

Μαθηματικά Γ' ΕΠΑ.Λ
Επαναληπτικό διαγώνισμα 1ο Κεφάλαιο
14 Δεκεμβρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

A.1 Δίνονται συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και $x_0 \in A \cap B$. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

A.2 Να διατυπώσετε το κριτήριο μονοτονίας για μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση f .

A.3 Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A.4 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λάθος**.

α. Ισχύει ότι $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

β. Το πεδίο ορισμού της f' είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f .

γ. Αν ισχύει $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ για $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 \in (a, \beta)$.

δ. Ισχύει ότι $\sin x = \eta \mu x$

ε. Ισχύει ότι $(cf(x))' = cf'(x)$.

ΘΕΜΑ Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - a}{x - 2}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x^2 - 4)] = 7 - a$$

B.1 Να αποδείξετε ότι $a = 3$.

B.2 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

B.3 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B.4 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{2023}{2022}\right)$ και $f\left(\frac{2024}{2022}\right)$.

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a - 3)x + a - 4$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

Γ.2 Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = x^2 - 2$$

Γ.3 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f'(x)} - \sqrt{3}}{x - 2}$$

Γ.4 Βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση $g(x) = x \cdot f(x) - x^3$ παίρνει μέγιστη τιμή.

ΘΕΜΑ Δ

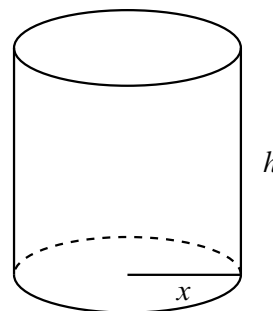
Ενα εργοστάσιο κονσερβοποιίας κατασκευάζει κονσέρβες χωρητικότητας 500 ml για συμπυκνωμένο γάλα. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης x cm και ύψος h cm.

Δ.1 Να δείξετε ότι το ύψος h του κυλίνδρου δίνεται από τη συνάρτηση $h(x) = \frac{500}{\pi x^2}$.

Δ.2 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κυλίνδρου όταν το ύψος του ισούται με $h = \frac{20}{\pi}$ cm.

Δ.3 Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία το εμβαδόν της κονσέρβας γίνεται ελάχιστο.

Δ.4 Αν το υλικό κατασκευής κοστίζει 12€ άνα τετραγωνικό μέτρο, να βρεθεί το κόστος κατασκευής μιας κονσέρβας με ελάχιστο εμβαδόν.



(Δίνεται το εμβαδόν του κυλίνδρου $E = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ και ο όγκος του $V = \pi r^2 h$.)