Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
31 Μαρτίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ το οποίο είναι

- παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{a}$ και
- έχει μέτρο πολλαπλάσιο του μέτρου του $\vec{a}$ ίσο με $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Αν $\lambda > 0$ τότε το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$, ενώ αν $\lambda < 0$ τότε το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ
Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ το οποίο μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ στη μορφή :

$$\vec{\delta} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{\beta}$$

όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί. Γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός ν σε πλήθος διανυσμάτων $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_2}$ θα έχει ομοίως τη μορφή

$$\vec{\nu} = \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_\nu \cdot \vec{a_\nu}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και πραγματικούς αριθμούς λ, μ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για την πράξη του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό.

Ιδιότητα	Συνθήκη
Επιμεριστική (ως προς αριθμό)	$\lambda\left(\vec{a} \pm \vec{\beta}\right) = \lambda \cdot \vec{a} \pm \lambda \cdot \vec{\beta}$
Επιμεριστική (ως προς διάνυσμα)	$(\lambda \pm \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} \pm \mu \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$

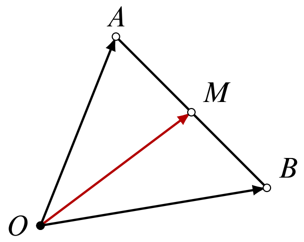
Πρόσημο γινομένου	$\left(-\lambda \cdot \vec{a}\right) = (-\lambda) \cdot \vec{a} = -\left(\lambda \cdot \vec{a}\right)$
Νόμος διαγραφής (ως προς διάνυσμα)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq 0$ τότε $\lambda = \mu$
Νόμος διαγραφής (ως προς αριθμό)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το ένα διάνυσμα να είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

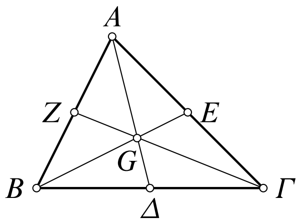
i. Αν $\lambda > 0$ τότε τα διανύσματα είναι ομόρροπα : $\vec{a} \upuparrows \vec{\beta}$
ii. Αν $\lambda < 0$ τότε τα διανύσματα είναι αντίρροπα : $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
Η διανυσματική ακτίνα του μέσου M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων A και B.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΥ
Η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OG}$ του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με το ένα τρίτο του αθροίσματος των διανυσματικών ακτίνων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ των κορυφών του τριγώνου.



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}}{3}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$$

Επιπλέον το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των κορυφών A, B και Γ του τριγώνου με σημείο αναφοράς το βαρύκεντρο του, ισούται με το μηδενικό διάνυσμα.