



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ - 28 Φεβρουαρίου 2019

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ/ΤΡΙΑ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διαγώνισμα

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A.1** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . **Μονάδες 10**
- A.2** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. **Μονάδες 5**
- A.3** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
 - Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in [a, \beta]$ τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
 - Για μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ πιθανές θέσεις ακρότατων είναι τα άκρα του διαστήματος και τα κρίσιμα σημεία της.
 - Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
 - Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}^* .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x - \ln(x^2 + 1) + 1$$

- B.1** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**
- B.2** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f . **Μονάδες 7**
- B.3** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe = x^2 + 1$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 2 \ln 3$ και:

$$f'(x) = (4x - 8)e^{-f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Γ.1** Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln(2x^2 - 8x + 9)$. **Μονάδες 5**

Γ.2 Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ.3 Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

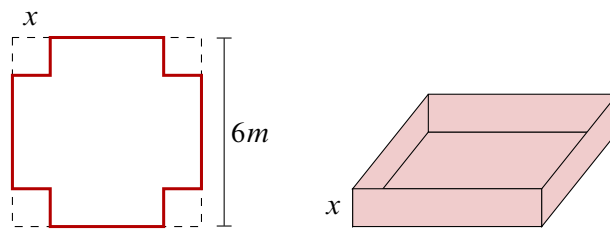
Γ.4 Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$f(ye^x - x^2 - yx) + f(y) = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ανοιχτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, με $0 < x < 3$, και στη συνέχεια οι πλευρές διπλώνονται προς τα πάνω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ.1 Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι:

$$f(x) = 4x(3 - x)^2, \quad 0 < x < 3$$

Μονάδες 5

Δ.2 Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει το μέγιστο όγκο.

Μονάδες 7

Δ.3 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$.

Μονάδες 6

Δ.4 Αν $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_2} > \left(\frac{3 - \sin x_2}{3 - \sin x_1} \right)^2$$

Μονάδες 7

Καλή Επιτυχία!