ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Φιλομαθεια
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
11 Δεκεμβρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

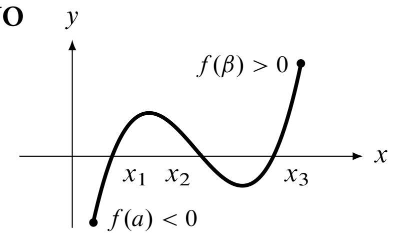
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

i. η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
ii. $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$.

- Αν ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$ τότε θα υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) = 0$.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει πάντα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΥΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO
Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ η συνθήκη $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ σημαίνει ότι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f, λόγω της συνέχειας, θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ.

i. Αν η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ τότε έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

$$\text{Αν } f(x) \neq 0\,,\ \text{για κάθε } x \in \Delta \Rightarrow f(x) > 0 \text{ ή } f(x) < 0\,,\ \text{για κάθε } x \in \Delta$$

ii. Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ είναι ρίζες της συνάρτησης f τότε αυτή διατηρεί το πρόσημό της σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ δύο διαδοχικών ριζών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος 1: ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO - ΑΠΛΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η απλή εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano γίνεται σε περιπτώσεις όπου μας ζητείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας για μια δοσμένη συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β).

1ο *Βήμα* : Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

2ο *Βήμα* : Υπολογίζουμε τις τιμές $f(a)$, $f(\beta)$ στα άκρα του διαστήματος. Αν είναι ετερόσημες τότε παίρνουμε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

Παράδειγμα 1 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$. Να δειχθεί ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

ΛΥΣΗ
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, επομένως

i. είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$ και επίσης

ii. $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = -1 < 0$
$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = 5 > 0$
άρα παίρνουμε $f(2) \cdot f(3) = (-1) \cdot 5 = -5 < 0$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) = 0$$

άρα η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

Παράδειγμα 2 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^3 + x$ όπου $a \neq -1$. Να δειχθεί ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΛΥΣΗ
Εξετάζουμε όπως προηγουμένως αν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Η συνάρτηση f είναι:

i. συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και επίσης

ii.
- $f(-1) = a(-1)^3 - 1 = -a - 1$
- $f(1) = a \cdot 1^3 + 1 = a + 1$

οπότε θα ισχύει $f(-1) \cdot f(1) = (-a - 1)(a + 1) = -(a + 1)^2 < 0$ αφού σύμφωνα με την υπόθεση $a \neq -1$.

Παρατήρηση 1

Παρόλο που δε γνωρίζουμε τις τιμές $f(-1)$, $f(1)$, το γινόμενό τους είναι μια γνήσια αρνητική παράσταση.

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$.

Μέθοδος 2: ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO - ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Αν εξετάζουμε για μια συνάρτηση f, την ύπαρξη μιας ρίζας σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ τότε αυτό προϋποθέτει το γινόμενο $f(a) \cdot f(\beta)$ να είναι μη θετικό δηλαδή $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$. Έτσι

1^o Βήμα : Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

2^o Βήμα : Αν στη συνέχεια ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ τότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, ώστε $f(x_0) = 0$.
ii. Αν $f(a) \cdot f(\beta) = 0$ τότε $f(a) = 0$ ή $f(\beta) = 0$ άρα ένα τουλάχιστον από τα άκρα a, β θα είναι ρίζα της f.

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις i. και ii. παίρνουμε την ύπαρξη της ρίζας στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Παράδειγμα 3 : Θ. BOLZANO - ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ημx$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο κλειστό διάστημα $[-a, a]$ με $a > 0$.

ΛΥΣΗ
Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Γι αυτήν επίσης θα έχουμε ότι:

i. είναι συνεχής στο διάστημα $[-a, a]$ και επιπλέον
ii. $f(-a) = ημ(-a)$ και $f(a) = ημa$.
Γνωρίζουμε όμως ότι οι αντίθετες γωνίες $-a$ και a έχουν αντίθετα ημίτονα άρα θα ισχύει $ημ(-a) = -ημa$ και έτσι παίρνουμε:
$$f(-a) \cdot f(a) = ημ(-a) \cdot ημa = -ημ^2 a \leq 0$$

Εξετάζουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $f(-a) \cdot f(a) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x_0 στο ανοικτό διάστημα $(-a, a)$ τέτοιος ώστε
$$f(x_0) = ημx_0 = 0$$
- Αν $f(-a) \cdot f(a) = 0$ τότε θα ισχύει $f(-a) = 0$ ή $f(a) = 0$ άρα το a θα είναι ρίζα της f.

