Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

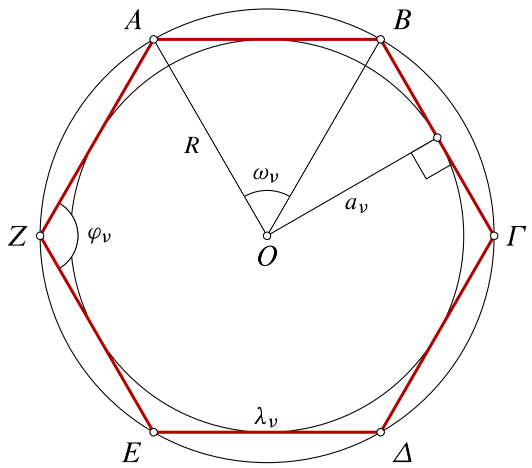
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

22 Μαρτίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γεωμετρία

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Αναλογίες

1.1 Διαίρεση - Γινόμενο - Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΜΕΓΕΘΟΣ
Μέγεθος ονομάζεται οποιαδήποτε μετρήσιμη μαθηματική έννοια η οποία μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί. Τα μεγέθη τα οποία μελετώνται στη Γεωμετρία θα ονομάζονται **γεωμετρικά μεγέθη**.

Ορισμός 1.2 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
Διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η διαδικασία με την οποία χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB διαιρεθεί σε ν ίσα μέρη και έστω $\Gamma\Delta$ ένα από αυτά τα ίσα τμήματα τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ θα ονομάζεται **υποδιαίρεση** του AB και θα ισχύει

$$\Gamma\Delta = \frac{1}{\nu} AB$$

Ορισμός 1.3 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟ
Γινόμενο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB με έναν θετικό πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ονομάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα έστω $\Gamma\Delta$ το οποίο αποτελεί άθροισμα λ σε πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων ίσων με το AB.

$$\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$$

Ορισμός 1.4 : ΣΥΜΜΕΤΡΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
Σύμμετρα ονομάζονται δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ τα οποία αποτελούν γινόμενο του ίδιου ευθύγραμμου τμήματος έστω EZ με θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^+$ αντίστοιχα.

$$AB = \kappa \cdot EZ \ , \ \Gamma\Delta = \lambda \cdot EZ$$

- Το ευθύγραμμο τμήμα EZ ονομάζεται **κοινό μέτρο** των AB και $\Gamma\Delta$.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα ονομάζονται **ασύμμετρα**.

Ορισμός 1.5 : ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ ονομάζεται ο θετικός ρητός αριθμός $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ ο οποίος είναι ίσος με το πηλίκο τους ή ισοδύναμα το πηλίκο των μέτρων τους.

$$\lambda = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$$

Ο λόγος δύο ασύμμετρων ευθυγράμμων τμημάτων είναι άρρητος αριθμός.

1.2 Ανάλογα τμήματα - Αναλογίες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.6 : ΑΝΑΛΟΓΙΑ
Αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων ευθυγράμμων τμημάτων. Αν a, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα τότε η αναλογία έχει ως εξής

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$$

- Τα ευθύγραμμα τμήματα a, β, γ, δ ονομάζονται **όροι** της αναλογίας.
- Οι αριθμητές της αναλογίας είναι ανάλογοι προς τους παρονομαστές της δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα a, γ είναι ανάλογα προς τα β, δ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα a και δ ονομάζονται **άκροι όροι** ενώ τα β, γ **μέσοι όροι** της αναλογίας.
- Το ευύγραμμο τμήμα δ ονομάζεται **τέταρτη ανάλογος** των a, β, γ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται μέσα στον ίδιο λόγο (κλάσμα) ονομάζονται **ομόλογα** ή **αντίστοιχα**.
- Αν σε μια αναλογία οι μέσοι όροι είναι μεταξύ τους ίσοι τότε η αναλογία ονομάζεται **συνεχής**.

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Ο μέσος όρος β ονομάζεται **μέση ανάλογος** ή **γεωμετρικός μέσος** των a, γ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ
Για κάθε αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα a, β, γ, δ θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Χιαστί γινόμενα	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
2	Εναλλαγή μέσων και άκρων όρων	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{a}$
3	Άθροισμα - Διαφορά στους αριθμητές	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$
4	Άθροισμα - Διαφορά στους παρονομαστές	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
5	Άθροισμα - Διαφορά αριθμ. και παρονομ.	$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \pm \beta}{\gamma \pm \delta}$

1.3 Μέτρο τμήματος - Διαίρεση τμήματος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB θα ονομάζεται μονάδα μέτρησης όταν αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση και σύγκριση όλων των ευθυγράμμων τμημάτων.

