Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

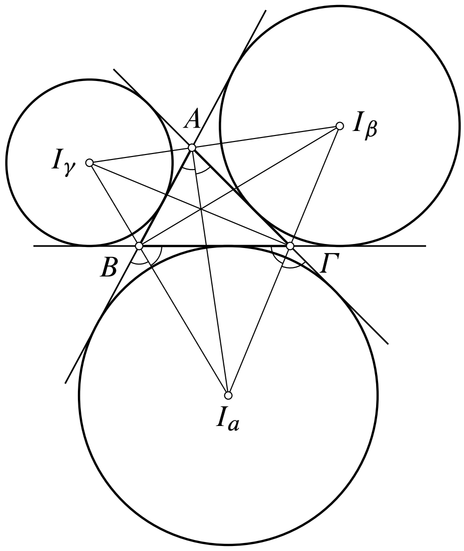
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

18 Οκτωβρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γεωμετρία

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



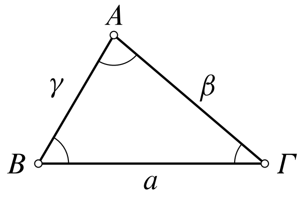
ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω.
Επιγραφή στην Ακαδημία Πλάτωνος.

1 Τρίγωνα
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΓΩΝΟ - ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τρίγωνο ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες.



- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές, οι γωνίες και οι κορυφές του.
- Κάθε τρίγωνο συμβολίζεται με τη χρήση των ονομάτων των τριών κορυφών του για παράδειγμα $AB\Gamma$.

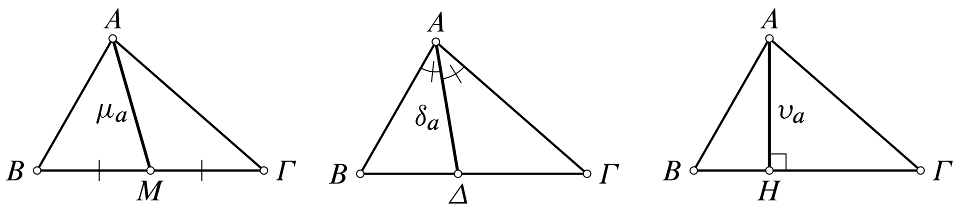
$$B\Gamma \to a \quad , \quad A\Gamma \to \beta \quad , \quad AB \to \gamma$$

- Οι πλευρές ενός τριγώνου, εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος, μπορούν εναλλακτικά να συμβολιστούν με ένα μικρό γράμμα, αντίστοιχο του ονόματος της απέναντι κορυφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τα δευτερεύοντα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος του. Αναλυτικά ορίζονται ως εξής :

1. **Διάμεσος**
   Διαμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
   - Κάθε διάμεσος συμβολίζεται είτε με τα γράμματα των δύο άκρων της είναι με το γράμμα μ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διάμεσος.
   - Οι διάμεσοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\mu_a, \mu_\beta, \mu_\gamma$.
2. **Διχοτόμος**
   Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο χωρίζει μια γωνία του τριγώνου σε δύο ίσα μέρη.
   - Κάθε διχοτόμος συμβολίζεται εναλλακτικά με το γράμμα δ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
   - Οι διχοτόμοι για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$.

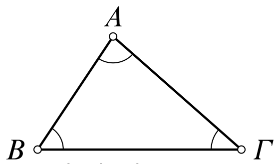
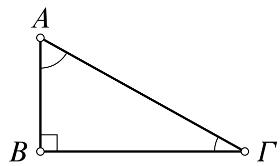
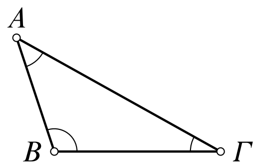


3. **Ύψος**
   Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει το ένα άκρο του σε μια κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο με την απέναντι πλευρά.
   - Τα ύψη ενός τριγώνου συμβολίζονται με το γράμμα υ το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
   - Τα ύψη για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ θα συμβολίζονται $\upsilon_a, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$.

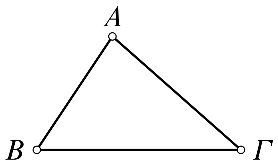
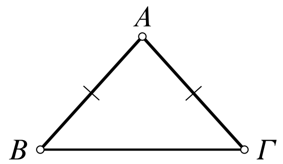
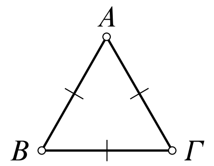
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τα τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς το είδος των γωνιών που περιέχουν και ως προς τη σχέση των πλευρων μεταξύ τους.

1. **Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες**
   Με κριτήριο το είδος των γωνιών που περιέχει ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα παρακάτω τρία είδη τριγώνων.

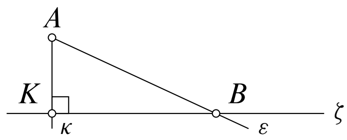
Οξυγώνιο	**Ορθογώνιο**	**Αμβλυγώνιο**
 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} < 90°$	 $\hat{B} = 90°$	 $\hat{B} > 90°$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **οξυγώνιο** εαν έχει **όλες** τις γωνίες του οξείες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ορθογώνιο** εαν έχει μια ορθή γωνία.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **αμβλυγώνιο** εαν έχει μια αμβλεία γωνία.

2. **Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές**
   Με βάση τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου χωρίζουμε τα τρίγωνα στις παρακάτω τρεις κατηγορίες.

Σκαληνό	**Ισοσκελές**	**Ισόπλευρο**
 $AB \neq A\Gamma \neq B\Gamma$	 $AB = A\Gamma$	 $AB = A\Gamma = B\Gamma$
Ένα τρίγωνο ονομάζεται **σκαληνό** εαν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους άνισες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισοσκελές** εαν έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση**.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισόπλευρο** εαν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΙΧΝΟΣ ΠΛΑΓΙΑΣ - ΚΑΘΕΤΟΥ

Ίχνος μιας πλάγιας ή κάθετης ευθείας ε πάνω σε μια ευθεία ζ ονομάζεται το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει τη ζ. Ομοίως, ίχνος ενός ευθυγράμμου τμήματος πάνω σε μια ευθεία ονομάζεται το σημείο τομής τους.



ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

Οι τρεις σχετικές θέσεις μεταξύ μιας ευθείας ε και ενός κύκλου (O, ρ) είναι οι ακόλουθες :

1. **Εξωτερική ευθεία**
   Εξωτερική ευθεία ενός κύκλου λέγεται μια ευθεία η οποία έχει απόσταση από το κέντρο του κύκλου μεγαλύτερη από την ακτίνα του.

