Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

29 Ιανουαρίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διανύσματα

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

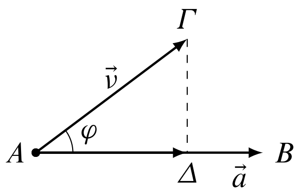
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ ο οποίος ισούται με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν.

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi$$

- Η γωνία φ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})$.
- Αν $\vec{a}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
Προβολή ενός διανύσματος $\vec{v}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται το διάνυσμα το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο ίσο με την προβολή του ευθύγραμμου τμήματος $|\vec{v}|$ πάνω στο φορέα του $\vec{a}$. Συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{a}}\vec{v}$.



$$\overrightarrow{A\Delta} = \pi\rho o\beta_{\vec{a}}\vec{v}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ
Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ και πραγματικό αριθμό $\mu\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για την πράξη του εσωτερικού γινομένου.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Κάθετα διανύσματα	Αν $\vec{a}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta}=0$ και $\lambda_{\vec{a}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

Ομόρροπα διανύσματα	Αν $\vec{a} \upuparrows \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
Αντίρροπα διανύσματα	Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$
Αντιμεταθετική	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu\vec{\beta}) \cdot \vec{a}$
Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισούται με το άθροισμα του γινομένου των τετμημένων με το γινόμενο των τεταγμένων των διανυσμάτων.

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισούται με το πηλίκο του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων προς το γινόμενο των μέτρων τους.

$$\text{συν}(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ενός διανύσματος επί την προβολή του δεύτερου διανύσματος πάνω στο πρώτο.

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$$