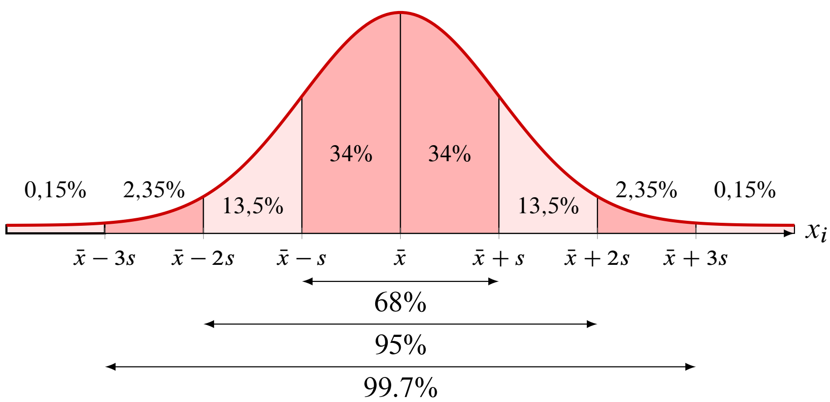
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , : 26610 20144 , : 6932327283 - 6955058444

12 Φεβρουαρίου 2025

Μαθηματικά Γ΄ ΕΠΑΛ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Φρόνιμος Σπύρος

Τυπολόγιο

1ο Κεφάλαιο Διαφορικός Λογισμός

1.1 Συναρτήσεις

1.1 Πεδίο ορισμού συνάρτησης D_f

Είδος	Τύπος	Περιορισμός
Πολυωνυμική	$f(x) = A(x)$	–
Ρητή	$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
Άρρητος παρονομαστής	$f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$
Ημίτονο - Συνημίτονο	$f(x) = \text{ημ}A(x)$ ή $f(x) = \text{συν}A(x)$	–
Εφαπτομένη	$f(x) = \text{εφ}A(x)$	$A(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
Συνεφαπτομένη	$f(x) = \text{σφ}A(x)$	$A(x) \neq \kappa\pi$

Πίνακας 1: Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

1.2 Πράξεις συναρτήσεων

- Άθροισμα : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Διαφορά : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- Γινόμενο : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
- Πηλίκο : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

1.3 Το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη $C_f \Leftrightarrow f(a) = \beta$.

1.4 Σημείο τομής της C_f μέ τον άξονα

- $x'x : f(x) = 0$
- $y'y : A(0, f(0))$

1.5 Σχετική θέση C_f με τον άξονα $x'x$

- Η C_f είναι πάνω από τον $x'x \Rightarrow f(x) > 0$
- Η C_f είναι κάτω από τον $x'x \Rightarrow f(x) < 0$

1.6 Σχετική θέση C_f με C_g

- Η C_f είναι πάνω από την $C_g \Rightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f είναι κάτω από την $C_g \Rightarrow f(x) < g(x)$

1.7 Μονοτονία συνάρτησης f

- Γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f \uparrow \Delta : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f \downarrow \Delta : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

1.8 Ακρότατα της f

- Ολικό μέγιστο στη θέση x_0 : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$
- Ολικό ελάχιστο στη θέση x_0 : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$.
- Τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0.
- Τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_0.

1.2 Όρια - Συνέχεια

1.9 Όριο συνάρτησης στο x_0 : $\lim_{x \to x_0} f(x)$

1.10 Συνέχεια σε σημείο x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

1.11 Ιδιότητες ορίων :

Πράξη	Ιδιότητα
Άθροισμα	$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
Πολλαπλάσιο	$\lim_{x \to x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \to x_0} f(x)$
Γινόμενο	$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
Πηλίκο	$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$
Δύναμη	$\lim_{x \to x_0} (f(x))^\nu = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^\nu$
Ρίζα	$\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$

Πίνακας 2: Ιδιότητες των ορίων

1.3 Παράγωγος

1.12 Παράγωγος σε σημείο $x_0 \in D_f$: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1.13 Παράγωγος συνάρτηση : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ με $x \in A \subseteq D_f$ όπου A το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη.

ΑΠΛΕΣ		ΣΥΝΘΕΤΕΣ		
Συνάρτηση f	**Παράγωγος f'**	**Συνάρτηση**	**Παράγωγος**	**Περιγραφή**
c	0			
x	1			

ΑΠΛΕΣ		ΣΥΝΘΕΤΕΣ		
Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση	Παράγωγος	Περιγραφή
x^{ν}	$\nu x^{\nu-1}$	$f^{\nu}(x)$	$\nu f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x)$	$\nu(\text{βάση})^{\nu-1}(\text{βάση})'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{(\text{Παρονομαστής})'}{\text{Παρονομαστής}^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\frac{(\text{Υπόριζο})'}{2\cdot\text{Ρίζα}}$
$\etaμx$	$\text{συν}x$	$\text{ημ}f(x)$	$\text{συν}f(x)\cdot f'(x)$	$\text{συν}(\text{Γωνία})\cdot(\text{Γωνία})'$
$\text{συν}x$	$-\text{ημ}x$	$\text{συν}f(x)$	$-\text{ημ}f(x)\cdot f'(x)$	$-\text{ημ}(\text{Γωνία})\cdot(\text{Γωνία})'$
$\text{εφ}x$	$\frac{1}{\text{συν}^2x}$	$\text{εφ}f(x)$	$\frac{f'(x)}{\text{συν}^2f(x)}$	$\frac{(\text{Γωνία})'}{\text{συν}^2(\text{Γωνία})}$
$\text{σφ}x$	$-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$	$\text{σφ}f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\text{ημ}^2f(x)}$	$-\frac{(\text{Γωνία})'}{\text{ημ}^2(\text{Γωνία})}$

Πίνακας 3: Παράγωγοι απλών και σύνθετων συναρτήσεων

Πράξη	Συνάρτηση	Παράγωγος
ʼΑθροισμα - Διαφορά	$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
Πολλαπλάσιο	$c\cdot f(x)$	$c\cdot f'(x)$
Γινόμενο	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Πηλίκο	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Σύνθεση	$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$

Πίνακας 4: Κανόνες παραγώγισης πράξεων

1.4 Εφαπτομένη - Ρυθμός μεταβολής

1.14 Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$: $y=\lambda x+\beta$

1.15 Συντελεστής διεύθυνσης εφαπτομένης : $\lambda = f'(x_0) = \text{εφ}\omega$

1.16 Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 : $f'(x_0)$

2ο Κεφάλαιο Στατιστική

2.1 Βασικές έννοιες - Πίνακες συχνοτήτων

2.1 ν : μέγεθος δείγματος

2.2 κ : Πλήθος τιμών μεταβλητής X

2.3 $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu}$: Παρατηρήσεις του δείγματος

2.4 $x_1, x_2, \ldots, x_{\kappa}$: Τιμές μεταβλητής X.

2.5 $\nu_i, i=1,\ldots,\kappa$: Συχνότητα της τιμής x_i.

2.6 $f_i, i=1,\ldots,\kappa$: Σχετική συχνότητα της τιμής x_i.

2.7 $f_i\%, i = 1, \ldots, \kappa$: Σχετική συχνότητα επί τοις 100 της τιμής x_i.

2.8 $N_i, i = 1, \ldots, \kappa$: Αθροιστική συχνότητα.

2.9 $F_i, i = 1, \ldots, \kappa$: Αθροιστική σχετική συχνότητα.

2.10 $F_i\%, i = 1, \ldots, \kappa$: Αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις 100.

2.11 Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα ν_i

α. $0 \leq \nu_i \leq \nu$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$

γ. $\nu_i = N_i - N_{i-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

2.12 Ιδιότητες που αφορούν τη συχνότητα f_i

α. $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $0 \leq f_i \leq 1$ και $0 \leq f_i\% \leq 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

γ. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$ και $f_1\% + f_2\% + \ldots + f_\kappa\% = 100$

δ. $f_i = F_i - F_{i-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ε. $f_i\% = F_i\% - F_{i-1}\%$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

2.13 Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική συχνότητα N_i

α. $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $N_i = N_{i-1} + \nu_i$ γ. $N_1 = \nu_1$ δ. $N_\kappa = \nu$

2.14 Ιδιότητες που αφορούν την αθροιστική σχετική συχνότητα F_i

α. $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

β. $F_i\% = f_1\% + f_2\% + \ldots + f_i\%$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

γ. $F_i = F_{i-1} + f_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

δ. $F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ε. $F_i = \frac{N_i}{\nu}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

στ. $F_i\% = \frac{N_i}{\nu} \cdot 100$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ζ. $F_1 = f_1$

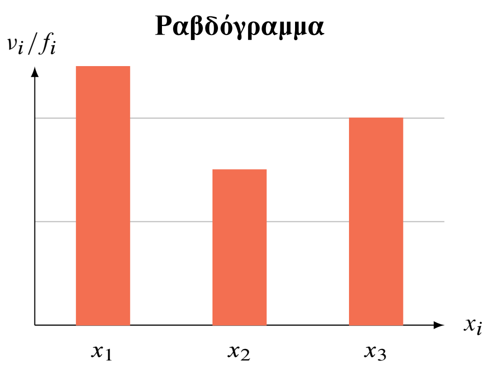
η. $F_1\% = f_1\%$

θ. $F_\kappa = 1$

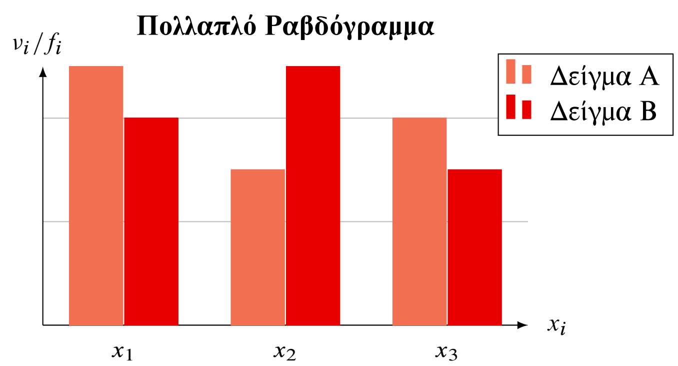
ι. $F_\kappa\% = 100$

2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων - Σχήματα

2.15 Ραβδόγραμμα : Χρησιμοποιείται για την παράσταση δεδομένων **ποιοτικής** μεταβλητής.



Σχήμα 1: Ραβδόγραμμα



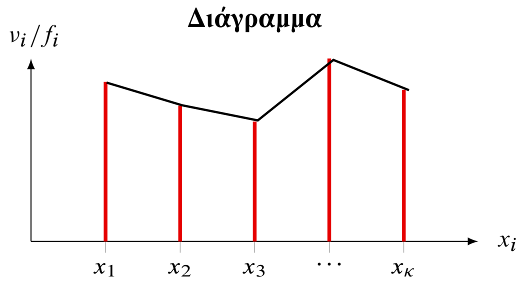
Σχήμα 2: Πολλαπλό ραβδόγραμμα

2.16 Διάγραμμα : Χρησιμοποιείται για την παράσταση δεδομένων **ποσοτικής** μεταβλητής.

