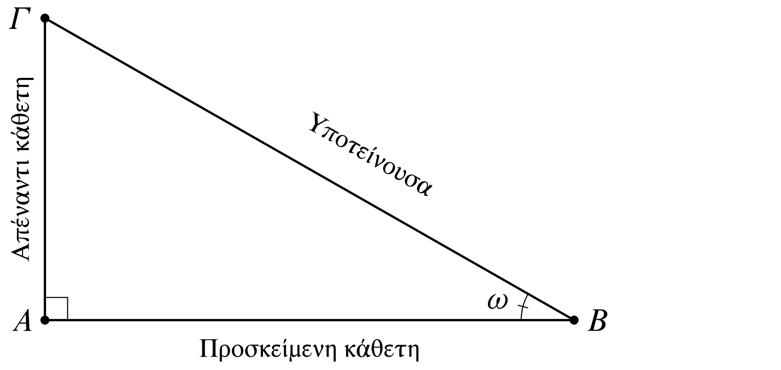
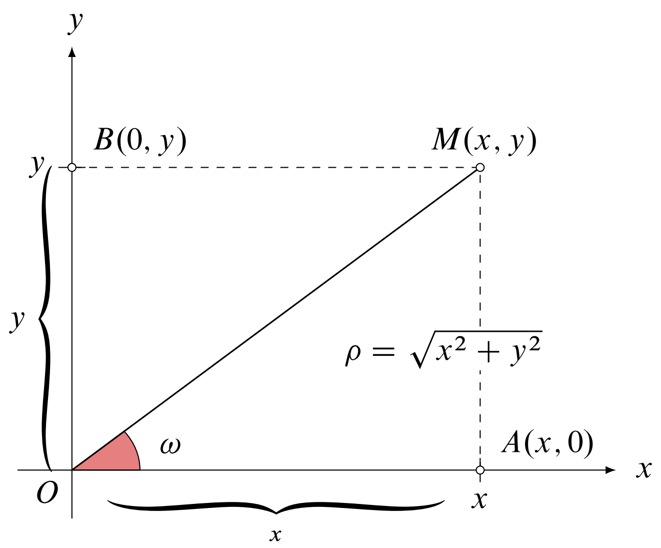
## Τριγωνομετρικοί αριθμοί




- Ημίτονο $= \dfrac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$ , $\eta\mu\omega = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$
- Συνημίτονο $= \dfrac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$ , $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{AB}{B\Gamma}$
- Εφαπτομένη $= \dfrac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}$ , $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{A\Gamma}{AB}$
- Συνεφαπτομένη $= \dfrac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}}$ , $\sigma\varphi\omega = \dfrac{AB}{A\Gamma}$




