

Η έννοια του πολυωνύμου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Βασικές έννοιες

1. Για καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα να βρείτε τους όρους, τους συντελεστές, το σταθερό όρο και το βαθμό.

α. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

β. $Q(x) = x^2 + 5x - 2$

γ. $S(x) = -x^4 + x^3 - 5x + 8$

δ. $K(x) = x^2 - x^3 + 1$

ε. $M(x) = \frac{x^3}{4} - \sqrt{2}x^2 + \frac{3x}{5}$

2. Βρείτε το βαθμό σε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα.

α. $P(x) = 3x - x^3 + 5 + x^2$

β. $Q(x) = 4x^2 + 0x^4 - x^3 + 7$

γ. $R(x) = x^4 - 2x^2 + 4x^3 - x^4 + 7 - 5x$

δ. $S(x) = 0x^2 + 0x + 3$

ε. $K(x) = -5$

στ. $G(x) = 0$

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda)x^3 - (\lambda - 3)x^2 + (9 - \lambda^2)x + 2\lambda - 6$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το βαθμό του $P(x)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

4. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (a^2 - a)x^3 + (a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - 1)x + |a| - 1$$

Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$:

α. να είναι 3^{ου} βαθμού.

β. να είναι 2^{ου} βαθμού.

γ. να είναι 1^{ου} βαθμού.

δ. να είναι μηδενικού βαθμού.

ε. να μην έχει βαθμό.

5. Δίνεται το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού

$$P(x) = (a - \beta - 2)x^3 + (2a + 3\beta)x^2 + 2ax - 5\beta$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 2$.

β. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$$Q(x) = P^2(x) - xP(x)$$

■ Ισότητα πολυωνύμων

6. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = (|a| - 1)x^3 + (a^2 - a)x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 1$$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

7. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα πολυώνυμα

$$A(x) = (\lambda + 1)x^3 + (\lambda^2 + 2)x^2 + 2\lambda x - 3 \text{ και}$$

$$B(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + 3\lambda x^2 + 4x - 1 - \lambda$$

να είναι ίσα.

8. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου a ώστε τα παρακάτω πολυώνυμα να είναι ίσα.

$$P(x) = (a^2 - 3a)x^3 + x^2 + a \text{ και}$$

$$Q(x) = -2x^3 + a^2x^2 + (a^3 - 1)x + 1$$

■ Τιμές - Ρίζες πολυωνύμων

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $P(-2)$, $P(1)$, $P(0)$ και $P(3)$.

β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $3P^2(2) - 4P(-1) + P(0)$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ είναι ρίζες του $P(x)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 - (2a - 1)x - 3, \text{ με } a \in \mathbb{R},$$

για το οποίο ισχύει $P(2) = 7$.

α. Να δείξετε ότι $a = 3$.

β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του $P(x)$.

γ. Να υπολογίσετε τις τιμές $P(3)$, $P(-1)$, $P(0)$ και $P(-4)$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (3 - a)x^2 + a^2x - 4$$

με $a \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

α. Να δείξετε ότι $a = 2$.

β. Να βρεθούν οι τιμές $P(-1)$, $P(2)$ και $P(0)$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού

$$P(x) = (a^2 - 1)x^3 + (a^2 - 3a + 2)x^2 + (a + 2)x - 8$$

με $a \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $P(1) = -1$.

α. Να δείξετε ότι $a = 2$.

β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του $P(x)$.

γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{2P(2) - P^2(-1)}{P(0)}$$

14. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + 2x + 5$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $P(2) = -1$ και $P(-1) = 2$.

α. Να δείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = -2$.

β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $P(P(1))$.

15. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-2)^8 + 3(x-1)^7 - 4(2x-1)^6 - (2-x)^5 + 1$$

Να βρεθεί για το $P(x)$:

α. το άθροισμα των συντελεστών του.

β. ο σταθερός όρος του.

16. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει

$$P(2x-3) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6$$

α. Να βρεθούν οι τιμές $P(3)$, $P(-1)$ και $P(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι ρίζα του $P(x)$.

■ Πράξεις πολυωνύμων

17. Δίνονται τα ακόλουθα πολυώνυμα

$$A(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4,$$

$$B(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x - 10 \text{ και}$$

$$\Gamma(x) = 3x - 4$$

α. Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα

i. $P(x) = A(x) + B(x)$

ii. $Q(x) = B(x) - A(x)$

iii. $R(x) = \Gamma(x) \cdot A(x)$

β. Ποιος είναι ο βαθμός αυτών των πολυωνύμων;

18. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε

$$(x-2) \cdot P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

α. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $2P(-1) + P^2(0)$.

19. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^2 - 3x + 2$ και $B(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα

α. $P^2(x)$

γ. $P^2(x) - xQ(x)$

β. $P(x) \cdot Q(x)$

δ. $xP(x) - Q(x)$

20. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

Να βρεθεί πολυώνυμο $Q(x)$ έτσι ώστε να ισχύει $Q^2(x) = P(x)$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 3$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $P(-2) = 7$ και $P(1) = 10$.

α. Να δείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 2$.

β. Να βρεθεί το πολυώνυμο $(x-1)P(x)$.

22. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x+3) = x^3 + x^2 + 3x - 5$$

α. Να δείξετε ότι $P(2) = -8$.

β. Να βρεθεί το $P(x)$.

23. Δίνονται πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - x^2 - 2x - 8$$

Να βρεθούν τα $P(x)$ και $Q(x)$.

■ Τράπεζα Θεμάτων - ΙΕΠ

24. Θέμα 2 - 21998

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-2) \cdot (x^6 + 1)$$

α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

25. Θέμα 2 - 20640

Δίνεται το πολυώνυμο

$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$$

- α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
β. Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i . Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_1(x) = P(x) + Q(x)$$

δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii . Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

έχει ρίζα τον αριθμό 1.

26. Θέμα 2 - 15113

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}$$

- α. Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

■ Ερωτήσεις θεωρίας

27.