Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

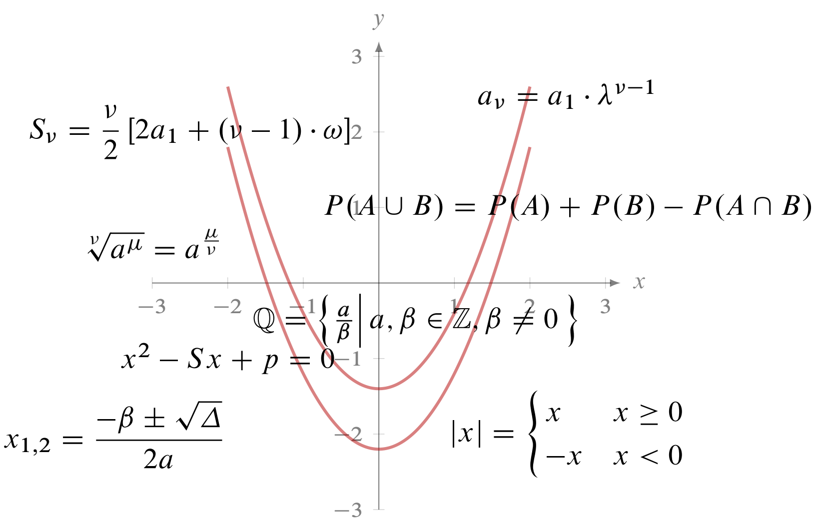
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

27 Απριλίου 2017

Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αλγεβρα

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν, φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι.

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626$$

Το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης στην παραπάνω πρόταση φτιάχνουν διαδοχικά τα 23 πρώτα ψηφία του αριθμού π.

1 Σύνολα - Πιθανότητες

1. **Σύνολο:** Συλλογή όμοιων αντικειμένων.
    - Τα αντικείμενα λέγονται **στοιχεία**.
    - Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.
    - Το x **ανήκει** στο σύνολο A: $x \in A$.
    - **Κενό:** Το σύνολο χωρίς στοιχεία : $\varnothing$.
    - **Βασικό:** Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία: Ω.

    ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

    i. Φυσικοί Αριθμοί : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
    ii. Ακέραιοι Αριθμοί : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
    iii. Ρητοί Αριθμοί : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \middle| a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$.
    iv. Άρρητοι Αριθμοί : Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.
    v. Πραγματικοί Αριθμοί : $\mathbb{R} = \{$όλοι οι αριθμοί$\}$.

2. **Ίσα σύνολα:** $A = B$ αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

3. **Υποσύνολο:** $A \subseteq B$.

4. **Πράξεις μεταξύ συνόλων**

    i. Ένωση: $A \cup B = \{x \in \Omega \,|x \in A$ ή $x \in B\}$
    ii. Τομή: $A \cap B = \{x \in \Omega \,|x \in A$ και $x \in B\}$
    iii. Συμπλήρωμα: $A' = \{x \in \Omega \,|x \notin A\}$
    iv. Διαφορά: $A - B = \{x \in \Omega \,|x \in A$ και $x \notin B\}$

2 Πραγματικοί Αριθμοί

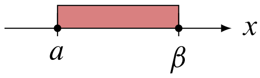
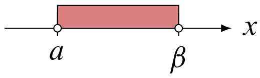
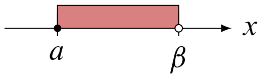
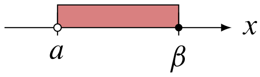
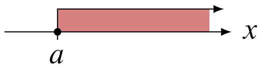
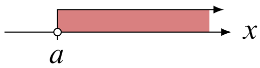
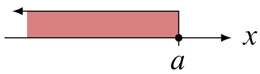
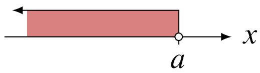
1. **Δύναμη πραγματικου αριθμου:** $a \cdot a \cdot \ldots a = a^{\nu}$. Ο a λέγεται **βάση** και ο ν **εκθέτης**.

2. **Ταυτότητα:** Μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

    1. Άθροισμα στο τετράγωνο
    $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
    2. Διαφορά στο τετράγωνο
    $(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
    3. Άθροισμα στον κύβο
    $(a + \beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
    4. Διαφορά στον κύβο
    $(a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
    5. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά
    $(a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2$
    6. Άθροισμα κύβων
    $(a + \beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
    7. Διαφορά κύβων
    $(a - \beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

3. **Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων** Η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο.

