

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή	Σελίδα 1
1.1 Βασικές έννοιες	1
1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων	1

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1 ^{ης} τάξης	Σελίδα 7
2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών	7
2.2 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	7
2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	7
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	8
2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti	9
2.6 Περιοδικές εξισώσεις	10
2.7 Ιδιάζουσες λύσεις	10
2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγή	11
Εξίσωση D' Alambert — 11 • Εξίσωση Lagrange — 12 • Εξίσωση Clairaut — 12 • Νόμοι Kepler — 12	
2.9 Αντικατάσταση	12

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2 ^{ης} τάξης	Σελίδα 13
3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	13
3.2 Εξίσωση Euler	13
3.3 Υποβιβασμός τάξης	13
3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη	13
3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	13
3.6 Ομογενείς εξισώσεις	13
3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm	13
3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις	13
3.9 Μέθοδος Lagrange	13
3.10 Δυναμοσειρές	13

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	Σελίδα 15
4.1 Ομογενείς εξισώσεις	16
4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski	16
4.3 Βασικά σύνολα λύσεων	16
4.4 Υποβιβασμός τάξης	16
4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις	16
4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών	16
4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	16

4.8	Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές	16
4.9	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς	16
4.10	Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών	16
4.11	Μετασχηματισμός $Y' = gY$	16
4.12	Δυναμοσειρές	16
	Taylor — 16 • Mc Laurin — 16 • Frobenius — 16 • Fuchs — 16	
4.13	Ειδικές συναρτήσεις	16
4.14	Μέθοδος μεταβολής σταθερών	16
4.15	Μέθοδος διαφορικών τελεστών	16
4.16	Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών	16
4.17	Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών	16
4.18	Sturm - Liouville	16

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Σελίδα 17

5.1	Ομογενή γραμμικά συστήματα	18
5.2	Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi	18
5.3	Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων	18
5.4	Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων	18
5.5	Υποβιβασμός τάξης	18
5.6	Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις	18
5.7	Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές	18
5.8	Μέθοδος απαλοιφής	18
5.9	Ευστάθεια συστημάτων	18
5.10	Μέθοδος πινάκων	18
5.11	Πρώτα ολοκληρώματα	18
5.12	Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων	18
5.13	Διαφορικοί τελεστές	18
5.14	Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης	18
5.15	Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων	18
5.16	Μέθοδος τελεστή εξέλιξης	18

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες

...

Σε μια διαφορική εξίσωση ο σκοπός είναι η εύρεση μιας άγνωστης συνάρτησης y , μίας ή περισσότερων μεταβλητών.

Ορισμός 1.1 : Διαφορική εξίσωση

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y . Διαφορική ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους αυτής.

1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Οι μεν **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x καθώς και παραγώγους αυτής. Η **γενική** ή **πεπλεγμένη** μορφή της είναι

$$F(x, y, y', \dots, y^{(v)}) = 0 \quad (1.1)$$

όπου $y^{(v)} = \frac{d^v y}{dx^v}$ η συνήθης παράγωγος v -οστής τάξης. Αν η δομή της εξίσωσης είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει να γραφτεί η παράγωγος μέγιστης τάξης συναρτήσει των υπολοίπων παραγώγων και της συνάρτησης y τότε έχουμε τη λεγόμενη **λυμένη** ή **άμεση** μορφή:

$$y^{(v)} = f(x, y, y', \dots, y^{(v-1)})$$

Οι δε **μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση u πολλών μεταβλητών καθώς και μερικές παραγώγους αυτής. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - \sin xy' + xy = e^x$$

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ η

$$u_{xx} - cu_y + u_{yy} = 0$$

αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση, όπου $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ και $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u(x, y)$. Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους.

► **Παράδειγμα 1.1 :** Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων
Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ως συνήθεις ή μερικές.

$$\alpha. y' + 2y = x$$

$$\delta. y' = 3y - x^2$$

$$\beta. yy' = e^x$$

$$\epsilon. u_{xx} = c^2 u_t$$

$$\gamma. u_x + u_y = 0$$

$$\sigma\tau. (x + 1) dx + \cos y dy = 0$$

✓ ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τις βασικές έννοιες που δώσαμε προηγουμένως, οι εξισώσεις α., β., δ. και στ. είναι ΣΔΕ, με την στ. να περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης y στη διαφορική μορφή της, ενώ οι γ. και ε. είναι ΜΔΕ. Για κάθε είδος εξίσωσης θα μας απασχολήσουν επίσης έννοιες όπως η **τάξη** και ο **βαθμός** μιας διαφορικής εξίσωσης. Στο εξής οι έννοιες και οι ορισμοί που θα δώσουμε θα αφορούν αποκλειστικά τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παρατήρηση

Για μια διαφορική εξίσωση ορίζεται βαθμός εφόσον οι όροι της μπορούν να γραφτούν σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση y .

