Αλέξανδρος Πολίτης Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός Μαθηματικός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
ΑΠΟ ΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- 100 Ορισμοί
- 250 Θεωρήματα
- 400 Μέθοδοι για λύση ασκήσεων
- 200 Λυμένα παραδείγματα
- 500 Άλυτες ασκήσεις και προβλήματα
- 200 Επαναληπτικά θέματα
- Απαντήσεις ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2018

Επανάληψη στα μαθηματικά
για τη Γ΄ Λυκείου

Αλέξανδρος Πολίτης - Μαθηματικός
Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ISBN : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Εξώφυλλο :

Στη γυναίκα μου.

Πρόλογος

Περιεχόμενα

Πίνακας Συμβόλων

Σύμβολο	Όνομα	Περιγραφή
$\neq$	Διάφορο	Εκφράζει ότι δύο στοιχεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
$>$	Μεγαλύτερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μεγαλύτερο του $2^{ου}$).
$<$	Μικρότερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μικρότερο του $2^{ου}$).
$\geq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $>$.
$\leq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $<$.
$\gtrless$	Μεγαλύτερο μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $>$ και $<$.
$\pm$	Συν Πλην	Συνδυασμός των προσήμων $+$ και $-$.
$\mp$	Πλην Συν	Έχει την ίδια σημασία με το συμβολισμό $\pm$ και χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία θα εμφανιστούν τα πρόσημα $+$, $-$.
$\Rightarrow$	Συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις, όταν η μια έχει σαν συμπέρασμα την άλλη.
$\Leftarrow$	Αντίστροφη συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με φορά αντίστροφη από το σύνδεσμο $\Rightarrow$.
$\Leftrightarrow$	Διπλή συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με διπλή φορά. Δηλώνει ισοδυναμία μεταξύ τους.
$\%$	Ποσοστό τοις εκατό	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 100 ίσα κομμάτια.
‰	Ποσοστό τοις χιλίοις	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 1000 ίσα κομμάτια.
$\mid\ \mid$	Απόλυτη τιμή	Απόσταση ενός αριθμού από το 0.
$\sqrt{\ }$	Τετραγωνική ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**

Σύμβολο	**Όνομα**	**Περιγραφή**
$\sqrt[\nu]{\ }$	ν-οστή ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**
$\in$	Ανήκει	Σύμβολο το οποίο δηλώνει ότι ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο.
$\ni$	Ανήκει	Έχει την ίδια χρησιμότητα με το σύμβολο $\in$ και χρησιμοποιείται όταν το σύνολο γράφεται πριν το στοιχείο.
$\notin$	Δεν ανήκει	Έχει την αντίθετη σημασία από το σύμβολο $\in$ και δηλώνει ότι ένα στοιχείο δεν ανήκει σε ένα σύνολο.
$\subseteq$	Υποσύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
$\cup$, $\cap$	Ένωση, Τομή	Βλ. **Ορισμό ...**
$\varnothing$	Κενό σύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
∞	Άπειρο	
$\perp$	Κάθετο	

Μέρος I

Διαγώνισμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξισωσεις - Ανισωσεις

1.1 Εξισώσεις - Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ

Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή

- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.
- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση** της ή **ρίζα** της.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εάν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εάν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.
- Εάν σε μια εξίσωση πολλών μεταβλητών, ορίσουμε ένα μέρος των μεταβλητών αυτών ώς κύριες μεταβλητές της εξίσωσης τότε οι επιπλέον μεταβλητές ονομάζονται **παράμετροι** ενώ η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.
- Η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

Παράδειγμα 1.1 : Είδη εξισώσεων

- Η εξίσωση $2x - 4 = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 2$ διότι μόνο ο αριθμός αυτός την επαληθεύει.
- Η εξίσωση $0x = -3$ είναι αδύνατη γιατί κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.
- Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αόριστη γιατί επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 1.2 : ΑΝΙΣΩΣΗ

Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

Παράδειγμα 1.2 : Είδη ανισώσεων

Σε καθεμία από τις παρακάτω ανισώσεις προκειμένου να προσδιορίσουμε το είδος της, δηλαδή αν είναι αδύνατη ή αόριστη, ελέγχουμε αν υπάρχει αριθμός που να την επαληθεύει.

