

# Η έννοια του πολυωνύμου

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ■ Βασικές έννοιες

1. Για καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα να βρείτε τους όρους, τους συντελεστές, το σταθερό όρο και το βαθμό.

α.  $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

β.  $Q(x) = x^2 + 5x - 2$

γ.  $S(x) = -x^4 + x^3 - 5x + 8$

δ.  $K(x) = x^2 - x^3 + 1$

ε.  $M(x) = \frac{x^3}{4} - \sqrt{2}x^2 + \frac{3x}{5}$

2. Βρείτε το βαθμό σε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα.

α.  $P(x) = 3x - x^3 + 5 + x^2$

β.  $Q(x) = 4x^2 + 0x^4 - x^3 + 7$

γ.  $R(x) = x^4 - 2x^2 + 4x^3 - x^4 + 7 - 5x$

δ.  $S(x) = 0x^2 + 0x + 3$

ε.  $K(x) = -5$

στ.  $G(x) = 0$

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda)x^3 - (\lambda - 3)x^2 + (9 - \lambda^2)x + 2\lambda - 6$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το βαθμό του  $P(x)$  για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ .

### ■ Ισότητα πολυωνύμων

4. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $a \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = (|a| - 1)x^3 + (a^2 - a)x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 1$$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε τα πολυώνυμα

$$A(x) = (\lambda + 1)x^3 + (\lambda^2 + 2)x^2 + 2\lambda x - 3 \text{ και}$$

$$B(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + 3\lambda x^2 + 4x - 1 - \lambda$$

να είναι ίσα.

6. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $a$  ώστε τα παρακάτω πολυώνυμα να είναι ίσα.

$$P(x) = (a^2 - 3a)x^3 + x^2 + a \text{ και}$$

$$Q(x) = -2x^3 + a^2x^2 + (a^3 - 1)x + 1$$

### ■ Τιμές - Ρίζες πολυωνύμων

7. Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$ .

α. Να υπολογίσετε τις τιμές  $P(-2)$ ,  $P(1)$ ,  $P(0)$  και  $P(3)$ .

β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης  $3P^2(2) - 4P(-1) + P(0)$ .

8. Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ . Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$  είναι ρίζες του  $P(x)$ .

9. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 - (2a - 1)x - 3, \text{ με } a \in \mathbb{R},$$

για το οποίο ισχύει  $P(2) = 7$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = 3$ .

β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του  $P(x)$ .

γ. Να υπολογίσετε τις τιμές  $P(3)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(0)$  και  $P(-4)$ .

10. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (3 - a)x^2 + a^2x - 4$$

με  $a \in \mathbb{R}$ , το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

α. Να δείξετε ότι  $a = 2$ .

β. Να βρεθούν οι τιμές  $P(-1)$ ,  $P(2)$  και  $P(0)$ .

11. Δίνεται το πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού

$$P(x) = (a^2 - 1)x^3 + (a^2 - 3a + 2)x^2 + (a + 2)x - 8$$

με  $a \in \mathbb{R}$ , για το οποίο ισχύει  $P(1) = -1$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = 2$ .

β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του  $P(x)$ .

γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{2P(2) - P^2(-1)}{P(0)}$$

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + 2x + 5$$

με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , για το οποίο ισχύει  $P(2) = -1$  και  $P(-1) = 2$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = 1$  και  $\beta = -2$ .

β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης  $P(P(1))$ .

## ■ Πράξεις πολωνύμων

13. Δίνονται τα ακόλουθα πολυώνυμα  $A(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ ,  $B(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x - 10$  και  $\Gamma(x) = 3x - 4$ .

α. Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα

i.  $P(x) = A(x) + B(x)$

ii.  $Q(x) = B(x) - A(x)$

iii.  $R(x) = \Gamma(x) \cdot A(x)$

β. Ποιος είναι ο βαθμός αυτών των πολυνύμων;

14. Έστω  $P(x)$  ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε

$$(x - 2) \cdot P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

α. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

β. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης  $2P(-1) + P^2(0)$ .

15. Δίνονται τα πολυώνυμα  $A(x) = x^2 - 3x + 2$  και  $B(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3$ . Να βρεθούν τα πολυώνυμα

$$\alpha. \ P^2(x)$$

$$\gamma. \quad P^2(x) - xQ(x)$$

$$\beta. \quad P(x) \cdot Q(x)$$

$$\delta. \ xP(x) - Q(x)$$

16. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

Να βρεθεί πολώνυμο  $Q(x)$  έτσι ώστε να ισχύει  $Q^2(x) = P(x)$ .

17. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 3$$

με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , για το οποίο ισχύει  $P(-2) = 7$  και  $P(1) = 10$ .

α. Να δείξετε ότι  $a = 4$  και  $\beta = 2$ .

β. Να βρεθεί το πολυώνυμο  $(x - 1)P(x)$ .