ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10 Ιουλίου 2019

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

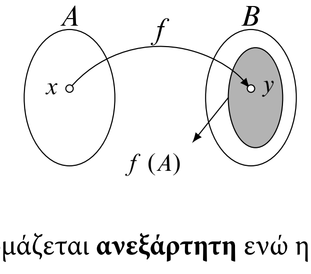
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται ο κανόνας (αντιστοίχηση) με τον οποίο **κάθε** στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.
Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή και του ελληνικού αλφαβήτου $f, g, h, t, s, \sigma \ldots$ και γράφουμε :

$$f : A \to B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης ($x \in A$), στο πρώτο σύνολο, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης ($y \in B$), στο δεύτερο σύνολο.



- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$.
- Ο κανόνας της συνάρτησης, με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχηση από το x στο $f(x)$, εκφράζεται συμβολικά με τη βοήθεια του x και ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται D_f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in D_f$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\left(D_f\right)$ και ισχύει $f\left(D_f\right) \subseteq B$.

- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \ \ , \ \ D_f \overset{f}{\to} f\left(D_f\right)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \ \ , \ \ g(t) \ \ , \ \ h(s)\ldots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε
  1. Το πεδίο ορισμού D_f.
  2. Το σύνολο B.
  3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in D_f$.
- Εαν τα σύνολα D_f, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.
- Οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος δίνεται από δύο ή περισσότερες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται συναρτήσεις **πολλαπλού τύπου**.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in D_{f_1} \subseteq D_f \\ f_2(x) & \text{αν } x \in D_{f_2} \subseteq D_f \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ f_\nu(x) & \text{αν } x \in D_{f_\nu} \subseteq D_f \end{cases}$$

όπου $D_{f_1}, D_{f_2}, \ldots, D_{f_\nu}$ είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού ολόκληρης της συνάρτησης f με $D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \ldots \cup D_{f_\nu} = D_f$ και $D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \ldots \cap D_{f_\nu} = \varnothing$.

Στον πίνακα βλέπουμε τα βασικά είδη συναρτήσεων τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους.

Είδος	**Τύπος**	**Πεδίο Ορισμού**
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0$	$D_f = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$
	$f(x) = \eta\mu x \ \ , \ \ \sigma\upsilon\nu x$	$D_f = \mathbb{R}$
Τριγωνομετρική	$f(x) = \varepsilon\varphi x$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$
	$f(x) = \sigma\varphi x$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$
Εκθετική	$f(x) = a^x \ \ , \ \ 0 < a \neq 1$	$D_f = \mathbb{R}$
Λογαριθμική	$f(x) = \log x \ \ , \ \ \ln x$	$D_f = (0, +\infty)$

Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις

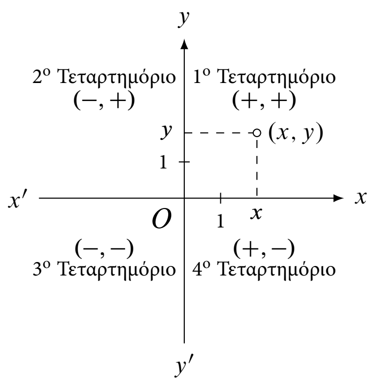
Ταυτοτική	**Σταθερή**	**Μηδενική**
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα τότε οι πράξεις μεταξύ των δύο συναρτήσεων ορίζονται ως εξής.

Τύπος	**Πεδίο ορισμού**
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g\}$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\right\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος επιλέγουμε αυθαίρετα μια μονάδα μέτρησης.
- Εάν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.



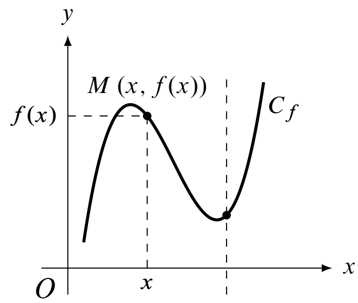
- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως 1^o τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in D_f \quad , \quad y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in D_f\}$$



- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράστασης είναι της μορφής $(x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.
- Οι τετμημένες x όλων των σημείων της γραφικής παράστασης σχηματίζουν το πεδίο ορισμού της.
- Οι τεταγμένες $f(x)$ όλων των σημείων της γραφικής παράστασης σχηματίζουν το σύνολο τιμών της.
- Η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία όπου $f(x) = 0$, ενώ έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τον κατακόρυφο άξονα, το $M(0, f(0))$.
- Τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον οριζόντιο άξονα έχουν $f(x) > 0$, ενώ όσα βρίσκονται κάτω από τον άξονα έχουν $f(x) < 0$.
- Στα σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων C_f, C_g δύο συναρτήσεων f, g, ισχύει $f(x) = g(x)$.
- Αν η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g τότε ισχύει $f(x) > g(x)$, ενώ όπου η C_f είναι κάτω από τη C_g έχουμε $f(x) < g(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δύο συναρτήσεις f και g είναι μεταξύ τους ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και επιπλέον ισχύει

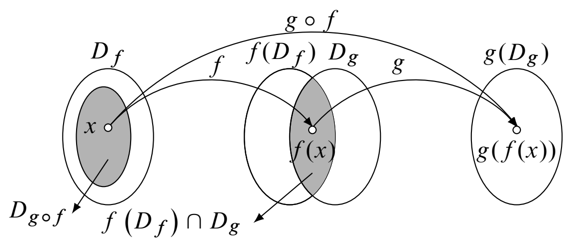
$$f(x) = g(x) \ , \ \text{ για κάθε } x \in A$$

Αν έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα τότε είναι ίσες στο σύνολο $A \cap B$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα, ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο και πεδίο ορισμού

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_f \ \text{ και } \ f(x) \in D_g\}$$



- Διαβάζεται «σύνθεση της f με τη g» ή «g σύνθεση f».
- Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(D_f) \cap D_g \neq \varnothing$.
- Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_g \ \text{ και } \ g(x) \in D_f\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.