Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

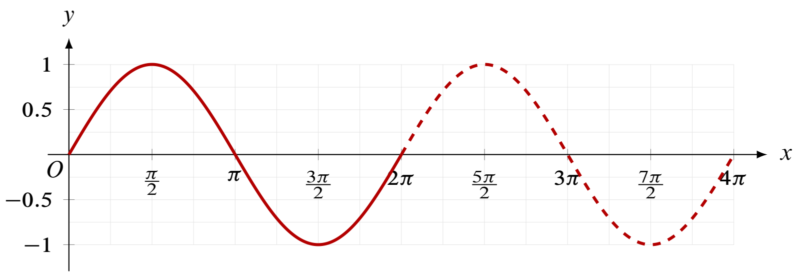
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

26 Ιανουαρίου 2019

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β Λυκείου

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση των λογικών ιδεών.

Albert Einstein, 1879-1955

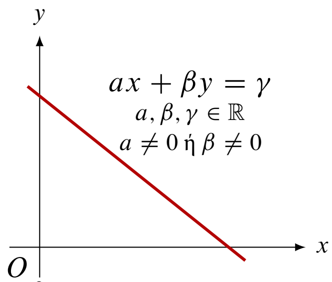
1 Συστήματα
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών, ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση στην οποία κάθε όρος της είναι μονώνυμο 1^{ου} βαθμού μιας μεταβλητής. Έχει τη μορφή

$$ax + \beta y = \gamma$$

όπου οι συντελεστές και ο σταθερός όρος είναι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η καμπύλη της εξίσωσης είναι ευθεία γραμμή αν οι συντελεστές a, β των μεταβλητών x, y αντίστοιχα, δεν μηδενίζονται συγχρόνως δηλ. $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.



- Οι ευθείες της μορφής $x = \kappa$ ονομάζονται **κατακόρυφες** ευθείες ενώ οι ευθείες της μορφής $y = \kappa$ οριζόντιες ευθείες.
- Ο πραγματικός αριθμός $\lambda = -\frac{a}{\beta}$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας $ax + \beta y = \gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$ax + \beta y = \gamma$$

ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2 × 2

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται ο συνδυασμός - σύζευξη δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Οι συντελεστές του συστήματος a, a', β, β' και οι σταθεροί όροι γ, γ' είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.
- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εαν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εαν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2

Ορίζουσα των συντελεστών ενός συστήματος 2×2 ονομάζεται ο αριθμός $a\beta' - a'\beta$ η οποία συμβολίζεται

$$D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}$$

D_x, D_y είναι οι ορίζουσες των μεταβλητών που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στην ορίζουσα D τη στήλη των συντελεστών των μεταβλητών x, y αντίστοιχα με τους σταθερούς όρους γ, γ'.

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} \quad , \quad D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3×3
Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους ονομάζεται ένας συνδυασμός από τρεις γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ a_2x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ a_3x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

με $a_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Κάθε διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x_0, y_0, z_0) η οποία επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος 3×3.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Παραμετρικό ονομάζεται το γραμμικό σύστημα του οποίου οι συντελεστές ή και οι σταθεροί όροι δίνονται με τη βοήθεια μιας ή περισσότερων παραμέτρων. Η διαδικασία επίλυσης ενός παραμετρικού συστήματος ονομάζεται **διερεύνηση**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Ένα σύστημα εξισώσεων θα ονομάζεται μη γραμμικό όταν τουλάχιστον μια εξίσωσή του δεν αποτελεί γραμμική εξίσωση.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΕΙΔΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ
Η γραμμική εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ παριστάνει

i. πλάγια ευθεία αν $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
ii. οριζόντια ευθεία αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$.
iii. κατακόρυφη ευθεία αν $a \neq 0$ και $\beta = 0$.

ενώ αν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές a και β τότε δεν παριστάνει ευθεία γραμμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ
Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει σε μια ευθεία με εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα συντελεστών D.

i. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι διάφορη του μηδενος δηλαδή $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οι τιμές των μεταβλητών δίνονται από τις σχέσεις

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

ενώ η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

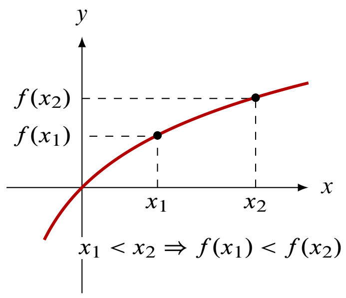
ii. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι μηδενική δηλαδή $D = 0$ τότε το σύστημα είναι είτε αόριστο είτε αδύνατο.

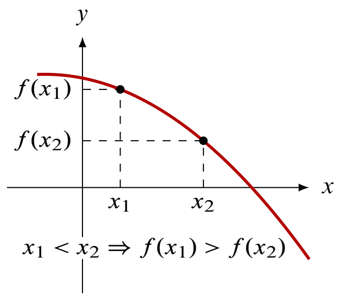
2 Ιδιότητες Συναρτήσεων
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ
Μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα, χαρακτηρίζεται ως **μονότονη**, ενώ μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως **γνησίως μονότονη**. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αφορούν τη **μονοτονία** μιας συνάρτησης, μια ιδιότητα των συναρτήσεων η οποία δείχνει την αύξηση ή τη μείωση των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού.

1. **Γνησίως αύξουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο $\varDelta$ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \varDelta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) < f(x_2)$$

2. **Γνησίως φθίνουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο $\varDelta$ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \varDelta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
   $$f(x_1) > f(x_2)$$

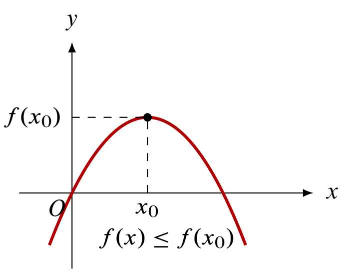


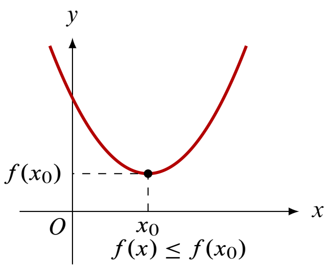


ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ
Ακρότατα ονομάζονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ τις οποίες παίρνει σε ένα διάστημα ή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

1. **Ολικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού. Συμβολίζεται με $\max f(x)$.
   $$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

2. **Ολικό ελάχιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού. Συμβολίζεται με $\min f(x)$.
   $$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

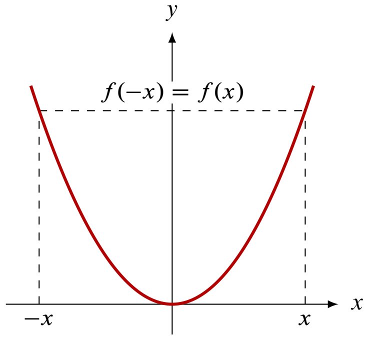


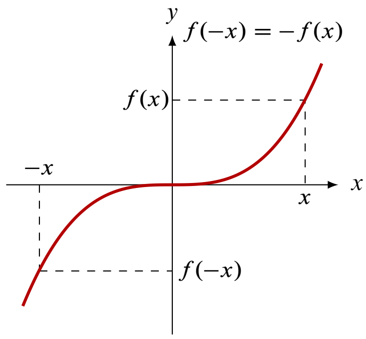


ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. **Άρτια συνάρτηση**
   Άρτια ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :
   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

2. **Περιττή συνάρτηση**
   Περιττή ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :
   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$





- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Η αρχή των αξόνων για μια περιττή συνάρτηση ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας** της.

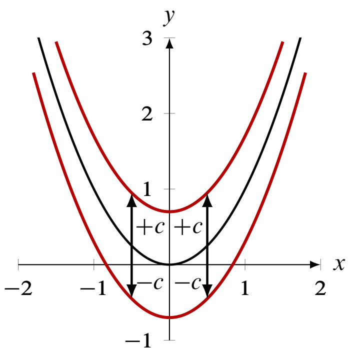
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

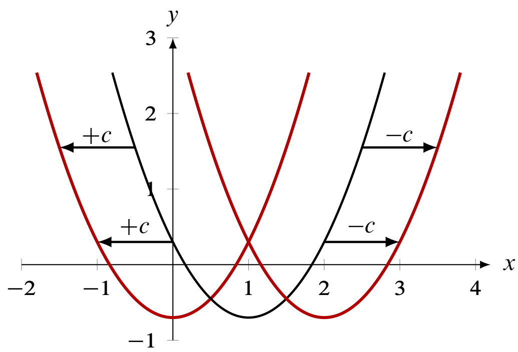
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά c μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω, εαν αυξήσουμε ή μειώσουμε αντίστοιχα τις τεταγμένες $f(x)$ των σημείων της κατά c μονάδες.

$$g(x) = f(x) \pm c \quad , \quad c > 0$$

Η γραφική παράσταση C_g της νέας συνάρτησης $g(x)$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες.





ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f μετατοπίζεται οριζόντια κατά c μονάδες προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά, εαν αυξήσουμε ή μειώσουμε αντίστοιχα τις τετμημένες x των σημείων της κατά c μονάδες.

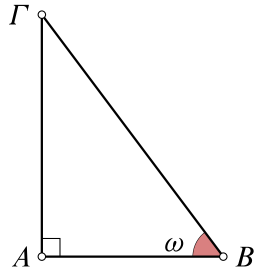
$$g(x) = f(x \pm c) \quad , \quad c > 0$$

Η γραφική παράσταση C_g της νέας συνάρτησης $g(x)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες.

3 Τριγωνομετρία
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Έστω $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με $A = 90°$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξείων γωνιών του τριγώνου ορίζονται ως εξής :



1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.

$$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την απέναντι κάθετη.

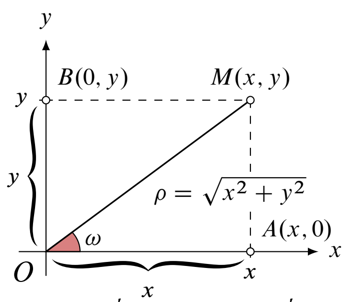
$$\text{Συνεφαπτομένη} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}} \quad , \quad \sigma\varphi\omega = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΤΡΙΓ. ΑΡ. ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και $M(x, y)$ ένα σημείο του. Ενώνοντας το σημείο M με την αρχή των αξόνων, το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει δημιουργεί μια γωνία ω με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ox. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM είναι :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}y$ ορίζονται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του σημείου και είναι



1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.

$$\eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την

αρχή των αξόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την τεταγμένη του.

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{y} \quad . \quad y \neq 0$$

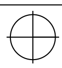
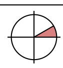
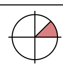
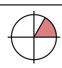
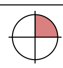
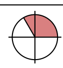
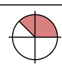
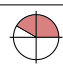
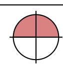
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ - ΤΟΞΩΝ
Μονάδες μέτρησης γωνιών - τόξων λέγονται οι γωνίες ή τα τόξα αντίστοιχα με τα οποία μετράμε το μέτρο (άνοιγμα) των πλευρών μιας γωνίας ή αντίστοιχα το μέτρο ενός τόξου. Οι βασικές μονάδες μέτρησης για τη μέτρηση γωνιών ή τόξων είναι :

1. **Μοίρα**
   Μοίρα ονομάζεται το τόξο το οποίο είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε τη μοίρα ως τη γωνία η οποία αν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου του κύκλου.
   - Συμβολίζεται με 1°.
   - Μια μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά $(60')$ και κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά $(60'')$.

2. **Ακτίνιο**
   Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Συμβολίζεται με $1rad$.

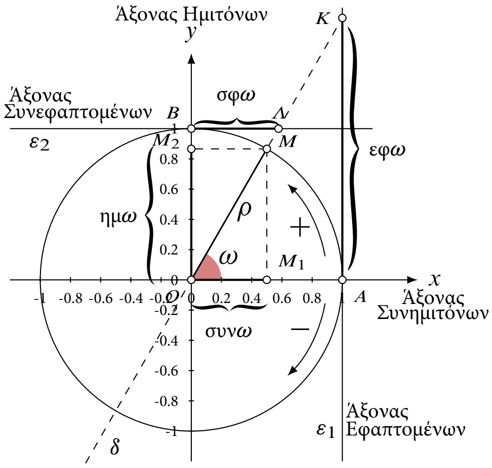
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες και ακτίνια αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

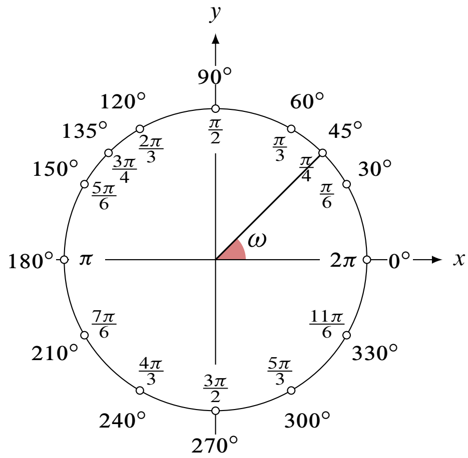
Βασικές Γωνίες

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Σχήμα									
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος με ακτίνα ίση με τη μονάδα και κέντρο την αρχή των αξόνων ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών.

Τριγωνομετρικός Κύκλος





- Κάθε γωνία ω έχει πλευρές, τον θετικό ημιάξονα Ox και την ακτίνα ρ του κύκλου, μετρώντας τη γωνία αυτή αριστερόστροφα, φορά που ορίζεται ως **θετική**.
- Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ είναι ο άξονας συνημιτόνων ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ ο άξονας ημιτόνων.
- Κάθε σημείο M του κύκλου έχει συντεταγμένες $M(\text{συν}\omega, \text{ημ}\omega)$.
- Η τετμημένη του σημείου είναι ίση με το συνημίτονο της γωνίας, ενώ η τεταγμένη ίση με το ημίτονο της.

$$x = \text{συν}\omega \quad , \quad y = \text{ημ}\omega$$

- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $A(1,0)$ είναι ο **άξονας των εφαπτομένων**. Η εφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας ε_1 με το φορέα δ της ακτίνας.

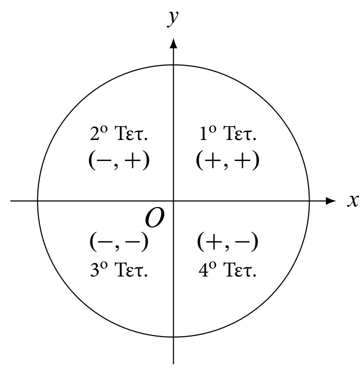
$$y_K = \text{εφ}\omega$$

- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $B(0,1)$ είναι ο **άξονας των συνεφαπτομένων**. Η συνεφαπτομένη της γωνίας ω είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας ε_2 με το φορέα δ της ακτίνας.

$$x_K = \text{σφ}\omega$$

Πιο κάτω βλέπουμε τα τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία χωρίσουν οι άξονες το επίπεδο και τον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών σε κάθε τεταρτημόριο.

Τεταρτημ./Τρ. Αριθμός	ημω	συνω	εφω	σφω
1ο Τεταρτημόριο	+	+	+	+
2ο Τεταρτημόριο	+	−	−	−
3ο Τεταρτημόριο	−	−	+	+
4ο Τεταρτημόριο	−	+	−	−



ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, οι ταυτότητες οι οποίες περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς θα ονομάζονται τριγωνομετρικές ταυτότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιοδική εαν υπάρχει ένας θετικός αριθμός T ώστε οι τιμές της να επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους T του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή θα ισχύει :

i. Για κάθε $x \in D_f$ έχουμε $x + T \in D_f$ και $x - T \in D_f$.

ii. $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$ για κάθε $x \in D_f$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας ω παίρνει τιμές από -1 μέχρι 1. Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες :

i. $-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1$, $-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$

ii. $|\text{ημ}\omega| \leq 1$, $|\text{συν}\omega| \leq 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΤΡ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω της οποίας το μέτρο είναι μικρότερο του ενός κύκλου είναι ίσοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας που θα προκύψει εαν στρέψουμε την ω κατά πολλαπλάσια του κύκλου.

$$\text{ημ}\,(360° \cdot \kappa + \omega) = \text{ημ}\omega \quad \text{συν}\,(360° \cdot \kappa + \omega) = \text{συν}\omega$$
$$\text{εφ}\,(360° \cdot \kappa + \omega) = \text{εφ}\omega \quad \text{σφ}\,(360° \cdot \kappa + \omega) = \text{σφ}\omega$$

ή ισοδύναμα με τη βοήθεια ακτινίων

$$\text{ημ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{ημ}\omega \quad \text{συν}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{συν}\omega$$
$$\text{εφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{εφ}\omega \quad \text{σφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{σφ}\omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ

Αν μ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και a το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180°} = \frac{a}{\pi}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι παρακάτω βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες :

1. $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$
2. $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}$
3. $\text{σφ}\omega = \dfrac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$
4. $\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$
5. $\text{συν}^2\omega = \dfrac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}$
6. $\text{ημ}^2\omega = \dfrac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$

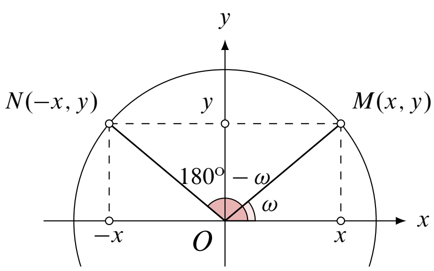
ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που καταλήγουν στο 2ο, 3ο ή 4ο ανάγωνται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών του 1ου τεταρτημορίου σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους.

1. **Παραπληρωματικές γωνίες (2ο τεταρτημόριο)**

   Γωνίες που καταλήγουν στο 2ο τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως παραπληρωματικές γωνιών του 1ου τεταρτημορίου. Εαν ω είναι μια γωνία του 1ου τεταρτημορίου τότε η παραπληρωματική της θα είναι της μορφής $180° - \omega$. Οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών τους αριθμών φαίνονται παρακάτω :

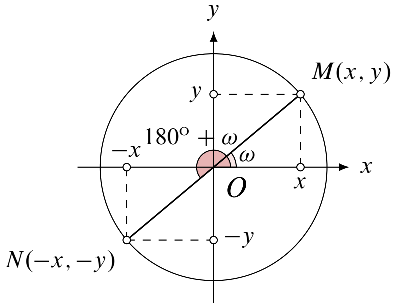
   - $\text{ημ}\,(180° - \omega) = \text{ημ}\omega$
   - $\text{συν}\,(180° - \omega) = -\text{συν}\omega$
   - $\text{εφ}\,(180° - \omega) = -\text{εφ}\omega$
   - $\text{σφ}\,(180° - \omega) = -\text{σφ}\omega$



   Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $180° - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς άξονα $y'y$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τετμημένες.

2. **Γωνίες με διαφορά 180° (3° Τεταρτημόριο)**

Γωνίες που καταλήγουν στο 3° τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως γωνίες με διαφορά 180° γωνιών του 1ου τεταρτημορίου. Εαν ω είναι μια γωνία του 1ου τεταρτημορίου, η γωνία η οποία διαφέρει από την ω κατά 180° θα είναι της μορφής $180° + \omega$. Οι σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των δύο γωνιών θα είναι :



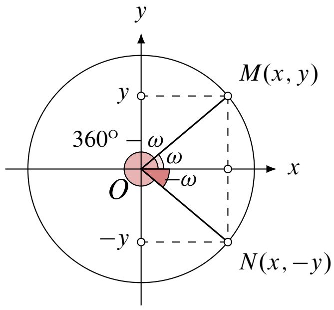
- ημ $(180° + \omega) = -$ημω
- συν $(180° + \omega) = -$συνω
- εφ $(180° + \omega) =$ εφω
- σφ $(180° + \omega) =$ σφω

Οι γωνίες με διαφορά 180° έχουν αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα ενώ έχουν ίσες εφαπτομένες και συνεφαπτομένες. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $180° + \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την αρχή των αξόνων και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

3. **Αντίθετες γωνίες - Γωνίες με άθροισμα 360° (4° Τεταρτημόριο)**

Γωνίες που καταλήγουν στο 4° τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως αντίθετες γωνιών του 1ου τεταρτημορίου. Η αντίθετη γωνία, μιας γωνίας ω του 1ου τεταρτημορίου, ορίζεται να είναι η γωνία η οποία έχει ίσο μέτρο με τη γωνία ω, με φορά αντίθετη απ' αυτήν και θα έχει τη μορφή $-\omega$. Επιπλέον η γωνία η οποία έχει με τη γωνία ω, άθροισμα 360° καταλήγει στο ίδιο σημείο και θα είναι $360° - \omega$.

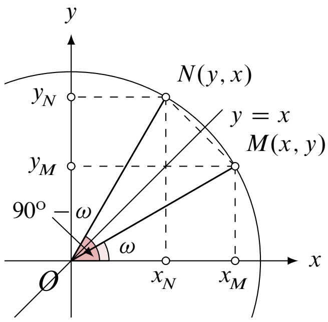
- ημ $(-\omega) =$ ημ $(360° - \omega) = -$ημω
- συν $(-\omega) =$ συν $(360° - \omega) =$ συνω
- εφ $(-\omega) =$ εφ $(360° - \omega) = -$εφω
- σφ $(-\omega) =$ σφ $(360° - \omega) = -$σφω



Οι γωνίες με άθροισμα 360° καθώς και οι αντίθετες έχουν ίσα συνημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $360° - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς τον άξονα $x'x$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τεταγμένες. Τα σημεία του κύκλου των γωνιών $360° - \omega$ και $-\omega$ καθώς και οι ακτίνες τους ταυτίζονται.

4. **Συμπληρωματικές γωνίες**

Η συμπληρωματική γωνία μιας οξείας γωνίας ω θα είναι της μορφής $90° - \omega$ η οποία ανήκει και αυτή στο 1° τεταρτημόριο. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τους συνδέονται από τις παρακάτω σχέσεις :



- ημ $(90° - \omega) =$ συνω
- συν $(90° - \omega) =$ ημω
- εφ $(90° - \omega) =$ σφω
- σφ $(90° - \omega) =$ εφω

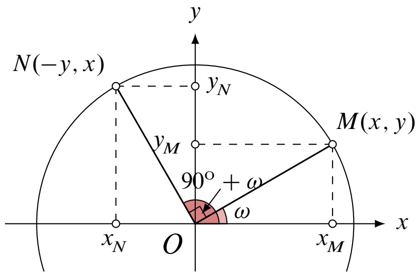
Για δύο συμπληρωματικές γωνίες έχουμε οτι το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης. Τα σημεία M, N του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών ω και $90° - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την ευθεία $y = x$ οπότε έχουν συμμετρικές συντεταγμένες.

5. **Γωνίες με διαφορά 90°**

Γωνίες οι οποίες διαφέρουν κατά 90° έχουν τη μορφή ω και $90° + \omega$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $90° + \omega$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

- ημ $(90^\circ + \omega) = $ συνω
- συν $(90^\circ + \omega) = -$ημω
- εφ $(90^\circ + \omega) = -$σφω
- σφ $(90^\circ + \omega) = -$εφω

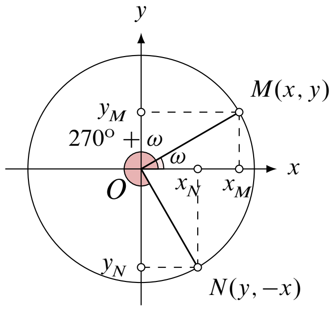
Για δύο γωνίες με διαφορά 90° ισχύει οτι το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης, ενώ συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη της πρώτης γωνίας είναι αντίθετα με τα ημίτονο, συνεφαπτομένη και εφαπτομένη αντίστοιχα, της δεύτερης.



6. **Γωνίες με διαφορά 270°**
   Η γωνία η οποία διαφέρει κατά 270° από μια γωνία ω θα είναι της μορφής $270^\circ + \omega$. Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της χρησιμοποιούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς :

- ημ $(270^\circ + \omega) = -$συνω
- συν $(270^\circ + \omega) = $ ημω
- εφ $(270^\circ + \omega) = -$σφω
- σφ $(270^\circ + \omega) = -$εφω

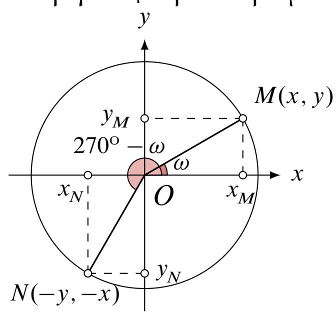
Για δύο γωνίες με διαφορά 270° ισχύει οτι το συνημίτονο της μιας είναι ίσο με το ημίτονο της άλλης, ενώ το ημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη της πρώτης είναι αντίθετα με το συνημίτονο, τη συνεφαπτομένη και την εφαπτομένη της δεύτερης αντίστοιχα.



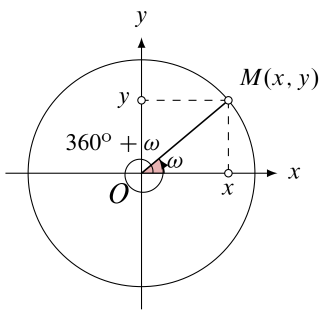
7. **Γωνίες με άθροισμα 270°**
   Η γωνία η οποία έχει άθροισμα 270° με μια γωνία ω θα γράφεται ως $270^\circ - \omega$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αυτής δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

- ημ $(270^\circ - \omega) = -$συνω
- συν $(270^\circ - \omega) = -$ημω
- εφ $(270^\circ - \omega) = $ σφω
- σφ $(270^\circ - \omega) = $ εφω

Για δύο γωνίες με άθροισμα 270° ισχύει οτι το ημίτονο και συνημίτονο της μιας είναι αντίθετα με το συνημίτονο και ημίτονο της άλλης αντοίστοιχα, ενώ η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη της πρώτης είναι ίση με τη συνεφαπτομένη και την εφαπτομένη της δεύτερης αντίστοιχα.



8. **Γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$**
   Εαν στρέψουμε μια γωνία ω κατά γωνία της μορφής $\kappa \cdot 360^\circ$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ δηλαδή ακέραια πολλαπλάσια ενός κύκλου προκύπτει γωνία του τύπου $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$. Γωνίες αυτής της μορφής διαφέρουν κατά πολλαπλάσια ενός κύκλου. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των δύο γωνιών συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις :



- ημ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = $ ημω
- συν $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = $ συνω
- εφ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = $ εφω
- σφ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = $ σφω

Οι γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$ έχουν ίσους όλους τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς καθώς ταυτίζονται τα σημεία των γωνιών πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και οι ακτίνες των γωνιών.

Στον ακόλουθο συγκεντρωτικό πίνακα βλέπουμε όλες τις σχέσεις μεταξύ δύο γωνιών φ και ω καθώς και μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών τους, με τις οποίες γίνεται η αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο.

Σχέση γωνίας φ με την ω	**Συμβολισμός $\varphi =$**	**ημφ**	**συνφ**	**εφφ**	**σφφ**

Αντίθετη	$-\omega$	$-ημ\omega$	$συν\omega$	$-εφ\omega$	$-σφ\omega$
Παραπληρωματική	$180^\circ - \omega$	$ημ\omega$	$-συν\omega$	$-εφ\omega$	$-σφ\omega$
Με διαφορά 180°	$180^\circ + \omega$	$-ημ\omega$	$-συν\omega$	$εφ\omega$	$σφ\omega$
Συμπληρωματική	$90^\circ - \omega$	$συν\omega$	$ημ\omega$	$σφ\omega$	$εφ\omega$
Με διαφορά 90°	$90^\circ + \omega$	$συν\omega$	$-ημ\omega$	$-σφ\omega$	$-εφ\omega$
Με άθροισμα 270°	$270^\circ - \omega$	$-συν\omega$	$-ημ\omega$	$σφ\omega$	$εφ\omega$
Με διαφορά 270°	$270^\circ + \omega$	$-συν\omega$	$ημ\omega$	$-σφ\omega$	$-εφ\omega$
Με άθροισμα 360°	$360^\circ - \omega$	$-ημ\omega$	$συν\omega$	$-εφ\omega$	$-σφ\omega$
Με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$	$\kappa \cdot 360^\circ + \omega$	$ημ\omega$	$συν\omega$	$εφ\omega$	$σφ\omega$

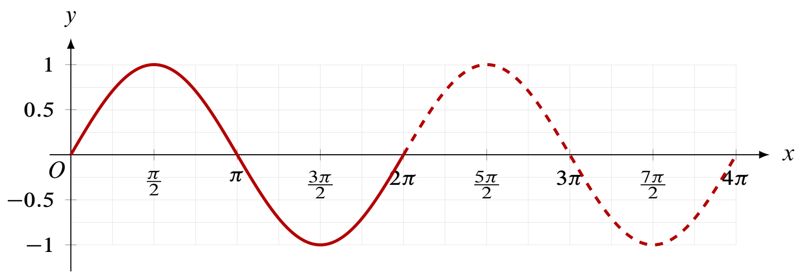
ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εδώ θα αναφέρουμε τις ιδιότητες των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αφορούν μονοτονία, ακρότατα, περιοδικότητα και άλλα βασικά στοιχεία τους.

1. **Η συνάρτηση $f(x) = ημx$**

   Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = ημx$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

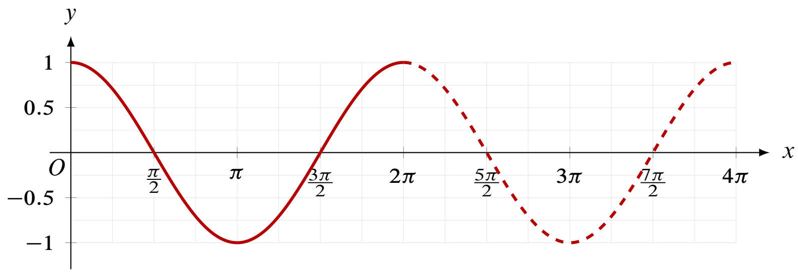
   i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
   ii. Το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
   iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
   iv. Μελετώντας τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου έχουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   v. Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 στη θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.



   vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι τιμές, η μονοτονία τα ακρότατα και κάθε άλλο χαρακτηριστικό επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου 2π. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
   vii. Γενικά η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(\kappa+1)\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
   viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ την τιμή -1.
   ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2. **Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$**
Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

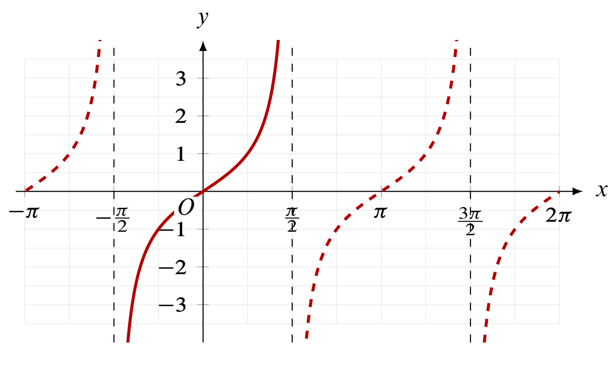
i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
ii. Το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου βλέπουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.
v. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέση $x = 0$ και $x = 2\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 στη θέση $x = \pi$.



vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου 2π. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
vii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi + \pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi$ και $x = 2(\kappa + 1)\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \pi$ την τιμή -1.
ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3. **Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$**
Οι ιδιότητες της συνάρτησης της εφαπτομένης είναι οι εξής :

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$.
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.
iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$
iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε παρατηρούμε οτι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα.
v. Δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.



vi. Οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$ επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right)$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα $\left(\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right)$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Η γραφική της παράσταση προσεγγίζει τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ οι οποίες ονομάζονται **ασύμπτωτες**.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

4. **Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$**

Οι ιδιότητες της συνάρτησης της συνεφαπτομένης είναι οι ακόλουθες :

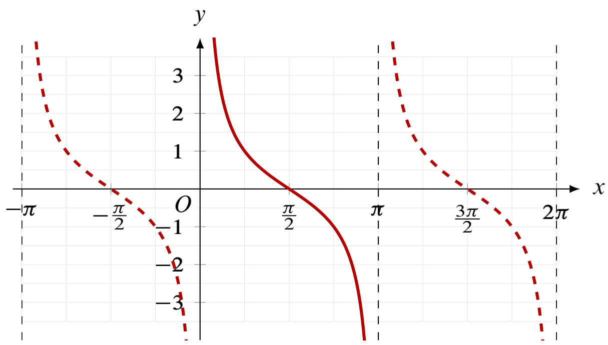
i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \kappa\pi\}$.

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.

iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$

iv. Αν γίνει μελέτη της συνάρτησης στο διάστημα $(0, \pi)$ τότε έχουμε οτι είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα.

v. Δεν έχει ακρότατα δηλαδή δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.



vi. Αφού η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι περιοδική, οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης είναι οι κατακόρυφες ευθείες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

1. **Η εξίσωση ημ$x = a$**

Σε κάθε εξίσωση της μορφής ημ$x = a$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i. Αν $a \in [-1, 1]$ τότε θα υπάρχει γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε η εξίσωση να έχει τα παρακάτω σύνολα λύσεων :

$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Αν $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. **Η εξίσωση συν$x = a$**

Σε κάθε εξίσωση της μορφής συν$x = a$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i. Αν $a \in [-1, 1]$ τότε θα υπάρχει γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε η εξίσωση να έχει τα παρακάτω σύνολα λύσεων :

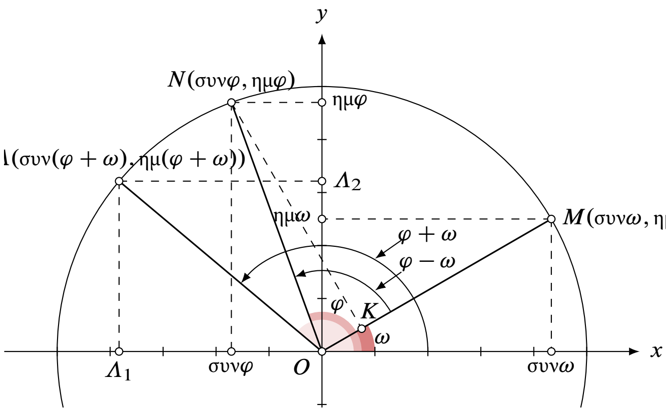
$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Αν $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. **Η εξίσωση εφ$x = a$**
Σε κάθε εξίσωση της μορφής εφ$x = a$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a θα υπάρχει γωνία $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε οι λύσεις να δίνονται από τον τύπο :
$$x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

4. **Η εξίσωση σφ$x = a$**
Σε κάθε εξίσωση της μορφής σφ$x = a$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a θα υπάρχει γωνία $\theta \in (0, \pi)$ ώστε οι λύσεις να δίνονται από τον τύπο :
$$x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ & ΔΙΑΦΟΡΑΣ
Έστω ω, φ δύο γωνίες. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος $\varphi + \omega$ και της διαφοράς τους $\varphi - \omega$ δίνονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών ω, φ από τους παρακάτω τύπους.



$$O K = \text{συν}\,(\varphi - \omega)$$
$$K N = \text{ημ}\,(\varphi - \omega)$$
$$O\Lambda_1 = \text{συν}\,(\varphi + \omega)$$
$$O\Lambda_2 = \text{ημ}\,(\varphi + \omega)$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

1. $\text{ημ}\,(\varphi + \omega) = \text{ημ}\varphi \cdot \text{συν}\omega + \text{συν}\varphi \cdot \text{ημ}\omega$
2. $\text{συν}\,(\varphi + \omega) = \text{συν}\varphi \cdot \text{συν}\omega - \text{ημ}\varphi \cdot \text{ημ}\omega$
3. $\text{εφ}\,(\varphi + \omega) = \dfrac{\text{εφ}\varphi + \text{εφ}\omega}{1 - \text{εφ}\varphi \cdot \text{εφ}\omega}$
4. $\text{σφ}\,(\varphi + \omega) = \dfrac{\text{σφ}\varphi\text{σφ}\omega - 1}{\text{σφ}\varphi + \text{σφ}\omega}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διαφοράς γωνιών

1. $\text{ημ}\,(\varphi - \omega) = \text{ημ}\varphi \cdot \text{συν}\omega - \text{συν}\varphi \cdot \text{ημ}\omega$
2. $\text{συν}\,(\varphi - \omega) = \text{συν}\varphi \cdot \text{συν}\omega + \text{ημ}\varphi \cdot \text{ημ}\omega$
3. $\text{εφ}\,(\varphi - \omega) = \dfrac{\text{εφ}\varphi - \text{εφ}\omega}{1 + \text{εφ}\varphi \cdot \text{εφ}\omega}$
4. $\text{σφ}\,(\varphi - \omega) = \dfrac{\text{σφ}\varphi\text{σφ}\omega + 1}{\text{σφ}\varphi - \text{σφ}\omega}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Οι τριγωνομετρικοί της διπλάσιας γωνίας $2 \cdot \varphi$ μιας γωνίας φ, γράφονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της αρχικής γωνίας φ και δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

1. $\text{ημ}2\varphi = 2\text{ημ}\varphi \cdot \text{συν}\varphi$
2. $\text{συν}2\varphi = \begin{cases} \text{συν}^2\varphi - \text{ημ}^2\varphi \\ 1 - 2\text{ημ}^2\varphi \\ 2\text{συν}^2\varphi - 1 \end{cases}$
3. $\text{εφ}2\varphi = \dfrac{2\text{εφ}\varphi}{1 - \text{εφ}^2\varphi}$
4. $\text{σφ}2\varphi = \dfrac{\text{σφ}^2\varphi - 1}{2\text{σφ}\varphi}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Οι ακόλουθες ταυτότητες μας δίνουν σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να γράψουμε τα τετράγωνα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιασδήποτε γωνίας φ ως συνάρτηση του συνημιτόνου της διπλασιας γωνίας 2φ

1. $\eta\mu^2\varphi = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
2. $\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{2}$
3. $\varepsilon\varphi^2\varphi = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi}$
4. $\sigma\varphi^2\varphi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi}$

4 Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για εκφράσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Η μεταβλητή μπορεί να βρίσκεται μέσα σε μια εξίσωση και γενικά σε μια αλγεβρική παράσταση. Συμβολίζεται με ένα γράμμα όπως $a, \beta, x, y, \ldots$ κ.τ.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΜΟΝΩΝΥΜΟ
Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία έχει μεταξύ των μεταβλητών μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x^{\nu_1} y^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot z^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}} \quad , \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa \in \mathbb{N}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.
- Τα μονώνυμα μιας μεταβλητής είναι της μορφής ax^ν, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ
Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά πολυώνυμα** ενώ το 0 **μηδενικό πολυώνυμο**.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P, Q, A, B \ldots$ τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση η οποία περιέχει τις μεταβλητές του δηλαδή :

$$P(x), Q(x,y), A(z,w), B\,(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ορίζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης της κάθε μεταβλητής. Ο όρος που περιέχει τη μεταβλητή με το μεγαλύτερο εκθέτη ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος**.
- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Τιμή ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικαταστίσουμε τη μεταβλητή του πολυωνύμου με έναν αριθμό x_0. Συμβολίζεται με $P(x_0)$ και είναι ίση με :

$$P(x_0) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ ο οποίος μηδενίζει το πολυώνυμο.

$$P(\rho) = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x), \delta(x)$ (Διαιρετέος και διαιρέτης αντίστοιχα) προκύπτουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x), \upsilon(x)$ (πηλίκο και υπόλοιπο) για τα οποία ισχύει :

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Η παραπάνω ισότητα ονομάζεται **ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Εαν $\upsilon(x) = 0$ τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** ενώ η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

- Στην τέλεια διαίρεση τα πολυώνυμα $\delta(x), \pi(x)$ ονομάζονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_\kappa \in \mathbb{R} \quad , \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$. **Ρίζα** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζεται η ρίζα του πολυωνύμου της εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x), R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 : ΑΡΡΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Άρρητη ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Έστω δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Ο βαθμός του αθροίσματος ή της διαφοράς $A(x) \pm B(x)$ είναι μικρότερος ίσος του μέγιστου των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) + B(x)) \leq \max\{\nu, \mu\}$.
ii. Ο βαθμός του γινομένου $A(x) \cdot B(x)$ ισούται με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) \cdot B(x)) = \nu + \mu$.
iii. Ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης $A(x) : B(x)$ ισούται με τη διαφορά των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) : B(x)) = \nu - \mu$.
iv. Ο βαθμός της δύναμης $[A(x)]^\kappa$ του πολυωνύμου $A(x)$ ισούται με το γινόμενο του εκθέτη κ με το βαθμό του $A(x)$: βαθμός$([A(x)]^\kappa) = \nu \cdot \kappa$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΣΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
Δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$ θα είναι μεταξύ τους ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_i = \beta_i \text{ , για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \mu$$
$$\text{και } a_i = 0 \text{ , για κάθε } i = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, \nu$$

Ένα πολυώνυμο $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ισούται με το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν όλοι του οι συντελεστές είναι μηδενικοί.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0\ ,\ \text{για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ $x - \rho$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με διαρέτη ένα πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού της μορφής $x - \rho$ ισούται με την τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$.

$$\upsilon = P(\rho)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ αν και μόνο αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

$$x - \rho \ \text{ παράγοντας } \ \Leftrightarrow P(\rho) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ

Αν ένας μη μεδενικός ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ τότε ο αριθμός αυτός θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 του πολυωνύμου.

