ΕΙΣΑΓΩΓΗ

30 Δεκεμβρίου 2014

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Ξεκινώντας απ΄ το 0 οι φυσικοί αριθμοί είναι 0, 1, 2, 3,...
   Το συνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετους τους π.χ. :...-2, -1, 0, 1, 2...
   Το σύνολο των ακέραιων συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος : $\dfrac{a}{\beta}$
   όπου $a, \beta \in \mathbb{Z}$ με $\beta \neq 0$. Το συνολο των ρητών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{\beta} \ \mid a, \beta \in \mathbb{Z} \text{ με } \beta \neq 0\right\}$

4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Οποιοσδήποτε αριθμός δεν είναι ρητός όπως ρίζες αριθμών που δεν έχουν ακέραιο αποτέλεσμα για παράδειγμα : $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{7}$ ή σταθερές όπως οι $\pi = 3{,}14\ldots, \varphi = 1{,}618\ldots$
   Το σύνολο των άρρητων αριθμών συμβολίζεται με A_ρ.

5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε.
   Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

Συμβολισμοί

Ένα σύνολο το ονομάζουμε με κεφαλαίο γράμμα και παριστάνεται με αναγραφή των στοιχειων του μέσα σε αγκύλες για παράδειγμα $A = \{1, 3, 4, 7, 9\}$.

Ένα στοιχειο x ανήκει σε ένα σε ένα σύνολο A : $x \in A$
Ένα στοιχειο x **δεν** ανήκει σε ένα σε ένα σύνολο A : $x \notin A$.

Όταν ένα σύνολο περιέχει στοιχεία με κάποια ιδιότητα τότε γράφουμε τη μορφή των στοιχειων του και δίπλα γράφουμε την ιδιότητα τους : $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.

Σχέσεις και πράξεις συνόλων

Δύο συνολα είναι **ίσα** μεταξύ τους όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεια.
Το σύνολο που δεν έχει στοιχεια ονομάζεται **κενό** και συμβολίζεται $\varnothing$.

Για δύο συνολα A, B έχουμε τις παρακάτω πράξεις

	Συμβολισμός	**Ιδιότητα**	**Περιγραφή**
Ένωση	$A \cup B$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ή $x \in B$	Το x ανήκει τουλάχιστον σε ένα σύνολο.
Τομή	$A \cap B$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \in B$	Το x ανήκει και στα δύο σύνολα.
Συμπλήρωμα	A'	$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$	Το x δεν ανήκει στο συνολο A.
Διαφορά	$A - B$	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \notin B$	Το x ανήκει μόνο στο A.
Υποσύνολο	$A \subset B$	$x \in A \Rightarrow x \in B$	Αν το x ανήκει στο A ανήκει και στο B.

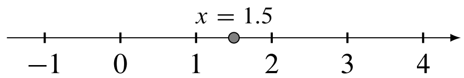
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ
Αν πάνω στην ευθεία των αριθμών $x'x$ επιλέξουμε δύο τυχαία σημεία a, β τότε το σύνολο των αριθμών που περιέχει όλους τους αριθμούς που βρίσκονται ανάμεσά τους και πιθανόν και τα σημεία a, β ονομάζεται **διάστημα**.
Τα σημεία a, β ονομάζονται **άκρα** του διαστήματος.

Διάστημα	**Ανίσότητες**	**Περιγραφή**
$x \in [a, \beta]$	$a \leq x \leq \beta$	Κλειστό διάστημα a, β
$x \in (a, \beta)$	$a < x < \beta$	Ανοιχτό διάστημα a, β
$x \in [a, \beta)$	$a \leq x < \beta$	Κλειστό a ανοιχτό β
$x \in (a, \beta]$	$a < x \leq \beta$	Ανοιχτο a κλειστό β

Τα διαστήματα που περιέχουν τις έννοιες $\pm\infty$ είναι πάντα ανοιχτά διαστήματα από τη μεριά του άπειρου.