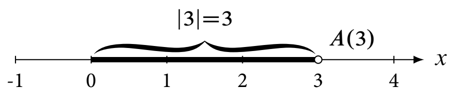
4. **Διάστημα - κεντρο - ακτινα διαστηματος**
    - Ο αριθμός $x_0 = \frac{a+\beta}{2}$ ονομάζεται **κέντρο**, ο αριθμός $\mu = \beta - a$ ονομάζεται **μήκος** και ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - a}{2}$ ονομάζεται **ακτίνα** του διαστήματος.

Διάστημα	Ανισότητα	Σχήμα	Περιγραφή
$[a,\beta]$	$a \leq x \leq \beta$		Κλειστό a, β
(a,β)	$a < x < \beta$		Ανοιχτό a, β
$[a,\beta)$	$a \leq x < \beta$		Κλειστό a ανοιχτό β
$(a,\beta]$	$a < x \leq \beta$		Ανοιχτό a κλειστό β
$[a,+\infty)$	$x \geq a$		Κλειστό a συν άπειρο
$(a,+\infty)$	$x > a$		Ανοιχτό a συν άπειρο
$(-\infty,a]$	$x \leq a$		Μείον άπειρο a κλειστό
$(-\infty,a)$	$x < a$		Μείον άπειρο a ανοιχτό

5.

6. **απολυτη τιμη πραγματικου αριθμου** απόστασή του απο το 0.

$$|a| = \begin{cases} a \ , \ a \geq 0 \\ -a \ , \ a < 0 \end{cases}$$



Η απόσταση δύο αριθμών μεταξύ τους ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

$$|a-\beta| = d(a,\beta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ:
$\sqrt{x} = a$, όπου $x \geq 0$ και $a \geq 0$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

7. **ριζα ν-ταξησ πραγματικου αριθμου** $\sqrt[\nu]{x} = a$, όπου $x \geq 0$ και $a \geq 0$.

8. **Δυναμη με ρητό εκθετη** $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$, όπου $a > 0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$	$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
Επιμεριστική	$a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$	

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a\cdot 0=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

i. Τοποθετούμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

$$a=\beta\Rightarrow\begin{cases}a+\gamma=\beta+\gamma\\ a-\gamma=\beta-\gamma\end{cases}\quad\text{και}\quad\begin{matrix}a\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma\\ \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}\ ,\ \gamma\neq 0\end{matrix}$$

ii. Εαν δύο πραγματικοί αριθμοί $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές δυνάμεις τους, $\nu\in\mathbb{N}$, θα είναι ίσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

$$a=\beta\Rightarrow a^{\nu}=\beta^{\nu}$$

iii. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a,\beta>0$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu\in\mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a=\beta\Leftrightarrow\sqrt[\nu]{a}=\sqrt[\nu]{\beta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

$$a=\beta\ \text{ και }\ \gamma=\delta\Rightarrow\begin{cases}\textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a+\gamma=\beta+\delta\\ \textbf{2. Αφαίρεση κατά μέλη} & a-\gamma=\beta-\delta\\ \textbf{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a\cdot\gamma=\beta\cdot\delta\\ \textbf{4. Διαίρεση κατά μέλη} & \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}\ ,\ \gamma\cdot\delta\neq 0\end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

$$a+x=a+y\Rightarrow x=y\quad\text{και}\quad a\cdot x=a\cdot y\Rightarrow x=y$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$a\cdot\beta=0\Leftrightarrow a=0\ \textbf{ή}\ \beta=0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \textbf{ και } \beta \neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$
4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \ , \ \beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\nu \ , \ a, \beta \neq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

(α′) Αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow a > \gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα).

(β′) i. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$ τότε $a + \beta > 0$.
ii. Αν $a < 0$ και $\beta < 0$ τότε $a + \beta < 0$.

(γ′) Αν a, β ομόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta > 0$ και $\frac{a}{\beta} > 0$.

(δ′) Αν a, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta < 0$ και $\frac{a}{\beta} < 0$.

(ε′) Αν $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$ και $a - \gamma > \beta - \gamma$.

