Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

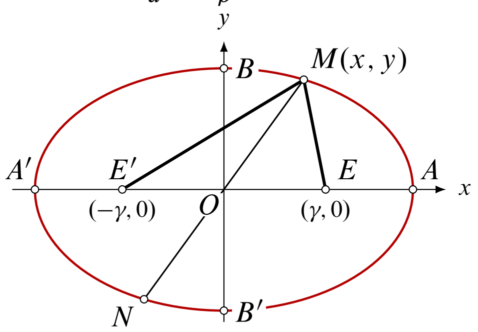
20 Απριλίου 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Β Λυκείου

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

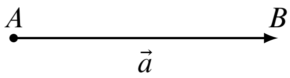
Ξυνόν γαρ αρχή και πέρας επί κύκλου περιφερείας.

“Σε έναν κύκλο, κάθε σημείο είναι και αρχή και τέλος.”
Ηράκλειτος, 544-484 π.Χ.

1 Διανύσματα
ΟΡΙΣΜΟΙ

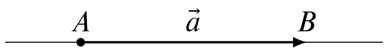
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΜΕΓΕΘΟΣ
Διανυσματικό ονομάζεται ενα μέγεθος το οποίο προσδιορίζεται από το μέτρο του αλλά και τη διεύθυνση και τη φορά του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΔΙΑΝΥΣΜΑ
Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.



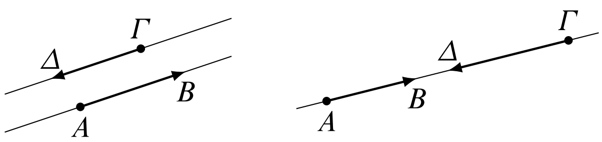
- Τα στοιχεία ενός διανύσματος είναι η φορά, η διεύθυνση και το μέτρο.
- Η διεύθυνση μαζί με τη φορά ορίζουν την **κατεύθυνση** του διανύσματος.
- Τα άκρα ενός διανύσματος ονομάζονται **αρχή** (Α) και **πέρας** (Β). Κάθε διάνυσμα συμβολίζεται με το όνομα του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα άκρα του : $\overrightarrow{AB}$ ή με ένα μικρό γράμμα : $\vec{a}$.
- Το μέτρο του διανύσματος είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος .
- Το διάνυσμα του οποίου τα άκρα ταυτίζονται ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\vec{0}$: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΦΟΡΕΑΣ - ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
Φορέας ενός διανύσματος ονομάζεται η ευθεία στην οποία βρίσκεται πάνω το διάνυσμα. Ο φορέας ενός διανύσματος καθορίζει τη διεύθυνση του.



Η φορά του διανύσματος μας δίνει τον προσανατολισμό του πάνω στον φορέα, δηλαδή τη διάταξη των άκρων του πάνω στο φορέα. Μας δείχνει προς ποιό μέρος “κινείται” το διάνυσμα πάνω στη ευθεία.

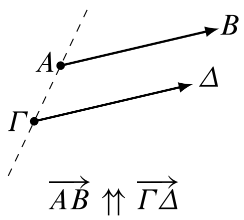
ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ - ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα ονομάζονται τα διανύσματα τα οποία έχουν κοινό φορέα ή παράλληλους φορείς. Τα παράλληλα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση.

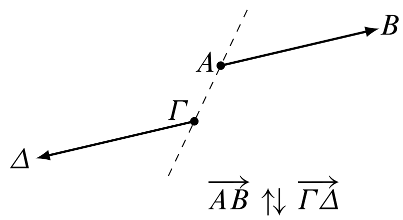


ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΟΜΜΟΡΟΠΑ - ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. **Ομόρροπα**
   Τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά λέγονται ομόρροπα. Είναι παράλληλα και η ευθεία που διέρχεται από τις αρχές τους τα αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο. Ανάμεσα σε δύο ομόρροπα διανύσματα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\upuparrows$. Τα ομόρροπα διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση.

   - Ανάμεσα σε δύο ομόρροπα διανύσματα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\upuparrows$.
   - Τα ομόρροπα διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση.





2. **Αντίρροπα**
Τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά λέγονται αντίρροπα. Είναι παράλληλα και βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας που διέρχεται από τις αρχές τους.
   - Ανάμεσα σε δύο αντίρροπα διανύσματα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\uparrow\downarrow$.
   - Τα αντίρροπα διανύσματα έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

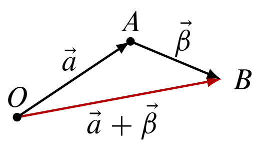
ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΙΣΑ - ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. **Ίσα διανύσματα**
Ίσα λεγονται τα ομόρροπα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα.
2. **Αντίθετα διανύσματα**
Αντίθετα λεγονται τα αντίρροπα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ ονομάζεται η κυρτή γωνία που σχηματίζουν οι φορείς των δύο διανυσμάτων.

- Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται με $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$.
- Η γωνία θ δύο διανυσμάτων παίρνει τιμές από $0°$ μέχρι $180°$: $0° \leq \theta \leq 180°$ ή $0 \leq \theta \leq \pi$.
- Αν $\theta = 0$ τότε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα : $\theta = 0 \Rightarrow \vec{a} \upuparrows \vec{\beta}$.
- Αν $\theta = \pi$ τότε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα : $\theta = \pi \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ τότε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα : $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$.

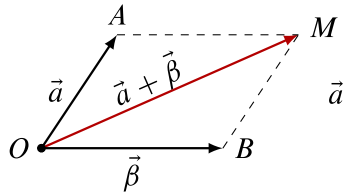
ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ - ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
Άθροισμα ή συνισταμένη δύο μη μηδενικών **διαδοχικών** διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\vec{a} + \vec{\beta}$ το οποίο έχει αρχή, την αρχή του $\vec{a}$ και πέρας, το πέρας του $\vec{\beta}$.



$$\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

- Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι διαδοχικά τότε μεταφέρουμε παράλληλα ένα εκ των δύο ώστε η αρχή του να συμπέσει με το πέρας του πρώτου.
- Το άθροισμα των διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της αρχής O.

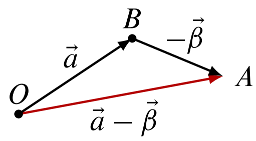
ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ - ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
Άθροισμα ή συνισταμένη δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$ που έχουν **κοινή αρχή**, ονομάζεται το διάνυσμα $\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OM}$ το οποίο αποτελεί τη **διαγώνιο** του παραλληλογράμμου $OAMB$ που ορίζουν οι διαδοχικές πλευρές OA και OB.

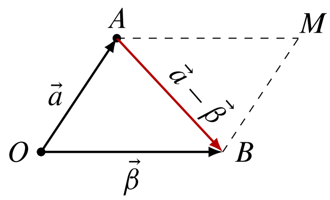


$$\vec{a}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 : ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η διαφορά $\vec{a}-\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του διανύσματος $\vec{a}$ με το αντίθετο του $\vec{\beta}$.



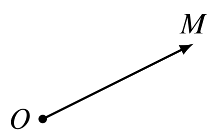


$$\vec{a}-\vec{\beta}=\vec{a}+\left(-\vec{\beta}\right)$$

- Με τον κανόνα της πρόσθεσης διαδοχικών διανυσμάτων τοποθετούμε στο πέρας του $\vec{a}$ την αρχή του διανύσματος $-\vec{\beta}$.
- Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου η διαφορά των δύο διανυσμάτων $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η δεύτερη διαγώνιος $\overrightarrow{AB}$ του παραλληλογράμμου $OAMB$. Έχει αρχή το πέρας του $\vec{a}$ και πέρας, το πέρας του $\vec{\beta}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 : ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

Διάνυσμα θέσης ή διανυσματική ακτίνα ενός σημείου M ονομάζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με αρχή ένα τυχαίο σταθερό σημείο O του επιπέδου και πέρας το σημείο M.



- Το σταθερό σημείο O ονομάζεται **σημείο αναφοράς**.
- Το σημείο O είναι αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων του ίδιου επιπέδου ή χώρου και η επιλογή του είναι αυθαίρετη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12 : ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\lambda\cdot\vec{a}$ το οποίο είναι

- παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{a}$ και
- έχει μέτρο πολλαπλάσιο του μέτρου του $\vec{a}$ ίσο με $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$.

Αν $\lambda>0$ τότε το διάνυσμα $\lambda\cdot\vec{a}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$, ενώ αν $\lambda<0$ τότε το διάνυσμα $\lambda\cdot\vec{a}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 : ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ το οποίο μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ στη μορφή :

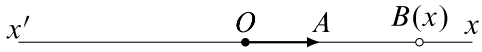
$$\vec{\delta}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{\beta}$$

όπου λ,μ είναι πραγματικοί αριθμοί. Γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός ν σε πλήθος διανυσμάτων $\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_2}$ θα έχει ομοίως τη μορφή

$$\vec{v}=\lambda_1\cdot\vec{a_1}+\lambda_2\cdot\vec{a_2}+\ldots+\lambda_\nu\cdot\vec{a_\nu}$$

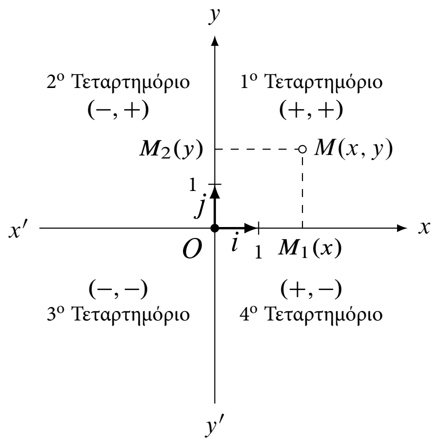
ΟΡΙΣΜΟΣ 14 : ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Μοναδιαίο ονομάζεται κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ του οποίου το μέτρο ισούται με τη μονάδα. Ως μονάδα ορίζουμε οποιοδήποτε μήκος το οποίο δεχόμαστε ως μονάδα μέτρησης.



- Το μοναδιαίο διάνυσμα μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στον άξονα των αριθμών, με αρχή την αρχή O του άξονα $x'x$. Η ημιευθεία Ox ονομάζεται **θετικός** ημιάξονας ενώ η Ox' **αρνητικός ημιάξονας**.
- Για κάθε σημείο B του άξονα θα υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OB} = x \cdot \vec{i}$. Αντίστροφα, για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει σημείο B του άξονα ώστε $\overrightarrow{OB} = x \cdot \vec{i}$.
- Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου B.

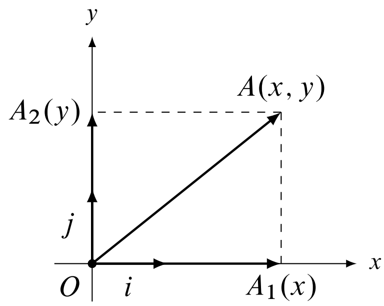
ΟΡΙΣΜΟΣ 15 : ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές x, y.



- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε την ίδια μονάδα μέτρησης.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο M του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο M του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον ημιάξονα Ox βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ στον Ox' οι αρνητικές. Το μοναδιαίο διάνυσμα του οριζόντιου άξονα είναι το $\vec{i}$.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο ημιάξονα Oy βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ στον Oy' οι αρνητικές τιμές. Το μοναδιαίο διάνυσμα του κατακόρυφου άξονα είναι το $\vec{j}$.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 16 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
Συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ του επιπέδου, ονομάζεται το μοναδικό ζεύγος αριθμών (x, y) με το οποίο το διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j.

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad \text{ή} \qquad \vec{a} = (x, y)$$



i. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ γράφεται κατά **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j.
ii. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{a}$.
iii. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** ενώ ο y **τεταγμένη** του διανύσματος $\vec{a}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 17 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Συντελεστής διεύθυνσης λ ενός μη μηδενικού διανύσματος $\vec{a}$ με συντεταγμένες (x, y) ισούται με το πηλίκο της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος.

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\omega$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 : ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

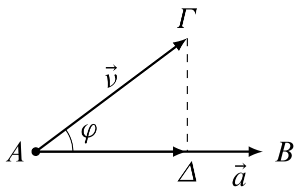
Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ο οποίος ισούται με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν.

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}|\text{συν}\varphi$$

- Η γωνία φ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$.
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 19 : ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Προβολή ενός διανύσματος $\vec{v}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται το διάνυσμα το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο ίσο με την προβολή του ευθύγραμμου τμήματος $|\vec{v}|$ πάνω στο φορέα του $\vec{a}$. Συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$.



$$\overrightarrow{A\Delta} = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

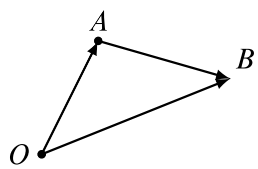
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ιδιότητες της πράξης της πρόσθεσης διανυσμάτων.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Αντιμεταθετική	$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\vec{a} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \left(\vec{a} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma}$
Ουδέτερο στοιχείο	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
Αντίθετα διανύσματα	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του επιπέδου ή του χώρου γράφεται ως η διαφορά της διανυσματικής ακτίνας του πέρατος $\overrightarrow{OB}$ με τη διανυσματική ακτίνα της αρχής $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Το μέτρο του αθροίσματος δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μικρότερο ίσο από το άθροισμα των μέτρων τους και μεγαλύτερο ίσο από τη διαφορά τους.

$$\left||\vec{a}| - |\vec{\beta}|\right| \leq \left|\vec{a} + \vec{\beta}\right| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και πραγματικούς αριθμούς λ, μ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για την πράξη του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό.

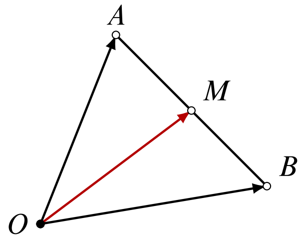
Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Επιμεριστική (ως προς αριθμό)	$\lambda\left(\vec{a} \pm \vec{\beta}\right) = \lambda \cdot \vec{a} \pm \lambda \cdot \vec{\beta}$
Επιμεριστική (ως προς διάνυσμα)	$(\lambda \pm \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} \pm \mu \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$
Πρόσημο γινομένου	$\left(-\lambda \cdot \vec{a}\right) = (-\lambda) \cdot \vec{a} = -\left(\lambda \cdot \vec{a}\right)$
Νόμος διαγραφής (ως προς διάνυσμα)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq 0$ τότε $\lambda = \mu$
Νόμος διαγραφής (ως προς αριθμό)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το ένα διάνυσμα να είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

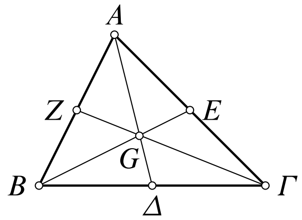
i. Αν $\lambda > 0$ τότε τα διανύσματα είναι ομόρροπα : $\vec{a} \upuparrows \vec{\beta}$
ii. Αν $\lambda < 0$ τότε τα διανύσματα είναι αντίρροπα : $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
Η διανυσματική ακτίνα του μέσου M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων A και B.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΥ
Η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OG}$ του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με το ένα τρίτο του αθροίσματος των διανυσματικών ακτίνων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ των κορυφών του τριγώνου.



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}}{3}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$$

Επιπλέον το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των κορυφών A, B και Γ του τριγώνου με σημείο αναφοράς το βαρύκεντρο του, ισούται με το μηδενικό διάνυσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\beta = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί τότε οι συντεταγμένες του αθροίσματος, του γινομένου και του γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

Πράξη	**Συντεταγμένες**
Άθροισμα	$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Πολλαπλασιασμός	$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
Γραμμικός συνδυασμός	$\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων A και B.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ
Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ισούνται με τις συντεταγμένες του πέρατος μείον τις συντεταγμένες της αρχής.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, θα είναι παράλληλα αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις.

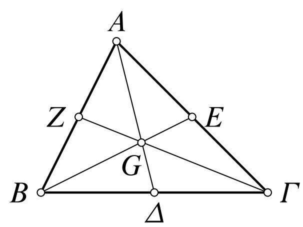
i. Οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων είναι ίσοι : $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

ii. Η ορίσουσα $\det(\vec{a}, \vec{\beta})$ των συντεταγμένων των διανυσμάτων ισούται με το 0.

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι ίσες με το ένα τρίτο του αθροίσματος των συντεταγμένων των κορυφών του τριγώνου.

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad , \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ - ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ του επιπέδου ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντεταγμένων του.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ή ισοδύναμα η απόσταση ανάμεσα στα σημεία A και B δίνεται από τον τύπο.

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ και πραγματικό αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για την πράξη του εσωτερικού γινομένου.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Κάθετα διανύσματα	Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ και $\lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$
Ομόρροπα διανύσματα	Αν $\vec{a} \upuparrows \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
Αντίρροπα διανύσματα	Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$
Αντιμεταθετική	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu\vec{\beta}) \cdot \vec{a}$
Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 : ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισούται με το άθροισμα του γινομένου των τετμημένων με το γινόμενο των τεταγμένων των διανυσμάτων.

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 : ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισούται με το πηλίκο του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων προς το γινόμενο των μέτρων τους.

$$\text{συν}(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 : ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ενός διανύσματος επί την προβολή του δεύτερου διανύσματος πάνω στο πρώτο.

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$$

2 Ευθεία

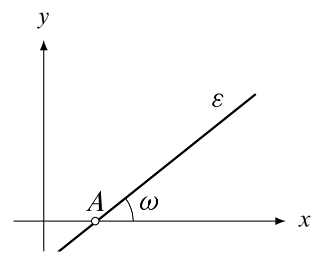
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΡΑΜΜΗΣ
Εξίσωση μιας γραμμής C του επιπέδου, ονομάζεται μια εξίσωση με δύο άγνωστους x, y η οποία επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες των σημείων της γραμμής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ
Συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\omega}$ που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$\lambda = \text{εφ}\omega$$

- Η γωνία $\hat{\omega}$ παίρνει τιμές από $0°$ μέχρι $180°$: $0° \leq \omega \leq 180°$.
- Κορυφή της γωνίας είναι το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$.
- Αν $\hat{\omega} = 0$ ή $\hat{\omega} = 180° \Leftrightarrow \varepsilon \parallel x'x$ και $\lambda = 0$.
- Αν $\hat{\omega} = 90° \Leftrightarrow \varepsilon \parallel y'y$ και δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.
- Αν $\vec{\delta}$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ε τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ
Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία αυτά ισούται με το πηλίκο της διαφοράς των τεταγμένων προς τη διαφορά των τετμημένων του σημείου A από το σημείο B.

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ
Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο ευθείες του επιπέδου και $\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}$ τα παράλληλα διανύσματα των ευθειών αντίστοιχα, τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

i. Οι ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης :

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \parallel \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ii. Οι ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους ισούται με -1.

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ
Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο $A(x_0, y_0)$ του επιπέδου και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

i. Αν το σημείο A ανήκει στον κατακόρυφο άξονα τότε η ευθεία γράφεται στη μορφή $y = \lambda x + \beta$.
ii. Αν η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \lambda x$.
iii. Οι οριζόντιες ευθείες έχουν εξίσωση της μορφής $y = y_0$.
iv. Οι κατακόρυφες ευθείες έχουν εξίσωση της μορφής $x = x_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές A και B των μεταβλητών x και y αντίστοιχα δηλαδή $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

i. Αν $B \neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης ισούται με $\lambda = -\frac{A}{B}$ ενώ η ευθεία έχει απλή μορφή την

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

ii. Αν $B = 0$ η ευθεία είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = -\frac{\Gamma}{A}$.

iii. Το διάνυσμα που είναι παράλληλο με την ευθεία θα είναι $\vec{\delta} = (B, -A)$, ενώ το κάθετο διάνυσμα θα είναι $\vec{\eta} = (A, B)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Η απόσταση ενός σημείου $A(x_0, y_0)$ του επιπέδου από μια ευθεία $(\varepsilon) : Ax + By + \Gamma = 0$ συμβολίζεται με $d(A, \varepsilon)$ και δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ ισούται με τη μισή απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων δύο πλευρών του τριγώνου.

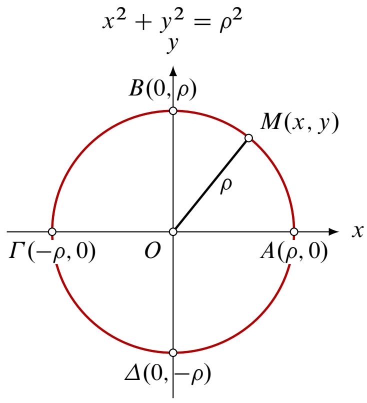
$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$$

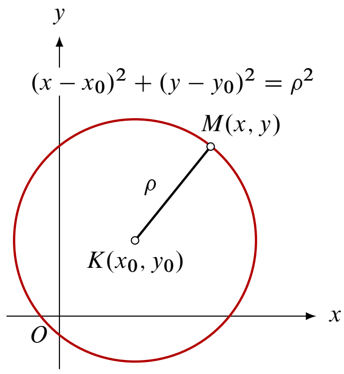
3 Κωνικές τομές
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΚΥΚΛΟΣ

Κύκλος ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του ίδιου επιπέδου.

- Το σταθερό σημείο ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου.
- Η σταθερή απόσταση των σημείων του κύκλου από το κέντρο ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου : $KM = \rho$.
- Ένας κύκλος συμβολίζεται ως (K, ρ) όπου K είναι το κέντρο και ρ η ακτίνα του.

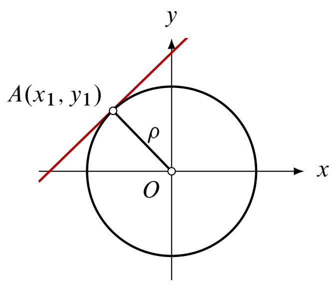




- Η καμπύλη του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, παριστάνεται αλγεβρικά από την εξίσωση
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
όπου x, y είναι οι συντεταγμένες των σημείων $M(x, y)$ του κύκλου.
- Αν ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων τότε θα έχει εξίσωσή της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Αν η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι ίση με τη μονάδα τότε ο κύκλος ονομάζεται **μοναδιαίος** και έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

Εφαπτομένη ενός κύκλου (K, ρ) σε ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ ονομάζεται η ευθεία η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο αυτό, έχει δηλαδή ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.



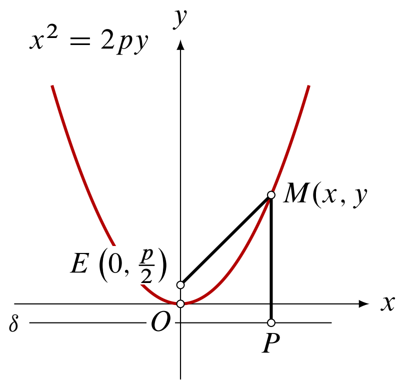
- Η εφαπτόμενη ευθεία για τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση
$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$
- Η εφαπτόμενη ευθεία του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ όπου M είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας.

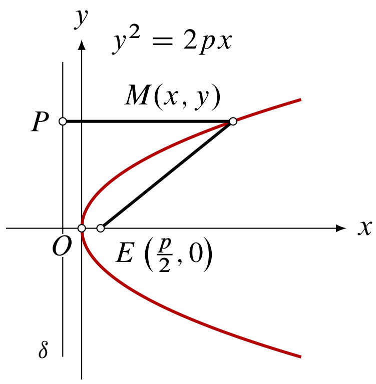
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν ίσες αποστάσεις από ένα σταθερό σημείο και μια ευθεία.
$$ME = MP$$

- Το σταθερό σημείο E ονομάζεται **εστία** της παραβολής.
- Η ευθεία δ ονομάζεται **διευθετούσα**.

- Το σημείο το οποίο βρίσκεται στο μέσο της απόστασης της εστίας από τη διευθετούσα ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.





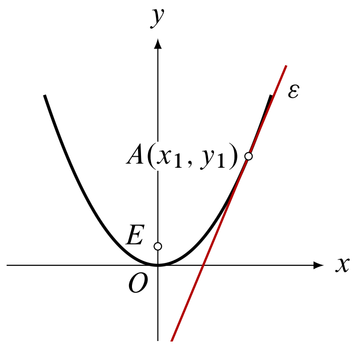
- Η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα συμβολίζεται με $|p|$, όπου p είναι η **παράμετρος** της παραβολής, με $p \in \mathbb{R}$.
- Κάθε παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων περιγράφεται από εξισώσεις της μορφής

$$x^2 = 2py \ \text{ και } \ y^2 = 2px$$

- Η εστία της παραβολής $x^2 = 2py$ βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ ενώ της $y^2 = 2px$ στον ορίζόντιο άξονα $x'x$.
- Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο O. Αντίστοιχα η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο.
- Η ευθεία που είναι κάθετη στη διευθετούσα και διέρχεται από την εστία της παραβολής ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Εφαπτομένη μιας παραβολής ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία έχει ένα κοινό σημείο με την παραβολή. Λέμε οτι εφάπτεται αυτής. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο επαφής**.



Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την παραβολή. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή παραβολής από της παραπάνω θα είναι :

- Για την παραβολή με εστίες στον άξονα $x'x : (\varepsilon) : xx_1 = p(y + y_1)$
- Για την παραβολή με εστίες στον άξονα $y'y : (\varepsilon) : yy_1 = p(x + x_1)$

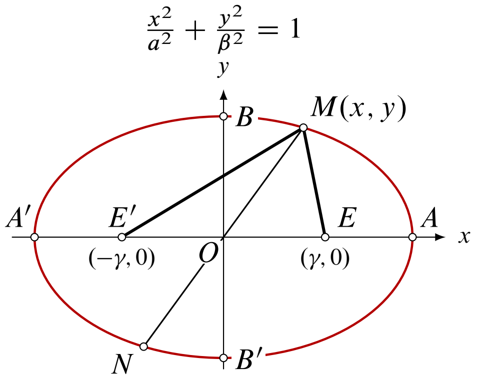
ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΕΛΛΕΙΨΗ

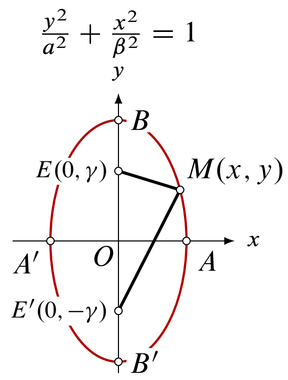
Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία παραμένει σταθερό.

- Τα δύο σταθερά σημεία έστω E, E' ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης.
- Το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου M από τις εστίες συμβολίζεται με $2a$.

$$ME + ME' = 2a$$

- Η απόσταση EE' μεταξύ των εστιών ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με 2γ.





- Τα σημεία στα οποία τέμνει η έλλειψη τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' και BB' με άκρα τις κορυφές της έλλειψης κατά μήκος ενός άξονα ονομάζονται **άξονες** της έλλειψης.
- Οι δύο άξονες είναι άξονες συμμετρίας της καμπύλης της έλλειψης ενώ η αρχή O των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας της και ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα MN με άκρα δύο συμμετρικά σημεία M, N της έλλειψης ως προς το κέντρο της ονομάζεται **διάμετρος** της έλλειψης.
- Κάθε έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ ή } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

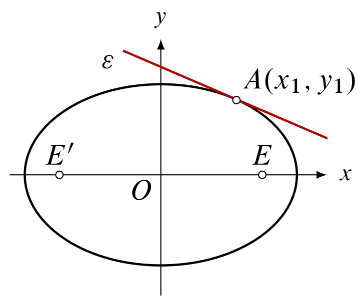
  όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$, η οποία περιέχει τις συντεταγμένες x, y των σημείων της.
- Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον οριζόντιο άξονα $x'x$, μεγάλο άξονα τον $AA' = 2a$ και μικρό τον $BB' = 2\beta$. Αντίστοιχα η έλλειψη με εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, μεγάλο άξονα τον $BB' = 2a$ και μικρό τον $AA' = 2\beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Εφαπτομένη μιας έλλειψης ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία έχει ένα κοινό σημείο με την έλλειψη και λέμε οτι εφάπτεται αυτής. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο επαφής**.

Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την έλλειψη. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή έλλειψης από της παραπάνω είναι :

- Για την έλλειψη με εστίες στον άξονα $x'x$: $(\varepsilon) : \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
- Για την έλλειψη με εστίες στον άξονα $y'y$: $(\varepsilon) : \frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$

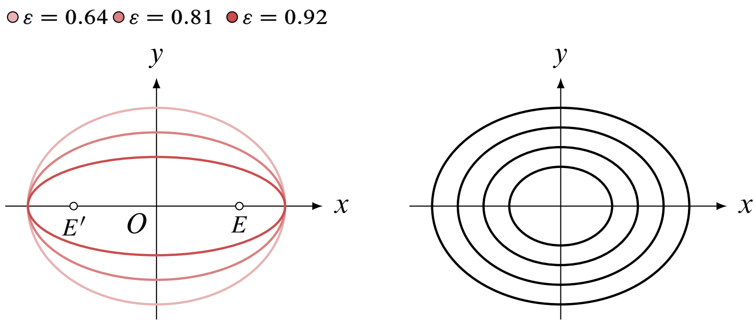


ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Εκκεντρότητα μιας έλλειψης ονομάζεται ο θετικός πραγματικός αριθμός $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ που ορίζεται ο λόγος της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου της άξονα.

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$$

Η εκκεντρότητας μιας έλλειψης χαρακτηρίζει το σχήμα της. Όσο μεγαλύτερη εκκεντρότητα έχει μια έλλειψη, τόσο επιμήκης είναι κατα μήκος του μεγάλου της άξονα.



Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα ονομάζονται **όμοιες**.

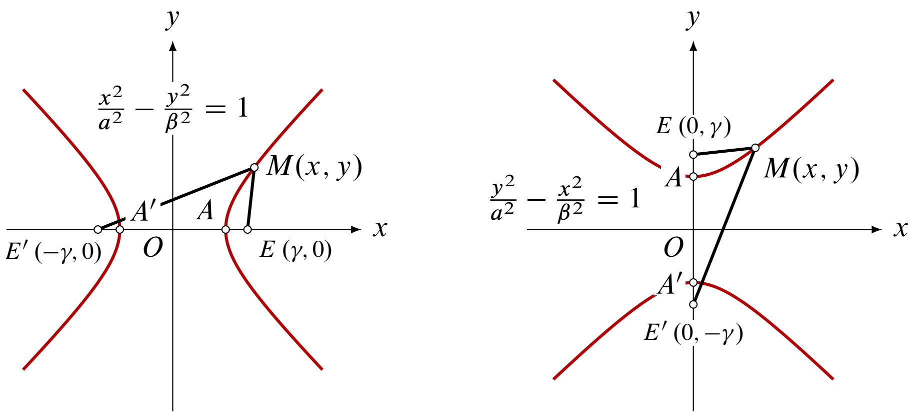
ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία παραμένει σταθερή.

$$|ME - ME'| = 2a$$

Η καμπύλη της υπερβολής αποτελείται από δύο κλάδους, χαρακτηριστικό το οποίο εξηγεί την ύπαρξη της απόλυτης τιμής στην παραπάνω σχέση.

- Τα σταθερά σημεία που ορίζουν την υπερβολή ονομάζονται **εστίες** της υπερβολής.
- Η σταθερή διαφορά των αποστάσεων του τυχαίου σημείου M από τις εστίες συμβολίζεται με $2a$.
- Η απόσταση EE' μεταξύ των εστιών ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με 2γ.



- Τα σημεία στα οποία η υπερβολή τέμνει τους άξονες ονομάζονται **κορυφές** της.
- Η καμπύλη της υπερβολής περιγράφεται αλγεβρικά από μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

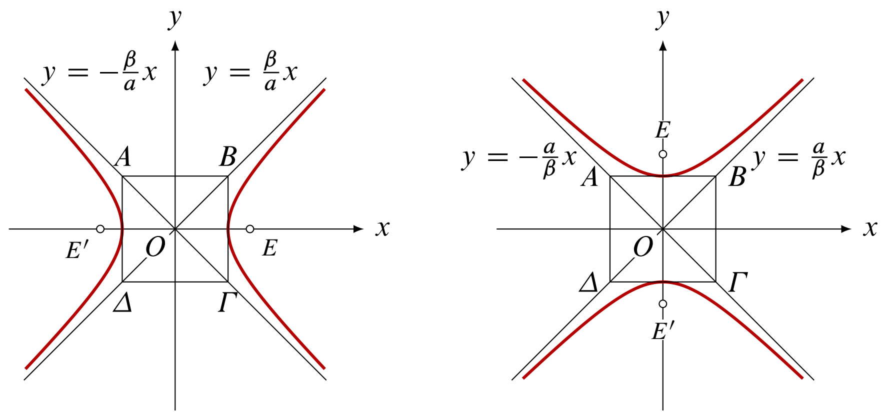
όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ και x, y οι συντεταγμένες των σημείων της.

- Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον οριζόντιο άξονα $x'x$ ενώ η υπερβολή $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχει της εστίες της στον κατακόρυφο άξονα $y'y$.

- Οι δύο άξονες είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής και λέγονται **άξονες** της υπερβολής, ενώ το σημείο τομής τους δηλαδή η αρχή O των αξόνων, **κέντρο** της υπερβολής το οποίο είναι κέντρο συμμετρίας της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ασύμπτωτες μιας υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες γραμμές οι οποίες βρίσκονται απειροελάχιστα κοντά στην καμπύλη της υπερβολής, χωρίς να τέμνονται ή να εφάπτονται μ' αυτή.



Καθώς οι κλάδοι της υπερβολής επεκτείνονται απεριόριστα, οι ασύμπτωτες πλησιάζουν όλο και περισσότερο την καμπύλη με αποτέλεσμα η απόστασή τους απ' αυτήν να τείνει στο μηδέν.

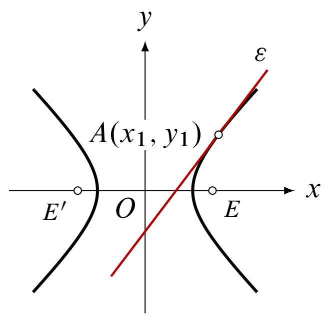
- Οι ασύμπτωτες ευθείες κάθε υπερβολής είναι δύο.
- Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής με εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\beta}{a}x$ και $y=-\frac{\beta}{a}x$, ενώ οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ έχουν εξισώσεις $y=\frac{a}{\beta}x$ και $y=-\frac{a}{\beta}x$.
- Τα σημεία $A(-a,\beta)$, $B(a,\beta)$, $\Gamma(a,-\beta)$ και $\Delta(-a,-\beta)$ είναι σημεία των ασύμπτωτων ευθειών και ορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ονομάζεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.
- Δύο από τις απέναντι πλευρές του ορθογωνίου βάσης εφάπτονται της υπερβολής στις κορυφές της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Εφαπτομένη μιας υπερβολής ονομάζεται η ευθεία γραμμή η οποία εφάπτεται στην υπερβολή σε ένα σημείο της.

Έστω $A(x_1,y_1)$ το κοινό σημείο της υπερβολής με την εφαπτόμενη ευθεία. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μορφή υπερβολής από της παραπάνω θα είναι :

- Για την υπερβολή με εστίες στον άξονα $x'x$: (ε) : $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$
- Για την υπερβολή με εστίες στον άξονα $y'y$: (ε) : $\frac{yy_1}{a^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

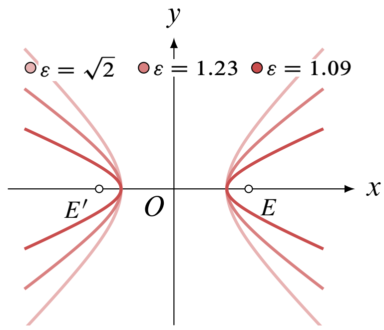


ΟΡΙΣΜΟΣ 11 : ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Εκκεντρότητα μιας υπερβολής ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\varepsilon\in\mathbb{R}$ που ορίζεται ως ο λόγος της εστιακής απόστασης προς την απόσταση των κορυφών της.

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{a}$$

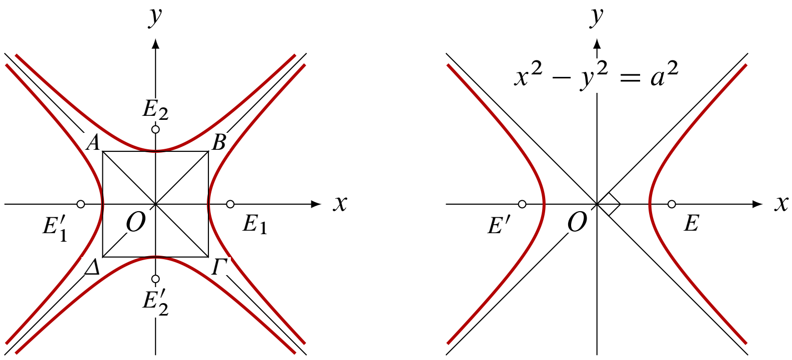
Το μέγεθος της εκκεντρότητας μιας υπερβολής καθορίζει το σχήμα της. Καθώς μειώνεται η εκκεντρότητα, η υπερβολή γίνεται όλο και πιο επιμήκης κατα μήκος του άξονα στον οποίον βρίσκονται οι εστίες.



ΟΡΙΣΜΟΣ 12 : ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΥΠΕΡΒΟΛΕΣ
Συζυγείς ονομάζονται δύο υπερβολές οι οποίες έχουν τις εστίες τους σε κάθετους μεταξύ τους άξονες και κοινές ασύμπτωτες ευθείες. Έχουν τη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ , \ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

Οι συζυγείς υπερβολές έχουν το ίδιο ορθογώνιο βάσης.



ΟΡΙΣΜΟΣ 13 : ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ
Ισοσκελής ονομάζεται η υπερβολή για την οποία οι παράμετροι a και β είναι ίσες. Με $a = \beta$ η εξίσωση μιας ισοσκελούς υπερβολής θα έχει τη μορφή

$$x^2 - y^2 = a^2 \ \text{ή} \ y^2 - x^2 = a^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

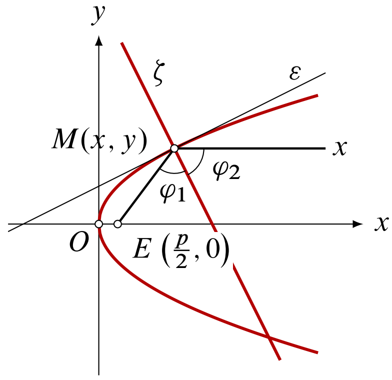
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$
Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\varGamma}}{2}$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $A^2 + B^2 - 4\varGamma > 0$. Αντιστρόφως, κάθε κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση την μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$.

i. Αν ισχύει $A^2 + B^2 - 4\varGamma = 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ένα σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
ii. Αν ισχύει $A^2 + B^2 - 4\varGamma < 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση δεν έχει λύσεις και κατά συνέπεια κανενός σημείου οι συντεταγμένες δεν την επαληθεύουν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ
Για τα σημεία μιας παραβολής και τη γραφική της παράσταση ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

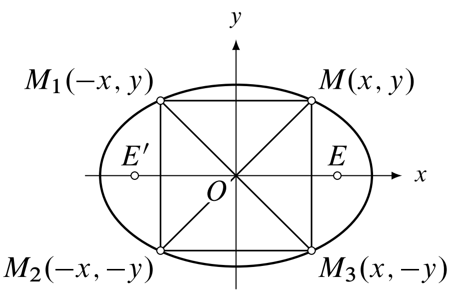
1. Η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα και η εστία της παραβολής.
2. Παραβολή $x^2 = 2py$.
   i. Για την παραβολή $x^2 = 2py$ οι αριθμοί p και y είναι ομόσημοι.
   ii. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής τότε και το σημείο $M_2(-x, y)$ θα είναι επίσης σημείο της παραβολής.
3. Παραβολή $y^2 = 2px$.
   i. Για την παραβολή $y^2 = 2px$ οι αριθμοί p και x είναι ομόσημοι.
   ii. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής τότε και το σημείο $M_1(x, -y)$ θα είναι επίσης σημείο της παραβολής.

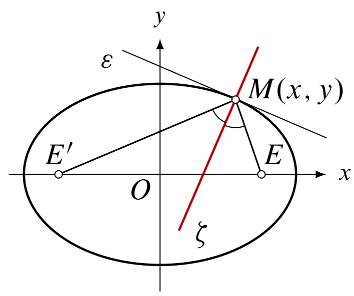
ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Η ευθεία που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο μιας παραβολής και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία Mx που είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής και το ευθύγραμμο τμήμα ME που ενώνει το σημείο με την εστία της παραβολής.



Η ιδιότητα αυτή της έλλειψης ονομάζεται **ανακλαστική** και δείχνει ότι κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από την εστία της παραβολής, ανακλάται πάνω στην παραβολή με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης της με αποτέλεσμα να γίνει παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ
Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο μιας έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε τα συμμετρικά του σημεία : $M_1(-x, y)$ ως προς τον άξονα $y'y$, $M_2(-x, -y)$ ως προς την αρχή των αξόνων και $M_3(x, -y)$ ως προς τον άξονα $x'x$ ανήκουν κι αυτά στην καμπύλη της έλλειψης.



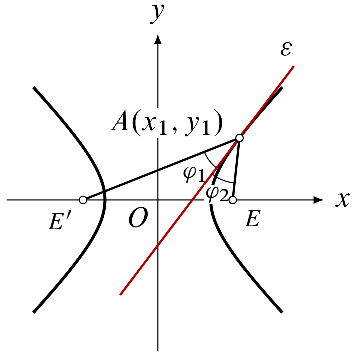


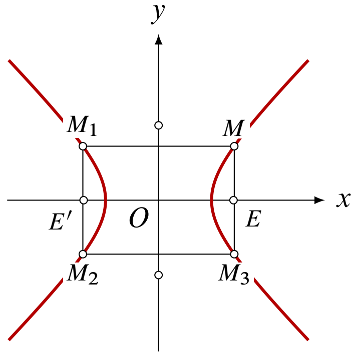
ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Η ευθεία που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο M μιας έλλειψης και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το σημείο με τις εστίες της έλλειψης.

$$\zeta \hat{M} E = E' \hat{M} \zeta$$

Η ιδιότητα αυτή της έλλειψης ονομάζεται **ανακλαστική** και δείχνει οτι κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από τη μια εστία της έλλειψης, ανακλάται πάνω στην έλλειψη με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης της με αποτέλεσμα να συναντήσει την άλλη εστία της έλλειψης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ
Αν $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ είναι μια υπερβολή του επιπέδου και $M(x, y)$ ένα σημείο αυτής, τότε τα σημεία $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ και $M_3(x, -y)$ ανήκουν και αυτά στην υπερβολή.





ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Η εφαπτόμενη ευθεία μιας υπερβολής με εστίες E, E' σε ένα τυχαίο σημείο της M, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα ME και ME' που ενώνουν το σημείο με τις εστίες της υπερβολής. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, μια ευθεία με κατεύθυνση μια εστία της υπερβολής, ανακλάται στην καμπύλη και παίρνει κατεύθυνση προς την άλλη εστία της.