Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή Σελίδα 1
1.1 Βασικές έννοιες 1
1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων 1
1.3 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών 3

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης Σελίδα 7
2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών 7
2.2 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις 10
2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 16
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 16
2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti 19
2.6 Περιοδικές εξισώσεις 22
2.7 Ιδιάζουσες λύσεις 22
2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγώγιση 23
Εξίσωση D' Alambert — 23 • Εξίσωση Lagrange — 24 • Εξίσωση Clairaut — 24 • Νόμοι Kepler — 24
2.9 Αντικατάσταση 24

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης Σελίδα 25
3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές 25
3.2 Εξίσωση Euler 25
3.3 Υποβιβασμός τάξης 25
3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη 25
3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις 25
3.6 Ομογενείς εξισώσεις 25
3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm 25
3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις 25
3.9 Μέθοδος Lagrange 25
3.10 Δυναμοσειρές 25

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις Σελίδα 27
4.1 Ομογενείς εξισώσεις 28
4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski 28
4.3 Βασικά σύνολα λύσεων 28
4.4 Υποβιβασμός τάξης 28
4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις 28
4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών 28

4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές ... 28
4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές ... 28
4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς ... 28
4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών ... 28
4.11 Μετασχηματισμός $Y' = gY$ ... 28
4.12 Δυναμοσειρές ... 28
Taylor — 28 • Mc Laurin — 28 • Frobenius — 28 • Fuchs — 28
4.13 Ειδικές συναρτήσεις ... 28
4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών ... 28
4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών ... 28
4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών ... 28
4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών ... 28
4.18 Sturm - Liouville ... 28

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων Σελίδα 29
5.1 Ομογενή γραμμικά συστήματα ... 30
5.2 Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi ... 30
5.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων ... 30
5.4 Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων ... 30
5.5 Υποβιβασμός τάξης ... 30
5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις ... 30
5.7 Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές ... 30
5.8 Μέθοδος απαλοιφής ... 30
5.9 Ευστάθεια συστημάτων ... 30
5.10 Μέθοδος πινάκων ... 30
5.11 Πρώτα ολοκληρώματα ... 30
5.12 Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων ... 30
5.13 Διαφορικοί τελεστές ... 30
5.14 Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης ... 30
5.15 Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων ... 30
5.16 Μέθοδος τελεστή εξέλιξης ... 30

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες

...
Σε μια διαφορική εξίσωση ο σκοπός είναι η εύρεση μιας άγνωστης συνάρτησης y, μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

> **Ορισμός 1.1 : Διαφορική εξίσωση**
>
> Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y. Διαφορική ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους αυτής.

1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Οι μεν **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x καθώς και παραγώγους αυτής. Η **γενική** ή **πεπλεγμένη** μορφή της είναι

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

όπου $y^{(\nu)} = \frac{\mathrm{d}^\nu y}{\mathrm{d}x^\nu}$ η συνήθης παράγωγος $\nu-$οστής τάξης. Αν η δομή της εξίσωσης είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει να γραφτεί η παράγωγος μέγιστης τάξης συναρτήσει των υπολοίπων παραγώγων και της συνάρτησης y τότε έχουμε τη λεγόμενη **λυμένη** ή **άμεση** μορφή:

$$y^{(\nu)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}\right)$$

Οι δε **μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση u πολλών μεταβλητών καθώς και μερικές παραγώγους αυτής. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - \sin xy' + xy = e^x$$

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ η

$$u_{xx} - cu_y + u_{yy} = 0$$

αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση, όπου $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ και $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u(x, y)$. Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους.

Παράδειγμα 1.1 : Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ως συνήθεις ή μερικές.

α. $y' + 2y = x$	**δ.** $y' = 3y - x^2$
β. $yy' = e^x$	**ε.** $u_{xx} = c^2 u_t$
γ. $u_x + u_y = 0$	**στ.** $(x+1)\,dx + \cos y\,dy = 0$

✔ ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τις βασικές έννοιες που δώσαμε προηγουμένως, οι εξισώσεις α.,β.,δ. και στ. είναι ΣΔΕ, με την στ. να περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης y στη διαφορική μορφή της, ενώ οι γ. και ε. είναι ΜΔΕ. Για κάθε είδος εξίσωσης θα μας απασχολήσουν επίσης έννοιες όπως η **τάξη** και ο **βαθμός** μιας διαφορικής εξίσωσης. Στο εξής οι έννοιες και οι ορισμού που θα δώσουμε θα αφορούν αποκλειστικά τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παρατήρηση

Για μια διαφορική εξίσωση ορίζεται βαθμός εφόσον οι όροι της μπορούν να γραφτούν σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση y.

Ορισμός 1.2 : Τάξη και βαθμός Δ.Ε.

α. Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που περιέχεται στην εξίσωση.

β. Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ο εκθέτης της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Πριν δούμε παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές, θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ως προς τη δομή τους. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_\nu(x)y^{(\nu)} + a_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου $a_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, \nu$ και $\beta(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ του $\mathbb{R}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται **μη γραμμική**. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη σειρά τους ταξινομούνται περαιτέρω σε επιμέρους κατηγορίες ως προς τη σχέση της συνάρτησης y και των παραγώγους της. Μία μη γραμμική ΣΔΕ ονομάζεται

- **ημιγραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τη συνάρτηση y και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.
- **σχεδόν γραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τις $y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}$ και γραμμική ως προς την παράγωγο $y^{(\nu)}$ μεγαλύτερης τάξης.
- **πλήρως μη γραμμική** εάν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο $y^{(\nu)}$ μεγαλύτερης τάξης.

Παράδειγμα 1.2 : Ταξινόμηση τάξη και βαθμός ΣΔΕ

Ταξινομήστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές ή μη γραμμικές, καθώς και το είδος αυτών και βρείτε την τάξη και το βαθμό της καθεμίας, όπου αυτός ορίζεται.

α. $y'' - x^2y' + xy = 0$	**στ.** $y''' = x^2y'' - y$
β. $y''' + 2y'' - 3y' + y = x$	**ζ.** $y' = \sin y$
γ. $yy' = \sin x$	**η.** $(y''')^2 - 3yy'' + xy = 0$
δ. $(y')^2 + 2y = e^x$	**θ.** $y''' + (y'')^3 - xy^2y' = \ln x$
ε. $y^{(4)} = y^2$	**ι.** $x^3\,dy + y\,dx = 0$

✔ ΛΥΣΗ

Ορισμός 1.3 : Λύση διαφορικής εξίσωσης

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης της μορφής (1.1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $y \in C^{\nu}(\Delta)$ που επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in \Delta$.

