

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Συστήματα

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

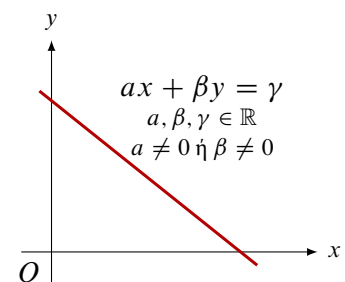
ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών, ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση στην οποία κάθε όρος της είναι μονώνυμο 1^{ου} βαθμού μιας μεταβλητής. Έχει τη μορφή

$$ax + by = \gamma$$

όπου οι συντελεστές και ο σταθερός όρος είναι πραγματικοί αριθμοί $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$. Η καμπύλη της εξίσωσης είναι ευθεία γραμμή αν οι συντελεστές a, b των μεταβλητών x, y αντίστοιχα, δεν μηδενίζονται συγχρόνως δηλ. $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.



- Οι ευθείες της μορφής $x = \kappa$ ονομάζονται **κατακόρυφες** ευθείες ενώ οι ευθείες της μορφής $y = \kappa$ οριζόντιες ευθείες.
- Ο πραγματικός αριθμός $\lambda = -\frac{a}{b}$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας $ax + by = \gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$ax + by = \gamma$$

ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2×2

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται ο συνδυασμός - σύζευξη δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

- Οι συντελεστές του συστήματος a, a', b, b' και οι σταθεροί όροι γ, γ' είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.
- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εάν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εάν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2

Ορίζουσα των συντελεστών ενός συστήματος 2×2 ονομάζεται ο αριθμός $ab' - a'\beta$ η οποία συμβολίζεται

$$D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}$$

D_x, D_y είναι οι ορίζουσες των μεταβλητών που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στην ορίζουσα D τη στήλη των συντελεστών των μεταβλητών x, y αντίστοιχα με τους σταθερούς όρους γ, γ' .

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3×3

Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους ονομάζεται ένας συνδυασμός από τρεις γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = \delta_1 \\ a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = \delta_2 \\ a_3x + \beta_3y + \gamma_3z = \delta_3 \end{cases}$$

με $a_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Κάθε διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x_0, y_0, z_0) η οποία επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος 3×3 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Παραμετρικό ονομάζεται το γραμμικό σύστημα του οποίου οι συντελεστές ή και οι σταθεροί όροι δίνονται με τη βοήθεια μιας ή περισσότερων παραμέτρων. Η διαδικασία επίλυσης ενός παραμετρικού συστήματος ονομάζεται **διερεύνηση**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα σύστημα εξισώσεων θα ονομάζεται μη γραμμικό όταν τουλάχιστον μια εξίσωσή του δεν αποτελεί γραμμική εξίσωση.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΕΙΔΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η γραμμική εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ παριστάνει

- i. πλάγια ευθεία αν $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
- ii. οριζόντια ευθεία αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$.
- iii. κατακόρυφη ευθεία αν $a \neq 0$ και $\beta = 0$.

ενώ αν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές a και β τότε δεν παριστάνει ευθεία γραμμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει σε μια ευθεία με εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα συντελεστών D .

- i. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι διάφορη του μηδενος δηλαδή $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οι τιμές των μεταβλητών δίνονται από τις σχέσεις

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

ενώ η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

- ii. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι μηδενική δηλαδή $D = 0$ τότε το σύστημα είναι είτε αόριστο είτε αδύνατο.