

📅 Ημερομηνία:

1 Σύνολα

Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖

1. Σύνολο
2. Τρόποι παράστασης συνόλου
3. Βασικό σύνολο
4. Κενό σύνολο
5. Διάγραμμα Venn
6. Ίσα σύνολα
7. Υποσύνολο
8. Πράξεις συνόλων

Θεωρήματα - Ιδιότητες ✂

1. Ιδιότητες υποσυνόλου
2. Ιδιότητες ένωσης
3. Ιδιότητες τομής
4. Ιδιότητες συμπληρώματος
5. Ιδιότητες διαφοράς συνόλων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω ✎

☐ Μετατροπή αναγραφής σε περιγραφή.☒ ⚠ ☐ Πράξεις μεταξύ συνόλων

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📄

1. Ανήκει: \in
2. Δεν ανήκει: \notin
3. Φυσικοί αριθμοί: \mathbb{N}
4. Ακέραιοι αριθμοί: \mathbb{Z}
5. Ρητοί αριθμοί: \mathbb{Q}
6. Πραγματικοί αριθμοί: \mathbb{R}
7. Κενό σύνολο: \emptyset
8. Βασικό σύνολο: Ω

9. Υποσύνολο: \subseteq
10. Ένωση:
 $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ και } x \in B\}$
11. Τομή:
 $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ και } x \in B\}$
12. Συμπλήρωμα:
 $A' = \{x \in \Omega : x \notin A\}$
13. Διαφορά:
 $A - B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ και } x \notin B\}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Σύνολο

Σύνολο ονομάζεται μια συλλογή όμοιων αντικειμένων, που είναι καλά ορισμένα και διακριτά μεταξύ τους.

- Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **στοιχεία**.
- Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.
- Πια να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x **ανήκει** σε ένα σύνολο A γράφουμε $x \in A$. Ενώ αν το x **δεν ανήκει** στο σύνολο A γράφουμε $x \notin A$.

1.2 Βασικό σύνολο

Βασικό ονομάζεται το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία στο χώρο στον οποίο εργαζόμαστε. Συμβολίζεται με Ω .

1.3 Κενό σύνολο

Κενό ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$.

1.4 Τρόποι παράστασης συνόλου

Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο είναι οι εξής:

1. Αναγραφή

Γράφουμε τα στοιχεία ενός συνόλου μέσα σε άγκιστρα: $\{ \}$ όπου κάθε στοιχείο αναγράφεται μια φορά.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

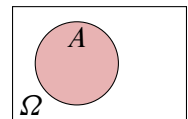
Τα στοιχεία του συνόλου χωρίζονται με κόμμα (,).

2. Περιγραφή

Γράφουμε που ανήκουν τα στοιχεία και ποια ιδιότητα έχουν. Έχει τη μορφή: $A = \{x \in \Omega \mid \text{Ιδιότητα } I\}$.

3. Διάγραμμα Venn

Σχεδιάζουμε με ορθογώνιο το βασικό σύνολο και με κύκλους τα υποσύνολά του.



1.5 Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα A, B ονομάζονται αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Συμβολίζεται $A = B$. Ισοδύναμα, τα σύνολα, λέγονται ίσα εάν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις :

1. Κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B
2. Κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A .

1.6 Υποσύνολο

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Συμβολίζεται $A \subseteq B$.

1.7 Ξένα σύνολα

Δύο σύνολα A, B ονομάζονται ξένα μεταξύ τους αν δεν έχουν κοινά στοιχεία.

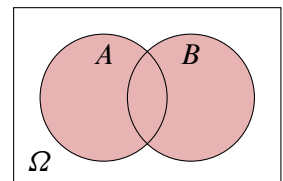
1.8 Πράξεις μεταξύ συνόλων

1. Ένωση

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε **τουλάχιστον ένα** από τα σύνολα A και B . Συμβολίζεται με $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Η ένωση των συνόλων A και B περιέχει **όλα** τα στοιχεία των δύο συνόλων. Τα κοινά στοιχεία αναγράφονται μια φορά.

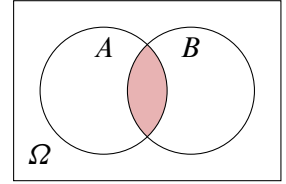


2. Τομή

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν **και στα δύο** σύνολα A και B . Συμβολίζεται με $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

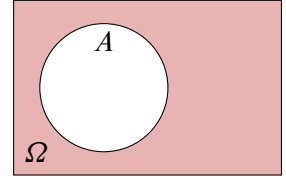
Η τομή των συνόλων A και B περιέχει μόνο τα **κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων.



3. Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία **δεν** ανήκουν στο A . Συμβολίζεται με A' .

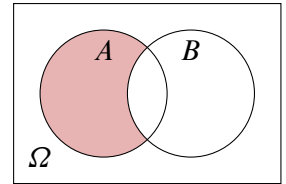
$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$



4. Διαφορά

Διαφορά ενός συνόλου B από ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία ανήκουν **μόνο** στο σύνολο A , το πρώτο σύνολο της διαφοράς. Συμβολίζεται με $A - B$.

$$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1.1 Ιδιότητες υποσυνόλου

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν τη σχέση του υποσυνόλου:

- i. $A \subseteq A$.
- ii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$.
- iii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

1.2 Ιδιότητες ένωσης συνόλων

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη της ένωσης.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> i. $A \cup \emptyset = A$ ii. $A \cup A = A$ iii. $A \cup B = B \cup A$ | <ul style="list-style-type: none"> iv. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ v. $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ vi. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$ |
|--|--|

1.3 Ιδιότητες τομής συνόλων

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη της τομής.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> i. $A \cap \emptyset = \emptyset$ ii. $A \cap A = A$ iii. $A \cap B = B \cap A$ iv. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ | <ul style="list-style-type: none"> v. $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$ vi. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$ vii. Αν $A \cap B = \emptyset$ τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους. |
|--|--|

1.4 Επιμεριστική ιδιότητα ως προς ένωση και τομή

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν οι σχέσεις

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

1.5 Ιδιότητες συμπληρώματος

Για οποιοδήποτε σύνολο $A \subseteq \Omega$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη του συμπληρώματος.

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| i. $\Omega' = \emptyset$ | iv. $A \cup A' = \Omega$ |
| ii. $\emptyset' = \Omega$ | v. $(A')' = A$ |
| iii. $A \cap A' = \emptyset$ | |

1.6 Ιδιότητες διαφοράς

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη της διαφοράς.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| i. $A - B = A \cap B'$ | iii. $A - B \subseteq A$ |
| ii. $B - A = B \cap A'$ | iv. $B - A \subseteq B$ |

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1.1 Τα σύμβολα ανήκει \in και δεν ανήκει \notin

Θέλουμε να εξετάσουμε αν ένας αριθμός x ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο A .

- Εκτελούμε αρχικά τυχόν πράξεις.
- Αν το σύνολο είναι γραμμένο με αναγραφή, εξετάζουμε αν ο x είναι ένα από τα στοιχεία του A .
- Αν το σύνολο είναι γραμμένο με περιγραφή, εξετάζουμε αν ο x ικανοποιεί την ιδιότητα που ζητάει το σύνολο.

1.2 Μετατροπή μεταξύ αναγραφής περιγραφής και διαγράμματος Venn

- i. Αναγραφή \leftrightarrow Περιγραφή
1^ο Βήμα :