ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

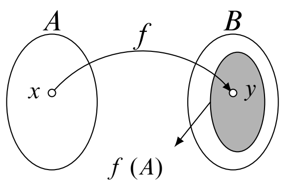
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
15 Απριλίου 2020

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ορισμοί

ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Πραγματική Συνάρτηση
Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι μια διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται **τιμή** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.



ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Σύνολο τιμών
Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Γραφική παράσταση
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των σημείων της μορφής $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με C_f

$$C_f = \{M(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Ίσες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού
Δύο συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : Ίσες συναρτήσεις με διαφορετικά πεδία ορισμού
Δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$. Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε δεν είναι ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων
Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

1. Η συνάρτηση $f + g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.

2. Η συνάρτηση $f - g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.

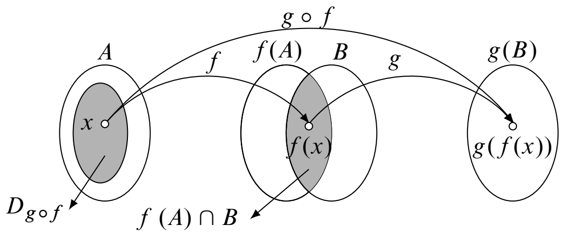
3. Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.

4. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : Σύνθεση συναρτήσεων
Η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο και πεδίο ορισμού

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \ \text{ και } \ f(x) \in B\}$$



- Διαβάζεται «σύνθεση της f με τη g» ή «g σύνθεση f».
- Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(A) \cap B \neq \varnothing$.
- Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in B \ \text{ και } \ g(x) \in A\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : Γνησίως μονότονη συνάρτηση
Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του Δ. Η f θα ονομάζεται

1. γνησίως αύξουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. γνησίως φθίνουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η f σε κάθε περίπτωση λέγεται **γνησίως μονότονη**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : Ολικά ακρότατα
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και έστω $x_0 \in A$. Η f θα λέμε ότι παρουσιάζει

1. ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \ \text{ για κάθε } \ x \in A$$

2. ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

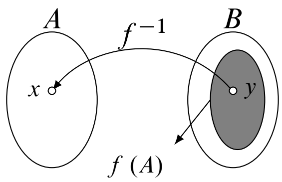
$$f(x) \geq f(x_0) \ \text{ για κάθε } \ x \in A$$

Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται **ολικά ακρότατα**. Το x_0 λέγεται **θέση** ακρότατου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 : Συνάρτηση $1-1$
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1-1$ εάν κάθε στοιχείο $x \in A$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της. Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της f θα ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 : Αντίστροφη συνάρτηση
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f.



- Συμβολίζεται με f^{-1} και είναι $f^{-1} : f(A) \to A$.
- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f, ενώ το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.
- Ισχύει ότι $x = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12 : Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο
Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 : Συνέχεια συνάρτησης σε σύνολο

1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, β) εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.
3. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ και } \ \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 14 : Εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$
Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 15 : Παράγωγος σε σημείο
Μια συνάρτηση f ονομάζεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 16 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση
Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f είναι παραγωγίσιμη, αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 17 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ανοιχτό διάστημα (α, β)
Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β).

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ανοιχτό διάστημα (α, β)
Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 19 : Πρώτη παράγωγος της f
Έστω A_1 το σύνολο όλων των σημείων του D_f της f για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to \mathbb{R} \ , \ x \to f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20 : Δεύτερη και $\nu-$οστή παράγωγος της f
Έστω A_1 το σύνολο όλων των σημείων του D_f της f για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και έστω ότι το σύνολο αυτό είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Η παράγωγος της f' αν υπάρχει, τότε λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται f''. Γενικότερα ορίζεται η $\nu-$οστή παράγωγος της f ως

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)} \right]' \ , \ \nu \geq 3$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 21 : Ρυθμός μεταβολής
Αν δύο μεταβλητά ποσά x, y συνδέονται με μια σχέση $y = f(x)$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 22 : Τοπικά ακρότατα

1. **Τοπικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού D_f, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in D_f$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

   $$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

   Το x_0 λέγεται **θέση** τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

2. **Τοπικό ελάχιστο**
   Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού D_f, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in D_f$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

   Το x_0 λέγεται **θέση** τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **τοπικά ακρότατα**.

Πηγή:
Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου, Οδηγός προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις - Συλλογικό Έργο - Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική - 2016
lysari team