

ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

✉: spyrosfronimos@gmail.com | ☎: 6932327283 - 📞: 2663023079

---

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

29 Ιουνίου 2017

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

# Τριγωνομετρία

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

### 1. Η εξίσωση $\eta\mu x = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu x = \frac{1}{2} & \text{iii. } \eta\mu x = 1 \\ \text{ii. } \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{iv. } \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

### 2. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{iii. } \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ \text{ii. } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{iv. } \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{array}$$

### 3. Οι εξισώσεις $\epsilon\phi x = a$ και $\sigma\phi x = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{iii. } \epsilon\phi x = 1 \\ \text{ii. } \sigma\phi x = \sqrt{3} & \text{iv. } \sigma\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

### 4. Η εξίσωση $\eta\mu f(x) = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{iii. } \eta\mu(x + \pi) = \frac{1}{2} \\ \text{ii. } \eta\mu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{iv. } \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{array}$$

### 5. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu f(x) = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \sigma\upsilon\nu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{iii. } \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \text{ii. } \sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1}{2} & \text{iv. } \sigma\upsilon\nu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

### 6. Οι εξισώσεις $\epsilon\phi f(x) = a$ και $\sigma\phi f(x) = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \epsilon\phi(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{iii. } \sigma\phi\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \\ \text{ii. } \sigma\phi(5x) = 1 & \text{iv. } \epsilon\phi\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

### 7. Εξισώσεις - Αναγωγή στο 1ο τετ.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu x = -\frac{1}{2} & \text{iii. } \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \\ \text{ii. } \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{iv. } \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

### 8. Εξισώσεις - Αναγωγή στο 1ο τετ.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} & \text{iii. } \sigma\phi x = -\sqrt{3} \\ \text{ii. } \sigma\phi x = -1 & \text{iv. } \epsilon\phi x = -\sqrt{3} \end{array}$$

### 9. Εξισώσεις - Αναγωγή στο 1ο τετ.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu(\pi - x) = \frac{1}{2} & \text{iii. } \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ii. } \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -1 & \text{iv. } \eta\mu(\pi + x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

### 10. Εξισώσεις - Αναγωγή στο 1ο τετ.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \epsilon\phi(\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{iii. } \sigma\phi(\pi + x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{ii. } \sigma\phi(\pi - x) = 0 & \text{iv. } \epsilon\phi(\pi + x) = 1 \end{array}$$

### 11. Εξισώσεις - Αναγωγή στο 1ο τετ.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{iii. } \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{ii. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2} & \text{iv. } \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \end{array}$$

### 12. Οι εξισώσεις $\eta\mu f(x) = a$ και $\sigma\upsilon\nu f(x) = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \eta\mu(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \\ \text{ii. } \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \text{iii. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1 & \\ \text{iv. } \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \end{array}$$

### 13. Οι εξισώσεις $\epsilon\phi f(x) = a$ και $\sigma\phi f(x) = a$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \epsilon\phi(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} & \\ \text{ii. } \sigma\phi\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \text{iii. } \sigma\phi\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1 & \\ \text{iv. } \epsilon\phi\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} & \end{array}$$

### 14. Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού και $a \cdot \beta = 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } 2\eta\mu x - 1 = 0 & \\ \text{ii. } 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} = 0 & \\ \text{iii. } (\eta\mu x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 & \\ \text{iv. } (2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 & \end{array}$$

### 15. Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού και $a \cdot \beta = 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\epsilon\phi x - 1 = 0$
- ii.  $3\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$
- iii.  $(\sigma\phi x - \sqrt{3}) \cdot \sigma\phi x = 0$
- iv.  $(2\sigma\phi x - 2\sqrt{3})(\epsilon\phi x - \sqrt{3}) = 0$

**16. Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού και αναγωγή στο 1<sup>ο</sup> τετ.**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = \sqrt{2}$
- iii.  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu(-x) = \sqrt{3}$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu(2017\pi + x) - \sigma\upsilon\nu x = 1$

**17. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού της μορφής  $x^2 = a$**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu^2 x = \frac{3}{4}$
- ii.  $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$
- iii.  $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$
- iv.  $\sigma\phi^2 x = 1$

**18. Εξισώσεις  $a \cdot \beta = 0$**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu^2 x - 1) = 0$
- ii.  $(2\eta\mu x - \sqrt{3})(3 - \epsilon\phi^2 x) = 0$
- iii.  $(1 - \epsilon\phi^2 x)(\sigma\phi x - \sqrt{3}) = 0$

**19. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $4\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 1 = 0$
- ii.  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$
- iii.  $3\epsilon\phi^2 x - (3 + \sqrt{3})\epsilon\phi x + \sqrt{3} = 0$

**20. Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Απόλυτη τιμή**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $|2\eta\mu x| = 1$
- ii.  $|\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- iii.  $|\sigma\upsilon\nu^2 x - 1| = \frac{1}{4}$
- iv.  $|\eta\mu x| = |\eta\mu x - 1|$

**21. Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Απόλυτη τιμή**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $|3\epsilon\phi x| = \sqrt{3}$
- ii.  $\left|\frac{1}{2} - \sigma\phi x\right| = \frac{1}{2}$
- iii.  $|\epsilon\phi^2 x - 2| = 1$
- iv.  $|\sigma\phi x| = |\epsilon\phi x|$

**22. Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Διωνυμική εξίσωση**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu^4 x = \frac{1}{16}$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu^5 x = 1$
- iii.  $\eta\mu^6 x = \frac{1}{8}$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu^7 x = -1$

**23. Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Τρ. ταυτότητες**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2 x = 2$
- iii.  $\epsilon\phi x - \sigma\phi x = 0$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$