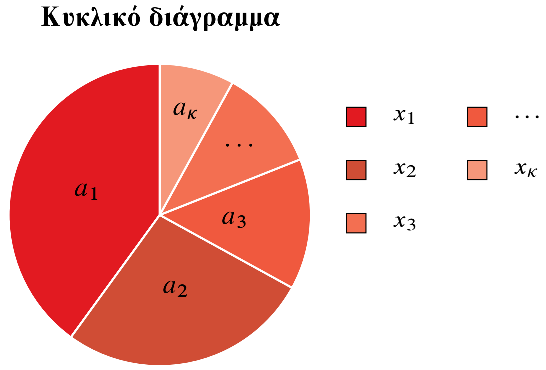
2.17 Κυκλικό διάγραμμα :

α. Χρησιμοποιείται για την παράσταση δεδομένων τόσο **ποιοτικής** όσο και **ποσοτικής** μεταβλητής.

β. Μέτρο τόξου της τιμής x_i σε κυκλικό διάγραμμα : $a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360° = f_i \cdot 360°$.



Σχήμα 3: Διάγραμμα - Πολύγωνο συχνοτήτων



Σχήμα 4: Κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων

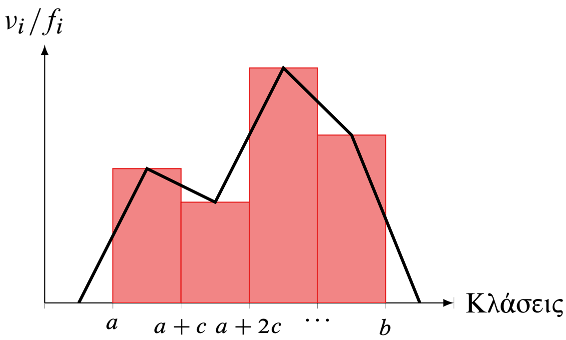
2.3 Ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

2.18 Εύρος παρατηρήσεων $R = t_{\max} - t_{\min}$

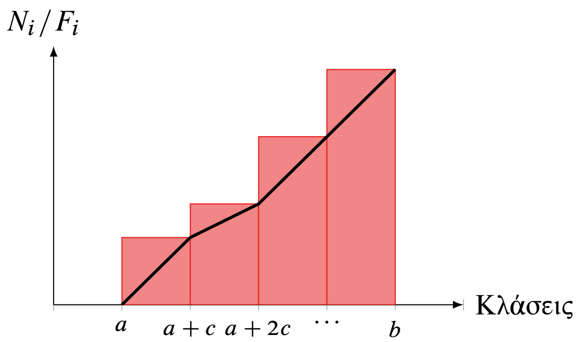
2.19 Πλάτος κλάσης $c = \frac{R}{\kappa}$ όπου κ το πλήθος των κλάσεων.

2.20 Κεντρική τιμή x_i της κλάσης $[a, \beta)$

- $x_i = \frac{a + \beta}{2}, i = 1, \ldots, \kappa$
- $x_i = x_{i-1} + c,\ i = 2, \ldots, \kappa$



Σχήμα 5: Ιστόγραμμα - Πολύγωνο συχνοτήτων



Σχήμα 6: Ιστόγραμμα - Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

2.4 Μέτρα θέσης

2.21 Μέση τιμή :

α. Με παρατηρήσεις t_i : $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i$

β. Με συχνότητες ν_i : $\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$

γ. Με συχνότητες f_i : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

2.22 Σταθμικός μέσος : $\bar{x} = \dfrac{t_1 w_1 + t_2 w_2 + \ldots + t_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$ όπου w_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι οι συντελεστές βαρύτητας των παρατηρήσεων.

2.23 Διάμεσος

α. $\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$ για ν: περιττό

β. $\delta = \dfrac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$ για ν: άρτιο

γ. Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

- $\delta = L_i + \dfrac{c}{\nu_i}\left(\dfrac{\nu}{2} - N_{i-1}\right)$.
- $\delta = L_i + \dfrac{c}{f_i\%}(50 - F_{i-1}\%)$.

όπου i : ο δείκτης της κλάσης στην οποία ξεπερνάμε 1η φορά ή συναντάμε το μισό δείγμα (βλέπε μέθοδο 13 και 14)

2.5 Μέτρα διασποράς

2.24 Εύρος

- Με παρατηρήσεις t_i : $R = t_{max} - t_{min}$.
- Από απλό πίνακα συχνοτήτων ή πίνακα ομαδοποιημένων παρατηρήσεων : $R = x_{max} - x_{min}$.

2.25 Διακύμανση

α. Με παρατηρήσεις t_i : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$ για **ακέραιο** μέσο όρο.

β. Με παρατηρήσεις t_i : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$ για **μη ακέραιο μέσο** όρο.

γ. Με συχνότητα ν_i : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2\nu_i$ για **ακέραιο** μέσο όρο.

δ. Με συχνότητα ν_i : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{\sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i - \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$ για **μη ακέραιο** μέσο όρο.

ε. Με συχνότητα f_i : $s^2 = \sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$

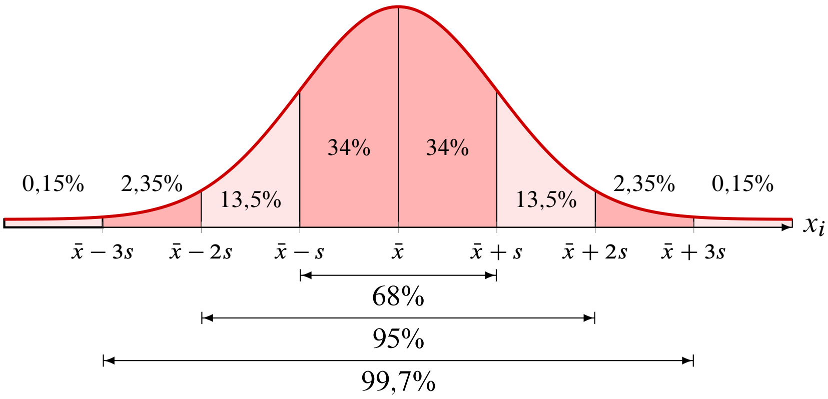
2.26 Σχέση μεταξύ διακύμανσης και μέσης τιμής : $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ όπου $\overline{x^2} = \frac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i^2$

2.27 Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2}$

2.28 Συντελεστής μεταβλητότητας $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|}$

- Αν $CV \leq 10\%$ τότε το δείγμα είναι ομοιογενές.
- Αν $CV_A < CV_B$ τότε το δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το B.

2.29 Κανονική κατανομή



Σχήμα 7: Κανονική κατανομή

2.30 Μεταβολές των παρατηρήσεων
Δίνονται οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μιας μεταβλητής X, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Οι μεταβολές στις τιμές αυτές επηρεάζουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα.

Αλλαγή	Τελικές τιμές	Νέα μέση τιμή	Νέα τυπική απόκλιση
Αύξηση - Μείωση	$y_i = x_i \pm c$	$\bar{y} = \bar{x} \pm c$	$s_y = s_x$
Πολλαπλασιασμός	$y_i = x_i \cdot c$	$\bar{y} = \bar{x} \cdot c$	$s_y = s_x \cdot \|c\|$
Διαίρεση	$y_i = \frac{x_i}{c}$	$\bar{y} = \frac{\bar{x}}{c}$	$s_y = \frac{s_x}{\|c\|}$
Αύξηση κατά $a\%$	$y_i = x_i\,(1 + a\%)$	$\bar{y} = \bar{x}\,(1 + a\%)$	$s_y = s_x\,(1 + a\%)$
Μείωση κατά $a\%$	$y_i = x_i\,(1 - a\%)$	$\bar{y} = \bar{x}\,(1 - a\%)$	$s_y = s_x\,(1 - a\%)$
Μέρος	$y_i = x_i \cdot a\%$	$\bar{y} = \bar{x} \cdot a\%$	$s_y = s_x \cdot a\%$
Συνδυασμός	$y_i = \lambda \cdot x_i \pm c$	$\bar{y} = \lambda \cdot \bar{x} \pm c$	$s_y = \|\lambda\| s_x$

Πίνακας 5: Υπολογισμός νέας μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης από μεταβολές παρατηρήσεων

Βασικά είδη ασκήσεων

1ο Κεφάλαιο Διαφορικός λογισμός

Άσκηση 1.1 : Εύρεση πεδίου ορισμού

Επιλέγουμε, σύμφωνα με τον πίνακα 1, τους απαραίτητους περιορισμούς. Το πεδίο ορισμού προκύπτει από τη συναλήθευση όλων των περιορισμών.

Παράδειγμα 1 : Πεδίο ορισμού

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

β. $f(x) = \sqrt{9-3x}$

γ. $f(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

δ. $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \sqrt{x-2}$

ΛΥΣΗ

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

άρα το πεδίο ορισμού της είναι $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

β. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$9-3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -9 \Rightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{-9}{-3} \Rightarrow x \leq 3$$

άρα το πεδίο ορισμού της είναι $D_f = (-\infty, 3]$.

γ. Για να ορίζεται η f πρέπει

$$x^2-3x+2 > 0$$
$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

- $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Επομένως, σύμφωνα με το διπλανό πίνακα προσήμων, το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

δ. Ο τύπος της συνάρτησης περιέχει και κλάσμα και ρίζα. Επομένως για να ορίζεται η f πρέπει να ισχύουν συγχρόνως

- $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ και
- $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Για τους περιορισμούς αυτούς βρίσκουμε τις κοινές τιμές του x που τους επαληθεύουν οπότε θα έχει πεδίο ορισμού $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Άσκηση 1.2 : Σημεία τομής με τους άξονες

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f με τον

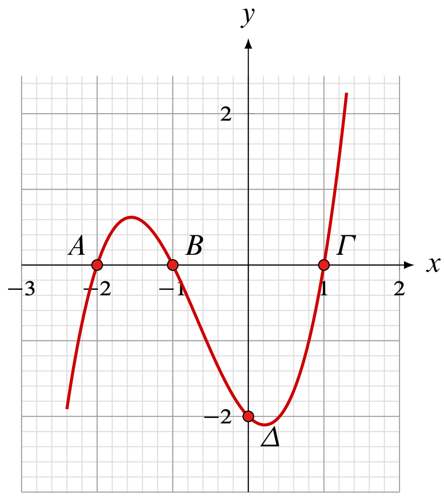
- άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- άξονα $y'y$, υπολογίζουμε, αν ορίζεται, το $f(0)$.

Παράδειγμα 2 : Σημεία τομής της C_f με τους άξονες

Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.



- Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Rightarrow$$
$$(x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

  - $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ή
  - $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

  Επομένως η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-2, 0)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(-1, 0)$.

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 - 2 = -2$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, -2)$.

