ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

29 Φεβρουαρίου 2016

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΩΝΥΜΟ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Τριώνυμο 2^{ου} βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού με τρεις όρους το οποίο είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΝΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 2^{ου} βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση η οποία περιέχει τριώνυμο 2^{ου} βαθμού και είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \ \text{ ή } \ ax^2 + \beta x + \gamma < 0 \ \text{ με } \ a \neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για τη μετατροπή ενός τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\,(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$$

όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Εναλλακτικά όμως μπορεί να γραφεί :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για το πρόσημο των τιμών ενός τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ ισχύουν οι παρακάτω κανόνες.

1. Αν η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο είναι

i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται έξω από τις ρίζες x_1, x_2.
ii. ετερόσημο του a στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες.
iii. ίσο με το μηδέν στις ρίζες.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του a	0	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a	

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο είναι

i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της ρίζας x_0.
ii. ίσο με το μηδέν στη ρίζα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του a	0	ομόσημο του a	

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του a	

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για να παραγοντοποιηθεί ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$:

***1ο Βήμα :* Υπολογισμός διακρίνουσας**
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

***2ο Βήμα :* Πρόσημο τριωνύμου**
Ανάλογα το πρόσημο της παραγοντοποιούμε ακολουθώντας τον κανόνα στο **Θεώρημα 1**.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για την εύρεση του προσήμου των τιμών ενός τριωνύμου για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής :

***1ο Βήμα :* Υπολογισμός διακρίνουσας**
Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του.

***2ο Βήμα :* Ρίζες τριωνύμου**
Υπολογίζουμε τις ρίζες του τριωνύμου δηλαδή τις τιμές για τις οποίες μηδενίζεται.

***3ο Βήμα :* Πίνακας προσήμων**
Κατασκευάζουμε και συμπληρώνουμε τον κατάλληλο πίνακα προσήμων ανάλογα το πρόσημο της διακρίνουσας ακολουθόντας τον κανόνα στο **Θεώρημα 2**. Στον άξονα των τιμών της μεταβλητής x τοποθετούμε τις ρίζες σε αύξουσα σειρά.

4º Βήμα : **Πρόσημο τριωνύμου**
Δίνουμε απάντηση για κάθε πρόσημο του τριωνύμου αναφέροντας και το διάστημα των τιμών του x για το οποίο προκύπτει.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Για να λυθεί μια ανίσωση 2ου βαθμού

1º Βήμα : **Σχηματισμός τριωνύμου**
Αν η ανίσωση δεν είναι της μορφής του **Ορισμού 1**, εκτελούμε κατάλληλες πράξεις ώστε να τη μετασχηματίσουμε στη μορφή αυτή.

2º Βήμα : **Διακρίνουσα - Πίνακας προσήμων**
Ακολουθούμε τα βήματα 1, 2 και 3 της **Μεθόδου 2** για την εύρεση προσήμου.

3º Βήμα : **Λύση ανίσωσης**
Απαντάμε γράφοντας τις λύσεις της ανίσωσης για τις οποίες προκύπτει μόνο το πρόσημο που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το πρόσημο που μας υποδεικνύει η ανίσωση.