Από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ρίζα της συνάρτησης θα ανήκει στο κλειστό διάστημα $[-a, a]$.

Μέθοδος 3: ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Μεγάλο πλήθος εξισώσεων που δε λύνονται με τους γνωστούς αλγεβρικούς τρόπους επίλυσης εξισώσεων αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια του θεωρήματος Bolzano, προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης. Αν $A(x) = B(x)$ είναι μια εξίσωση, όπου A, B είναι αλγεβρικές παραστάσεις του x και μας ζητείται η ύπαρξη λύσης σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τότε:

1^o Βήμα : Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος της εξίσωσης: $A(x) - B(x) = 0$.

2^o Βήμα : Ορίζουμε μια συνάρτηση f με τύπο την παράσταση που σχηματίστηκε στο πρώτο μέλος:
$$f(x) = A(x) - B(x)$$

3^o Βήμα : Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$.

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και για την απόδειξη ισοτήτων, σχηματίζοντας την αντίστοιχη εξίσωση.

Παράδειγμα 4 : ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\boldsymbol{x^2 - \text{συν}(x\pi) = e^x}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-2, 0)$.

ΛΥΣΗ
Μεταφέροντας όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος, αυτή θα πάρει τη μορφή:

$$x^2 - \text{συν}(x\pi) - e^x = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - \text{συν}(x\pi) - e^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γι αυτήν θα έχουμε ότι

i. είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-2, 0]$ και
ii. • $f(-2) = (-2)^2 - \text{συν}(-2\pi) - e^{-2} = 4 - 1 - e^{-2} = 3 - \frac{1}{e^2} > 0$
  • $f(0) = 0^2 - \text{συν}0 - e^0 = -1 - 1 = -2 < 0$
  οπότε παίρνουμε $f(-2) \cdot f(0) = -2\left(3 - \frac{1}{e^2}\right) < 0$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η συνάρτηση f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-2, 0)$, ή ισοδύναμα η αρχική εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο ανοικτό διάστημα $(-2, 0)$.

Παράδειγμα 5 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΑΣ
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\boldsymbol{e^{x_0} = \text{ημ}(\pi x_0) - 2x_0}$$

ΛΥΣΗ
Θα σχηματίσουμε από τη ζητούμενη ισότητα την αντίστοιχη εξίσωση θέτοντας όπου x_0 τη μεταβλητή x. Προκύπτει λοιπόν η εξίσωση

$$e^x = \text{ημ}(\pi x) - 2x \Rightarrow e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x$. Θα ισχύει ότι

i. η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και
ii. • $f(-1) = e^{-1} - \text{ημ}(-\pi) + 2(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$
  • $f(0) = e^0 - \text{ημ}0 + 2 \cdot 0 = 1 > 0$
  οπότε προκύπτει $f(-1) \cdot f(0) = \frac{1}{e} - 2 < 0$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano η f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$, ή ισοδύναμα η εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο $(-1, 0)$ άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} = \text{ημ}(\pi x_0) - 2x_0$$

Μέθοδος 4: ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Σε περίπτωση που εξετάζουμε την ύπαρξη λύσης μιας ρητής εξίσωσης σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και η εξίσωση δεν ορίζεται σε κάποιο από τα άκρα του διαστήματος, τότε:

1ο Βήμα : Με απαλοιφή παρονομαστών, μετατρέπουμε την κλασματική εξίσωση σε μια ισοδύναμη εξίσωση χωρίς κλάσματα.

2ο Βήμα : Εργαζόμαστε σύμφωνα με τη μέθοδο 3.

Παράδειγμα 6 : ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x}{x-1} = x^2 - 3$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 1).

ΛΥΣΗ
Για την αρχική εξίσωση απαιτούμε να ισχύει $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Όμως για κάθε $x \in (0, 1)$ η αρχική μετατρέπεται στην ισοδύναμη εξίσωση:

$$e^x = (x-1)\left(x^2 - 3\right) \qquad (1)$$

Στη συνέχεια, η τελευταία θα γραφτεί:

$$e^x - (x-1)\left(x^2 - 3\right) = 0$$

Παρατήρηση 2

Οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες στο $(0, 1)$ γιατί στο διάστημα αυτό δεν ανήκει το $x = 1$ του περιορισμού.