(στ′) i. Αν $\gamma > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
ii. Αν $\gamma < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

(ζ′) i. Αν a, β ομόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$
ii. Αν a, β ετερόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{\beta}$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

$$a > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \ , \ \text{ με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ

$$a^2 \geq 0 \ , \ a^{2\kappa} \geq 0 \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ

$$a^2 + \beta^2 \geq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Πρόσημο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert \geq 0$
2	Απόλυτη τιμή μηδενός	$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3	Όρια αριθμού	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$
4	Απόλυτη τιμή γινομένου	$\lvert a \cdot \beta\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert\beta\rvert$
5	Απόλυτη τιμή πηλίκου	$\left\lvert \frac{a}{\beta} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert\beta\rvert}$
6	Τετράγωνο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
7	Τριγωνική ανισότητα	$\lvert\lvert a - \beta\rvert\rvert \leq \lvert a \pm \beta\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert\beta\rvert$

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \ , \ x \geq 0$
2	Ν-οστή δύναμη ν-οστής ρίζας	$\left(\sqrt[\nu]{x}\right)^\nu = x \ , \ x \geq 0$
3	Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert \ , \ x \in \mathbb{R}$
4	Ν-οστή ρίζα ν-οστής δύναμης	$\sqrt[\nu]{x^\nu} = \begin{cases} \lvert x\rvert & x \in \mathbb{R} \text{ αν } \nu \text{ άρτιος} \\ x & x \geq 0 \text{ και } \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
5	Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \ , \ x, y \geq 0$ $\sqrt[\nu]{x \cdot y} = \sqrt[\nu]{x} \cdot \sqrt[\nu]{y} \ , \ x, y \geq 0$
6	Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \ , \ x \geq 0 \text{ και } y > 0$ $\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\sqrt[\nu]{y}} \ , \ x \geq 0 \text{ και } y > 0$

3 Εξισώσεις

1. **Εξίσωση** Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή
2. **εξισωση 1^{ου} βαθμου**
$$ax + \beta = 0$$
όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.
3. **Κλασματικη εξίσωση** $\dfrac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$ με $Q(x) \neq 0$.
4. **εξίσωση 2^{ου} βαθμού** $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$
5. **Διτετραγωνη εξισωση** $ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

(α′) Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.

(β′) Αν $a = 0$ και

i. $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.

ii. $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ
Οι βασικές μορφές των εξισώσεων με απόλυτες τιμές είναι οι ακόλουθες :

(α′) Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :

i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις : $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

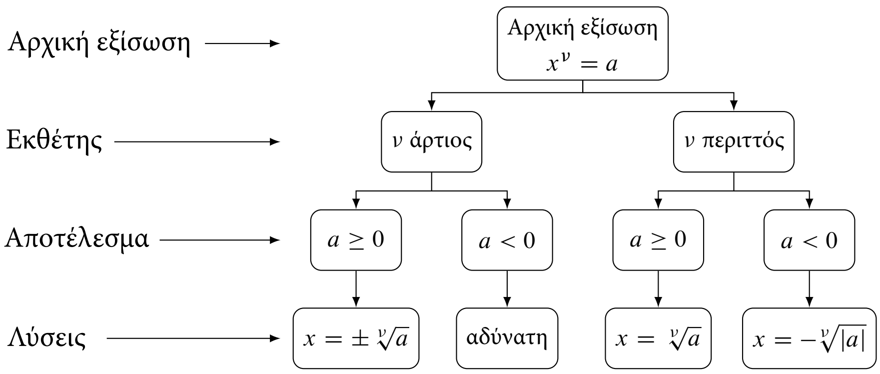
(β′) Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει : $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$

(γ′) Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :

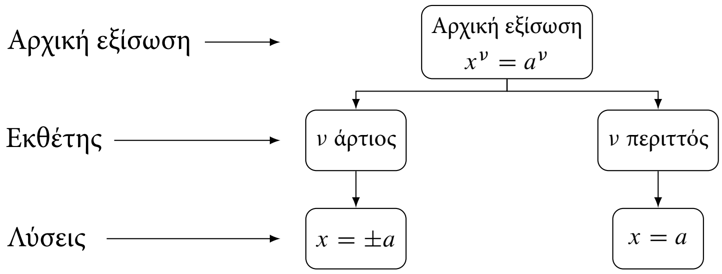
i. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x) \geq 0$.

ii. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$



ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a^\nu$



ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\varDelta > 0$	2 πραγματικές άνισες λύσεις	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2a}$
$\varDelta = 0$	1 διπλή πραγματική λύση	$x = -\dfrac{\beta}{2a}$
$\varDelta < 0$	Καμία πραγματική λύση - Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΤΥΠΟΙ VIETA

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΕΞΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε η εξίσωση 2^{ου} βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς αυτούς δίνεται από τον τύπο :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΕΙΔΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Εαν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι λύσεις της, S το άθροισμα και P το γινομενό τους τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το είδος των λύσεων της :