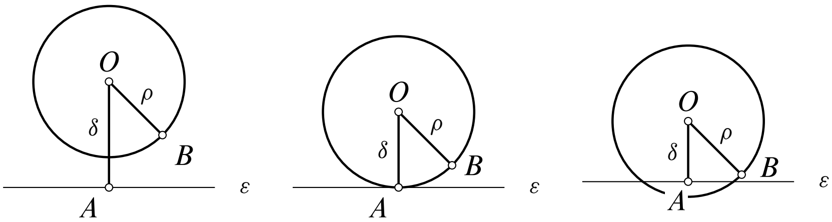
$$OA > OB \Leftrightarrow \delta > \rho$$

2. **Εφαπτόμενη ευθεία**
   Εφαπτόμενη ευθεία ενός κύκλου λέγεται μια ευθεία η οποία έχει απόσταση από το κέντρο του κύκλου ίση την ακτίνα του. Το κοινό σημείο της ευθείας και του κύκλου λέγεται **σημείο επαφής**.

$$OA = OB \Leftrightarrow \delta = \rho$$

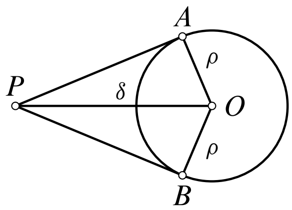
3. **Τέμνουσα ευθεία**
   Τέμνουσα ευθεία ενός κύκλου λέγεται μια ευθεία η οποία έχει απόσταση από το κέντρο του κύκλου μικρότερη από την ακτίνα του.

$$OA < OB \Leftrightarrow \delta < \rho$$



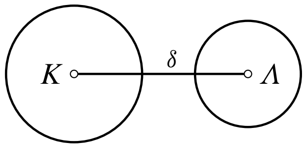
ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός του κύκλου και εφάπτονται εκατέρωθεν του. Η ευθεία που διέρχεται από το εξωτερικό σημείο και το κέντρο του κύκλου ονομάζεται **διακεντρική ευθεία**.



ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΔΙΑΚΕΝΤΡΟΣ ΚΥΚΛΩΝ

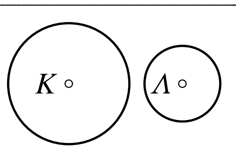
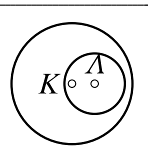
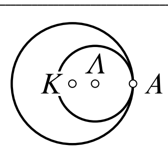
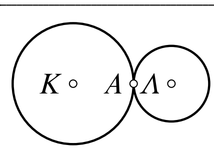
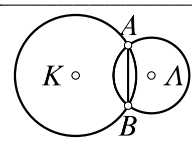
Διάκεντρος δύο κύκλων ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα τους. Συμβολίζεται με δ.



ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΩΝ

Οι τρεις σχετικές θέσεις μεταξύ δύο κύκλων είναι οι ακόλουθες :

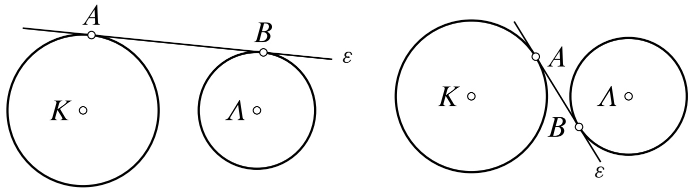
1. **Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία**
   Ένας κύκλος λέγεται εξωτερικός ή εσωτερικός ενός άλλου κύκλου όταν όλα τα σημεία του πρώτου βρίσκονται στο εξωτερικό ή εσωτερικό μέρος του δεύτερου αντίστοιχα. Οι κύκλοι αυτοί δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
2. **Εφαπτόμενοι κύκλοι**
   Εφαπτόμενοι ονομάζονται οι κύκλοι οι οποίοι έχουν ένα κοινό σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **σημείο επαφής**.
3. **Τεμνόμενοι κύκλοι**
   Τεμνόμενοι ονομάζονται οι κύκλοι οι οποίοι έχουν δύο κοινά σημεία. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία αυτά ονομάζεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων.

Χωρίς κοινά σημεία		**Εφαπτόμενοι**		**Τεμνόμενοι**
				

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

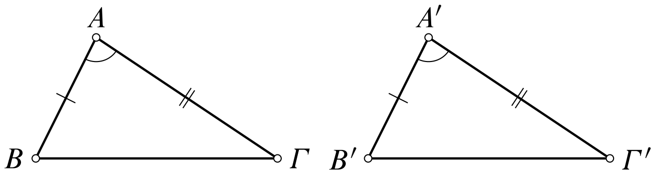
Για την κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις :

1. **Κοινή εξωτερική εφαπτομένη**
   Κοινή εξωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων ονομάζεται η ευθεία η οποία εφάπτεται και στους δύο κύκλους έτσι ώστε να βρίσκονται και οι δύο κύκλοι στο ίδιο ημιεπίπεδο.
2. **Κοινή εσωτερική εφαπτομένη**
   Κοινή εσωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων ονομάζεται η ευθεία η οποία εφάπτεται και στους δύο κύκλους έτσι ώστε να βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.



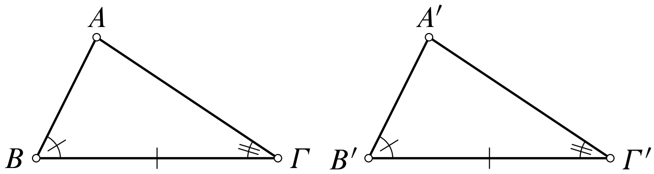
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες μεταξύ τους ίσες τότε είναι ίσα.



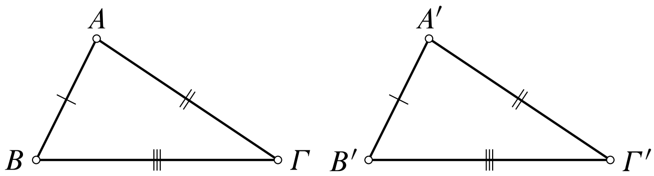
$$AB = A'B'$$
$$A\Gamma = A'\Gamma'$$
$$\hat{A} = \hat{A}'$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες, τότε ειναι ίσα.



$$B\Gamma = B'\Gamma'$$
$$\hat{B} = \hat{B}'$$
$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

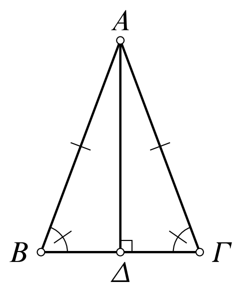
ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Αν δυο τριγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, τότε ειναι ίσα.



$$AB = A'B'$$
$$A\Gamma = A'\Gamma'$$
$$B\Gamma = B'\Gamma'$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ισοσκελές τριγωνο

- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφης του ισοσκελούς τριγώνου ειναι και διάμεσος και ύψος.



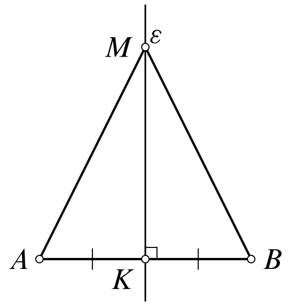
ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Οι γωνίες ισοπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : 3ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

Σε κάθε ισοσκελές τριγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος και διχοτόμος του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

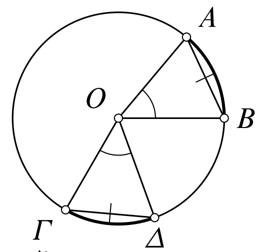


ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο το οποίο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : 1ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν δύο τόξα ενός κύκλου ειναι ίσα τότε και οι χορδές τους ειναι ίσες.



ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : 2ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν οι χορδές δύο τόξων μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : 3ο ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Αν οι χορδές δύο τόξων μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΘΕΤΟΥ

Από ένα σημείο που βρίσκεται εκτός μιας ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη προς την ευθεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 : 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια προσκείμενη γωνία ίση.

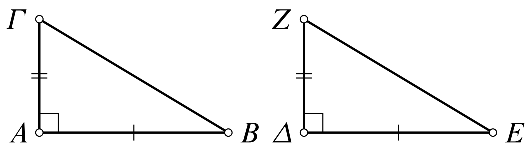
ΘΕΩΡΗΜΑ 15 : 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν ίσες υποτείνουσες και μια προσκείμενη οξεία γωνία ίση

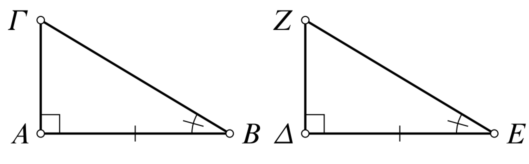
ΘΕΩΡΗΜΑ 16 : 4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και ίσες υποτείνουσες.

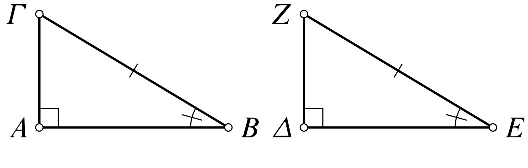
1ο Κριτήριο



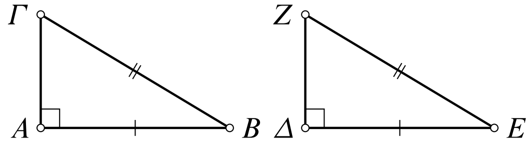
2ο Κριτήριο



3ο Κριτήριο



4ο Κριτήριο



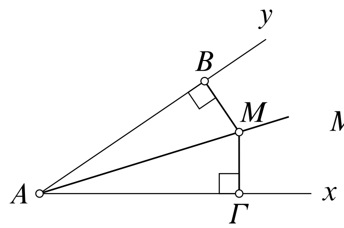
ΘΕΩΡΗΜΑ 17 : ΣΥΓΚΕΤΡΩΤΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
Τα παραπάνω τέσσερα κριτήρια συνοψίζονται στα δύο παρακάτω γενικά κριτήρια. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν

i. δύο πλευρές ίσες μια προς μια.
ii. μια πλευρά και μια προσκείμενη οξεία γωνία ίσες μια προς μια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 : ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος από την κορυφή προς τη βάση είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19 : ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΧΟΡΔΗ ΚΑΙ ΤΟ ΤΟΞΟ ΚΥΚΛΟΥ
Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

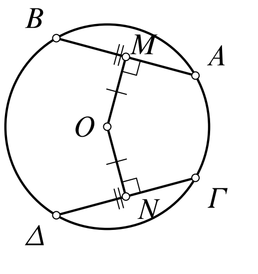
ΘΕΩΡΗΜΑ 20 : ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ
Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της. Αντίστροφα, κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας θα ανήκει στη διχοτόμο της.



$$MB = M\varGamma$$

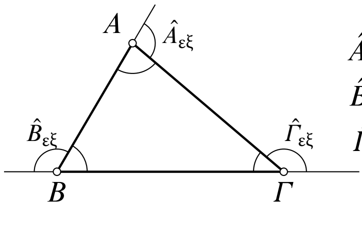
Προκύπτει λοιπόν ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21 : ΧΟΡΔΗ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΗΜΑ ΚΥΚΛΟΥ
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



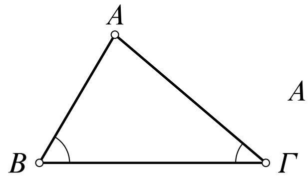
$$AB = \varGamma\varDelta \Leftrightarrow OM = ON$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 : ΣΧΕΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ
Σε κάθε τρίγωνο, οποιαδήποτε εξωτερική γωνία του είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική.



$$\hat{A}_{εξ} > \hat{B} \text{ και } \hat{A}_{εξ} > \hat{\varGamma}$$
$$\hat{B}_{εξ} > \hat{A} \text{ και } \hat{B}_{εξ} > \hat{\varGamma}$$
$$\hat{\varGamma}_{εξ} > \hat{A} \text{ και } \hat{\varGamma}_{εξ} > \hat{B}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ
Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από δύο άνισες πλευρές βρίσκονται δύο όμια άνισες γωνίες. Αντίστροφα απέναντι από δύο άνισες γωνίες βρίσκονται δύο όμοια άνισες πλευρές.



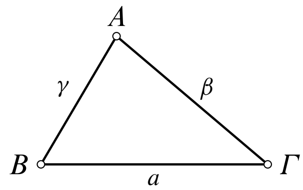
$$AB < A\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma} < \hat{B}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 24 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ
Ισχύουν οι εξής προτάσεις για τις σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου :

i. Απέναντι από την ορθή γωνία σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και απέναντι από την αμβλεία γωνία σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
ii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες τότε είναι ισοσκελές.
iii. Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες τότε είναι ισόπλευρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 25 : ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ
Σε κάθε τρίγωνο, οποιαδήποτε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

$$\beta - \gamma < a < \beta + \gamma \quad , \quad \text{με } \beta \geq \gamma$$



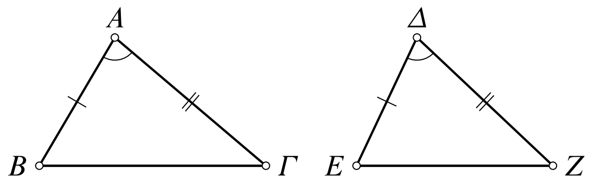
ΘΕΩΡΗΜΑ 26 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ
Αν σε ένα τρίγωνο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με ένα σημείο της απέναντι πλευράς είναι δύο από τα τρία δευτερεύοντα στοιχεία

i. διάμεσος
ii. διχοτόμος
iii. ύψος

τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά αυτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 27 : ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΠΛΕΥΡΩΝ
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες τους άνισες, τότε οι απέναντι πλευρές θα είναι όμοια άνισες.

$$AB = A\Gamma \text{ και } \hat{A} > \hat{\Delta} \Rightarrow B\Gamma > EZ$$



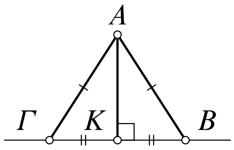
Αντίστροφα, αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις τρίτες πλευρές τους άνισες τότε οι απέναντι γωνίες θα είναι όμοια άνισες.

$$AB = A\Gamma \text{ και } B\Gamma > EZ \Rightarrow \hat{A} > \hat{\Delta}$$

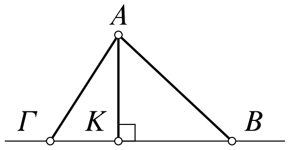
ΘΕΩΡΗΜΑ 28 : ΙΣΑ ΠΛΑΓΙΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
Αν δύο πλάγια προς μια ευθεία τμήματα είναι ίσα τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΛΑΓΙΑ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
Αν φέρουμε από ένα σημείο εκτός ευθείας το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε

i. Το κάθετο τμήμα έχει το μικρότερο μήκος από οποιοδήποτε άλλο πλάγιο.
ii. Δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα αν και μόνο αν οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι όμοια άνισες.



