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευεθεία με τον άξονα $x'x$.

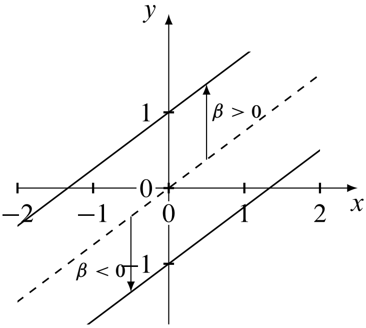
$$a = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$




Η ευθεία $y = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $a = 0$ και είναι παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

**ΟΡ. 2.3.10 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax + \beta$.** Η συνάρτηση $y = ax + \beta$ είναι αυτή που συνδέει γραμμικά τις μεταβλητές $x, y$.

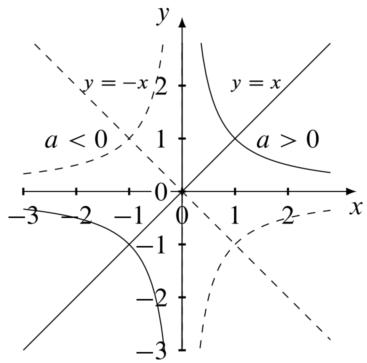
- Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή και είναι παράλληλη με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$.
  Σχεδιάζεται μεταφέροντας παράλληλα την ευθεία της $y = ax$, $\beta$ μονάδες κατακόρυφα στον άξονα $y'y$.
- Τα σημεία τομής της με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $(-\frac{\beta}{a}, 0)$ και $(0, \beta)$ αντίστοιχα.




**ΟΡ. 2.3.11 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.** Η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας είναι η $ax + \beta y = \gamma$ όπου $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

**ΟΡ. 2.3.12 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$ ΜΕ $a \neq 0$.** Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ είναι η συνάρτηση η οποία συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά $x, y$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ ονομάζεται υπερβολή η οποία έχει δύο κλάδους.
- Για $a > 0$ η γραφική παράταση βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.
- Για $a < 0$ η γραφική παράταση βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.
- Η αρχή των αξόνων $O$ είναι **κέντρο συμμετρίας** της γραφικής παράστασης.
- Οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$ είναι άξονες συμμετρίας για $a > 0$ και $a < 0$ αντίστοιχα.




## 2.4 Στατιστική

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 2.4.1 ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ.** Πληθυσμός ονομάζεται το σύνολο όλων των στοιχείων τα οποία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό.

**ΟΡ. 2.4.2 ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ.** Μεταβλητή ονομάζεται το κοινό χαρακτηριστικό των στοιχείων ενός πληθυσμού για το οποίο γίνεται στατιστική μελέτη.

**ΟΡ. 2.4.3 ΔΕΙΓΜΑ.** Δείγμα ονομάζεται ένα μέρος του πληθυσμού το οποίο επιλέγουμε για να γίνει η στατιστική μελέτη.

**ΟΡ. 2.4.4 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΕΙΨΙΑ.** Δειγματολειψία ονομάζεται η διαδικασία με την οποία επιλέγουμε το δείγμα μιας έρευνας μέσα από τα στοιχεία ενός πληθυσμού.

**ΟΡ. 2.4.5 ΜΕΓΕΘΟ" ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ.** Μέγεθος ενός δείγματος ονομάζεται το πληθος των στοιχείων του.

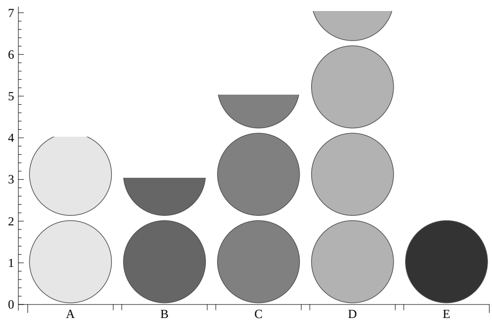
**ΟΡ. 2.4.6 ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟ ΔΕΙΓΜΑ.** Αντιπροσωπευτικό ονομάζεται ένα δείγμα του οποίου τα αποτελέσμα από μια στατιστική μελέτη είναι τέτοια ώστε να μπορούν να γενικευτούν για ολόκληρο τον πληθυσμό.

**ΟΡ. 2.4.7 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ.** Διάγραμμα ονομάζεται το σχήμα με το οποίο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τα απότελέσματα των μετρήσεων μιας δειγματολειψίας.

Στον οριζόντιο ημιάξονα βρίσκονται οι διάφορές κατηγορίες - τιμές της μεταβλητής ενώ στον κατακόρυφο μπορούμε να έχουμε το πλήθος των στοιχείων κάθε κατηγορίας ή το ποσοστό κ.τ.λ.

**Κατηγορίες Διαγραμμάτων**

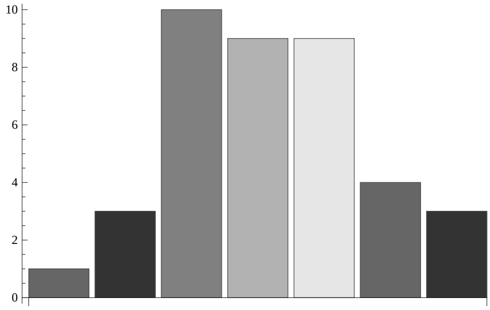
1. **Εικονόγραμμα**




Το εικονόγραμμα, όπως και τα υπόλοιπα γραφήματα αποτελείται από δύο ημιάξονες με τον οριζόντιο ημιάξονα να δέχεται τις διάφορες τιμές της μεταβλητής ενώ στον κατακόρυφο έχουμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε τιμής.
Για να απεικονήσουμε το πλήθος αυτό χρησιμοποιούμε μια εικόνα, που να συνδέεται άμεσα με το αντικείμενο του πειράματος, την οποία τοποθετούμε σε στήλες.

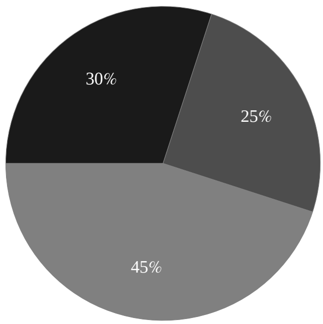
Χρησιμοποιούμε τόσες εικόνες ώστε το ύψος κάθε στήλης να φτάσει μέχρι τον αριθμό που μας δίνει το πληθος εμφανίσεων κάθε τιμής.

2. **Ραβδόγραμμα**




Στο ραβδόγραμμα χρησιμοποιούμε κατακόρυφες ράβδους για να απεικονείσουμε το πλήθος εμφανίσεων κάθε τιμής της μεταβλητής.
Έχουν ίσο πλάτος και ύψος που φτάνει στον αριθμό που μας δίνει το πλήθος, ή στο ποσοστό, ανάλογα με το ποσό που έχουμε θέσει στον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος.
Σ' ένα ραβδόγραμμα οι ράβδοι μπορούν να είναι τοποθετημένες είτε κατακόρυφα είτε οριζόντια.

