

Πολυωνυμικές εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Επίλυση εξισώσεων

1. Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις.

α. $x^3 + 2x^2 = 0$

β. $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$

γ. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

δ. $x^3 + 3x = 2x^2 + 6$

ε. $x^3 - 8 = 0$

2. Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις.

α. $x^4 - 9x^2 = 0$

β. $x^4 + 3x^3 - 10x^2 = 0$

γ. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 = 10x$

δ. $x^5 + 4x^4 - 12x^3 = 0$

3. Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις.

α. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

β. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

γ. $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

δ. $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$

ε. $x^3 - 7x + 6 = 0$

στ. $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

■ Επίλυση ανισώσεων

4. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. $(x - 1)(x^2 - 9) > 0$

β. $(x + 3)(x^2 - 4x - 12) \leq 0$

γ. $(x + 2)(5 - x)(x^2 - 6x - 7) > 0$

δ. $(x - 2)(x + 1)(x^2 - 7x + 12) \geq 0$

ε. $(x^2 + x - 2)(x^2 - 4x + 4) < 0$

στ. $(x^3 + x)(4 - x^2) \leq 0$

5. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 > 0$

β. $x^3 + 2x^2 - 8x < 0$

γ. $x^3 - 7x + 6 \geq 0$

δ. $2x^3 - x^2 - 5x - 2 \leq 0$

6. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0$

β. $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 < 0$

γ. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \leq 0$

δ. $2x^3 - 5x^2 + 4x + 21 \geq 0$

ε. $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 < 0$

στ. $x^3 - 3x^2 - 2x - 8 \leq 0$

7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. x^4

■ Παραμετρικές

8. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + ax^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό -1 με πολλαπλότητα 3 (τριπλή λύση).

α. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, β, γ .

β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

9. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + ax - 2$ έχει παράγοντα το $x - 2$, ενώ αν διαιρεθεί με το $x - 3$ αφήνει υπόλοιπο 4.

α. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a .

β. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 5x + 6$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 18$.

δ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)^2 - P(x) \geq 0$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + \beta x + 4$$

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a και β και το πολυώνυμο $Q(x)$ ώστε $Q^2(x) = P(x)$.

11. Αν τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^2 + (a - 1)x - \beta - 5 \quad \text{και}$$

$$Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (a - 6)x - 4$$

έχουν κοινή ρίζα το $x = 2$, να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, β .

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^4 - 4x^3 + \beta x + 2$$

το οποίο αν διαιρεθεί με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -6 ενώ το $x + 1$ είναι παράγοντας του.

- α. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, β .
- β. Να αποδειχτεί ότι το $2x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
- δ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1$$

το οποίο έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

- α. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, β .
- β. Να βρεθούν όλες οι ρίζες του $P(x)$.
- γ. Να γραφτεί το $P(x)$ ως γινόμενο παραγόντων.

14. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 - 2x^2 - 5x + \beta$$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ είναι -4 και το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ τότε

- α. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = 6$.
- β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
- γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$.