- Η ανίσωση $0x > 2$ είναι αδύνατη διότι για κάθε τιμή του x προκύπτει $0 > 2$ που δεν ισχύει.
- Η ανίσωση $0x \geq 2$ είναι αδύνατη διότι δεν επαληθεύεται καμία από τις σχέσεις $>$ ή $=$.
- Η ανίσωση $0x > -2$ είναι αόριστη διότι για κάθε x προκύπτει η σχέση $0 > -2$ που είναι σωστή.
- Η ανίσωση $0x \geq -2$ είναι αόριστη διότι ανάμεσα στις σχέσεις $>$ και $=$ η σχέση $>$ είναι αυτή που επαληθεύεται πάντα.
- Η ανίσωση $0x > 0$ είναι αδύνατη διότι προκύπτει πάντα $0 > 0$ που είναι λάθος.
- Η ανίσωση $0x \geq 0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα γιατί από τις $>$ και $=$ η ισότητα επαληθεύεται πάντα.

Συνεχίζοντας το σκεπτικό αυτό βλέπουμε παρακάτω και τις υπόλοιπες περιπτώσεις αδύνατων και αόριστων ανισώσεων που περιέχουν τις σχέσεις $<$ και $\leq$.

- Η ανίσωση $0x < 2$ είναι αόριστη.
- Η ανίσωση $0x \leq 2$ είναι αόριστη.
- Η ανίσωση $0x < -2$ είναι αδύνατη.
- Η ανίσωση $0x \leq -2$ είναι αδύνατη.
- Η ανίσωση $0x < 0$ είναι αδύνατη.
- Η ανίσωση $0x \leq 0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα.

Ορισμός 1.3 : ΕΞΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού.

Ορισμός 1.4 : ΑΝΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Ανίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ανίσωση της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \quad , \quad ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Όμοια με τις εξισώσεις και οι ανισώσεις είναι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.
2. Αν $a = 0$ και :

   i. αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη** (ή αλλιώς ονομάζεται και **ταυτότητα**).

ii. αν $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

Πίνακας 1.1: Λύσεις εξίσωσης 1ου βαθμού

Θεώρημα 1.2 Λύσεις ανίσωσης 1ου βαθμού Οι λύσεις της ανίσωσης $ax + \beta > 0$ (ή $ax + \beta < 0$) φαίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $a > 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x > -\frac{\beta}{a}$ (ή $x < -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
2. Αν $a < 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x < -\frac{\beta}{a}$ (ή $x > -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
3. Αν $a = 0$ τότε

   i. Αν $\beta > 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αδύνατη ενώ η $0x < \beta$ είναι αόριστη.
   ii. Αν $\beta < 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αόριστη ενώ η $0x < \beta$ είναι αδύνατη.
   iii. Αν $\beta = 0$ τότε οι ανισώσεις $0x > 0$ και $0x < 0$ είναι αδύνατες.

1.2 Εξισώσεις - Ανισώσεις 2ου βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.5 : **ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

Εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται εξίσωση της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
- Ο αριθμός $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.
- Ο πραγματικός αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου. Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

Ορισμός 1.6 : **ΑΝΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

Ανίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ανίσωση της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \quad . \quad ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.3 : **ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

Αν $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a\neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το **πλήθος** των λύσεων της :

i. Αν $\Delta>0$ τότε η εξίσωση έχει **δύο άνισες** λύσεις οι οποίες είναι: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

ii. Αν $\Delta=0$ τότε η εξίσωση έχει **μια διπλή** λύση την $x=-\frac{\beta}{2a}$.

iii. Αν $\Delta<0$ τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη** στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον πίνακα :

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta>0$	2 πραγματικές άνισες λύσεις	$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	1 διπλή πραγματική λύση	$x=-\dfrac{\beta}{2a}$
$\Delta<0$	Καμία πραγματική λύση - Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	

Πίνακας 1.2: Λύσεις εξίσωσης 2ου βαθμού

Θεώρημα 1.4 : **ΤΥΠΟΙ VIETA**

Έστω $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a\neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού. Αν x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωση τότε το άθροισμα S και το γινόμενό τους P δίνονται από τους τύπους :

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}\quad,\quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{a}$$

οι οποίοι ονομάζονται τύποι του Vieta.