3. **Κυκλικό Διάγραμμα.**

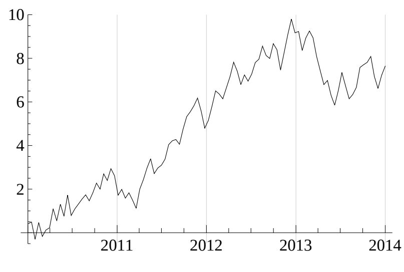



Το κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται με ένα κυκλικό δίσκο, χωρισμένο σε τόσους τομείς, όσες και οι κατηγορίες της μεταβλητής.
Κάθε τομέας καταλαμβάνει ποσοστό του δίσκου ίσο με το ποσοστό που προκύπτει από κάθε κατηγορία.
Το άνοιγμα της γωνίας κάθε τομέα δίνεται από τον τύπο

$$\varphi = \frac{\nu}{N} \cdot 360^\circ$$

όπου $\nu$ είναι η συχνότητα εμφανίσεων κάθε κατηγορίας και $N$ το μέγεθος του δείγματος.

4. **Χρονόγραμμα**




Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται για να παραστήσουμε στατιστικά δεδομένα για μετρήσεις όπου έχουμε ως μεταβλητή το χρόνο.
Σχεδιάζεται με μια συνεχή τεθλασμένη γραμμή που ενώνει όλα τα σημεία του επιπέδου που προέκυψαν από αυτές τις μετρήσεις για κάθε χρονική στιγμή ξεχωριστά.
Μας δίνει τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου ή ποσού και χρησιμοποιείται κυρίως στην οικονομία.

**ΟΡ. 2.4.8 ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ.** Συχνότητα ονομάζεται ο αριθμός που μας δείχνει το πλήθος των εμφανήσεων της τιμής - κατηγορίας μιας μεταβλητής σε μια στατιστική έρευνα.

- Συμβολίζεται με $\nu$.
- Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μας δίνει το μέγεθος του δείγματος.

**ΟΡ. 2.4.9 ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ.** Σχετική συχνότητα ονομάζεται ο αριθμός που μας δείχνει τι ποσοστό καταλαμβάνει η τιμή μιας μεταβλητής σαν μέρος από το σύνολο των μετρήσεων.

- Η σχετική συχνότητα δίνεται από τον τύπο

$$f = \frac{\nu}{N}$$

  όπου $\nu$ είναι η συχνότητα της τιμής και $N$ είναι το σύνολο των παρατηρήσεων δηλαδή το πλήθος του δείγματος.
- Η σχετική συχνότητα μιας τιμής μπορεί να γραφτεί και σαν ποσοστό επί τοις 100.
- Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων μας δίνει τον αριθμό 1 ή ποσοστό 100%.

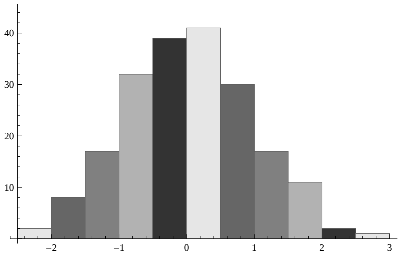
**ΟΡ. 2.4.10 ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ.** Πίνακας κατανομής συχνοτήτων ονομάζεται ο πίνακας όπου οι τιμές, οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων μιας έρευνας.

| **Τιμές** | **Συχνότητες** | **Σχετικές συχνότητες** |
|---|---|---|
| $A$ | $\nu_1$ | $f_1 = \frac{\nu_1}{N}$ |
| $B$ | $\nu_2$ | $f_2 = \frac{\nu_2}{N}$ |
| $\Gamma$ | $\nu_3$ | $f_3 = \frac{\nu_3}{N}$ |
| $\Delta$ | $\nu_1$ | $f_4 = \frac{\nu_4}{N}$ |
| Σύνολο | $N$ | 100% |

**ΟΡ. 2.4.11 ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ.** Ομαδοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία χωρίζουμε σε ομάδες της παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε μια έρευνα, συνήθως σε περιπτώσεις όπου μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων.

- Οι ομάδες στις οποίες χωρίζονται οι μεταβλητές, ονομάζονται **κλάσεις**.
- Το εύρος παρατηρήσεων που έχει κάθε κλάση ονομάζεται **πλάτος**.

**ΟΡ. 2.4.12 ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ.**
Το ιστόγραμμα είναι το γράφημα το οποίο οποίο χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε γραφικά τις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις.




Παριστάνεται με συνεχόμενες ορθογώνιες ράβδους. Στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι ομάδες των παρατηρήσεων ενώ στον κατακόρυφο βρίσκονται οι συχνότητες ή οι σχετικές συχνότητες τους.

**ΟΡ. 2.4.13 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ.** Μέση τιμή ορίζεται ώς το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων προς το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις του δείγματος τότε η μέση τιμή είναι

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{x_1 + x_1 + \ldots + x_\nu}{N}$$

Είναι ο αριθμός που μας δίνει ένα μέσο αποτέλεσμα το οποίο εκπροσωπεί τις παρατηρήσεις ενός δείγματος.

**ΟΡ. 2.4.14 ΔΙΑΜΕΣΟΣ.** Διάμεσος ονομάζεται

- η μεσαία παρατήρηση από το σύνολο των παρατηρήσεων ενός δείγματος αν το πλήθος τους είναι **περιττό**
- η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος είναι **άρτιο**

όταν οι παρατηρήσεις έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά.

**ΟΡ. 2.4.15 ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ.** Κέντρο κλάσης ονομάζεται ο αριθμός που είναι ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των άκρων της κλάσης.

## 2.5 Εμβαδά

## 2.6 Τριγωνομετρία - Διανύσματα

## 2.7 Κύκλος

## 2.8 Στερεά

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Γ Γυμνασιου

## 3.1 Πραγματικοί Αριθμοί

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 3.1.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ.** Τα βασικά σύνολα αριθμών τα οποία συναντάμε είναι τα εξής :

**Σύνολα Αριθμών**

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Ξεκινώντας απ' το 0 οι φυσικοί αριθμοί είναι 0, 1, 2, 3,...
2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετους τους π.χ. :...-2, -1, 0, 1, 2...
3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος : $\frac{a}{\beta}$ όπου α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$.
4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Οποιοσδήποτε αριθμός δεν είναι ρητός π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi$.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.

**ΟΡ. 3.1.2 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.** Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού $a$ ορίζεται να είναι η απόσταση του αριθμού αυτού απο το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

**ΟΡ. 3.1.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.** Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

| Ιδιότητες | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|---|---|---|
| Αντιμεταθετική | $a+\beta=\beta+a$ | $a\cdot\beta=\beta\cdot a$ |
| Προσεταιριστική | $a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$ | $a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$ |
| Ουδέτερο στοιχείο | $a+0=a$<br>$a+(-a)=0$ | $a\cdot 1=a$<br>$a\cdot\frac{1}{a}=1\ ,\ a\neq 0$ |
| Επιμεριστική | $a\cdot(\beta+\gamma)=a\cdot\beta+a\cdot\gamma$ | |

Ισχύουν επίσης :

- $a\cdot 0=0$
- Αν $a\cdot\beta=0\Rightarrow a=0$ ή $\beta=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.

