

6 Μονοτονία - Ακρότατα

6.1 : Εύρεση μονοτονίας - ακρότατων - συνόλου τιμών - πλήθος ριζών συνάρτησης

1^ο Βήμα : Πεδίο ορισμού της f και έλεγχος συνέχειας

2^ο Βήμα : Παράγωγος f' .

3^ο Βήμα : Υπολογίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f' με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ και τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.
- Με επιλογή τιμής σε κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού. Οι ρίζες βρίσκονται και εδώ λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Παραγωγίζοντας δεύτερη ή ακόμα και τρίτη φορά. Με τη μονοτονία κάθε παραγώγου βρίσκουμε τα πρόσημά της ώσπου να φτάσουμε στη μονοτονία της f . Οι ρίζες βρίσκονται με δοκιμές.

4^ο Βήμα : Σχεδιάζουμε πίνακα με τα πρόσημα της παραγώγου και τη μονοτονία της f . (Συμπληρώνουμε αν χρειαστεί και επιπλέον γραμμές για τις ανώτερης τάξης παραγώγους που βρήκαμε.)

5^ο Βήμα :

Για εύρεση μονοτονίας	Για εύρεση ακροτάτων	Για εύρεση συνόλου τιμών
Αναφέρουμε το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για ακρότατα στα κρίσιμα σημεία και στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού	Βρίσκουμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας και τις ενώνουμε

6^ο Βήμα : Για την εύρεση του πλήθους ριζών της συνάρτησης, ελέγχουμε αν το 0 ανήκει στην εικόνα κάθε διαστήματος. Αναλυτικά

$$0 \in f(\Delta_1) \Rightarrow \text{Υπάρχει } x_0 : f(x_0) = 0$$

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική μέσα στο κάθε διάστημα γιατί η f είναι γνησίως μονότονη.

7 Κυρτότητα - Σημεία καμπής

7.1 : Εύρεση κυρτότητας - σημείων καμπής

1^ο Βήμα : Πεδίο ορισμού και έλεγχος συνέχειας.

2^ο Βήμα : Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο f'' .

3^ο Βήμα : Βρίσκουμε ρίζες και πρόσημα της f'' με τους τρόπους που περιγράψαμε στη μονοτονία.

4^ο Βήμα : Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα της f'' και την κυρτότητα της f .

5^ο Βήμα :

Για εύρεση κυρτότητας	Για εύρεση σημείων καμπής
Αναφέρουμε το είδος της κυρτότητας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.	Ελέγχουμε για σημεία καμπής στα σημεία που αλλάζει η κυρτότητα αρκεί η f' να είναι μια φορά παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

7.2 : Κυρτότητα και εφαπτομένες - Απόδειξη ανισότητας

1^ο Βήμα : Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

2^ο Βήμα : Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο που ζητάει ή σε κάποιο σημαντικό σημείο.
Αυτή θα έχει τη μορφή $y = ax + \beta$

3^ο Βήμα : Χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$f \curvearrowright \Delta \Rightarrow f(x) \geq ax + \beta \quad , \quad f \curvearrowleft \Delta \Rightarrow f(x) \leq ax + \beta$$

και με πράξεις φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή που τη ζητάει η άσκηση.