Δ	P	S	**Είδος λύσεων**	**Συμβολισμός**
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Δύο θετικές πραγματικές	$x_1 > x_2 > 0$
		$S < 0$	Δύο αρνητικές λύσεις	$x_1 < x_2 < 0$
		$S = 0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P < 0$	$S > 0$	Ετερόσημες (όχι αντίθετες)	$x_1 < 0 < x_2 \ , \ \lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$
		$S < 0$		$x_1 < 0 < x_2 \ , \ \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
		$S = 0$	Αντίθετες	$x_1 = -x_2$
	$P = 0$	$S > 0$	Μηδενική και θετική	$x_1 = 0 \ , \ x_2 > 0$
		$S < 0$	Μηδενική και αρνητική	$x_1 = 0 \ , \ x_2 < 0$
		$S = 0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P = 1$		Αντίστροφες	$x_1 = \frac{1}{x_2}$
$\Delta = 0$	$P > 0$	$S > 0$	Θετικές και ίσες	$x_1 = x_2 > 0$
		$S < 0$	Αρνητικές και ίσες	$x_1 = x_2 < 0$
	$P = 0$	$S = 0$	Μηδενικές	$x_1 = x_2 = 0$
$\Delta < 0$	Αδύνατη στο $\mathbb{R}$			

4 Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \ , \ P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών. **ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΝΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ**

$$ax + \beta > 0 \ , \ ax + \beta < 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΑΝΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \ . \ ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι λύσεις της ανίσωσης $ax+\beta>0$ (ή $ax+\beta<0$) φαίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $a>0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x>-\frac{\beta}{a}$ (ή $x<-\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
2. Αν $a<0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x<-\frac{\beta}{a}$ (ή $x>-\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
3. Αν $a=0$ τότε
   i. Αν $\beta>0$ τότε η ανίσωση $0x>\beta$ είναι αδύνατη ενώ η $0x<\beta$ είναι αόριστη.
   ii. Αν $\beta<0$ τότε η ανίσωση $0x>\beta$ είναι αόριστη ενώ η $0x<\beta$ είναι αδύνατη.
   iii. Αν $\beta=0$ τότε οι ανισώσεις $0x>0$ και $0x<0$ είναι αδύνατες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για τις ανισώσεις που περιέχουν παραστάσεις μέσα σε απόλυτες τιμές μελετάμε τις εξής μορφές. Έστω $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις και $\theta>0$ θετκός πραγματικός αριθμός.

1. Για τις ανισώσεις της μορφής $|x|<a$ οι λύσεις θα είναι : $-a<x<a$.
2. Για τις ανισώσεις της μορφής $|x|>a$ οι λύσεις θα είναι : $x>a$ ή $x<-a$.
3. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)|<\theta$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $-\theta<f(x)<\theta$.
4. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)|>\theta$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $f(x)>\theta$ και $f(x)<-\theta$.
5. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)|<g(x)$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $-g(x)<f(x)<g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x)\geq 0$.
6. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)|>g(x)$ οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $f(x)>g(x)$ και $f(x)<-g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

1. Αν $\Delta>0$ τότε $ax^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)(x-x_2)$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.
2. Αν $\Delta=0$ τότε $ax^2+\beta x+\gamma=a\left(x-x_0\right)^2=a\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2$ όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
3. Αν $\Delta<0$ τότε δεν παραγοντοποιείται

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

1. Αν η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta>0$) τότε το τριώνυμο είναι
   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται έξω από τις ρίζες x_1, x_2.
   ii. ετερόσημο του a στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες.
   iii. ίσο με το μηδέν στις ρίζες.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta=0$) τότε το τριώνυμο είναι
   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της ρίζας x_0.

ii. ίσο με το μηδέν στη ρίζα.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του a	

5 Πρόοδοι
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ όπου κάθε φυσικός αριθμός $\nu \in \mathbb{N}^*$, εκτός του μηδενός, αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό αριθμό $a(\nu) \in \mathbb{R}$ ή πιο απλά a_ν.

- Η ακολουθία των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται (a_ν).
- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας.
- Ο όρος a_ν ονομάζεται **ν-οστός** ή **γενικός** όρος της ακολουθίας.
- Οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να δίνονται είτε από
  - έναν **γενικό τύπο** της μορφής $a_\nu = f(\nu)$, όπου δίνεται κατευθείαν ο γενικός όρος της
  - είτε από **αναδρομικό τύπο** όπου κάθε όρος δίνεται με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων προηγούμενων όρων. Θα είναι της μορφής

    $$a_{\nu+i} = f(a_{\nu+i-1}, \ldots, a_{\nu+1}, a_\nu) \quad , \quad a_1, a_2, \ldots, a_i \text{ γνωστοί όροι.}$$

