ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1 Ιουλίου 2015

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

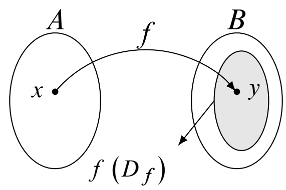
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.

Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή και του ελληνικού αλφαβήτου $f, g, h, t,$ $s, \sigma \ldots$ και γράφουμε :

$$f : A \to B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης ($x \in A$), του πρώτου συνόλου, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης ($y \in B$), του δεύτερου συνόλου.



- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται D_f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in D_f$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\left(D_f\right)$ και ισχύει $f\left(D_f\right) \subseteq B$.
- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \quad , \quad D_f \overset{f}{\to} f\left(D_f\right)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \quad , \quad g(t) \quad , \quad h(s) \ldots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε
  1. Το πεδίο ορισμού D_f.
  2. Το σύνολο B.
  3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in D_f$.
- Εαν τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα βασικά είδη συναρτήσεων τον τύπο τους καθώς και το πεδίο ορισμού τους.

Είδος	Τύπος	Πεδίο Ορισμού
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_0$	$D_f = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$
	$f(x) = \text{ημ}x \ , \ \text{συν}x$	$D_f = \mathbb{R}$
Τριγωνομετρική	$f(x) = \text{εφ}x$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$
	$f(x) = \text{σφ}x$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$
Εκθετική	$f(x) = a^x \ , \ 0 < a \neq 1$	$D_f = \mathbb{R}$
Λογαριθμική	$f(x) = \log x \ , \ \ln x$	$D_f = (0, +\infty)$

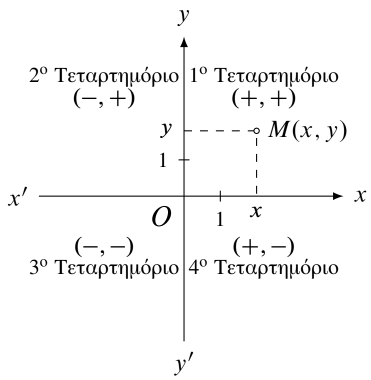
Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνιμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις :

Ταυτοτική	**Σταθερή**	**Μηδενική**
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εαν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.



- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.

- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{ο}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

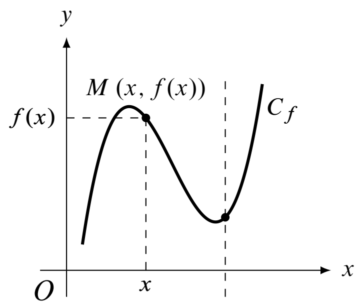
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A \ , \ y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

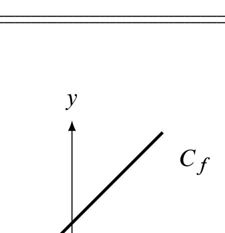
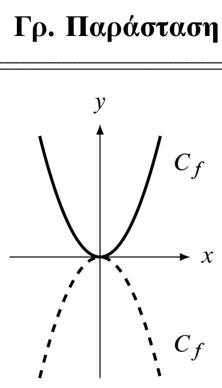
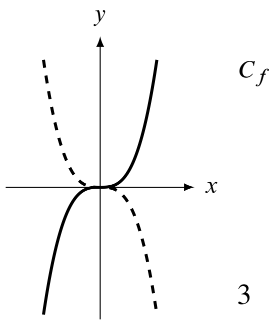
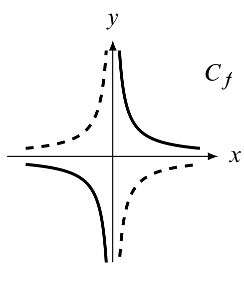
$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράστασης είναι της μορφής $M\ (x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.

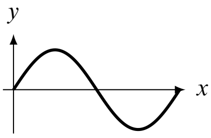


ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

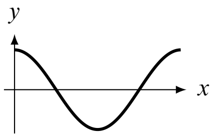
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων καθώς και το είδος τους.

Συνάρτηση	**Γρ. Παράσταση**	**Συνάρτηση**	**Γρ. Παράσταση**
Πολυωνυμική $f(x) = ax + \beta$ $a, \beta \in \mathbb{R}$		**Πολυωνυμική** $f(x) = ax^2$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -	
Πολυωνυμική $f(x) = ax^3$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -		**Ρητή** $f(x) = \dfrac{a}{x}$ $a > 0$ —— $a < 0$ - - -	

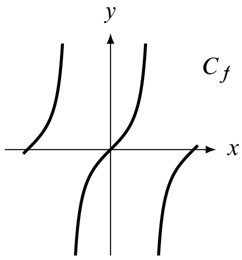
Τριγωνομετρική
$f(x) = \text{ημ}x$



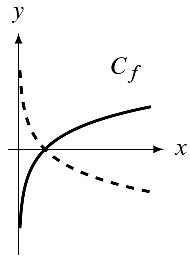
Τριγωνομετρική
$f(x) = \text{συν}x$



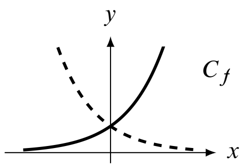
Τριγωνομετρική
$f(x) = \text{εφ}x$



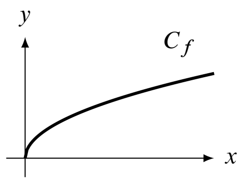
Λογαριθμική
$f(x) = \log_a x$
$a > 1$ ——
$0 < a < 1$ - - -



Εκθετική
$f(x) = a^x$
$a > 1$ ——
$0 < a < 1$ - - -



Άρρητη
$f(x) = \sqrt{x}$



ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
Δύο συναρτήσεις f, g ονομάζονται ίσες εαν

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού δηλαδή $D_f = D_g$ και ισχύει
ii. $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D_f, D_g$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα τότε οι πράξεις μεταξύ των δύο συναρτήσεων ορίζονται ως εξής.

Τύπος	**Πεδίο ορισμού**
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \| x \in D_f \cap D_g\}$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = \{x \in \mathbb{R} \| x \in D_f \cap D_g\}$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} \| x \in D_f \cap D_g\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \| x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\}$

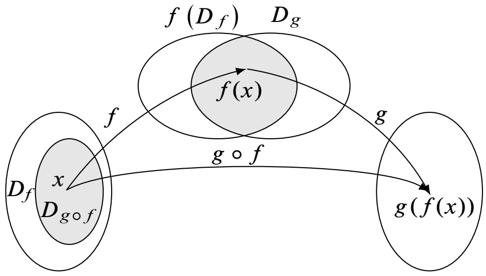
ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα. Σύνθεση της f με την g ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο των στοιχείων του πεδίου ορισμού D_f της συνάρτησης f των οποίων οι τιμές ανήκουν στο πεδίο ορισμού D_g της συνάρτησης g.

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$$

Με τη σύνθεση $g \circ f$, κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της f την $f(x)$ η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της g την $g(f(x))$.



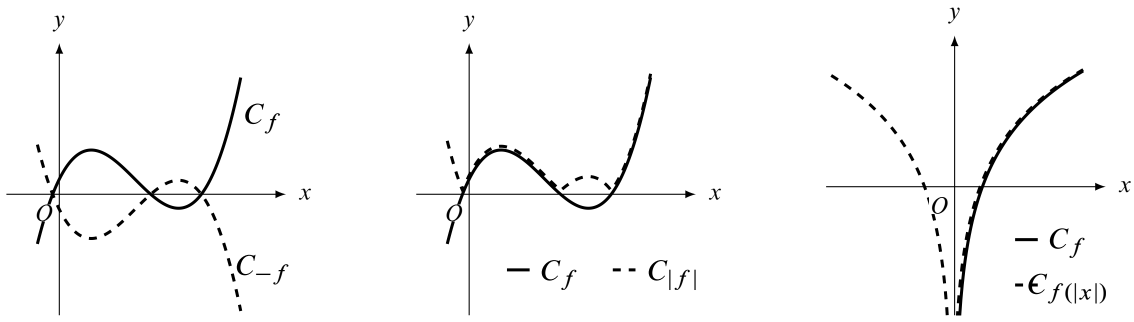
- Η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται αν $f\left(D_f\right) \cap D_g \neq \varnothing$.
- Η σύνθεση της g με την f συμβολίζεται αντίστοιχα με $f \circ g$, έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_g$ και $g(x) \in D_f\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $-f$, $|f|$ ΚΑΙ $f(|x|)$

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση C_f. Τότε

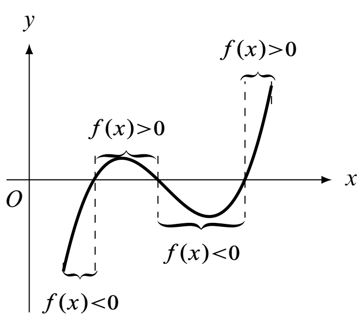
1. Η γραφική παράσταση της αντίθετης συνάρτησης $-f$ θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον οριζόντιο άξονα $x'x$.
2. Η γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από των άξονα $x'x$ και τα συμμετρικά των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.



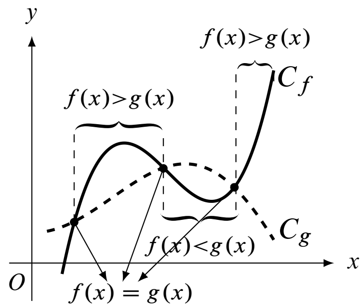
3. Η γραφική παράσταση της αντίθετης συνάρτησης $f(|x|)$ αποτελείται από τα σημεία της C_f και από τα συμμετρικά των σημείων της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

1. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :
   i. Όταν $f(x) > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$.
   ii. Όταν $f(x) < 0$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$.
   iii. Όταν $f(x) = 0$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.



2. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα τότε για κάθε $x \in D_f \cap D_g$ θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :



i. Όταν $f(x) > g(x)$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

ii. Όταν $f(x) < g(x)$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

iii. Όταν $f(x) = g(x)$ τότε η γραφικές παραστάσεις των f, g ταυτίζονται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, αν αυτό δε δίνεται, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1ο Βήμα : Αναγνωρίζουμε το είδος της συνάρτησης.

2ο Βήμα : Συμβουλευόμαστε τον πίνακα στον **Ορισμό 1** προκειμένου να πάρουμε κατάλληλους περιορισμούς αν αυτό είναι αναγκαίο. Πιο συγκεκριμένα αν μια συνάρτηση είναι

i. πολυωνυμική ή τριγωνομετρική με τύπο $f(x) = \text{ημ}x$ ή $f(x) = \text{συν}x$ τότε πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$.

ii. ρητή, τότε απαιτούμε ο παρονομαστής της να είναι διάφορος του μηδενός.

$$\text{Αν } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ τότε πρέπει } Q(x) \neq 0$$

iii. άρρητη, τότε θα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική.

$$\text{Αν } f(x) = \sqrt{A(x)} \text{ τότε πρέπει } A(x) \geq 0$$

iv. λογαριθμική, τότε η παράσταση που βρίσκεται μέσα στο λογάριθμο θα πρέπει να είναι θετική.

$$\text{Αν } f(x) = \log P(x) \text{ τότε πρέπει } P(x) > 0$$

v. εκθετική τότε απαιτούμε η βάση της δύναμης να είναι θετική και διάφορη της μονάδας.

$$\text{Αν } f(x) = P(x)^{Q(x)} \text{ τότε πρέπει } 1 \neq P(x) > 0$$

vi. τριγωνομετρική με τύπο $f(x) = \text{εφ}P(x)$ ή $f(x) = \text{σφ}P(x)$ τότε απαιτούμε η γωνία $P(x)$ των τριγωνομετρικών αυτών συναρτήσεων να ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } P(x) \neq \kappa\pi \text{ αντίστοιχα.}$$

3ο Βήμα : Μετά από κάθε περιορισμό, για να προκύψει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, εξαιρούμε από το σύνολο $\mathbb{R}$ εκείνες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τις οποίες μας υποδεικνύει ο περιορισμός.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

Έστω f, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού D_f. Για να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

i. Για τα κοινά σημεία της C_f με τον οριζόντιο άξονα $x'x$

1º Βήμα : Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ ώστε να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων.

2º Βήμα : Γράφουμε τα ζητούμενα σημεία με τετμημένες, τις λύσεις της εξίσωσης και τεταγμένες 0 : $A(x_1, 0), B(x_2, 0), \ldots$

ii. Για το κοινό σημείο της C_f με τον κατακόρυφο άξονα $y'y$

1º Βήμα : Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο 0 : $f(0)$.

2º Βήμα : Το ζητούμενο σημείο θα είναι της μορφής $A(0, f(0))$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Για να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g δύο συναρτήσεων f, g

1º Βήμα : λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

2º Βήμα : εξετάζουμε αν οι λύσεις της εξίσωσης ανήκουν στο σύνολο $D_f \cap D_g$.

3º Βήμα : Τα ζητούμενα σημεία είναι της μορφής $A(x_0, f(x_0))$ όπου x_0 είναι μια λύση της εξίσωσης.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 : ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΑ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού D_f. Για να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x τα οποία μας δίνουν αν η θέση της C_f είναι πάνω ή κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$

1º Βήμα : λύνουμε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$ αντίστοιχα.

2º Βήμα : υπολογίζουμε το ζητούμενο διάστημα $A \cap D_f$ όπου A είναι το σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ανίσωσης.

Ισοδύναμα μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ ώστε για κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού να βρεθεί η θέση της C_f σε σχέση με τον άξονα $x'x$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 5 : ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα. Για να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x τα οποία μας δείχνουν αν C_f βρίσκεται πάνω από την C_g ή αντίστροφα

1º Βήμα : λύνουμε τις ανισώσεις $f(x) > g(x)$ και $f(x) < g(x)$ αντίστοιχα.

2º Βήμα : υπολογίζουμε το ζητούμενο διάστημα $A \cap D_f \cap D_g$ όπου A είναι το σύνολο λύσεων αντίστοιχης ανίσωσης.

Ισοδύναμα μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ των δύο συναρτήσεων και με τη βοήθεια ενός πίνακα προσήμων να βρεθεί η σχετική θέση των δύο γραφικών παραστάσεων για κάθε διάστημα του συνόλου $D_f \cap D_g$.