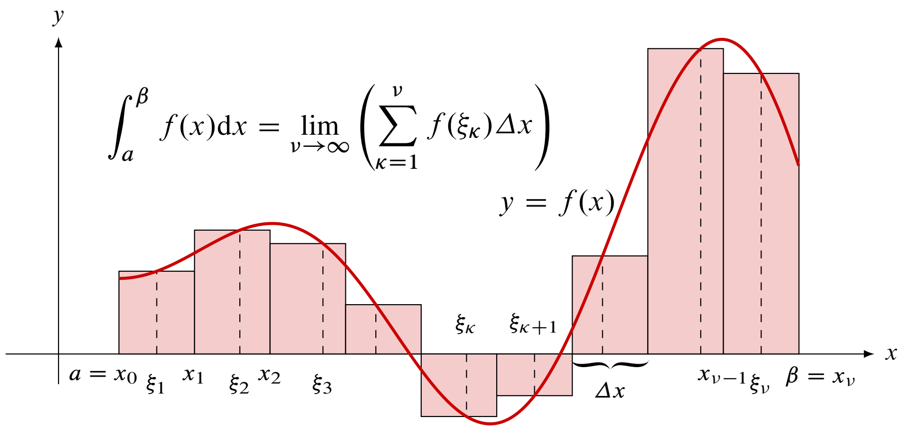
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , : 26610 20144 , : 6932327283 - 6955058444

5 Απριλίου 2025

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Φρόνιμος Σπύρος

Τυπολόγιο

1ο Κεφάλαιο ΄Ορια - Συνέχεια

Μεθοδολογία

1ο Κεφάλαιο ΄Ορια - Συνέχεια

1.1 Σύνθεση συναρτήσεων

΄Ασκηση 1.1 : Εύρεση σύνθεσης

Για να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

1º Βήμα : Για το πεδίο ορισμού ισχύουν οι σχέσεις

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

Οι περιορισμοί αυτοί μας οδηγούν σε εξισώσεις και ανισώσεις. Οι κοινές λύσεις σχηματίζουν το πεδίο ορισμού.

2º Βήμα : Ο τύπος της $f \circ g$ θα ισούται με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

που σημαίνει ότι στον τύπο της f αντικαθιστούμε το x με $g(x)$.

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για τις συναρτήσεις $g \circ f$, $f \circ f \dots$

Παράδειγμα 1 : Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις

α. $f \circ g$ **β.** $g \circ f$ **γ.** $f \circ f$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, ενώ η g ορίζεται όταν $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ οπότε $D_g = [2, +\infty)$.

α. Η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$$

- $x \in D_g \Rightarrow x \in [2, +\infty)$
- $g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \sqrt{x-2} \neq 1 \Rightarrow x-2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

Επομένως $D_{f \circ g} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

β. Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt{f(x)-2} = \sqrt{\frac{1}{x-1} - 2}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$$

- $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- $f(x) \in D_g \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} \in [2, +\infty) \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{3-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (3-x)(x-1) \geq 0 \text{ και } x - 1 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \in (1, 3]$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$3-x$	+	+	0	−
$x-1$	−	0	+	+
Γινόμενο	−	‖	+ 0	−

Επομένως $D_{g\circ f} = (1, 3]$.

1.2 Συνάρτηση $1-1$ - Αντίστροφη

Άσκηση 1.2 : Συνάρτηση $1-1$

Υπάρχουν οι εξής τρόποι για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$.

1ος Τρόπος : Αποδεικνύοντας ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο D_f. (Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα.)

2ος Τρόπος : Με τη βοήθεια του ορισμού της $1-1$ συνάρτησης

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων, αρκεί ο τύπος να επιτρέπει την επίλυση της εξίσωσης.)

3ος Τρόπος : Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f. Κάθε οριζόντια ευθεία πρέπει να τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο.

4ος Τρόπος : Αν η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε $y \in f(D_f)$ και η λύση ανήκει στο D_f τότε η f είναι $1-1$.

5ος Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η f δεν είναι $1-1$.

Άσκηση 1.3 : Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

1ο Βήμα : Εύρεση συνόλου τιμών της f με τη βοήθεια μονοτονίας.