$AB = A\Gamma \Leftrightarrow KB = K\Gamma$

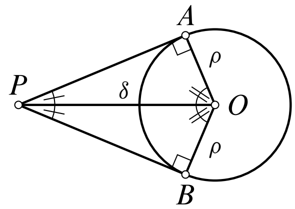


$AB > A\Gamma \Leftrightarrow KB > K\Gamma$

ΘΕΩΡΗΜΑ 30 : ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ - ΕΥΘΕΙΑΣ
Ένας κύκλος έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με μια ευθεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ
Η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο του κύκλου είναι μοναδική. Επιπλέον η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη με την εφαπτομένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 32 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου (O, ρ) τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.



i. Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από ένα σημείο εκτός ενός κύκλου είναι μεταξύ τους ίσα.
ii. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων στα σημεία επαφής.
iii. Η διακεντρική ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής που ενώνει τα σημεία επαφής.

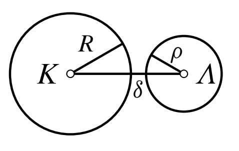
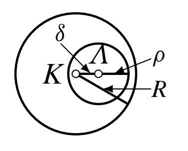
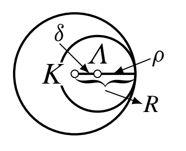
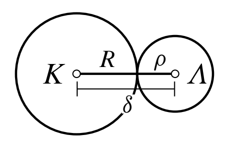
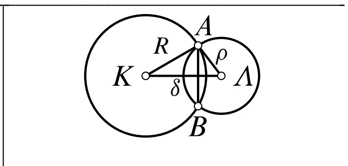
ΘΕΩΡΗΜΑ 33 : ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΩΝ
Για τις σχετικές θέσεις μεταξύ δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ), με $R > \rho$ ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

i. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εξωτερικός του κύκλου (K, R) αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους : $\delta > R + \rho$.
ii. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του κύκλου (K, R) αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μικρότερη από τη διαφορά των ακτίνων τους : $\delta < R - \rho$.
iii. Οι δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους : $\delta = R + \rho$.
iv. Οι δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με τη διαφορά των ακτίνων τους : $\delta = R - \rho$.
v. Οι δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μεταξύ του αθροίσματος και της διαφοράς των ακτίνων τους : $R - \rho < \delta < R + \rho$.

Γενικότερα οι προηγούμενες σχέσεις μεταξύ των ακτίνων των δύο κύκλων και της διακέντρου συνοψίζονται για τις τρεις βασικές σχετικές θέσεις των δύο κύκλων και γράφονται ισοδύναμα ως εξής :

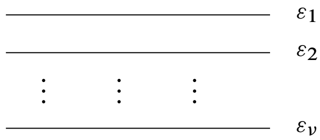
1. Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία : $\delta > R + \rho$ ή $\delta < R - \rho \Leftrightarrow |\delta - \rho| > R$.
2. Εφαπτόμενοι κύκλοι : $\delta = R + \rho$ ή $\delta = R - \rho \Leftrightarrow |\delta - \rho| = R$.
3. Τεμνόμενοι κύκλοι : $R - \rho < \delta < \delta < R + \rho \Leftrightarrow |\delta - \rho| < R$.

Οι προηγούμενες προτάσεις φαίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα :

Χωρίς κοινά σημεία		Εφαπτόμενοι		Τεμνόμενοι
				
$\left.\begin{array}{l}\delta<R-\rho\\ \delta>R+\rho\end{array}\right\}\Rightarrow\lvert\delta-\rho\rvert>R$		$\left.\begin{array}{l}\delta=R-\rho\\ \delta=R+\rho\end{array}\right\}\Rightarrow\lvert\delta-\rho\rvert=R$		$R-\rho<\delta<R+\rho\Rightarrow$ $\lvert\delta-\rho\rvert<R$

2 Παράλληλες ευθείες ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ



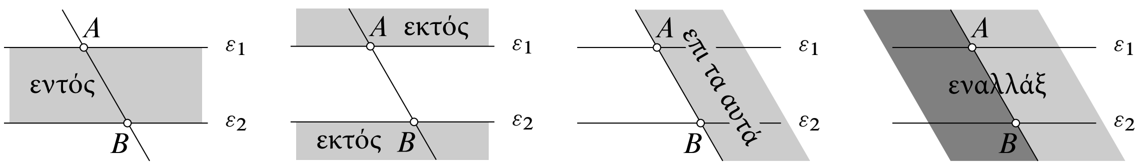
Παράλληλες ονομάζονται δύο ή περισσότερες ευθείες του ίδιου επιπέδου οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\parallel$.

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \ldots \parallel \varepsilon_\nu$$

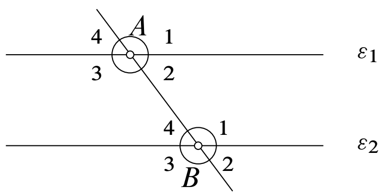
ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και μια τέμνουσα ε των δύο ευθειών. Η τέμνουσα ευθεία τέμνει τις παράλληλες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία A, B αντίστοιχα, οπότε σχηματίζονται 8 γωνίες με κορυφές τα σημεία A και B. Οι χαρακτηρισμοί που δίνονται σ' αυτές τις γωνίες είναι οι ακόλουθοι :

- Οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών ονομάζονται **εντός**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται στην περιοχή έξω από τις παράλληλες ευθείες ονομάζονται **εκτός**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η τέμνουσα ονομάζονται **επί τα αυτά**.
- Οι γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας ονομάζονται **εναλλάξ**.



Επιλέγοντας δύο γωνίες, μια με κορυφή το σημείο A και μια με κορυφή το B συνδυάζουμε τους παραπάνω χαρακτηρισμούς οπότε προκύπτουν οι εξής ονομασίες :



i. εντός εναλλάξ : $\hat{A}_2, \hat{B}_4$ και $\hat{A}_3, \hat{B}_1$
ii. εκτός εναλλάξ : $\hat{A}_1, \hat{B}_3$ και $\hat{A}_4, \hat{B}_2$
iii. εντός εκτός εναλλάξ : $\hat{A}_1, \hat{B}_4$, $\hat{A}_4, \hat{B}_1$, $\hat{A}_3, \hat{B}_2$ και $\hat{A}_2, \hat{B}_3$
iv. εντός και επί τα αυτά : $\hat{A}_3, \hat{B}_4$ και $\hat{A}_2, \hat{B}_1$
v. εκτός και επί τα αυτά : $\hat{A}_4, \hat{B}_3$ και $\hat{A}_1, \hat{B}_2$
vi. εντός εκτός και επί τα αυτά : $\hat{A}_1, \hat{B}_1$, $\hat{A}_2, \hat{B}_2$, $\hat{A}_3, \hat{B}_3$ και $\hat{A}_4, \hat{B}_4$

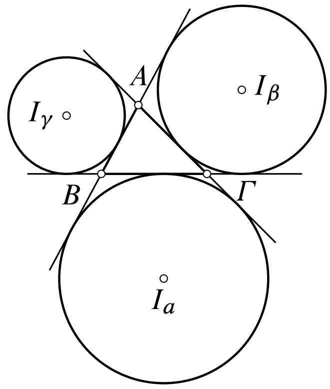
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

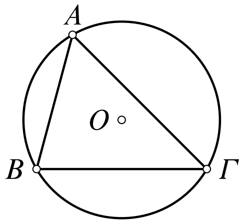
Περιγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Το κέντρο του κύκλου ονομάζεται **περίκεντρο**.

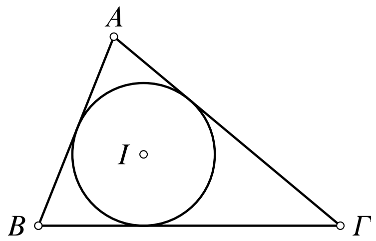
ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Εγγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Το κέντρο του κύκλου ονομάζεται **εγκεντρο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Παρεγγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος εφάπτεται σε μια πλευρά και στις προεκτάσεις των άλλων δύο πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Το κέντρο του κύκλου ονομάζεται **παράκεντρο**. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι.







ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ
Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και μια τέμνουσα ε τέμνει αυτές στα σημεία A, B αντίστοιχα. Αν ισχύει μια από τις προτάσεις :

i. οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
ii. οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
iii. οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

τότε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες : $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ
Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και μια τέμνουσα ε τέμνει αυτές στα σημεία A, B αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες τότε :

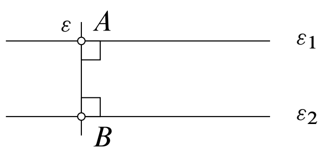
i. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
ii. Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
iii. Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΑΙΤΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ
Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μια ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΕΥΘΕΙΑ

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες σε μια τρίτη ευθεία ε σε διαφορετικά σημεία της, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

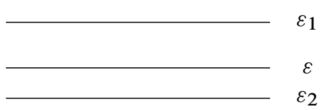
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon \text{ και } \varepsilon_2 \perp \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΕΥΘΕΙΕΣ ΑΝΑ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε τότε θα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

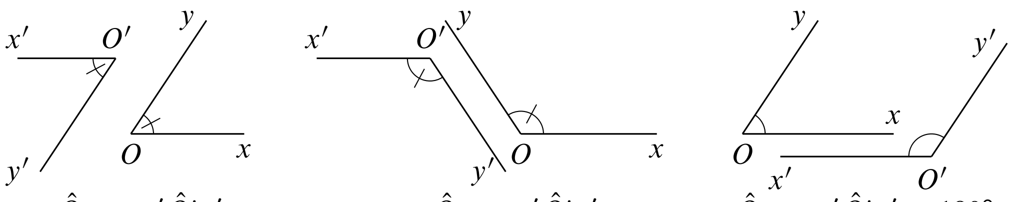
$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon \text{ και } \varepsilon_2 \parallel \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΕΥΘΕΙΑ
Αν μια ευθεία ε είναι τέμνουσα μιας από τις δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τότε θα είναι τέμνουσα και της άλλης. Προκύπτει παρόμοια ότι άν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από τις δύο παράλληλες τότε θα είναι κάθετη και με την άλλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ
Εαν δύο γωνίες $x\hat{O}y,\ x'\hat{O}'y'$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες τότε

i. αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες είναι ίσες.
ii. αν είναι μια οξεία και μια αμβλεία τότε είναι παραπληρωματικές.



$x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$ $\quad$ $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$ $\quad$ $x\hat{O}y + x'\hat{O}'y' = 180°$

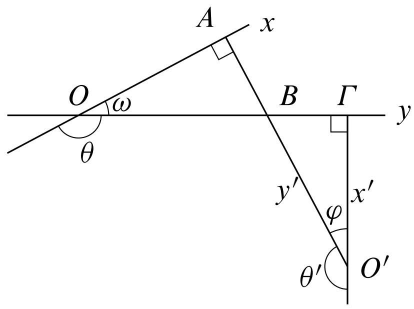
ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών ισούται με 180°.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Για τις γωνίες ενός τριγώνου ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

i. Κάθε εξωτερική γωνία σε ένα τρίγωνο είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
ii. Αν σε δύο τρίγωνα δύο γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες μια προς μια, τότε θα είναι και οι τρίτες γωνίες ίσες.
iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.
iv. Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούνται με 60°.

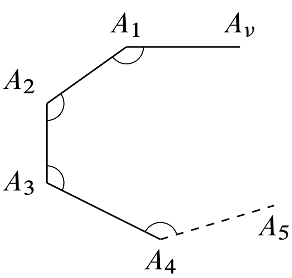
ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ
Εαν δύο γωνίες $x\hat{O}y,\ x'\hat{O}'y'$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες τότε

i. αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες είναι ίσες.
ii. αν είναι μια οξεία και μια αμβλεία τότε είναι παραπληρωματικές.

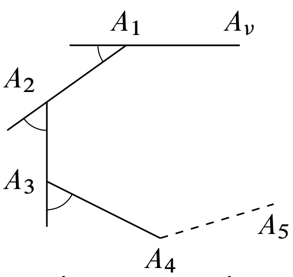


ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ $\nu-$ ΓΩΝΟΥ
Σε κάθε κυρτό $\nu-$γωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ ισχύει ότι :

i. Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού $\nu-$γωνου ισούται με $(2\nu-4)\cdot 90°$.
ii. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού $\nu-$γωνου ισούται με 360°.



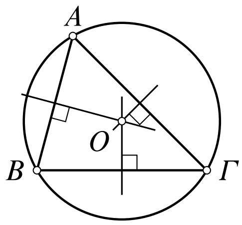
$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_\nu = (2\nu-4)\cdot 90°$

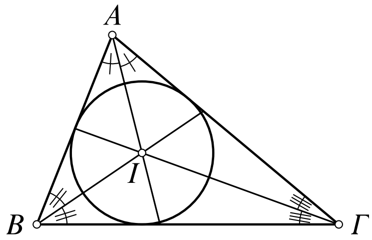


$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 360°$

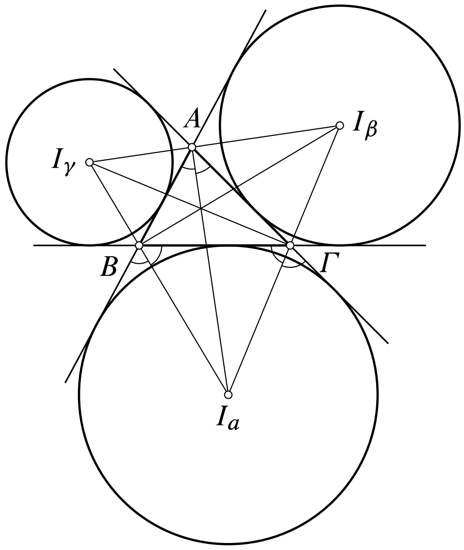
ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ
Οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, δηλαδή το περίκεντρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΕΓΚΕΝΤΡΟ
Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, δηλαδή το έγκεντρο.





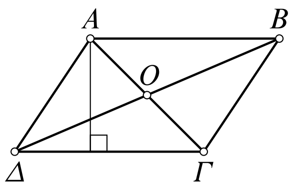
ΘΕΩΡΗΜΑ 14 : ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΠΑΡΑΚΕΝΤΡΟ
Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η διχοτόμος της τρίτης εσωτερικής γωνίας διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου, δηλαδή το παράκεντρο.



3 Παραλληλόγραμμα
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

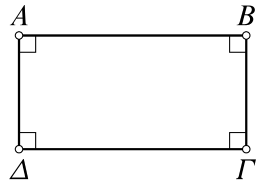
Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



- Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις απέναντι κορυφές του παραλληλογράμμου ονομάζονται **διαγώνιοι**.
- Το σημείο τομής των διαγωνίων του ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμου και είναι κάθετο σ' αυτές ονομάζεται **ύψος**.

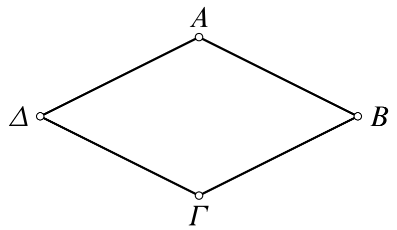
ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

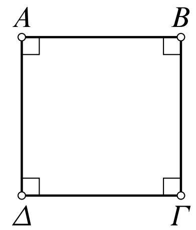
Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το ορθογώνιο ως το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει μια ορθή γωνία και κατά συνέπεια από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, προκύπτουν και οι υπόλοιπες γωνίες του ορθές.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΡΟΜΒΟΣ
Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο έχει τις διαδοχικές πλευρές του μεταξύ τους ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ
Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.

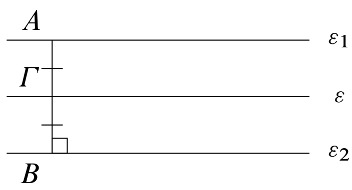




ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ
Μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του ίδιου επιπέδου τα οποία έχουν ίσες αποστάσεις από τις ευθείες αυτές.

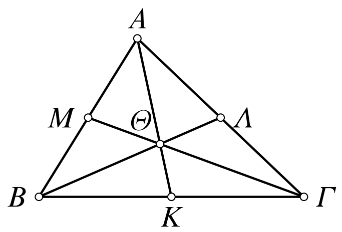
$$\varepsilon \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \qquad A\Gamma = B\Gamma$$

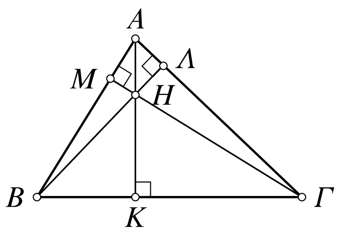
Είναι ευθεία γραμμή, παράλληλη με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και βρίσκεται στο μέσο της απόστασής τους.



ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους ενός τριγώνου ονομάζεται το σημείο τομής των τριών διαμέσων του τριγώνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Ορθόκεντρο ενός τριγώνου ονομάζεται το σημείο τομής των τριών υψών ή των φορέων των υψών του τριγώνου.

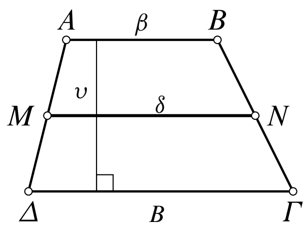


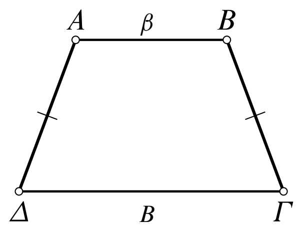


ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΕΤΡΑΔΑ
Ορθοκεντρική τετράδα ονομάζεται ένα σύνολο τεσσάρων σημείων για τα οποία κάθε τρίγωνο με κορυφές τρια απ’ αυτά τα σημεία έχει ορθόκεντρο το τέταρτο σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΤΡΑΠΕΖΙΟ - ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ
Τραπέζιο ονομάζεται το τετράπλευρο το οποίο έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες.

- Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου ονομάζονται **βάσεις** του. Οι βάσεις ενός τραπεζίου δεν είναι ίσες. Ονομάζονται **μικρή** και **μεγάλη** βάση αντίστοιχα.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου ονομάζεται **διάμεσος** του τραπεζίου. Συμβολίζεται με δ.

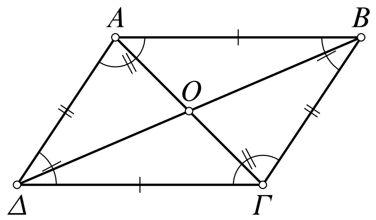




- Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις δύο βάσεις ενός τραπεζίου ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.
- Το τραπέζιο το οποίο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
Σε κάθε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ ισχύει ότι :



i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες : $AB = ΓΔ$ και $AΔ = BΓ$.
ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{Γ}$ και $\hat{B} = \hat{Δ}$.
iii. Δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές : $\hat{A} + \hat{B} = 180°$.
iv. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

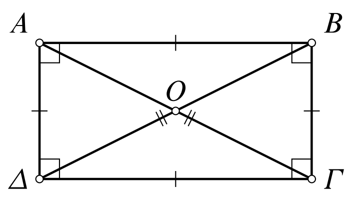
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ θα είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
ii. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
iii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.
iv. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
v. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

i. Το κέντρο ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι κέντρο συμμετρίας του.
ii. Εαν δύο ή περισσότερα παράλληλα τμήματα έχουν τα άκρα τους πάνω σε παράλληλες ευθείες τότε είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ
Σε κάθε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

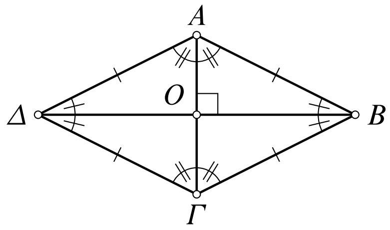


i. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες : $AΓ = BΔ$.
ii. Όλες του οι γωνίες είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$.
iii. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ
Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.
ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
iii. Έχει 3 ορθές γωνίες.
iv. Έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΟΜΒΟΥ
Σε κάθε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

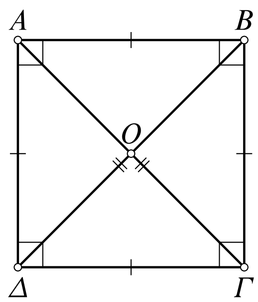


i. Οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες : $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$.
ii. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα : $A\Gamma \perp B\Delta$.
iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του :
   - $A\Gamma$ διχ. των $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
   - $B\Delta$ διχ. των $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.
iv. Έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΡΟΜΒΟΥ
Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
ii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
iii. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει διαγώνιους κάθετες.
iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ
Κάθε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει όλες τις ιδιότητες του παρραληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου :



i. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες : $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta$.
ii. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90°$.
iii. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες : $AB \parallel \Gamma\Delta$, $A\Delta \parallel B\Gamma$.
iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες,διχοτομούνται , διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
   - $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$.
   - $A\Gamma$ διχ. των $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
   - $AO = O\Gamma$, $BO = O\Delta$.
   - $B\Delta$ διχ. των $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ
Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο εαν είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει και μια από τις παρακάτω προτάσεις :

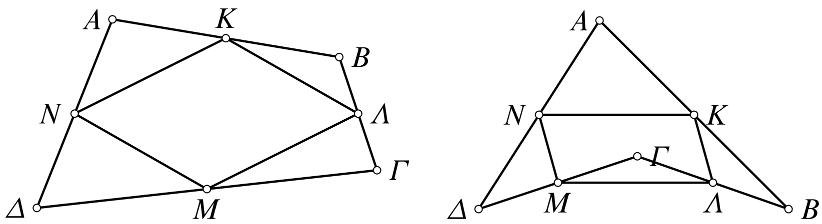
i. Έχει μια ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
ii. Έχει μια ορθή γωνία και διαγώνιους κάθετες.
iii. Έχει μια ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.
iv. Έχει διαγώνιους ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
v. Έχει διαγώνιους ίσες και κάθετες.
vi. Έχει διαγώνιους ίσες και μια απ' αυτές διχοτομεί μια γωνία.

Από τα παραπάνω κριτήρια παρατηρούμε ότι συνδυάζονται δύο ιδιότητες του ορθογωνίου με τρεις ιδιότητες του ρόμβου προκειμένου να οριστούν τα κριτήρια αυτά. Οι συνδιασμοί αυτοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$ΑΒΓΔ$ Παραλληλόγραμμο και			
		Ιδιότητες Ορθογωνίου	
		Μια ορθή γωνία	Διαγώνιοι ίσες
Ιδιότητες ρόμβου	Διαδοχικές πλευρές ίσες	1ο Κριτήριο	4ο Κριτήριο
	Διαγώνιοι κάθετες	2ο Κριτήριο	5ο Κριτήριο
	Διαγώνιος διχοτόμει μια γωνία	3ο Κριτήριο	6ο Κριτήριο

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΜΕΣΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

Τα μέσα των πλευρών ενός κυρτού ή μη κυρτού τετραπλεύρου ορίζουν παραλληλόγραμμο.

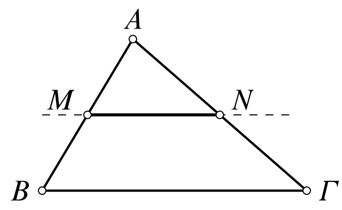


ΘΕΩΡΗΜΑ 11 : ΤΜΗΜΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΕΣΑ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της. Θα ισχύει

$$MN \parallel= \frac{B\Gamma}{2}$$

για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με M, N τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα.



ΘΕΩΡΗΜΑ 12 : ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΑΠΟ ΜΕΣΟ

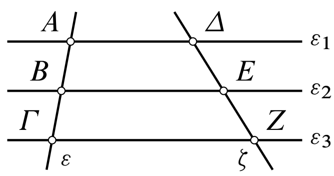
Η ευθεία που διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια δεύτερη πλευρά, θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

$$M \text{ μέσο } AB \text{ και } MN \parallel B\Gamma \Rightarrow N \text{ μέσο } A\Gamma$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 : ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια τέμνουσα, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη τέμουσα ευθεία.

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ και } AB = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = EZ$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 14 : ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το βαρύκεντρο του. Το βαρύκεντρο απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 : ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Οι ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές ενός τριγώνου και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, ορίζουν τρίγωνο του οποίου τα μέσα των πλευρών είναι οι κορυφές του αρχικού τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 : ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

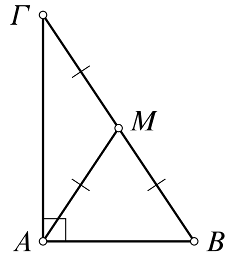
Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις :

i. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, το ορθόκεντρο του τριγώνου.

ii. Οι κορυφές του τριγώνου μαζί με το ορθόκεντρο αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 : ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΑΠΟ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις που αφορούν τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.



i. Η διάμεσος που άγεται από την ορθή γωνία προς την υποτείνουσα σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

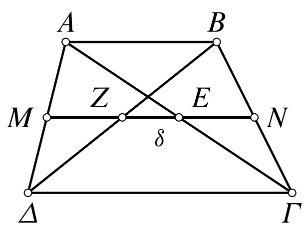
ii. (Αντίστροφο) Αν σε ένα τρίγωνο, μια διάμεσος ισούται με τη μισή πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΜΕ ΓΩΝΙΑ 30°

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια οξεία γωνία ισούται με 30° αν και μόνο αν η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με τη μισή υποτείνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΜΕΣΟ

Έστω ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta > AB$ ενώ M, N είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών. Επίσης E, Z ορίζουμε τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$, $B\Delta$. Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :



i. Η διάμεσος MN του τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις $AB, \Gamma\Delta$ και ίση με το ημιάθροισμά τους.

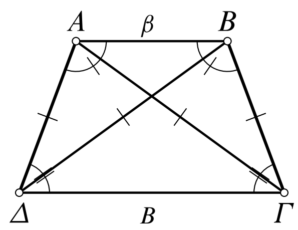
$$\delta = MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$$

ii. Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$, $B\Delta$ είναι παράλληλο με τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

$$EZ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :



i. Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες : $\hat{A} = \hat{B}$ ή $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

ii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες : $A\Gamma = B\Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ θα είναι ισοσκελές αν ισχύει μια από τις προτάσεις :

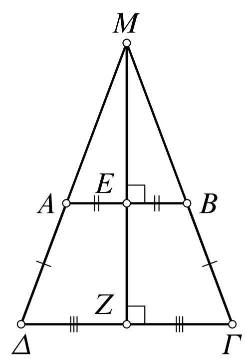
i. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

ii. Οι προσκείμενες γωνίες μιας βάσης είναι ίσες.

iii. Οι διαγώνιοι είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 : ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :



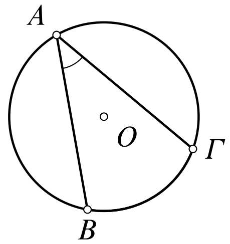
i. Οι προεκτάσεις των μη παράλληλων πλευρών ορίζουν δύο ισοσκελή τρίγωνα με κοινή κορυφή, το σημείο τομής τους και βάσεις, τις βάσεις του τραπεζίου.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος και των δύο βάσεων.

4 Εγγεγραμμένα σχήματα
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Εγγεγραμμένη γωνία σε έναν κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει κορυφή ένα σημείο του κύκλου, ενώ οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



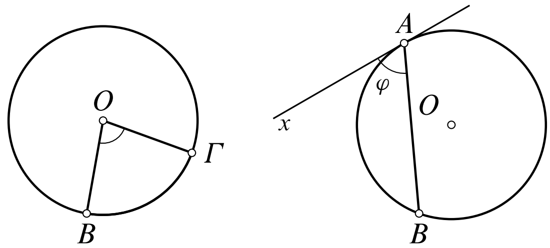
- Το τόξο με άκρα τα σημεία τομής της γωνίας και του κύκλου, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας.
- Μια εγγεγραμμένη γωνία θα λέμε ότι **βαίνει** στο αντίστοιχο τόξο της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ

Επίκεντρη γωνία σε έναν κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει κορυφή στο κέντρο του κύκλου.

