Θα σχηματίσουμε από τη ζητούμενη ισότητα την αντίστοιχη εξίσωση θέτοντας όπου x_0 τη μεταβλητή x. Προκύπτει λοιπόν η εξίσωση

$$e^x = \text{ημ}(\pi x) - 2x \Rightarrow e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x$. Θα ισχύει ότι

i. η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και

ii.
- $f(-1) = e^{-1} - \text{ημ}(-\pi) + 2(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$
- $f(0) = e^0 - \text{ημ}0 + 2 \cdot 0 = 1 > 0$

οπότε προκύπτει $f(-1) \cdot f(0) = \frac{1}{e} - 2 < 0$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Βολζανο η f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$, ή ισοδύναμα η εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο $(-1, 0)$ άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} = \text{ημ}(\pi x_0) - 2x_0$$