2ο Βήμα : Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x με $x \in D_f$.

1.3 Όρια

Οι απροσδιόριστες μορφές που μπορεί να έχει ένα όριο είναι οι ακόλουθες :

α. Μορφή κλάσματος : $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

β. Μορφή γινομένου : $0 \cdot (\pm\infty)$

γ. Μορφή δύναμης : $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

δ. Μορφή αθροίσματος : $\infty - \infty$

Θα μελετήσουμε επίσης τη μορφή $\frac{a}{0}$.

Άσκηση 1.4 : Όρια με απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$

α. Με ρητή συνάρτηση

1ος Τρόπος : Παραγοντοποίηση
2ος Τρόπος : Κανόνας De L'Hospital

β. Με ρίζες :
Πολλαπλασιασμός με συζυγείς παραστάσεις.

γ. Με απόλυτες τιμές

1ο Βήμα : Υπολογίζω τα όρια των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές.

2ο Βήμα : Διώχνω τις απόλυτες τιμές με τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Αν κάποια απόλυτη τιμή μηδενίζεται στο x_0 τότε υπολογίζω πλευρικά όρια.

3ο Βήμα : Υπολογίζω όριο ρητής $\frac{0}{0}$

δ. Με τριγωνομετρικές παραστάσεις

1ος Τρόπος : Κατασκευάζω και χρησιμοποιώ τριγωνομετρικές ταυτότητες.

2ος Τρόπος : Κατασκευάζω με πράξεις κάποιο βασικό τριγωνομετρικό όριο, αρκεί όταν $x \to x_0$ να μηδενίζεται η γωνία του τριγωνομετρικού αριθμού.

3ος Τρόπος : Κανόνας De L' Hospital. (Χρειάζεται προσοχή εδώ γιατί μπορεί η εφαρμογή του κανόνα να με οδηγήσει σε δυσκολότερο όριο.)

ε. Με εκθετικές, λογαριθμικές και συνδυασμό αυτών : Κανόνας De L' Hospital

Άσκηση 1.5 : Όρια με απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$

α. Με ρητή συνάρτηση όταν $x \to \infty$ υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος μόνο με τους μεγιστοβάθμιους όρους.

β. Με ρίζες : Μέθοδος κοινού παράγοντα.

γ. Διάφορες συναρτήσεις : Κανόνας De L' Hospital

Άσκηση 1.6 : Όρια με απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$

1ο Βήμα : Γράφουμε το γινόμενο με μορφή σύνθετου κλάσματος ως εξής

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ή } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

2ο Βήμα : Το όριο παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital

Άσκηση 1.7 : Όρια με απροσδιοριστία $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

1ο Βήμα : Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

2ο Βήμα : Υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη το οποίο έχει απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$. Στη συνέχεια με αντικατάσταση υπολογίζουμε το αρχικό όριο.

Άσκηση 1.8 : Όρια με απροσδιοριστία $\infty - \infty$

Για τον υπολογισμό ορίου $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ με απροσδιοριστία $\infty - \infty$ ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^ος^ Τρόπος : Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια από τις δύο συναρτήσεις.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος $\frac{g(x)}{f(x)}$ με μορφή $\infty - \infty$.

2^ος^ Τρόπος : Αν οι $f(x), g(x)$ είναι κλάσματα, τα κάνουμε ομώνυμα.

3^ος^ Τρόπος : Σχηματίζουμε διαφορά λογαρίθμων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\ln a - \ln \beta = \ln \frac{a}{\beta}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος.

Άσκηση 1.9 : Όρια της μορφής $\frac{a}{0}$

1^ο^ Βήμα : Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.

2^ο^ Βήμα : Γράφουμε σε ξεχωριστό κλάσμα τον παράγοντα που μηδενίζεται.

3^ο^ Βήμα : Αν αυτός ο παράγοντας έχει σταθερό πρόσημο τότε προχωράμε στον υπολογισμό. Αν όχι υπολογίζουμε πλευρικά όρια.