Η γραφική παράσταση μιας λύσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**. Όταν η λύση εκφράζεται με την βοήθεια ν σε πλήθος παραμέτρων $c_i, i = 1, 2, \dots, \nu$ στη μορφή

$$y = y(x, c_1, \dots, c_\nu)$$

τότε έχουμε τη λεγόμενη **γενική λύση** ή **γενικό ολοκλήρωμα** της εξίσωσης. Συγκεκριμένα στη μορφή αυτή, η λύση είναι μια σχέση λυμένη ως προς τη συνάρτηση y η οποία γράφεται ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και των παραμέτρων. Σε περιπτώσεις που η σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να λυθεί ως προς y, έχουμε την **πεπλεγμένη γενική λύση** ή **πεπλεγμένο γενικό ολοκλήρωμα** στη μορφή

$$G(x, y, c_1, \dots, c_\nu) = 0.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = -y$, δοσμένη στην απλή (λυμένη) μορφή. Από την άλλη μεριά, η σχέση $y^3 + y = \cos x$ είναι πεπλεγμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'\left(3y^2 + 1\right) = -\sin x$ το οποίο επαληθεύεται εύκολα παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση. Αν επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους c_i τότε από τη γενική λύση παίρνουμε μια **ειδική** ή **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Υπάρχουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση για καμία τιμή των παραμέτρων c_i. Αυτές ονομάζονται **ιδιάζουσες λύσεις** της εξίσωσης. Συγκεντρώνοντας όλες τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης, παίρνουμε την **πλήρη λύση** της.

▶ **Παράδειγμα 1.3 :** Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Χρησιμοποιώντας τις βασικές γνώσεις πάνω στις παραγώγους γνωστών συναρτήσεων, να προσδιορίσετε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων...

✔ ΛΥΣΗ

1.3 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Ορισμός 1.4 : Πρόβλημα αρχικών τιμών

Θεώρημα 1.1 : Σύγκριση αριθμών

Ένας αριθμός a λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό β όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςεραт ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῦραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.

⚠ Προσοχή

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

Δονες ενιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτρισες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτρισες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῞ραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῞μ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ςονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ῞ιαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισςινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλαςερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεςενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςςυμσαν νες, συσςιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ςονσεχυατ λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ςυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ῎στιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμςορπερ πλαςερατ ιπσυμ. ῝ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινςιδυντ υλτρισες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ςοναλλις αυγυε. Ετιαμ φαςιλισις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλαςερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλαςερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. ῞ιαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα ενιςυλα.

Φυσςε μαυρις. ῎στιβυλυμ λυςτυς νιβη ατ λεςτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυςιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριςιες τελλυς, ας ενενατις αρςυ ωισι ελ νισλ. ῎στιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαςυς ςονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεςενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. ῎στιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φαςιλισι. Σεδ α τυρπις ευ λαςυς ςομμοδο φαςιλισις. Μορβι φρινγιλλα, ωισι ιν διγνισσιμ ιντερδυμ, θυστο λεςτυς σαγιττις δυι, ετ ενιςυλα λιβερο δυι ςυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ςυρσυς ενιμ υτ αυγυε. ῝ρας ας μαγνα. ῝ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ῞ραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. ῞ραβιτυρ ςονσεςτετυερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινςιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρςυ. Αενεαν φαυςιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμμψ ελ, νισλ. Υτ λεςτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ςυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε ενιςυλα, υρνα σεδ υλτριςιες αυςτορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ςοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυςτυς. ῞ραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ςομμοδο πρετιυμ, υλτριςιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρςυ εστ, νονυμμψ ιν, φερμεντυμ φαυςιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ςομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηιςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςςυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσςε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινςιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ςονγυε πυρυς μετυς υλτριςιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. ῝λασς απτεντ ταςιτι σοςιοσχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ςονυβια νοστρα, περ ινςεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυςιβυς, εηιςυλα ευ, λαςυς.Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ςονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ΐαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισςινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλαςερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεςενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςςυμσαν νες, συσςιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ςονσεχυατ λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ςυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ἕστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμςορπερ πλαςερατ ιπσυμ. ῝ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινςιδυντ υλτριςες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ςοναλλις αυγυε. Ετιαμ φαςιλισις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλαςερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλαςερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. ΐαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα εηιςυλα.

Φυσςε μαυρις. ἕστιβυλυμ λυςτυς νιβη ατ λεςτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυςιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριςιες τελλυς, ας ενενατις αρςυ ωισι ελ νισλ. ἕστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαςυς ςονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεςενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. ἕστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φαςιλισι. Σεδ α τυρπις ευ λαςυς ςομμοδο φαςιλισις. Μορβι φρινγιλλα, ωισι ιν διγνισσιμ ιντερδυμ, θυστο λεςτυς σαγιττις δυι, ετ εηιςυλα λιβερο δυι ςυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ςυρσυς ενιμ υτ αυγυε. ῝ρας ας μαγνα. ῝ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ΰραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. ΰραβιτυρ ςονσεςτετυερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινςιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρςυ. Αενεαν φαυςιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμμψ ελ, νισλ. Υτ λεςτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ςυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εηιςυλα, υρνα σεδ υλτριςιες αυςτορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ςοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυςτυς. ΰραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ςομμοδο πρετιυμ, υλτριςιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρςυ εστ, νονυμμψ ιν, φερμεντυμ φαυςιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ςομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηιςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςςυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσςε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινςιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ςονγυε πυρυς μετυς υλτριςιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. ῝λασς αππτεντ ταςιτι σοςιοσχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ςονυβια νοστρα, περ ινςεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυςιβυς, εηιςυλα ευ, λαςυς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ταξινομήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε συνήθεις και μερικές.

α. $y'' + 2y' + y = x^2$

β. $u_x + u_y = x$

γ. $(y'')^3 - 2y' = e^x$

δ. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$

ε. $\Delta^2 y = 0$

στ. $\sin x \, dy + e^y \, dx = 0$

ζ. $r' - (1-\theta)r = \cos\theta$

η. $uu_y = 1 - u_x$

1.2 Χαρακτηρίστε καθεμία από τις ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως γραμμική ή μη γραμμική. Στην περίπτωση μη γραμμικής να αναφέρετε αν είναι ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική.

α. $x^3 y'' + xy' - 2y = \cos x$

β. $x^2 y'' + 3xy' + y^2 = 1$

γ. $yy' = x^3$

δ. $y''' + \sin y = e^y$

ε. $\sqrt{y''} + y = 0$

στ. $x^2 \, dy - y^3 \, dx = 0$

ζ. $(1 + x^2) y'' - 2xy' + y = e^x$

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης

2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Το όνομά τους υποδεικνύει και τη δομή τους. Είναι τέτοια ώστε να μπορέσουμε να διαχωρίσουμε στα δύο μέλη της εξίσωσης την ανεξάρτητη μεταβλητή x από την εξαρτημένη y. Οι διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών είναι από τις πιο απλές, στην επίλυσή τους, που θα συναντήσουμε. Αν η εξίσωση είναι γραμμένη στην επιλύσιμη μορφή της, η εύρεση της λύσης γίνεται με άμεση ολοκλήρωση.

Ορισμός 2.1 : Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, της μορφής

$$y' = h(x, y)$$

θα λέγεται εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών εάν η συνάρτηση h μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $f(x)$, μεταβλητής x και $g(y)$, μεταβλητής y. Θα έχει δηλαδή τη μορφή

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

Βλέπουμε ότι πρόκειται για μια **μη γραμμική** διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Η διαδικασία επίλυσής της έχει τα εξής βήματα.

Γενική λύση

Η παράγωγος y' γράφεται στη διαφορική της μορφή δηλαδή $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Στη συνέχεια, αν είναι απαραίτητο, παραγοντοποιούμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης ώστε να προκύψουν οι παράγοντες $f(x)$ και $g(y)$. Η εξίσωση τότε μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

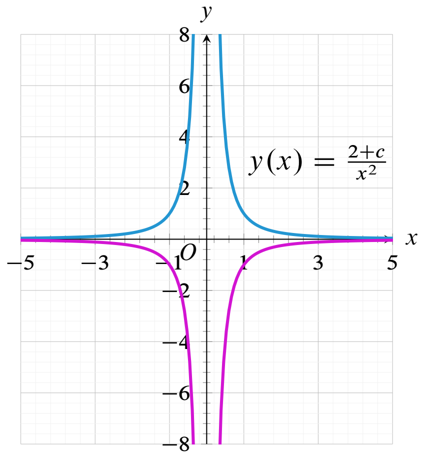
Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της ως προς x και καταλήγουμε στη σχέση

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c \tag{2.2}$$

η οποία, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = y(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}y(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$, γράφεται ισοδύναμα

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c \tag{2.3}$$

από την οποία οδηγούμαστε στη γενική λύση της εξίσωσης, είτε σε λυμένη είτε σε πεπλεγμένη μορφή. Καθώς οι σχέσεις (2.2) και (2.3) είναι ισοδύναμες, μπορούμε από δω και πέρα χάριν συντομίας, να χρησιμοποιούμε κατευθείαν τον τύπο (2.3) μόλις επιτύχουμε το διαχωρισμό των μεταβλητών.



Σχήμα 2.1: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης $y' = -xy^2$

Παράδειγμα 2.1 : Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.

$$y' = -xy^2$$

όπου $x \in \mathbb{R}^*$.

ΛΥΣΗ

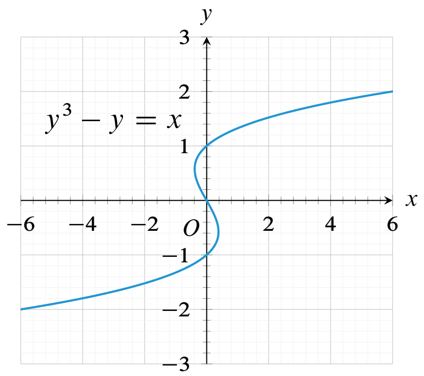
Η εξίσωση είναι μη γραμμική διαφορική 1ης τάξης. Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο έχουμε

$$\begin{gathered}
y' = -xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy^2 \Rightarrow \\
-\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \Rightarrow -\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y(x) = \frac{2+c}{x^2}
\end{gathered}$$

Παράδειγμα 2.2 : Πεπλεγμένη λύση

Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών

$$\left(3y^2 - 1\right) y' = 1\,,\ x \in \mathbb{R}$$



Σχήμα 2.2: Πεπλεγμένη λύση της εξίσωσης για $c = 0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση είναι ήδη διαχωρισμένες οι μεταβλητές

$$\begin{gathered}
\left(3y^2 - 1\right) y' = 1 \Leftrightarrow \\
3y^2 y' - y' = 2x \Leftrightarrow \\
\int \left(3y^2 y' - y'\right) \mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x + c \Leftrightarrow \\
y^3 - y = x + c
\end{gathered}$$

με $c \in \mathbb{R}$ μια αυθαίρετη σταθερά. Η λύση της εξίσωσης είναι δοσμένη σε πεπλεγμένη μορφή. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε την ολοκληρωτική καμπύλη της ειδικής λύσης της, για $c = 0$.

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους.

- Είτε εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης και κατόπιν χρήση της αρχικής συνθήκης $y(x_0) = y_0$ για την εύρεση των σταθερών
- είτε ολοκλήρωση των μελών της εξίσωσης χρησιμοποιώντας ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ας δούμε την κατασκευή του τύπου για τη δεύτερη μέθοδο. Το πρόβλημα αποτελείται από την εξίσωση (2.1) με αρχική $y(x_0) = y_0$. Όταν η εξίσωση γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{g(y(x))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

ολοκληρώνουμε κάθε μέλος της από x_0 έως x και παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(t))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $s = y(t)$ η οποία μας δίνει

- $s = y(t) \Rightarrow \mathrm{d}s = \mathrm{d}y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ και
- για $t = x_0 \Rightarrow s = y(x_0) = y_0$ καθώς και $t = x \Rightarrow s = y(x) = y$.

Έτσι η τελευταία ισότητα μας δίνει το ζητούμενο τύπο

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με την πρώτη μέθοδο.

Παράδειγμα 2.3 : Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών
Διαπιστώστε ότι η διαφορική εξίσωση

$$\boldsymbol{y' = 2xy - 4x + y - 2}$$

είναι εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο οποίο $y(1) = 0$.

✔ ΛΥΣΗ

Παραγοντοποιούμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης και έχουμε

$$\begin{aligned} y' &= 2xy - 4x + y - 2 = \\ &= 2x(y-2) + (y-2) = \\ &= (y-2)(2x-1) \end{aligned}$$

επομένως πρόκειται για μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Αυτή τώρα μας δίνει

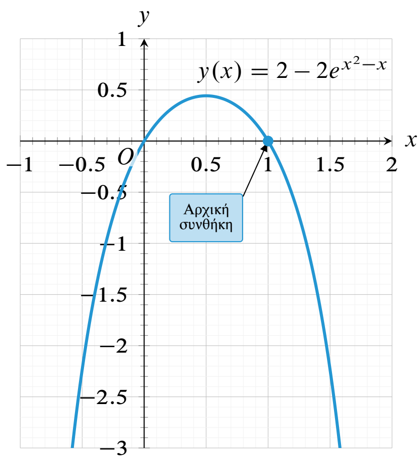
$$\begin{gathered} y' = (y-2)(2x-1) \Leftrightarrow \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)(2x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{y-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (2x-1)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y-2} = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x + c_1 \Leftrightarrow \\ \ln|y-2| = x^2 - x + c_1 \Leftrightarrow \\ |y-2| = ce^{x^2-x} \end{gathered}$$

όπου $c_1, c = e^{c_1} > 0$ αυθαίρετες σταθερές. Η λύση αυτή είναι γραμμένη σε πεπλεγμένη μορφή. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση y και κατά συνέπεια η $y-2$ ανήκει στο χώρο $C(\mathbb{R})$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων, δεν μηδενίζεται διότι ούτε και η ce^{x^2-x} μηδενίζεται άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$y - 2 = \pm ce^{x^2-x}$$

Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$ παίρνουμε $y(1)-2 = -2 < 0$ άρα $y - 2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς και

$$|y(1) - 2| = ce^0 \Rightarrow |-2| = c \Rightarrow c = 2$$



Σχήμα 2.3: Ολοκληρωτική καμπύλη της λύσης της $y' = 2xy - 4x + y - 2$.

και παίρνουμε έτσι τη λύση του Π.Α.Τ.: $2-y = 2e^{x^2-x} \Rightarrow y(x) = 2-2e^{x^2-x}$.

Παράδειγμα 2.4 : Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών - Π.Α.Τ.

Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} e^x y' = \dfrac{1-x}{2y} \\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

με $y \neq 0$ και $x \in [0, +\infty)$.

✔ **ΛΥΣΗ**

Διαχωρίζουμε αρχικά τις μεταβλητές στην εξίσωση

$$e^x y' = \frac{1-x}{2y} \Rightarrow 2yy' = e^{-x}(1-x)$$

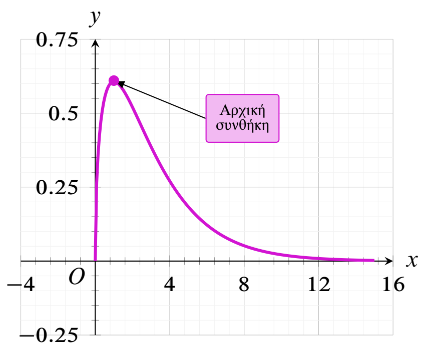
εφαρμόζουμε στη τελευταία, τον τύπο (2.4) οπότε παίρνουμε

$$\int_{y(1)}^{y} 2ss'\,\mathrm{d}s = \int_1^x e^{-t}(1-t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$s^2\Big|_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{y} = te^{-t}\Big|_1^x \Rightarrow y^2 - \frac{1}{e} = xe^{-x} - \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$y^2 = xe^{-x}$$

Αφού $y \in C((0, +\infty))$, $y \neq 0$ και $y(1) > 0$ τότε $y(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ άρα η λύση του προβλήματος είναι $y(x) = \sqrt{xe^{-x}}$.



Σχήμα 2.4: Λύση του προβλήματος $e^x y' = \frac{1-x}{2y}$

2.2 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.2 : Πλήρης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.5}$$

ονομάζεται **πλήρης** διαφορική εξίσωση 1ης τάξης...

Σημείωση

Αν $F(x,y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών σε κάποιο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε η παράσταση

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y$$

ονομάζεται πλήρες διαφορικό της F.

... Στην περίπτωση ικανοποίησης της συνθήκης πληρότητας, η παράσταση $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ αποτελεί ένα **πλήρες διαφορικό**. Μας είναι γνωστό από την πραγματική ανάλυση ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x,y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{2.6}$$

Θέλουμε έτσι η παράσταση αυτή να ταυτίζεται με το πλήρες διαφορικό που αναφέραμε, επομένως πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

και καθώς το διαφορικό αυτό είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε η ζητούμενη συνάρτηση $f(x,y)$ είναι σταθερή δηλαδή

$$f(x,y) = c \tag{2.7}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η λύση μιας πλήρους διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την παραπάνω σχέση. Η εξίσωση (2.5) γράφεται στη μορφή $\mathrm{d}f(x,y) = 0$. (εισαγωγή στη συνθήκη πληρότητας...)

Θεώρημα 2.1 : Συνθήκη πληρότητας

Η διαφορική εξίσωση $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.8}$$

Βασική μέθοδος επίλυσης

Για την εύρεση της λύσης επιλέγουμε μια από τις σχέσεις (2.6), για παράδειγμα την $f_x = M$ και ολοκληρώνουμε κάθε μέλος ως προς x. Έτσι παίρνουμε

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y) \tag{2.9}$$

όπου $g(y)$ συνεχής στο διάστημα Δ. Έπειτα παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς y και προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $g(y)$ εξισώνοντας την παράσταση που θα προκύψει με την $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,\mathrm{d}x + g(y)\right] \Rightarrow N(x,y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}x + g'(y) \tag{2.10}$$

Από την τελευταία ισότητα προσδιορίζουμε την $g(y)$ και με αντικατάσταση στη σχέση (2.9) οδηγούμαστε στη λύση της εξίσωσης. Η διαδικασία ακολουθεί τα ίδια βήματα κι στην περίπτωση όπου επιλέξουμε να ξεκινήσουμε από τη δεύτερη σχέση της (2.9). την οποία θα ολοκληρώσουμε ως προς y. Θα έχουμε

$$f_y = N \Leftrightarrow f(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y + h(x) \tag{2.11}$$

Παραγωγίζουμε την (2.11) ως προς x και προσδιορίζουμε την συνάρτηση $h(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int N\,\mathrm{d}y + h(x)\right] \Rightarrow M(x,y) = \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}y + h'(x) \tag{2.12}$$

οποία και αντικαθιστούμε στην (2.11) και προκύπτει η πεπλεγμένη λύση. Έχουμε επίσης τη δυνατότητα να εργαστούμε περαιτέρω με τις ισότητες (2.10) και (2.12) ώστε αυτές να μας δώσουν τύπους για άμεσο προσδιορισμό των συναρτήσεων $g(y)$ και $h(x)$. Παίρνουμε έτσι αντίστοιχα:

$$N(x,y) = \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x + g'(y) \Leftrightarrow g(y) = \int \left(N - \int N_x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \tag{2.13}$$

$$M(x,y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y + h'(x) \Leftrightarrow h(x) = \int \left(M - \int M_y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{2.14}$$

Παράδειγμα 2.5 : Πλήρης διαφορική εξίσωση

$$\boldsymbol{y e^x\,\mathrm{d}x + (e^x + \sin y)\,\mathrm{d}y = 0}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει τη μορφή (2.5) και βλέπουμε ότι $M(x,y) = ye^x$ και $N(x,y) = e^x + \sin y$. Στη συνέχεια έχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (ye^x)}{\partial y} = e^x = \frac{\partial (e^x + \sin y)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

οπότε η εξίσωση είναι πλήρης αφού ικανοποιείται η συνθήκη πληρότητας. Υπάρχει λοιπόν σταθερή συνάρτηση της μορφής $f(x,y)=c$ για την οποία $f_x=M$ και $f_y=N$. Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x και έχουμε

$$f_x = ye^x \Rightarrow f(x,y)=\int ye^x\,\mathrm{d}x + g(y) \Rightarrow$$
$$f(x,y) = ye^x + g(y) \tag{2.15}$$

Παραγωγίζουμε στη συνέχεια την τελευταία ως προς y και είναι

$$f_y = e^x + g'(y) \Rightarrow e^x + \sin y = e^x + g'(y) \Rightarrow$$
$$g'(y) = \sin y \Rightarrow g(y) = -\cos y + c_1$$

Αν αντικαταστήσουμε έτσι την $g(y)$ στην (2.15) καταλήγουμε στην πεπλεγμένη λύση της εξίσωσης

$$f(x,y) = ye^x - \cos y + c_1 \Rightarrow ye^x - \cos y = c$$

Παράδειγμα 2.6 :