Ορισμός 1.8 : ΜΕΤΡΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
Μέτρο ή μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται ο αριθμός με τον οποίο θα πολλαπλασιάσουμε τη μονάδα μέτρησης ώστε να πάρουμε ως αποτέλεσμα το τμήμα αυτό.

$$\Gamma\Delta : \text{ μονάδα μέτρησης } \quad AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$$

Ισοδύναμα, μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται ο λόγος του προς τη μονάδα μέτρησης.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.2 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα εσωτερικό σημείο M του τμήματος. Το σημείο διαιρεί το τμήμα εσωτερικά σε λόγο λ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{MA}{MB} = \lambda$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MB δίνονται ως συνάρτηση του λόγου λ από τους παρακάτω τύπους:

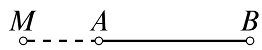
$$MA = \frac{\lambda}{\lambda+1}AB \ , \ \ MB = \frac{1}{\lambda+1}AB$$

Θεώρημα 1.3 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα εξωτερικό σημείο M του τμήματος. Το σημείο διαιρεί το τμήμα εσωτερικά σε λόγο λ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{MA}{MB} = \lambda$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Το σημείο βρίσκεται στο μέρος του άκρου A: Τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MB δίνονται ως συνάρτηση του λόγου λ από τους παρακάτω τύπους:



$$MA = \frac{\lambda}{\lambda-1}AB \ , \ \ MB = \frac{1}{\lambda-1}AB$$

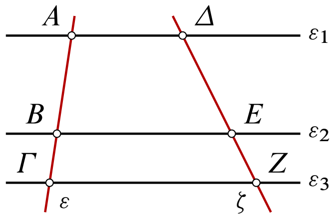
ii. Το σημείο βρίσκεται στο μέρος του άκρου B: Τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MB δίνονται ως συνάρτηση του λόγου λ από τους παρακάτω τύπους:

$$MA = \frac{\lambda}{1-\lambda}AB \ , \ \ MB = \frac{1}{1-\lambda}AB$$

1.4 Θεώρημα Θαλή

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

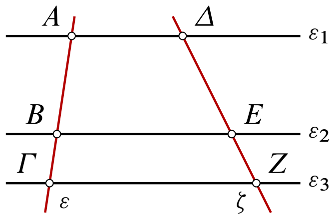
Θεώρημα 1.4 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ



Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται σ' αυτές είναι ανάλογα. Τα τμήματα της πρώτης ευθείας είναι ανάλογα προς τα τμήματα της δεύτερης.

$$\text{Αν } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

Θεώρημα 1.5 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΘΑΛΗ



Έστω δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνουν δύο ευθείες ε, ζ στα σημεία A, Δ και B, E αντίστοιχα. Αν μια τρίτη ευθεία ε_3 τέμνει τις ε, ζ στα σημεία Γ, Z έτσι ώστε να ισχύει

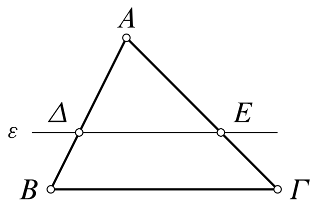
$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

τότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$\text{Αν } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$$

Θεώρημα 1.6 : ΠΟΡΙΣΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΘΑΛΗ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ
Μια ευθεία είναι παράλληλη με μια πλευρά ενός τριγώνου αν και μόνο αν χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές ή τις προεκτάσεις τους, σε τμήματα ανάλογα.

Θεώρημα 1.7 : ΑΝΑΛΟΓΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



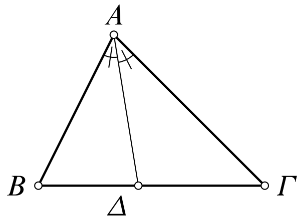
Αν μια ευθεία είναι παράλληλη με μια πλευρά τριγώνου και τέμνει τις άλλες δύο πλευρές ή τις προεκτάσεις τους, τότε το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει πλευρές ανάλογες προς το αρχικό.

$$\varepsilon \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

1.5 Θεωρήματα Διχοτόμων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.8 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ



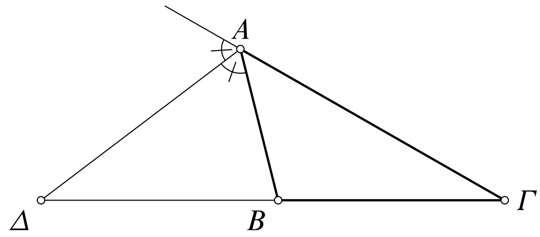
Η διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου διαιρεί εσωτερικά την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Τα τμήματα που προκύπτουν γράφονται ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου ως εξής:

$$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} \quad , \quad \Gamma\Delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$$