**ΟΡ. 3.1.4 ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.** Δύναμη με **βάση** ένα πραγματικό αριθμό $a$ και **εκθέτη** ένα πραγματικό αριθμό $\nu\geq 2$ λέγεται το γινόμενο ν παραγόντων ισων με $a$ και συμβολίζεται με $a^\nu$.

$$a^\nu=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\nu\text{ - παράγοντες}}.$$

Για κάθε δυναμη ορίζουμε
$a^1=a\qquad a^0=1$ ( με $a\neq 0$) και $a^{-\nu}=\frac{1}{a^\nu}$ ( με $a\neq 0$)

Επίσης για κάθε δυναμη με εκθέτη ακέραιο αριθμό και εφόσον ορίζεται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

| Αρ. | Ιδιότητες | Αρ. | Ιδιότητες |
|---|---|---|---|
| 1 | $a^\nu\cdot a^\mu=a^{\nu+\mu}$ | 4 | $\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{a^\nu}{\beta^\nu}$ |
| 2 | $a^\nu:a^\mu=a^{\nu-\mu}$ | 5 | $(a^\nu)^\mu=a^{\nu\cdot\mu}$ |
| 3 | $(a\cdot\beta)^\nu=a^\nu\cdot\beta^\nu$ | 6 | $\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^\nu$ |

**ΟΡ. 3.1.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ.** Τετραγωνική Ρίζα ενός θετικού αριθμού $x$ ονομάζεται ο θετικός αριθμός $a$ που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό $x$ (υπόριζο) και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x}=a\qquad\text{όπου } x\geq 0 \text{ και } a\geq 0$$

- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.
- $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow a^2 = x$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ για $x \geq 0$.

**ΟΡ. 3.1.6 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.**

1. **Αλγεβρικές παραστάσεις** ονομάζονται οι παραστάσεις που περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές με πράξεις μεταξύ τους.
2. **Ακεραία αλγεβρική παράσταση** καλείται μια αλγεβρική παράσταση η οποία έχει μόνες πράξεις τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση ανάμεσα στις μεταβλητές και με εκθέτες φυσικούς αριθμούς.

**ΟΡ. 3.1.7 ΜΟΝΩΝΥΜΟ.** Μονώνυμο ονομάζεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση που ανάμεσα στις μεταβλητές έχει **μόνο** την πράξη του πολλαπλασιασμού.

**ΟΡ. 3.1.8 ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ - ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ.**

1. Κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται το σύνολο των μεταβλητών του.
2. Συντελεστής ενός μονωνύμου ονομάζεται ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου.

**ΟΡ. 3.1.9 ΒΑΘΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ.**

- Βαθμός ενός μονωνύμου **ως προς κάποια μεταβλητή** του ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.
- Βαθμός ενός μονωνύμου **ως προς όλες τις μεταβλητές του** ονομάζεται το άθροισμα των βαθμών κάθε μεταβλητής.
- Οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται και σταθερά μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού, ενώ το 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

**ΟΡ. 3.1.10 ΟΜΟΙΑ - ΙΣΑ - ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ.**

- **Όμοια** ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
- **Ίσα** ονομάζονται δύο ή περισσότερα **όμοια** μονώνυμα που έχουν ίσους συντελεστές.
- **Αντίθετα** ονομάζονται δύο ή περισσότερα **όμοια** μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

**ΟΡ. 3.1.11 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ.** Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα **ανόμοιων** μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.

- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά** πολυώνυμα ενώ το 0 **μηδενικό** μονώνυμο.
- Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P(x)$, $Q(x)$, $A(x)$, $B(x)$ κτλ. και δίπλα σε μια παρένθεση γράφουμε τη μεταβλητή τους.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά **φθίνουσες** δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη.

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

**ΟΡ. 3.1.12 ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ.** Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία προσθέτουμ εή αφαιρούμε τα όμοια μονώνυμα μιας αλγεβρικής παράστασης.

**ΟΡ. 3.1.13 ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ.** Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

**Αξιοσημείωτες Ταυτότητες**

1. **Άθροισμα στο Τετράγωνο** :
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο Τετράγωνο** :
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον Κύβο** :
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον Κύβο** :
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γιν. Αθροίσματος επί Διαφοράς** :
   $(a+\beta)\cdot(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα Κύβων** :
   $(a+\beta)\cdot\left(a^2 - a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά Κύβων** :
   $(a-\beta)\cdot\left(a^2 + a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

**ΟΡ. 3.1.14 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ.** Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια παράσταση η οποία είναι άθροισμα τη μετατρέπουμε σε γινόμενο παραγόντων.

**Βασικοί Τρόποι Παραγοντοποίησης.**

1. **Κοινός Παράγοντας**. Σ' όλους τους προσθετέους μιας παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας.
2. **Ομαδοποίηση**. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει σε όλους τους όρους μιας σχέσης κάτι κοινό τότε κοιτάζουμε να τα χωρίσουμε σε ομάδες έτσι ώστε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά να υπάρχει κοινός παράγοντας.

3. **Διαφορά Τετραγώνων**. Κάθε σχέση της μορφής $a^2 - \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
$$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$

4. **Διαφορά - Άθροισμα Κύβων**. Κάθε σχέση της μορφής $a^3 - \beta^3$ ή $a^3 + \beta^3$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   i. $a^3 - \beta^3 = (a - \beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right)$
   ii. $a^3 + \beta^3 = (a + \beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right)$

5. **Ανάπτυγμα Τετραγώνου**. Κάθε σχέση της μορφής $a^2 + 2a\beta + \beta^2$ ή $a^2 - 2a\beta + \beta^2$ παραγοντοποιείται ως εξής :
   i. $a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$
   ii. $a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$

6. **Τριώνυμο**. Κάθε σχέση της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ παραγοντοποιείται ως εξής : $x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + a)(x + \beta)$

## 3.2 Εξισώσεις

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 3.2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ 1ου ΒΑΘΜΟΥ.** Εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο, ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή, με μεγαλύτερο εκθέτη το 1. Η εξίσωση 1ου βαθμού είναι της μορφής
$$ax + \beta = 0$$
Για την εξίσωση $ax + \beta = 0$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση η οποία είναι $x = -\dfrac{\beta}{a}$
- Αν $a = 0$ τότε
  - Αν $\beta = 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία ονομάζεται **ταυτότητα** και έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς.
  - Αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία ονομάζεται **αδύνατη** διότι δεν έχει καμία λύση.

**ΟΡ. 3.2.2 ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ.** Εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή, με μεγαλύτερο εκθέτη το 2. Η εξίσωση 2ου βαθμού είναι της μορφής
$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0$$

- Οι αριθμοί $a, \beta, \gamma$ ονομάζονται **συντελεστές της εξίσωσης**.
- Ο συντελεστής $\gamma$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

**ΟΡ. 3.2.3 ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ.** Διακρίνουσα μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού ορίζεται ο αριθμος

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει **2 λύσεις** τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **1 διπλή λύση** τη $x = -\dfrac{\beta}{2a}$.
- Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

**ΟΡ. 3.2.4 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ.** Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση.

**ΟΡ. 3.2.5 ΔΙΑΤΑΞΗ.** Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα των πραγματικών αριθμών με την οποία μπορούν να συγκριθούν και να μπουν σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που μπορούν να μπουν σε κάποια σειρά ή να τοποθετηθούν σε αριθμημένο άξονα ονομάζονται διατεταγμένοι.
- Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι οι "μεγαλύτερο" : $>$, "μικρότερο" : $<$, "μεγαλύτερο ίσο" : $\geq$ και "μικρότερο ίσο" : $\leq$.