Άσκηση 1.3 : Όριο της μορφής $\frac{0}{0}$ σε σημείο x_0

- Αν η συνάρτηση είναι ρητή τότε παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα ώσπου να εμφανιστεί η παράσταση $x - x_0$ και να απλοποιηθεί.
- Αν η συνάρτηση περιέχει ρίζα, πολλαπλασιάζουμε πάνω και κάτω με τη συζυγή παράσταση του όρου που έχει τη ρίζα. Στη συνέχεια κάνουμε πράξεις μέχρι να διαιρεθεί η παράσταση $x - x_0$. Τέλος υπολογίζουμε το όριο.

Παράδειγμα 3 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής συνάρτησης

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

ΛΥΣΗ

Για το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$ στο σημείο $x = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(x^2 + x - 2\right)}{(x - 1)(x + 1)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Παράδειγμα 4 : Όριο $\frac{0}{0}$ άρρητης συνάρτησης

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9}$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ ορίζεται στο $D_f=[-1,3)\cup(3,+\infty)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}^2-2^2}{(x+3)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Άσκηση 1.4 : Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο

α. Υπολογίζουμε το όριο της f στο σημείο x_0: $\lim_{x\to x_0} f(x)$

β. Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$.

Αν είναι ίσα τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

Παράδειγμα 5 : Έλεγχος συνέχειας

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & ,x\neq 1\\ 2 & ,x=1\end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

ΛΥΣΗ

Από το 2ο κλάδο της f φαίνεται αμέσως ότι $f(1)=2$. Επίσης

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-3x+4)=1^2-3\cdot 1+4=2$$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$ οπότε η f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$.

Παράδειγμα 6 : Συνέχεια συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-a-1}{x+1} & ,x\neq -1\\ a-2 & ,x=-1\end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Αφού η f είναι συνεχής, τότε θα είναι συνεχής και στο $x=-1$ που σημαίνει

$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$$

- $f(-1)=a-2$.
- $$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax-a-1}{x+1} = \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)-a(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1-a)}{x+1} = \\ &= \lim_{x\to -1}(x-1-a)=-2-a\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει η εξίσωση

$$a-2=-2-a\Rightarrow 2a=0\Rightarrow a=0$$

Άσκηση 1.5 : Παράγωγος απλών - σύνθετων συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους απλών ή και σύνθετων συναρτήσεων ακολουθούμε τον πίνακα 3 καθώς και τους κανόνες παραγώγισης πίνακα 4 για τις πράξεις.

Παράδειγμα 7 : Υπολογισμός απλών παραγώγων

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων

α. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + \sqrt{x} - \eta\mu x$

β. $f(x) = \varepsilon\varphi x - \frac{4}{x} + \sqrt{3}$

γ. $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$

δ. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x+3}$

ΛΥΣΗ

α. Για να ορίζεται η f πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_f = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3x^4 - 5x^3 + \sqrt{x} - \eta\mu x\right)' = \\ &= \left(3x^4\right)' - \left(5x^3\right)' + \left(\sqrt{x}\right) - (\eta\mu x)' = \\ &= 12x^3 - 15x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sigma\upsilon\nu x \end{aligned}$$

β. Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$ άρα $D_f = \mathbb{R}^*$. Για κάθε $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\varepsilon\varphi x - \frac{4}{x} + \sqrt{3}\right)' = (\varepsilon\varphi x)' - \left(\frac{4}{x}\right)' + \left(\sqrt{3}\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{4}{x^2}$$

γ. Η f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2 \cdot \eta\mu x)' = (x^2)' \cdot \eta\mu x + x^2 \cdot (\eta\mu x)' = 2x \cdot \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

δ. Η f ορίζεται όταν $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$. Για κάθε $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 - x}{x+3}\right)' = \frac{(x^3 - x)'(x+3) - (x^3 - x)(x+3)'}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 1)(x+3) - (x^3 - x)}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{3x^3 - 9x^2 - x - 3 - x^3 + x}{(x+3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2 - 3}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8 : Υπολογισμός σύνθετων παραγώγων

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων

α. $f(x) = \left(x^2 - 4x\right)^5$

β. $f(x) = \eta\mu\left(x^3\right)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

δ. $f(x) = \dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ΛΥΣΗ

α. Η f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left[(x^2 - 4x)^5\right]' = 5(x^2 - 4x)^5 \cdot (x^2 - 4x)' = 5(x^2 - 4x)^5(2x - 4)$$

β. Για κάθε $x \in D_f$ έχουμε:

$$f'(x) = \left[\eta\mu\left(x^3\right)\right]' = \sigma\upsilon\nu\left(x^3\right) \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2\sigma\upsilon\nu\left(x^3\right)$$

γ. Για να ορίζεται η f πρέπει

$$x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 2x})' = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} =$$
$$= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

δ. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = -\frac{3(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{3\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Άσκηση 1.6 : Εφαπτομένη της C_f όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$

α. Υπολογίζουμε την $f'(x)$.

β. Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$ και την $f'(x_0)$ που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

γ. Τοποθετούμε στην εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(x_0)$.

δ. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις συντεταγμένες του σημείου $A(x_0, f(x_0))$ στη θέση των μεταβλητών x, y και λύνοντας την, υπολογίζουμε το β.

ε. Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας.

Παράδειγμα 9 : Εφαπτομένη σε γνωστό σημείο

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ στο σημείο $A(3, f(3))$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Για κάθε $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{(x^2)'(x-2) - x^2(x-2)'}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

Θέτοντας λοιπόν $x = 3$ έχουμε

- $f(3) = \dfrac{3^2}{3-2} = 9$
- $f'(3) = \dfrac{3^2 - 4 \cdot 3}{(3-2)^2} = -3$

Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = -3x + \beta$$

Αφού το σημείο $A(3, 9)$ ανήκει στην ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα για $x = 3$ και $y = 9$ έχουμε

$$9 = -3 \cdot 3 + \beta \Rightarrow 9 = -9 + \beta \Rightarrow \beta = 18$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -3x + 18$.

Άσκηση 1.7 : Εφαπτομένη της C_f όταν γνωρίζουμε την κλίση της ευθείας

α. Θεωρούμε σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$.

β. Υπολογίζουμε την $f'(x)$.

γ. Υπολογίζουμε, αν δεν μας δίνεται, το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης.

δ. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x_0) = \lambda$ και βρίσκουμε το x_0 και στη συνέχεια το $f(x_0)$.

ε. Τοποθετούμε στην εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(x_0)$.

στ. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις συντεταγμένες του $A(x_0, f(x_0))$ στη θέση των μεταβλητών x, y και λύνοντας την υπολογίζουμε το β.

ζ. Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας.

- Παρατήρηση 1

- Δύο ευθείες παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- Για δύο κάθετες ευθείες ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
- Οι ευθείες παράλληλες με τον άξονα $x'x'$ έχουν $\lambda = 0$.
- Αν η ευθεία σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x'$ τότε $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$.

Παράδειγμα 10 : Εφαπτομένη με γνωστή κλίση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f η οποία

α. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.

β. είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta : y = -x + 2$.

γ. είναι κάθετη στην ευθεία $\eta : y = \frac{x}{5} + 1$.

δ. σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$ με τον $x'x$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επίσης έχουμε

$$f'(x) = \left(x^2 - x - 2\right)' = 2x - 1$$

α. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$ επομένως :

$$\lambda = 3 \Rightarrow f'(x_0) = 3 \Rightarrow 2x_0 - 1 = 3 \Rightarrow x_0 = 2$$

Για $x_0 = 2$ λοιπόν είναι $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$. Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = 2x + \beta$$

Αφού το σημείο $A(2, 0)$ ανήκει στην ευθεία τότε για $x = 2$ και $y = 0$ έχουμε

$$0 = 2 \cdot 2 + \beta \Rightarrow 0 = 4 + \beta \Rightarrow \beta = -4$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 4$.

β. Η δοσμένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = -1$ ενώ η ζητούμενη εφαπτομένη ε έχει $\lambda_\varepsilon = f'(x_0)$. Αφού $\varepsilon \parallel \zeta$ τότε

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Rightarrow f'(x_0) = -1 \Rightarrow 2x_0 - 1 = -1 \Rightarrow x_0 = 0$$

Θέτοντας $x_0 = 0$ θα είναι $f(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2$. Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = -x + \beta$$

Αφού το σημείο $A(0, -2)$ ανήκει στην ευθεία τότε για $x = 0$ και $y = -2$ έχουμε

$$-2 = -1 \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = -2$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -x - 2$.

γ. Η ευθεία η έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta = \frac{1}{5}$ ενώ η εφαπτομένη ε έχει $\lambda_\varepsilon = f'(x_0)$. Αφού $\varepsilon \perp \eta$ τότε

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Rightarrow f'(x_0) \cdot \frac{1}{5} = -1 \Rightarrow f'(x_0) = -5 \Rightarrow 2x_0 - 1 = -5 \Rightarrow x_0 = -2$$

Θέτοντας $x_0 = -2$ έχουμε $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$. Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = -5x + \beta$$

Αφού το σημείο $A(-2,4)$ ανήκει στην ευθεία τότε για $x=-2$ και $y=4$ έχουμε

$$4=-5\cdot(-2)+\beta \Rightarrow 4=10+\beta \Rightarrow \beta=-6$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y=-5x-6$.

δ. Η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=0$. Συνεπώς :

$$\lambda=0 \Rightarrow f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0-1=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

Για $x_0=\frac{1}{2}$ λοιπόν είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=-\frac{9}{4}$. Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=\beta$$

Αφού το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$ ανήκει στην ευθεία τότε για $x=\frac{1}{2}$ και $y=-\frac{9}{4}$ έχουμε $\beta=-\frac{9}{4}$ άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y=-\frac{9}{4}$.

Άσκηση 1.8 : Μονοτονία - Ακρότατα

α. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και ελέγχουμε αν είναι συνεχής.

β. Υπολογίζουμε την $f'(x)$.

γ. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.

δ. Λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$.

ε. Σχηματίζουμε και συμπληρώνουμε πίνακα προσήμων της f' και μονοτονίας της f.

στ. Απαντάμε για το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα καθώς και για το είδος και τη θέση των ακρότατων εκεί που αλλάζει η μονοτονία.

Παράδειγμα 11 : Μονοτονία - Ακρότατα

Να μελετσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x)=\left(x^2-4x+2\right)'=2x-4$$

Έστω λοιπόν

- $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$
- $f'(x)>0 \Rightarrow 2x-4>0 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2$
- $f'(x)<0 \Rightarrow 2x-4<0 \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow x<2$

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα πρόσημα της f' καθώς και τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$. Επίσης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=2$ το οποίο ισούται με $f(2)=-1$.

Άσκηση 1.9 : Ρυθμός μεταβολής

Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f τότε υπολογίζουμε την παράγωγο f' της f. Αν ζητάμε το ρυθμό μεταβολής της f σε ένα σημείο x_0 τότε υπολογίζουμε το $f'(x_0)$. Σε αρκετά προβλήματα πρέπει να κατασκευάσουμε εμείς τον τύπο της f.

Παράδειγμα 12 : Ρυθμός μεταβολής - Γεωμετρία

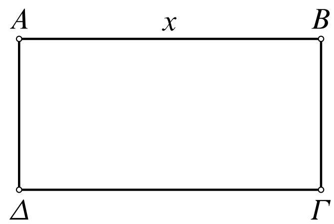
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με σταθερή περίμετρο 20 cm και μήκος $AB = x$ cm.

α. Να εκφράσετε το πλάτος του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

β. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, ως προς x, όταν $x = 3$ cm.

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 20cm. Θα είναι λοιπόν



$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 20 \Rightarrow$$
$$x + B\Gamma + x + B\Gamma = 20 \Rightarrow$$
$$2B\Gamma = 20 - 2x \Rightarrow B\Gamma = 10 - x$$

β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$$E = AB \cdot B\Gamma = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

Επιπλέον πρέπει να ισχύει $x > 0$ καθώς και $10 - x > 0 \Rightarrow x < 10$. Οπότε

$$E(x) = -x^2 + 10x \ , \ x \in (0, 10)$$

Για κάθε $x \in (0, 10)$ έχουμε

$$E'(x) = \left(-x^2 + 10x\right)' = -2x + 10$$

άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, ως προς x όταν $x = 3$cm ισούται με $E'(3) = -2 \cdot 3 + 10 = 4$.

Άσκηση 1.10 : Σύγκριση αριθμών με τη βοήθεια μονοτονίας

Αν μας ζητείται να συγκρίνουμε δύο τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$, με $a < \beta$, της συνάρτησης f τότε μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία της.

- Αν $f \nearrow$ τότε $a < \beta \Rightarrow f(a) < f(\beta)$
- Αν $f \searrow$ τότε $a < \beta \Rightarrow f(a) > f(\beta)$.

Παράδειγμα 13 : Σύγκριση τιμών συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{9}{17}\right)$ και $f\left(\frac{11}{20}\right)$.

ΛΥΣΗ

α. Για να ορίζεται η f πρέπει να ισχύει $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις ανισώσεις

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow 2-2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

και

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \Rightarrow 2-2x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα πρόσημα της f' και τη μονοτονία της f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

β. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\frac{9}{17}$ και $\frac{11}{20}$ ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

$$\frac{9}{17} < \frac{11}{20} \Rightarrow f\left(\frac{9}{17}\right) < f\left(\frac{11}{20}\right)$$

Άσκηση 1.11 : Απόδειξη ανισότητας με τη βοήθεια ακρότατων

Αν μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \leq a$ ή $f(x) \geq a$ τότε μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα της.

- Αν η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το a στη θέση x_0 τότε από τον ορισμό του μέγιστου γράφουμε $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) \leq a$.
- Αν η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το a στη θέση x_0 τότε από τον ορισμό του μέγιστου γράφουμε $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq a$.

Παράδειγμα 14 : Απόδειξη ανισότητας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x - x^4}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $4x \leq x^4 + 3$ για κάθε $x \in D_f$.

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$4x - x^4 \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \sqrt[3]{4}]$$

Για κάθε $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x - x^4}\right)' = \frac{(4x - x^4)'}{2\sqrt{4x - x^4}} =$$

$$= \frac{4 - 4x^3}{2\sqrt{4x - x^4}} = \frac{4(1 - x^3)}{2\sqrt{4x - x^4}} = \frac{2(1 - x^3)}{\sqrt{4x - x^4}}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια ρίζες και πρόσημα της f':

- $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^3)}{\sqrt{4x-x^4}} = 0 \Rightarrow 2(1-x^3) = 0 \Rightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^3)}{\sqrt{4x-x^4}} > 0 \Rightarrow 2(1-x^3) > 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (0, 1)$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^3)}{\sqrt{4x-x^4}} < 0 \Rightarrow 2(1-x^3) < 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, \sqrt[3]{4})$

x	0		1		$\sqrt[3]{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Στο διπλανό πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 2$ το οποίο είναι $f(1) = \sqrt{3}$. Επίσης παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στις θέσεις $x = 0$ και $x = \sqrt[3]{4}$ το $f(0) = f(\sqrt[3]{4}) = 0$

β. Σύμφωνα με τη μελέτη ακροτάτων που κάναμε προηγουμένως και σύμφωνα με τον ορισμό του ολικού μέγιστου θα ισχύει

$$f(x) \leq f(1) \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} \leq \sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x - x^4 \leq 3 \Rightarrow 4x \leq x^4 + 3\ , \text{ για κάθε } x \in [0, \sqrt[3]{4}]$$

2ο Κεφάλαιο Στατιστική

Άσκηση 2.1 : Συμπλήρωση πίνακα συχνοτήτων

- Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των συχνοτήτων ν_i, f_i, $f_i\%$, N_i, F_i, $F_i\%$ από το τυπολόγιο. Κάθε τύπος είναι εξίσωση από την οποία βρίσκουμε διαδοχικά τις συχνότητες που λείπουν από τον πίνακα.
- Κάθε συχνότητα που βρίσκουμε την συμπληρώνουμε στον πίνακα. Οι πράξεις γίνονται κάτω από τον πίνακα.

Παράδειγμα 1 : Συμπλήρωση πίνακα

Ρωτήσαμε σε ένα δείγμα από ελληνικές οικογένειες πόσα παιδιά έχουν. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων

Πλήθος παιδιών x_i	ν_i	f_i	$f_i\,\%$	N_i	F_i	$F_i\,\%$
0	**8**					
1		**0,2**		**18**		
2						
3			**22**			
Σύνολο						

Πίνακας 6: Πλήθος παιδιών στις ελληνικές οικογένειες

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την υπόθεση της άσκησης γνωρίζουμε τα εξής στοιχεία του πίνακα : $\nu_1 = 8$, $f_2 = 0{,}2$, $f_4\% = 22$ και $N_2 = 18$. Έχουμε λοιπόν :

Πλήθος παιδιών x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0	8	**0,16**	**16**	**8**	**0,16**	**16**
1	**10**	0,2	**20**	18	**0,36**	**36**
2	**21**	**0,42**	**42**	**39**	**0,78**	**78**
3	**11**	**0,22**	22	**50**	**1**	**100**
Σύνολο	**50**	**1**	**100**			

- $\nu_1 = N_1 = 8$
- $\nu_2 = N_2 - N_1 = 18 - 8 = 10$
- $f_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu} \Rightarrow 0{,}2 = \dfrac{10}{\nu} \Rightarrow 0{,}2\nu = 10 \Rightarrow \nu = 50$
- $f_4\% = f_4 \cdot 100 \Rightarrow 22 = f_4 \cdot 100 \Rightarrow f_4 = 0{,}22$
- $f_4 = \dfrac{\nu_4}{\nu} \Rightarrow 0{,}22 = \dfrac{\nu_4}{50} \Rightarrow \nu_4 = 11$
- $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \nu$
  $\Rightarrow 8 + 10 + \nu_3 + 11 = 50 \Rightarrow \nu_3 = 21$
- $f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{8}{50} = 0{,}16$
- $f_1 = F_1 = 0{,}16$
- $f_3 = \dfrac{\nu_3}{\nu} = \dfrac{21}{50} = 0{,}42$
- $N_3 = N_2 + \nu_3 = 18 + 21 = 39$

- $N_4 = \nu = 50$
- $f_1\% = f_1 \cdot 100 = 0{,}16 \cdot 100 = 16$
- $f_2\% = f_2 \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20$
- $f_3\% = f_3 \cdot 100 = 0{,}42 \cdot 100 = 42$
- $F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}16 + 0{,}2 = 0{,}36$
- $F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}36 + 0{,}42 = 0{,}78$
- $F_4 = 1$
- $F_1\% = f_1\% = 16$
- $F_2\% = F_2 \cdot 100 = 0{,}36 \cdot 100 = 36$
- $F_3\% = F_3 \cdot 100 = 0{,}78 \cdot 100 = 78$
- $F_4\% = 100$

Άσκηση 2.2 : Συμπλήρωση πίνακα ομαδοποιημένων παρατηρήσεων

Ο πίνακας συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων συμπληρώνεται ακριβώς όπως και ο συνήθης πίνακας υπολογίζοντας τις συχνότητες που περιέχει. Αν επιπλέον λείπουν από τον πίνακα και τα άκρα των κλάσεων καθώς και οι κεντρικές τιμές τότε

α. Θέτουμε με a το κάτω άκρο της 1ης κλάσης (ή οποιασδήποτε άλλης αν γίνεται) και χρησιμοποιώντας το πλάτος c των κλάσεων, σχηματίζουμε τις κλάσεις με τον ακόλουθο τρόπο

$$[a, a+c), [a+c, a+2c), [a+2c, a+3c), \ldots$$

έως ότου συμπληρωθούν όλες οι κλάσεις.

β. Από τα δεδομένα του πίνακα σχηματίζουμε 2 εξισώσεις με μεταβλητές a, c και λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

γ. Στη συνέχεια σχηματίζουμε με τις τιμές αυτές τις ομάδες του πίνακα και συμπληρώνουμε και τις κεντρικές τιμές x_i.

Παράδειγμα 2 : Συμπλήρωση πίνακα με ομάδες

Μετρήσαμε το χρόνο αναμονής (σε λεπτά) 200 πελατών μιας τράπεζας. Οι παρατηρήσεις έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων

Χρόνος αναμονής	x_i	ν_i	f_i	$f_i\,\%$	N_i	F_i	$F_i\,\%$
$[\ldots, \ldots)$			**0,1**				
$[\ldots, \ldots)$	**15**	**52**					
$[20, \ldots)$					**140**		
$[\ldots, \ldots)$							
Σύνολο		**200**					

Πίνακας 7: Χρόνος αναμονής πελατών σε μια τράπεζα

ΛΥΣΗ

Έστω a το κάτω άκρο της 1ης κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων. Σχηματίζοντας τις κλάσεις καθώς και τις κεντρικές τιμές τους παίρνουμε αντίστοιχα

$$[a, a+c), [a+c, a+2c), [a+2c, a+3c), [a+3c, a+4c) \text{ καθώς και}$$
$$x_1 = \frac{2a+c}{2}, x_2 = \frac{2a+3c}{2}, x_3 = \frac{2a+5c}{2}, x_4 = \frac{2a+7c}{2}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης προκύπτουν λοιπόν οι εξισώσεις

$$a + 2c = 20 \text{ και } x_2 = 15 \Rightarrow \frac{2a+3c}{2} = 15 \Rightarrow 2a + 3c = 30$$

Παίρνουμε έτσι το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a + 2c = 20 \\ 2a + 3c = 30 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ και } c = 10$$

Υπολογίζουμε έτσι τις ομάδες, τις κεντρικές τιμές τους και συμπληρώνουμε τον πίνακα όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Χρόνος αναμονής	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
$[0, 10)$	5	20	0,1	10	20	0,1	10
$[10, 20)$	15	52	0,26	26	72	0,36	36
$[20, 30)$	25	68	0,34	34	140	0,7	70
$[30, 40)$	35	60	0,3	30	200	1	100
Σύνολο		200	1	100			

Πίνακας 8: Χρόνος αναμονής πελατών στην τράπεζα

Άσκηση 2.3 : Συμπεράσματα από πίνακα συχνοτήτων

Αν ύστερα από τη συμπλήρωση ενός πίνακα καλούμαστε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις που αφορούν το δείγμα τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν οι ερωτήσεις ζητούν **πλήθος** παρατηρήσεων τότε χρησιμοποιούμε τις συχνότητες ν_i, N_i.
- Αν οι ερωτήσεις ζητούν **ποσοστό** παρατηρήσεων τότε χρησιμοποιούμε τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$, $F_i\%$.

Εάν η ερώτηση αφορά μια τιμή x_i τότε χρειαζόμαστε την αντίστοιχη συχνότητά ν_i ή $f_i\%$. Αν αφορά πολλές τιμές τότε προσθέτουμε τις αντίστοιχες συχνότητες ή χρησιμοποιούμε κάποια αθροιστική.

Παράδειγμα 3 : Συμπεράσματα που αφορούν πίνακα συχνοτήτων

Για τον πίνακα του παραδείγματος 1 που αφορά την έρευνα για το πλήθος παιδιών στις ελληνικές οικογένειες, να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις.

α. Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά;

β. Τι ποσοστό οικογενειών έχει το πολύ 1 παιδί;

γ. Πόσες οικογένειες έχουν 1 ή 2 παιδιά;

ΛΥΣΗ

α. Η ερώτηση αφορά την 3η και την 4η τιμή της μεταβλητής άρα σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 2 παιδιά είναι

$$\nu_3 + \nu_4 = 21 + 11 = 32 \text{ οικογένειες.}$$

β. Εδώ χρειαζόμαστε τις σχετικές συχνότητες από την 1η και 2η τιμή του πίνακα. Επομένως το ζητούμενο ποσοστό θα είναι $F_2\% = 36\%$.

γ. Ομοίως με πριν το πλήθος των οικογενειών θα είναι

$$\nu_2 + \nu_3 = 10 + 18 = 28 \text{ οικογένειες.}$$

Άσκηση 2.4 : Συμπεράσματα από πίνακα συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων

Για να απαντήσουμε σε ερωτήσεις που αφορούν ένα ομαδοποιημένο δείγμα διακρίνουμε τις περιπτώσεις που είδαμε πριν για πλήθος και ποσοστό. Στη συνέχεια ακολουθούμε τις παρακάτω οδηγίες.

- Κάθε ερώτηση αφορά πλήθος ή ποσοστό παρατηρήσεων μέχρι κάποια τιμή x (το πολύ x), από κάποια τιμή x (τουλάχιστον x) ή μεταξύ δύο τιμών x, y. Αν οι τιμές αυτές
  - είναι **άκρα** κλάσεων, τότε τις κλάσεις που χρειαζόμαστε τις παίρνουμε ολόκληρες.
  - είναι **κεντρικές τιμές** κλάσεων, τότε τις κλάσεις που τις περιέχουν τις παίρνουμε μισές.
  - είναι **τυχαία ενδιάμεσα** σημεία τότε παίρνουμε το **μέρος** της ομάδας που περιέχει τις τιμές που θέλουμε.

Αν η τιμή x περιέχεται στην ομάδα $[a, \beta)$ αναλυτικά η διαδικασία έχει ως εξής.

- Η ομάδα χωρίζεται στα διαστήματα $[a, x)$ και $[x, \beta)$.
- Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει το μέρος της ομάδας που χρειαζόμαστε

Ζητούμενο	Διάστημα	Μέρος της ομάδας
μέχρι x	$[a, x)$	$\dfrac{x-a}{c}$
από x	$[x, \beta)$	$\dfrac{\beta-x}{c}$

- Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στην κλάση και πολλαπλασιάζουμε το κλάσμα της 3ης στήλης με τη συχνότητα ν_i ή f_i της κλάσης.

Παράδειγμα 4 : Συμπεράσματα από ομαδοποιημένο δείγμα

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις που αφορούν τον πίνακα του παραδείγματος 2 για το χρόνο αναμονής των πελατών σε μια τράπεζα.

α. Πόσοι πελάτες περίμεναν στην ουρά το πολύ 20 λεπτά;

β. Τι ποσοστό των πελατών περίμενε στην ουρά τουλάχιστον 15 λεπτά;

γ. Τι ποσοστό πελατών περίμενε από 8 έως 24 λεπτά;

ΛΥΣΗ

α. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 20 αποτελεί το πάνω άκρο της 2ης κλάσης. Αφού ζητείται το πλήθος των πελατών που περίμεναν **μέχρι** 20 λεπτά τότε η ερώτηση αυτή αφορά τις 2 πρώτες κλάσεις. Έτσι το ζητούμενο πλήθος θα είναι $N_2 = 72$ πελάτες.

β. Τα 15 λεπτά είναι η κεντρική τιμή της 2ης κλάσης η οποία τη χωρίζει στα διαστήματα $[10, 15)$ και $[15, 20)$. Οι πελάτες περίμεναν **τουλάχιστον** 15 λεπτά οπότε χρειαζόμαστε το 2ο μισό : $[15, 20)$. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις και έτσι το ζητούμενο ποσοστό θα είναι

$$\frac{f_2\%}{2} + f_3\% + f_4\% = \frac{26}{2} + 34 + 30 = 77\%$$

γ. Οι αριθμοί 8 και 24 λεπτά είναι τυχαία ενδιάμεσα σημεία της 1ης και 3ης κλάσης αντίστοιχα. Έτσι υποθέτουμε και εδώ ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις. Θα δούμε λοιπόν κάθε αριθμός σε ποια διαστήματα χωρίζει την κλάση και τι μέρος της είναι το διάστημα που χρειαζόμαστε.

- Το 8 χωρίζει την 1η κλάση στα $[0, 8)$ και $[8, 10)$. Σύμφωνα με την υπόθεση χρειαζόμαστε το διάστημα $[8, 10)$ το οποίο είναι το

$$\frac{10-8}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ της κλάσης}$$

- Το 24 χωρίζει την 3η κλάση στα $[20, 24)$ και $[24, 30)$. Εμείς θα εργαστούμε στο διάστημα $[20, 24)$ το οποίο είναι τα

$$\frac{24-20}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ της κλάσης}$$

Έτσι το ζητούμενο ποσοστό των πελατών θα είναι

$$\frac{1}{5} \cdot f_1\% + f_2\% + \frac{2}{5} \cdot f_3\% = \frac{10}{5} + 26 + \frac{68}{5} = 41{,}6$$

Άσκηση 2.5 : Γραφική παράσταση δεδομένων

Για τη γραφική παράσταση δεδομένων, επιλέγουμε το κατάλληλο σχήμα ανάλογα με τον τύπο της μεταβλητής που εξετάζουμε (ποιοτική ή ποσοτική). Τα κυριότερα σχήματα είναι το ραβδόγραμμα, το διάγραμμα, το κυκλικό διάγραμμα και το ιστόγραμμα. Ακολουθούμε τον οδηγό στο διπλανό πίνακα.

Σχήμα	Είδος μεταβλητής
Ραβδόγραμμα	Ποιοτική
Διάγραμμα	Ποσοτική
Κυκλικό διάγραμμα	Ποιοτική και ποσοτική
Ιστόγραμμα	Ποσοτική (ομαδοποιημένα δεδομένα)

Παράδειγμα 5 : Ραβδόγραμμα συχνοτήτων

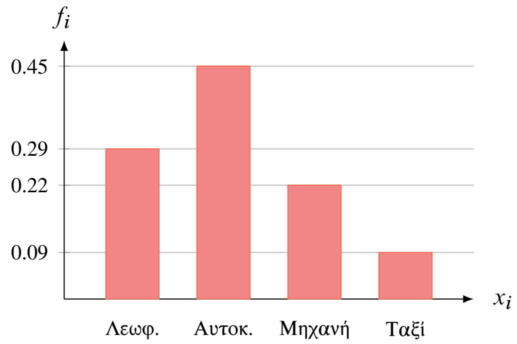
Ρωτήσαμε 200 υπαλλήλους μιας εταιρίας τι μεταφορικό μέσο χρησιμοποιούν για να πάνε στη δουλειά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα αυτά.

Μέσο x_i	ν_i
Λεωφορείο	58
Αυτοκίνητο	90
Μηχανή	44
Ταξί	18
Σύνολο	**200**

ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη σχετική συχνότητα κάθε τιμής. Έχουμε λοιπόν:

- $f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{58}{200} = 0{,}29$
- $f_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{90}{200} = 0{,}45$
- $f_3 = \dfrac{\nu_3}{\nu} = \dfrac{44}{200} = 0{,}22$
- $f_4 = \dfrac{\nu_4}{\nu} = \dfrac{18}{200} = 0{,}09$



Για την κατασκευή του ραβδογράμματος τοποθετούμε τις τιμές στον οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τον κατακόρυφο άξονα αρκετά μεγάλο ώστε να φανεί η μεγαλύτερη σχετική συχνότητα που είναι $f_2 = 0{,}45$. Σε κάθε τιμή του οριζόντιου άξονα σχεδιάζουμε ορθογώνια στήλη με ύψος ίσο με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα.

Παράδειγμα 6 : Διάγραμμα - Πολύγωνο συχνοτήτων

Εξετάσαμε ένα δείγμα 80 ασθενών, ως προς το πλήθος των ημερών που ασθένησαν από την ίωση της γρύπης. Για τα αποτελέσματα της έρευνας, που φαίνονται στο διπλανό πίνακα, να κατασκευάσετε διάγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων καθώς και αθροιστικών συχνοτήτων.

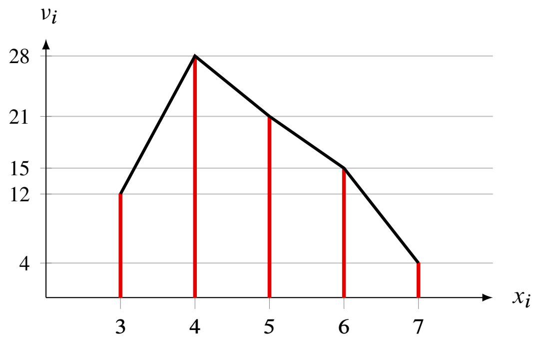
Μέρες x_i	ν_i
3	12
4	28
5	21
6	15
7	4
Σύνολο	80

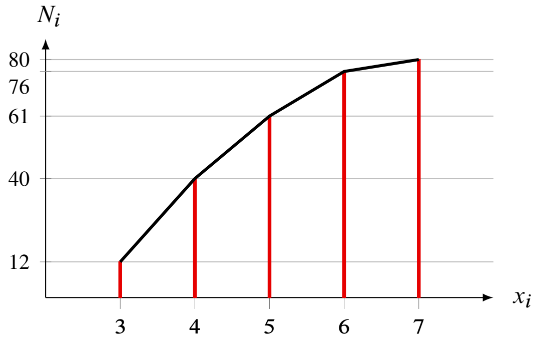
ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε αρχικά τις αθροιστικές συχνότητες.

