

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2 Σεπτεμβρίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Όπως και για την επίλυση μιας εξίσωσης έτσι και για την επίλυση μιας ανίσωσης με έναν άγνωστο, οποιασδήποτε μορφής, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1^ο Βήμα : Απαλοιφή παρονομαστών

Αν η ανίσωση περιέχει κλάσματα, τότε υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους, ώστε να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της μ' αυτό. Στη συνέχεια διαιρούμε κάθε παρονομαστή με το Ε.Κ.Π.

2^ο Βήμα : Απαλοιφή παρενθέσεων

Αν η ανίσωση περιέχει παρενθέσεις τότε εξετάζουμε το λόγο ύπαρξης της κάθε παρένθεσης. Εξετάζουμε δηλαδή αν η παρένθεση υπάρχει λόγω πολλαπλασιασμού, πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

3^ο Βήμα : Διαχωρισμός όρων

Χωρίζουμε στα μέλη της ανίσωσης τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους αλλάζοντας τα πρόσημά τους. Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη.

4^ο Βήμα : Διαίρεση - Λύσεις ανίσωσης

Τέλος διαιρούμε κάθε μέλος της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου, οπότε και προκύπτουν οι λύσεις της.

5^ο Βήμα : Γραφική παράσταση λύσεων (Προαιρετικό)

Αν μας ζητείται, σχεδιάζουμε τις λύσεις της ανίσωσης όπως θα δούμε στη **Μέθοδο 2**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Να λυθεί η ανίσωση: $2x - 5 < 10 - 3x$.

ΛΥΣΗ

Στη συγκεκριμένη ανίσωση μπορούμε αμέσως να χωρίσουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους. Έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &< 10 - 3x \Rightarrow \\ 2x + 3x &< 10 + 5 \Rightarrow \end{aligned}$$

Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων σε κάθε μέλος και διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

$$5x < 15 \Rightarrow \frac{5x}{5} < \frac{15}{5} \Rightarrow x < 3$$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης θα είναι οι $x < 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ

Να λυθεί η παρακάτω ανίσωση

$$5 - (2 + 4x) \geq 2(5 - x) + 7$$

Στη συνέχεια να σχεδιαστούν οι λύσεις της στον άξονα των αριθμών.

ΛΥΣΗ

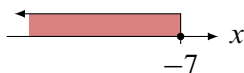
Ξεκινάμε απαλοίζοντας τις παρενθέσεις εξετάζοντας όσα είδαμε στη μέθοδο και θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 5 - (2 + 4x) &\geq 2(5 - x) + 7 \Rightarrow \\ 5 - 2 - 4x &\geq 10 - 2x + 7 \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα βήματα όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Προσέχουμε στο προτελευταίο βήμα να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης.

$$\begin{aligned} 5 - 2 - 4x &\geq 10 - 2x + 7 \Rightarrow \\ -4x + 2x &\geq 10 + 7 - 5 + 2 \Rightarrow \\ -2x &\geq 14 \Rightarrow \\ \frac{-2x}{-2} &\leq \frac{14}{-2} \Rightarrow x \leq -7 \end{aligned}$$

Οι λύσεις της ανίσωσης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα :



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Να λυθεί η παρακάτω ανίσωση:

$$\frac{2x - 3}{4} + \frac{x - 2}{5} \leq \frac{1}{10} + 1$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και πολλαπλασιάζουμε μ' αυτό κάθε όρο της ανίσωσης.

$$\begin{aligned} \text{Ε.Κ.Π.}(4, 5, 10) &= 20 \text{ άρα} \\ 20 \cdot \frac{2x - 3}{4} + 20 \cdot \frac{x - 2}{5} &\leq 20 \cdot \frac{1}{10} + 20 \cdot 1 \Rightarrow \\ 5(2x - 3) + 4(x - 2) &\leq 2 \cdot 1 + 20 \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε λύνοντας την ανίσωση που προέκυψε ακολουθώντας τα υπόλοιπα βήματα όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.

$$\begin{aligned} 5(2x - 3) + 4(x - 2) &\leq 2 \cdot 1 + 20 \Rightarrow \\ 10x - 15 + 4x - 8 &\leq 2 + 20 \Rightarrow \\ 10x + 4x &\leq 2 + 20 + 15 + 8 \Rightarrow \\ 14x &\leq 45 \Rightarrow \\ x &\leq \frac{45}{14} \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΥΣΕΩΝ

Οι λύσεις μιας ανίσωσης μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια ενός σχήματος πάνω στην ευθεία των αριθμών.

1^ο Βήμα : Επίλυση ανισώσεων

Υπολογίζουμε τις λύσεις της δοσμένης ανίσωσης.

2^ο Βήμα : Άξονας λύσεων

Για να σχεδιαστούν οι λύσεις της πάνω στο άξονα αριθμών, τοποθετούμε σ' αυτόν τον αριθμό που προέκυψε στο 2^ο μέλος του αποτελέσματος. Στη θέση του αριθμού αυτού σχεδιάζουμε

- έναν κύκλο : \circ αν έχουμε απλή σχέση ανισότητας.
- μια κουκίδα : \bullet αν έχουμε σχέση ανισοισότητας.

3^ο Βήμα : Λύσεις ανίσωσης

Τέλος σχεδιάζουμε ένα σκιασμένο ορθογώνιο το οποίο ξεκινά από τη θέση του αριθμού και εκτείνεται προς τη μεριά των λύσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Να σχεδιαστούν πάνω στον άξονα των αριθμών οι παρακάτω λύσεις ανισώσεων:

i. $x > 4$

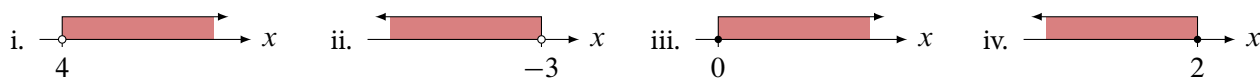
ii. $x < -3$

iii. $x \geq 0$

iv. $x \leq 2$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα παραπάνω τα διαγράμματα των λύσεων των ανισώσεων αυτών θα είναι τα εξής:



ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΚΟΙΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Για την εύρεση κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων εργαζόμαστε ως εξής.

1^ο Βήμα : Επίλυση ανισώσεων

Υπολογίζουμε τις λύσεις όλων των ανισώσεων σύμφωνα με τη Μέθοδο 1.

2^ο Βήμα : Άξονας λύσεων - Κοινές λύσεις

Σχεδιάζουμε στον ίδιο άξονα αριθμών τα ορθογώνια των λύσεων όλων των ανισώσεων. Το κοινό μέρος των σχημάτων αυτών μας δίνει τις κοινές λύσεις τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : ΚΟΙΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων

$$3(x - 1) - 8 \leq x + 5 \quad \text{και} \quad 2x - 4 > 3(2 - x) + 5$$

ΛΥΣΗ

Λύνοντας ξεχωριστά τις δύο ανισώσεις βρίσκουμε αντίστοιχα τις λύσεις $x \leq 8$ και $x > 3$.



Σχεδιάζοντας και τα δύο σχήματα στον ίδιο άξονα βλέπουμε ότι οι κοινές λύσεις θα είναι οι: $3 < x \leq 8$.