



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

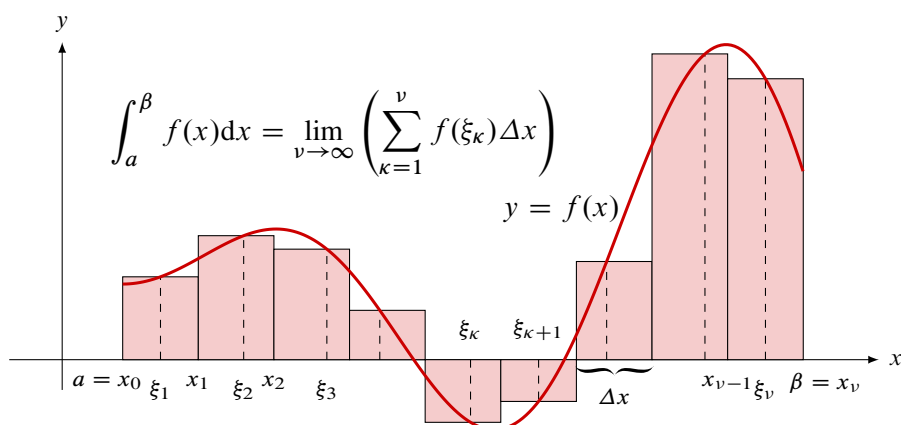
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

📍: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , ☎: 26610 20144 , 📱: 6932327283 - 6955058444

8 Μαΐου 2025

# Μαθηματικά Γ' Λυκείου

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ





# Επαναληπτικά Θέματα Β

## 1ο Κεφάλαιο Όρια - Συνέχεια

### 1ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ .

- B.1** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
- B.2** Μελετήστε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B.3** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .
- B.4** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \ln 9$ .

### 2ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  και  $g(x) = e^x$ .

- B.1** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

Αν  $h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$  με  $x \in \mathbb{R}$ :

- B.2** δείξτε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και ότι  $h^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$ ,  $x > 0$ .
- B.3** βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $h$  και  $h^{-1}$ .
- B.4** βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_h$  η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία  $\zeta : y = -\frac{x}{2} + 1$ .

### 3ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

- B.1** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B.2** Μελετήστε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B.3** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της  $C_f$  και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
- B.4** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = -1, x = 2$ .

### 4ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .

- B.1** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B.2** Μελετήστε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- B.3** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .
- B.4** Αν  $\varepsilon : y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$  είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A$ , να δείξετε ότι ισχύει  $2\sqrt{x} + x - 3 \geq \ln x$  για κάθε  $x > 0$ .
- B.5** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x))$ .
- B.6** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  την ευθεία  $\varepsilon$  και την ευθεία  $x = 3$ .

### 5ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x \ln x - x$  και  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = e^x$ .

**B.1** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

Αν  $h(x) = e^x(x - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ :

**B.2** μελετήστε την  $h$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**B.3** να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**B.4** να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = -2$ .

### 6ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$  και  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = e^x$ .

**B.1** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f = h \circ g$  έχει πεδίο ορισμού  $D_f = (1, +\infty)$  και τύπο  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

**B.2** Εξετάστε αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $k$  με  $k(x) = x - \frac{1}{x}$  είναι ίσες. Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = k(x)$ .

**B.3** Δείξτε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την  $f^{-1}$ .

**B.4** Αν  $f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ ,  $x > 0$  να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$$

## Επαναληπτικά Θέματα Γ

### 1ο Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$x^2 f'(x) + x f(x) = 1, \quad x > 0$$

Να δείξετε ότι:

**Γ.1** ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ.2** υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $1 - \ln x_0 = 2x_0^2$ .

**Γ.3** ισχύει  $e \ln x \leq x$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ.4** Ένα σημείο  $M$  κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $f$  του οποίου η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό  $2\mu/s$ . Τη στιγμή που το σημείο  $M$  βρίσκεται στη θέση  $A(e, f(e))$  να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του.

### 2ο Θέμα Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x \geq 0 \\ xe^x - x + \beta & , x < 0 \end{cases}$$

**Γ.1** Να δείξετε ότι  $a = \beta = -1$ .

**Γ.2** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$$

**Γ.3** Μελετήστε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Γ.4** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  η οποία είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta : y = x + 1$ .