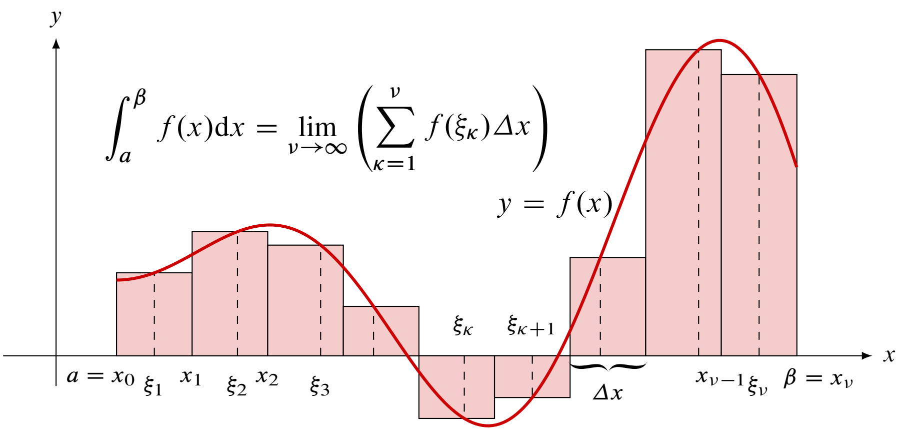
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , : 26610 20144 , : 6932327283 - 6955058444

1 Μαΐου 2025

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Φρόνιμος Σπύρος

Τυπολόγιο

1ο Κεφάλαιο **Όρια - Συνέχεια**

Μεθοδολογία

1ο Κεφάλαιο **Όρια - Συνέχεια**

1.1 Σύνθεση συναρτήσεων

Άσκηση 1.1 : Εύρεση σύνθεσης

Για να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

Βήματα

1° : Για το πεδίο ορισμού ισχύουν οι σχέσεις

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

Οι περιορισμοί αυτοί μας οδηγούν σε εξισώσεις και ανισώσεις. Οι κοινές λύσεις σχηματίζουν το πεδίο ορισμού.

2° : Ο τύπος της $f \circ g$ θα ισούται με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

που σημαίνει ότι στον τύπο της f αντικαθιστούμε το x με $g(x)$.

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για τις συναρτήσεις $g \circ f$, $f \circ f$ ...

Παράδειγμα 1 : Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις

α. $f \circ g$ **β.** $g \circ f$ **γ.** $f \circ f$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, ενώ η g ορίζεται όταν $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ οπότε $D_g = [2, +\infty)$.

α. Η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x) - 1} = \frac{1}{\sqrt{x-2} - 1}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$$

- $x \in D_g \Rightarrow x \in [2, +\infty)$
- $g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \sqrt{x-2} \neq 1 \Rightarrow x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

Επομένως $D_{f \circ g} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

β. Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 2} = \sqrt{\frac{1}{x-1} - 2}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$$

- $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- $f(x) \in D_g \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} \in [2, +\infty) \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{3-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (3-x)(x-1) \geq 0 \text{ και } x-1 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \in (1, 3]$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Γινόμενο		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Επομένως $D_{g\circ f} = (1, 3]$.

1.2 Συνάρτηση $1-1$ - Αντίστροφη

Άσκηση 1.2 : Συνάρτηση $1-1$

Τρόποι

1ος Τρόπος : Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο D_f. (Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα.)

2ος Τρόπος : Με τη βοήθεια του ορισμού της $1-1$ συνάρτησης

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων, αρκεί ο τύπος να επιτρέπει την επίλυση της εξίσωσης.)

3ος Τρόπος : Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f. Κάθε οριζόντια ευθεία πρέπει να τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο.

4ος Τρόπος : Αν η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε $y \in f(D_f)$ και η λύση ανήκει στο D_f τότε η f είναι $1-1$.

5ος Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η f δεν είναι $1-1$.

Άσκηση 1.3 : Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

Βήματα

1ο : Δείχνουμε ότι η f είναι $1-1$.

2ο : Εύρεση συνόλου τιμών της f με τη βοήθεια μονοτονίας.

3ο : Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x με $x \in D_f$.

Παράδειγμα 2 : Εύρεση αντίστροφης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-2) - \ln(5-x)$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ΛΥΣΗ

Η f ορίζεται όταν

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ και } 5-x > 0 \Rightarrow x < 5$$

άρα $D_f = (2, 5)$. Για κάθε $x \in (2, 5)$ είναι:

$$f'(x) = [\ln(x-2) - \ln(5-x)]' = \frac{(x-2)'}{x-2} - \frac{(5-x)'}{5-x} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{5-x} > 0$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, 5)$, άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) = f((2,5)) \overset{f\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to 5^-} f(x)\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (\ln(x-2) - \ln(5-x)) = -\infty - \ln 3 = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (\ln(x-2) - \ln(5-x)) = \ln 3 - (-\infty) = +\infty.$

οπότε $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Για την εύρεση του τύπου έχουμε $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) - \ln(5-x) \Leftrightarrow y = \ln\frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = \frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow e^y(5-x) = x-2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5e^y - xe^y = x-2 \Leftrightarrow x + xe^y = 5e^y + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x\left(e^y+1\right) = 5e^y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{5e^y+2}{e^y+1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{5e^y+2}{e^y+1} \end{aligned}$$

άρα η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}(x) = \frac{5e^x+2}{e^x+1}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

1.3 Όρια μορφής $\frac{0}{0}$

Άσκηση 1.4 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής

Αν ένα όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα, έχει μορφή $\frac{0}{0}$ τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1^{ος} Τρόπος : Παραγοντοποίηση

Βήματα

1° : Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή.

2° : Απλοποιούμε τις παραστάσεις $x - x_0$ και αντικαθιστούμε όπου x το x_0.

2^{ος} Τρόπος : Κανόνας De L'Hospital

Εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital όσες φορές χρειαστεί έως ότου φύγει η απροσδιοριστία.

Άσκηση 1.5 : Όριο $\frac{0}{0}$ άρρητης

Πολλαπλασιασμός με συζυγείς παραστάσεις.

Άσκηση 1.6 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής με απόλυτες τιμές

Βήματα

1° : Υπολογίζω τα όρια των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές.

2° : Διώχνω τις απόλυτες τιμές με τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Αν κάποια απόλυτη τιμή μηδενίζεται στο x_0 τότε υπολογίζω πλευρικά όρια.

3° : Υπολογίζω όριο ρητής $\frac{0}{0}$

Άσκηση 1.7 : Όριο $\frac{0}{0}$ με τριγωνομετρικές παραστάσεις

1^{ος} Τρόπος : Κατασκευάζω και χρησιμοποιώ τριγωνομετρικές ταυτότητες.

2^{ος} Τρόπος : Κατασκευάζω με πράξεις κάποιο βασικό τριγωνομετρικό όριο, αρκεί όταν $x \to x_0$ να μηδενίζεται η γωνία του τριγωνομετρικού αριθμού.

3^{ος} Τρόπος : Κανόνας De L' Hospital. (Χρειάζεται προσοχή εδώ γιατί μπορεί η εφαρμογή του κανόνα να με οδηγήσει σε δυσκολότερο όριο.)

Άσκηση 1.8 : Όριο $\frac{0}{0}$ με εκθετικές, λογαριθμικές και συνδυασμό αυτών

Εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital.

1.4 Όρια με απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Άσκηση 1.9 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ρητής

Με ρητή συνάρτηση όταν $x \to \pm\infty$ υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος μόνο με τους μεγιστοβάθμιους όρους.

Άσκηση 1.10 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ με ρίζες

Μέθοδος κοινού παράγοντα ή συζυγείς παραστάσεις.