Θεώρημα 1.9 : **ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ**

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου διαρεί εξωτερικά την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Τα τμήματα που προκύπτουν γράφονται ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου ως εξής:

$$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma} \quad , \quad \Gamma\Delta = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Ομοιότητα

2.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

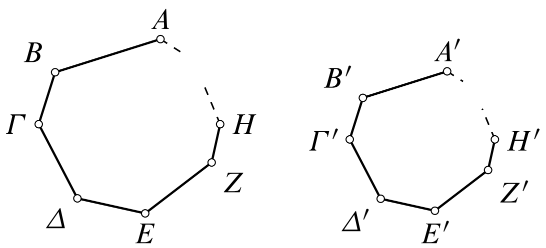
ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ
Όμοια ονομάζονται τα ευθύγραμμα σχήματα τα οποία έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες μια προς μια ίσες.

- Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες ονομάζονται **ομόλογες**.
- Ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών δύο όμοιων σχημάτων ονομάζεται **λόγος ομοιότητας**. Συμβολίζεται λ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ
Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητας.

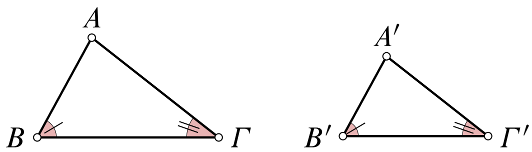


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\varGamma}{B'\varGamma'} = \ldots = \lambda$$

2.2 Κριτήρια ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

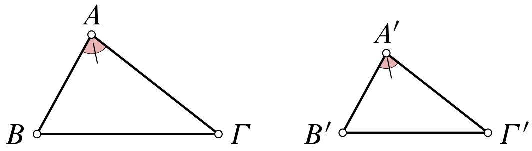
Θεώρημα 2.2 : 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Δύο τρίγωνα $AB\varGamma$ και $A'B'\varGamma'$ είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μια.



Θεώρημα 2.3 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

i. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν μια αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.
ii. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι μεταξύ τους όμοια.
iii. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μια αντίστοιχη γωνία ίση τότε είναι όμοια.

Θεώρημα 2.4 : 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ανάλογες μια προς μια και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες είναι όμοια.



Θεώρημα 2.5 : 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μια προς μια είναι όμοια.

Θεώρημα 2.6 : ΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο

i. δύο ομόλογων υψών
ii. δύο ομόλογων διχοτόμων και
iii. δύο ομόλογων διαμέσων.

Θεώρημα 2.7 : ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το γινόμενο των κάθετων πλευρών ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί το αντίστοιχο ύψος της.

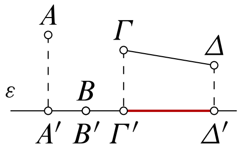
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Μετρικές Σχέσεις

3.1 Μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ - ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Προβολή ενός σημείου πάνω σε μια ευθεία ε ονομάζεται το ίχνος της καθέτου από το σημείο προς την ευθεία.



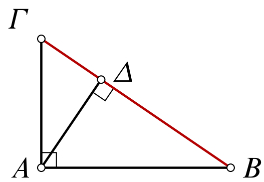
- Αν το σημείο ανήκει στην ευθεία τότε η προβολή του ταυτίζεται με το σημείο αυτό.
- Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma'\Delta'$ με άκρα, τις προβολές των άκρων ενός τμήματος $\Gamma\Delta$, ονομάζεται **προβολή του ευθυγράμμου τμήματος** πάνω στην ευθεία.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.1 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \ , \ A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$$



Θεώρημα 3.2 : ΛΟΓΟΣ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

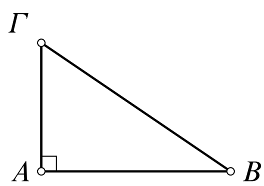
Ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

Θεώρημα 3.3 : ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τερταγώνων των κάθετων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$



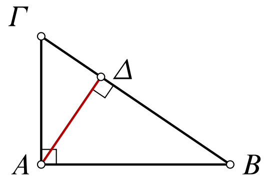
Θεώρημα 3.4 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ισούται με το άθροισμα τω τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών τότε το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο με την ορθή γωνία να βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

Θεώρημα 3.5 : **ΥΨΟΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.



