

26 Σεπτεμβρίου 2019

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διαγώνισμα

ΤΥΠΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

ΘΕΜΑ Α

- A.1** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . *Μονάδες 10*
- A.2** Να αναφέρετε ένα παράδειγμα γνησίως αύξουσας και ένα γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. *Μονάδες 5*
- A.3** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.
- α. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
 - β. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ .
 - γ. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα (a, x_0) , (x_0, β) και είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (a, β) .
 - δ. Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
 - ε. Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}^* .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 2, & x < 1 \\ x \cdot \ln x - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

- B.1** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. *Μονάδες 9*
- B.2** Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(e, +\infty)$. *Μονάδες 9*
- B.3** Να λυθεί η ανίσωση

$$x \cdot \ln x > 2 \cdot \ln 2 + 2x - 4$$

για κάθε $x \in (1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x-2\ln x}$.

- Γ.1** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 12

Γ.2 Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in D_f$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2018$.

Μονάδες 8

Γ.3 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$ αφού βρεθεί πρώτα το πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 5*

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = \ln \frac{16}{e^4}$ και:

$$xf'(x) = f(x) + 2x - x^2, \text{ για κάθε } x > 0$$

Δ.1 Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 7

Δ.2 Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

Δ.3 Να λύσετε την ανίσωση

$$2x \cdot \ln x - 2e > (x - e)(x + e)$$

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία!