

ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

✉: spyrosfronimos@gmail.com | ☎: 6932327283 - ☎: 2663023079

---

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

8 Αυγούστου 2017

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Εξιώσεις**

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2<sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ

## ΘΕΩΡΙΑ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

### 1. Ερωτήσεις

- i. Τι ονομάζουμε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού;
- ii. Ποιός αριθμός μας δείχνει το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού;
- iii. Πότε μια εξίσωση έχει 2 ρίζες, πότε μια και πότε είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ ;
- iv. Να γραφούν οι τύποι του Vieta.

### 2. Σωστό - Λάθος

Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω εξισώσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- i. Αν για μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού έχουμε  $\Delta > 0$  τότε έχει 2 άνισες λύσεις.
- ii. Αν για μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού έχουμε  $\Delta < 0$  τότε έχει μια διπλή λύση.
- iii. Η εξίσωση  $ax^2 + bx + c = 0$  παριστάνει μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού για κάθε τιμή του  $a$ .
- iv. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού τότε  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  και  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .
- v. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού με  $x_1 = -x_2$  τότε  $b = 0$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

### 1. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με $\Delta > 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^2 - 5x + 6 = 0$     vi.  $x^2 - 6x + 5 = 0$
- ii.  $x^2 - 3x + 2 = 0$     vii.  $2x^2 - 5x + 3 = 0$
- iii.  $x^2 - 7x + 12 = 0$     viii.  $2x^2 - 9x + 10 = 0$
- iv.  $x^2 + 3x - 4 = 0$     ix.  $3x^2 - x - 4 = 0$
- v.  $x^2 - 6x + 8 = 0$

### 2. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με $\Delta = 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^2 - 4x + 4 = 0$     iv.  $4x^2 + 4x + 1 = 0$
- ii.  $x^2 - 6x + 9 = 0$     v.  $36x^2 + 12x + 1 = 0$
- iii.  $x^2 - 10x + 25 = 0$     vi.  $4x^2 + 12x + 9 = 0$

### 3. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με $\Delta < 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^2 + x + 4 = 0$     iii.  $2x^2 - 3x + 8 = 0$
- ii.  $x^2 + 3x + 12 = 0$     iv.  $2x^2 + x + 5 = 0$

### 4. Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$
- ii.  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
- iii.  $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$
- iv.  $x^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})x - 4 = 0$

### 5. Λύσεις εξίσωσης

Να βρεθούν οι λύσεις  $x_1, x_2$ , μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού, οι οποίες έχουν άθροισμα  $S$  και γινόμενο  $P$  με:

- i.  $S = 9$  και  $P = -10$     iv.  $S = 0$  και  $P = 4$
- ii.  $S = -7$  και  $P = 12$     v.  $S = 12$  και  $P = 0$
- iii.  $S = 6$  και  $P = 9$     vi.  $S = 8$  και  $P = -8$

### 6. Εύρεση εξίσωσης

Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού, να βρεθεί η εξίσωση, αν γι αυτήν ισχύει

- i.  $x_1 + x_2 = 7$  και  $x_1 \cdot x_2 = 6$
- ii.  $x_1 + x_2 = 8$  και  $x_1 \cdot x_2 = 12$
- iii.  $x_1 + x_2 = -3$  και  $x_1 \cdot x_2 = -28$

iv.  $x_1 + x_2 = -12$  και  $x_1 \cdot x_2 = 20$

### 7. Εύρεση εξίσωσης

Να βρεθεί η εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού, η οποία έχει λύσεις τους παρακάτω αριθμούς  $x_1, x_2$ .

- i.  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 5$
- ii.  $x_1 = -2$  και  $x_2 = -4$
- iii.  $x_1 = \frac{1}{2}$  και  $x_2 = -\frac{3}{4}$
- iv.  $x_1 = \sqrt{2}$  και  $x_2 = 3$

### 8. Εύρεση λύσεων

Να βρεθούν οι λύσεις  $x_1, x_2$ , αν υπάρχουν, μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού, για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- i.  $x_1 + x_2 = 4$  και  $x_1 \cdot x_2 = 3$
- ii.  $x_1 + x_2 = -7$  και  $x_1 \cdot x_2 = -8$
- iii.  $x_1 + x_2 = 3$  και  $x_1 \cdot x_2 = 5$
- iv.  $x_1^2 + x_2^2 = 29$  και  $(x_1 + x_2)^2 = 49$

### 9. Εξισώσεις που ανάγονται σε 2<sup>ου</sup> βαθμού - Απόλυτες τιμές

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^2 - 5|x| + 6 = 0$     iv.  $x^2 + 7|x| + 10 = 0$
- ii.  $x^2 - 4|x| + 3 = 0$     v.  $2x^2 - |x| - 10 = 0$
- iii.  $x^2 - 2|x| - 3 = 0$     vi.  $x^2 - 10|x| + 25 = 0$

### 10. Εξισώσεις που ανάγονται σε 2<sup>ου</sup> βαθμού - Διτετράγωνες

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$     iv.  $x^6 - 2x^3 - 15 = 0$
- ii.  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$     v.  $2x^4 - x^2 - 10 = 0$
- iii.  $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$     vi.  $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$

### 11. Εξισώσεις που ανάγονται σε 2<sup>ου</sup> βαθμού - Κλασματικές

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $\frac{x-3}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{3-x}{x^2-x}$
- ii.  $\frac{2x-1}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{3-2x}{x^2-3x+2}$
- iii.  $\frac{x+4}{x^2-4} + \frac{2x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}$
- iv.  $\frac{x+4}{x^2-2x} + 2 = \frac{x-2}{x}$

**12. Εξισώσεις που ανάγονται σε 2<sup>ον</sup> βαθμού - Σύνθετες**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $(x-1)^2 - 5|x-1| + 6 = 0$
- ii.  $(2x-3)^2 - 7|2x-3| + 12 = 0$
- iii.  $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 = 0$
- iv.  $(x+3)^6 + 19(x+3)^3 - 216 = 0$

**13. Εξισώσεις που ανάγονται σε 2<sup>ον</sup> βαθμού - Σύνθετες**

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

- i.  $(x^2 - x)^2 + 4|x^2 - x| - 12 = 0$
- ii.  $(x + \frac{1}{x})^2 - 7(x + \frac{1}{x}) + 10 = 0$
- iii.  $(x^3 - 2)^2 + 19(x^3 - 2) - 150 = 0$
- iv.  $(|x| - 3)^2 + 8(|x| - 3) - 12 = 0$

**14. Παραμετρικές εξισώσεις 2<sup>ον</sup> βαθμού**

Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2<sup>ον</sup> βαθμού

$$x^2 + (\lambda - 2)x + 2\lambda^2 = 0$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι μια τυχαία παράμετρος.

- i. Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης.
- ii. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες λύσεις.
- iii. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.
- iv. Για ποιές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  είναι αδύνατη η εξίσωση;

**15. Παραμετρικές εξισώσεις 2<sup>ον</sup> βαθμού**

Δίνεται η παρακάτω εξίσωση 2<sup>ον</sup> βαθμού

$$x^2 + 3\lambda x + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι μια τυχαία παράμετρος.

- i. Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης.
- ii. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.

**16. Παραμετρικές εξισώσεις 2<sup>ον</sup> βαθμού**

Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + x - \lambda^2 = 0$$

έχει 2 άνισες λύσεις για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**17. Παραμετρικές εξισώσεις 2<sup>ον</sup> βαθμού**

Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$$

- i. έχει λύσεις για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$ .
- ii. έχει μια διπλή λύση για  $a = -1$ .

**18. Παραμετρικές εξισώσεις 2<sup>ον</sup> βαθμού**

Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + (a-3)x + a^2 + 4 = 0$$

δεν έχει λύσεις για καμία τιμή του  $a$ .

**19. Εύρεση παραμέτρου**

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου  $a \in \mathbb{R}^*$  έτσι ώστε η εξίσωση

$$2ax^2 + (a-4)x + a + 2 = 0$$

να έχει μια διπλή ρίζα.

**20. Εύρεση παραμέτρου**

Να βρεθούν οι σταθερές  $a, \beta \in \mathbb{R}^*$  έτσι ώστε η εξίσωση

$$ax^2 + (2a-3\beta)x + (a-\beta+2) = 0$$

να έχει λύσεις τις  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .

**21. Εύρεση παραμέτρου**

Να βρεθούν οι σταθερές  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + 2(\beta-1)x + a + \beta^2 - 7 = 0$$

να έχει μια διπλή λύση τη  $x = -2$ .

**22. Εύρεση παραμέτρου**

Να βρεθούν οι σταθερές  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (a+3\beta-2)x + 4a - 2a\beta - 2 = 0$$

να έχει λύσεις τις  $x_1 = 4 - 2a$  και  $x_2 = \beta - 3$ .

**23. Λύσεις εξίσωσης**

Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + 8 = 0$$

τότε χωρίς αυτή να λυθεί, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

- i.  $x_1 + x_2$
- ii.  $x_1 x_2$
- iii.  $x_1^2 + x_2^2$
- iv.  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$
- v.  $x_1^3 + x_2^3$
- vi.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

**24. Λύσεις εξίσωσης**

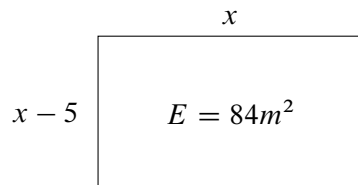
Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

τότε να βρεθεί να βρεθεί η εξίσωση η οποία έχει λύσεις τις  $y_1 = 2x_1 + x_2$  και  $y_2 = x_1 - 3x_2$ .

**25. Γεωμετρική εφαρμογή**

Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής  $x$  για την οποία το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος ισούται με  $E = 84m^2$ .

**26.**