$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$$

Θεώρημα 3.6 : **ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΘΕΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΥΨΟΥΣ**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των αντίστροφων τετραγώνων των κάθετων πλευρών ισούται με το αντίστροφο τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_a^2}$$

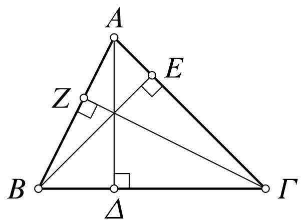
3.2 Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα

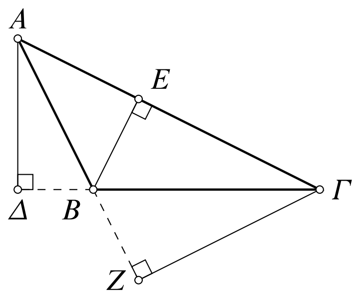
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.7 : **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΓΙΑ ΟΞΕΙΑ ΓΩΝΙΑ**

Το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών μειωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας πλευράς επί την προβολή της άλλης πάνω στην πρώτη.

$$\begin{aligned}
\hat{A} < 90^\circ &\Rightarrow a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AE \quad \text{και} \quad a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AZ \\
\hat{B} < 90^\circ &\Rightarrow \beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot BZ \\
\hat{\Gamma} < 90^\circ &\Rightarrow \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a \cdot \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Gamma E
\end{aligned}$$





Θεώρημα 3.8 : **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΓΙΑ ΑΜΒΛΕΙΑ ΓΩΝΙΑ**

Το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας πλευράς επί την προβολή της άλλης πάνω στην πρώτη.

$$\begin{aligned}
\hat{A} < 90^\circ &\Rightarrow a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AE \quad \text{και} \quad a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AZ \\
\hat{B} > 90^\circ &\Rightarrow \beta^2 = a^2 + \gamma^2 + 2a \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot BZ \\
\hat{\Gamma} < 90^\circ &\Rightarrow \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a \cdot \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad \gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Gamma E
\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.9 : **ΕΙΔΟΣ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**

Εάν το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών τότε η απέναντι γωνία της πλευράς αυτής είναι αντίστοιχα αμβλεία, ορθή ή οξεία.

$$a^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$
$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$
$$a^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

Θεώρημα 3.10 : ΕΙΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

Αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών τότε το τρίγωνο θα είναι αντίστοιχα αμβλυγώνιο, ορθογώνιο ή οξυγώνιο.

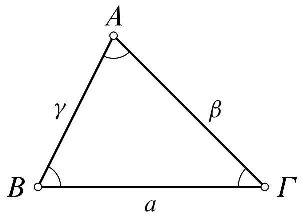
Θεώρημα 3.11 : ΥΨΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Σε κάθε τρίγωνο τα ύψη εκφράζονται ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου με τους παρακάτω τύπους :

$$\upsilon_a = \frac{2}{a}\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \ , \ \upsilon_\beta = \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \ , \ \upsilon_\gamma = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Θεώρημα 3.12 : ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενό τους επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.



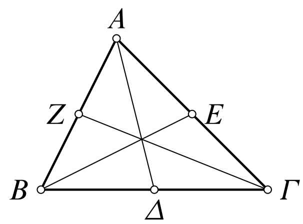
$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}$$
$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma\,\text{συν}\hat{B}$$
$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta\,\text{συν}\hat{\Gamma}$$

3.3 Θεωρήματα διαμέσων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.13 : 1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο τετράγωνο της περιεχόμενης διαμέσου συν το μισό τετράγωνο της τρίτης πλευράς.



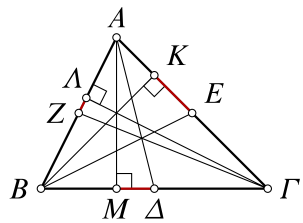
$$a^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \ , \ a^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \ , \ \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

Από τους παραπάνω τύπους μπορούμε να εκφράσουμε τις διαμέσους του τριγώνου με τη βοήθεια των πλευρών του ως εξής :

$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - a^2}{4} \ , \ \mu_\beta^2 = \frac{2a^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \ , \ \mu_\gamma^2 = \frac{2a^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Θεώρημα 3.14 : 2ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της περιεχόμενης διαμέσου στην τρίτη πλευρά.



$$a^2 - \beta^2 = 2\gamma \cdot \Lambda Z \ , \ a^2 - \gamma^2 = 2\beta \cdot KE \ , \ \beta^2 - \gamma^2 = 2a \cdot M\Delta$$

3.4 Μετρικές σχέσεις στον κύκλο

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.2 : ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ
Δύναμη ενός σημείου M ως προς ένα κύκλο (O, R) ονομάζεται η διαφορά

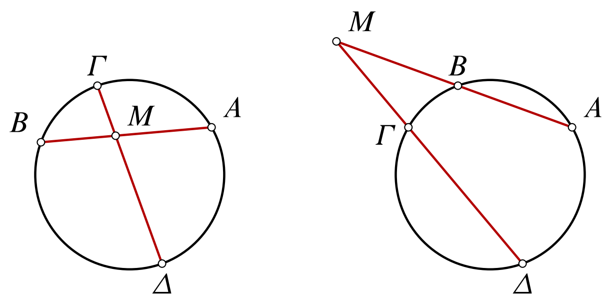
$$\Delta^{M}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2$$