Άσκηση 1.11 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ Διάφορες συναρτήσεις

Κανόνας De L' Hospital

1.5 Όρια με απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$

Άσκηση 1.12 : Όρια $0 \cdot (\pm\infty)$ - Γενική μέθοδος

Βήματα

1° : Γράφουμε το γινόμενο με μορφή σύνθετου κλάσματος ως εξής

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

2° : Το όριο παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ οπότε εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital

Άσκηση 1.13 : Όρια με απροσδιοριστία $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

Βήματα

1° : Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

2° : Υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη το οποίο έχει απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$. Στη συνέχεια με αντικατάσταση υπολογίζουμε το αρχικό όριο.

1.6 Όρια με απροσδιοριστία $+\infty - \infty$

Άσκηση 1.14 : Όρια $+\infty - \infty$ - Γενική μέθοδος

Βήματα

1° : Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια από τις δύο συναρτήσεις.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right]$$

2° : Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος $\frac{g(x)}{f(x)}$ με μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

3° : Επιστρέφουμε στο αρχικό όριο αντικαθιστώντας.

Άσκηση 1.15 : Όρια $+\infty - \infty$ - Κλάσματα

Αν στο όριο $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ είναι κλάσματα τότε τα κάνουμε ομώνυμα και οδηγούμαστε σε μία από τις μορφές $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\frac{a}{0}$.

Άσκηση 1.16 : Όρια $+\infty - \infty$ - Διαφορά λογαρίθμων

Σχηματίζουμε διαφορά λογαρίθμων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\ln a - \ln \beta = \ln\frac{a}{\beta}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος το οποίο έχει απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Άσκηση 1.17 : Όρια της μορφής $\frac{a}{0}$

Βήματα

1° : Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.

2° : Γράφουμε σε ξεχωριστό κλάσμα τον παράγοντα που μηδενίζεται.

3° : Αν αυτός ο παράγοντας έχει σταθερό πρόσημο τότε προχωράμε στον υπολογισμό. Αν όχι υπολογίζουμε πλευρικά όρια.

Άσκηση 1.18 : Όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ$f(x)$, συν$f(x)$ - Μηδενική επί φραγμένη

Αν το όριο περιέχει σύνθετες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με γωνία $f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε

Βήματα

1° : Γράφουμε τη συνάρτηση μέσα στο όριο ως γινόμενο συναρτήσεων.

2° : Κλείνουμε τη συνάρτηση του ορίου σε απόλυτη τιμή και σχηματίζουμε διπλή ανισότητα ώστε να εφαρμοστεί κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 1.19 : Γνωστό όριο που περιέχει την $f(x)$ - Βοηθητική συνάρτηση

Βήματα

1° : Θέτουμε $g(x)$ τη συνάρτηση του ορίου και λύνουμε ως προς $f(x)$.

2° : Υπολογίζουμε το όριο της f στο x_0.

Άσκηση 1.20 : Κριτήριο παρεμβολής

Το κριτήριο παρεμβολής για τον υπολογισμό ορίων εφαρμόζεται σε ανισότητες της μορφής

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \text{ ή } |f(x)| \le g(x) \Rightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x)$$

2ο Κεφάλαιο Διαφορικός λογισμός

2.1 Εφαπτομένη

Άσκηση 2.1 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστό σημείο επαφής

Βήματα

1ο : Πεδίο ορισμού, παράγωγος f' και θέτουμε όπου $x = x_0$ ώστε να βρεθούν οι αριθμοί $f(x_0)$ και $f'(x_0)$.

2ο : Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

και αντικαθιστώντας λύνουμε ως προς y.