    Στον αναδρομικό τύπο, ο αριθμός $i \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των προηγούμενων όρων από τους οποίους εξαρτάται ο όρος $a_{\nu+i}$. Είναι επίσης αναγκαίο να γνωρίζουμε τις τιμές των i πρώτων όρων της προκειμένου να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους.
- Μια ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι ονομάζεται **σταθερή**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο, προσθέτοντας κάθε φορά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ισχύει δηλαδή

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$$

Ο αριθμός $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και είναι σταθερός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Αριθμητικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο έχουμε

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{a+\gamma}{2}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία $(a_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον προηγούμενο όρο με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Θα ισχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Γεωμετρικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \beta = \frac{a+\gamma}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

	Αριθμιτική Πρόοδος	**Γεωμετρική Πρόοδος**
Όροι	$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$	$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$
Διαφορά / Λόγος	$\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$	$\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$
Μέσος	$2\beta = a + \gamma$ ή $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$	$\beta^2 = a \cdot \gamma$
Γενικός Όρος	$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$	$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

6 Συναρτήσεις
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.

- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$.
- Ο κανόνας της συνάρτησης, με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχηση από το x στο $f(x)$, εκφράζεται συμβολικά με την ισότητα $y = f(x)$ που περιέχει τις δύο μεταβλητές και ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται D_f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in D_f$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\left(D_f\right)$ και ισχύει $f\left(D_f\right) \subseteq B$.
- Οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος δίνεται από δύο ή περισσότερες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται συναρτήσεις **πολλαπλού τύπου**.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in D_{f_1} \subseteq D_f \\ f_2(x) & \text{αν } x \in D_{f_2} \subseteq D_f \\ \vdots & \quad\vdots \\ f_\nu(x) & \text{αν } x \in D_{f_\nu} \subseteq D_f \end{cases}$$

όπου $D_{f_1}, D_{f_2}, \ldots, D_{f_\nu}$ είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού ολόκληρης της συνάρτησης f με $D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \ldots \cup D_{f_\nu} = D_f$ και $D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \ldots \cap D_{f_\nu} = \varnothing$.

Είδος	Τύπος	Πεδίο Ορισμού
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_0$	$D_f = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$

Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνιμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις :

Ταυτοτική	**Σταθερή**	**Μηδενική**
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

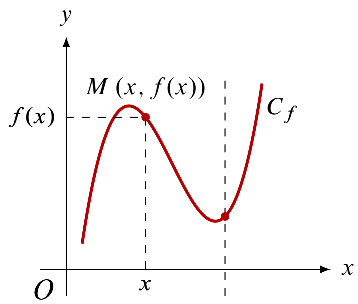
ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A \quad , \quad y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράσταστασης είναι της μορφής $(x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ
Συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ του συστήματος συντεταγμένων.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

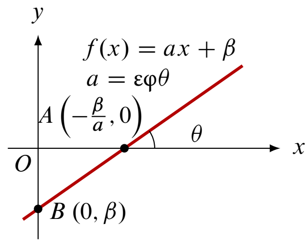
i. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη ίση με το 0. Οι τετμημένες των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης :
$$f(x) = 0$$
ii. Το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη ίση με το 0. Θα είναι της μορφής $M(0, f(0))$.
iii. Στα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g ισχύει $f(x) = g(x)$. Οι τετμημένες x_0 των σημείων αυτών είναι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ενώ ισχύει $x_0 \in D_f \cap D_g$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν θετική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :
$$f(x) > 0$$
ii. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν αρνητική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :
$$f(x) < 0$$
iii. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης
$$f(x) > g(x) \ , \ \ x \in D_f \cap D_g$$
iv. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης
$$f(x) < g(x) \ , \ \ x \in D_f \cap D_g$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$

Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 1ου βαθμού της μορφής $f(x) = ax + \beta$ με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.



i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.
ii. Ο συντελεστής a ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$a = \text{εφ}\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

iii. Αν $a \neq 0$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a = 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή $f(x) = \beta$ οπότε έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $f\left(D_f\right) = \{\beta\}$.
iv. Αν $a \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$, ενώ αν $a = 0$ η ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα.
v. Αν $\beta = 0$ τότε η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ax$ με την ευθεία της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
vi. Αν $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα την $x = -\frac{\beta}{a}$, αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ δεν έχει ρίζες, ενώ αν $a = 0$ και $\beta = 0$ έχει άπειρες ρίζες.
vii. Αν $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{a}, 0\right)$ και τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $B\left(-\frac{\beta}{a}, 0\right)$.
viii. Αν $a > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.