όπου δ είναι η απόσταση του σημείου M από το κέντρο του κύκλου : $OM = \delta$. Συμβολίζεται με $\Delta^{M}_{(O,R)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.15 : ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ
Έστω AB και $\Gamma\Delta$ δύο χορδές ενός κύκλου (O, ρ). Αν M είναι το σημείο τομής αυτών ή των προεκτάσεων τους τότε τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζει το σημείο τομής με τα άκρα κάθε χορδής είναι μεταξύ τους ίσα.

$$MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$$

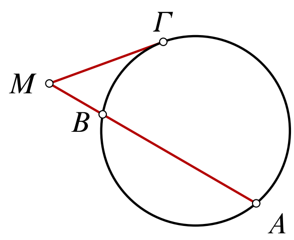


Θεώρημα 3.16 : ΑΚΡΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ
Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και M το σημείο τομής αυτών ή των προεκτάσεων τους. Αν τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζει το σημείο τομής με τα άκρα κάθε τμήματος να είναι ίσα τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

$$MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta \Rightarrow AB\Gamma\Delta \text{ εγγράψιμο}$$

Θεώρημα 3.17 : ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ
Έστω AB μια χορδή ενός κύκλου (O, ρ) και Γ ένα σημείο του κύκλου. Αν M είναι ένα εξωτερικό σημείο του κύκλου τότε το γινόμενο των τμημάτων που ορίζει το σημείο τομής με τα άκρα της χορδής είναι ίσο με το τετράγωνο του εφαπτόμενου τμήματος.

$$M\Gamma^2 = MA \cdot MB$$



Θεώρημα 3.18 : ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ
Έστω ένας κύκλος (O, R) και M ένα σημείο του επιπέδου του κύκλου.

i. Η δύναμη $\Delta^{M}_{(O,R)}$ του σημείου M ως προς τον κύκλο είναι θετική αν και μόνο αν το σημείο είναι εξωτερικό του κύκλου.

$$\Delta^{M}_{(O,R)} > 0 \Leftrightarrow \delta > R$$

ii. Η δύναμη $\Delta^{M}_{(O,R)}$ του σημείου M ως προς τον κύκλο είναι μηδενική αν και μόνο αν το σημείο είναι πάνω στον κύκλο.

$$\Delta^{M}_{(O,R)} = 0 \Leftrightarrow \delta = R$$

iii. Η δύναμη $\Delta^M_{(O,R)}$ του σημείου M ως προς τον κύκλο είναι αρνητική αν και μόνο αν το σημείο είναι εσωτερικό του κύκλου.

$$\Delta^M_{(O,R)} < 0 \Leftrightarrow \delta < R$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Εμβαδά

4.1 Εμβαδά βασικών σχημάτων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1 : ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΟ ΧΩΡΙΟ
Πολυγωνικό χωρίο ονομάζεται το σύνολο των σημείων ενός πολυγώνου μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.

- Κάθε πολυγωνικό χωρίο παίρνει το όνομά του από το όνομα του αντίστοιχου πολυγώνου : τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό και γενικά ν-γωνικό χωρίο.
- Η επιφάνεια που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων με κοινές πλευρές χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία ονομάζεται **πολυγωνική επιφάνεια**.

Ορισμός 4.2 : ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
Μονάδα μέτρησης επιφάνειας ονομάζεται το μέγεθος ενός πολυγωνικού χωρίου το οποίο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση και σύγκριση όλων των πολυγωνικών χωρίων.

Ορισμός 4.3 : ΕΜΒΑΔΟΝ
Εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ονομάζεται ο θετικός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τη μονάδα μέτρησης επιφάνειας ώστε να καλύψουμε το χωρίο αυτό.

Ορισμός 4.4 : ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΧΩΡΙΑ
Ισοδύναμα ή ισεμβαδικά ονομάζονται τα χωρία τα οποία έχουν ίσα εμβαδά.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.1 : ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΩΝ ΧΩΡΙΩΝ
Δεχόμαστε τις εξής προτάσεις που αφορούν τα πολυγωνικά χωρία και τις πολυγωνικές επιφάνειες.

i. Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
ii. Αν ένα πολυγωνικό χωρίο ή πολυγωνική επιφάνεια χωριστεί σε πεπερασμένο πλήθος χωρίων χωρίς εσωτερικά σημεία, το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους χωρίων.
iii. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 ισούται με 1.
iv. Αν ένα χωρίο P βρίσκεται στο εσωτερικό ενός χωρίου Q τότε το εμβαδόν του P είναι μικρότερο από το εμβαδόν του Q.