Παράδειγμα 1 : Εφαπτομένη - Γνωστό σημείο επαφής

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο

α. $M(0, f(0))$ **β. με τεταγμένη e^2.**

Άσκηση 2.2 : Εύρεση εφαπτομένης με γνωστή κλίση λ

Βήματα

1ο : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και θέτουμε το σ.δ. της εφαπτομένης να ισούται με τη δοσμένη κλίση λ.

$$f(x_0) = \lambda$$

Αν δεν μας δίνεται ο συντελεστής λ της εφαπτομένης ε τότε τον βρίσκουμε έχοντας τις εξής περιπτώσεις.

Συνθήκη	Εξίσωση
Ευθείες παράλληλες $\varepsilon \parallel \zeta$	$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Ευθείες κάθετες $\varepsilon \perp \zeta$	$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$
Οριζόντια ευθεία $\varepsilon \parallel x'x$	$\lambda_\varepsilon = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
Η ε σχηματίζει γωνία ω	$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega.$

3ο : Λύνουμε την εξίσωση, βρίσκουμε το x_0 και στη συνέχεια το $f(x_0)$.

4ο : Εξίσωση ευθείας $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Άσκηση 2.3 : Εφαπτομένη που διέρχεται από εξωτερικό σημείο $P(\alpha, \beta)$

Βήματα

1ο : Πεδίο ορισμού και f'.

2ο : Θεωρούμε σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και γράφουμε τον τύπο της ευθείας.

3ο : Αντικαθιστούμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ στην εξίσωση.

4ο : Αφού $P \in \varepsilon$ τότε θέτουμε $x = \alpha$ και $y = \beta$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς x_0.

5° : Για κάθε x_0 υπολογίζουμε $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ και βρίσκουμε την ευθεία.

Άσκηση 2.4 : Ευθεία εφάπτεται στη C_f στο $M(x_0 f(x_0))$

$$\text{Η ευθεία } y = ax + \beta \text{ εφάπτεται στη } C_f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$$

Άσκηση 2.5 : Κοινή εφαπτομένη C_f, C_g σε κοινό σημείο $M(x_0, f(x_0))$

$$\text{Οι } C_f \text{ και } C_g \text{ έχουν κοινή εφαπτομένη στο } M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

2.2 Μονοτονία - Ακρότατα

Άσκηση 2.6 : Μονοτονία - Ακρότατα - Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

Βήματα

1° : Πεδίο ορισμού της f και έλεγχος συνέχειας.

2° : Παράγωγος f'.

3° : Υπολογίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f' με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ και τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.
- Με επιλογή τιμής σε κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού.
- Παραγωγίζοντας δεύτερη ή ακόμα και τρίτη φορά. Με τη μονοτονία κάθε παραγώγου βρίσκουμε τα πρόσημά της ώσπου να φτάσουμε στη μονοτονία της f. Οι ρίζες βρίσκονται με δοκιμές.

4° : Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

5° : Μονοτονία - Ακρότατα - Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

- **Για εύρεση μονοτονίας** αναφέρουμε το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- **Για εύρεση ακροτάτων** ελέγχουμε για ακρότατα στα κρίσιμα σημεία και στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού
- **Για εύρεση συνόλου τιμών** βρίσκουμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας και τις ενώνουμε.
- **Για την εύρεση του πλήθους ριζών της συνάρτησης** ελέγχουμε αν το 0 ανήκει στην εικόνα κάθε διαστήματος. Αναλυτικά

$$0 \in f(\Delta_1) \Rightarrow \text{Υπάρχει } x_0 : f(x_0) = 0$$

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική μέσα στο κάθε διάστημα γιατί η f είναι γνησίως μονότονη.

2.3 Κυρτότητα και σημεία καμπής

Άσκηση 2.7 : Εύρεση κυρτότητας - σημείων καμπής

Βήματα

1° : Πεδίο ορισμού και έλεγχος συνέχειας.

2° : Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο f''.

3° : Βρίσκουμε ρίζες και πρόσημα της f'' με τους τρόπους που περιγράψαμε στη μονοτονία.

4° : Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα της f'' και την κυρτότητα της f.