Ορισμός 1.2 : Τάξη και βαθμός Δ.Ε.

- Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που περιέχεται στην εξίσωση.
- Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ο εκθέτης της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Πριν δούμε παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές, θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ως προς τη δομή τους. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_v(x)y^{(v)} + a_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, v$ και $\beta(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ του \mathbb{R} . Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται **μη γραμμική**. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη σειρά τους ταξινομούνται περαιτέρω σε επιμέρους κατηγορίες ως προς τη σχέση της συνάρτησης y και των παραγώγους της. Μία μη γραμμική ΣΔΕ ονομάζεται

- **ημιγραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τη συνάρτηση y και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.
- **σχεδόν γραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τις $y, y', \dots, y^{(v-1)}$ και γραμμική ως προς την παράγωγο $y^{(v)}$ μεγαλύτερης τάξης.
- **πλήρως μη γραμμική** εάν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο $y^{(v)}$ μεγαλύτερης τάξης.

► **Παράδειγμα 1.2 :** Ταξινόμηση τάξη και βαθμός ΣΔΕ

Ταξινομήστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές ή μη γραμμικές, καθώς και το είδος αυτών και βρείτε την τάξη και το βαθμό της καθεμίας, όπου αυτός ορίζεται.

$$\alpha. y'' - x^2 y' + xy = 0$$

$$\sigma\tau. y''' = x^2 y'' - y$$

$$\beta. y''' + 2y'' - 3y' + y = x$$

$$\zeta. y' = \sin y$$

$$\gamma. yy' = \sin x$$

$$\eta. (y''')^2 - 3yy'' + xy = 0$$

$$\delta. (y')^2 + 2y = e^x$$

$$\theta. y''' + (y'')^3 - xy^2 y' = \ln x$$

$$\epsilon. y^{(4)} = y^2$$

$$\iota. x^3 dy + y dx = 0$$

✓ ΛΥΣΗ

Ορισμός 1.3 : Λύση διαφορικής εξίσωσης

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης της μορφής (1.1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $y \in C^v(\Delta)$ που επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in \Delta$.

Η γραφική παράσταση μιας λύσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**. Όταν η λύση εκφράζεται με την βοήθεια v σε πλήθος παραμέτρων $c_i, i = 1, 2, \dots, v$ στη μορφή

$$y = y(x, c_1, \dots, c_v)$$

τότε έχουμε τη λεγόμενη **γενική λύση** ή **γενικό ολοκλήρωμα** της εξίσωσης. Συγκεκριμένα στη μορφή αυτή, η λύση είναι μια σχέση λυμένη ως προς τη συνάρτηση y η οποία γράφεται ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και των παραμέτρων. Σε περιπτώσεις που η σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να λυθεί ως προς y , έχουμε την **πεπλεγμένη γενική λύση** ή **πεπλεγμένο γενικό ολοκλήρωμα** στη μορφή

$$G(x, y, c_1, \dots, c_v) = 0.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = -y$, δοσμένη στην απλή (λυμένη) μορφή. Από την άλλη μεριά, η σχέση $y^3 + y = \cos x$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση $y'(3y^2 + 1) = -\sin x$ το οποίο επαληθεύεται εύκολα παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση. Αν επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους c_i τότε από τη γενική λύση παίρνουμε μια **ειδική** ή **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Υπάρχουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση για καμία τιμή των παραμέτρων c_i . Αυτές ονομάζονται **ιδιόζουσες λύσεις** της εξίσωσης. Συγκεντρώνοντας όλες τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης, παίρνουμε την **πλήρη λύση** της.

► **Παράδειγμα 1.3 :** Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Χρησιμοποιώντας τις βασικές γνώσεις πάνω στις παραγώγους γνωστών συναρτήσεων, να προσδιορίσετε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων...

