



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ - 28 Φεβρουαρίου 2019

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ/ΤΡΙΑ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

# Διαγώνισμα

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

## ΘΕΜΑ Α

**A.1** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ . **Μονάδες 10**

**A.2** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. **Μονάδες 5**

**A.3** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.

- α. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ , παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$  τότε ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .
- β. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in [a, \beta]$  τότε ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .
- γ. Για μια συνάρτηση  $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  πιθανές θέσεις ακρότατων είναι τα άκρα του διαστήματος και τα κρίσιμα σημεία της.
- δ. Αν ισχύει  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ε. Αν ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}^*$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + ax - 1 - \eta\mu 2x$$

για την οποία ισχύει ότι  $f'(0) = 0$ .

**B.1** Να αποδείξετε ότι  $a = 2$ . **Μονάδες 4**

**B.2** Να εξετάσετε αν η  $f$  έχει ακρότατο στο 0. **Μονάδες 8**

**B.3** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . **Μονάδες 6**

**B.4** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{2017 + \eta\mu 2x}{x^2 + 2} = x$$

έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(0) = 2 \ln 3$  και:

$$f'(x) = (4x - 8)e^{-f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Γ.1** Να δείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \ln(2x^2 - 8x + 9)$ .

**Μονάδες 5**

**Γ.2** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**Γ.3** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

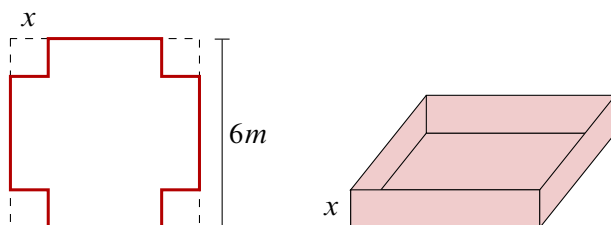
**Γ.4** Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$  για τους οποίους ισχύει:

$$f(ye^x - x^2 - yx) + f(y) = 0$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ανοιχτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς  $x$  μέτρων, με  $0 < x < 3$ , και στη συνέχεια οι πλευρές διπλώνονται προς τα πάνω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Δ.1** Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του  $x$  είναι:

$$f(x) = 4x(3 - x)^2, \quad 0 < x < 3$$

**Μονάδες 5**

**Δ.2** Να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  η δεξαμενή έχει το μέγιστο όγκο.

**Μονάδες 7**

**Δ.3** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ.4** Αν  $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , με  $x_1 < x_2$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_2} > \left( \frac{3 - \sin x_2}{3 - \sin x_1} \right)^2$$

**Μονάδες 7**

Καλή Επιτυχία!