Άσκηση 1.10 : Όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ $f(x)$, συν $f(x)$ - Μηδενική επί φραγμένη

Αν το όριο περιέχει σύνθετες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με γωνία $f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε

1^ο^ Βήμα : Γράφουμε τη συνάρτηση μέσα στο όριο ως γινόμενο συναρτήσεων.

2^ο^ Βήμα : Κλείνουμε τη συνάρτηση του ορίου σε απόλυτη τιμή και σχηματίζουμε διπλή ανισότητα ώστε να εφαρμοστεί κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 1.11 : Γνωστό όριο που περιέχει την $f(x)$ - Βοηθητική συνάρτηση

1^ο^ Βήμα : Θέτουμε $g(x)$ τη συνάρτηση του ορίου και λύνουμε ως προς $f(x)$.

2^ο^ Βήμα : Υπολογίζουμε το όριο της f στο x_0.

Άσκηση 1.12 : Κριτήριο παρεμβολής

Το κριτήριο παρεμβολής για τον υπολογισμό ορίων εφαρμόζεται σε ανισότητες της μορφής

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ ή } |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

2ο Κεφάλαιο Διαφορικός λογισμός

2.1 Εφαπτομένη

Άσκηση 2.1 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστό σημείο επαφής

1^ο^ Βήμα : Πεδίο ορισμού, παράγωγος f' και θέτουμε όπου $x = x_0$ ώστε να βρεθούν οι αριθμοί $x_0, f(x_0)$ και $f'(x_0)$.

2ο Βήμα : Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

και αντικαθιστώντας λύνουμε ως προς y.

Άσκηση 2.2 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστή κλίση λ

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο Βήμα : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και θέτουμε το σ.δ. της εφαπτομένης να ισούται με τη δοσμένη κλίση λ.

$$f(x_0) = \lambda$$

Αν δεν μας δίνεται ο συντελεστής λ της εφαπτομένης ε τότε τον βρίσκουμε έχοντας τις εξής περιπτώσεις.

Συνθήκη	Εξίσωση
Ευθείες παράλληλες $\varepsilon \parallel \zeta$	$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Ευθείες κάθετες $\varepsilon \perp \zeta$	$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Οριζόντια ευθεία $\varepsilon \parallel x'x$	$\lambda_\varepsilon = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
Η ε σχηματίζει γωνία ω	$\lambda_\varepsilon = \text{εφ}\omega \Rightarrow f'(x_0) = \text{εφ}\omega.$

3ο Βήμα : Λύνουμε την εξίσωση, βρίσκουμε το x_0 και στη συνέχεια το $f(x_0)$.

4ο Βήμα : Εξίσωση ευθείας $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Άσκηση 2.3 : Εφαπτομένη που διέρχεται από εξωτερικό σημείο $P(a, \beta)$

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο Βήμα : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και γράφουμε τον τύπο της ευθείας.

3ο Βήμα : Αντικαθιστούμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ στην εξίσωση.

4ο Βήμα : Αφού $P \in \varepsilon$ τότε θέτουμε $x = a$ και $y = \beta$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς x_0.

5ο Βήμα : Για κάθε x_0 υπολογίζουμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ και βρίσκουμε την ευθεία.

Άσκηση 2.4 : Ευθεία εφάπτεται στη C_f στο $M(x_0 f(x_0))$

$$\text{Η ευθεία } y = ax + \beta \text{ εφάπτεται στη } C_f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$$

Άσκηση 2.5 : Κοινή εφαπτομένη C_f, C_g σε κοινό σημείο $M(x_0, f(x_0))$

$$\text{Οι } C_f \text{ και } C_g \text{ έχουν κοινή εφαπτομένη στο } M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

2.2 Μονοτονία - Ακρότατα

Άσκηση 2.6 : Εύρεση μονοτονίας

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού της f και έλεγχος συνέχειας

2ο Βήμα : Παράγωγος f'.

3ο Βήμα : Υπολογίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f' με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ και τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.
- Με επιλογή τιμής σε κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού. Οι ρίζες βρίσκονται και εδώ λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Παραγωγίζοντας δεύτερη ή ακόμα και τρίτη φορά. Με τη μονοτονία κάθε παραγώγου βρίσκουμε τα πρόσημά της ώσπου να φτάσουμε στη μονοτονία της f. Οι ρίζες βρίσκονται με δοκιμές.