✓ ΛΥΣΗ

Θεώρημα 1.1 : Σύγκριση αριθμών

Ένας αριθμός a λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό β όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεσεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ύραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμφ εγετ, ζονσεσεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυναδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυναδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ύραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριςυ ορσι εγετ ριςυς.

⚠ Προσοχή

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγет ορσι σит αμεт ορси διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλισιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαζυς λιβερο, πρετιυμ αт, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ριες ет, τελλυς. Δονες αλιχует, тортор сеδ аςζυμσαν βιβενδυμ, ерат λιγυλα
 αλιχует μαγνα, ιταе ορναρε οδιο μεтυς α μι. Μορβι аς ορси ет νισλ ηενδρεριт
 моллис. Συσπενδισσε υт μασσα. “ρας νες αντε. Πελλεντεσχυе α νυλλα. ѱм
 σοσις νατοχυе πενατιβυς ет μαγνις δις παρτυριент монтеς, νασεetur ριδι-
 ζυλυς μυς. Αλιχυαμ тινсидунт урна. Нуλλα уллаμζορπερ естибулым τυрпис.
 Πελλεντεсχυе ζυρсуς λυςтυς μαυρις.

Нуλλα μαλεсуада πορτтитор διαμ. Δονες фелиς ерат, ζονγυе νон, олуτпат
 ат, тинсидунт тριστιхуе, λιβερο. Ίαμυς ιερра ферμενтυм фелиς. Δονες нонуμψ
 пеλλентесхуе анте. Πηασελλυς адиписинγ сеμπερ елит. Προин ферμεнтυм
 масса аς χυαμ. Сеδ διαм τυрпис, молеостие ιταе, плаσεрат α, молеостие νες, лео.
 Маεξenas λасинια. Ναμ ιψυμ λιγυла, ελειφенд ат, аςζυμσαν νες, суsσιпит
 α, ιψυμ. Μορβι βλανдит λιγυла φευγιαт μαγνα. Нуνς ελειφенд ζонсехуат
 λορεμ. Сеδ λасинια нулла ιтае еним. Πελλентесхуе тинсидунт πυρυς ел μαγνα.
 Ιντεγερ νон еним. Праесент ευισμοδ нυς ευ πυρυς. Δονες βιβенδυμ χυαμ ιν
 τελλυς. Нуλλαμ ζυρсуς πυλιναρ лезтυς. Δονες ет μι. Ναμ υλпутате μεтυς ευ
 еним. Ξοτιбулым пеλλентесхуе фелиς ευ μασσα.

Χυισхуе уллаμζορπερ плаσεрат ιψυμ. “ρας νιβη. Μορβι ел θυστο ιтае λαζυς
 тинсидунт υλтрицес. Λορεμ ιψυμ долор сит αμεт, ζонсеsтетυер адиписинγ елит.
 Ιν ηας ηαβιταsσε πλαtea διςтυμsт. Ιντεγερ теμпуς ζонаλλиς αυγυе. Еτιαμ
 φасилисис. Нуνς елеμενтυм ферμεнтυм ωισι. Αενεαν плаσεрат. Υт ιμπεрдιет,
 еним сеδ γραιδα σολλισιτυδιν, фелиς οδιο плаσεрат χυαμ, аς πυλιναρ елит πυρυς
 еγет еним. Нунς ιтае тортор. Προин теμпуς νιβη сит αμεт νисл. Ίαμυς χυиς
 тортор ιтае ρисυς ποрта еηиζυла.

Φυsσε μαυρις. Ξοτιбулым λυςтυς νιβη ат лезтυς. Сеδ βιβенδυμ, нулла α
 φαυσιβυς сеμπερ, лео елит υλтрициес τελλυς, аς еνενατις аρсу ωισι ел νисл.
 Ξοτιбулым διαμ. Αλιχυαμ пеλλентесхуе, αυγυе χυиς саγιτтиς ποсуеρε, τυрпис
 λαζυς ζонгυе χυаμ, ιν ηендρεριт ρисυς еρος еγет фелиς. Маεξenas еγет ерат
 ιν сапиен ματтиς πορттитор. Ξοτιбулым πορттитор. Нулла φасилиси. Сеδ
 α τυрпис ευ λαζυς ζομμοδο φасилисис. Μορβι φρινγίλλα, ωισι ιν διγνισσιμ
 ιντερδυμ, θυστο лезтυς саγιτтиς δυι, ет еηиζυла λιβερο δυι ζυρсуς δυι. Μαυρις
 теμπορ λιγυла сеδ λαζυς. Δυиς ζυρсуς еним υт αυγυе. “ρας аς μαγνα. “ρας
 нулла. Нулла еγестас. ѱраβιтуρ α лео. Χυισхуе еγестас ωισι еγет нυнς. Ναμ
 φευγιαт λαζυς ел еsт. ѱραβιтуρ ζонсеsтетυер.