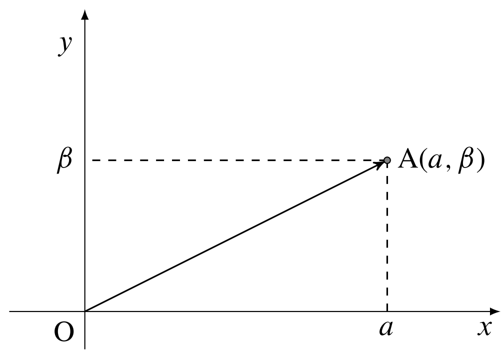
Το συνολο των πραγματικών αριθμών γράφεται σαν διάστημα $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
Αν έχουμε μια μεταβλητή x, χρειαζόμαστε έναν άξονα στον οποίο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τις διάφορες τιμές που παίρνει η μεταβλητή με ένα σημείο, το οποίο μας δειχνει τη θέση της κάθε τιμής στον άξονα αυτό που ονομάζουμε **ευθεία των αριθμών**.



Αντίστοιχα, οταν έχουμε ένα ζεύγος μεταβλητών για παράδειγμα x, y όπως στην περίπτωση μιας συνάρτησης, χρειαζόμαστε 2 άξονες τιμών έναν για κάθε μεταβλητή.

Ο καταλληλότερος τρόπος να συνδιαστούν οι 2 άξονες μεταξύ τους είναι να τοποθετηθούν κάθετα. Έτσι έχουμε το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** ή **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**.



Όπως ένα σημείο στην ευθεία των αριθμών μας έδειχνε τη θέση ενός αριθμού, έτσι και στο καρτεσιανό επίπεδο ένα σημείο μας δείχνει τη θέση ενός **διατεταγμένου ζευγαριού** αριθμών οι οποίοι λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου.
Αντίστροφα ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών παριστάνει ένα σημείο πάνω στο επίπεδο.
Ένα σημείο το ονομάζουμε με κεφαλαίο γράμμα και μέσα σε παρένθεση γράφουμε τις συντεταγμένες του, ειναι δηλαδή της μορφής $A(a, \beta)$.

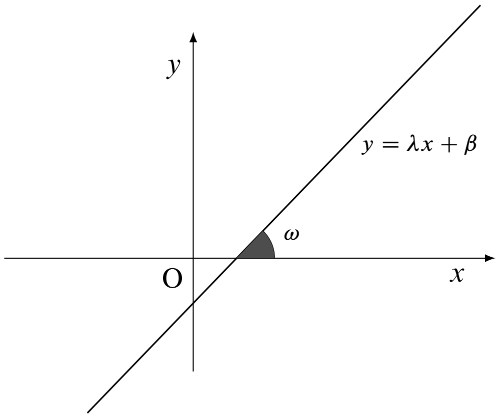
Οι συντεταγμένες είναι **διατεταγμένο** ζεύγος αριθμών γιατί μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία εμφανίζονται, βρίσκονται δηλαδη σε διάταξη.
Ο πρώτος αριθμός είναι η οριζόντια απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων, που ονομάζεται **τετμημένη**, ενώ ο δευτερος αριθμός είναι η κάθετη απόσταση του σημείου που ονομάζεται **τεταγμένη**.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Συνάρτηση ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές για παράδειγμα x, y και για κάθε της μεταβλητής x που ονομάζουμε ανεξάρτητη, αντιστοιχεί μόνο μια τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y.

Αν σε μια συνάρτηση $y = f(x)$ επιλέξουμε μια τιμή για τη μεταβλητή x τότε βρίσκουμε μια τιμή για τη μεταβλητή y οπότε προκύπτει ένα ζευγάρι αριθμών (x, y) το οποίο όπως ειδαμε παριστάνει ένα σημείο στο καρτεσιανό επίπεδο.
Αν αυτό το επαναλάβουμε για άπειρες τιμές θα προκύψει ένα σύνολο σημείων το οποίο θα μας δώσει το σχήμα μιας συνάρτησης που ονομάζεται **γραφική παράσταση**.

Αν μια συνάρτηση είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ τότε η γραφική παράσταση της είναι ευθεία γραμμή και η συνάρτηση λέγεται **εξίσωση της ευθείας**.
Ο συντελεστής λ της μεταβλητής x λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας και είναι ο αριθμός που μας δίνει την κλίση μιας ευθείας.



Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι ίσος με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$$

Όταν μας δίνονται δύο τυχαία σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A, B είναι :

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αν έχουμε δύο ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε

- **Παράλληλες Ευθείες** : $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- **Κάθετες Ευθείες** : $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
- **Ταυτιζόμενες Ευθείες** : $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$

Αν έχουμε ένα τυχαιο σημείο $A(x_0, y_0)$ τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από την εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Άθροισμα στο Τετράγωνο** :
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο Τετράγωνο** :
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον Κύβο** :
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον Κύβο** :
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο Αθροίσματος επί Διαφοράς** :
   $(a+\beta)\cdot(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα Κύβων** :
   $(a+\beta)\cdot\left(a^2 - a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά Κύβων** :
   $(a-\beta)\cdot\left(a^2 + a\cdot\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$
8. **Διαφορά ν-οστών δυνάμεων** :
   $(a-\beta)\cdot\left(a^{v-1} + a^{v-2}\cdot\beta + \ldots + a\cdot\beta^{v-2} + \beta^{v-1}\right) = a^v - \beta^v$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Απόλυτη τιμή ενός αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του αριθμού από το 0 και συμβολίζεται με $|a|$.

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a είναι ίση με

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

i. $|x| \geq 0$

ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$

iv. $|x|^2 = x^2$

v. $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$

vi. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

vii. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

viii. $|x| > |y| \Leftrightarrow |x|^2 > |y|^2 \Leftrightarrow x^2 > y^2$

ix. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

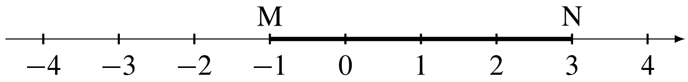
x. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm\theta$

xi. $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

xii. $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

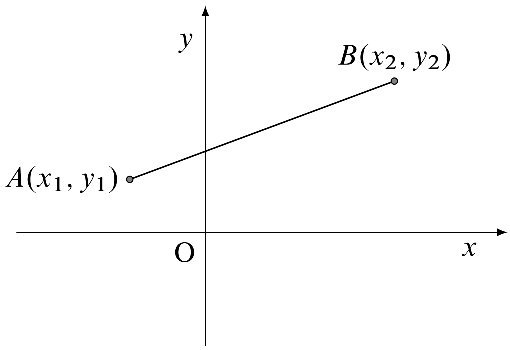
ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΑΞΟΝΩΝ

Πάνω στην ευθεία των αριθμών, η απόσταση δυο σημείων M, N τα οποία είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών x, y αντίστοιχα, δίνεται από τον τύπο $d(M, N) = |x - y|$.



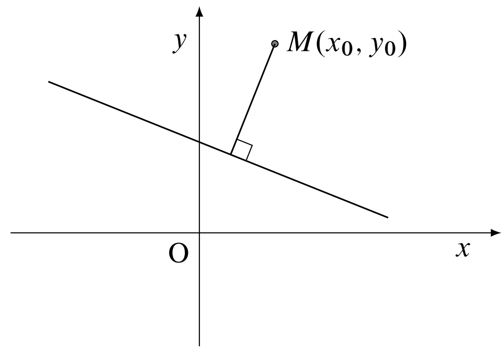
Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου τότε η απόσταση των δύο σημείων δίνεται από τον τύπο

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Η απόσταση ενός τυχαίου σημείου $M(x_0, y_0)$ από μια ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Τετραγωνική Ρίζα ενός θετικού αριθμού x είναι ένας θετικός αριθμός a που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x (υπόριζο) και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \text{ με } a > 0$$

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού διότι κανένας αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο, δεν είναι δυνατόν να δώσει αρνητικό αποτέλεσμα.

Για πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

1. $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $(\sqrt{x})^2 = x$ για $x \geq 0$
3. $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
4. $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
5. $\sqrt{x \pm y} \neq \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$
6. $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$
7. $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Leftrightarrow x > y$

Η τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού x μπορει να γραφτει με τη μορφή δύναμης με ρητό εκθέτη

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ με } x \geq 0$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε για ποιό λόγο, τετράγωνο και ρίζα ¨φεύγουν¨.

