



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ - 11 Οκτωβρίου 2017

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΟΡΙΟ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ - ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ - ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

ΘΕΜΑ Α

A.1 Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$. **Μονάδες 8**

A.2 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια ρητή συνάρτηση με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ πολυώνυμα βαθμών n και μ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

εξετάζοντας περιπτώσεις για τη σχέση μεταξύ των βαθμών n και μ των δύο πολυωνύμων. **Μονάδες 7**

A.3 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.

α. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 τότε τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

θα είναι μεταξύ τους ίσα.

β. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

γ. Αν για μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε προκύπτει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

δ. Δίνεται μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$

κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε. Έστω μια εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$. Τότε θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{\eta\mu[a(x-1)]}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

B.1 Αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ τότε να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Μονάδες 9

B.2 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

B.3 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\frac{\eta\mu x + 2x^2 + 10x}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{2x^2 + 8x + 7}{x + 1}$$

για κάθε $x > 0$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 6$.

Μονάδες 12

Γ.2 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{xf(x) - 2x^2 - 4x + 3}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(f(x) + 2) + \eta\mu 3x}{\sqrt{x + 4} - 2} = 24$$

Να βρείτε τα όρια:

Δ.1 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Μονάδες 7

Δ.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{|f(x) + 1| - |f^2(x) - 3f(x)|}$

Μονάδες 8

Δ.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \ln(f^2(x) - 2f(x) + \sin^2(f(x) - 1)) - \ln(f^2(x) - 2f(x) + 1)$$

Αν η f είναι $1 - 1$ και $f(0) = 1$, να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της g ,

ii. το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Μονάδες 4+6

Καλή Επιτυχία!