Ορίζουμε έτσι τη συνάρτηση $f(x) = e^x - (x-1)\left(x^2-3\right)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Το θεώρημα Bolzano εφαρμόζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και έτσι έχουμε ότι

i. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και επιπλέον
ii.
- $f(0) = e^0 - (0-1)\left(0^2-3\right) = -2 < 0$
- $f(1) = e^1 - (1-1)\left(1^2-3\right) = e > 0$

οπότε παίρνουμε $f(0) \cdot f(1) = -2e < 0$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση (1) και κατά συνέπεια η αρχική εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

Μέθοδος 5: ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΕ ΑΞΟΝΑ - ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα. Αν ζητούμε την ύπαρξη κοινού σημείου των δύο γραφικών παραστάσεων τότε:

1ο Βήμα : Εξισώνουμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = g(x)$.

2ο Βήμα : Μεταφέρουμε την $g(x)$ στο πρώτο μέλος της ισότητας και ορίζουμε μια νέα συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

3ο Βήμα : Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο κατάλληλο διάστημα $[a, \beta]$ στο οποίο θα ανήκει η τετμημένη του σημείου.

Για την ύπαρξη κοινού σημείου της γραφικής παράστασης C_f με τον οριζόντιο άξονα θέτουμε $f(x) = 0$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

Παράδειγμα 7 : ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 3x$ και $g(x) = \ln(x-1)$ αντίστοιχα. Να δειχθεί οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2, 4)$.

ΛΥΣΗ
Για να υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $A(x_0, f(x_0))$ των δύο γραφικών παραστάσεων αρκεί ισοδύναμα

να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$. Απαιτούμε λοιπόν να ισχύει $f(x) = g(x)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x - \ln(x-1)\ ,\ x \in (1, +\infty)$$

Για τη συνάρτηση h έχουμε ότι:

i. είναι συνεχής στο διάστημα $[2,4]$ και επίσης

ii.
- $h(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 - \ln 1 = -2 < 0$
- $h(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - \ln 3 = 4 - \ln 3 > 0$

οπότε προκύπτει ότι $h(2) \cdot h(4) = -2(4 - \ln 3) < 0$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ ή ισοδύναμα $f(x_0) = g(x_0)$.

Μέθοδος 6: ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Είδαμε στη μέθοδο 3 τον τρόπο να εξετάσουμε την ύπαρξη τουλάχιστον μιας λύσης μιας δοσμένης εξίσωσης. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική τότε:

1^ο^ Βήμα : Ακολουθούμε τα βήματα της μεθόδου 3.

2^ο^ Βήμα : Εξετάζουμε τη συνάρτηση που σχηματίσαμε ως προς τη μονοτονία της. Αν είναι γνησίως μονότονη τότε θα έχει μοναδική ρίζα στο ζητούμενο διάστημα.

Παράδειγμα 8 : ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x = 2 - x$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0, 1).

ΛΥΣΗ
Η αρχική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x + x - 2 = 0$$

και έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x - 2$. Για τη συνάρτηση αυτή θα έχουμε ότι

i. είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και επιπλέον

ii.
- $f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0$
- $f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$

άρα θα ισχύει $f(0) \cdot f(1) = 1 - e < 0$.

Έτσι η εξίσωση θα έχει τουλάχιστον μια λύση $x_0 \in (0,1)$. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα αυτής της λύσης εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ότι:

$$\begin{gathered} x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \\ e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Rightarrow \\ e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Rightarrow \\ f(x_1) < f(x_2) \end{gathered}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η λύση $x_0 \in (0,1)$ είναι μοναδική.

Μέθοδος 7: ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΟΡΙΟΥ

Σε περιπτώσεις όπου ζητούμε την ύπαρξη ρίζας για μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα (a, β), αλλά κάποιο άκρο του διαστήματος είναι το άπειρο ή βρίσκεται εκτός πεδίου ορισμού, προσεγγίζουμε το πρόσημο της τιμής της συνάρτησης με τη βοήθεια ορίου ως εξής:

1ο *Βήμα* : Υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης στο άκρο που βρίσκεται εκτός πεδίου ορισμού: $\lim_{x\to a} f(x)$ ή $\lim_{x\to\beta} f(x)$.