$$\eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$

**Συνημίτονο**
Συνημίτονο της γωνίας $\omega$ ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

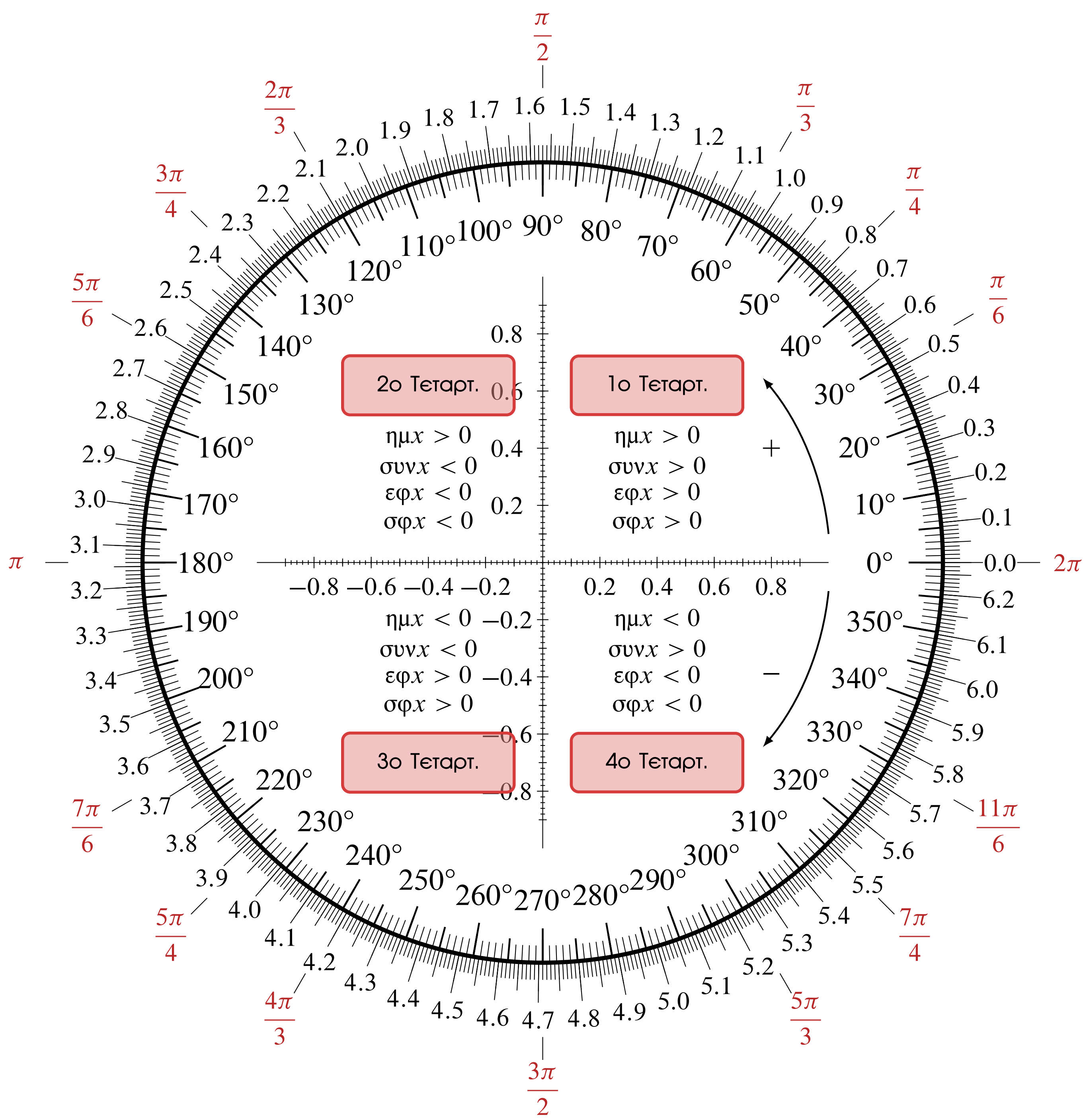
**Εφαπτομένη**
Εφαπτομένη της γωνίας $\omega$ ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.