5° : Κυρτότητα - Σημεία καμπής

- **Για εύρεση κυρτότητας** αναφέρουμε το είδος της κυρτότητας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- **Για εύρεση σημείων καμπής** ελέγχουμε για σημεία καμπής στα σημεία που αλλάζει η κυρτότητα αρκεί η f να είναι μια φορά παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

Παράδειγμα 2 : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

✔ ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R}$ καθώς $x^2+1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως ρητή. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \\
&= \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \text{και}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right]' = \frac{\left(2-2x^2\right)'\left(x^2+1\right)^2 - \left(2-2x^2\right)\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)^4} = \\
&= \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2 - \left(2-2x^2\right)2\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{\left(x^2+1\right)\left[-4x\left(x^2+1\right) - 4x\left(2-2x^2\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \\
&= \frac{-4x^3-4x-8x+8x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}
\end{aligned}
$$

Έχουμε λοιπόν

- $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Rightarrow 4x^3-12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{3}$.
- $f''(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3} > 0 \Rightarrow 4x^3-12x > 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.
- $f''(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3} < 0 \Rightarrow 4x^3-12x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα πρόσημα της f'' καθώς και την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↷	0	↶		↷		↶	

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, 0]$ και $[\sqrt{3}, +\infty)$ και κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{3}]$ και $[0, \sqrt{3}]$. Η C_f έχει σημεία καμπής τα $A(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(0, f(0)) = B(0, 0)$ και $\Gamma(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = \Gamma\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Άσκηση 2.8 : Κυρτότητα και εφαπτομένες - Απόδειξη ανισότητας

Βήματα

1° : Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

2° : Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο που ζητάει ή σε κάποιο σημαντικό σημείο. Αυτή θα έχει τη μορφή $y = ax + \beta$

3° : Χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$f \smile \Delta \Rightarrow f(x) \geq ax + \beta \quad , \quad f \frown \Delta \Rightarrow f(x) \leq ax + \beta$$

και με πράξεις φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή που τη ζητάει η άσκηση.

2.4 Ασύμπτωτες

Άσκηση 2.9 : Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Βήματα

1° : Πεδίο ορισμού της f.

2° : Υπολογισμός κάποιου πλευρικού ορίου στα σημεία x_0 που είναι ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της f ή στα σημεία που δεν είναι συνεχής η συνάρτηση.

3° : Αν κάποιο πλευρικό όριο ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Άσκηση 2.10 : Οριζόντια ασύμπτωτη

Βήματα

1° : Όριο της f στο $+\infty$ ή $-\infty$ εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$.

2° : Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ τότε η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

Άσκηση 2.11 : Πλάγια ασύμπτωτη

Βήματα

1° : Εφόσον ορίζεται η f σε διάστημα που περιέχει $\pm\infty$ υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \;,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \beta$$

και αντίστοιχα στο $-\infty$.

2° : Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

Άσκηση 2.12 : Ασύμπτωτες γενικά

Βήματα

1° : Αναζητούμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία που αναφέραμε.

2° : Ανάμεσα σε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ξεκινάμε με τις πλάγιες και από το συντελεστή διεύθυνσης λ θα εξαρτηθεί αν η ευθεία είναι πλάγια ή οριζόντια. Ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda$

- $\lambda \neq 0 \to \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\lambda x) = \beta$
  - $\beta \in \mathbb{R}$: Πλάγια ασύμπτωτη : $y = \lambda x + \beta$
  - $\beta = \pm\infty$: Όχι πλάγια ασύμπτωτη
- $\lambda = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$
  - $l \in \mathbb{R}$: Οριζόντια ασύμπτωτη $y = l$
  - $l \notin \mathbb{R}$: Όχι οριζόντια ασύμπτωτη
- $\lambda = \pm\infty \longrightarrow$ Όχι πλάγια ασύμπτ. $\longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$

2.5 Εύρεση παραμέτρων

Η γενική μέθοδος για την εύρεση μιας παραμέτρου είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση ή ανίσωση που να την περιέχει, ώστε λύνοντάς την να την προσδιορίσουμε. Κάποια συνθήκη της υπόθεσης είναι αυτή που θα μας οδηγήσει σ΄ αυτή την εξίσωση-ανίσωση.

Συνθήκη	Εξίσωση - Ανίσωση
Το σημείο $A(a,\beta)$ ανήκει στη C_f	$f(a)=\beta$
Γνωστό όριο που περιέχει παραμέτρους $a,\beta\ldots$	Βοηθητική συνάρτηση
Η f είναι συνεχής σε σημείο $x_0\in D_f$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
Η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0\in D_f$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Η ευθεία $y=ax+\beta$ εφάπτεται στη C_f	$\begin{cases} f(x_0)=ax_0+\beta \\ f'(x_0)=a\end{cases}$
Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$	$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}$
Η f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο Δ	$f'(x)\geq 0$ (ή $f'(x)\leq 0$)
Η f παρουσιάζει **ακρότατο** στο **εσωτερικό** σημείο $x_0\in\Delta$ και είναι **παραγωγίσιμη** σ΄ αυτό. (Αν επιπλέον το ακρότατο είναι β)	$f'(x_0)=0$ (τότε $f(x_0)=\beta$) - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η f είναι κυρτή (ή κοίλη) στο Δ	$f''(x)\geq 0$ (ή $f''(x)\leq 0$)
Η C_f έχει **σημείο καμπής** $M(x_0,y_0)$ στο **εσωτερικό** σημείο $x_0\in\Delta$ στο οποίο είναι **δύο φορές παραγωγίσιμη** και **ορίζεται εφαπτομένη** στο σημείο αυτό.	$f''(x_0)=0$ και $f(x_0)=y_0$ - Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.
Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=x_0$	$x_0=$ ανοιχτό άκρο διαστήματος ή σημείο ασυνέχειας.
Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=l$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$
Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ στο $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$

2.6 Λύση εξισώσεων - ανισώσεων + Ύπαρξη λύσης

Άσκηση 2.13 : Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης

Μπορούμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

Τρόποι

1^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα Bolzano

2^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

3^{ος} Τρόπος : Με σύνολο τιμών : Αν $a\in f(D_f)$ τότε υπάρχει $x_0\in D_f$ ώστε $f(x_0)=a$.

4^{ος} Τρόπος : Με θεώρημα Rolle : Βρίσκουμε την αρχική F της f οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $F'(x)=a$.

5ος Τρόπος : Με Θεώρημα Μέσης Τιμής.

6ος Τρόπος : Αλγεβρικά

7ος Τρόπος : Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα.

8ος Τρόπος : Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Άσκηση 2.14 : Εξίσωση που έχει το πολύ μια ρίζα

Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα έχουμε τους τρόπους

Τρόποι

1ος Τρόπος : Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και $1-1$.

2ος Τρόπος : Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 ρίζες x_1, x_2 και εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 2.15 : Μοναδική ρίζα εξίσωσης

Χρησιμοποιούμε έναν τρόπο για να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και έναν τρόπος για να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ μια ρίζα. Άρα η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Άσκηση 2.16 : Επίλυση εξίσωσης

Για την επίλυση μιας εξίσωσης ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

***1ος Περίπτωση :* Συνάρτηση $1-1$**

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(a)$ και δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$. Συνεπώς θα ισχύει

$$f(x) = f(a) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} x = a$$

Η μέθοδος αυτή ακολουθείται και για εξισώσεις της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$.

***2ος Περίπτωση :* Με ολικό ακρότατο**

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή $f(x) = a$ και αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός a είναι ολικό ακρότατο της f. Οι θέσεις των ακρότατων είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

Πηγή: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Η επανάληψη. Ανδρέας Πάτσης - Παύλος Τρύφων, Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική