ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

4 Μαΐου 2015

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1. Μιγαδικός αριθμός : $z = a + \beta i$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad a = Re(z)$, $\beta = Im(z)$.

2. Μιγαδικό σύνολο : $\mathbb{C} = \{z | z = a + \beta i\}$.

3. Φανταστικός αριθμός : $z = \beta i$.

4. Φανταστικό σύνολο : $\mathbb{I} = \{\beta i | \beta \in \mathbb{R}\}$.

5. Πράξεις μιγαδικών

i. Πρόσθεση : $z + w = a + \beta i + \gamma + \delta i = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i$.
ii. Αφαίρεση : $z - w = a + \beta i - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$.
iii. Πολλαπλασιασμός : $z \cdot w = (a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (\beta\gamma + a\delta)i$.
iv. Διαίρεση : $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i\,\dfrac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$

6. Αντίστροφος : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + \beta i} = \dfrac{a - \beta i}{a^2 + \beta^2}$

7. Ισότητα μιγαδικών : $z = w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w)$, $Im(z) = Im(w)$.

8. Δυνάμεις μιγαδικών

i. $z^2 = (a + \beta i)^2 = a^2 + 2a\beta i - \beta^2 = (a^2 - \beta^2) + 2a\beta i$.
ii. $z^3 = (a + \beta i)^3 = a^3 + 3a^2\beta i - 3a\beta^2 - \beta^3 i = (a^3 - 3a\beta^2) + i(-\beta^3 - 3a^2\beta)$

9. Δυνάμεις του i.

i. $i^0 = 1$ ii. $i^1 = i$ iii. $i^2 = -1$ iv. $i^3 = -i$

Γενικά $i^\nu = \begin{cases} 1 & \nu = 4\kappa \\ i & \nu = 4\kappa + 1 \\ -1 & \nu = 4\kappa + 2 \\ -i & \nu = 4\kappa + 3 \end{cases}$

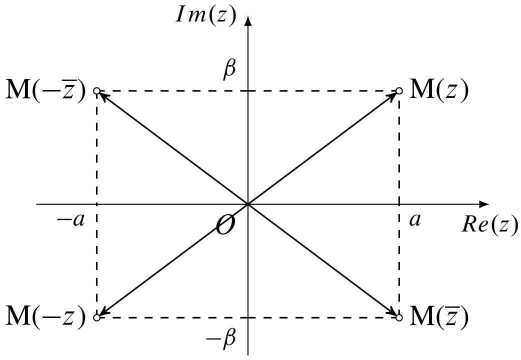
10. Ιδιότητες συζυγών

i. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
ii. $z - \overline{z} = 2Im(z)$
iii. $z \cdot \overline{z} = Re^2(z) + Im^2(z)$
iv. $\overline{(\overline{z})} = z$
v. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
vi. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
vii. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
viii. $\overline{(z^\nu)} = \overline{z}^\nu$

11. Λύσεις εξίσωσης 2ου βαθμού $az^2 + \beta z + \gamma = 0$, $a \neq 0$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

i. Αν $\Delta > 0 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
ii. Αν $\Delta = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\dfrac{\beta}{2a}$
iii. Αν $\Delta < 0 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

12. Μιγαδικό επίπεδο



- $x'x$ άξονας των πραγματικών.
- $y'y$ άξονας των φανταστικών.
- $M(z)$ εικόνα του μιγαδικού z.
- $\overrightarrow{OM}$ διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z.
- $M(\overline{z})$ η εικόνα του συζυγή του μιγαδικού z συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$.
- $M(-z)$ η εικόνα του αντίθετου του μιγαδικού z συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- $M(-\overline{z})$ η εικόνα του αντίθετου του συζυγή του z συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

13. Μέτρο μιγαδικού : $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$.

14. Ιδιότητες μέτρου

i. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
ii. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
iii. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
iv. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
v. $|z^\nu| = |z|^\nu$

15. Συνθήκες για πραγματικό και φανταστικό αριθμό.
Αν $z = a + \beta i$ ένας μιγαδικός αριθμός τότε $z \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

i. $\beta = 0$ ii. $\overline{z} = z$ iii. $|z|^2 = z^2$

Αν $z = a + \beta i$ ένας μιγαδικός αριθμός τότε $z \in \mathbb{I}$ αν και μόνο αν

i. $a = 0$ ii. $\overline{z} = -z$ iii. $|z|^2 = -z^2$

16. Απόσταση εικόνων δύο μιγαδικών : $d(z, w) = |z - w|$.

17. Κριτήριο παραλληλογράμου : $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

18. Γεωμετρικοί τόποι εικόνων μιγαδικού:
Θέτουμε $z = x + yi$ και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα προσπαθούμε να καταλλήξουμε σε μια εξίσωση που να περιέχει τους άγνωστους x, y ώστε να προκύψει το ζητούμενο σχήμα (γεωμετρικος τόπος).

19. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι :

i. Κύκλος $|z - z_0| = \rho$, $M(z_0)$ κέντρο του κύκλου και ρ η ακτίνα του.
ii. Κυκλικός δίσκος $|z - z_0| \leq \rho$, $M(z_0)$ κέντρο του κύκλου και ρ η ακτίνα του.
iii. Έλλειψη $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ όταν $2a > |z_1 - z_2|$ όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ οι εστίες της.
iv. Ευθύγραμμο τμήμα $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ όταν $2a = |z_1 - z_2|$ όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ τα άκρα του.
v. Υπερβολή $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ όταν $2a < |z_1 - z_2|$ όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ οι εστίες της.
vi. Κλάδος υπερβολής $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ όταν $2a < |z_1 - z_2|$ όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ οι εστίες της.
vii. Δύο ημιευθείες $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ όταν $2a = |z_1 - z_2|$.
viii. Ημιευθεία $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ όταν $2a = |z_1 - z_2|$.

ix. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος $|z-z_1| = |z-z_2|$ όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ τα άκρα του.
x. Ημιεπίπεδο $|z-z_1| \leq |z-z_2|$ ή $|z-z_1| \geq |z-z_2|$.

20. Μέγιστη και ελάχιστη τιμή μέτρου μιγαδικού, μέτρου διαφοράς μιγαδικών.
Αν M είναι η εικόνα ενός μιγαδικού z τότε για την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z|$ ισχύει :

i. Αν η εικόνα του z κινείται σε ευθεία ε τότε : $\min|z| = d(M, \varepsilon)$.
ii. Αν η εικόνα του z κινείται πάνω σε κύκλο $|z-z_0| = \rho$ με κέντρο $M_0(z_0)$ τότε :

$$\min|z| = OM_0 - \rho \quad \text{και} \quad \max|z| = OM_0 + \rho$$

όπου O η αρχή των αξόνων.

iii. Αν η εικόνα του z κινείται πάνω στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε :

$$\min|z| = \beta \quad \text{και} \quad \max|z| = a$$

όπου $2a, 2\beta$ τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης αντίστοιχα.

iv. Αν η εικόνα του z κινείται πάνω στην υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε :

$$\min|z| = a$$

Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες μιγαδικών z_1, z_2 τότε για την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου της διαφοράς τους $|z_1 - z_2|$ ισχύει :

i. Αν η εικόνες των z_1, z_2 κινούνται σε παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τότε : $\min|z_1 - z_2| = d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
ii. Αν η εικόνες των z_1, z_2 κινούνται σε κύκλο (M_0, ρ) τότε : $\max|z_1 - z_2| = 2\rho$.
iii. Αν η εικόνα του z_1 κινείται σε ευθεία ε και η εικόνα του z_2 σε κύκλο (M_0, ρ) τότε :

$$\min|z_1 - z_2| = d(M_0, \varepsilon) - \rho \quad \text{και} \quad \max|z_1 - z_2| = d(M_0, \varepsilon) + \rho$$

iv. Αν οι εικόνες των z_1, z_2 κινούνται σε κύκλους $C_1 : (K_1, \rho_1)$ και $C_2 : (K_2, \rho_2)$ αντίστοιχα τότε :
   α'. Αν οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και βρίσκεται εξωτερικά ο ένας του άλλου δηλαδή $K_1K_2 > \rho_1 + \rho_2$ τότε :

$$\min|z_1 - z_2| = K_1K_2 - \rho_1 - \rho_2 \quad \text{και} \quad \max|z_1 - z_2| = K_1K_2 + \rho_1 + \rho_2$$

   β'. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά δηλαδή $K_1K_2 = \rho_1 + \rho_2$ τότε : $\max|z_1 - z_2| = 2\rho_1 + 2\rho_2$
   γ'. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά δηλαδή $K_1K_2 = \rho_1 - \rho_2$ τότε : $\max|z_1 - z_2| = 2\rho_1$ όπου ρ_1 η ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου.

v. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 κινούνται στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε :

$\max|z_1 - z_2| = 2a \quad$ και $\quad \min|z_1 - z_2| = 2\beta\;$ αν οι εικόνες των z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικές

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Πραγματική συνάρτηση : $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή μιας πραγματικής μεταβλητής $x \in A$ αντιστοιχεί μόνο μια τιμή $y \in f(A)$.

i. $A = D_f$: πεδίο ορισμού.
ii. $f(D_f)$: σύνολο τιμών : $f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x) \ , \ x \in D_f\}$
iii. $y = f(x)$: τιμή της f στο x.
iv. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ ονομάζονται και ρίζες της συνάρτησης f.
v. Αν $\kappa \in f(D_f)$ τότε υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε $f(x_0) = \kappa$.

2. Είδη συναρτήσεων

i. Πολυωνυμική : $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
ii. Ρητή : $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ με $h(x) \neq 0$.
iii. Άρρητη : $f(x) = \sqrt{g(x)}$ με $g(x) \geq 0$.
iv. Λογαριθμική : $f(x) = \ln g(x)$ με $g(x) > 0$.
v. Εκθετική : $f(x) = g(x)^{h(x)}$ με $g(x) > 0$.
vi. Τριγωνομετρική : $f(x) = \text{ημ} g(x)$ ή $\text{συν} g(x)$ ή $\text{εφ} g(x)$ ή $\text{σφ} g(x)$.
vii. Σταθερή : $f(x) = c$ με $c \in \mathbb{R}$.
viii. Μηδενική : $f(x) = 0$.
ix. Ταυτοτική : $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Γραφική παράσταση συνάρτησης : Σύνολο σημείων $M\,(x, f(x))$, $C_f = \{M\,(x, y) / y = f(x)\}$. Ισχύει

$$M(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$$

4. Άρτια - Περιττή συνάρτηση :
Αν $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ και

i. $f(-x) = f(x)$ η f είναι άρτια. Είναι συμμετρική ως προς $y'y$.
ii. $f(-x) = -f(x)$ η f είναι περιττή. Είναι συμμετρική ως προς το O.

5. Ίσες συναρτήσεις. f, g ίσες όταν

i. $D_f = D_g$ και
ii. $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$.

6. Πράξεις με συναρτήσεις : Αν $f : D_f \to \mathbb{R}$ και $g : D_g \to \mathbb{R}$ τότε :

i. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
ii. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
iii. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
iv. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$.

7. Σύνθεση συναρτήσεων : Αν $f : D_f \to \mathbb{R}$ και $g : D_g \to \mathbb{R}$ τότε :
Η σύνθεση $f \circ g$ είναι :

i. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

ii. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Η σύνθεση $g \circ f$ είναι :

i. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$
ii. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Ισχύει επίσης $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

8. Μονοτονία συνάρτησης

i. $f : \varDelta \to \mathbb{R}$ ($\varDelta$ διάστημα) αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in \varDelta$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
ii. $f : \varDelta \to \mathbb{R}$ ($\varDelta$ διάστημα) φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in \varDelta$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

9. Μονοτονία - Λύση εξισώσεων, ανισώσεων.
Αν $f : \varDelta \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε :

i. Αν $f \uparrow \varDelta$ τότε $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$.
ii. Αν $f \downarrow \varDelta$ τότε $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$.
iii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια το πολύ λύση στο διάστημα $\varDelta$.
iv. Αν $0 \in f(\varDelta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\varDelta$.
v. Αν $\eta \in f(\varDelta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\varDelta$.

10. Ακρότατα συνάρτησης - Μέγιστο, ελάχιστο.
Για μια συνάρτηση $f : \varDelta \to \mathbb{R}$ έχουμε :

i. $f(x_0)$ μέγιστο όταν $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in \varDelta$.
ii. $f(x_0)$ ελάχιστο όταν $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in \varDelta$.

Αν $m \leq f(x) \leq M$ και $m, M \in f(\varDelta)$ τότε m ελάχιστο και M μέγιστο.

i. Αν $f \uparrow \varDelta = [a, \beta] \Rightarrow \min f = f(a)$ και $\max f = f(\beta)$.
ii. Αν $f \downarrow \varDelta = [a, \beta] \Rightarrow \min f = f(\beta)$ και $\max f = f(a)$.
iii. Αν f μονότονη στο $\varDelta = (a, \beta)$ δεν έχει ακρότατα.

11. Συνάρτηση $1 - 1$.

i. $f : D_f \to \mathbb{R}$ $1 - 1$ όταν $\forall x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
ii. $f : D_f \to \mathbb{R}$ $1 - 1$ όταν $\forall x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Αν f μονότονη τότε είναι και $1 - 1$.

12. Αντίστροφη συνάρτηση : Αν $f : D_f \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση $1 - 1$ τότε $f^{-1} : f(D_f) \to \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφή της.

i. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών, το πεδίο ορισμού της f.
ii. $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \quad , \quad \forall x \in D_f$.
iii. $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \quad , \quad \forall y \in f(D_f)$.

13. Όριο συνάρτησης σε σημείο x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \\ \text{δεν υπάρχει} \end{cases}$

Πλευρικά όρια : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Το όριο της f υπάρχει στο x_0 αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

14. Ιδιότητες ορίων

i. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0.
ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x_0) < 0$ κοντά στο x_0.
iii. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.
iv. Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq 0$.
v. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.
vi. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.
vii. Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
viii. Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

15. Πράξεις με όρια
Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των f, g στο x_0 τότε :

i. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
ii. $\lim\limits_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{R}$.
iii. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
iv. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.
v. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.
vi. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} \quad , \quad f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.
vii. $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}$.

ΔΕΝ ισχύουν : $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{l}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\ell$
διότι δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει πάντα το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

16. Κριτήριο παρεμβολής : Έστω συναρτήσεις f, g, h. Αν

i. $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
ii. $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

17. Βασική τριγωνομετρική ανισότητα : $|\eta\mu x| \leq x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$. Βασικά τριγωνομετρικά όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0$

18. Όριο σύνθετης συνάρτησης : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(g(x)\right) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ όπου $u = g(x)$ και $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

19. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

20. Ιδιότητες

i. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow f(x) > 0 (< 0)$ αντίστοιχα κοντά στο x_0.

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = \mp\infty$.

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

iv. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 (< 0) \text{ κοντά στο } x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty(-\infty)$.

v. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

vi. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

vii. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2\nu}} = +\infty$.

viii. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|x - x_0|} = +\infty$.

ix. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2\nu+1}} = -\infty$.

x. $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2\nu+1}} = +\infty$.

xi. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2\nu+1}}$.

21. Πρόταση : Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

i. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(Τις παραπάνω τις αποδεικνύουμε)

22. Όριο αθροίσματος

Όριο συνάρτησης	Τιμή ορίου					
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Απροσδιόριστη	Απροσδιόριστη	$-\infty$

23. Όριο γινομένου

Όριο συνάρτησης	Τιμή ορίου									
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Απρ.	Απρ.

24. Όριο στο άπειρο : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \end{cases}$

25. Βασικά όρια

i. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ +\infty & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$

ii. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_\nu x^\nu$

iii. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$.

iv. Όριο εκθετικής - λογαριθμικής για $a > 1$.

α′. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

β′. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

γ′. $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$

δ′. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$

v. Όριο εκθετικής - λογαριθμικής για $0 < a < 1$.

α′. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

β′. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

γ′. $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$

δ′. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

vi. Βασικά όρια

α′. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$

β′. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$

γ′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{ημ}\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} \text{ημ}y = 0$

δ′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{συν}\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} \text{συν}y = 1$

ε′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\,\text{ημ}\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{ημ}y}{y} = 1$

ϛ′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}\text{ημ}x = 0$ Μηδενική επί φραγμένη (αποδεικνείεται με κριτήριο παρεμβολής)

ζ′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x + \text{ημ}x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(1 + \dfrac{\text{ημ}x}{x}\right) = \pm\infty$

Τα παρακάτω όρια ΔΕΝ υπάρχουν

η′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{ημ}x$

θ′. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{συν}x$

26. Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in D_f$
Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

27. Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

i. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,β) αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

ii. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα $[a, \beta]$ αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος (a, β) και ισχύει

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x\to \beta^+} f(x) = f(\beta)$$

Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της λέγεται απλά συνεχής.

28. Συνεχείς συναρτήσεις

i. Πολυωνυμικές $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii. Ρητές $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ για κάθε $x \in D_f = \{x \in \mathbb{R} | h(x) \neq 0\}$.
iii. Τριγωνομετρικές $f(x) = \text{ημ}x$ και $g(x) = \text{συν}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
iv. Εκθετικές και λογαριθμικές $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$ με $0 < a \neq 1$.

29. Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις
Αν f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα κοινό σημείο x_0 των πεδίων ορισμού τους τότε οι συναρτήσεις

$$f \pm g \ , \ cf \ , \ f \cdot g \ , \ \frac{f}{g} \ , \ |f| \ , \ f^\nu \ , \ \sqrt[\kappa]{f}$$

είναι συνεχείς στο x_0 εφόσον ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το σημείο αυτό.

30. Συνέχεια σύνθεσης
Έστω f, g δύο συναρτήσεις και $x_0 \in D_f$. Αν f συνεχής στο x_0 και g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

31. Θεώρημα Bolzano
Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει:

i. f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και
ii. $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

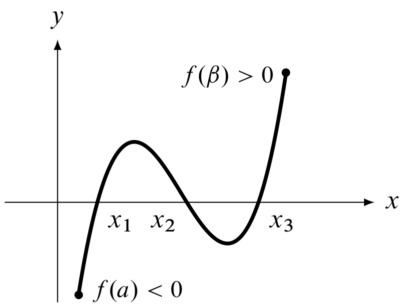
τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε

$$f(x_0) = 0$$

- Αν ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$ τότε θα υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) = 0$.
- Το αντίστροφο του Bolzano δε ισχύει πάντα.

32. Γεωμετρική ερμηνεία Bolzano

Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ η συνθήκη $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ σημαίνει οτι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει οτι ηγαφική παράσταση C_f θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.



33. Πρόσημο συνάρτησης
Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$ ισχύει $f(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in \varDelta$ τότε η f διατηρεί το πρόσημό της στο $\varDelta$ δηλαδή :

$$f(x) > 0 \text{ ή } f(x) < 0 \ , \ \forall x \in \varDelta$$

i. Αν υπάρχει $a \in \Delta$ ώστε $f(a) > 0$ τότε $f(x) > 0$. Αντίστοιχα αν υπάρχει $a \in \Delta$ ώστε $f(a) < 0$ τότε $f(x) < 0$.

ii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f τότε η συνάρτηση διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) μεταξύ των ριζών.

34. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι

i. συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει
ii. $f(a) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε τιμή η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

i. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
ii. Αν μια $1-1$ συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε είναι γνησίως μονότονη.

35. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τότε παίνει στο διάστημα αυτό μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

i. Αν $m = M$ τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.
ii. Αν $m \leq f(\eta) \leq M$ τότε $\eta \in f(\Delta)$ και υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) = \eta$.
iii. Αν $m \leq f(\eta) \leq M$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο $[a, \beta]$ τότε η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει ακριβώς μια λύση.

36. Σύνολο τιμών - Εικόνα κλειστού - ανοιχτού διαστήματος.

i. Αν $\Delta = [a, \beta]$ τότε
   - Αν $f \uparrow \Delta$ τότε $f(\Delta) = [f(a), f(\beta)]$.
   - Αν $f \downarrow \Delta$ τότε $f(\Delta) = [f(\beta), f(a)]$.

ii. Αν $\Delta = (a, \beta)$ τότε
   - Αν $f \uparrow \Delta$ τότε $f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) \right)$.
   - Αν $f \downarrow \Delta$ τότε $f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Παράγωγος σε σημείο
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 αν το όριο της παραγώγου υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

- Το κλάσμα $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ονομάζεται **λόγος μεταβολής** της f.
- Αν $h = x - x_0$ η παράγωγος της f στο σημείο x_0 μετασχηματίζεται ως εξής

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

3. Παράγωγίσιμη συνάρτηση σε σύνολο

i. f παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος.
ii. f παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, β) αν είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in (a, \beta)$.
iii. f παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα (a, β) αν είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in (a, \beta)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

4. Παραγωγος συνάρτηση : $f' : A \to \mathbb{R}$ παράγωγος της f : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

5. Κανόνες παραγώγισης

i. $(f \pm g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
ii. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.
iii. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
iv. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
v. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
vi. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

6. Παράγωγοι συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
c	0		
x	1		
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$[f(x)]^\nu$	$\nu\,[f(x)]^{\nu-1} \cdot f'(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu f(x)$	$\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu f(x)$	$-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$\varepsilon\varphi x$	$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
$\sigma\varphi x$	$-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\sigma\varphi f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

7. Συντελεστής διεύθυνσης εφαπτόμενης ευθείας σε σημείο x_0 : $\lambda = f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

8. Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας στο x_0 : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

9. Ρυθμός μεταβολής. Αν $y = f(x)$ τότε ο ρυθμός μεταβολής του ποσού y ως προς το ποσό x σε ένα σημείο x_0 είναι : $f'(x_0)$.

i. Αν $f'(x_0) > 0$ ο ρυθμός είναι θετικός άρα το ποσό αυξάνεται.
ii. Αν $f'(x_0) < 0$ ο ρυθμός είναι αρνητικός άρα το ποσό μειώνεται.

10. Θεώρημα Rolle
Αν μια συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι

i. συνεχής στο $[a,\beta]$.
ii. παραγωγίσιμη στο (a,β) και
iii. $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

11. Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Rolle.
Αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a,\beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a,\beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο $A\ (\xi,\ f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

12. Συνέπειες του θεωρήματος Rolle.

i. Αν $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε $f : 1-1$.
ii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

13. Θεώρημα Μέσης Τιμής
Αν μια συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι

i. συνεχής στο $[a,\beta]$
ii. παραγωγίσιμη στο (a,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$

i. Το θεώρημα Rolle είναι μια ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.
ii. $f(\beta) - f(a) = f'(\xi)(\beta - a)$.

14. Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
   i. η f είναι συνεχής στο Δ και
   ii. $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

   τότε η f είναι σταθερή στο Δ.
2. Έστω δύο συναρτησεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
   i. οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
   ii. $f'(x) = g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

   τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

15. Μονοτονία
Έστω f συνεχής σε **διάστημα** Δ.

i. Αν $f'(x) > 0$, $\forall x$ εσωτερικό του Δ τότε $f \uparrow \Delta$.
ii. Αν $f'(x) < 0$, $\forall x$ εσωτερικό του Δ τότε $f \downarrow \Delta$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ισχύει όμως το εξής:

i. Αν $f \uparrow \Delta$ τότε $f'(x) \geq 0$, $\forall x$ εσωτερικό του Δ.
ii. Αν $f \downarrow \Delta$ τότε $f'(x) \leq 0$, $\forall x$ εσωτερικό του Δ.

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα (a, β) και παραγωγίσιμη στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $x_0 \in (a, \beta)$ τότε είναι γνησίως μονότονη στο (a, β).
Γενικά αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f μηδενίζεται ή δεν ορίζεται σε μεμονομένα σημεία του Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

16. Τοπικά ακρότατα

i. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν

$$\exists \delta > 0 \ \text{ ώστε } \ f(x_0) \geq f(x) \ , \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f$$

ii. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν

$$\exists \delta > 0 \ \text{ ώστε } \ f(x_0) \leq f(x) \ , \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f$$

Το x_0 είναι η θέση του τοπικού ακρότατου. Το $f(x_0)$ είναι το τοπικό ακρότατο.

17. Θεώρημα Fermat
Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$

i. Αν x_0 εσωτερικό του διαστήματος Δ
ii. f παραγωγίσιμη στο x_0 και
iii. f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0

τότε $f'(x_0) = 0$

18. Πιθανές θέσεις ακρότατων

$$\left.\begin{array}{l}\text{i. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος } \varDelta \text{ όπου } f'(x_0) = 0. \\ \text{ii. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος } \varDelta \text{ όπου δεν ορίζεται η } f'.\end{array}\right\} \text{Κρίσιμα σημεία}$$

iii. Τα άκρα του $\varDelta$.

19. Κριτήριο τοπικών ακρότατων
Έστω $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 συνεχής όμως ς αυτό.

i. Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.
ii. Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο.
iii. Αν $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και $f'(x) > 0$ τότε $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

20. Βασική ανισότητα : $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$.
Οι ανισότητες

i. $\ln x < x$ ii. $e^x \geq x + 1$ iii. $e^x > x$ iv. $e^x > \eta\mu x$

θα αποδεικνύονται με τη βοήθεια της πρώτης.

21. Κυρτή - Κοίλη
Έστω f συνεχής στο διάστημα $\varDelta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\varDelta$.

i. Η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα **πάνω**) αν $f' \uparrow$ στο εσωτερικό του $\varDelta$.
ii. Η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα **κάτω**) αν $f' \downarrow$ στο εσωτερικό του $\varDelta$.

22. Κυρτότητα
Έστω f συνεχής στο διάστημα $\varDelta$ και παραγωγίσιμη δύο φορές στο εσωτερικό του $\varDelta$.

i. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x$ στο εσωτερικό του $\varDelta$ τότε $f \circlearrowright \varDelta$.
ii. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x$ στο εσωτερικό του $\varDelta$ τότε $f \curvearrowright \varDelta$.

23. Κριτήριο σημείων καμπής
Έστω $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, \beta)$. Αν

i. η f αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
ii. ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία στο $A\,(x_0, f(x_0))$

τοτε το σημείο $A\,(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής. (Εκεί αλλάζει η κυρτότητα)

24. Ασύμπτωτες

i. Αν $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \text{ ή} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)\end{array}\right\} = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.
ii. Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow y = \ell$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
iii. Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Rightarrow y = \ell$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.
iv. Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \Rightarrow y = \lambda x + \beta$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
v. Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \Rightarrow y = \lambda x + \beta$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

25. Η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$$

i. Η C_f με μια πλάγια ασύμπτωτη μπορεί να έχουν κοινά σημεία.
ii. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τότε δεν έχει πλάγια.

26. Κανόνες De L' Hospital
Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ή $\pm\infty$ τότε $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

27. Βασική ανισότητα : Κοντά στο $+\infty$ ισχύει $e^x > x^\nu > \ln x$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Αρχική συνάρτηση : F : αρχική της f στο Δ τότε $F'(x) = f(x)$. Η αρχική μιας συνάρτησης ορίζεται σε διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

2. Αν F μια αρχική της $f : \Delta \to \mathbb{R}$ τότε

i. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι αρχικές της f.
ii. κάθε άλλη αρχική της f είναι της μορφής $G(x) = F(x) + c$.

