

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κωνικές Τομές

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΙ

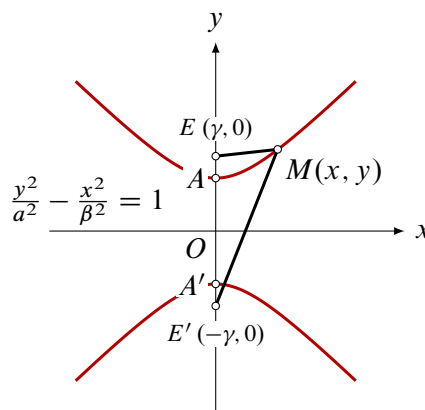
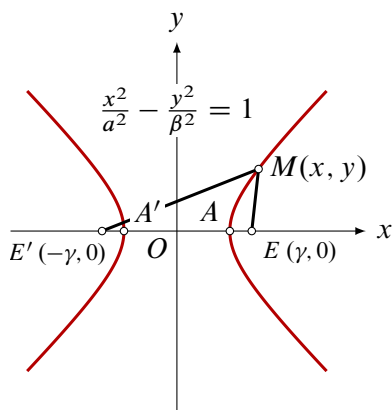
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία παραμένει σταθερή.

$$|ME - ME'| = 2a$$

Η καμπύλη της υπερβολής αποτελείται από δύο κλάδους, χαρακτηριστικό το οποίο εξηγεί την ύπαρξη της απόλυτης τιμής στην παραπάνω σχέση.

- Τα σταθερά σημεία που ορίζουν την υπερβολή ονομάζονται **εστίες** της υπερβολής.
- Η σταθερή διαφορά των αποστάσεων του τυχαίου σημείου M από τις εστίες συμβολίζεται με $2a$.
- Η απόσταση EE' μεταξύ των εστιών ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με 2γ .



- Τα σημεία στα οποία η υπερβολή τέμνει τους άξονες ονομάζονται **κορυφές** της.
- Η καμπύλη της υπερβολής περιγράφεται αλγεβρικά από μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

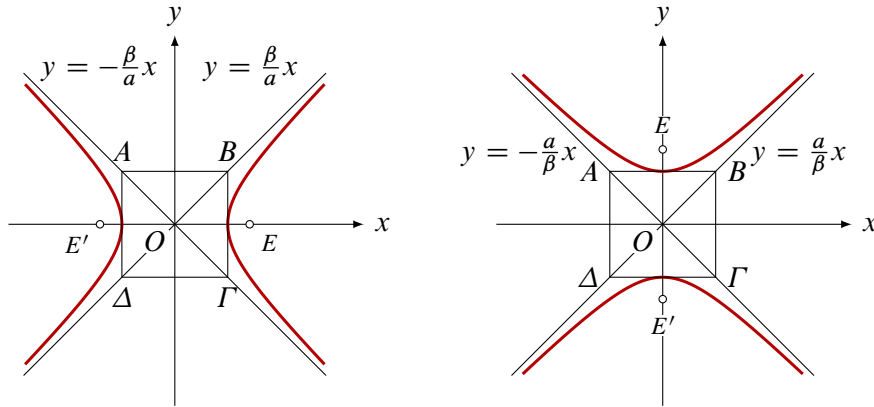
όπου $b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ και x, y οι συντεταγμένες των σημείων της.

- Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον οριζόντιο άξονα $x'x$ ενώ η υπερβολή $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον κατακόρυφο άξονα $y'y$.

- Οι δύο άξονες είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής και ονομάζονται **άξονες** της υπερβολής, ενώ το σημείο τομής τους δηλαδή η αρχή O των αξόνων, **κέντρο** της υπερβολής το οποίο είναι κέντρο συμμετρίας της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ασύμπτωτες μιας υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες γραμμές οι οποίες βρίσκονται απειροελάχιστα κοντά στην καμπύλη της υπερβολής, χωρίς να τέμνονται ή να εφάπτονται μ' αυτή.



Καθώς οι κλάδοι της υπερβολής επεκτείνονται απειρίοριστα, οι ασύμπτωτες πλησιάζουν όλο και περισσότερο την καμπύλη με αποτέλεσμα η απόστασή τους απ' αυτήν να τείνει στο μηδέν.

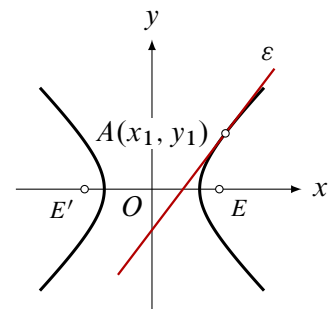
- Οι ασύμπτωτες ευθείες κάθε υπερβολής είναι δύο.
- Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής με εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι $y = \frac{b}{a}x$ και $y = -\frac{b}{a}x$, ενώ οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ έχουν εξισώσεις $y = \frac{a}{b}x$ και $y = -\frac{a}{b}x$.
- Τα σημεία $A(-a, b)$, $B(a, b)$, $\Gamma(a, -b)$ και $\Delta(-a, -b)$ είναι σημεία των ασύμπτωτων ευθειών και ορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ονομάζεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.
- Δύο από τις απέναντι πλευρές του ορθογωνίου βάσης εφάπτονται της υπερβολής στις κορυφές της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Εφαπτομένη μιας υπερβολής ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία εφάπτεται στην υπερβολή σε ένα σημείο της.

