1 Άλγεβρα

Άσκηση 1 Δίνονται τα σύνολα

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} / \left(x^2 - 1\right)(x - 2)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} / \left(x^2 - 4\right)(x - 1)\left(x^2 - 7x + 12\right) = 0\right\}$$

i. Να γραφτούν τα σύνολα A, B με αναγραφή.
ii. Να βρεθούν τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$.

Άσκηση 2 Ο καθηγητής των μαθηματικών καλείται να επιλέξει μαθητές για να εκπροσωπίσουν το σχολείο στη μαθηματική ολυμπιάδα του 2015. Στην επιλογή πρέπει να λάβει υπ όψιν του το αν ο μαθητής θα είναι αγόρι (α) ή κορίτσι (κ), σε ποιά τάξη πάει (Α, Β ή Γ Λυκείου) και το αν εχει συμμετάσχει ξανά ή όχι (ναι (ν) ή όχι (ο)) σε μαθηματική ολυμπιάδα. Εαν επιλέξει τυχαία κάποιον μαθητή να βρεθούν :

i. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
ii. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει συμμετάσχει ξανά σε μαθηματική ολυμπιάδα.
iii. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει επιλέξει κάποια ομάδα προσανατολισμού. (Το στοιχείο αυτό στο δίνω ώστε να βγάλεις συμπέρασμα τι τάξη πάει.)
iv. Το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι και να μην έχει συμμετάσχει ξανά σε διαγωνισμό.
v. Οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων.

Άσκηση 3 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq \delta$ ώστε να ισχύουν :

$$\frac{a + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

i. Να αποδείξεις οτι : $a = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$
ii. Να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης $\dfrac{a\gamma + \beta\delta}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

Άσκηση 4 Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2a\beta$.

i. Να αποδείξεις οτι $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των a, β.
ii. Για ποιές τιμές των a, β ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 5 Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $|x - 4| < 2$
ii. $|x + 3| \geq 5$

Άσκηση 6 Αν $1 < x < 4$ να γράψεις την παρακάτω παράσταση χωρις απόλυτες τιμές.

$$A = |x - 1| + |x - 4| + 3$$

Άσκηση 7 Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x, 5) \leq 9$.

i. Να περιγράψεις την παραπάνω σχέση λεκτικά.
ii. Με τη χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσεις γραφικά το σύνολο των δυνατών τιμών του x.
iii. Να γράψεις την αρχική σχέση με τη βοήθεια απόλυτων τιμών και να λύσεις αλγεβρικά την ανίσωση.
iv. Να χρησιμοποιήσεις τα συμπεράσματα του ερωτήματος (γ) για να αποδείξεις οτι :

$$|x + 4| + |x - 14| = 18$$

2 Γεωμετρία

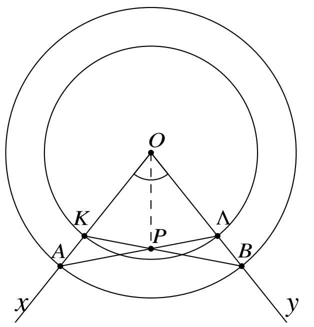
Άσκηση 1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Να δείξεις οτι :

i. Οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες.
ii. Οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE είναι ίσες.

Άσκηση 2 Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος AM. Στην προέκταση της AM παίρνουμε τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδειχθεί οτι :

i. Τα τρίγωνα MAB, $M\Gamma\Delta$ και $MA\Gamma$, $MB\Delta$ είναι ίσα.
ii. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα.
iii. $\hat{A} = B\hat{\Delta}\Gamma$.

Άσκηση 3 Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα.



Να αποδείξεις οτι

i. $A\Lambda = BK$.
ii. το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των $A\Lambda, BK$.
iii. η OP διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$.

Άσκηση 4 Στην προέκταση της διαμέσου AM ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ παίρνουμε τμήμα $M\Delta = MA$. Να αποδειχθεί οτι :

i. Τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
ii. $B\hat{A}M = \Gamma\hat{\Delta}M$.
iii. $B\Delta \perp \Gamma\Delta$.

Άσκηση 5 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ. Να δειχθεί οτι $\Delta\Gamma < AB + A\Gamma$.

Άσκηση 6 Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξεις οτι :

i. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ είναι ίσα.
ii. Η προέκταση της διαμέσου MA προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου $A\Delta E$.

Άσκηση 7 Να αποδείξεις οτι κάθε σημείο της διχοτόμου OM μιας γωνίας $x\hat{O}y$ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντίστροφα κάθε σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές, θα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο OM.