3. Αρχικές συναρτήσεις

Συνάρτηση f	Αρχική F	Συνάρτηση f	Αρχική F
0	c		
1	$x + c$		
x^ν	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$	$[f(x)]^\nu \cdot f'(x)$	$\frac{[f(x)]^{\nu+1}}{\nu+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + c$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$\frac{1}{f(x)} + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{f(x)} + c$
$\text{συν}x$	$\text{ημ}x + c$	$\text{συν} f(x) \cdot f'(x)$	$\text{ημ} f(x) + c$
$-\text{ημ}x$	$\text{συν}x + c$	$-\text{ημ} f(x) \cdot f'(x)$	$\text{συν} f(x) + c$
$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$\text{εφ}x + c$	$\frac{f'(x)}{\text{συν}^2 f(x)}$	$\text{εφ} f(x) + c$
$-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	$\text{σφ}x + c$	$-\frac{f'(x)}{\text{ημ}^2 f(x)}$	$\text{σφ} f(x) + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$a^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
e^x	e^x	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\| + c$

4. Κανόνες αρχικών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Αρχική F
0	c
$f'(x) \pm g'(x)$	$f(x) \pm g(x) + c$

$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$f(x)\cdot g(x)+c$
$\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}+c$
$g'(f(x))\cdot f'(x)$	$g(f(x))+c$

5. Ορισμένο ολοκλήρωμα : $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ με f συνεχή στο $[a,\beta]$.

i. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

ii. $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = -\int_\beta^a f(x)\mathrm{d}x$

iii. $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\gamma f(x)\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\mathrm{d}x$

6. Εμβαδόν χωρίου : Αν για την $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 0$ τότε $E(\Omega)=\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

7. Έστω f συνεχής στο $[a,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Αν η f δε μηδενίζεται παντού τότε

$$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x > 0$$

8. Αν $f:\varDelta\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\varDelta$ και a ένα σημείο του $\varDelta$ τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

είναι μια αρχική της f στο $\varDelta$.

i. $\left(\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

ii. $\left(\int_a^{g(x)} f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$

9. Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού
Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,\beta]$. Αν G είναι μια αρχική της f στο $[a,\beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = G(\beta)-G(a)$$

Ισχύει οτι $\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_a^x \Rightarrow f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x + f(a)$.

10. Αν μια συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ τότε υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ ώστε

$$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = (\beta-a)f(\xi)$$

11. Μέθοδοι ολοκλήρωσης

i. Παραγοντική ολοκλήρωση : $\int_a^\beta f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$

ii. Με αντικατάσταση : $\int_a^\beta f(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\cdot\mathrm{d}u$ όπου $u=g(x)$, $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$ και $u_1=g(a)$, $u_2=g(\beta)$.

12. Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
Αν $f:\varDelta\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\varDelta$ και a ένα σημείο του $\varDelta$ τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

είναι μια αρχική της f στο $\varDelta$. Για να ορίζεται η F πρέπει $a,x\in\varDelta$.

i. $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$

ii. Αν $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t$ τότε

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(g(x))\cdot g'(x)$$

με $D_G=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in\varDelta\}$.

iii. Αν $H(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$ τότε

$$\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(g_2(x))\cdot g_2'(x)-f(g_1(x))\cdot g_1'(x)$$

με $D_H=\{x\in D_{g_1}\cap D_{g_2} \text{ και } g_1(x),g_2(x)\in\varDelta\}$.

13. Εμβαδόν χωρίου

i. Εμβαδόν μεταξύ C_f και $x'x$: $E(\varOmega)=\int_a^\beta |f(x)|\mathrm{d}x$.

ii. Εμβαδόν μεταξύ C_f και C_g : $E(\varOmega)=\int_a^\beta |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.