Θεώρημα 1.5 : **ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ**

Για τη μετατροπή ενός τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a\neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta>0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)(x-x_2)$$

όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta=0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2+\beta x+\gamma=a\left(x-x_0\right)^2=a\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2$$

όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta<0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Εναλλακτικά όμως μπορεί να γραφεί :

$$ax^2+\beta x+\gamma=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

Θεώρημα 1.6 : **ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ**

Για το πρόσημο των τιμών ενός τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ισχύουν οι παρακάτω κανόνες.

1. Αν η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο είναι

   α. ομόσημο του συντελεστή α στα διαστήματα που βρίσκονται έξω από τις ρίζες x_1, x_2.
   β. ετερόσημο του α στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες.
   γ. ίσο με το μηδέν στις ρίζες.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	0	Ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α	

Πίνακας 1.3: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta > 0$

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο είναι

   α. ομόσημο του συντελεστή α στα διαστήματα που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της ρίζας x_0.
   β. ίσο με το μηδέν στη ρίζα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	0	Ομόσημο του α	

Πίνακας 1.4: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta = 0$

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	

Πίνακας 1.5: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta < 0$

1.3 Εξισώσεις - Ανισώσεις $3^{ου+}$ βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΑΝΙΣΩΣΗ**

Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$.

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζεται η ρίζα του πολυωνύμου της εξίσωσης. Ομοίως, μια πολυωνυμική ανίσωση θα είναι της μορφής:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \gtrless 0$$

Για να μπορέσουμε να λύσουμε εξισώσεις και ανισώσεις $3^{ου+}$ βαθμού θα προσπαθήσουμε με κατάλληλες παραγοντοποιήσεις να φτιάξουμε γινόμενο πολυωνύμων $1^{ου}$ βαθμού και $2^{ου}$ βαθμού.
Μια χρήσιμη μέθοδος παραγοντοποίησης είναι το σχήμα **Horner**

1.4 Κλασματικές - Άρρητες εξισώσεις και ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.8 : **ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**

Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

Ορισμός 1.9 Άρρητη εξίσωση Άρρητη ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$. Όμοια, μια άρρητη ανίσωση θα είναι:

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) \gtrless 0$$

1.5 Εξισώσεις - Ανισώσεις διαφόρων ειδών

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.10 : **ΔΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**

Διώνυμη εξίσωση ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση η οποία περιέχει πολυώνυμο με 2 όρους. Θα είναι της μορφής :

$$x^\nu = a \qquad \text{ή} \qquad x^\nu = a^\nu$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.11 : **ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**

Διτετράγωνη ονομάζεται κάθε εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού της μορφής :

$$ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ η οποία έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x. Οι εκθέτες του τριωνύμου είναι διπλάσιοι απ' αυτούς της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.7 : **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ**

Οι βασικές μορφές των εξισώσεων με απόλυτες τιμές είναι οι ακόλουθες :

1. Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :

   i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις : $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

   ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει : $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$
3. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :

   i. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x) \geq 0$.

   ii. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$.

Θεώρημα 1.8 : **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$**

Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το είδος του εκθέτη ν και του πραγματικού αριθμού a.

