

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

23 Φεβρουαρίου 2018

ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

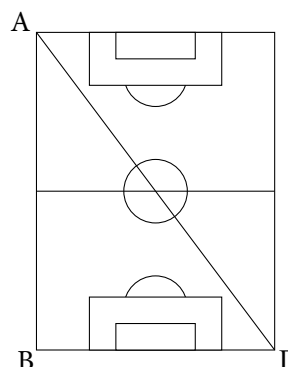
Α' Γυμνασίου

Β' Γυμνασίου

Β'.1 Εμβαδά - Πυθαγόρειο Θεώρημα

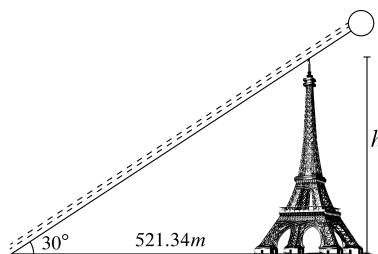
Το στάδιο Camp Nou βρίσκεται στην πόλη της Βαρκελώνης στην Ισπανία και είναι έδρα της ποδοσφαιρικής ομάδας FC Barcelona. Το μήκος AB του ποδοσφαιρικού γηπέδου είναι $105m$. Δίνεται γνωστό ότι η διαγώνια απόσταση AG ανάμεσα σε δύο απέναντι corner είναι $125,1m$.

- Πόσο είναι το πλάτος $BΓ$ του γηπέδου;
- Να βρεθεί το εμβαδόν που καταλαμβάνει η επιφάνεια του γηπέδου.
- Αν γνωρίζουμε ότι το κόστος τοποθέτησης του χλοοτάπητα είναι 12€ για κάθε τ.μ. να βρεθεί το συνολικό κόστος τοποθέτησής του.



Β'.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Στο κέντρο της πόλης του Παρισιού βρίσκεται ένα από τα πιο σύνθετα αρχιτεκτονικά επιτεύγματα του 19ου αιώνα, ο πύργος του Αίφελ. Το ύψος του υπερβαίνει τα $300m$ όμως οι τεχνίτες της εποχής δεν είχαν την πολυτέλεια της εξελιγμένης τεχνολογίας που μας επιτρέπει σήμερα να κάνουμε τέτοιους υπολογισμούς με ακρίβεια.



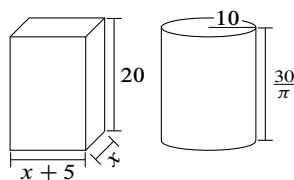
Για να υπολογίσουν το ύψος του πύργου θα χρειαστούν τη βοήθεια των αρχαίων Ελλήνων και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στις 10 το πρωί ο ήλιος ρίχνει τις ακτίνες του στη Γη με γωνία 30° σε σχέση με το οριζόντιο έδαφος σχηματίζοντας έτσι σκιά μήκους $521.34m$ από τη βάση του πύργου. Αν οι τεχνίτες γνωρίζουν ότι $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ τότε δείξτε και σεις πως υπολόγισαν το ύψος του πύργου.

Γ' Γυμνασίου

Γ'.1 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Οι διαστάσεις ενός δοχείου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι $x\text{ cm}$, $x + 5\text{ cm}$ και 20 cm αντίστοιχα. Ένα άλλο δοχείο ίδιου όγκου κυλινδρικού σχήματος, έχει ύψος $\frac{30}{\pi}\text{ cm}$ και ακτίνα βάσης 10 cm .

- Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής x .
- Να βρεθεί ο όγκος του 1ου δοχείου.



Ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$ όπου r είναι η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του.

Γ'.2 Συστήματα

Ο μεγάλος υπερτυχερός του λαχείου μόλις κέρδισε 4.500.000€ στον πρώτο λαχνό. Τα χρήματα αυτά θα τα παραλάβει από την τράπεζα σε 650 δεσμίδες των 50€ και 100€. Αν κάθε δεσμίδα περιέχει 100 χαρτονομίσματα πόσες δεσμίδες από κάθε είδος χαρτονομίσματος θα χρειαστούν;

Α' Λυκείου

Α'.1 Πιθανότητες

Ο καθηγητής των μαθηματικών σε ένα λύκειο πρόκειται να επιλέξει μαθητές από όλες τις τάξεις για να εκπροσωπίσουν το σχολείο στη διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 2015. Θα πρέπει να λάβει υπ όψιν του το αν ο μαθητής είναι αγόρι (α) ή κορίτσι (κ), την τάξη στην οποία πηγαίνει (Α', Β' ή Γ') και το αν έχει συμμετάσχει ξανά (ναι : (ν) ή όχι (ο)) σε οποιονδήποτε διαγωνισμό μαθηματικών.

- Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
- Αν ο καθηγητής επιλέξει τυχαία έναν μαθητή να βρεθεί το ενδεχόμενο

A : Ο μαθητής να είναι αγόρι.