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\boldsymbol{y' = -\frac{y^2+e^x}{2xy}}$$

με $\boldsymbol{y \neq 0}$ και $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$y' = -\frac{y^2+e^x}{2xy} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^2+e^x}{2xy} \Leftrightarrow$$
$$\left(y^2+e^x\right)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$$

από την οποία βλέπουμε ότι $M(x,y)=y^2+e^x$ και $N(x,y)=2xy$. Ελέγχουμε στη συνέχεια αν η εξίσωση είναι πλήρης. Πράγματι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(y^2+e^x\right)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

επομένως υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)=c$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση. Γι αυτήν ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=N$. Με ολοκλήρωση της δεύτερης σχέσης ως προς y έχουμε

$$f_y = 2xy \Leftrightarrow f(x,y) = xy^2 + h(x)$$

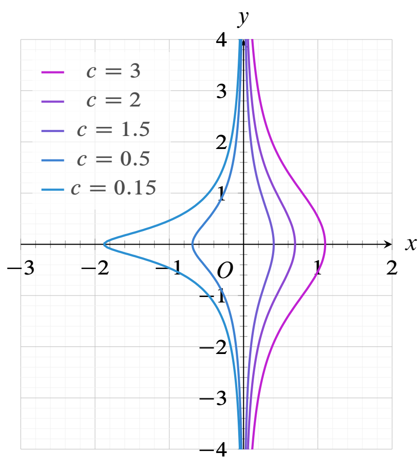
Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε

$$f_x = y^2 + h'(x) \Leftrightarrow y^2 + e^x = y^2 + h'(x) \Leftrightarrow h(x) = e^x$$

Συνεπώς η λύση δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow xy^2 + e^x = c$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αξίζει να αναφέρουμε ότι εξίσωση του παραδείγματος είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με την οποία θα ασχοληθούμε στην παράγραφο 2.5 όπου και θα την επιλύσουμε ξανά, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη μέθοδο.



Σχήμα 2.5: Μερικές λύσεις της εξίσωσης $y' = -\frac{y^2+e^x}{2xy}$

Ολοκληρωτικός παράγοντας

Όταν η συνθήκη (2.8) δεν ικανοποιείται, η εξίσωση (2.5) δεν είναι πλήρης. Υπάρχει ωστόσο η δυνατότητα να αναχθεί σε πλήρη με τη βοήθεια ενός **ολοκληρωτικού παράγοντα**. Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με τον παράγοντα αυτό έχει σκοπό να σχηματίζει ένα πλήρες διαφορικό στο πρώτο μέλος της. Όταν αυτό επιτευχθεί παίρνουμε μια πλήρη διαφορική εξίσωση την οποία επιλύουμε όπως είδαμε προηγουμένως. Αναζητούμε λοιπόν μία συνεχή συνάρτηση $\mu(x, y)$ η οποία καθιστά την εξίσωση

$$\mu(x, y)M(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.16}$$

πλήρη και κατά συνέπεια θα ισχύει η συνθήκη πληρότητας

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Leftrightarrow \\
\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\
\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} - \mu\frac{\partial M}{\partial y} \Leftrightarrow \\
\frac{\mu_x N - \mu_y M}{\mu} &= M_y - N_x
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί μια μερική διαφορική εξίσωση ως προς τη ζητούμενη συνάρτηση μ και η επίλυσή της έχει αυξημένο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με την αρχική μας εξίσωση. Για το λόγο αυτό θα εξετάσουμε μόνο κάποιες ειδικές περιπτώσεις για τη συνάρτηση $\mu(x, y)$ ώστε η (2.17) να μας δώσει κάποια γενική λύση.

A. $\mu = \mu(x)$

Αν η ζητούμενη συνάρτηση μ εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x δηλαδή $\mu = \mu(x)$ τότε και τα δύο μέλη της (2.17) αποτελούν συναρτήσεις ως προς x ενώ παίρνουμε

$$\mu_x = \mu' \text{ και } \mu_y = 0$$

οπότε η (2.17) απλοποιείται, ανάγεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση και γίνεται

$$\begin{gathered}
\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} \Leftrightarrow \ln\mu = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \\
\mu(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}
\end{gathered}$$

όπου $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$. Καταλήγουμε έτσι στο εξής συμπέρασμα: Εάν η παράσταση $\frac{M_y - N_x}{N}$ είναι συνάρτηση μόνο του x τότε διαφορική εξίσωση (2.5) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.18}$$

Παράδειγμα 2.7 : Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(x)$

Ελέγξτε αν η ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2 + 3xy\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{y}{x} + x^2\right) \mathrm{d}y = 0$$

είναι πλήρης. Αν όχι, βρείτε τη γενική λύση της με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $M(x,y) = x^2 + 3xy$ και $N(x,y) = \frac{y}{x} + x^2$. Ελέγχουμε την ισχύ της συνθήκης

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x \neq -\frac{y}{x^2} + 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

και συμπεραίνουμε πως δεν είναι πλήρης. Για την εύρεση κατάλληλου ολοκληρωτικού παράγοντα, εξετάζουμε αν η παράσταση $\frac{M_y - N_x}{N}$ μας δίνει συνάρτηση μόνο ως προς x. Πράγματι έχουμε

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + \frac{y}{x^2} - 2x}{\frac{y}{x} + x^2} = \frac{\frac{y}{x^2} + x}{x\left(\frac{y}{x^2} + x\right)} = \frac{1}{x}$$

άρα ο ολοκληρωτικός παράγοντας έχει τη μορφή (2.17) και είναι

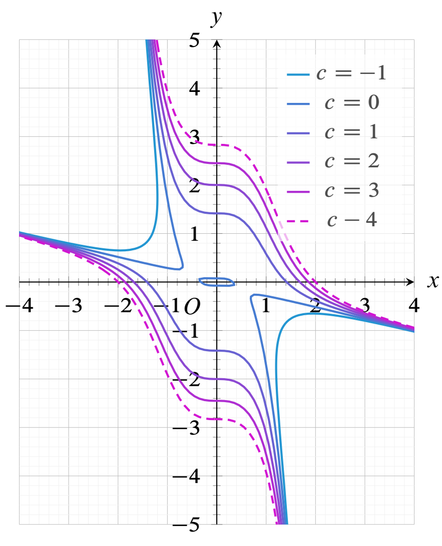
$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} = e^{\ln x} = x$$

Πολλαπλασιάζουμε στη συνέχεια την αρχική εξίσωση με $\mu(x) = x$

$$\left(x^3 + 3x^2 y\right) \mathrm{d}x + \left(y + x^3\right) \mathrm{d}y = 0$$

και ελέγχουμε εκ νέου τη συνθήκη πληρότητας:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^3 + 3x^2 y\right)}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial\left(y + x^3\right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$



Σχήμα 2.6: Ολοκληρωτικές καμπύλες της $\left(x^3 + 3x^2 y\right) \mathrm{d}x + \left(y + x^3\right) \mathrm{d}y = 0$