Για τη διάταξη των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

- $a - \beta > 0 \Leftrightarrow a > \beta$
- $a - \beta < 0 \Leftrightarrow a < \beta$
- $a - \beta = 0 \Leftrightarrow a = \beta$
- $a^2 \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $a$.
- Για δύο πραγματικούς αριθμούς $a, \beta$ ισχύει $a^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $\beta = 0$ αφού $a^2, \beta^2 \geq 0$.
- Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε έναν αριθμό και απ' τα δύο μέλη μιας ανίσωσης δηλαδή :

$$a < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma < \beta + \gamma \\ a - \gamma < \beta - \gamma \end{cases}$$

Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης έχουμε τις εξής περπτώσεις :

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a < \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a < \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

Οταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη με **αρνητικό** αριθμό, η φορά της ανίσωσης **αλλάζει**.

- Μπορούμε να αντιστρέψουμε τους όρους μιας ανίσωσης αν και μόνο αν είναι **ομόσημοι**.

$$\text{Αν } a, \beta \text{ ομόσημοι τότε } a > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$$

Οταν αντιστρέφουμε τους όρους μιας ανίσωσης τότε **αλλάζει η φορά της**.

Επίσης για τις πράξεις κατα μέλη μεταξύ ανισοτήτων ισχύει :

- Μπορούμε να προσθέσουμε κατα μέλη δύο ανισότητες με την ίδια φορά.
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατα μέλη δύο ανισότητες με την ίδια φορά μόνο άν όλοι οι όροι είναι θετικοί.

$$\begin{array}{c} a > \beta \\ \gamma > \delta \\ \hline a + \gamma > \beta + \delta \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{c} a > \beta \\ \gamma > \delta \\ \hline a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \end{array}$$

$$\text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0$$

**ΟΡ. 3.2.6 ΑΝΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ.** Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού ονομάζεται κάθε ανισότητα που περιέχει μια μεταβλητή, με μεγαλύτερο εκθέτη το 1. Η ανίσωση είναι της μορφής

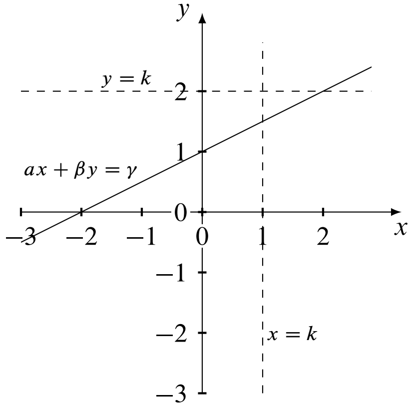
$$ax + \beta > 0$$

## 3.3 Συστήματα Εξισώσεων

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 3.3.1 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax + \beta y = \gamma$.** Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ με $a, \beta \neq 0$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση δύο αγνώστων.

- Κάθε ζευγάρι αριθμών $(x, y)$ το οποίο επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.
- Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $ax + \beta y = \gamma$ είναι ευθεία γραμμή.
- Η εξίσωση $y = k$ παριστάνει ευθεία, παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.
  Για $k = 0$ έχουμε την ευθεία $y = 0$ η οποία είναι ο οριζόντιος άξονας.
- Η εξίσωση $x = k$ παριστάνει ευθεία, παράλληλη με τον κατακόρυφο άξονα $y'y$.
  Για $k = 0$ έχουμε την ευθεία $x = 0$ η οποία είναι ο κατακόρυφος άξονας.




**ΟΡ. 3.3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ 2 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.** Γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους ορίζεται ως ο συνδυασμός δύο γραμμικών εξισώσεων της μορφής $ax + \beta y = \gamma$, με δύο άγνωστους $x, y$, για τις οποίες ψάχνουμε μια λύση που θα τις επαληθεύει ταυτόχρονα.

**ΟΡ. 3.3.3 ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.** Λύση γραμμικού συστήματος ονομάζεται κάθε ζευγάρι αριθμών $(x, y)$ το οποίο επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

**Θ. 3.3.1 ΣΗΜΕΙΟ ΕΥΘΕΙΑΣ.** Αν ένα σημείο $A(x, y)$ ανήκει στην ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της $ax + \beta y = \gamma$ και αντίστροφα.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΊΑ

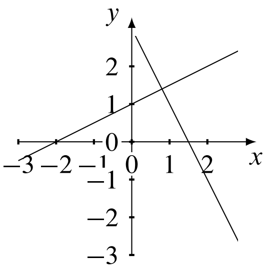
**Μ. 3.3.1 ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.** Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 άγνωστους γραφικά θα χρειαστεί να σχεδιάσουμε **στο ίδιο σύστημα αξόνων** τις γραφφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων, οι οποίες όπως είπαμε είναι ευθείες γραμμές.
Ύστερα, η σχετική θέση των δύο ευθειών θα μας δώσει τη λύση του συστήματος.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

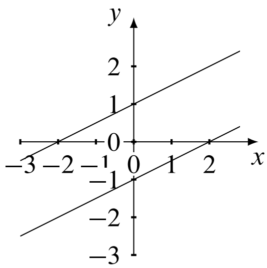
- Εαν οι δύο ευθείες **τέμνονται**, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** η οποία είναι οι συντεταγμένες $(x, y)$ του σημείου τομής τους.

Αυτό ισχύει διότι το σημείο τομής των δύο ευθειών ανήκει και στις δύο ευθείες (ως κοινό σημείο) επομένως επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα.

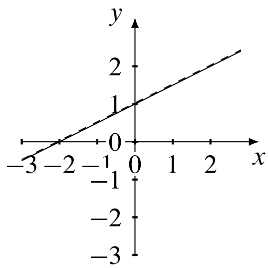
- Εαν οι ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα δεν εχει καμία λύση, άρα είναι αδύνατο, αφού οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Εαν οι ευθείες συμπίπτουν, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και αυτό γιατί οι ευθείες έχεουν άπειρα κοινά σημεία.



Μια λύση



Καμία λύση



Άπειρες λύσεις

# 3.4 Συναρτήσεις

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡ. 3.4.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** $y = ax^2, a \neq 0$. Η συνάρτηση $y = ax^2$

# 3.5 Πιθανότητες

# 3.6 Τρίγωνα

# 3.7 Τριγωνομετρία

# Μέρος 2

# ΛΥΚΕΙΟ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

# 4.8 Βασικα Σχήματα

## ΟΡΙΣΜΟΙ

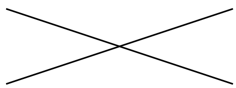
**ΟΡ. 4.8.1 ΣΗΜΕΙΟ.** Σημείο είναι ένα σχήμα που έχει θέση στο επίπεδο ή στο χώρο, αλλά οχι διαστάσεις. Παριστάνεται με τελεία και το συμβολίζουμε με κεφαλαίο γράμμα π.χ. Α,Β,Ο κτλ.

**ΟΡ. 4.8.2 ΓΡΑΜΜΗ.** Γραμμή ονομάζεται το σχημα που προκύπτει από το σύνολο των θέσεων ενός μετακινούμενου σημείου στο επίπεδο ή στο χώρο. Η γραμμή έχει μόνο μια διάσταση, το μήκος.

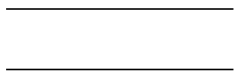
**ΟΡ. 4.8.3 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ.** Επιφάνεια ονομάζεται το σύνολο των σημείων ενός σώματος που ορίζουν το εξωτερικό σχήμα του.

**ΟΡ. 4.8.4 ΕΠΙΠΕΔΟ**. Επίπεδο ονομάζεται μια λεία ομοιόμορφη επιφάνεια. Το επίπεδο έχει δύο διαστάσεις μήκος και πλάτος.

**ΟΡ. 4.8.5 ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ.** Τεμνόμενες ονομάζονται δύο ευθείες που έχουν **ένα** κοινό σημείο. Το κοινό αυτό σημείο ονομάζεται **σημείο τομής**.

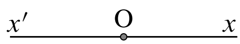


**ΟΡ. 4.8.6 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ.** Παράλληλες λέγονται δύο ή περισσότερες ευθείες του ίδιου επιπέδου, οι οποίες δεν τέμνονται σε κανένα σημείο.

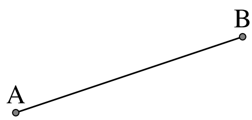


**ΟΡ. 4.8.7 ΦΟΡΕΑΣ.** Φορέας μιας ημιευθείας ή ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία γραμμή φέρει πάνω την ημιευθεία ή το ευθύγραμμο τμήμα.

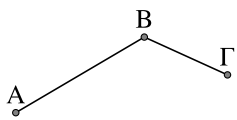
**ΟΡ. 4.8.8 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΕΣ ΗΜΙΕΥΘΕΙΕΣ.** Αντικείμενες ημιευθείες ονομάζονται δυο ημιευθείες με κοινή αρχή που σχηματίζουν ευθεία γραμμή.




**ΟΡ. 4.8.9 ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ.** Ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται το σχήμα που αποτελεί το μέρος μιας ευθείας που ορίζεται από τα δύο άκρα του. Το ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται από τα άκρα του π.χ. ΑΒ.

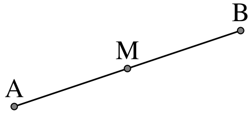



**ΟΡ. 4.8.10 ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ.** Διαδοχικά ονομάζονται δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα που ανά δύο έχουν **ένα** κοινό άκρο και κανένα κοινό σημείο.



**ΟΡ. 4.8.11 ΕΙΚΟΝΑ.** Εικόνα ενός σχήματος ονομάζεται το τελικό σχήμα, το οποίο προκύπτει από το αρχικό με μετατόπιση χωρις να αλλοιωθεί.

**ΟΡ. 4.8.12 ΜΕΣΟ.** Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος, ονομάζεται το εσωτερικό σημείο του, το οποίο το χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.




**ΟΡ. 4.8.13 ΑΘΡΟΙΣΜΑ.** Άθροισμα δύο ή περισσοτέρων διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων, που βρίσκονται στον ίδιο φορέα, ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει αρχη, την αρχή του πρώτου ευθύγραμμου τμήματος και τέλος, το τέλος του τελευταίου. Εάν δεν έχουν τον ίδιο φορέα, τότε τα μετατοπίζουμε κατάλληλα.

**ΟΡ. 4.8.14 ΓΙΝΟΜΕΝΟ.** Γινόμενο ενός ευθυγράμμου τμήματος επί έναν πραγματικό αριθμό ν, ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών ίσων ευθυγράμμων τμημάτων.


$$\Gamma\Delta = \nu \cdot AB$$

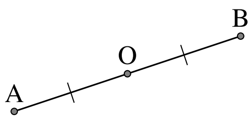
**ΟΡ. 4.8.15 ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΜΗΚΟΥΣ.** Μονάδα μέτρησης μήκους ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση και τη σύγκριση όλων των ευθυγράμμων τμημάτων.

**ΟΡ. 4.8.16 ΜΗΚΟΣ.** Μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές θα χρειαστεί να πολλαπλασιάσουμε τη μονάδα μέτρησης μήκους ώστε να προκύψει το ευθύγραμμο τμήμα.

**ΟΡ. 4.8.17 ΙΣΑ.** Ίσα ονομάζονται δυο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία έχουν το ίδιο μήκος.

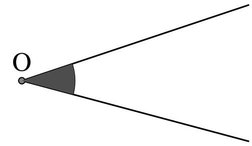
**ΟΡ. 4.8.18 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ** ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει.

**ΟΡ. 4.8.19 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ.** Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο ονομάζεται το σημείο Β που είναι τέτοιο ώστε το κέντρο συμμετρίας Ο να είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που τα ενώνει.




**ΟΡ. 4.8.20 ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ.** Ημιεπίπεδο ονομάζεται το μέρος ενός επιπέδου που χωρίζεται από μια ευθεία γραμμή.

**ΟΡ. 4.8.21 ΚΥΡΤΗ ΓΩΝΙΑ.** Κυρτή γωνία ονομάζεται το σχημα που αποτελειται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή και το κοινό μέρος των ημιεπιπέδων που ορίζουν οι δύο ημιευθείες.
Οι ημιευθείες ονομάζονται **πλευρές** και το κοινό σημείο **κορυφή**.

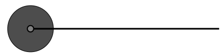



**ΟΡ. 4.8.22 ΜΗ ΚΥΡΤΗ ΓΩΝΙΑ.** Μη κυρτή γωνία ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από το σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία και τις δύο πλευρές.

**ΟΡ. 4.8.23 ΜΗΔΕΝΙΚΗ.** Μηδενική ονόμαζεται μια **κυρτή** γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν. Η μηδενική γωνία έχει μέτρο 0°.

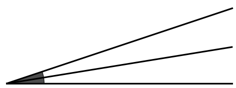


**ΟΡ. 4.8.24 ΠΛΗΡΗΣ ΓΩΝΙΑ.** Πλήρης γωνία ονομάζεται μια **μη κυρτή** γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν. Η πλήρης γωνία έχει μέτρο 360°.

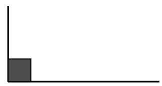


**ΟΡ. 4.8.25 ΕΥΘΕΙΑ ΓΩΝΙΑ.** Ευθεία γωνία ονομάζεται μια γωνία της οποίας οι πλευρές είναι αντικειμενες ημιευθείες. Η ευθεία γωνία έχει μέτρο 180°.

**ΟΡ. 4.8.26 ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ.** Διχοτόμος μιας γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία η οποία χωρίζει τη γωνία σε 2 ίσα μέρη.

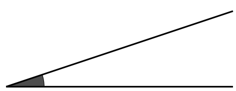


**ΟΡ. 4.8.27 ΟΡΘΗ.** Ορθή ονομάζεται μια γωνία η οποία είναι το μισό μιας ευθείας γωνίας. Η ορθή γωνία έχει μέτρο 90°.

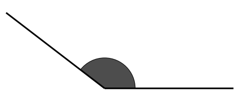


**ΟΡ. 4.8.28 ΚΑΘΕΤΕΣ.** Κάθετες λέγονται δύο ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία.

**ΟΡ. 4.8.29 ΟΞΕΙΑ.** Οξεία ονομάζεται μια γωνία που είναι μικρότερη από μια ορθή. Η οξεία γωνία έχει μέτρο ανάμεσα από 0° και 90°.



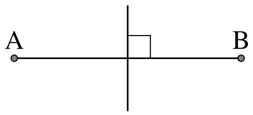
**ΟΡ. 4.8.30 ΑΜΒΛΕΙΑ.** Αμβλεία ονομάζεται μια γωνία που είναι μεγαλύτερη από μια ορθή. Η αμβλεία γωνία έχει μέτρο ανάμεσα από 90° και 180°.



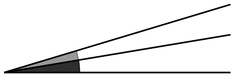
**ΟΡ. 4.8.31 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ.** Απόσταση σημείου από ευθεία ονομάζεται το μήκος του **μοναδικού κάθετου** ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το

σημείο με την ευθεία.

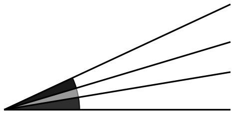
**ΟΡ. 4.8.32 ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ.** Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που διέρχεται κάθετα από το μέσο το του ευθύγραμμου τμήματος.
Η μεσοκάθετος είναι **άξονας συμμετρίας** του και τα άκρα **συμμετρικά**.




**ΟΡ. 4.8.33 ΕΦΕΞΗΣ.** Εφεξής λέγονται **δύο** γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημέιο



**ΟΡ. 4.8.34 ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ.** Διαδοχικές λέγονται **τρεις ή περισσότερες** γωνίες οι οποίες ανά δύο είναι μεταξύ τους εφεξής.

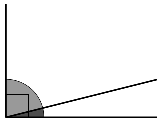


**ΟΡ. 4.8.35 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ ΕΦΕΞΗΣ ΓΩΝΙΩΝ.** Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών ονομάζεται η γωνία που έχει πλευρές τις ημιευθείες που βρίσκονται εκατέρωθεν της κοινής πλευράς.

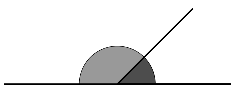
**ΟΡ. 4.8.36 ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΓΩΝΙΩΝ.** Διαφορά δύο γωνιών ονομάζεται το μη κοινό κομμάτι δύο γωνιών που έχουν μετατοπισθεί έτσι ώστε να έχουν κοινή κορυφή και κοινή πρώτη πλευρά. (Η μια θα βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης).

**ΟΡ. 4.8.37 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΦΥΣΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ.** Γινόμενο μιας γωνίας με ένα φυσικό αριθμό $\nu$ ονομάζεται το άθροισμα $\nu$ διαδοχικών ίσων γωνιών με την αρχική.

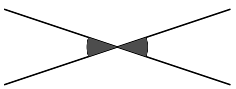
**ΟΡ. 4.8.38 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ.** Συμπλήρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα ίσο με μια ορθή γωνία. Η καθεμία λέγεται **συμπληρωματική** της άλλης.



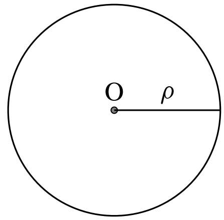
**ΟΡ. 4.8.39 ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ.** Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα ίσο με μια ευθεία γωνία. Η καθεμία λέγεται **παραπληρωματική** της άλλης.



**ΟΡ. 4.8.40 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ.** Κατακορυφήν ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους ανα δύο έχουν κοινό φορέα δηλαδή είναι αντικείμενες ημιευθείες.



**ΟΡ. 4.8.41 ΚΥΚΛΟΣ.** Κύκλος ονομάζεται το σύνολο των σημείων που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο το οποίο λέγεται **κέντρο** του κύκλου.
Η απόσταση αυτή ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου.
Ο κύκλος συμβολίζεται ως εξής π.χ. κύκλος $(O, \rho)$ με **κέντρο** Ο και **ακτίνα** ρ.

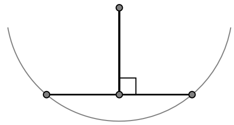


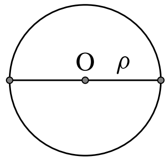

**ΟΡ. 4.8.42 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ.** Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου ή του χώρου με μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
Οι πιο γνωστοί γεωμετρικοί τοποι ειναι η **μεσοκάθετος** ενός ευθύγραμμου τμήματος, η **διχοτόμος** μιας γωνίας και ο **κύκλος**.

**ΟΡ. 4.8.43 ΤΟΞΟ.** Τόξο ενός κύκλου ονομάζεται το μέρος ενός κύκλου που ορίζεται από δύο σημεία του.

**ΟΡ. 4.8.44 ΧΟΡΔΗ.** Χορδή λέγεται το ευθυγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία ενός κύκλου.

**ΟΡ. 4.8.45 ΑΠΟΣΤΗΜΑ.** Απόστημα μιας χορδής ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα του έχει αρχή το κέντρο του κύκλου και πάει **κάθετα** στην χορδή.



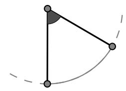



**ΟΡ. 4.8.46 ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ.** Διάμετρος ονομάζεται η μεγαλύτερη χορδή ενός κύκλου η οποία διέρχεται απ΄ το κέντρο του.
Η διάμετρος ενός κύκλου ειναι ίση με δύο φορές την ακτίνα του.

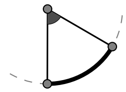
**ΟΡ. 4.8.47 ΑΝΤΙΔΙΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ.** Αντιδιαμετρικά σημεία λέγονται τα άκρα μιας διαμέτρου ενός κύκλου.

**ΟΡ. 4.8.48 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.** Εσωτερικό σημείο του επιπέδου ενός κύκλου λέγεται ένα σημείο του οποίου η απόσταση του από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα.

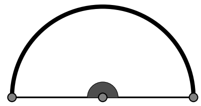
**ΟΡ. 4.8.49 ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.** Εξωτερικό σημείο του επιπέδου ενός κύκλου λέγεται ένα σημείο του οποίου η απόσταση του από το κέντρο του κύκλου ειναι μεγαλύτερη από την ακτίνα.



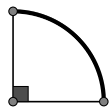
**ΟΡ. 4.8.50 ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ.** Επίκεντρη ονομάζεται μια γωνία που έχει κορυφή το κέντρο ενός κύκλου.



**ΟΡ. 4.8.51 ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΟΞΟ.** Αντίστοιχο τοξο μιας επίκεντρης γωνίας λέγεται το τόξο που ορίζεται από τα σημεία τομής των πλευρών της κυρτής επίκεντρης γωνίας με τον κύκλο.
Λέμε μια επίκεντρη γωνία **βαίνει** στο αντίστοιχο τόξο της.



**ΟΡ. 4.8.52 ΗΜΙΚΥΚΛΙΟ.** Ημικύκλιο λέγεται το τόξο ενός κύκλου που προκύπτει χωρίζοντας τον με τη διάμετρο. Είναι ίσο με $180^\circ$.



**ΟΡ. 4.8.53 ΤΕΤΑΡΤΟΚΥΚΛΙΟ.** ω λέγεται το τόξο του κύκλου που προκύπτει χωριζοντας τον με δύο κάθετες διαμέτρους. Είναι ίσο με $90^\circ$.

**ΟΡ. 4.8.54 ΜΕΣΟ ΤΟΞΟΥ.** Μέσο ενός τόξου λέγεται το σημείο του τόξου που το χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.

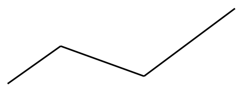
**ΟΡ. 4.8.55 ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΤΟΞΑ.** Διαδοχικά τοξα λέγονται τα τοξα ενός που έχουν ένα κοινό άκρο και κανένα άλλο κοινό σημείο.