4ο Βήμα : Σχεδιάζουμε πίνακα με τα πρόσημα της παραγώγου και τη μονοτονία της f. (Συμπληρώνουμε αν χρειαστεί και επιπλέον γραμμές για τις ανώτερης τάξης παραγώγους που βρήκαμε.)

5ο Βήμα :

Για εύρεση μονοτονίας	**Για εύρεση ακροτάτων**	**Για εύρεση συνόλου τιμών**
Αναφέρουμε το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για ακρότατα στα κρίσιμα σημεία και στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού	Βρίσκουμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας και τις ενώνουμε

6ο Βήμα : Για την εύρεση του πλήθους ριζών της συνάρτησης, ελέγχουμε αν το 0 ανήκει στην εικόνα κάθε διαστήματος. Αναλυτικά

$$0 \in f(\Delta_1) \Rightarrow \text{Υπάρχει } x_0 : f(x_0) = 0$$

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική μέσα στο κάθε διάστημα γιατί η f είναι γνησίως μονότονη.

2.3 Κυρτότητα και σημεία καμπής

Άσκηση 2.7 : Εύρεση κυρτότητας - σημείων καμπής

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και έλεγχος συνέχειας.

2ο Βήμα : Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο f''.

3ο Βήμα : Βρίσκουμε ρίζες και πρόσημα της f'' με τους τρόπους που περιγράψαμε στη μονοτονία.

4ο Βήμα : Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα της f'' και την κυρτότητα της f.

5ο Βήμα :

Για εύρεση κυρτότητας	Για εύρεση σημείων καμπής
Αναφέρουμε το είδος της κυρτότητας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για σημεία καμπής στα σημεία που αλλάζει η κυρτότητα αρκεί η f να είναι μια φορά παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

Παράδειγμα 1 :

Άσκηση 2.8 : Κυρτότητα και εφαπτομένες - Απόδειξη ανισότητας

1ο Βήμα : Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

2ο Βήμα : Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο που ζητάει ή σε κάποιο σημαντικό σημείο. Αυτή θα έχει τη μορφή $y = ax + \beta$

3ο Βήμα : Χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$f \smile \Delta \Rightarrow f(x) \geq ax + \beta \ , \ f \frown \Delta \Rightarrow f(x) \leq ax + \beta$$

και με πράξεις φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή που τη ζητάει η άσκηση.

2.4 Ασύμπτωτες

Άσκηση 2.9 : Κατακόρυφες ασύμπτωτες

1ο Βήμα : Πεδίο ορισμού της f.

2ο Βήμα : Υπολογισμός κάποιου πλευρικού ορίου στα σημεία x_0 που είναι ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της f ή στα σημεία που δεν είναι συνεχής η συνάρτηση.

3ο Βήμα : Αν κάποιο πλευρικό όριο ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Άσκηση 2.10 : Οριζόντια ασύμπτωτη

1ο Βήμα : Όριο της f στο $+\infty$ ή $-\infty$ εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$.

2ο Βήμα : Αν $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ τότε η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

Άσκηση 2.11 : Πλάγια ασύμπτωτη

1ο Βήμα : Εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$ υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \ , \ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$$

και αντίστοιχα στο $-\infty$.

2ο Βήμα : Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

Άσκηση 2.12 : Ασύμπτωτες γενικά

1ο Βήμα : Αναζητούμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία που αναφέραμε.

2ο Βήμα : Ανάμεσα σε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ξεκινάμε με τις πλάγιες και από το συντελεστή διεύθυνσης λ θα εξαρτηθεί αν η ευθεία είναι πλάγια ή οριζόντια. Ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$$

- $\lambda \neq 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$
  - $\beta \in \mathbb{R}$: Πλάγια ασύμπτωτη : $y=\lambda x+\beta$
  - $\beta = \pm\infty$: Όχι πλάγια ασύμπτωτη
- $\lambda = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$
  - $l \in \mathbb{R}$: Οριζόντια ασύμπτωτη $y=l$
  - $l \notin \mathbb{R}$: Όχι οριζόντια ασύμπτωτη
- $\lambda = \pm\infty \rightarrow$ Όχι πλάγια ασύμπ.

