Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | ▯ : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
2 Αυγούστου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΔΙΑΤΑΞΗ
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών κατά την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι

$$< : \text{μικρότερο} \ , \ > : \text{μεγαλύτερο} \ , \ \leq \text{μικρότερο ίσο} \ , \ \geq \text{μεγαλύτερο ισο}$$

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που είναι τοποθετημένοι πάνω στην ευθεία των πραγμωτικών αριθμών ονομάζονται **διατεταγμένοι**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ - ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ
Ένας αριθμός a είναι **μεγαλύτερος** απο έναν αριθμό β, και γράφουμε $a > \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

$$a > \beta \Leftrightarrow a - \beta > 0$$

Ένας αριθμός a είναι **μικρότερος** απο έναν αριθμό β, και γράφουμε $a < \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

$$a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \ , \ P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x), Q(x), R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.

- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΑΝΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \ , \ \ ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές a, β.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Εαν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ -\gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περπτώσεις :

   i. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.

   ii. Εαν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων με ίδια φορά και να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες ίδιας φοράς αρκεί όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \ , \ \text{ με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ

Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού a είναι μη αρνητικός αριθμός :

$$a^2 \geq 0 \ , \ \ \kappa \text{ ακέραιος}$$

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $a^2 + \beta^2 = 0$ τότε $a = 0$ και $\beta = 0$.