Θεώρημα 4.2 : ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ
Τα βασικά πολυγωνικά χωρία που συναντάμε είναι το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, το τρίγωνο, το τραπέζιο και ο ρόμβος. Τα εμβαδά τους είναι τα εξής :

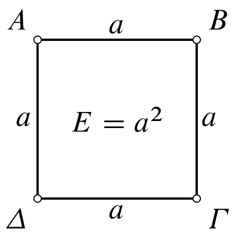
1. **Τετράγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του: $E = a^2$.

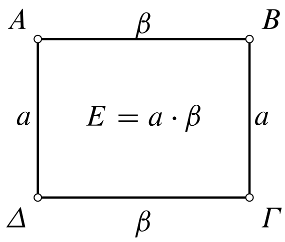
2. **Ορθογώνιο**
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις a, β ισούται με το γινόμενο του μήκους επί του πλάτους του.

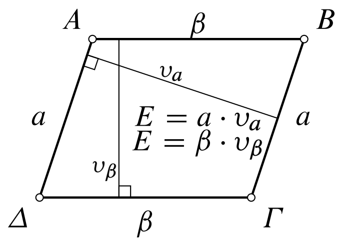
$$E = a \cdot \beta$$

3. **Παραλληλόγραμμο**
Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της

$$E = a \cdot \upsilon_a = \beta \cdot \upsilon_\beta$$

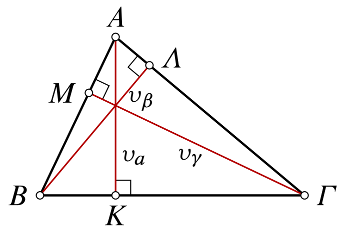






4. **Τρίγωνο**
Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της.

$$E = \frac{1}{2}a \cdot \upsilon_a = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

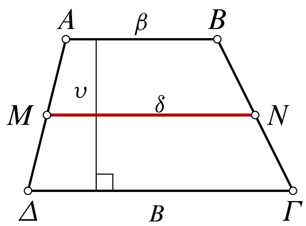


- Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του.
- Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a ισούται με $E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

5. **Τραπέζιο**
Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του αθροίσματος των βάσεων επί το μισό του ύψους του.

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2} = \delta \cdot \upsilon$$

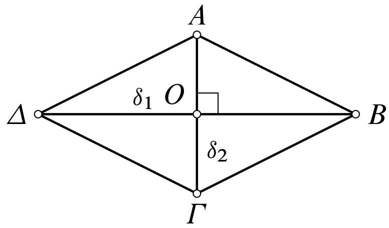
Ισούται επίσης με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.



6. **Ρόμβος**
Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

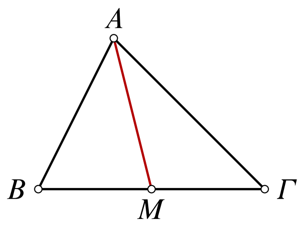
Γενικότερα το εμβαδόν οποιουδήποτε τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιους ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Θεώρημα 4.3 : **ΔΙΑΜΕΣΟΣ - ΙΣΕΜΒΑΔΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ**

Σε κάθε τρίγωνο, οποιαδήποτε διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε ισεμβαδικά μέρη.

$$(AMB) = (AM\Gamma)$$



4.2 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.4 : ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Επιπλέον τύποι από τους οποίους δίνεται το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ είναι οι παρακάτω:

i. $E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
ii. $E = \tau \cdot \rho$ όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.
iii. $E = \dfrac{a\beta\gamma}{4R}$ όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
iv. $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \text{ημ}\hat{A} = \dfrac{1}{2}a\gamma \cdot \text{ημ}\hat{B} = \dfrac{1}{2}a\beta \cdot \text{ημ}\hat{\Gamma}$

Θεώρημα 4.5 : ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι πλευρές του τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών. Κάθε λόγος ισούται με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

$$\frac{a}{\text{ημ}\hat{A}} = \frac{\beta}{\text{ημ}\hat{B}} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\hat{\Gamma}} = 2R$$

4.3 Λόγος Εμβαδών όμοιων σχημάτων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.6 : ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΙΣΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$.

i. Αν οι βάσεις τους είναι ίσες, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.
ii. Αν τα ύψη τους είναι ίσα, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

$$\text{Αν } a = a' \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\upsilon_a}{\upsilon_{a'}} \qquad \text{Αν } \upsilon_a = \upsilon_{a'} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{a}{a'}$$

Θεώρημα 4.7 : ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ - ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ
Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2$$

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και για το λόγων των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.

