ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2 Οκτωβρίου 2015

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων οι οποίες περιέχουν και δυνάμεις πραγματικών αριθμών, ακολουθούμε τα βήματα που μας υποδεικνύει ο **Ορισμός 1** για τη σειρά των πράξεων δηλαδή

1ο Βήμα : **Υπολογισμός δυνάμεων**
Ξεκινώντας από τις πράξεις που βρίσκονται μέσα σε παρενθέσεις, υπολογίζουμε τις δυνάμεις που υπάρχουν, κάνοντας χρήση αν χρειαστεί των ιδιοτήτων του **Θεωρήματος 1**.

2ο Βήμα : **Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις**
Στη συνέχεια εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις τις αριθμητικής παράστασης.

3ο Βήμα : **Προσθέσεις - Αφαιρέσεις**
Τέλος, εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις της παράστασης.

Οι πράξεις αυτές επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά και έξω από τις παρενθέσεις, οποτε και προκύπτει το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να υπολογιστεί η τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης.

$$4 \cdot \left(7^2 - 6 \cdot 8\right) - 125 : \left(3^4 - 7 \cdot 8\right)$$

ΛΥΣΗ
Ακολουθώντας τα βήματα της **Μεθόδου 1** θα υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης εμφανίζοντας μέσα στην επίλυση την εφαρμογή κάθε βήματος.

$$4 \cdot \left(7^2 - 6 \cdot 8\right) - 125 : \left(3^4 - 7 \cdot 8\right) \xlongequal[\text{Δυνάμεις}]{1^{\text{ο}}\text{ Βήμα}}$$
$$4 \cdot (49 - 6 \cdot 8) - 125 : (81 - 7 \cdot 8) \xlongequal[\text{Πολλ.-Διαιρ.}]{2^{\text{ο}}\text{ Βήμα}}$$
$$4 \cdot (49 - 48) - 125 : (81 - 56) \xlongequal[\text{Πρ.-Αφ.}]{3^{\text{ο}}\text{ Βήμα}}$$
$$4 \cdot 1 - 125 : 25 \xlongequal[\text{Πολλ.-Διαιρ.}]{2^{\text{ο}}\text{ Βήμα}} 4 - 5 \xlongequal[\text{Πρ.-Αφ.}]{3^{\text{ο}}\text{ Βήμα}} -1$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Παραστάσεις οι οποίες περιέχουν δυνάμεις αριθμών ή και μεταβλητών, απλοποιούνται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα :

1ο Βήμα : **Κοινοί εκθέτες - Κοινές βάσεις**
Εκτελούμε κατάλληλες πράξεις στις δυνάμεις αυτές ώστε να γραφτούν με τη βοήθεια κοινής βάσης ή κοινού εκθέτη.

2ο Βήμα : **Μετατροπή αριθμών σε δυνάμεις**
Εξετάζουμε αν οι υπόλοιποι αριθμοί της παράστασης μπορούν να μετατραπούν κι αυτοί σε δυνάμεις, με βάση ή εκθέτη κοινό με τις υπόλοιπες δυνάμεις της παράστασης.

3ο Βήμα : **Ιδιότητες δυνάμεων**
Τέλος, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του **Θεωρήματος 1** απλοποιούμε την παράσταση μαζεύοντας τις δυνάμεις με τα κοινά στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να γραφτούν οι παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας δύναμης.

i. $\left(3^5 \cdot 3^7\right) : 3^4$

ii. $2{,}5^3 \cdot 4^3$

iii. $5^2 \cdot \dfrac{1}{125}$

iv. $\left(4^4\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^5$

v. $4^6 : 2^{10}$

vi. $3{,}5^8 \cdot \dfrac{7^5}{2^5}$

vii. $3^2 \cdot 81 \cdot 25^3$

viii. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{4}{15}\right)^{-3}$

ΛΥΣΗ
Ακολουθώντας τα βήματα της **Μεθόδου 2** απλοποιούμε τις παραπάνω παραστάσεις ως εξής :

i. Για τη συγκεκριμένη παράσταση παραλείπουμε το **1ο και 2ο Βήμα** της **Μεθόδου 2** μιας και όλες οι δυνάμεις έχουν κοινή βάση τον αριθμό 3 ενώ δεν περιέχει άλλους αριθμούς ώστε να μετατραπούν σε δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων θα έχουμε

$$\left(3^5 \cdot 3^7\right) : 3^4 \overset{1^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} 3^{5+7} : 3^4 = 3^{12} : 3^4 \overset{2^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} 3^{12-4} = 3^8$$

ii. Για την παράσταση $2{,}5^3 \cdot 4^3$ ομοίως με προηγουμένως παραλείπουμε το **1ο και 2ο Βήμα** και έχουμε

$$2{,}5^3 \cdot 4^3 \overset{3^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} (2{,}5 \cdot 4)^3 = 10^3$$

iii. Συνεχίζουμε και στα υπόλοιπα ερωτήματα ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο. Για να απλοποιηθεί η παράσταση θα πρέπει να μετατρέψουμε τον αριθμό 125 σε δύναμη του 5. Εκτελώντας πράξεις και χρησιμοποιώντας την 2^{η} ιδιότητα προκύπτει

$$5^2 \cdot \frac{1}{125} \overset{2^{o}\ \text{Βήμα}}{=\!=\!=\!=} 5^2 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{5^2}{5^3} \overset{2^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} 5^{2-3} = 5^{-1}$$

iv. Ομοίως και για την παρακάτω παράσταση

$$\left(4^4\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \overset{4^{\eta}\ \text{και}\ 5^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} 4^{4\cdot 2} \cdot \frac{1^5}{4^5} = 4^8 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{4^8}{4^5} \overset{2^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} 4^{8-5} = 4^3$$

v. Στην παράσταση $4^6 : 2^{10}$ οι δύο δυνάμεις θα πρέπει να μετατραπούν ώστε να αποκτήσουν είτε κοινές βάσεις είτε κοινούς εκθέτες. Γράφουμε τον αριθμό 4 ως δύναμη του 2 και προκύπτει

$$4^6 : 2^{10} = \left(2^2\right)^6 : 2^{10} \underset{1^{o}\ \text{Βήμα.}}{\overset{1^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=\!=}} 2^{12} : 2^{10} \overset{2^{\eta}\ \text{Ιδ.}}{=\!=\!=} 2^{12-10} = 2^2$$

vi. Ομοίως θα έχουμε

$$3{,}5^8 \cdot \frac{7^5}{2^5} \xlongequal{4^\eta \text{ Ιδ.}} 3{,}5^8 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^5 = 3{,}5^8 \cdot 3{,}5^5 \xlongequal{3^\eta \text{ Ιδ.}} 3{,}5^{8+5} = 3{,}5^{13}$$

vii. Στο ερώτημα αυτό θα χρειαστεί να αλλάξουμε τη σειρά των βημάτων **1** και **2**. Θα χρειαστεί να γράψουμε τον αριθμό 81 ως δύναμη του 3. Γράφοντας επίσης το 25 ως δύναμη του 5 θα προκύψει μετά από πράξεις κοινός εκθέτης στις δύο δυνάμεις.

$$3^2 \cdot 81 \cdot 25^3 \xlongequal{1^\text{ο} \text{ και } 2^\text{ο} \text{ Βήμα.}} 3^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \xlongequal{1^\eta \text{ Ιδ.}} 3^{2+4} \cdot 5^6 = 3^6 \cdot 5^6 \xlongequal{3^\eta \text{ Ιδ.}} (3 \cdot 5)^6 = 15^6$$

viii. Τέλος για τη συγκεκριμένη παράσταση κάνουμε χρήση της $6^{\eta\varsigma}$ ιδιότητας και προκύπτει

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^{-3} \xlongequal{6^\eta \text{ Ιδ.}} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^3 \xlongequal{3^\eta \text{ Ιδ.}} \left(\frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 4}\right)^3 = \left(\frac{30}{20}\right)^3 \xlongequal{\text{απλοπ.}} \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Να απλοποιηθεί η παρακάτω αλγεβρική παράσταση.

$$x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2 : \left[\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3\right]$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε της ιδιότητες των δυνάμεων όπως τις είδαμε στο **Θεώρημα 1** καταλλήγοντας σε μια απλούστερη αλγεβρική παράσταση. Για λόγους ευκολίας μετατρέπουμε το σύμβολο : της διαίρεσης σε γραμμή κλάσματος ώστε αναγνωρίσουμε καλύτερα διαιρετέο και διαιρέτη.

$$x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2 : \left[\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3\right] = \frac{x^4 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2}{\left(x \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3} \xlongequal{3^\eta \text{ Ιδ.}}$$

$$\frac{x^4 \cdot \left(x^2\right)^2 \cdot \left(y^3\right)^2}{x^{-1} \cdot \left(y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^3} \xlongequal{5^\eta \text{ Ιδ.}} \frac{x^4 \cdot x^4 \cdot y^6}{x^{-1} \cdot y^2 \cdot y^3} \xlongequal{1^\eta \text{ Ιδ.}}$$

$$\frac{x^8 \cdot y^6}{x^{-1} \cdot y^5} \xlongequal{2^\eta \text{ Ιδ.}} x^9 \cdot y$$

Σπύρος Φρόνιμος