5 Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Εκθετική ονομάζεται κάθε συνάρτηση f της οποίας ο τύπος αποτελεί δύναμη με θετική βάση, διάφορη της μονάδας και εκθέτη που περιέχει την ανεξάρτητη μετβλητή. Η απλή εκθετική συνάρτηση θα είναι της μορφής :

$$f(x) = a^x \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ
Λογάριθμος με βάση ένα θετικό αριθμό $a \neq 1$ ενός θετικού αριθμού β ονομάζεται ο εκθέτης στον οποίο θα υψωθεί ο αριθμός a ώστε να δώσει τον αριθμό β. Συμβολίζεται :

$$\log_a \beta$$

με $0 < a \neq 1$ και $\beta > 0$.

- Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση του λογαρίθμου**.
- Ο αριθμός β έχει το ρόλο του αποτελέσματος της δύναμης με βάση a, ενώ ολόκληρος ο λογάριθμος, το ρόλο του εκθέτη.
- Αν ο λογάριθμος (εκθέτης) με βάση a του β είναι ίσος με x τότε θα ισχύει :

$$\log_a \beta = x \Leftrightarrow a^x = \beta$$

- Εαν η βάση ενός λογαρίθμου είναι ο αριθμός 10 τότε ο λογάριθμος ονομάζεται **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται : $\log x$.
- Εαν η βάση του λογαρίθμου είναι ο αριθμός e τότε ο λογάριθμος ονομάζεται **φυσικός λογάριθμος** και συμβολίζεται : $\ln x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Λογαριθμική ονομάζεται κάθε συνάρτηση f της οποίας η τιμή της $f(x)$ δίνεται με τη βοήθεια ενός λογαρίθμου, για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού $x \in D_f$. Θα είναι :

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

Αν η βάση a του λογαρίθμου γίνει ίση με τον αριθμό 10 ή e τότε αποκτάμε τη συνάρτηση $f(x) = \log x$ ή $f(x) = \ln x$ αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Οι ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$, είναι οι εξής. Σε ορισμένες ιδιότητες διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη βάση a της συνάρτησης.

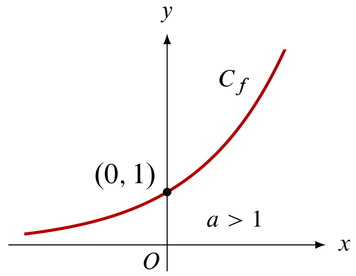
i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
ii. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
iii. Η συνάρτηση δεν έχει ακρότατες τιμές.

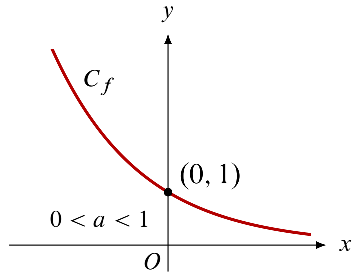
A. Για $a > 1$

- Αν η βάση a της εκθετικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

- Η γραφική παράστασή της έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στη μεριά του $-\infty$ ενώ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$



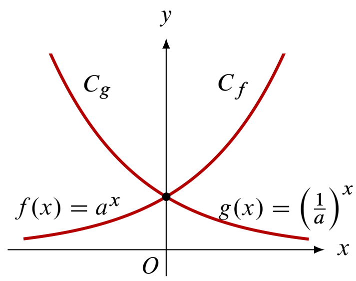


B. Για $0 < a < 1$

- Αν η βάση a της εκθετικής συνάρτησης είναι μικρότερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράστασή της έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στη μεριά του $+\infty$ ενώ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

iv. Οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών συναρτήσεων με αντίστροφες βάσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, με $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}^+$ έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες που αφορούν το λογάριθμο τους με βάση έναν θετικό πραγματικό αριθμό a.

Ιδιότητα	**Συνθήκη**
Λογάριθμος γινομένου	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Λογάριθμος πηλίκου	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
Λογάριθμος δύναμης	$\log_a x^\kappa = \kappa \cdot \log_a x \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Λογάριθμος ρίζας	$\log_a \sqrt[\nu]{x} = \frac{1}{\nu} \log_a x \quad , \quad \nu \in \mathbb{N}$
Λογάριθμος ως εκθέτης	$a^{\log_a x} = x$
Λογάριθμος δύναμης με κοινή βάση	$\log_a a^x = x$
Αλλαγή βάσης	$\log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$

Επίσης για κάθε λογάριθμο με οποιαδήποτε βάση $a \in \mathbb{R}^+$ και $a \neq 1$ έχουμε :

i. $\log_a 1 = 0$

ii. $\log_a a = 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Για κάθε λογαριθμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = \log_a x$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

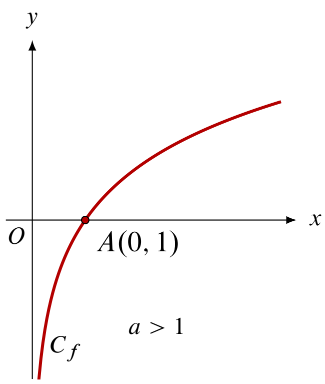
i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
ii. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
iii. Η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

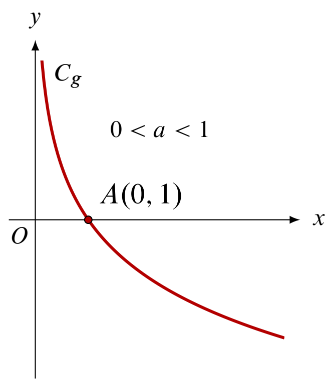
1. Για $a > 1$

- Αν η βάση a του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως αυξουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.
- Η γραφική παράστασή της έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ στη μεριά του $-\infty$ ενώ τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x > 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x < 0$.





2. Για $0 < a < 1$

- Αν η βάση a του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

- Η γραφική παράστασή της έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ στη μεριά του $+\infty$ ενώ τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.
- Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$
$$\text{Αν } x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

- Για $x > 1$ ισχύει $\log_a x < 0$ ενώ για $0 < x < 1$ έχουμε $\log_a x > 0$.

iv. Οι γραφικές παραστάσεις των λογαριθμικών συναρτήσεων με αντίστροφες βάσεις $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$, με $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.