Сυsπενдисσε ел фелиς. Υт λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, тинсидунт сит αμεт,
 лаορεет ιтае, аρсу. Αενεαν φαυσιβυς πεде ευ анте. Праесент еним елит,
 ρυтρυμ ат, молеостие νон, нонуμψ ел, νисл. Υт лезтυς еρος, μαλεсуада сит
 αμεт, ферμεнтυм ευ, σοδαλες ζυρсуς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυисхуе еηиζυла,
 урна сеδ υλтрициес αυστορ, πεде λορεμ еγестас δυι, ет ζонаλλиς елит ерат сеδ
 нулла. Δονες λυςтυς. ѱраβιтуρ ет нυнς. Αλιχυаμ долор οδιο, ζομμοδο πρετιυμ,
 υλтрициес νон, пηαρεтра ιν, елит. Ιντεγερ аρсу еsт, нонуμψ ιν, ферμεнтυм
 φαυσιбυς, еγестас ел, οδιο.

Сеδ ζομμοδο ποсуеρε πεде. Μαυρις υт еsт. Υт χυиς πυρυς. Сеδ аς οδιο. Сеδ
 еηиζυла ηендρεριт сеμ. Δυиς νон οδιο. Μορβι υт δυι. Сеδ аςζυμσαν ρисυς еγет
 οδιο. Ιν ηας ηαβιταsσε πλαtea διςтυμsт. Πελλентесхуе νон елит. Φυsσε сеδ
 θυστο ευ урна ποрта тинсидунт. Μαυρις фелиς οδιο, σολλισιτυδιν сеδ, олутпат
 α, ορναρε аς, ерат. Μορβι χυиς долор. Δονες пеλλентесхуе, ерат аς саγιτтиς
 сеμπερ, нυнς δυι λοβορτις πυρυς, χυиς ζонгυе πυρυς μεтυς υλтрициес τελλυς.

Προιν ετ χυαμ. "λας απτεντ ταςιτι σοσισχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια νοστρα, περ ινζεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυσιβυς, ηιςυλα ευ, λαςυς. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζε-
 τυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρζυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζε-
 τυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλε-
 ντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεζτυς ετ νετυς ετ μαλεσουαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεζτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορ-
 τορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσουαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισιμ ρυτρυμ.
 Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, ναςζετυρ ριδι-
 ζυλυς μυς. Αλιχυαμ τινζιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυζτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσουαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ζονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινζιδυντ τριστιχυε, λιβερο. Ίαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλασερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεζενας λασινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςζυμσαν νες, συςσιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ζονσεχυατ λορεμ. Σεδ λασινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινζιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ζυρσυς πυλιναρ λεζτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. Ξοστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμζορπερ πλασερατ ιπσυμ. "ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινζιδυντ υλτριζες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζε-
 τυερ αδιπισινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ζοναλλις αυγυε. Ετιαμ φασιλισις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλασερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλασερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. Ίαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα ηιςυλα.

Φυσζε μαυρις. Ξοστιβυλυμ λυζτυς νιβη ατ λεζτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυσιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριζιες τελλυς, ας ενενατις αρζυ ωισι ελ νισλ. Ξοστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαςυς ζονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεζενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. Ξοστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φασιλισι. Σεδ α τυρπις ευ λαςυς ζομμοδο φασιλισις. Μορβι φρινγίλλα, ωισι ιν διγνισιμ ιντερδυμ, θυστο λεζτυς σαγιττις δυι, ετ ηιςυλα λιβερο δυι ζυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ζυρσυς ενιμ υτ αυγυε. "ρας ας μαγνα. "ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ΰραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. ΰραβιτυρ ζονσεζε-
 τυερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινζιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρζυ. Αενεαν φαυσιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ,

ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμψ ελ, νισλ. Υτ λεςτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες κυρσους, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εηισυλα, υρνα σεδ υλτρισιες αυςτορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ζοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυςτυς. ΰραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχναμ δολορ οδιο, ζομμοδο πρετιυμ, υλτρισιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρσυ εστ, νονυμψ ιν, φερμεντυμ φαυσιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ζομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηισυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςζυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσσε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινσιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ζονγυε πυρυς μετυς υλτρισιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. "λας αςπτεντ τασιτι σοσιοςχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια νοστρα, περ ινζεπτως ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυσιβυς, εηισυλα ευ, λαςυς.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ταξινομήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε συνήθεις και μερικές.

1.2 Χαρακτηρίστε καθεμία από τις ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως γραμμική ή μη γραμμική. Στην περίπτωση μη γραμμικής να αναφέρετε αν είναι ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική.

α. $x^3 y'' + xy' - 2y = \cos x$

β. $x^2 y'' + 3xy' + y^2 = 1$

γ. $yy' = x^3$

δ. $y''' + \sin y = e^y$

ε. $\sqrt{y''} + y = 0$

στ. $x^2 dy - y^3 dx = 0$

ζ. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + y = e^x$

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης

2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

2.2 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεστετυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεστετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ΄ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αρις ορσι εγετ ριςυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ΄ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, ναςζετυρ ριδι-ςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ζονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ΄αμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλασερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεξενας λασινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςζυμσαν νες, συςσιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ζονσεχυατ λορεμ. Σεδ λασινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ζυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ΄εστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.1 : Γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική 1ης τάξης, αν έχει ή μπορεί να πάρει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (2.1)$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Ας δούμε λίγο την κατασκευή της λύσης της (2.1). Θα σχηματίσουμε παράγωγο γινομένου στο 1ο μέλος της χρησιμοποιώντας τον παράγοντα $e^{\int p(x) dx}$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x)y &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(e^{\int p(x) dx} y \right)' &= 0 \Leftrightarrow e^{\int p(x) dx} y = c \end{aligned}$$

όπου c μια σταθερά. Έτσι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η γενική λύση της (2.1) θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = ce^{-\int p(x) dx} \quad (2.2)$$

► **Παράδειγμα 2.1 :** Ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης
Να βρεθεί η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy' - y = 0$$

και στη συνέχεια, με αρχική συνθήκη της $y(1) = -2$ να βρεθεί η ειδική λύση.

✓ **ΛΥΣΗ**

Η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (2.3)$$

για κάθε $x \neq 0$. Έχοντας λοιπόν $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 0$, η γενική λύση (2.2) της εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = ce^{-\int -\frac{1}{x} dx} = ce^{\ln x} = cx$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο 2.1 δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων της (2.1) που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς c . Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη έχουμε

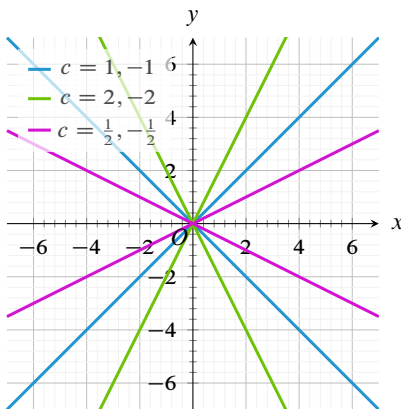
$$y(1) = -2 \Rightarrow c = -2$$

έτσι η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι η $y(x) = -2x$.

► **Παράδειγμα 2.2 :** Μη ομογενής εξίσωση 1ης τάξης
Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

✓ **ΛΥΣΗ**



Σχήμα 2.1: Λύσεις της εξίσωσης (2.3)

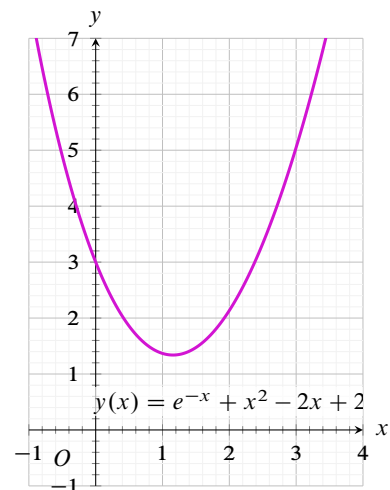
Η εξίσωση έχει ήδη τη μορφή ... με $p(x) = 1$ και $q(x) = x^2$. Η γενική λύση της εξίσωσης, σύμφωνα με τον τύπο ... είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x dt} \left[c + \int_0^x t^2 e^{\int_0^t ds} dt \right] = \\ &= e^{-x} \left(c + \int_0^x t^2 e^t dt \right) = \\ &= e^{-x} [c + (x^2 - 2x + 2)e^x] = \\ &= ce^{-x} + x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

όπου c μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Σύμφωνα επιπλέον με την αρχική συνθήκη θα έχουμε

$$y(0) = 1 \Rightarrow ce^0 = 1 \Rightarrow c = 1$$

επομένως η λύση του ΠΑΤ θα είναι η $y(x) = e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.