Θεώρημα 4.8 : ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΙΣΕΣ - ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ
Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μια ή δύο γωνίες παραπληρωματικές, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες.

$$\text{Αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

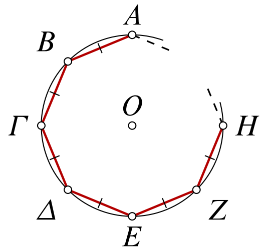
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Μέτρηση κύκλου

5.1 Κανονικά πολύγωνα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.1 : ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟ (**ν**-ΓΩΝΟ)

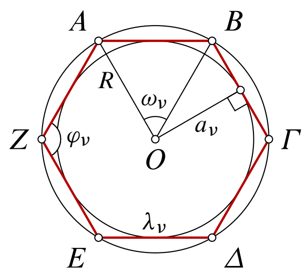
Κανονικό ονομάζεται κάθε πολύγωνο το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.



- Ένα κανονικό πολύγωνο συμβολίζεται ν-γωνο, όπου ν είναι ο φυσικός αριθμός που καθορίζει το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου με $\nu \geq 3$.
- Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος του πολυγώνου**.
- Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **κέντρο του πολυγώνου**

Ορισμός 5.2 : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Τα στοιχεία ενός κανονικού $\nu-$γωνου είναι τα εξής:



1. **Κεντρική γωνία**
   Η κεντρική γωνία είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο ακτίνες του κύκλου του πολυγώνου που ενώνουν το κέντρο με δύο διαδοχικές κορυφές του. Συμβολίζεται με ω_ν.
2. **Γωνία πολυγώνου**
   Η γωνία του πολυγώνου είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται φ_ν.
3. **Πλευρά πολυγώνου**
   Η πλευρά ενός κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται με λ_ν.
4. **Απόστημα πολυγώνου**
   Το απόστημα ενός πολυγώνου είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του. Συμβολίζεται με a_ν.
5. **Κέντρο πολυγώνου**
   Το κέντρο ενός κανονικού πολυγώνου είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.
6. **Ακτίνα πολυγώνου**
   Ακτίνα ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζεται η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Συμβολίζεται R.
7. **Περίμετρος - Εμβαδόν πολυγώνου**
   Η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται με P_ν ενώ το εμβαδόν του με E_ν.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.1 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Για τα στοιχεία ενός κανονικού $\nu-$γωνου ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

i. $\omega_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$
ii. $\varphi_\nu = 180° - \omega_\nu$
iii. $a_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
iv. $a_\nu = R \cdot \text{συν}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$
v. $\lambda_\nu = 2R \cdot \text{ημ}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$
vi. $\lambda_\nu = 2a_\nu \cdot \text{εφ}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$
vii. $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$
viii. $E_\nu = \dfrac{1}{2} P_\nu \cdot a_\nu$

Θεώρημα 5.2 : ΛΟΓΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ
Ο λόγος των πλευρών, ο λόγος των ακτίνων και ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών $\nu-$γωνων ισούνται με το λόγο ομοιότητας τους.

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{a_\nu}{a'_\nu}$$

5.2 Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.3 : ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ $\nu-$γωνου ΓΙΑ $\nu = 3, 4, 6$
Τα στοιχεία ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου που έχουν εγγραφεί σε κύκλο δίνονται στον παρακάτω πίνακα ως συνάρτηση της ακτίνας R.

	Ισόπλευρο τρίγωνο $\nu = 3$	Τετράγωνο $\nu = 4$	Κανονικό εξάγωνο $\nu = 6$
Πλευρά λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
Απόστημα a_ν	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Θεώρημα 5.4 : ΤΥΠΟΣ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ
Δοθέντος ενός κανονικού $\nu-$γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, η πλευρά $\lambda_{2\nu}$ και το απόστημα $a_{2\nu}$ ενός κανονικού $2\nu-$γώνου, δηλαδή ενός κανονικού πολυγώνου με διπλάσιες πλευρές εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο, δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - a_\nu) \qquad a_{2\nu}^2 = \frac{R}{2}(R + a_\nu)$$

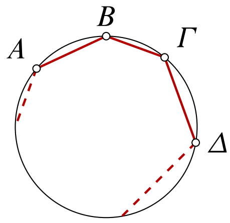
5.3 Μήκος κύκλου - Μήκος τόξου

ΟΡΙΣΜΟΙ

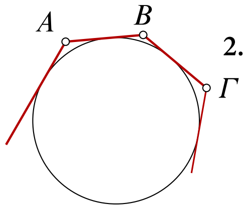
Ορισμός 5.3 : ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ
Μήκος ενός κύκλου (O, R) ονομάζεται ο θετικός αριθμός L ο οποίος είναι το όριο των ακολουθιών των περιμέτρων (P_ν) των εγγεγραμμένων και (P'_ν) των περιγεγραμμένων κανονικών $\nu-$γωνων καθώς το πλήθος ν των πλευρών αυξάνεται. Ισούται με

$$L = 2\pi R$$

Ορισμός 5.4 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ - ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ



1. **Εγγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή**
   Εγγεγραμμένη σε έναν κύκλο (O, R) ονομάζεται μια τεθλασμένη γραμμή η οποία αποτελείται από χορδές του κύκλου.



