



Καθηγητής ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ  
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης  
Τμήμα Μαθηματικών  
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
Τ.Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΙΟΥΝΙΟΣ 1999

## "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

① [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y \log y = -\frac{1}{2 \log y}, \quad y(-1) = e^2.$$

② [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} (x+1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x+1) \frac{dy}{dx} + y = (x+1) \log^2(x+1), & x > -1 \\ y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1. \end{cases}$$

③ [ΜΟΝ. 2]. (i) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί ο Τύπος του Liouville για μία ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τριτεύς τάξης.

(ii) Ας είναι  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  ένα βασικό σύνολο λύσεων μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$ -τάξης. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση  $y$  αυτής, υπάρχουν  $n$  μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  έτσι ώστε

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

- ④ [ΜΟΝ. 2,5] Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση (E)  $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ ,  
όπου  $a_0, a_1$  και  $a_2 \neq 0$  είναι σταθερές, και  $b$  είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Ας είναι  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  οι ρίζες του πολυωνύμου  $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$  με  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  και ας υποθέσουμε ότι  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$  και  $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ . Επίσης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία σταθερά  $C \geq 0$  τέτοια ώστε

$$\int_x^{x+1} |b(t)| dt \leq C \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες.

- ⑤ [ΜΟΝ. 2,5] Με τη βοήθεια της αντικατάστασης  $x = e^t$ , να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (1 + e^t) \frac{dy}{dt} - y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με την αντικατάσταση  $x = e^t$ , θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές-λύσεις για  $x > 0$  (γύρω από το σημείο  $x_0 = 0$ ).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