- $N_1 = \nu_1 = 12$
- $N_2 = N_1 + \nu_2 = 12 + 28 = 40$
- $N_3 = N_2 + \nu_3 = 40 + 21 = 61$
- $N_4 = N_3 + \nu_4 = 61 + 15 = 76$
- $N_5 = \nu = 80$

Στη συνέχεια, για το διάγραμμα συχνοτήτων, τοποθετούμε τις τιμές στον οριζόντιο άξονα και φέρουμε τμήματα, με ύψος αντίστοιχο της συχνότητας ν_i. Ανάλογα κατασκευάζεται και το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων, με την N_i στον κατακόρυφο άξονα.





Παράδειγμα 7 : Κυκλικό διάγραμμα

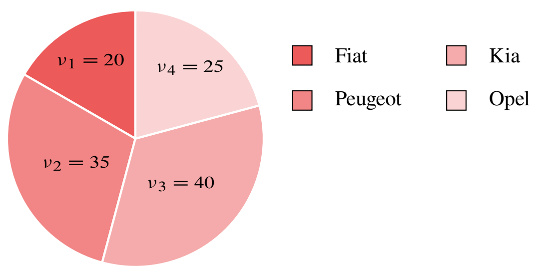
Εξετάσαμε ένα δείγμα 120 οικογενειών ως προς τη μάρκα αυτοκινήτου που οδηγούν και τα αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων για τα δεδομένα αυτά.

Μάρκα x_i	ν_i
Fiat	20
Peugeot	35
Kia	40
Opel	25
Σύνολο	**120**

✔ ΛΥΣΗ

Με τη βοήθεια του τύπου $a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360°$ θα υπολογίσουμε το μέτρο κάθε τομέα του κυκλικού διαγράμματος. Έχουμε λοιπόν:

- $a_1 = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 360° = \frac{20}{120} \cdot 360° = 60°$
- $a_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 360° = \frac{40}{120} \cdot 360° = 120°$
- $a_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \cdot 360° = \frac{35}{120} \cdot 360° = 105°$
- $a_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 360° = \frac{25}{120} \cdot 360° = 75°$



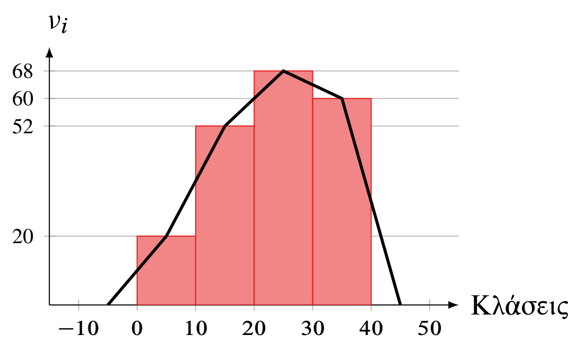
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε κύκλο στον οποίο φέρουμε μια ακτίνα ως πλευρά της 1ης γωνίας και σχεδιάζουμε γωνία 60°. Συνεχίζουμε διαδοχικά για τις γωνίες 105°, 120° και 75°. Η τελική πλευρά κάθε γωνίας είναι αρχή της επόμενης. Όταν σχεδιαστεί και η προτελευταία γωνία, τότε προκύπτει αυτομάτως και η τελευταία που συμπληρώνει τον κύκλο.

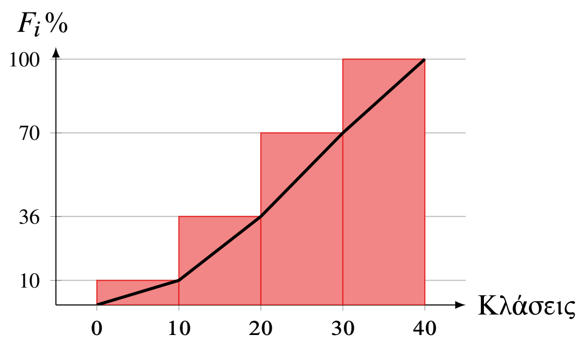
Παράδειγμα 8 : Ιστόγραμμα συχνοτήτων

Κατασκευάστε ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων καθώς και αθροιστικών συχνοττηων επί τοις %, για τα δεδομένα του παραδείγματος 2

✔ ΛΥΣΗ

Για το μεν ιστόγραμμα συχνοτήτων θα προσθέσουμε δύο επιπλέον κλάσεις, μια πριν την πρώτη και μια μετά την τελευταία στον οριζόντιο άξονα. Αφού κατασκευαστεί το ιστόγραμμα, ενώνουμε με τμήματα τα μέσα των άνω πλευρών κάθε ορθογωνίου. Για το δε πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις %, ενώνουμε τα άνω δεξιά άκρα, χωρίς την προσθήκη των επιπλέον κλάσεων.





Άσκηση 2.6 : Μέσος όρος - Σταθμικός μέσος

- Χρησιμοποιούμε τους τύπους 2.21 για το μέσο όρο, ανάλογα με το αν η άσκηση μας δίνει παρατηρήσεις t_i, συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i.
- Για το σταθμικό μέσο χρησιμοποιείται ο τύπος 2.22.

Παράδειγμα 9 : Μέση τιμή από δείγμα παρατηρήσεων

Οι μισθοί 10 υπαλλήλων μιας εταιρίας είναι οι ακόλουθοι

1.020€, 1.100€, 980€, 1.020€, 1.200€, 990€, 1.070€, 950€, 1.080€, 1.130€

Να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων.

ΛΥΣΗ

Ο μέσος όρος των μισθών των 10 υπαλλήλων θα είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i =$$
$$= \frac{1.020 + 1.100 + 980 + 1.020 + 1.200 + 990 + 1.070 + 950 + 1.080 + 1.130}{10} = \frac{10.540}{10} = 1.054€$$

Παράδειγμα 10 : Μέση τιμή από πίνακα συχνοτήτων ν_i

Στον διπλανό πίνακα βλεπουμε την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος 80 ατόμων για το χρόνο παρακολούθησης τηλεόρασης καθημαρινά. Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο παρακολούθησης.

Χρόνος x_i	ν_i
3	28
4	32
5	12
6	8
Σύνολο	80

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $x_i \cdot \nu_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

- $x_1 \cdot \nu_1 = 3 \cdot 28 = 84$
- $x_2 \cdot \nu_2 = 4 \cdot 32 = 128$
- $x_3 \cdot \nu_3 = 5 \cdot 12 = 60$
- $x_4 \cdot \nu_4 = 6 \cdot 8 = 48$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i = \frac{84 + 128 + 60 + 48}{80} = \frac{320}{80} = 4 \text{ ώρες}$$

Παράδειγμα 11 : Μέση τιμή από πίνακα συχνοτήτων f_i

Ο διπλανός πίνακας περιέχει την κατανομή σχετικών συχνοτήτων ενός δείγματος 50 αθλητών ως προς τις ώρες που αθλούνται εβδομαδιαίως. Υπολογίστε το μέσο χρόνο προπόνησης κάθε αθλητή.

Χρόνος x_i	f_i
7	0,22
8	0,36
9	0,3
10	0,12
Σύνολο	1

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $x_i \cdot f_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

- $x_1 \cdot f_1 = 7 \cdot 0{,}22 = 1{,}54$
- $x_2 \cdot f_2 = 8 \cdot 0{,}36 = 2{,}88$
- $x_3 \cdot f_3 = 9 \cdot 0{,}3 = 2{,}7$
- $x_4 \cdot f_4 = 10 \cdot 0{,}12 = 1{,}2$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot f_i = 1{,}54 + 2{,}88 + 2{,}7 + 1{,}2 = 8{,}32 \text{ ώρες}$$

Παράδειγμα 12 : Σταθμικός μέσος

Τα τέσσερα μαθήματα Α,Β,Γ,Δ στο 1ο εξάμηνο μιας σχολής έχουν συντελεστές βαρύτητας 2, 3, 1.5 και 2.5 αντίστοιχα. Οι βαθμοί ενος φοιτητή στα μαθήματα αυτά είναι 7, 8, 10, 9. Να υπολογίσετε το μέσο όρο του για το 1ο εξάμηνο.

ΛΥΣΗ

Κάθε βαθμός θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστοιχο συντελεστή βαρύτητας. Έτσι ο σταθμικός μέσος θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} w_i} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1.5 \cdot 10 + 2.5 \cdot 9}{2 + 3 + 1.5 + 2.5} = \frac{75.5}{9} = 8.38$$

Άσκηση 2.7 : Υπολογισμός διαμέσου από παρατηρήσεις t_i

- Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι **περιττό**, τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση. Δηλαδή

$$\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$$

- Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι **άρτιο**, τότε η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή

$$\delta = \frac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$$

Παράδειγμα 13 : Διάμεσος από δείγμα παρατηρήσεων

Να υπολογίσετε τη διάμεσο σε καθένα από τα παρακάτω δείγματα.

α. $\mathbf{12, 10, 9, 11, 8, 13, 10, 12, 12}$

β. $\mathbf{8, 5, 6, 9, 4, 3, 3, 5, 6, 7}$

ΛΥΣΗ

α. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι :

$$8, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13$$

Το πλήθος τους είναι $\nu = 9$ δηλαδή περιττό. Η μεσαία παρατήρηση βρίσκεται στη θέση $\frac{\nu+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ άρα η διάμεσος θα ισούται με την 5η παρατήρηση : $\delta = t_5 = 11$.

β. Τοποθετούμε αρχικά τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά :

$$3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $\nu = 10$ δηλαδή άρτιο. Έτσι οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις βρίσκονται στις θέσεις

$$\frac{\nu}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ και } \frac{\nu+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Άρα η διάμεσος θα ισούται με

$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Άσκηση 2.8 : Υπολογισμός διαμέσου από συχνότητες N_i

Υπολογίζουμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i καθώς και το **μισό μέγεθος του δείγματος**, δηλαδή το $\frac{\nu}{2}$.

- Αν το πλήθος είναι **περιττό**, η διάμεσος είναι η τιμή x_i στην οποία η N_i **ξεπερνάει πρώτη φορά** το $\frac{\nu}{2}$.
- Αν το πλήθος είναι **άρτιο**, τότε στη στήλη N_i εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:
  - Αν εμφανίζεται σε κάποια γραμμή i το $\frac{\nu}{2}$, τότε η διάμεσος ισούται με

$$\delta = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

  - Αν **δεν** εμφανίζεται σε κάποια γραμμή i το $\frac{\nu}{2}$, τότε η διάμεσος ισούται με την τιμή x_i στην οποία η N_i **ξεπερνάει πρώτη φορά** τον αριθμό αυτό.

Παράδειγμα 14 : Διάμεσος με τη χρήση N_i

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα από το παράδειγμα 10 να υπολογίστεί η διάμεσος του δείγματος.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε, με τη βοήθεια του πίνακα του παραδείγματος, τις αθροιστικές συχνότητες N_i:

Χρόνος x_i	ν_i	N_i
3	28	28
4	32	60
5	12	72
6	8	80
Σύνολο	80	

- $N_1 = \nu_1 = 28$
- $N_2 = N_1 + \nu_2 = 28 + 32 = 60$
- $N_3 = N_2 + \nu_3 = 60 + 12 = 72$
- $N_4 = \nu = 80$

Παρατηρούμε ότι στη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων, ξεπερνάμε πρώτη φορά το μισό δείγμα $\frac{\nu}{2} = \frac{80}{2} = 40$ στη 2η γραμμή του πίνακα. Επομένως η διάμεσος θα ισούται με $\delta = x_2 = 4$ ώρες.

Άσκηση 2.9 : Υπολογισμός διαμέσου από συχνότητες $F_i\,\%$

Ακολουθούμε τα ίδια βήματα με την παραπάνω μέθοδο, χρησιμοποιώντας τη στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ και ως μισό δείγμα το 50%.

Παράδειγμα 15 : Διάμεσος με τη χρήση F_i

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα από το παράδειγμα 11 να υπολογίστεί η διάμεσος του δείγματος.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε, με τη βοήθεια του πίνακα, τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$:

Χρόνος x_i	f_i	$F_i\,\%$
7	0,22	22
8	0,36	58
9	0,3	88
10	0,12	100
Σύνολο	1	

- $F_1\% = f_1\% = 0{,}22 \cdot 100 = 22$
- $F_2\% = F_1\% + f_2\% = 22 + 0{,}36 \cdot 100 = 22 + 36 = 58$
- $F_3\% = F_2 + f_3 = 58 + 0{,}3 \cdot 100 = 88$
- $F_4\% = 100$

Παρατηρούμε ότι στη στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, ξεπερνάμε πρώτη φορά το 50% στη 2η γραμμή του πίνακα. Επομένως η διάμεσος θα ισούται με $\delta = x_2 = 8$ ώρες.

Άσκηση 2.10 : Υπολογισμός εύρους

Χρησιμοποιείται οι τύποι 2.24.

Παράδειγμα 16 : Υπολογισμός εύρους - Δείγμα παρατηρήσεων

Βρείτε το εύρος των παρατηρήσεων στο δείγμα που ακολουθεί

$$\mathbf{10, 4, -2, 8, 7, 5, -1.9, 6, 7}$$

ΛΥΣΗ

Η μέγιστη παρατήρηση του δείγματος είναι $t_{\max} = 10$ ενώ η ελάχιστη είναι $t_{\min} = -2$. Έτσι το εύρος ισούται με

$$R = t_{\max} - t_{\min} = 10 - (-2) = 12$$

Παράδειγμα 17 : Υπολογισμός εύρους - Πίνακας συχνοτήτων

Υπολογίστε για τα παραδείγματα 10 και 11 το εύρος των παρατηρήσεων.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το παράδειγμα 10 οι μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι αντίστοιχα $x_{\max} = 6$ και $x_{\min} = 3$ οπότε το εύρος είναι $R = 6 - 3 = 3$ ώρες. Ομοίως από το παράδειγμα 11 είναι $R = x_{\max} - x_{\min} = 10 - 7 = 3$

Άσκηση 2.11 : Διακύμανση - Τυπική απόκλιση

- Για τον υπολογισμό της διακύμανσης χρησιμοποιούμε τους τύπους 2.25 ανάλογα με το ποια συχνότητα θα χρησιμοποιήσουμε αλλά και με το αν ο μέσος όρος $\bar{x}$ είναι ακέραιος ή όχι.
- Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s χρησιμοποιούμε τον τύπο $s = \sqrt{s^2}$.

Παράδειγμα 18 : Διακύμανση - τυπική απόκλιση από παρατηρήσεις

Να βρεθεί η διακύμανση και η τυπική απόκλιση στα παρακάτω δείγματα παρατηρήσεων

α. $A : 1, 4, 5, 5, 7, 8$

β. $B : 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 9$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε αρχικά τη μέση τιμή για κάθε δείγμα.

α. Για το δείγμα Α έχουμε

$$\bar{x}_A = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} = \frac{1+4+5+5+7+8}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Καθώς η μέση τιμή είναι ακέραια, η διακύμανση του δείγματος θα είναι

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x}) = \\ &= \frac{(1-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{6} = \\ &= \frac{(-4)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2}{6} = \frac{16+1+4+9}{6} = \frac{30}{6} = 5 \end{aligned}$$

Επίσης η τυπική απόκλιση θα ισούται με $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5} \simeq 2{,}236$.

β. Ομοίως για το δείγμα Β είναι:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} = \frac{2+3+4+4+5+6+8+8+9}{9} = \frac{49}{9} = 5{,}44$$

Αφού η μέση τιμή δεν είναι ακέραια, τότε για τη διακύμανση του δείγματος θα έχουμε

- $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 8^2 + 9^2 = 315$
- $\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2 = 49^2 = 2.401$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{9}\left(315 - \frac{2.401}{9}\right) = \frac{1}{9}(315 - 266{,}77) = \frac{48{,}23}{9} = 5{,}35$$

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5{,}358} = 2{,}315$

Παράδειγμα 19 : Διακύμανση - τυπική απόκλιση από συχνότητες ν_i

Επιλέξαμε δύο δείγματα 50 μαθητών Γ΄ ΕΠΑ.Λ. από δύο λύκεια της Αθήνας, τα οποία εξετάσαμε ως προς τη βαθμολογία στο διαγώνισμα Μαθηματικών στις πανελλαδικές. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

Βαθμός x_i	ν_i
14	16
15	22
16	8
17	4
Σύνολο	50

Βαθμός x_i	ν_i
14	9
15	19
16	15
17	7
Σύνολο	50

Να υπολογίσετε για κάθε δείγμα μαθητών τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των βαθμών.

ΛΥΣΗ

Για το $1^{\text{ο}}$ δείγμα μαθητών υπολογίζουμε αρχικά το μέσο όρο των βαθμών τους. Έχουμε λοιπόν

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i = \frac{14\cdot 16 + 15\cdot 22 + 16\cdot 8 + 17\cdot 4}{50} = \frac{750}{50} = 15$$

Η μέση τιμή είναι ακέραια οπότε για τη διακύμανση θα έχουμε

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2\cdot\nu_i = \frac{(14-15)^2\cdot 16 + (15-15)^2\cdot 22 + (16-15)^2\cdot 8 + (17-15)^2\cdot 4}{50} =$$
$$= \frac{(-1)^2\cdot 16 + 0^2\cdot 22 + 1^2\cdot 8 + 2^2\cdot 4}{50} = \frac{40}{50} = 0{,}8$$

Επομένως η τυπική απόκλιση θα ισούται με $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}8} = 0{,}894$.
Για το δεύτερο δείγμα η μέση τιμή θα είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu = \frac{14\cdot 9 + 15\cdot 19 + 16\cdot 15 + 17\cdot 7}{50} = \frac{770}{50} = 15{,}4$$

Μιας και η μέση τιμή δεν είναι ακέραια, για τη διακύμανση θα έχουμε

- $\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\cdot\nu_i = 14^2\cdot 9 + 15^2\cdot 19 + 16^2\cdot 15 + 17^2\cdot 7 = 11.902$
- $\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\cdot\nu_i\right)^2 = 770^2 = 592.900$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\cdot\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\cdot\nu_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{50}\left(11.902 - \frac{592.900}{50}\right) = \frac{1}{50}(11.902 - 11.858) = \frac{44}{50} = 0{,}98$$

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}98} = 0{,}99$.

Παράδειγμα 20 : Διακύμανση - τυπική απόκλιση από συχνότητες f_i

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα από το παράδειγμα 11 να υπολογίστεί η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του δείγματος.

ΛΥΣΗ

Έχουμε βρει από το παράδειγμα ότι $\bar{x} = 8{,}32$. Για τη διακύμανση είναι

$$s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i - (\bar{x})^2 =$$
$$= 7^2\cdot 0{,}22 + 8^2\cdot 0{,}36 + 9^2\cdot 0{,}3 + 10^2\cdot 0{,}12 - 8{,}32^2 =$$
$$= 10{,}78 + 23{,}04 + 24{,}3 + 12 = 70{,}12 - 69{,}22 = 0{,}9$$

άρα η τυπική απόκλιση ισούται με $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}9} = 0{,}949$.

Άσκηση 2.12 : Υπολογισμός συντελεστή μεταβολής

α. Υπολογίζουμε μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

β. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$ και εκφράζουμε το αποτέλεσμα ως ποσοστό %.

- Αν $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Αν $CV \leq 10\%$ το δείγμα είναι ομοιογενές.
- Αν για δύο δείγματα ισχύει $CV_A > CV_B$ το δείγμα B είναι πιο ομοιογενές από το A.

Παράδειγμα 21 : Συντελεστής μεταβολής - Ομοιογένεια

Οι βαθμοί δύο μαθητών στα 10 μαθήματα του Α΄ τετραμήνου δίνονται παρακάτω.

Μαθητής Α	Μαθητής Β
15, 16, 15, 17, 16,	12 , 18, 17, 17, 18,
15, 14, 17, 15, 16	19, 10, 12 , 20, 13

α. Να εξετάσετε κάθε δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

β. Ποιο από τα δύο δείγματα είναι πιο ομοιογενές;

ΛΥΣΗ

α. Υπολογίζουμε αρχικά το μέσο όρο των μαθημάτων του για το μαθητή Α:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{15+16+15+17+16+15+14+17+15+16}{10} = \frac{156}{10} = 15{,}6$$

Καθώς η μέση τιμή δεν είναι ακέραια τότε για την διακύμανση έχουμε:

- $\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 15^2 + 16^2 + 15^2 + 17^2 + 16^2 + 15^2 + 14^2 + 17^2 + 15^2 + 16^2 = 2442$
- $\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2 = 156^2 = 24.336$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{10}\left(2.442 - \frac{24.336}{10}\right) = \frac{1}{10}(2.442 - 2433{,}6) = \frac{8{,}4}{10} = 0{,}84$$

Έτσι η τυπική απόκλιση θα ισούται με $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}84} = 0{,}9165$. Ο συντελεστής μεταβλητότητας του μαθητή θα είναι

$$CV_A = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0{,}9156}{15{,}6} = 0{,}06 = 6\% < 10\%$$

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι το δείγμα των βαθμών για το μαθητή Α είναι ομοιογενές. Ομοίως για το μαθητή Β έχουμε

$$\bar{x} = 15{,}6\ ,\ s = 3{,}5$$

άρα ο συντελεστής μεταβολής θα είναι

$$CV_B = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{3{,}5}{15{,}6} = 0{,}2243 = 22{,}43\% > 10\%$$

Το δεύτερο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β. Σύμφωνα με τα προηγούμενα βλέπουμε $CV_A < CV_B$ άρα το 1$^{\text{ο}}$ δείγμα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Άσκηση 2.13 : Κανονική κατανομή

α. Σχεδιάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τους κατάλληλους αριθμούς, αν γνωρίζουμε τα ποσά $\bar{x}$ και s.

β. Χρησιμοποιούμε τα ποσοστά που περιέχει κάθε περιοχή της καμπύλης για να απαντήσουμε σε ερωτήσεις ή να υπολογίσουμε πλήθος παρατηρήσεων με τον τύπο

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Μέρος}}{\text{Ολόκληρο}n\,u_i}\nu$$

γ. Αν μας ενδιαφέρουν πολλές περιοχές του σχήματος προσθέτουμε τα αντίστοιχα ποσοστά.