2ο *Βήμα* : Το πρόσημο του ορίου μας δίνει το πρόσημο της συνάρτησης κοντά στο σημείο αυτό:

$$\text{Αν } \lim_{x\to a} f(x) > 0 \text{ (ή } < 0) \Rightarrow \text{ Υπάρχει } x_1 > a \text{ ώστε } f(x_1) > 0 \text{ (ή } < 0)$$
$$\text{Αν } \lim_{x\to \beta} f(x) > 0 \text{ (ή } < 0) \Rightarrow \text{ Υπάρχει } x_2 < \beta \text{ ώστε } f(x_2) > 0 \text{ (ή } < 0)$$

3ο *Βήμα* : Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano σε ένα από τα νέα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[a, x_2]$, $[x_1, \beta]$ ανάλογα με τις απαιτήσεις της άσκησης.

Παράδειγμα 9 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΑΠΟ ΟΡΙΟ
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \ln x + x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0 το οποίο είναι το κάτω άκρο του διαστήματος. Έτσι υπολογίζουμε το όριο της f στο 0 και έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\ln x + x) = -\infty < 0$$

Άρα θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός x_1 κοντά στο 0 έτσι ώστε $f(x_1) < 0$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, 1]$ και ισχύει ότι:

i. η f είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$ ενώ
ii.
  - $f(x_1) < 0$
  - $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$

  άρα παίρνουμε $f(x_1) \cdot f(1) < 0$.

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, 1) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Μέθοδος 8: ΥΠΑΡΞΗ ΔΥΟ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΡΙΖΩΝ

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ή περισσοτέρων ριζών μιας συνάρτησης, σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β), θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano σε ισάριθμα υποδιαστήματα του (a, β). Για την ύπαρξη δύο ριζών:

1ο *Βήμα* : Επιλέγουμε κατάλληλα ένα εσωτερικό σημείο γ του (a, β) έτσι ώστε $f(a) \cdot f(\gamma) < 0$ και $f(\gamma) \cdot f(\beta) < 0$.

2ο *Βήμα* : Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ και παίρνουμε έτσι την ύπαρξη δύο ριζών:

$$x_1 \in (a, \gamma) \text{ και } x_2 \in (\gamma, \beta)$$

Γενικότερα, για την ύπαρξη ν ριζών, επιλέγουμε κατάλληλα $\nu - 1$ σε πλήθος σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ ώστε να χωριστεί το (a, β) σε ν πλήθους διαστήματα $(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{\nu-1}, \beta)$.

Παράδειγμα 10 : ΥΠΑΡΞΗ ΔΥΟ ΡΙΖΩΝ
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - \eta\mu(\pi x) - 3x$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0, 2)$.

ΛΥΣΗ
Ως ενδιάμεσο σημείο επιλέγουμε το $x = 1$ έτσι ώστε να χωρίσουμε το αρχικό διάστημα σε δύο υποδιαστήματα $[0, 1], [1, 2]$. Για τη συνάρτηση f έχουμε ότι:

i. είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ ενώ
ii.
   - $f(0) = e^0 - \eta\mu 0 - 3 \cdot 0 = 1 > 0$
   - $f(1) = e^1 - \eta\mu\pi - 3 \cdot 1 = e - 3 < 0$
   - $f(2) = e^2 - \eta\mu 2\pi - 3 \cdot 2 = e^2 - 6 > 0$

   οπότε προκύπτει ότι $f(0) \cdot f(1) = e - 3 < 0$ και $f(1) \cdot f(2) = (e - 3)\left(e^2 - 6\right) < 0$

Παρατήρηση 3

Οι τιμές $f(0)$ και $f(2)$ στα άκρα του αρχικού διαστήματος είναι ομόσημες. Έτσι η επιλογή του ενδιάμεσου σημείου είναι τέτοια ώστε η τιμή του να είναι ετερόσημη με τις προηγούμενες.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ και ένα $x_2 \in (1, 2)$ έτσι ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ άρα η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0, 2)$.