1. Για ν άρτιο έχουμε :

   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις αντίθετες : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$

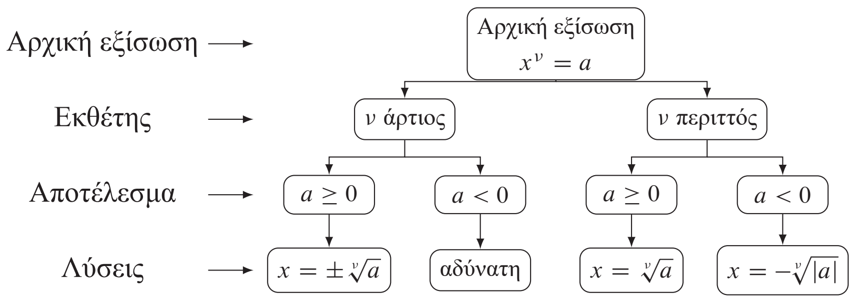
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Για ν περιττό έχουμε :

   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 θετική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$

   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 αρνητική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|}$

Οι λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε :

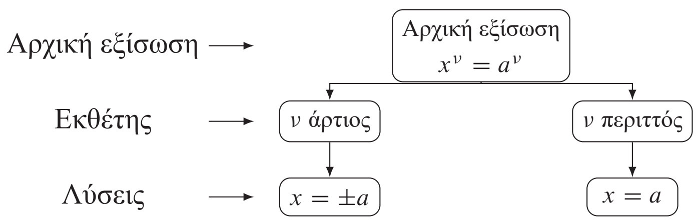


Θεώρημα 1.9 εξισωσεις τησ μορφησ $\boldsymbol{x^\nu = a^\nu}$ Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a^\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

i. Αν ν άρτιος τότε η εξίσωση έχει δύο αντίθετες λύσεις : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = \pm a$

ii. Αν ν περιττός τότε η εξίσωση έχει μια λύση : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = a$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών φαίνονται στο αντίστοιχο διάγραμμα :



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος 1.1 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

***1^{ο} Βήμα :* Απαλοιφή παρονομαστών**
Αν υπάρχουν παρονομαστές τότε για την απαλοιφή τους θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν όλοι οι όροι της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

***2^{ο} Βήμα :* Απαλοιφή παρενθέσεων**
Αν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε τις απαραίτητες πράξεις ώστε να τις διώξουμε.

***3^{ο} Βήμα :* Χωρισμός γνωστών από αγνώστους**
Μεταφέρουμε τους γνωστούς στο ένα μέλος και τους αγνώστους στο άλλο.

4^{ο} Βήμα : Αναγωγή ομοίων όρων.

5^{ο} Βήμα : Διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου.

Σημειώσεις:

- Όταν πολλαπλασιάζω με το Ε.Κ.Π. πρέπει να πολλαπλασιαστούν όλοι οι όροι. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν έχω κλάσματα ή παρενθέσεις τότε πολλαπλασιάζεται όλος ο αριθμητής και αντίστοιχα όλη η παρένθεση.

Παράδειγμα 1.3 : **Εξίσωση με κλάσματα**

Το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι το 6. Άρα ακολουθώντας τα βήματα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} &= x - \frac{1}{3} \Rightarrow \\
6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6. \cdot \frac{x+3}{6} &= 6 \cdot x - 6 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \\
3(x-1) - (x+3) &= 6x - 2 \Rightarrow \\
3x - 3 - x - 3 &= 6x - 2 \Rightarrow \\
3x - x - 6x &= 3 + 3 - 2 \Rightarrow \\
-4x &= 4 \Rightarrow \\
\frac{-4x}{-4} &= \frac{4}{-4} \Rightarrow \\
x &= -1
\end{aligned}$$

Μέθοδος 1.2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Βήματα

1. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα ίδια με την επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού με τη μόνη διαφορά να είναι στην διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου.
2. Στο τελευταίο βήμα,όταν διαιρέσουμε με το συντελεστή του αγνώστου πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημό του:
   - αν είναι θετικό τότε η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
   - αν είναι αρνητικό πρέπει να αλλάξουμε την φορά της ανίσωσης.