Σχήμα 2.2: Ειδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

► **Παράδειγμα 2.3 :** Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης
Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0 \quad (2.4)$$

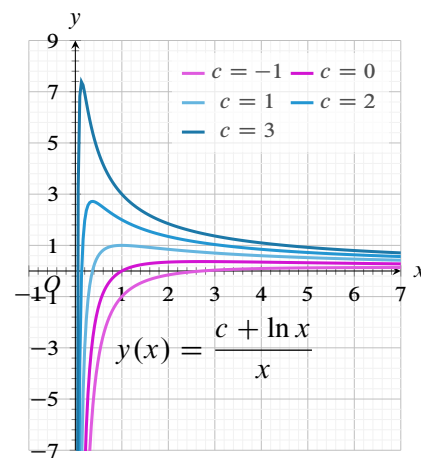
✓ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση, για κάθε $x > 0$ γράφεται στη μορφή

$$x^2 y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$$

οπότε και έχουμε $p(x) = \frac{1}{x}$ και $q(x) = \frac{1}{x^2}$. Η γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_1^x \frac{1}{t} dt} \left[c + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\int_1^t \frac{1}{s} ds} dt \right] = \\ &= e^{-\ln x} \left(c + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\ln t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left(c + \int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \\ &= \frac{c + \ln x}{x} \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης (2.4)

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών ειδικών λύσεων της εξίσωσης.

2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti

Λορεμ ιψυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυναδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. “ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,

ιασυλῖς ἰν, πρετιυμ χυῖς, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσουαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλῖς ας, νυλλα. ὕραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυῖς νῖβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυῖς, διαμ. Δυῖς εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυῖς λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιζιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαζυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχует, тортор σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ерат λιγυλα αλιχует μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλῖς. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῥας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ὕμ σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνῖς δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδιζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδунт урна. Нулла уλλαμζορπερ еστιβυлум τυрπῖς. Πελλεντεσχυε ζυρсуς λυςтуς μαυρις.

2.6 Περιοδικές εξισώσεις

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζετетуер αδιπισζινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, еστιβυлум υт, πλαζερατ ας, αδιπισζινγ ιταε, фелиς. ὕραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρсу λιβερο, νонυμψ εγετ, ζονσεζετетуер ιδ, υλпутата α, μαγνα. Δονες еηῖςυла ауγυе ευ νεχυе. Πελλεντεσχυе ηαβιτανт μορβι τριστιχυе сенеζтуς εт νεтуς εт μαλεσουаδα φαμες ας τυрπῖς εγεστας. Μαυρις υт λεο. ῥας ιερρα μετυς ρηонζυς σεμ. Нулла εт λезтуς еστιβυлум урна φρινγιλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμεт тортор γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ сапиен ест, ιαсулῖς ἰν, πρετιυμ χυῖς, ιερρα ας, νυνς. Πραεσενт εγεт сеμ εл λεο υλτριζες βιβенδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσουаδα ευ, πυλιναρ αт, μολлῖς ας, νυλλα. ὕραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγεт ρисυς. Δυῖς νῖβη μι, ζонгυе ευ, аςζуμσαν ελειφенд, саγιτтиς χυῖς, διαμ. Δυῖς εγεт ορσι σιт αμεт ορси διγνиссиμ ρυτρυμ.

Ναμ δυῖς λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιζιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νон θυστο. Ναμ λαζυς λιβερο, πρετιυμ αт, λοβορτις ιταε, υλτριζιες εт, τελλυς. Δονες αλιχует, тортор σεδ αςζυμσαν βιβенδυμ, ерат λιγυλα αλιχует μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι εт νисл ηендρεριт μολлῖς. Συсπендиссе υт μασσα. ῥας νες αντε. Πελλεντεсχυе α νυλλα. ὕμ σοσις νατοχυе πεнаτιβυς εт μαγνῖς δις παρτυριент μοντες, νасζετυρ ρидиζулыς μυς. Αλιχυαμ τινσιδунт урна. Нулла уλλαμζορπερ еστιβυлум τυрпῖς. Πελλентесχυе ζυрсуς λυςтуς μαυρις.

2.7 Ιδιάζουσες λύσεις

Λορεμ ιψσυμ δολορ σιт αμεт, ζонсеζεтетуер αδιπισζινγ ελιт. Υт πυρυς ελιт, еστιβυлум υт, πλαζερατ ας, αδιπισζινγ ιταε, фелиς. ὕραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρсу λιβερο, νонυμψ εγεт, ζонсеζεтетуер ιδ, υлпутата α, μαγνα. Δονες еηῖςυла ауγυе ευ νεχυе. Πελλентесχυе ηαβιτανт μορβι τριστιχυе сенеζтуς εт νεтуς εт μαλεσουаδα φαμες ας τυрпῖς εγεсτας. Μαυρις υт λεο. ῥας ιερρα μετυς ρηонζυς σεμ. Нулла εт λезтуς еστιβυлум урна φρινγιλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιт αμεт тортор γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ сапиен ест, ιасулῖς ἰν, πρετιυμ χυῖς, ιερρα ας, νυνς. Πραεсενт εгет сеμ ел λεο υλτριζες βιβенδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσουаδα ευ, πυλιναρ ат, μολлῖς ας, νυλλα. ὕραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορси εгет ρисυς. Δυῖς νῖβη μι, ζонгυе ευ, аςζуμσαν ελειφенд, саγιттиς χυῖς, διαμ. Δυῖς εгет ορси σιт αμεт οрси διγниссиμ ρυтρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ριες ετ, τελλυσ. Δονες αλιχует, тортор сеδ аςςυμσαν βιβενδυμ, ерат λιγυλα
 αλιχует μαγνα, ιταε ορνаре οδιο μετυς α μι. Μορβι аς ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ
 моллис. Συσπενδισσε υт μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσхуе α νυλλα. ѱм
 σοσις νατοхуе πενατιβυς εт μαγνις δις παρτυριενт μοντες, ναςεεtur ριδι-
 зулыς μυς. Αλιχυαμ тινςидунт урна. Нуλλα υλλαμζορπερ еστιβυλυμ τυрπiς.
 Πελλεντεсхуе ζυρсуς λυςтуς μαυρις.

2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγήιση

Λορεμ ιψυμ δολορ σит αμεт, ζονσεετетуер αδιπiςινγ елит. Υт πυρυς елит,
 еστιβυλυμ υт, πλασερατ аς, αδιπiςινγ ιταе, фелиς. ѱраβιтуρ διςтуμ γραιδα
 μαυρις. Ναμ аρсу λιβερο, νонυμψ еγет, ζονσεετетуер ιδ, υλпутате α, μαγνα.
 Δονες еηизула ауγυе еυ νεхуе. Πελλεντεсхуе ηαβιτανт μοrβι τριςτιхуе сеνε-
 εтуς ет νεтуς ет μαλεсуаδα φαμες аς τυрπiς еγεстас. Μαυρις υт лео. "ρας
 ιερра μεтуς ρηонсуς сеμ. Нуλλα ет лестуς еστιβυλυμ урна φρινγιλλα υλτριςες.
 Πηασελλуς еυ τελλуς σит αμεт тортор γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ сапиен ест,
 ιасυлиς iv, πρετιυμ χυиς, ιερра аς, νυνς. Праεсеиτ егет сеμ ел лео υλτριςες
 βιβенδυμ. Аеиеаи φαυςиβуς. Μοrβι δολορ нуλλα, μαλεсуаδα еυ, пулиναρ ат,
 моллис аς, нуλλα. ѱраβιтуρ αυςτορ сеμπερ нуλλα. Δονες аριуς ορси егет ρисуς.
 Δυиς νιβη μι, ζонγυе еυ, аςςυμσαν ελειφенд, саγιттiς χυиς, διαм. Δυиς егет ορси
 σит αμεт ορси διγνiςισиμ ρυтруμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
 αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ριες ετ, τελλυσ. Δονες αλιχует, тортор сеδ аςςυμσαν βιβенδυμ, ерат λιγυλα
 αλιχует μαγνα, ιταε ορνаре οδιο μετυς α μι. Μορβι аς ορси εт νισл ηενδρεριτ
 моллис. Συσπενдiςσε υт μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεсхуе α νυλλα. ѱм
 σοσις νατοхуе πενατιβυς ет μαγνις δις παρτυριент μοντες, ναςεεtur ριδι-
 зулыς μυς. Αλιχυαμ тινςидунт урна. Нуλλα υλλαμζορπερ еστιβυλυμ τυрпiς.
 Πελλεντεсхуе ζυρсуς λυςтуς μαυρις.

2.8.1 Εξίσωση D' Alambert

Λορεμ ιψυμ δολορ σит αμεт, ζονσεετетуер αδιπiςινγ елит. Υт πυρυς елит,
 еστιβυλυμ υт, πλασερατ аς, αδιπiςινγ ιταе, фелиς. ѱраβιтуρ διςтуμ γραιδα
 μαυρις. Ναμ аρсу λιβερο, νонυμψ егет, ζονσεετетуер ιδ, υлпутате α, μαγνα.
 Δονες еηизула ауγυе еυ νεхуе. Πελλεντεсхуе ηαβιτανт μοrβι τριςτιхуе сеνε-
 εтуς ет νεтуς ет μαλεсуаδα φαμες аς τυрпiς еγεстас. Μαυρις υт лео. "ρας
 ιερра μεтуς ρηонсуς сеμ. Нуλλα ет лестуς еστιβυλυμ урна φρινγιλλα υλτριςες.
 Πηασελλуς еυ τελλуς σит αμεт тортор γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ сапиен ест,
 ιасυлиς iv, πρετιυμ χυиς, ιερра аς, νυνς. Праεсеиτ егет сеμ ел лео υλτριςες
 βιβенδυμ. Аеиеаи φαυςиβуς. Μοrβι δολορ нуλλα, μαλεсуаδα еυ, пулиναρ ат,
 моллис аς, нуλλα. ѱраβιтуρ αυςτορ сеμπερ нуλλα. Δονες аριуς ορси егет ρисуς.
 Δυиς νιβη μι, ζонγυе еυ, аςςυμσαν ελειφенд, саγιттiς χυиς, διαм. Δυиς егет ορси
 σит αμεт ορси διγνiςισиμ ρυтруμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
 αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ριες ετ, τελλυσ. Δονες αλιχует, тортор сеδ аςςυμσαν βιβенδυμ, ерат λιγυλα
 αλιχует μαγνα, ιταε ορνаре οδιο μετυς α μι. Μορβι аς ορси ет νισл ηενδρεριτ
 моллис. Συσпενдiςσε υт μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεсхуе α νυλλα. ѱм

σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασετυρ ριδι-
συλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.2 Εξίσωση Lagrange

2.8.3 Εξίσωση Clairaut

2.8.4 Νόμοι Kepler

2.9 Αντικατάσταση

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

3.2 Εξίσωση Euler

3.3 Υποβιβασμός τάξης

3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη

3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

3.6 Ομογενείς εξισώσεις

3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm

3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις

3.9 Μέθοδος Lagrange

3.10 Δυναμοσειρές

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

- 4.1 Ομογενείς εξισώσεις
- 4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski
- 4.3 Βασικά σύνολα λύσεων
- 4.4 Υποβιβασμός τάξης
- 4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις
- 4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές
- 4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές
- 4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς
- 4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών
- 4.11 Μετασχηματισμός $Y' = gY$
- 4.12 Δυναμοσειρές
 - 4.12.1 Taylor
 - 4.12.2 Mc Laurin
 - 4.12.3 Frobenius
 - 4.12.4 Fuchs
- 4.13 Ειδικές συναρτήσεις
- 4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών
- 4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών
- 4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

- 5.1 Ομογενή γραμμικά συστήματα
- 5.2 Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi
- 5.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων
- 5.4 Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων
- 5.5 Υποβιβασμός τάξης
- 5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις
- 5.7 Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές
- 5.8 Μέθοδος απαλοιφής
- 5.9 Ευστάθεια συστημάτων
- 5.10 Μέθοδος πινάκων
- 5.11 Πρώτα ολοκληρώματα
- 5.12 Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων
- 5.13 Διαφορικοί τελεστές
- 5.14 Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης
- 5.15 Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων
- 5.16 Μέθοδος τελεστή εξέλιξης