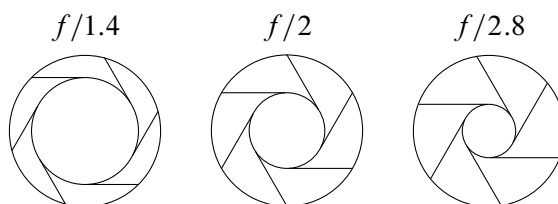
B : Ο μαθητής να ανήκει σε κάποια ομάδα προσανατολισμού και να μην έχει συμμετάσχει ξανά σε διαγωνισμό

Γ : Ο μαθητής να είναι κορίτσι και να έχει συμμετάσχει ξανά σε μαθηματικό διαγωνισμό.

- Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων A, B, Γ.

Α'.2 Γεωμετρική πρόοδος

Κάθε φακός φωτογραφικής μηχανής περιέχει μηχανισμούς ελέγχου της ποσότητας του φωτός που θα εισέλθει μέσα απ' αυτόν. Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται διάφραγμα. Είναι ένα σύνολο από μεταλλικές λεπίδες στο εσωτερικό του, τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε το γεωμετρικό σχήμα του ανοίγματος του διαφράγματος να είναι είτε κανονικό πολύγωνο είτε κύκλος (προσέγγιση κύκλου). Ανοίγοντας ή κλείνοντας το διάφραγμα εισέρχεται περισσότερο ή λιγότερο φως αντίστοιχα.



Η μονάδα μέτρησης του ανοίγματος ενός διαφράγματος είναι οι "αριθμοί ανοίγματος" η όπως έχει οριστεί διεθνώς τα "f-stops" και συμβολίζονται με f/n . Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός αυτός τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του διαφράγματος όπως φαίνεται στο σχήμα. Το διάφραγμα είναι έτσι κατασκευασμένο ώστε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές θέσεις f/n η ποσότητα φωτός που εισέρχεται από το φακό να είναι δύο φορές μικρότερη από την προηγούμενη. Ο τύπος που δίνει τον αριθμό n στις διάφορες θέσεις του διαφράγματος είναι

$$n = \frac{f}{d}$$

όπου f είναι η εστιακή απόσταση του φακού και d η διάμετρος του ανοίγματος.

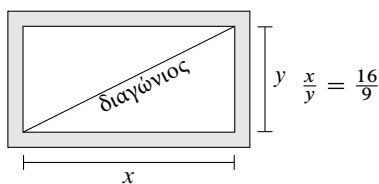
- Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί ανοίγματος του διαφράγματος f/n αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου (F_n) της οποίας να βρείτε τον γενικό τύπο.

- ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ανοιγμάτων του διαφράγματος στις διάφορες θέσεις αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου (E_n) της οποίας να βρείτε τον γενικό τύπο.
- iii. Να βρεθεί η θέση του διαφράγματος ώστε ο αριθμός ανοίγματος να είναι $f/5.6^1$.
- iv. Να βρεθεί η θέση του διαφράγματος ώστε το εμβαδόν του ανοίγματος να είναι οχτώ φορές μικρότερο από το αρχικό. Ποιός είναι ο αριθμός f/n στη θέση αυτή;

B' Λυκείου

B'.1 Συστήματα - Μη γραμμικά συστήματα

Με βάση το πρότυπο HD Video Standard οι τηλεοράσεις κατασκευάζονται με τέτοι τρόπο ώστε οι πλευρές τους να έχουν αναλογία 16 : 9.



Επίσης το μέγεθος μιας τηλεόρασης δίνεται από το μήκος της διαγωνίου της οθόνης δοσμένο σε ίντσες. Μια ίντσα ισούται με $2,54\text{cm}$ ($1'' = 2,54\text{cm}$). Να βρεθούν οι διαστάσεις της οθόνης μιας τηλεόρασης μεγέθους

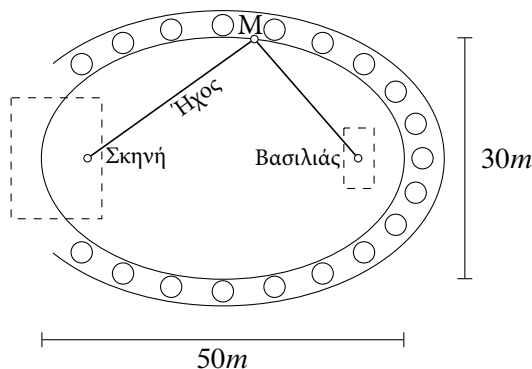
i. $42''$

ii. $49''$

iii. $55''$

B'.2 Κωνικές τομές - Έλλειψη

Η αίθουσα όπερας του θεάτρου San Carlos στη Λισαβόνα της Πορτογαλίας έχει ελλειπτικό σχήμα (ελλειπτικός κύλινδρος). Αυτό έχει σαν συνέπεια οι θέσεις που βρίσκονται στο ίδιο ύψος να ανήκουν στην ίδια καμπύλη έλλειψης.