✔ ΛΥΣΗ

Παρατήρηση 1.1

Δεν έχει σημασία σε ποιο μέλος θα βρίσκονται οι γνωστοί και σε ποιο οι άγνωστοι. Συνήθως στο αριστερό βάζουμε τους γνωστούς και στο δεξί τους γνωστούς.

Προσοχή 1.1

Προσέχω πολύ κάθε φορά που αλλάζω μέλος κάποιον όρο πρέπει να του αλλάξω και πρόσημο.

Μέθοδος 1.3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ \ a \neq 0$$

λύνεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

***1^o Βήμα :* Εύρεση διακρίνουσας**
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου δηλαδή τον πραγματικό αριθμό $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

***2^o Βήμα :* Λύσεις**
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις που δίνονται από τον τύπο $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μια διπλή λύση η οποία θα είναι $x = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

▶ Παράδειγμα 1.4 : Εξίσωση 2^{ου} βαθμού
Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 5x + 4 = 0$ **β.** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **γ.** $x^2 + 2x + 3 = 0$

✔ ΛΥΣΗ

α. Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι $a = 1, \beta = -5$ και $\gamma = 4$.Η διακρίνουσα λοιπόν θα ισούται με

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

οπότε η εξίσωση θα έχει δύο λύσεις. Αυτές σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

επομένως θα έχουμε

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ \text{ και } \ x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

β. Ομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα, με συντελεστές $a = 1, \beta = -6$ και $\gamma = 9$ η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

συνεπώς η εξίσωση έχει μια διπλή λύση η οποία θα ισούται με

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

γ. Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι $a = 1, \beta = 2$ και $\gamma = 3$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$$

επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

Μέθοδος 1.4 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2$^{\text{ΟΥ}}$ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λυθεί μια ανίσωση 2$^{\text{ου}}$ βαθμού ακολουθούμε τα επόμενα βήματα.

***1^o Βήμα :* Διακρίνουσα**
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.

***2^o Βήμα :* Ρίζες**
Αν $\Delta \geq 0$ τότε υπολογίζουμε τις ρίζες του τριωνύμου.

***3^o Βήμα :* Πίνακας προσήμων**
Σχεδιάζουμε τον πίνακα προσήμων όπως τον είδαμε στο θεώρημα ... ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας. Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τα πρόσημα σύμφωνα με τον αντίστοιχο κανόνα.

***4^o Βήμα :* Λύσεις ανίσωσης**
Επιλέγουμε από τον πίνακα, τα διαστήματα των τιμών του x για τα οποία επαληθεύεται η ανίσωση.

Παράδειγμα 1.5 : Ανίσωση 2$^{\text{ου}}$ βαθμού

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις

α. $x^2 - 4x + 3 > 0$ **γ.** $x^2 + 2x + 3 > 0$ **ε.** $-x^2 + 8x - 16 > 0$

β. $x^2 - 6x + 9 > 0$ **δ.** $x^2 - 7x + 12 \leq 0$ **στ.** $x^2 + x + 2 < 0$

ΛΥΣΗ

α. Για τον υπολογισμό της διακρίνουσας έχουμε $a = 1, \beta = -4$ και $\gamma = 3$. Είναι λοιπόν

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες. Αυτές είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \ \text{ και } \ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων τοποθετώντας στον άξονα τις ρίζες 1, 3. Με τη βοήθεια του πίνακα αναζητούμε τις τιμές του x ώστε, σύμφωνα με την ανίσωση, το τριώνυμο να είναι θετικό

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Μέθοδος 1.5 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 3ου+ ΒΑΘΜΟΥ

Για την επίλυση εξίσωσης 3ου βαθμού ή μεγαλύτερου, στην οποία οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ακέραιοι ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

***1ο Βήμα :* Πιθανές ακέραιες ρίζες - Εύρεση ρίζας**
Από τις πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ που είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, βρίσκουμε ποιος αριθμός είναι όντως ρίζα του.

***2ο Βήμα :* Σχήμα Horner - Παραγοντοποίηση**
Σχηματίζουμε και συμπληρώνουμε το σχήμα Horner με τη ρίζα που βρήκαμε. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο ως εξής:

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο.