Παράδειγμα 22 : Κανονική κατανομή

Ο χρόνος (σε λεπτά) που χρησιμοποιούν οι πελάτες μιας εταιρίας το κινητό τους τηλέφωνο, ακολουθεί κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 84% των πελατών χρησιμοποιεί το κινητό το πολύ 110 λεπτά, ενώ το 99,85% των πελατών το χρησιμοποιεί τουλάχιστον 70 λεπτά.

α. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 100$ και $s = 10$.

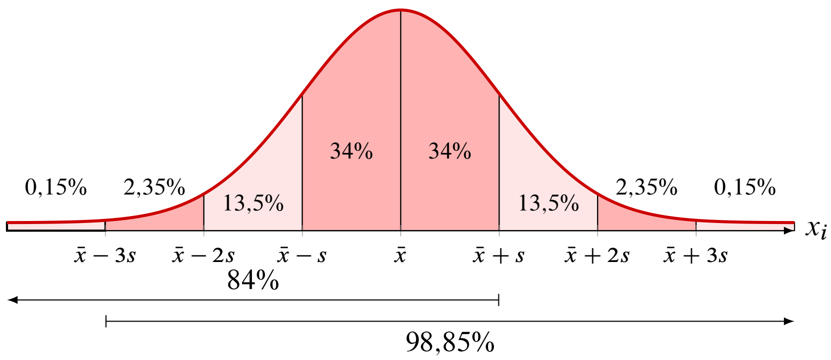
β. Να βρεθεί το ποσοστό των πελατών που μίλησαν

i . τουλάχιστον 90 λεπτά.
ii . το πολύ 80 λεπτά.
iii . από 80 έως 120 λεπτά.

γ. Αν το σύνολο των πελατών είναι $\nu = 4.000$ άτομα, να βρεθεί πόσοι πελάτες χρησιμοποίησαν το κινητό τουλάχιστον 110 λεπτά.

ΛΥΣΗ

α. Κατασκευάζουμε αρχικά την καμπύλη της κανονικής κατανομής, τοποθετώντας πάνω στο άξονα τις τιμές από $\bar{x} - 3s$ έως $\bar{x} + 3s$. Από τη φράση **το πολύ** 110 λεπτά καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να προστεθούν τα ποσοστά έως και τη θέση $\bar{x} + s$ ώστε να πάρουμε το αντίστοιχο ποσοστό 84%. Άρα πρέπει $\bar{x} + s = 110$.



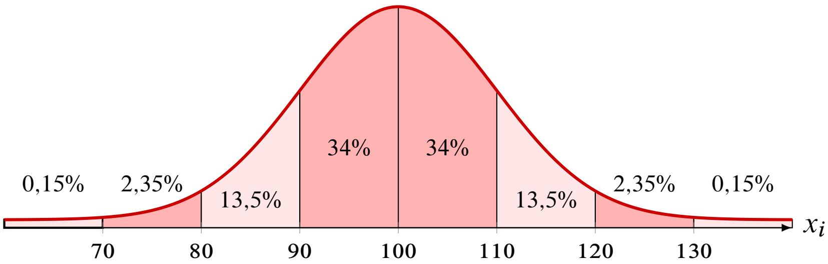
Αντίστοιχα, από τη φράση **τουλάχιστον** 70 λεπτά βλέπουμε ότι πρέπει να προστεθούν τα ποσοστά από τη θέση $\bar{x} - 3s$ και μετά ώστε να προκύψει το ποσοστό 99,85%. Έτσι πρέπει $\bar{x} - 3s = 70$. Από αυτές τις δύο εξισώσεις προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} s + \bar{x} = 110 \\ -3s + \bar{x} = 70 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 70 + 3s$$

$$\text{Άρα } 70 + 3s + s = 110 \Rightarrow 4s = 40 \Rightarrow s = 10$$

$$\text{και } x = 70 + 3 \cdot 10 = 100$$

β. Για $\bar{x} = 100$ και $s = 10$ συμπληρώνουμε τις τιμές στον οριζόντιο άξονα και τα ποσοστά σε κάθε τομέα μεταξύ της καμπύλης και του άξονα.



i . Για το μέρος των πελατών που μίλησαν τουλάχιστον 90 λεπτά, βλέπουμε από το σχήμα τοι θα χρειαστούμε το κομμάτι της καμπύλης από το 90 προς τα δεξιά. Έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$34\% + 34\% + 13{,}5\% + 2{,}35\% + 0{,}15\% = 84\%$$

ii . Για όσους μίλησαν το πολύ 80 λεπτά, χρειαζόμαστε το τμήμα της καμπύλης έως το σημείο αυτό άρα το ποσοστό θα είναι

$$0{,}15\% + 2{,}35\% = 2{,}5\%$$

iii . Ομοίως με προηγουμένως το ζητούμενο ποσοστό θα είναι

$$13{,}5\% + 34\% + 34\% + 13{,}5\% = 95\%$$

γ. Έστω x το πλήθος των πελατών που χρησιμοποίησαν το κινητό τουλάχιστον 110 λεπτά. Το αντίστοιχο ποσοστό είναι:

$$13{,}5\% + 2{,}35\% + 0{,}15\% = 16\%$$

Έτσι θα έχουμε

$$16\% = \frac{x}{\nu} \Rightarrow \frac{16}{100} = \frac{x}{4000} \Rightarrow$$
$$100x = 64000 \Rightarrow x = 640 \text{ πελατες.}$$

Άσκηση 2.14 : Μεταβολές των παρατηρήσεων

Αν οι τιμές y_i μιας νέας μεταβλητής Y προκύπτουν από πράξεις με τις τιμές x_i της αρχικής μεταβλητής X, τότε χρησιμοποιούμε τον πίνακα 5.

Παράδειγμα 23 : Μεταβολές των παρατηρήσεων

Στο παρακάτω δείγμα βλέπουμε τις τιμές 10 απορρυπαντικών σε ένα πολυκατάστημα

$$\mathbf{11€, 7.8€, 12.3€, 9.4€, 11.3€, 8.9€, 9.2€, 7.9€, 11.4€, 10.8€}$$

α. Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

β. Αν οι τιμές των προϊόντων αυξηθούν κατά 1.5€ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Το κατάστημα κάνει προσφορά 20% στα απορρυπαντικά. Εξετάστε ανάμεσα στο αρχικό και στο τελικό δείγμα τιμών, ποιο έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΛΥΣΗ

α. Η μέση τιμή των απορρυπαντικών ισούται με

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{11 + 7{,}8 + 12{,}3 + 9{,}4 + 11{,}3 + 8{,}9 + 9{,}2 + 7{,}9 + 11{,}4 + 10{,}8}{10} = \frac{100}{10} = 10€$$

Εφόσον ο μέσος όρος είναι ακέραιος, η διακύμανση θα υπολογιστεί από τον 1ο τύπο στο **2.25** και θα είναι

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 = \frac{(11-10)^2 + (7{,}8-10)^2 + (12{,}3-10)^2 + (9{,}4-10)^2 + (11{,}3-10)^2 +}{10}$$

$$\frac{+(8{,}9-10)^2 + (9{,}2-10)^2 + (7{,}9-10)^2 + (11{,}4-10)^2 + (10{,}8-10)^2}{10} =$$

$$= \frac{1^2 + (-2{,}2)^2 + 2{,}3^2 + (-0{,}6)^2 + 1{,}3^2 + (-1{,}1)^2 + (-0{,}8)^2 + (-2{,}1)^2 + 1{,}4^2 + 0{,}8^2}{10} = \frac{22{,}04}{10} = 2{,}204$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2{,}204} \simeq 1{,}485$.

β. Έστω y_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$ οι νέες τιμές των απορρυπαντικών που προκύπτουν από τις αρχικές τιμές x_i με τι σχέση $y_i = x_i + 1{,}5$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

- Η νέα μέση τιμή θα έιναι $\bar{y} = \bar{x} + 1{,}5 = 10 + 1{,}5 = 11{,}5$€.
- Η νέα τυπική απόκλιση θα είναι $s_y = s_x = 1{,}485$€.

Επομένως ο συντελεστής μεταβλητότητας του νέου δείγματος ισούται με

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{1{,}485}{11{,}5} = 0{,}129 = 12{,}9\% > 10\%$$

Το δείγμα λοιπόν δεν είναι ομοιογενές.

γ. Έστω z_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$ οι νέες τιμές των απορρυπαντικών που προκύπτουν από τις αρχικές τιμές x_i ύστερα από αύξηση κατά 20% σύμφωνα με τη σχέση

$$z_i = x_i + 20\% x_i = x_i + 0{,}2x_i = 1{,}2x_i,\ i = 1, 2, \ldots, 10$$

- Η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{z} = 1{,}2\bar{x} = 1{,}2 \cdot 10 = 12$€.
- Η νέα τυπική απόκλιση θα είναι $s_z = |1{,}2| s_x = 1{,}2 \cdot 1{,}485 = 1{,}782$€.

Άρα ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι

$$CV_z = \frac{s_z}{|\bar{z}|} = \frac{1{,}782}{12} = 0{,}1485 = 14{,}85\%$$

Εφόσον $CV_y < CV_z$ τότε το προηγούμενο δείγμα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Παράδειγμα 24 : Μεταβολές των παρατηρήσεων - Συνδυαστικό θέμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $P(2, 4)$.

α. Να δείξετε ότι $a = 1$.

β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $y = -x - 3$.

γ. Έστω $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots 100$, σημεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A. Αν γνωρίζουμε ότι οι τετμημένες x_i των σημείων έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 0{,}5$, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων y_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$ των σημείων.

✔ ΛΥΣΗ

α. Αφού το σημείο $P(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε

$$f(2) = 4 \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 - 2 = 4 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

β. Θέτοντας όπου $a = 1$ ο τύπος της f θα είναι $f(x) = x^2 + x - 2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (x^2 + x - 2)' = 2x + 1$$

Αν $x = -1$ τότε:

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$ και
- $f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = -x + \beta$$

Αφού το σημείο $A(-1, -2)$ ανήκει στην ευθεία, τότε για $x = -1$ και $y = -2$ έχουμε:

$$-2 = -(-1) + \beta \Rightarrow \beta = -3$$

άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -x - 3$.

γ. Τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$ είναι σημεία της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος. Οι τεταγμένες τους λοιπόν θα δίνονται από τη σχέση

$$y_i = -x_i - 3 \ , \ i = 1, 2, \ldots, 100$$

Η μέση τιμή τους θα ισούται με

$$\bar{y} = -\bar{x} - 3 = -4 - 3 = -7$$

ενώ η τυπική απόκλιση θα είναι

$$s_y = |-1| \cdot s_x = 0{,}5$$

Έτσι, ο συντελεστής μεταβολής τους θα είναι

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{0{,}5}{|-7|} = 0{,}0714 = 7{,}14\%$$