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}\cdot 2} = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$
$$\sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x^{2\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$

ΡΙΖΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$
Για το πλήθος των ριζών του τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\varDelta = \beta^2 - 4a\gamma$

1. Αν $\varDelta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει 2 πραγματικές ριζες : $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2a}$
2. Αν $\varDelta = 0$ το τριώνυμο έχει μια διπλή πραγματική ριζα : $x = -\dfrac{\beta}{2a}$
3. Αν $\varDelta < 0$ το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ένα τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

1. Αν έχει 2 πραγματικές ριζες x_1, x_2 ισχύει : $ax^2 + \beta x + \gamma = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$
2. Αν έχει μια διπλή ρίζα την x_0 τότε : $ax^2 + \beta x + \gamma = a\left(x - x_0\right)^2$

Για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ισχύουν οι παρακάτω τύποι του Vieta

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Για το πρόσημο ενός τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις :

Ρίζες	**Πρόσημο**
Δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2	Ετερόσημο του a στο διάστημα μεταξύ των ριζών και ομόσημο στα διαστήματα έξω από τις ρίζες.
Μια πραγματική ρίζα x_0	Ομόσημο του a παντού εκτός από το σημείο x_0.
Καμία πραγματική ρίζα	Παντού ομόσημο του a.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ
Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ με $\lambda \neq 0$ τότε η δύναμη ενός αριθμού $a \in \mathbb{R}$ με εκθέτη το ρητό $\dfrac{\kappa}{\lambda}$ είναι :

$$a^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{a^{\kappa}}$$

Η δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a με εκθέτη έναν πραγματικό αριθμό x συμβολίζεται : a^x

Για κάθε δυναμη ισχύει
$a^1 = a$ $\quad$ $a^0 = 1$ (με $a \neq 0$) $\quad$ και $\quad$ $a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}$ (με $a \neq 0$)

Για $a, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες των δυνάμεων

	Ιδιότητες	**Παραδείγματα**
1	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
2	$a^x : a^y = a^{x-y}$	$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$
3	$(a \cdot \beta)^x = a^x \cdot \beta^x$	$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$
4	$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^x = \dfrac{a^x}{\beta^x}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$
5	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$
6	$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{-x} = \left(\dfrac{\beta}{a}\right)^x$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

Για $a, x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

- Αν $0 < a \neq 1$ τότε $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- Αν $a > 1$ τότε $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
- Αν $0 < a < 1$ τότε $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού x ως προς βάση a λέγεται ο μοναδικός αριθμός y στον οποίο όταν υψωθεί το a μας δίνει τον x.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \text{ για } 0 < a \neq 1, x > 0 \text{ και } y \in \mathbb{R}$$

Πιο απλά, ο λογάριθμος ενός αριθμού x με βάση a είναι ο **εκθέτης** y στον οποίο θα υψωθεί ο a για να δώσει x.

Λογάριθμος : $\log_{\text{βάση}} \text{αποτέλεσμα} = \text{εκθέτης}$

Οι λογάριθμοι με βάση 10 λέγονται δεκαδικοί και συμβολίζονται $\log x$ για $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$$

Οι λογάριθμοι με βάση e λέγονται φυσικοί ή νεπέριοι και συμβολίζονται $\ln x$ για $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Για θετικές ποσότητες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. $\ln x \cdot y = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln x^k = k \cdot \ln x$
4. $\ln \sqrt[\nu]{x} = \dfrac{1}{\nu}\ln x$
5. $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
6. $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
7. Για $x \neq 0$ έχουμε $\ln x^2 = 2\ln|x|$
8. $x = e^{\ln x} = \ln e^x$

Αλλαγή βάσης : $\log_a x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για τις εξισώσεις της μορφής $x^\nu = a$ με $\nu \geq 2$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