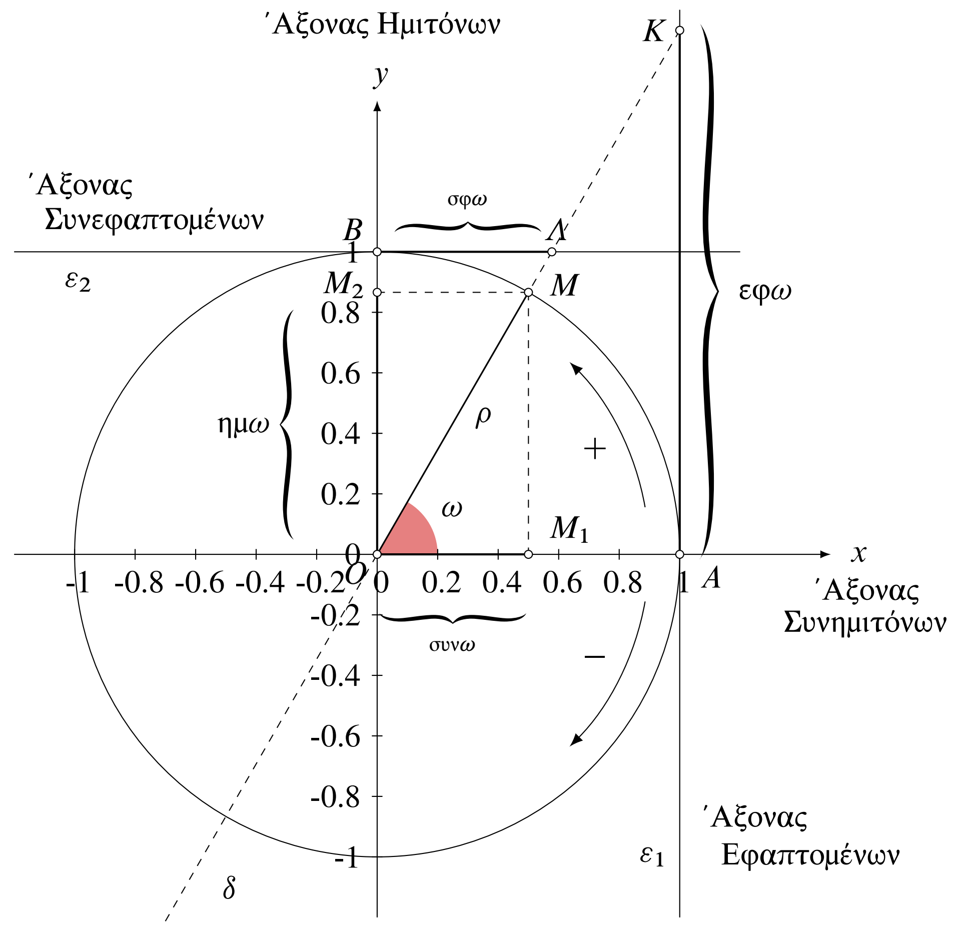
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x}\ ,\ x \neq 0$$

**Συνεφαπτομένη**
Συνεφαπτομένη της γωνίας $\omega$ ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την τεταγμένη του.

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{y}\ ,\ y \neq 0$$

## Τριγωνομετρικός κύκλος




## Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

| ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Θέση** | **Σημείο άξονα** | **1ο Τεταρτημόριο** | | | **Σημείο άξονα** | | | |
| **Μοίρες** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| **Ακτίνια** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| **Σχήμα** | | | | | | | | |
| $\eta\mu\omega$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\sigma\upsilon\nu\omega$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $\varepsilon\varphi\omega$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Δεν ορίζεται | 0 | Δεν ορίζεται | 0 |
| $\sigma\varphi\omega$ | Δεν ορίζεται | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | Δεν ορίζεται | 0 | Δεν ορίζεται |

## Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
2. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
3. $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
4. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$
5. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$
6. $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$

## Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

| Σχέση γωνίας $\varphi$ με την $\omega$ | Συμβολισμός $\varphi =$ | $\eta\mu\varphi$ | $\sigma\upsilon\nu\varphi$ | $\varepsilon\varphi\varphi$ | $\sigma\varphi\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Αντίθετη | $-\omega$ | $-\eta\mu\omega$ | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $-\varepsilon\varphi\omega$ | $-\sigma\varphi\omega$ |
| Παραπληρωματική | $180° - \omega$ | $\eta\mu\omega$ | $-\sigma\upsilon\nu\omega$ | $-\varepsilon\varphi\omega$ | $-\sigma\varphi\omega$ |
| Με διαφορά 180° | $180° + \omega$ | $-\eta\mu\omega$ | $-\sigma\upsilon\nu\omega$ | $\varepsilon\varphi\omega$ | $\sigma\varphi\omega$ |
| Συμπληρωματική | $90° - \omega$ | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $\eta\mu\omega$ | $\sigma\varphi\omega$ | $\varepsilon\varphi\omega$ |
| Με διαφορά 90° | $90° + \omega$ | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $-\eta\mu\omega$ | $-\sigma\varphi\omega$ | $-\varepsilon\varphi\omega$ |
| Με άθροισμα 270° | $270° - \omega$ | $-\sigma\upsilon\nu\omega$ | $-\eta\mu\omega$ | $\sigma\varphi\omega$ | $\varepsilon\varphi\omega$ |
| Με διαφορά 270° | $270° + \omega$ | $-\sigma\upsilon\nu\omega$ | $\eta\mu\omega$ | $-\sigma\varphi\omega$ | $-\varepsilon\varphi\omega$ |
| Με άθροισμα 360° | $360° - \omega$ | $-\eta\mu\omega$ | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $-\varepsilon\varphi\omega$ | $-\sigma\varphi\omega$ |
| Με διαφορά $\kappa \cdot 360°$ | $\kappa \cdot 360° + \omega$ | $\eta\mu\omega$ | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $\varepsilon\varphi\omega$ | $\sigma\varphi\omega$ |

## Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

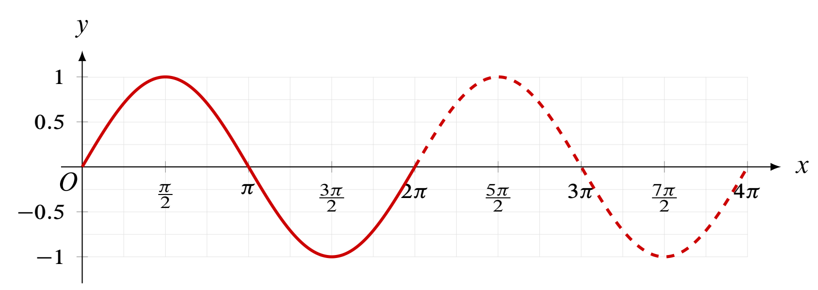
α. Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

β. Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

γ. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.

δ. Μελετώντας τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ε. Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή $-1$ στη θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.



στ. Ως περιοδική συνάρτηση, οι τιμές, η μονοτονία τα ακρότατα και κάθε άλλο χαρακτηριστικό επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου $2\pi$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2\,(\kappa+1)\,\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ζ. Γενικά η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(\kappa+1)\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

η. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ την τιμή $-1$.

θ. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$**

Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ του συνημιτόνου ισχύουν τα εξής :

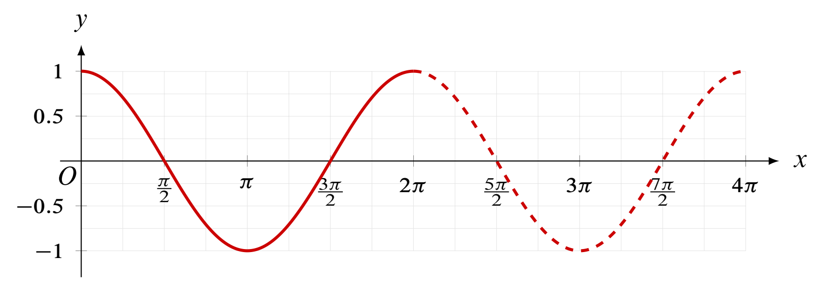
α. Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

β. Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

γ. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.

δ. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου βλέπουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.

ε. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέση $x = 0$ και $x = 2\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή $-1$ στη θέση $x = \pi$.




στ. Ως περιοδική συνάρτηση, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου $2\pi$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2\,(\kappa+1)\,\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ζ. Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi + \pi, 2(\kappa+1)\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

η. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi$ και $x = 2(\kappa+1)\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \pi$ την τιμή $-1$.

θ. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.