

14 Σεπτεμβρίου 2022

## Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

### Συνάρτηση 1 – 1 - Αντίστροφη

#### ΘΕΜΑ Α

- A.1** Να δώσετε τον ορισμό της 1 – 1 συνάρτησης. *Μονάδες 5*
- A.2** Να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}$  μιας συνάρτησης  $f$ . *Μονάδες 6*
- A.3** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ . *Μονάδες 6*
- A.4** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.
- α. Αν μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως μονότονη σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της τότε είναι και 1 – 1.
  - β. Έστω  $f$  μια αντιστρέψιμη συνάρτηση. Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .
  - γ. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι 1 – 1. Οι συναρτήσεις  $(f \circ f^{-1})(x)$  και  $(f^{-1} \circ f)(x)$  είναι μεταξύ τους ίσες.
  - δ. Αν  $f$  είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα τέμνονται πάνω στην ευθεία  $y = x$ .
  - ε. Οι εξισώσεις  $f(x) = f^{-1}(x)$  και  $f(x) = x$  είναι πάντα ισοδύναμες.

*Μονάδες 8*

#### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

- B.1** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1. *Μονάδες 6*
- B.2** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$  όπου  $g(x) = e^x$  και να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h = f \circ g$  είναι 1 – 1. *Μονάδες 7*
- B.3** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h^{-1}$ . *Μονάδες 7*
- B.4** Να λυθεί η εξίσωση

$$h^{-1} \left( h(|x| + 2) - \frac{1}{2} \right) = 1$$

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ Γ** Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 3)$  και  $B(2, 1)$ .

- Γ.1** Να δείξετε βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $f$  και να δείξετε ότι αντιστρέφεται. *Μονάδες 5*
- Γ.2** Να λυθεί η ανίσωση

$$f(-3 + f^{-1}(x^2)) < 3$$

*Μονάδες 7*

**Γ.3** Να λυθεί η εξίσωση

$$f^{-1}(f(\ln x) - 2) = 2$$

*Μονάδες 6*

**Γ.4** Αν ισχύει η ισότητα

$$\ln a - f^{-1}(a + 2) = -a + 2$$

να δείξετε ότι  $a = 1$ .

*Μονάδες 7*

**ΘΕΜΑ Δ** Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ.1** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

*Μονάδες 7*

**Δ.2** Να δείξετε ότι η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(3, 0)$ .

*Μονάδες 5*

**Δ.3** Να λύσετε την ανίσωση

$$f(6 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$$

*Μονάδες 6*

**Δ.4** Να λύσετε την ανίσωση

$$f^{-1}(x) - f(3 - x) < 3$$

*Μονάδες 7*

Διάρκεια εξετάσεων : 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!