***3ο Βήμα :* Λύση εξίσωσης**
Αν το πολυώνυμο $\pi(x)$ είναι δευτέρου βαθμού τότε λύνουμε στη θέση της εξίσωσης $P(x) = 0$ την ισοδύναμη εξίσωση

$$(x-\rho)\pi(x) = 0$$

Αν είναι 3ου βαθμού ή μεγαλύτερου τότε το παραγοντοποιούμε ακολουθώντας τα δύο προηγούμενα βήματα έως ότου οι παράγοντες να είναι πρωτοβάθμιοι ή δευτεροβάθμιοι.

Παράδειγμα 1.6 : Εξίσωση 3ου βαθμού

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\mathbf{x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0}$$

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε ονομάζοντας $P(x)$ το πολυώνυμο 3ου βαθμού στο πρώτο μέλος της εξίσωσης. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι $\pm1, \pm2, \pm3$ και ±6. Απ' αυτές μια ρίζα είναι ο αριθμός 1 καθώς

$$P(1) = 1^3 - 3\cdot1^2 - 6\cdot1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$$

Συνεπώς θα γίνει σχήμα Horner με ρίζα τον αριθμό $\rho = 1$

1	-3	-6	8	1
	1	-2	-8	
1	-2	-8	**0**	

που θα μας δώσει ως πηλίκο το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 - 2x + 8$. Το πολυώνυμο $P(x)$ παραγοντοποιείται ως εξής $P(x) = (x-1)(x^2-2x+8)$ και έτσι η αρχική εξίσωση θα γραφτεί

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+8) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 2x + 8 = 0$$

Λύνουμε λοιπόν την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εξίσωση στις οποίες καταλήξαμε και προκύπτουν έτσι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης $x = 1, x = -2$ και $x = 4$.

Παρατήρηση 1.2

Το πλήθος των στηλών στο σχήμα Horner για ένα πολυώνυμο $n-$οστού βαθμού είναι $n+1$.

Παράδειγμα 1.7 : Εξίσωση 4ου βαθμού

Να λυθεί η εξίσωση

$$\boldsymbol{x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = 0}$$

✔ ΛΥΣΗ

Όπως και προηγουμένως ονομάζουμε $P(x)$ το πολυώνυμο του οποίου πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι $\pm1, \pm2, \pm3$ $\pm4, \pm6$ και ±12. Μια ρίζα από τους αριθμούς αυτούς είναι η $x = -2$ διότι

$$P(-2) = (-2)^4 - 9(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16 - 36 + 8 + 12 = 0$$

Συμπληρώνουμε λοιπόν το σχήμα Horner για το πολυώνυμο $P(x)$ με ρίζα τον αριθμό $\rho = -2$ και έχουμε

1	0	-9	-4	12	-2
	-2	4	10	-12	
1	-2	-5	6	**0**	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ και η παραγοντοποίηση έχει ως εξής:

$$P(x) = (x+2) \cdot \pi_1(x) = (x+2)\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \tag{1.1}$$

Καθώς το π_1 είναι 3ου βαθμού τότε θα χρειαστεί να παραγοντοποιηθεί και αυτό με τη χρήση του σχήματος Horner. Εύκολα βλέπουμε ότι μια ρίζα του είναι η $x = 1$ και έτσι θα έχουμε

⚠ Προσοχή 1.2

Αν από το πολυώνυμο $P(x)$ λείπουν όροι, τότε οι συντελεστές τους συμπληρώνονται με 0 στο σχήμα Horner.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	**0**	

Το νέο πηλίκο που προκύπτει είναι δευτέρου βαθμού και ισούται με $\pi_2(x) = x^2 - x - 6$ άρα το $\pi_1(x)$ παραγοντοποιείται ως εξής: $\pi_1(x) = (x-1)\left(x^2 - x - 6\right)$. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και τη σχέση (1.1) με αντικατάσταση θα πάρουμε τη νέα μορφή της εξίσωσης

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)\left(x^2 - x - 6\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x + 2 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - x - 6 = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε τις λύσεις $x = 3, x = 1$ και την διπλή $x = -2$.