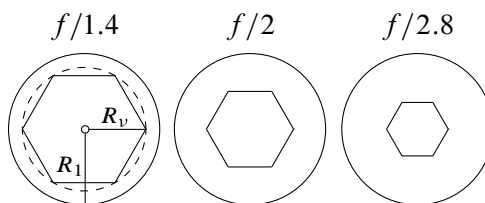
Μια απ' αυτές τις ελλείψεις βρίσκεται στο ύψος της σκηνής και του βασιλικού μπαλκονιού. Είναι κατασκευασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε η μια εστία της να βρίσκεται στο κέντρο της σκηνής ενώ στην άλλη εστία της βρίσκονται οι βασιλικές θέσεις. Έτσι ο βασιλιάς έχει το προνόμιο να δέχεται τον ήχο αυτούσιο και κρυστάλλινο κατευθείαν στ αυτιά του. Οι διαστάσεις της αίθουσας είναι 50m και 30m όπως φαίνονται στο σχήμα.

- i. Ποιά είναι η απόσταση που διανύει ο ήχος που ανακλάται πάνω στους τοίχους της αίθουσας και καταλήγει στο βασιλιά;
- ii. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που ορίζουν οι τοίχοι της αίθουσας στο ύψος της σκηνής.
- iii. Ποιά είναι η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης;
- iv. Σε πόση απόσταση βρίσκεται ο βασιλιάς από το κέντρο της σκηνής;

¹Ο αριθμός n στις διαβαθμίσεις ενός φακού στρογγυλοποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελείται από δύο ψηφία.

Β'.3 Εμβαδά

Κάθε φακός φωτογραφικής μηχανής περιέχει μηχανισμούς ελέγχου της ποσότητας του φωτός που θα εισέλθει μέσα απ' αυτόν. Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται διάφραγμα. Είναι ένα σύνολο από μεταλλικές λεπίδες στο εσωτερικό του, τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε το γεωμετρικό σχήμα του ανοίγματος του διαφράγματος να είναι είτε κανονικό πολύγωνο είτε κύκλος (προσέγγιση κύκλου). Ανοίγοντας ή κλείνοντας το διάφραγμα εισέρχεται περισσότερο ή λιγότερο φως αντίστοιχα.



Η μονάδα μέτρησης του ανοίγματος ενός διαφράγματος είναι οι "αριθμοί ανοίγματος" η όπως έχει οριστεί διεθνώς τα "f-stops" και συμβολίζονται με f/n . Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός αυτός τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του διαφράγματος όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι αριθμοί αυτοί σε έναν απλό φακό αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ πράγμα που σημαίνει ότι η ακτίνα του ανοίγματος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς f/n είναι $\sqrt{2}$ φορές μικρότερη. Η πρόοδος που δίνει τους αριθμούς "f-stops" έχει τύπο

$$F_v = f/n = \frac{f/1}{(\sqrt{2})^{v-1}}, \quad n \approx (\sqrt{2})^{v-1}$$

f : Η εστιακή απόσταση του φακού.

$f/1$: Μέγιστο άνοιγμα διαφράγματος.

n : Προσέγγιση της δύναμης $(\sqrt{2})^{v-1}$.

R_1 : Η ακτίνα του μέγιστου ανοίγματος.

R_v : Η ακτίνα του ανοίγματος σε κάθε θέση f/n .

Για ένα φακό όπου το άνοιγμα του διαφράγματος έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου με μέγιστη ακτίνα $R_1 = 32mm$:

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ανοίγματος του διαφράγματος σε μια τυχαία θέση f/n είναι διπλάσιο από το αντίστοιχο εμβαδόν E' της επόμενης θέσης.
- Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά E_v των ανοιγμάτων διαφράγματος στις διάφορες θέσεις αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου της οποίας να βρείτε τον γενικό τύπο.
- Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_2 , E_5 και E_8 (αντιστοιχούν στις θέσεις $f/1.4$, $f/4$ και $f/11$.)

Γ' Λυκείου

Γ'.1 Ακρότατα

Ένα εργοστάσιο κονσερβοποιίας κατασκευάζει κυλινδρικές κονσέρβες με ύψος h cm και ακτίνας βάσης r cm. Ο όγκος κάθε κονσέρβας είναι $500ml$ και είναι κατασκευασμένη από αλουμίνιο. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο όγκος V και το εμβαδόν E ενός κυλίνδρου δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$V = \pi r^2 h, \quad E = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

- Να εκφραστεί το ύψος h της κονσέρβας ως συνάρτηση της ακτίνας r της βάσης της.
- Να εκφραστεί το εμβαδόν E της κονσέρβας ως συνάρτηση της ακτίνας r της βάσης της.
- Να βρεθεί πόσο πρέπει να είναι η ακτίνα της βάσης ώστε το εμβαδόν τους, και κατά συνέπεια το κόστος παραγωγής, να είναι το ελάχιστο.
- Για την τιμή της ακτίνας η οποία δίνει το ελάχιστο εμβαδόν να βρεθεί το ύψος h , το εμβαδόν E της κονσέρβας καθώς και το κόστος παραγωγής 500.000 κονσερβών αν ξέρουμε ότι η αξία των φύλλων αλουμινίου που χρειάζονται για να κατασκευαστούν οι κονσέρβες είναι 20€ ανα τ.μ.