2. **Περιγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή**
   Περιγεγραμμένη σε έναν κύκλο (O, R) ονομάζεται μια τεθλασμένη γραμμή η οποία αποτελείται από εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου.

Ορισμός 5.5 : ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Μήκος ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ονομάζεται ο θετικός αριθμός ℓ ο οποίος είναι το όριο των ακολουθιών των μηκών (P_ν) των εγγεγραμμένων και (P'_ν) των περιγεγραμμένων τεθλασμένων γραμμών του τόξου καθώς αυξάνεται το πλήθος των τμημάτων τους. Ισούται με

$$\ell = \pi R \cdot \frac{\mu}{180} = aR$$

όπου μ είναι το μέτρο του τόξου σε μοίρες και a το μέτρο του σε ακτίνια.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.5 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ

Αν μ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και a το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{a}{\pi}$$

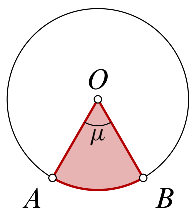
5.4 Εμβαδόν κύκλου - Κυκλικού τομέα - Κυκλικού τμήματος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.6 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

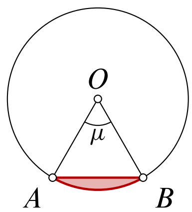
Εμβαδόν ενός κύκλου (O, R) ονομάζεται ο θετικός αριθμός E ο οποίος είναι το όριο των ακολουθιών (E_ν) των εγγεγραμμένων και (E'_ν) των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, καθώς το πλήθος ν των πλευρών αυξάνεται.

Ορισμός 5.7 : ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ



Κυκλικός τομέας κέντρου O και ακτίνας R ενός κύκλου (O, R) ονομάζεται το σύνολο των σημείων που περικλείει μια επίκεντρη $\hat{O}$ γωνία και το αντίστοιχο τόξο της $\overset{\frown}{AB}$. Συμβολίζεται με $O\overset{\frown}{AB}$.

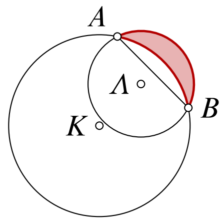
Ορισμός 5.8 : ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



Κυκλικό τμήμα ονομάζεται το σύνολο των σημείων που περικλείονται μεταξύ ενός τόξου και της αντίστοιχης χορδής του, σε έναν κύκλο (O, R).

Ορισμός 5.9 : ΜΗΝΙΣΚΟΣ

Μηνίσκος ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται μεταξύ δύο τόξων με κοινή χορδή. Τα τόξα αυτά βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της χορδής.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.6 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας R ισούται με $E = \pi R^2$.

Θεώρημα 5.7 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{AB}$ κέντρου O και ακτίνας R ισούται με

$$(O\overset{\frown}{AB}) = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = \frac{1}{2} a R^2$$

όπου μ είναι το μέτρο του τομέα σε μοίρες και a το μέτρο του σε ακτίνια.

Θεώρημα 5.8 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

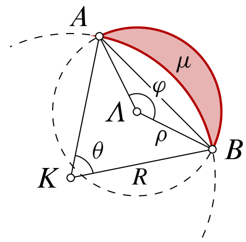
Το εμβαδόν ενός κυκλικού τμήματος ε που βρίσκεται μεταξύ ενός τόξου AB και της αντίστοιχης χορδής του δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} - \frac{R^2 \text{ημ}\mu}{2} = \frac{R^2}{2}(a - \text{ημ}a)$$

Θεώρημα 5.9 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΗΝΙΣΚΟΥ

Το εμβαδόν ενός μηνίσκου μ που ορίζεται από δύο κυκλικά τόξα κοινής χορδής AB ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που ορίζει η χορδή στους δύο κύκλους.

$$\mu = (K\overset{\frown}{AB}) - (\Lambda\overset{\frown}{AB}) + (KAB) - (\Lambda AB)$$



Με τη βοήθεια των **Θεωρημάτων 5.7 και 5.8** προκύπτουν επιπλέον τύποι για τον υπολογισμό του εμβαδού του μηνίσκου:

$$\mu = \frac{\pi R^2(\theta - \varphi)}{360^\circ} + \frac{R^2(\text{ημ}\theta - \text{ημ}\varphi)}{2} = \frac{R^2}{2}(a - \beta + \text{ημ}a - \text{ημ}\beta)$$

όπου a και β είναι τα μέτρα των γωνιών θ και φ αντίστοιχα, δοσμένα σε ακτίνια.