Μέθοδος 1.6 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 3ου+ ΒΑΘΜΟΥ

Για την επίλυση ανίσωσης 3ου βαθμού ή μεγαλύτερου της μορφής

$$P(x) \lesseqgtr 0$$

στην οποία οι συντελεστές του $P(x)$ είναι ακέραιοι ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1ο Βήμα : **Εύρεση όλων των ριζών**
Ακολουθούμε τα βήματα της μεθόδου ... ώστε να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

2ο Βήμα : **Πίνακας προσήμων - Λύσεις**
Σχηματίζουμε έναν πίνακα στον οποίο θα συμπληρωθούν τα πρόσημα τόσο των παραγόντων όσο και του

$P(x)$. Σύμφωνα με τα πρόσημα του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του x γράφουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

▶ Παράδειγμα 1.8 : Ανίσωση 3^{ου} βαθμού

Να λυθεί η ανίσωση

$$\mathbf{x^3 - 5x^2 + 2x + 8 > 0}$$

✔ ΛΥΣΗ

Θα ακολουθήσουμε όπως αναφέρει η μέθοδος τα βήματα ώστε να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. Από τις πιθανές ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ και ± 8 του πολυωνύμου, μια ρίζα είναι η $x = -1$. Το σχήμα Horner λοιπόν θα έχει ως εξής

1	−5	2	8	−1
	−1	6	−8	
1	−6	8	**0**	

και παίρνουμε έτσι το πηλίκο $\pi(x) = x^2 - 6x + 8$. Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και γράφεται στη μορφή $P(x) = (x+1)\left(x^2 - 6x + 8\right)$ οπότε η εξίσωση θα γίνει

$$\begin{gathered} P(x) = 0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0 \Rightarrow \\ x + 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \\ x = -1 \;\; , \;\; x = 2 \;\; , \;\; x = 4 \end{gathered}$$

Προχωρούμε στο σχεδιασμό του πίνακα προσήμων. Θα χρειαστούμε μια γραμμή για τη μεταβλητή x, μια γραμμή για κάθε παράγοντα του $P(x)$ και στην τελευταία γραμμή βρίσκεται το $P(x)$. Στον άξονα τοποθετούμε τις ρίζες που βρήκαμε με αύξουσα σειρά και συμπληρώνουμε σε κάθε διάστημα το πρόσημο των παραγόντων.

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+		+	
$x^2 - 6x + 8$		+		+	0	−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Πολλαπλασιάζουμε έπειτα σε κάθε στήλη τα πρόσημα και προκύπτει έτσι το πρόσημο του $P(x)$ σε κάθε διάστημα. Όπως βλέπουμε λοιπόν οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες το $P(x)$ είναι θετικό άρα πρέπει $x \in (-1, 2) \cup (4, +\infty)$.

▶ Παράδειγμα 1.9 : Ανίσωση σε μορφή γινομένου

Να λυθεί η ανίσωση

$$\mathbf{(x-2)\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 2x - 15\right) \leq 0}$$

✔ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ στο πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι ήδη γραμμένο ως γινόμενο παραγόντων οπότε περνάμε αμέσως στην εύρεση των ριζών του. Έστω λοιπόν $P(x) = 0$ δηλαδή

$$\begin{gathered} (x-2)\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 2x - 15\right) = 0 \Rightarrow \\ x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 - 9 = 0 \text{ ή } x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \\ x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 5 \end{gathered}$$

Σχηματίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα προσήμων τοποθετώντας στον άξονα τις ρίζες που βρέθηκαν προηγουμένως.

x	$-\infty$		-3		-2		2		3		5		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-2x-15$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Καθώς λοιπόν θέλουμε το αρχικό πολυώνυμο να είναι αρνητικό ή να μηδενίζεται, οι λύσεις της ανίσωσης θα είναι

$$x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, 5]$$