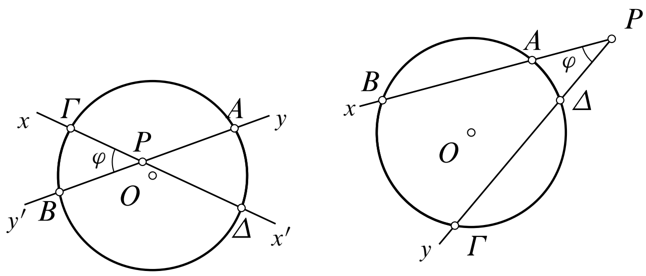
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Γωνία χορδής και εφαπτομένης ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου σε ένα άκρο της χορδής. Η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου.



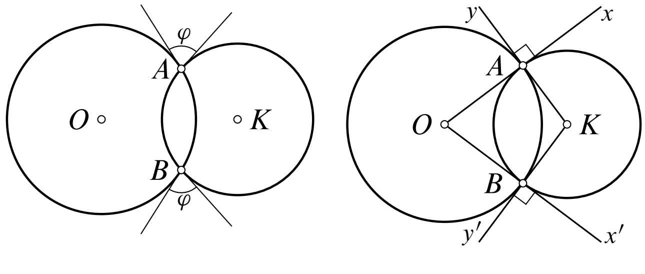
ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ

Γωνία δύο τεμνουσών ενός κύκλου ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο τέμνουσες ευθείες του κύκλου και έχει κορυφή το σημείο τομής τους.

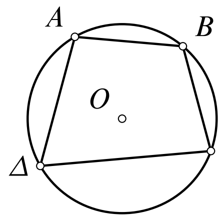


ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Γωνία δύο τεμνόμενων κύκλων ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από τις δύο εφαπτόμενες ευθείες του κύκλου σε καθένα από τα σημεία τομής τους. Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή τότε οι κύκλοι ονομάζονται **ορθογώνιοι**.



ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

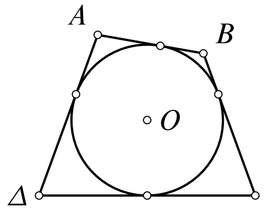


Εγγεγραμμένο ονομάζεται ένα τετράπλευρο του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **περιγεγραμμένος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Εγγράψιμο ονομάζεται ένα τετράπλευρο όταν υπάρχει κύκλος που να διέρχεται από όλες τις κορυφές του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ



Περιγεγραμμένο τετράπλευρο ονομάζεται το τετράπλευρο του οποίου οι πλευρές είναι εφαπτόμενες στον ίδιο κύκλο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **εγγεγραμμένος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

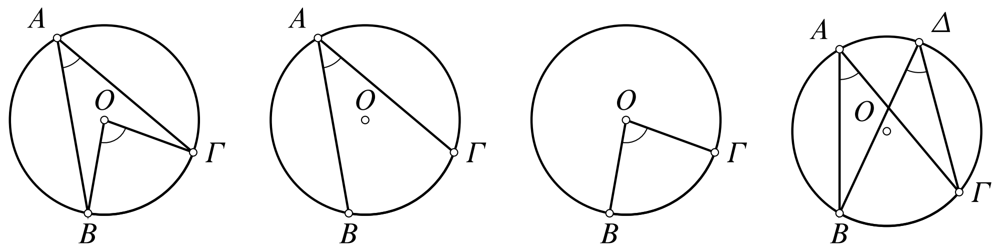
Περιγράψιμο ονομάζεται το τετράπλευρο εκείνο για το οποίο υπάρχει κύκλος που να εφάπτεται σε όλες τις πλευρές του.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΟΞΟ

Μεταξύ των εγγεγραμμένων των επίκεντρων γωνιών και των αντίστοιχων τόξων τους ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

i. Αν μια εγγεγραμμένη και μια επίκεντρη γωνία βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε η εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης : $\hat{A} = \dfrac{\hat{O}}{2}$.
ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2}$.
iii. Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{A} = \hat{O}$.
iv. Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε είναι ίσες. $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



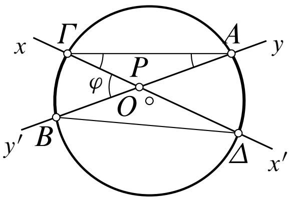
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Η γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου είναι ίση με το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ

Έστω P το σημείο τομής δύο τεμνουσών $x'x$ και $y'y$ ενός κύκλου και $x\hat{A}y$ η γωνία που σχηματίζουν. Για τη γωνία αυτή ισχύουν οι εξής προτάσεις :

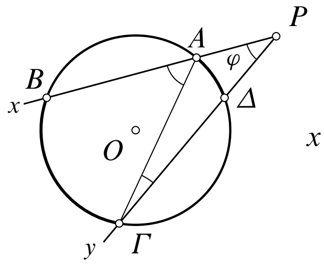
i. Αν το σημείο P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου τότε η γωνία των δύο τεμνουσών ισούται με το ημιάθροισμα των τόξων που ορίζουν οι τέμνουσες.



$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{A\Delta}}{2} \quad , \quad x\hat{A}y = B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}A$$

Η γωνία φ ισούται επίσης με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που ορίζουν οι τέμνουσες.

ii. Αν το σημείο P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου τότε η γωνία των δύο τεμνουσών ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων που ορίζουν οι τέμνουσες.



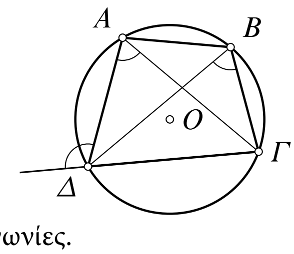
$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B\Gamma} - \overset{\frown}{A\Delta}}{2} \quad , \quad x\hat{A}y = B\hat{A}\Gamma - \Delta\hat{\Gamma}A$$

Η γωνία φ ισούται επίσης με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που ορίζουν οι τέμνουσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Οι γωνίες που σχηματίζουν δύο τεμνόμενοι κύκλοι στα σημεία τομής τους είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ



Για κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

i. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές :

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ και } \hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$$

ii. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες εγγεγραμμένες γωνίες.

iii. Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική : $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Delta}$, $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A}$, $\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = \hat{B}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

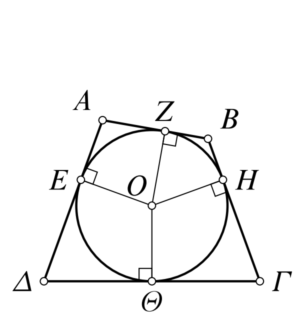
Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε έναν κύκλο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

ii. Μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες εγγεγραμμένες γωνίες.

iii. Μια εξωτερική γωνία να ισούται με την απέναντι εσωτερική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ



Σε κάθε περιγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

i. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό είναι κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

ii. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών είναι ίσα : $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών είναι ίσα.