**24. Εξισώσεις πολωνυμικής μορφής**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$
- ii.  $4\eta\mu^3 x - \eta\mu x = 0$
- iii.  $3\epsilon\phi^3 x + \epsilon\phi x = 0$
- iv.  $\sigma\phi^4 x = \sigma\phi^2 x$

**25. Εξισώσεις πολωνυμικής μορφής**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 6\eta\mu x + 3 = 0$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$
- iii.  $\epsilon\phi^3 x - (\sqrt{3} + 1)\epsilon\phi^2 x + \sqrt{3}\epsilon\phi x = 0$
- iv.  $\sigma\phi^3 x - \sigma\phi^2 x + \sigma\phi x - 1 = 0$

**26. Εξισώσεις  $a^2 + \beta^2 = 0$**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu^2 x + (\sigma\upsilon\nu y - 1)^2 = 0$
- ii.  $(2\eta\mu x - 1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 y = 0$
- iii.  $\epsilon\phi^4 x + (\sigma\phi^2 y - 3)^4 = 0$
- iv.  $(2\eta\mu x - 3)^2 + (\epsilon\phi y - \sqrt{3})^2 = 0$

**27. Εξισώσεις  $a^2 + \beta^2 = 0$**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $4\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 1 + \sigma\upsilon\nu^2 y = 0$
- ii.  $\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu^2 y - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = -4$

**28. Εξισώσεις  $\text{τριγ} f(x) = a$  και 1<sup>ου</sup> βαθμού**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $2\sigma\upsilon\nu(3x) - 1 = 0$
- ii.  $3\epsilon\phi(2x) - \sqrt{3} = 0$
- iii.  $2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$
- iv.  $\sigma\phi(3x - \pi) - 1 = 0$

**29. Εξισώσεις  $\text{τριγ} f(x) = a$  και 1<sup>ου</sup> βαθμού και  $a \cdot \beta = 0$**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\eta\mu(2x) (\sigma\upsilon\nu(3x) - 1) = 0$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{3}) [\eta\mu(4x) - 1] = 0$
- iii.  $[\epsilon\varphi(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}] \sigma\varphi(3x) = 0$
- iv.  $[\sigma\varphi(\frac{\pi}{4} - x) - 1] \epsilon\varphi(2x) = 0$

### 30. Εξισώσεις τριγ $f(x) = a$ και 2<sup>ον</sup> βαθμού

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $4\eta\mu^2(2x) - 1 = 0$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu^2(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{4} = 0$
- iii.  $3\epsilon\varphi^2(\frac{\pi}{2} - x) = 1$
- iv.  $\sigma\varphi^2(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$

### 31. Εξισώσεις τριγ $f(x) = a$ και 2<sup>ον</sup> βαθμού

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $4\eta\mu^2(2x) - 3\eta\mu(2x) + 1 = 0$
- ii.  $2\sigma\upsilon\nu^2(x + \frac{\pi}{3}) - (2 + \sqrt{3}) \sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = 0$
- iii.  $3\epsilon\varphi^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 2\sqrt{3}\epsilon\varphi(2x - \frac{\pi}{2}) + 1 = 0$

### 32. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\eta\mu x = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
- ii.  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0, \pi]$
- iii.  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- iv.  $\eta\mu x = 1, x \in (\pi, 3\pi]$

### 33. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0, \pi]$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- iii.  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu x = 0, x \in [\pi, 3\pi]$

### 34. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\epsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [0, \pi]$
- ii.  $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}, x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$
- iii.  $\sigma\varphi x = 1, x \in [0, 2\pi]$
- iv.  $\epsilon\varphi x = 0, x \in [3\pi, 4\pi]$

### 35. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\eta\mu(3x) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
- ii.  $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi]$
- iii.  $\eta\mu(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- iv.  $\eta\mu(\frac{x+2\pi}{3}) = 0, x \in [2\pi, 3\pi]$

### 36. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- ii.  $\sigma\upsilon\nu(3x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, 2\pi]$
- iii.  $\sigma\upsilon\nu(\frac{3x}{4}) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu(\frac{3x+\pi}{2}) = 1, x \in [\pi, 3\pi]$

### 37. Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

- i.  $\epsilon\varphi(4x) = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- ii.  $\sigma\varphi(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}, x \in [0, \pi]$
- iii.  $\epsilon\varphi(\frac{3x}{2}) = 1, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- iv.  $\sigma\varphi(\frac{2x+\pi}{3}) = \sqrt{3}, x \in [2\pi, 4\pi]$

### 38. Συστήματα τριγωνομετρικών εξισώσεων

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

- i.  $\begin{cases} 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu y = 2 \\ 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu y = -1 \end{cases}$
- ii.  $\begin{cases} \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y = \frac{1}{4} \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{4} \end{cases}$
- iii.  $\begin{cases} 3\epsilon\varphi x - \sigma\varphi y = 2 \\ \epsilon\varphi x + 2\frac{1}{\sigma\varphi y} = -1 \end{cases}$

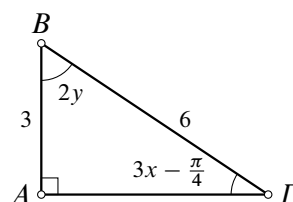
### 39. Εύρεση παραμέτρου

Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ώστε η παρακάτω τριγωνομετρική εξίσωση

$$\eta\mu\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### 40. Γωνίες τριγώνου

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) του παρακάτω σχήματος έχουμε  $AB = 3$ ,  $B\Gamma = 6$ .



Να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών  $x, y$ .