ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3 Σεπτεμβρίου 2015

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Μια γενική μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων είναι η μέθοδος της αντικατάστασης που συναντήσαμε και στα γραμμικά συστήματα. Έχει ως εξής

1ο Βήμα : **Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε εκείνη την εξίσωση του συστήματος η οποία είναι στην πιο απλή μορφή και είναι εύκολο να λυθεί ως προς κάποιον άγνωστο. Λύνουμε ως προς αυτόν τον άγνωστο.

2ο Βήμα : **Αντικατάσταση**
Τον άγνωστο αυτό τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος και υπολογίζουμε και τη δεύτερη μεταβλητή. Αν οι εξισώσεις του συστήματος είναι περισσότερες από δύο τότε αντικαθιστούμε τον άγνωστο στις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος και καταλήγουμε σε ένα σύστημα μιας τάξης μικρότερης. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία όσες φορές χρειαστεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Να λυθεί το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 1} \\ \boldsymbol{2x - \ y = 1} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε η 2η εξίσωση του συστήματος είναι γραμμική και κατά συνέπεια είναι εύκολο να λυθεί ως προς τη μεταβλητή y. Προκύπτει

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - \ y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 1 \tag{1}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1) στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (2x-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(5x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας έδωσε δύο λύσεις ως τιμές της μεταβλητής x. Οπότε για κάθε τιμή αυτή θα βρεθεί και η αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής y και κατά συνέπεια θα προκύψουν δύο λύσεις του συστήματος. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

i. Για $x = 0$ έχουμε $y = 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$.
ii. Για $x = \frac{4}{5}$ έχουμε $y = 2x - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$.

Οι λύσεις λοιπόν του συστήματος θα είναι $(x, y) = (0, -1)$ και $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΑΝΑΘΕΣΗ

Σε ορισμένα μη γραμμικά συστήματα οι μεταβλητές των εξισώσεων βρίσκονται στην ίδια μορφή ή και μέσα σε ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το μη γραμμικό σύστημα μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό ως εξής :

1^o Βήμα : **Ανάθεση**
Αναγνωρίζουμε την κοινή σύνθετη αλγεβρική παράσταση στην οποία βρίσκεται μέσα κάθε μεταβλητή σε όλες τις εξισώσεις και την θέτουμε ίση με μια νέα μεταβλητή.

2^o Βήμα : **Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε σε όλες τις εξισώσεις τις παραστάσεις αυτές με τις νέες μεταβλητές που ορίσαμε οπότε και καταλλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα με νέους άγνωστους.

3^o Βήμα : **Λύση γραμμικού συστήματος**
Λύνουμε το γραμμικό σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο προτιμάμε.

4^o Βήμα : **Αρχικοί άγνωστοι**
Αφού λυθεί το γραμμικό σύστημα και βρεθούν οι νέες μεταβλητές, αντικαθιστούμε τις τιμές στις σχέσεις του **$1^{ου}$ Βήματος** οπότε προκύπτουν εξισώσεις με τις αρχικές μεταβλητές του συστήματος, τις οποίες είτε λύνουμε αν περιέχουν μόνο μια μεταβλητή είτε συνδιάζουμε αν περιέχουν περισσότερες για να προκύψει σύστημα, γραμμικό ή μη γραμμικό. Στην περίπτωση συστήματος εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μεθόδους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΑΘΕΣΗ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = -1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 7 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε οτι και στις δύο εξισώσεις οι μεταβλητές βρίσκονται μέσα στις ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις. Αυτές είναι οι $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{y}$. Θέτουμε λοιπόν

$$\lambda = \frac{1}{x} \text{ και } \kappa = \frac{1}{y} \tag{2}$$

Το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε γραμμικό ως εξής

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = -1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{1}{x} + 4\dfrac{1}{y} = -1 \\ 2\dfrac{1}{x} - 5\dfrac{1}{y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 4\kappa = 1 \\ 2\lambda - 5\kappa = 7 \end{cases}$$

Με τις γνωστές μεθόδους υπολογίζουμε τη λύση του γραμμικού συστήματος η οποία είναι $(\lambda, \kappa) = (1, -1)$. Με τις τιμές αυτές των νέων μεταβλητών θα υπολογίσουμε τις τιμές των αρχικών μεταβλητών από τη σχέση (2). Έχουμε λοιπόν :

$$\lambda = \frac{1}{x} \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1 \text{ και } \kappa = \frac{1}{y} \Rightarrow -1 = \frac{1}{y} \Rightarrow y = -1$$

Η λύση λοιπόν του αρχικού συστήματος θα είναι $(x, y) = (1, -1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΑΘΕΣΗ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} - \dfrac{3}{2x+y} = -2 \\ -\dfrac{4}{x-3y} + \dfrac{9}{2x+y} = 5 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραστάσεις $\frac{1}{x-3y}$ και $\frac{1}{2x+y}$ εμφανίζονται και στις δύο εξισώσεις. Άρα θέτουμε

$$z = \frac{1}{x-3y} \text{ και } t = \frac{1}{2x+y} \tag{3}$$

Το αρχικό σύστημα θα μετατραπείο ως εξής

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} - \dfrac{3}{2x+y} = -2 \\ -\dfrac{4}{x-3y} + \dfrac{9}{2x+y} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 3t = -2 \\ -4z + 9t = 5 \end{cases}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα που προέκυψε προκύπτει η λύση για τις μεταβλητές z, t η οποία θα είναι $(z, t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις σχέσεις (3) οι σχέσεις αυτές μας δίνουν ένα νέο γραμμικό σύστημα με τις αρχικές μεταβλητές.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{x-3y} \\ t = \frac{1}{2x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x+y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Με τις γνωστές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων προκύπτει η λύση του παραπάνω συστήματος η οποία είναι και λύση του αρχικού συστήματος $(x, y) = (1, 1)$.