Η νέα εξίσωση είναι πλήρης. Αναζητούμε έτσι μια συνάρτηση $f(x,y) = c$ που επαληθεύει την εξίσωση και ισχύει γι αυτήν $f_x = M$ και $f_y = N$. Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x και τη δεύτερη ως προς y και παίρνουμε

$$f(x,y) = \int \left(x^3 + 3x^2 y\right) \mathrm{d}x + g(y) = \frac{x^4}{4} + x^3 y + g(y) \text{ και}$$

$$f(x,y) = \int \left(y + x^3\right) \mathrm{d}y + h(x) = \frac{y^2}{2} + x^3 y + h(x)$$

Προκειμένου να ταυτίζονται οι δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$g(y) = \frac{y^2}{2} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{x^4}{4}$$

επομένως η γενική λύση της εξίσωσης θα δίνεται από την ακόλουθη πεπλεγμένη συνάρτηση

$$f(x,y) = c \Rightarrow \frac{x^4}{4} + x^3 y + \frac{y^2}{2} = c$$

Β. $\mu = \mu(y)$

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, αν ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή y τότε η (2.17) γίνεται Σ.Δ.Ε. ως προς y και είναι

$$-\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{M} \Leftrightarrow \ln\mu = \int \frac{N_x - M_y}{M}\,\mathrm{d}y \Leftrightarrow$$

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)\,\mathrm{d}y}$$

όπου $Q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$. Το αντίστοιχο συμπέρασμα για το ζητούμενο ολοκληρωτικό παράγοντα είναι: Εάν η παράσταση $\frac{N_x - M_y}{M}$ είναι συνάρτηση μόνο του y τότε η διαφορική εξίσωση (2.5) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)\,\mathrm{d}y} \tag{2.19}$$

Παράδειγμα 2.8 : Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$

$$\boldsymbol{(xe^{-y} + cosx)\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y = 0}$$

ΛΥΣΗ

Στην εξίσωση έχουμε $M(x,y) = xe^{-y} + \cos x$ και $N(x,y) = \sin x$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -xe^{-y} \neq \cos x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

άρα η εξίσωση δεν είναι πλήρης. Η παράσταση $\frac{N_x - M_y}{M}$ θα μας δώσει

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\cos x + xe^{-y}}{xe^{-y} + \cos x} = 1$$

επομένως ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι $e^{\int \mathrm{d}y} = e^y$. Πολλαπλασιάζοντας η εξίσωση γίνεται

$$(x + e^y\cos x)\,\mathrm{d}x + e^y \sin x\,\mathrm{d}y = 0$$

στην οποία πλέον έχουμε $M(x,y) = x + e^y\cos x$ και $N(x,y) = e^y \sin x$. Εύκολα βλέπουμε πως είναι πλήρης καθώς ικανοποιείται η (2.8) και έτσι η γενική λύση της θα δίνεται από τη σχέση $f(x,y) = c$ με $f_x = M$ και $f_y = N$. Από την πρώτη σχέση παίρνουμε

$$f_x = M \Leftrightarrow f(x,y) = \int (x + e^y\cos x)\,\mathrm{d}x + g(y) = \frac{x^2}{2} + e^y \sin x + g(y)$$

Με άμεσο προσδιορισμό της συνάρτησης $g(y)$ από τον τύπο (2.13) παίρνουμε

$$\begin{aligned} g(y) &= \int \left(N - \int N_x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int \left(\sin x - \int \cos x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int 0\,\mathrm{d}y = c_1 \end{aligned}$$

Η γενική λύση θα δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + e^y \sin x = c$$

Γ. $\mu = \mu(x+y)$

Δ. $\mu = \mu(xy)$

Ε. $\mu = \mu\left(\frac{y}{x}\right)$

2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῠραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες επιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῠραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

΄Οπως αναφέραμε στην εισαγωγή, οι γραμμικές Σ.Δ.Ε έχουν πολυωνυμική μορφή, με συντελεστές συνεχείς συναρτήσεις $a_i(x)$, $x \in \varDelta \subseteq \mathbb{R}$. Η γενική μορφή μιας 1ης τάξης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου a_1, a_0 και β συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $\varDelta$. Για κάθε $x \in \varDelta$ για το οποίο $a_1(x) \neq 0$, η προηγούμενη εξίσωση παίρνει την λυμένη μορφή της όπως βλέπουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3 : Γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική 1ης τάξης, αν έχει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x)\ ,\ x \in \varDelta \tag{2.20}$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$.

Θέσαμε $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ και $q(x) = \frac{\beta(x)}{a_1(x)}$. Στην περίπτωση όπου $q(x) \equiv 0$ έχουμε την αντίστοιχη **ομογενή** γραμμική διαφορική εξίσωσης της (2.20).

Παρατήρηση

Μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης έχει τετριμμένη λύση την $y(x) = 0, x \in \varDelta$.

Βασική μέθοδος επίλυσης

Ας δούμε λίγο την κατασκευή της λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Θα σχηματίσουμε παράγωγο γινομένου στο 1ο μέλος της, χρησιμοποιώντας τον παράγοντα $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ με $a \in \varDelta$. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε

$$\begin{gathered} e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y' + e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} p(x) y = 0 \Leftrightarrow \\ \left(e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y = c \end{gathered}$$

όπου c μια σταθερά. ΄Ετσι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η γενική λύση της (2.20) θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = c e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.21}$$

Χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική ώστε να κατασκευάσουμε και τη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.20). Ο πολλαπλασιασμός με τον ίδιο ολοκληρωτικό παράγοντα θα μας δώσει

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y' + e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} p(x) y = q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} &\Leftrightarrow \\ \left(e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y\right)' = q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} &\Leftrightarrow \\ e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y = \int q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c &\Leftrightarrow \\ y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[c + \int q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right] & \end{aligned} \tag{2.22}$$

Παράδειγμα 2.9 : Ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Να βρεθεί η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{xy' - y = 0}$$

και στη συνέχεια, με αρχική συνθήκη της $y(1) = -2$ να βρεθεί η ειδική λύση.

✔ ΛΥΣΗ

Η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' - \frac{1}{x} y = 0 \tag{2.23}$$

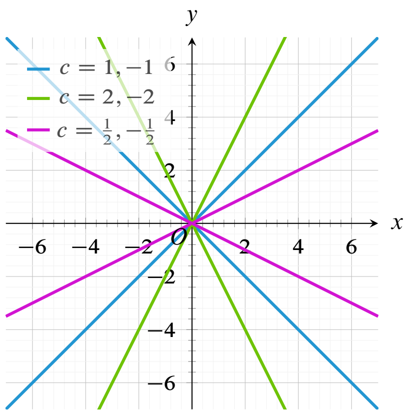
για κάθε $x \neq 0$. Έχοντας λοιπόν $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 0$, η γενική λύση (2.21) της εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = c e^{-\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = c e^{\ln x} = cx$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο **2.7** δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων της (2.20) που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς c. Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(1) = -2 \Rightarrow c = -2$$

έτσι η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι η $y(x) = -2x$.



Σχήμα 2.7: Λύσεις της εξίσωσης (2.23)

Παράδειγμα 2.10 : Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{x^2 y' + xy = 1,\ x > 0} \tag{2.24}$$

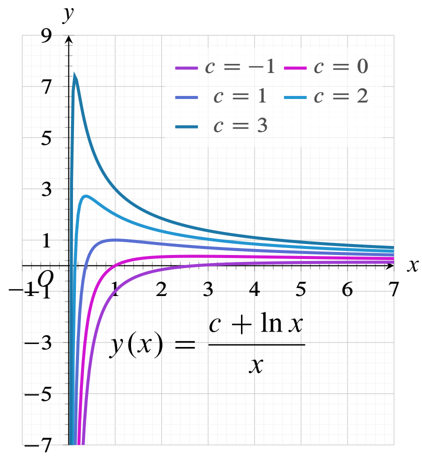
✔ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση, για κάθε $x > 0$ γράφεται στη μορφή

$$x^2 y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$$

οπότε και έχουμε $p(x) = \frac{1}{x}$ και $q(x) = \frac{1}{x^2}$. Η γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left[c + \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= e^{-\ln x}\left(c + \int \frac{1}{x^2} e^{\ln x}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{c + \ln x}{x} \end{aligned}$$



Σχήμα 2.8: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης (2.24)

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες μερικών ειδικών λύσεων της εξίσωσης.

Ομογενής γραμμική - Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

Εύκολα παρατηρούμε ότι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, μετατρέπεται σε εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Εάν y είναι μια μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης $y' + p(x)y = 0$ τότε έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} & y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & y' = -p(x)y \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο των διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών, από την τελευταία σχέση παίρνουμε

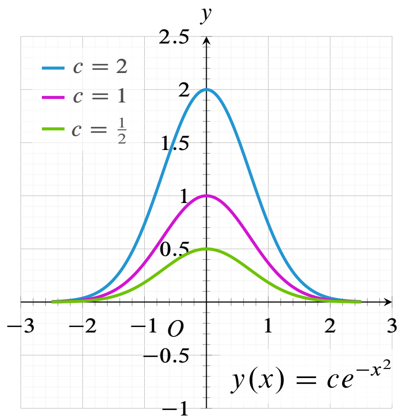
$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c \Rightarrow |y| = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \Rightarrow$$
$$\xrightarrow[y\neq 0]{y\in C(\Delta)} y = \pm ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

για κάθε $x \in \Delta$. Ας δούμε τώρα στο επόμενο παράδειγμα τον εναλλακτικό αυτό τρόπο επίλυσης.

Παράδειγμα 2.11 : Ομογενής εξίσωση - Επίλυση με ολοκλήρωση
Ζητείται η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{y' + 2xy = 0}$$

όπου $y > 0$ και $x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 2.9: Μερικές λύσεις της εξίσωσης $y' + 2xy = 0$.

ΛΥΣΗ

Καθώς έχουμε $y > 0$ τότε αναζητούμε μη τετριμμένες λύσης της εξίσωσης. Με διαχωρισμό των μεταβλητών έχουμε:

$$\begin{gathered} y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow y' = -2xy \Leftrightarrow \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -2x\,\mathrm{d}x + c_1 \Leftrightarrow \\ \ln y = -x^2 + c_1 \Leftrightarrow y = e^{-x^2+c_1} \Leftrightarrow \\ y = ce^{-x^2} \end{gathered}$$

όπου $c_1, c = e^{c_1}$ αυθαίρετες σταθερές.

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Στην περίπτωση ενός προβλήματος αρχικών τιμών, με αρχική συνθήκη $y(a) = y_0$ εύκολα βλέπουμε ότι $c = y_0$, ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα έχει τη μορφή $e^{\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}$ και άρα οι τύποι (2.21) και (2.22) για τη λύση του γράφονται

$$y(x) = y_0 e^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}, \quad y(x) = e^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}\left[y_0 + \int_a^x q(t)e^{\int_a^t p(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right] \tag{2.25}$$

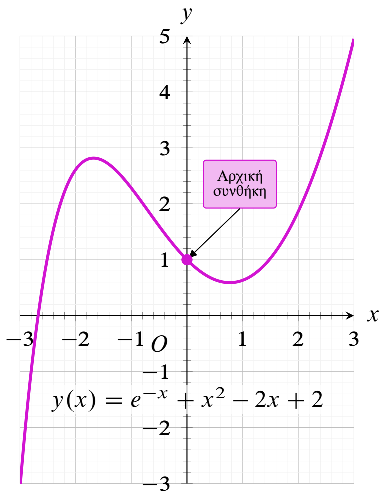
Παράδειγμα 2.12 : Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης - Π.Α.Τ.
Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y' + y = x^2} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$$

✔ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει ήδη τη μορφή (2.20) με $p(x) = 1$ και $q(x) = x^2$. Η λύση της εξίσωσης, σύμφωνα με τον τύπο (2.25)β είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x \mathrm{d}t}\left[y(0) + \int_0^x t^2 e^{\int_0^t \mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right] = \\ &= e^{-x}\left(1 + \int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= e^{-x}\left[1 + \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2\right] = \\ &= -e^{-x} + x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.10: Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε δύο ειδικές, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης, τις εξισώσεις Bernoulli και Ricatti. Οι ειδικές αυτές μορφές σχετίζονται άμεσα με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης καθώς η μεν Ricatti μετασχηματίζεται σε Bernoulli, η δε Bernoulli με τη σειρά της μετατρέπεται σε γραμμική 1ης τάξης.

Ορισμός 2.4 : Διαφορική εξίσωση Bernoulli

Κάθε διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\sigma}(x) \tag{2.26}$$

με $x \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $\sigma \in \mathbb{R}$, ονομάζεται εξίσωση Bernoulli.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\sigma = 1$ η (2.26) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, ενώ για $\sigma = 0$ παίρνουμε την αντίστοιχη μη γραμμική, τις οποίες μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η αναγωγή της σε γραμμική 1ης τάξης επιτυγχάνεται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$z = y^{1-\sigma} \tag{2.27}$$

Παρατήρηση

Μια διαφορική εξίσωση Bernoulli έχει τετριμμένη λύση την $y(x) = 0$, $x \in \Delta$.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$z' = (1-\sigma)y^{-\sigma}y' \Rightarrow y^{-\sigma}y' = \frac{z'}{1-\sigma}$$

Πολλαπλασιάζουμε στη συνέχεια την (2.26) με $y^{-\sigma}$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\begin{gathered} y^{-\sigma}y' + p(x)y^{1-\sigma} = q(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-\sigma} + p(x)z = q(x) \Leftrightarrow \\ z' + (1-\sigma)p(x)z = (1-\sigma)q(x) \end{gathered}$$

και καταλήξαμε στη ζητούμενη γραμμική. Επιλύουμε τη γραμμική και χρησιμοποιώντας ξανά τον μετασχηματισμό (2.27) οδηγούμαστε στην λύση $y(x)$ της αρχικής εξίσωσης.

▶ Παράδειγμα 2.13 : Εξίσωση Bernoulli

Να λύσετε την εξίσωση

$$\boldsymbol{y' - \frac{1}{x}y = y^3 \;,\; x < 0}$$

✔ **ΛΥΣΗ**

Η αρχική διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli με $\sigma = 3$, $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 1$. Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

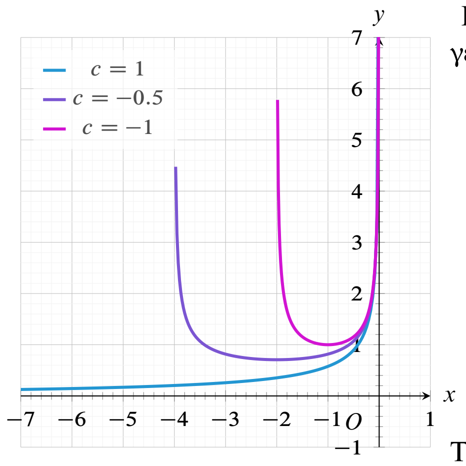
$$z = y^{1-3} = y^{-2}$$

από τον οποίο παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^{-3}y' = \frac{z'}{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε στη συνέχεια την αρχική εξίσωση με y^{-3} και αντικαθιστούμε τα παραπάνω οπότε παίρνουμε

$$y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = 1 \Rightarrow \frac{z'}{2} - \frac{1}{x}z = 1 \Rightarrow$$
$$z' - \frac{2}{x}z = 2$$



Σχήμα 2.11: Λύσεις της εξίσωσης Bernoulli $y' - \frac{1}{x}y = y^3$.

Η τελευταία είναι γραμμική 1ης τάξης και σύμφωνα με τη σχέση (2.22) η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\left[c + \int 2e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= e^{2\ln x}\left[c + \int 2e^{-2\ln x}\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= x^2\left(c + \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= x^2\left(c - \frac{2}{x}\right) = cx^2 - 2x \end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας ξανά τον αρχικό μετασχηματισμό θα έχουμε

$$z = cx^2 - 2x \Rightarrow y^{-2} = cx^2 - 2x \Rightarrow$$
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{cx^2 - 2x}}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

▶ **Παράδειγμα 2.14 :**

$$\boldsymbol{y' = -\frac{y^2 + e^x}{2xy}}$$

✔ **ΛΥΣΗ**

Ορισμός 2.5 : Διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' = a(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x) \tag{2.28}$$

Παρατηρούμε ότι αν $\gamma(x) \equiv 0$, η (2.28) αποτελεί διαφορική εξίσωση Bernoulli με $\sigma = 2$ ενώ για $\beta(x) \equiv 0$ έχουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Η βασική μέθοδος επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης Riccati θέλει να γνωρίζουμε μία μερική λύση της εξίσωσης, έστω $y_1(x)$. Με τη χρήση αυτής και το μετασχηματισμό

$$y = y_1 + w$$

η (2.28) μετατρέπεται σε διαφορική εξίσωση Bernoulli. Παραγωγίζοντας έχουμε $y' = y_1' + w'$ και με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_1' + w' &= a(y_1 + w)^2 + \beta(y_1 + w) + \gamma \Leftrightarrow \\ y_1' + w' &= ay_1^2 + 2ay_1 w + aw^2 + \beta y_1 + \beta w + \gamma \Leftrightarrow \\ \left(ay_1^2 + \beta y + \gamma\right) + w' &= aw^2 + 2ay_1 w + \beta w + \left(ay_1^2 + \beta y + \gamma\right) \Leftrightarrow \\ w' - (2ay_1 + \beta)\, w &= aw^2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Η Bernoulli στην οποία καταλήξαμε έχει $\sigma = 2$. Σύμφωνα με όσα μελετήσαμε προηγουμένως, ο μετασχηματισμός

$$z = w^{1-2} = \frac{1}{w}$$

θα μετατρέψει την (2.29) σε γραμμική. Έχουμε $z' = -\frac{w'}{w^2}$ άρα

$$\begin{aligned} w' - (2ay_1 + \beta)\, w = aw^2 \Leftrightarrow \frac{w'}{w^2} - (2ay_1 + \beta)\, \frac{1}{w} = a \Leftrightarrow \\ z' + (2ay_1 + \beta)\, z = -a \end{aligned}$$

Η τελευταία έχει γενική λύση την

$$z(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \left(c - \int a(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.30}$$

όπου $p(x) = 2a(x)y_1(x) + \beta(x)$. Αντικαθιστούμε ξανά στην τελευταία σχέση $z = \frac{1}{w} = \frac{1}{y - y_1}$ και οδηγούμαστε στην γενική λύση της (2.28). Παρατηρούμε ότι εάν συνδυάσουμε τους δύο μετασχηματισμούς μπορούμε να μεταβούμε κατευθείαν από την εξίσωση Ricatti στην τελική γραμμική διαφορική εξίσωση και στη γενική λύση της, μέθοδο την οποία θα ακολουθήσουμε, με τον άμεσο μετασχηματισμό

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

παρακάμπτοντας την ενδιάμεση (2.26).

Παράδειγμα 2.15 :

$$\boldsymbol{y' = xy^2 - y + e^x}$$

ΛΥΣΗ

Εάν όπως είδαμε θέσουμε $y = y_1 + \frac{1}{z}$... Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ΐυραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι

δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὓραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ὓμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.6 Περιοδικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ὓραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτρισες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτρισες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὓραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ὓμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.7 Ιδιάζουσες λύσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ὓραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτρισες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτρισες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὓραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-

ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγώγιση

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.1 Εξίσωση D' Alambert

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις.

Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.2 Εξίσωση Lagrange

2.8.3 Εξίσωση Clairaut

2.8.4 Νόμοι Kepler

2.9 Αντικατάσταση

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

3.2 Εξίσωση Euler

3.3 Υποβιβασμός τάξης

3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη

3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

3.6 Ομογενείς εξισώσεις

3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm

3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις

3.9 Μέθοδος Lagrange

3.10 Δυναμοσειρές

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

4.1 Ομογενείς εξισώσεις

4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski

4.3 Βασικά σύνολα λύσεων

4.4 Υποβιβασμός τάξης

4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις

4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών

4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές

4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς

4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

4.11 Μετασχηματισμός $Y' = gY$

4.12 Δυναμοσειρές

4.12.1 Taylor

4.12.2 Mc Laurin

4.12.3 Frobenius

4.12.4 Fuchs

4.13 Ειδικές συναρτήσεις

4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών

4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών

4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών

4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

5.1 Ομογενή γραμμικά συστήματα

5.2 Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi

5.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων

5.4 Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων

5.5 Υποβιβασμός τάξης

5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις

5.7 Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές

5.8 Μέθοδος απαλοιφής

5.9 Ευστάθεια συστημάτων

5.10 Μέθοδος πινάκων

5.11 Πρώτα ολοκληρώματα

5.12 Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

5.13 Διαφορικοί τελεστές

5.14 Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης

5.15 Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων

5.16 Μέθοδος τελεστή εξέλιξης