Εκθέτης	**Σταθερά** a	**Λύσεις**	**Παραδείγματα**
ν άρτιος	$a > 0$	$x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$	$x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$
	$a < 0$	Η $x^\nu = a$ είναι αδύνατη	$x^2 = -25$
ν περιττός	$a > 0$	$x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$	$x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$
	$a < 0$	$x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{\lvert a\rvert}$	$x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\lvert -8\rvert} \Leftrightarrow x = -2$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

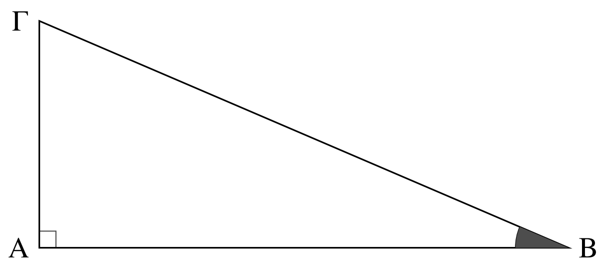
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, ορίζουμε τους 4 τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών ως εξής

$$\text{ημίτονο} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτεινουσα}}$$

$$\text{συνημίτονο} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτεινουσα}}$$

$$\text{εφαπτομένη} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

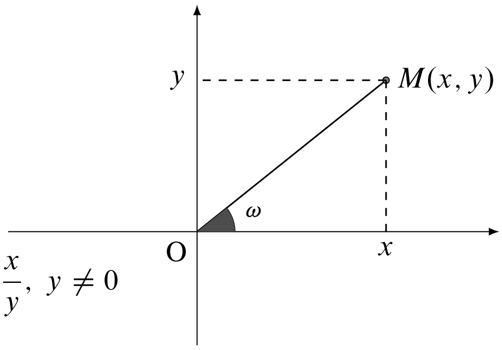
$$\text{συνεφαπτομένη} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$



Για παράδειγμα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{B}$ είναι

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \qquad \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{AB}{B\Gamma} \qquad \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{A\Gamma}{AB} \qquad \sigma\varphi\hat{B} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχουμε ένα τυχαιο σημείο $M(x, y)$. Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο M σχηματίζει μια γωνία ω με τον οριζόντιο άξονα.
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω δίνονται από τους τυπους



$$\eta\mu\hat{\omega} = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{x}{\rho} \qquad \varepsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \sigma\varphi\hat{\omega} = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$ μιας γωνίας x ορίζονται για κάθε τιμή της μεταβλητής x.
Η $\varepsilon\varphi x$ ορίζεται για $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ενώ η $\sigma\varphi x$ ορίζεται για $x \neq k\pi$.

Ισχυουν οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
2. $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$
3. $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$
4. $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$
5. $\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$
6. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$

Για κάθε γωνία x ισχύει

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \text{ και } -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος $a + \beta$ και διαφοράς $a - \beta$ δίνονται από τους τύπους

$$\eta\mu(a + \beta) = \eta\mu a \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu a \qquad \eta\mu(a - \beta) = \eta\mu a \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu a$$

$$\sigma\upsilon\nu(a + \beta) = \sigma\upsilon\nu a \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu a \cdot \eta\mu\beta \qquad \sigma\upsilon\nu(a - \beta) = \sigma\upsilon\nu a \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu a \cdot \eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\varphi(a + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi a + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi a \cdot \varepsilon\varphi\beta} \qquad \varepsilon\varphi(a - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi a - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi a \cdot \varepsilon\varphi\beta}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιων γωνιών δινονται από τους τύπους

$$\eta\mu 2x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \qquad \sigma\upsilon\nu 2x = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \\ 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 \\ 1 - 2\eta\mu^2 x \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \qquad \eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

	Εξισώσεις	**Λύσεις**
1	$\eta\mu x = \eta\mu\theta$	$x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$
2	$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	$x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi - \theta \end{cases}$
3	$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$	$x = k\pi + \theta$
3	$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$	$x = k\pi + \theta$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$180°$ π	$360°$ 2π
$\eta\mu x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\sigma\upsilon\nu x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\varepsilon\varphi x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν Ορίζεται	0	0
$\sigma\varphi x$	Δεν Ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Δεν Ορίζεται	Δεν Ορίζεται

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