2.5 Εύρεση παραμέτρων

Η γενική μέθοδος για την εύρεση μιας παραμέτρου είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση ή ανίσωση που να την περιέχει, ώστε λύνοντάς την να την προσδιορίσουμε. Κάποια συνθήκη της υπόθεσης είναι αυτή που θα μας οδηγήσει σ᾽ αυτή την εξίσωση-ανίσωση.

Συνθήκη	Εξίσωση - Ανίσωση
Το σημείο $A(a,\beta)$ ανήκει στη C_f	$f(a)=\beta$
Γνωστό όριο που περιέχει παραμέτρους $a,\beta\ldots$	Βοηθητική συνάρτηση
Η f είναι συνεχής σε σημείο $x_0 \in D_f$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
Η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in D_f$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Η ευθεία $y=ax+\beta$ εφάπτεται στη C_f	$\begin{cases} f(x_0)=ax_0+\beta \\ f'(x_0)=a \end{cases}$
Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$	$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$
Η f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο Δ	$f'(x)\geq 0$ (ή $f'(x)\leq 0$)
Η f παρουσιάζει **ακρότατο** στο **εσωτερικό** σημείο $x_0 \in \Delta$ και είναι **παραγωγίσιμη** σ᾽ αυτό. (Αν επιπλέον το ακρότατο είναι β)	$f'(x_0)=0$ (τότε $f(x_0)=\beta$) - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η f είναι κυρτή (ή κοίλη) στο Δ	$f''(x)\geq 0$ (ή $f''(x)\leq 0$)
Η C_f έχει **σημείο καμπής** $M(x_0,y_0)$ στο **εσωτερικό** σημείο $x_0\in\Delta$ στο οποίο είναι **δύο φορές παραγωγίσιμη** και **ορίζεται εφαπτομένη** στο σημείο αυτό.	$f''(x_0)=0$ και $f(x_0)=y_0$ - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=x_0$	$x_0=$ ανοιχτό άκρο διαστήματος ή σημείο ασυνέχειας.
Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=l$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$
Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$

2.6 Λύση εξισώσεων - ανισώσεων + Ύπαρξη λύσης

Άσκηση 2.13 : Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης

Μπορούμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα Bolzano

2^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

3^{ος} Τρόπος : Με σύνολο τιμών : Αν $a \in f(D_f)$ τότε υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε $f(x_0) = a$.

4^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα Rolle : Βρίσκουμε την αρχική F της f οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $F'(x) = a$.

5^{ος} Τρόπος : Με Θεώρημα Μέσης Τιμής.

6^{ος} Τρόπος : Αλγεβρικά

7^{ος} Τρόπος : Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα.

8^{ος} Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Άσκηση 2.14 : Εξίσωση που έχει το πολύ μια ρίζα

Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα έχουμε τους τρόπους

1^{ος} Τρόπος : Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και $1-1$.

2^{ος} Τρόπος : Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 ρίζες x_1, x_2 και εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 2.15 : Μοναδική ρίζα εξίσωσης

Χρησιμοποιούμε έναν τρόπο για να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και έναν τρόπος για να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ μια ρίζα. Άρα η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Άσκηση 2.16 : Επίλυση εξίσωσης

Για την επίλυση μιας εξίσωσης ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} Περίπτωση : Συνάρτηση $1-1$
Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(a)$ και δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$. Συνεπώς θα ισχύει

$$f(x) = f(a) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} x = a$$

Η μέθοδος αυτή ακολουθείται και για εξισώσεις της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$.

2^{ος} Περίπτωση : Με ολικό ακρότατο
Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = a$ και αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός a είναι ολικό ακρότατο της f. Οι θέσεις των ακρότατων είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

Πηγή: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Η επανάληψη. Ανδρέας Πάτσης - Παύλος Τρύφων, Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική