Φροντιστηριο Μεσης Εκπαιδευσης

ΓΝΩΣΗ

: Βροκίνη Λαυρεντίου 2 (Πλατεία Γεωργάκη) | : 26610 40414

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14 Σεπτεμβρίου 2017

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in \mathbb{R}$. Το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 λέγεται μη πεπερασμένο όταν είναι ένα από τα $+\infty$ ή $-\infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα ισχύει ότι:

i. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του x_0.

ii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ σε μια περιοχή του x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΟΡΙΟΥ

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει μη πεπερασμένο όριο στο σημείο x_0 τότε ισχύουν γι αυτήν οι ακόλουθες ιδιότητες.

i. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

ii. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \ \ (< 0) \text{ κοντά στο } x_0 \end{cases}$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty(-\infty)$.

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

iv. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

v. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^{2\nu}} = +\infty.$

vi. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|x-x_0|} = +\infty.$

vii. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}} = -\infty.$

viii. $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}} = +\infty.$

ix. Δεν υπάρχουν τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}}.$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ 2

Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύει η σχέση $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε παίρνουμε ότι:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΟΡΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Για το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων f, g έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Όριο συνάρτησης	Τιμή ορίου					
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Απροσδιόριστη	Απροσδιόριστη	$-\infty$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΟΡΙΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων f, g έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Όριο συνάρτησης	Τιμή ορίου									
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Απρ.	Απρ.

Από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα παίρνουμε τις εξής απροσδιόριστες μορφές:

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$$+\infty - \infty \ , \ -\infty + \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty) \ , \ \frac{0}{0} \ , \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$