ΘΕΜΑ Α

Α.1 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$, τοπικό ελάχιστο;

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, στο $+\infty$;

Α.3 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Α.4 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.

α. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

β. Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f ονομάζονται τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος της f, ή τα σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ισχύει $f'(x_0)$ σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a, \beta)$, τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό.

ε. Ισχύει ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

ΘΕΜΑ Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

Β.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β.2 Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β.3 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f'}$ στο σημείο της $M(2, f'(2))$.

Β.4 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & , x \geq 0 \\ x^2 + ax & , x < 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2, 2)$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Γ.2 Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ.3 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

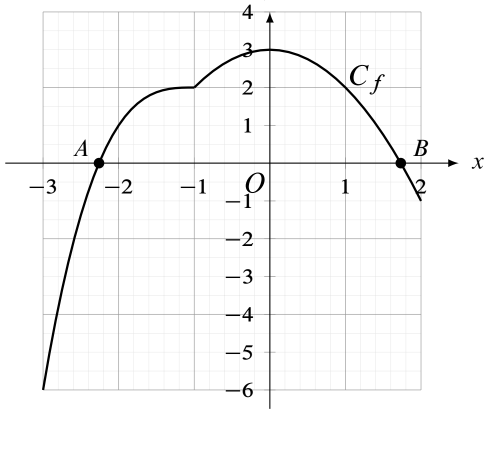
Γ.4 Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$x\left(e^{x-1} - 2\right) \geq -1$$

για κάθε $x \geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ (Τράπεζα Θεμάτων - 29644)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[-3, 2]$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία A και B. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3, 2]$.



Δ.1 Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-3, 2]$.

β. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Δ.2 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$.