ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

20 Αυγούστου 2015

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ου ΒΑΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΩΝΥΜΟ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με τρεις όρους και είναι της μορφής

$$ax^2 + \beta x + \gamma \quad \text{με} \quad a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** του τριωνύμου.
- Ο συντελεστής $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ a \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ
Διακρίνουσα ενός τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμού ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

1. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την

$$x = -\frac{\beta}{a}$$

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 λύσεις	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή λύση	$x = -\frac{\beta}{a}$
$\Delta < 0$	Καμία λύση	

3. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$. Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον παραπάνω πίνακα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\,(x - x_0)^2$$

όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΤΥΠΟΙ VIETA
Έστω $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης τότε το άθροισμα S των δύο λύσεων ισούται με $-\frac{\beta}{a}$ ενώ το γινόμενό τους P είναι ίσο με $\frac{\gamma}{a}$.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Οι παραπάνω σχέσεις ονομάζονται **τύποι του Vieta**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Εαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς αυτούς δίνεται από τον τύπο :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΕΙΔΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εαν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι λύσεις της, S το άθροισμα και P το γινομενό τους τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το είδος των λύσεων της :

Δ	P	S	**Είδος λύσεων**	**Συμβολισμός**
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Δύο θετικές πραγματικές	$x_1 > x_2 > 0$
		$S < 0$	Δύο αρνητικές λύσεις	$x_1 < x_2 < 0$
		$S = 0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P < 0$	$S > 0$	Ετερόσημες (όχι αντίθετες)	$x_1 < 0 < x_2 \;,\; \lvert x_2\rvert < \lvert x_1\rvert$
		$S < 0$		$x_1 < 0 < x_2 \;,\; \lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$
		$S = 0$	Αντίθετες	$x_1 = -x_2$

	$P=0$	$S>0$	Μηδενική και θετική	$x_1=0$, $x_2>0$
		$S<0$	Μηδενική και αρνητική	$x_1=0$, $x_2<0$
		$S=0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P=1$		Αντίστροφες	$x_1=\frac{1}{x_2}$
$\varDelta=0$	$P>0$	$S>0$	Θετικές και ίσες	$x_1=x_2>0$
		$S<0$	Αρνητικές και ίσες	$x_1=x_2<0$
	$P=0$	$S=0$	Μηδενικές	$x_1=x_2=0$
$\varDelta<0$	Αδύνατη στο $\mathbb{R}$			

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 :

1º Βήμα :