**ΟΡ. 4.8.56 Ν-ΟΣΤΟ ΕΝΟΣ ΤΟΞΟΥ.** Ν-οστό ενός τόξου λέγεται το 1 από τα ν ίσα μέρη του τόξου.

**ΟΡ. 4.8.57 ΜΟΙΡΑ.** Μοίρα ονομάζεται το $\frac{1}{360}$ ενός κύκλου και συμβολίζεται με $1^\circ$.

**ΟΡ. 4.8.58 ΜΕΤΡΟ ΤΟΞΟΥ.** Μέτρο ενός τόξου λέγεται ο φυσικός αριθμός που μας δειχνει πόσες φορές χωράει μέσα του το τόξο 1 μοίρας.

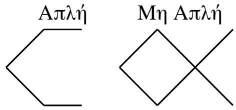
**ΟΡ. 4.8.59 ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ.** Τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά, μη συνευθειακά ευθύγραμμα τμήματα.



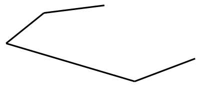
**ΟΡ. 4.8.60 ΚΟΡΥΦΕΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΣΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.** Κορυφές μιας τεθλασμέσης γραμμής ονομάζονται τα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων που την αποτελούν.

**ΟΡ. 4.8.61 ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.** Πλευρές μιας τεθλασμένης γραμμής ονομάζονται τα ευθυγραμμα τμήματα που την αποτελούν.

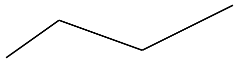
**ΟΡ. 4.8.62 ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ.** Περίμετρος μιας τεθλασμένης γραμμής ονομάζεται το άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων της.



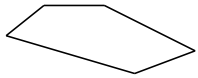

**ΟΡ. 4.8.63 ΑΠΛΗ.** Απλή λέγεται μια τεθλασμένη γραμμή όταν κάθε ζευγάρι μη διαδοχικών πλευρών δεν έχουν κοινά σημεία.



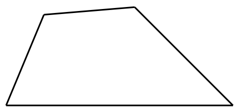
**ΟΡ. 4.8.64 ΚΥΡΤΗ.** Κυρτή ονομάζεται μια τεθλασμένη γραμμή της οποίας κάθε φορέας την αφήνει όλη σε ένα μόνο απ΄ τα δύο ημιεπίπεδα τα οποία ορίζει.



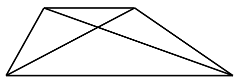
**ΟΡ. 4.8.65 ΜΗ ΚΥΡΤΗ.** Μη κυρτή ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή η οποία δεν είναι κυρτή.



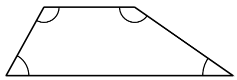
**ΟΡ. 4.8.66 ΚΛΕΙΣΤΗ.** Κλειστή ονομάζεται μια τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.



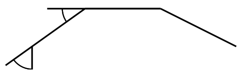
**ΟΡ. 4.8.67 ΠΟΛΥΓΩΝΟ.** Πολύγωνο ονομάζεται κάθε **κλειστή και απλή** τεθλασμένη γραμμή.
Εαν η γραμμή είναι κυρτή λέγεται **κυρτό** πολύγωνο αλλιώς λέγεται **μη κυρτό**.



**ΟΡ. 4.8.68 ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ.** Διαγώνιος ενός πολυγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές του.



**ΟΡ. 4.8.69 ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ.** Γωνίες του πολυγώνου ονομάζονται οι κυρτές γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του.



**ΟΡ. 4.8.70 ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ.** Εξωτερική γωνία του πολυγώνου λέγεται η παραπληρωματική γωνία μιας εσωτερικής γωνίας του.

## 4.9 Τριγωνα

### ΟΡΙΣΜΟΙ

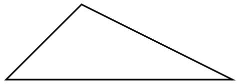
**ΟΡ. 4.9.1 ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.** Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ονομάζονται οι πλευρές και οι γωνίες του.

**ΟΡ. 4.9.2 ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ.** Περίμετρος ενός τριγώνου είναι το άθροισμα όλων των πλευρών του. Συμβολίζεται με $2\tau$.

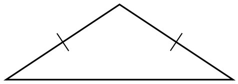
$$2\tau = a + \beta + \gamma$$

όπου $a, \beta, \gamma$ οι πλευρές του τριγώνου.

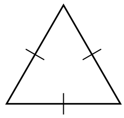
**ΟΡ. 4.9.3 ΣΚΑΛΗΝΟ.** Σκαληνό ονομάζεται ένα τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



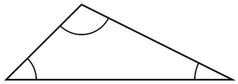
**ΟΡ. 4.9.4 ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.** Ισοσκελές ονομάζεται ένα τρίγωνο που έχει **δύο** πλευρές του ίσες μεταξύ τους. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση**.



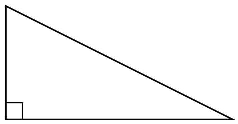
**ΟΡ. 4.9.5 ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ.** Ισόπλευρο ονομάζεται ένα τριγωνο που έχει **όλες** τις πλευρές του ίσες.



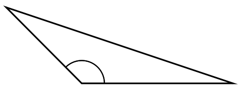
**ΟΡ. 4.9.6 ΟΞΥΓΩΝΙΟ.** Οξυγώνιο ονομάζεται ένα τρίγωνο που έχει **όλες** τις γωνίες του οξείες.



**ΟΡ. 4.9.7 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ.** Ορθογώνιο ονομάζεται το τριγωνο που έχει μια ορθή γωνία.
Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**.

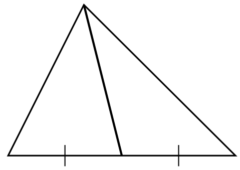


**ΟΡ. 4.9.8 ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ.** Αμβλυγώνιο ονομάζεται ένα τρίγωνο που έχει μια αμβλεία γωνία.

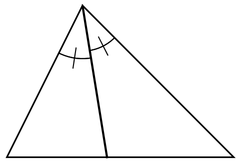


**ΟΡ. 4.9.9 ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.** Δευτερευοντα στοιχεια ενός τριγώνου είναι οι **διάμεσος**, η **διχοτόμος** και το **ύψος**.

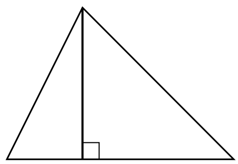
**ΟΡ. 4.9.10 ΔΙΑΜΕΣΟΣ.** Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
Για ένα τριγωνο *ΑΒΓ* με πλευρές α, β, γ οι τρεις διαμεσοι του συμβολίζονται : $\mu_a, \mu_\beta, \mu_\gamma$.



**ΟΡ. 4.9.11 ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ.** Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζει τη γωνία απ' την οποία ξεκινάει σε 2 ίσες.
Για ένα τριγωνο *ΑΒΓ* με πλευρές α, β, γ οι τρεις διχοτόμοι του συμβολίζονται : $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$.



**ΟΡ. 4.9.12 ΥΨΟΣ.** Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή μια κορυφή του τριγώνου και πάει **κάθετα** στην απέναντι πλευρά.
Το σημείο που το ύψος τέμνει την απέναντι πλευρά λέγεται **προβολή** της κορυφής.
Για ένα τριγωνο *ΑΒΓ* με πλευρές α, β, γ τα τρία ύψη του συμβολίζονται : $\upsilon_a, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$.

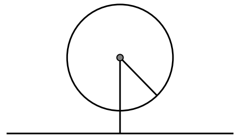


**ΟΡ. 4.9.13 ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕ῾ Η ΟΜΟΛΟΓΕ῾** λέγονται οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.

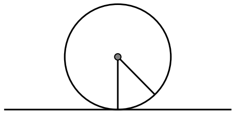
**ΟΡ. 4.9.14 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ.** Συμμετρικά ως προς σημείο ονομάζονται δύο σχήματα αν και μόνο αν κάθε σημείο του ενός έχει ένα συμμετρικό σημείο στο άλλο, ως προς το κέντρο συμμετρίας.
Ένα σχημα με κέντρο συμμετρίας λέμε οτι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία**.

**ΟΡ. 4.9.15 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ.** Συμμετρικά ως προς ευθεία λέγονται δύο σχήματα αν και μόνο αν κάθε σημείο του ενός έχει ένα συμμετρικό σημείο στο άλλο, ως προς τον άξονα συμμετρίας.
Ένα σχημα με άξονα συμμετρίας λέμε οτι παρουσιάζει **αξονικά συμμετρία**.

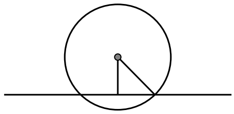
**ΟΡ. 4.9.16 ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ ΕΝΟ῾ ΚΥΚΛΟΥ** λέγεται μια ευθεία αν η απόσταση της από το κέντρο του κύκλου είναι **μεγαλύτερη** από την ακτίνα του.



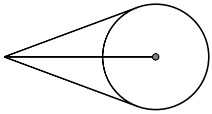
**ΟΡ. 4.9.17 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ.** Εφαπτόμενη ευθεία ενός κύκλου λέγεται μια ευθεία αν η απόσταση της από το κέντρο του κύκλου είναι **ίση** από την ακτίνα του.
Το σημείο τομής της ευθείας και του κύκλου λέγεται **σημείο επαφής**.

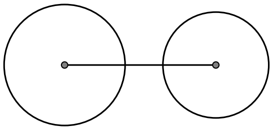


**ΟΡ. 4.9.18 ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΕΥΘΕΙΑ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ.** Τέμνουσα ευθεία ενός κύκλου λέγεται μια ευθεία αν η απόσταση της από το κέντρο του κύκλου είναι **μικρότερη** από την ακτίνα του.

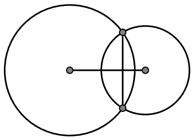


**ΟΡ. 4.9.19 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ.** Εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου λέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν ένα κοινό άκρο και εφάπτονται εκατέρωθεν του κύκλου.
Η ευθεία που διέρχεται από το κοινό άκρο και το κέντρο του κύκλου ονομάζεται **διακεντρική ευθεία**.

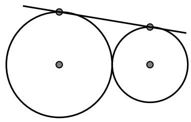




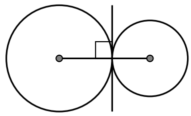
**ΟΡ. 4.9.20 ΔΙΑΚΕΝΤΡΟΣ.** Διάκεντρος ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων.



**ΟΡ. 4.9.21 ΚΟΙΝΗ ΧΟΡΔΗ.** Κοινή χορδή ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κοινά σημεία δύο τεμνόμενων κύκλων.



**ΟΡ. 4.9.22 ΚΟΙΝΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ.** Κοινή εξωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων ονομάζεται η ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει και τους δύο στην ίδια μεριά.

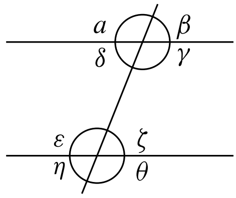


**ΟΡ. 4.9.23 ΚΟΙΝΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ.** Κοινή εσωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων ονομάζεται η ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους έχει εκατέρωθεν αυτής.

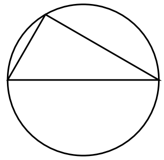
## 4.10 Παραλληλες Ευθείες

### ΟΡΙΣΜΟΙ

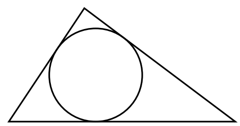
**ΟΡ. 4.10.1 ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ.** :
Αν $\epsilon_1, \epsilon_2$ είναι δύο ευθείες και $\epsilon$ μια τέμνουσα τους τότε :
**Εντός** λέγονται οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα από τις $\epsilon_1, \epsilon_2$.
**Εκτός** λέγονται οι γωνίες που βρίσκονται έξω από τις $\epsilon_1, \epsilon_2$.
**Επι τα αυτά** λέγονται οι γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο μέρος της τέμνουσας $\epsilon$.
**Εναλλάξ** λέγονται οι γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της $\epsilon$.



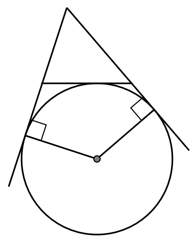

Κάνοντας συνδιασμούς με τους παραπάνω χαρακτηρισμούς προκύπτουν οι βασικές ονομασίες :
**Εντός εναλλάξ** που ειναι τα ζευγάρια γωνιών $\delta, \zeta$ και $\gamma, \varepsilon$.
**Εντός εκτός και επί τα αυτά** που ειναι τα ζευγάρια γωνιών $\zeta, \beta$ - $\gamma, \theta$ - $a, \varepsilon$ και $\delta, \eta$.
**Εντός και επί τα αυτά** που είναι τα ζευγάρια γωνιών $\varepsilon, \delta$ και $\gamma, \zeta$.
**ΟΡ. 4.10.2 ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.** Περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ονομάζεται ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.
Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **περίκεντρο** και είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.



**ΟΡ. 4.10.3 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.** Εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ονομάζεται ο κύκλος που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και εφάπτεται στις πλευρές του.
Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **έγγκεντρο** και είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.



**ΟΡ. 4.10.4 ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.** Παρεγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο τομής δύο εξωτερικών διχοτόμων του τρίγωνου και εφάπτεται στη μια πλευρά και στις προεκτάσεις των άλλων δύο.
Το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **παράκεντρο**.



## 4.11 Παραλληλογραμμα - Τραπέζια

## 4.12 Εγγεγραμμενα Σχήματα

## 4.13 Αναλογίες

## 4.14 Ομοιότητα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Β ΛΥΚΕΙΟΥ

### 5.1 Συστήματα Εξισώσεων

### 5.2 Ιδιοτητες Συναρτησεων

### 5.3 Τριγωνομετρια

### 5.4 Πολυώνυμα - Εξισώσεις

### 5.5 Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση

### 5.6 Μετρικες Σχέσεις

### 5.7 Εμβαδά

## 5.8 Κύκλος

## 5.9 Ευθείες - Επίπεδα στο χώρο

## 5.10 Στερεά

## 5.11 Διανύσματα

## 5.12 Εξίσωση Ευθείας

## 5.13 Κωνικές Τομές

## 5.14 Θεωρια Αριθμων

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

## 6.1 Διαφορικος Λογισμος

## 6.2 Στατιστική

## 6.3 Πιθανοτητες

## 6.4 Πινακες

## 6.5 Μιγαδικοι Αριθμοι

## 6.6 Οριο - Συνεχεια

## 6.7 Διαφορικος Λογισμος

# 6.8 Ολοκληρωτικος Λογισμος

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ - ΕΠΙΛΟΓΗΣ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

## ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

# Ευρετήριο

## Άλγεβρα



## Ανάλυση



## Στατιστική

# Βιβλιογραφία


[1] Νίκος Καρανικόλας. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Εκδόσεις Βολονάκη, 2007.

[2] Βασίλης Παπάδακης. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Εκδόσεις Σαββάλας, 2009.

[3] Αργυράκης & Βουργάνας & Μεντής & Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. ΟΕΒΔ, 2008.