ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
10 Ιουλίου 2019
ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ
Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Τα βασικά είδη συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους. Αναλυτικότερα για κάθε είδος ισχύουν τα παρακάτω:

1. **Πολυωνυμικές**
   Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
   $$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$
2. **Ρητές**
   Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0)$$

3. **Άρρητες**
Κάθε άρρητη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{A(x)}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A. Για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{A(x)} = \sqrt{A(x_0)}$$

4. **Τριγωνομετρικές**
Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι όλες συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Για κάθε x_0 ισχύει:

   i. $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
   ii. $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
   iii. $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$
   iv. $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$

5. **Εκθετικές**
Κάθε εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι συνεχής στο πεδίου ορισμού της αφού ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

6. **Λογαριθμικές**
Κάθε λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι συνεχής στο πεδίου ορισμού της αφού ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα κοινό σημείο x_0 των πεδίων ορισμού τους τότε και οι συναρτήσεις

$$f + g \ , \ f - g \ , \ c \cdot f \ , \ f \cdot g \ , \ \frac{f}{g} \ , \ |f| \ , \ f^{\nu} \text{ και } \sqrt[\mu]{f}$$

με $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο σημείο x_0 εφόσον ορίζονται στο σημείο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$ η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.