Έστω $A(x_1, y_1)$ το κοινό σημείο της υπερβολής με την εφαπτόμενη ευθεία. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή υπερβολής από της παραπάνω θα είναι :

- Για την υπερβολή με εστίες στον άξονα $x'x$: $(\varepsilon) : \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$
- Για την υπερβολή με εστίες στον άξονα $y'y$: $(\varepsilon) : \frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$

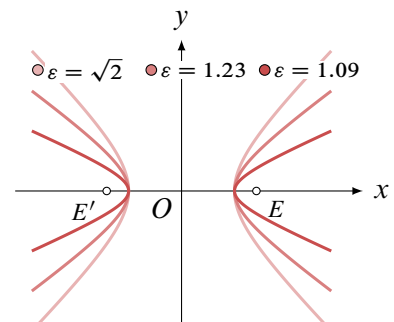


ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Εκκεντρότητα μιας υπερβολής ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\varepsilon \in \mathbb{R}$ που ορίζεται ως ο λόγος της εστιακής απόστασης προς την απόσταση των κορυφών της.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Το μέγεθος της εκκεντρότητας μιας υπερβολής καθορίζει το σχήμα της. Καθώς μειώνεται η εκκεντρότητα, η υπερβολή γίνεται όλο και πιο επιμήκης κατά μήκος του άξονα στον οποίον βρίσκονται οι εστίες.

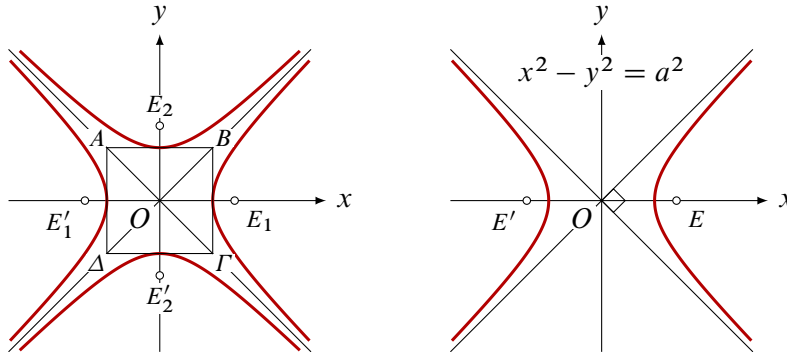


ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΥΠΕΡΒΟΛΕΣ

Συζυγείς ονομάζονται δύο υπερβολές οι οποίες έχουν τις εστίες τους σε κάθετους μεταξύ τους άξονες και κοινές ασύμπτωτες ευθείες. Έχουν τη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

Οι συζυγείς υπερβολές έχουν το ίδιο ορθογώνιο βάσης.



ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

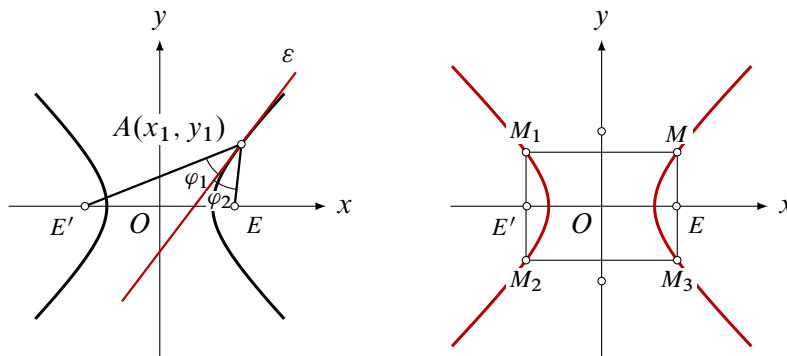
Ισοσκελής ονομάζεται η υπερβολή για την οποία οι παράμετροι a και β είναι ίσες. Με $a = \beta$ η εξίσωση μιας ισοσκελούς υπερβολής θα έχει τη μορφή

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ή} \quad y^2 - x^2 = a^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Αν $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ είναι μια υπερβολή του επιπέδου και $M(x, y)$ ένα σημείο αυτής, τότε τα σημεία $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ και $M_3(x, -y)$ ανήκουν και αυτά στην υπερβολή.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Η εφαπτόμενη ευθεία μιας υπερβολής με εστίες E, E' σε ένα τυχαίο σημείο της M , διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα ME και ME' που ενώνουν το σημείο με τις εστίες της υπερβολής. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, μια ευθεία με κατεύθυνση μια εστία της υπερβολής, ανακλάται στην καμπύλη και παίρνει κατεύθυνση προς την άλλη εστία της.