ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Πολυώνυμα

1.1 Η έννοια του πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
Μεταβλητή ονομάζεται το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για εκφράσουμε έναν άγνωστο αριθμό. Η μεταβλητή μπορεί να βρίσκεται μέσα σε μια εξίσωση και γενικά σε μια αλγεβική παράσταση. Συμβολίζεται με ένα γράμμα όπως $a, \beta, x, y, \ldots$ κ.τ.λ.

Ορισμός 1.2 : ΜΟΝΩΝΥΜΟ
Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία έχει μεταξύ των μεταβλητών μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού.

$$\text{Συντελεστής} \longrightarrow a \cdot \underbrace{x^{\nu_1} y^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot z^{\nu_\kappa}}_{\text{κύριο μέρος}} \quad , \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa \in \mathbb{N}$$

- Το γινόμενο των μεταβλητών ενός μονωνύμου ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- Ο σταθερός αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το κύριο μέρος ενός μονωνύμου ονομάζεται **συντελεστής**.
- Τα μονώνυμα μιας μεταβλητής είναι της μορφής ax^ν, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ
Πολυώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση η οποία είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων.

- Κάθε μονώνυμο μέσα σ' ένα πολυώνυμο ονομάζεται **όρος** του πολυωνύμου.
- Το πολυώνυμο με 3 όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.
- Οι αριθμοί ονομάζονται **σταθερά πολυώνυμα** ενώ το 0 **μηδενικό πολυώνυμο**.
- Κάθε πολυώνυμο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως : $P, Q, A, B \ldots$ τοποθετώντας δίπλα από το όνομα μια παρένθεση η οποία περιέχει τις μεταβλητές του δηλαδή : $P(x), Q(x,y), A(z,w), B(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.
- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ορίζεται ως ο μεγαλύτερος εκθέτης της κάθε μεταβλητής. Ο όρος που περιέχει τη μεταβλητή με το μεγαλύτερο εκθέτη ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος**.

- Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής τα γράφουμε κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής δηλαδή από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Έχουν τη μορφή :

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ορισμός 1.4 : ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Τιμή ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει ύστερα από πράξεις αν αντικαταστίσουμε τη μεταβλητή του πολυωνύμου με έναν αριθμό x_0. Συμβολίζεται με $P(x_0)$ και είναι ίση με :

$$P(x_0) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

Ορισμός 1.5 : ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ ο οποίος μηδενίζει το πολυώνυμο.

$$P(\rho) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Έστω δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Ο βαθμός του αθροίσματος ή της διαφοράς $A(x) \pm B(x)$ είναι μικρότερος ίσος του μέγιστου των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) + B(x)) \leq \max\{\nu, \mu\}$.
ii. Ο βαθμός του γινομένου $A(x) \cdot B(x)$ ισούται με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) \cdot B(x)) = \nu + \mu$.
iii. Ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης $A(x) : B(x)$ ισούται με τη διαφορά των βαθμών των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$: βαθμός$(A(x) : B(x)) = \nu - \mu$.
iv. Ο βαθμός της δύναμης $[A(x)]^\kappa$ του πολυωνύμου $A(x)$ ισούται με το γινόμενο του εκθέτη κ με το βαθμό του $A(x)$: βαθμός$([A(x)]^\kappa) = \nu \cdot \kappa$.

Θεώρημα 1.2 : ΙΣΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
Δύο πολυώνυμα $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $B(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα με $\nu \geq \mu$ θα είναι μεταξύ τους ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_i = \beta_i \text{ , για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \mu$$
$$\text{και } a_i = 0 \text{ , για κάθε } i = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, \nu$$

Ένα πολυώνυμο $A(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ισούται με το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν όλοι του οι συντελεστές είναι μηδενικοί.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ , για κάθε } i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέθοδος 1.1 : ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Αν $A(x)$ είναι ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής τότε προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή του για δοσμένη τιμή της μεταβλητής του

***1ο Βήμα* : Αντικατάσταση τιμών**
Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής x που μας δίνεται στο πολυώνυμο, οπότε μετατρέπεται από αλγεβρική σε αριθμητική παράσταση.

***2ο Βήμα* : Πράξεις**
Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στην αριθμιτική παράσταση που προέκυψε με τη γνωστή σειρά και υπολογίζουμε το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1.1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΙΜΗΣ

Να υπολογιστεί η τιμή του παρακάτω πολυωνύμου $A(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ εαν θέσουμε όπου $x = -2$.

ΛΥΣΗ
Αν θέσουμε όπου $x = -2$ τότε προκύπτει η παρακάτω αριθμητική παράσταση :

$$A(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 3(-2) - 7 = -8 + 4 \cdot 4 + 3(-2) - 7 = -8 + 16 - 6 - 7 = -5$$

Η τιμή λοιπόν του πολυωνύμου για τις δοσμένες τιμές των μεταβλητών του θα είναι ίση με -41.

Παράδειγμα 1.2 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΙΜΗΣ

Να υπολογιστεί η τιμή του παρακάτω πολυωνύμου $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ εαν μας δίνεται οτι $x = 1$.

ΛΥΣΗ
Το πολυώνυμο που μας δίνεται είναι μιας μεταβλητής. Θέτοντας λοιπόν όπου $x = 1$ η τιμή του θα συμβολιστεί με $P(1)$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 4 \xRightarrow{x=1} P(1) &= 5 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 \\ &= 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4 \\ &= 5 - 3 + 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Προέκυψε λοιπόν η τιμή του πολυωνύμου $P(1) = 0$ όποτε ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

Μέθοδος 1.2 : ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο αντικαταστήσαμε στη θέση των μεταβλητών σταθερούς αριθμούς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θέσουμε στη θέση των αρχικών μεταβλητών, νέες μεταβλητές.

1ο Βήμα : **Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε στη θέση των αρχικών μεταβλητών τις νέες μεταβλητές που μας δίνονται.

2ο Βήμα : **Απλοποίηση**
Προκύπτει τότε μια νέα αλγεβρική παράσταση την οποία απλοποιούμε εκτελώντας όλες τις δυνατές πράξεις.

Παράδειγμα 1.3 : ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα

i. $P(t)$ **ii.** $P(2x)$ **iii.** $P(-3s)$

ΛΥΣΗ

i. Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή t στη θέση της μεταβλητής x του πολυωνύμου P παρατηρούμε οτι γίνεται μόνο αλλαγή του συμβολισμού της πράγμα που σημαίνει οτι η δομή του πολυωνύμου δεν θα αλλάξει. Έχουμε λοιπόν

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 5 \xRightarrow{x \to t} P(t) = 2t^2 - 3t + 5$$

ii. Θέτοντας στη θέση της μεταβλητής x το μονώνυμο $2x$ στο πολυώνυμο P θα προκύψει

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^2 - 3x + 5 \xRightarrow{x \to 2x} P(2x) &= 2(2x)^2 - 3 \cdot (2x) + 5 \\ &= 2 \cdot 4x^2 - 6x + 5 = 8x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

iii. Θέτοντας όπου x το μονώνυμο $-3s$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^2 - 3x + 5 \xRightarrow{x \to -3s} P(-3s) &= 2(-3s)^2 - 3 \cdot (-3s) + 5 \\ &= 2 \cdot 9s^2 + 9s + 5 = 18s^2 + 9s + 5 \end{aligned}$$

Μέθοδος 1.3 : ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Γνωρίζουμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων του είναι ίσοι. Έτσι για τον υπολογισμό των συντελεστών των πολυωνύμων :

1ο Βήμα : **Ίσοι συντελεστές**

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους. Αν κάποιο πολυώνυμο έχει μεγαλύτερο βαθμό τότε οι συντελεστές των παραπανίσιων όρων ισούνται με το 0.

2ο Βήμα : **Εύρεση συντελεστών**
Λύνουμε τις εξισώσεις ή τα συστήματα εξισώσεων που θα προκύψουν οπότε προσδιορίζουμε τους ζητούμενους συντελεστές.

Παράδειγμα 1.4 : ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^3 + \beta x^2 - 4x + \delta$ και $B(x) = ax^3 - 3x^2 + \gamma x - 7$. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα $A(x), B(x)$ να είναι μεταξύ τους ίσα.

ΛΥΣΗ
Για να ισχύει η ισότητα $A(x) = B(x)$ θα πρέπει να έχουμε

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow x^3+\beta x^2-4x+\delta = ax^3-3x^2+\gamma x-7 \Leftrightarrow a = 1\,,\ \beta = -3\,,\ \gamma = -4\,,\ \delta = -7$$

Παράδειγμα 1.5 : ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα

$$A(x) = (a-2)x^4 + 3x^3 - 2x^2 + (\beta+\gamma)x + 2 \text{ και } B(x) = (2\beta-\gamma)x^3 - \delta x^2 + 2$$

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα $A(x), B(x)$ να είναι μεταξύ τους ίσα.

ΛΥΣΗ
Προκειμένου να είναι τα δύο πολυώνυμα ίσα θα πρέπει να να έχουν ίσους συντελεστές οπότε προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες :

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow (a-2)x^4 + 3x^3 - 2x^2 + (\beta+\gamma)x + 2 = (2\beta-\gamma)x^3 - \delta x^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$a - 2 = 0 \quad , \quad \begin{cases} 2\beta - \gamma = 3 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad , \quad -\delta = -2$$

Έπειτα από τη λύση των εξισώσεων και του γραμμικού συστήματος παίρνουμε τους αριθμούς : $a = 2\,,\ \beta = 2\,,\ \gamma = -1$ και $\delta = 2$.

Μέθοδος 1.4 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ή περισσότερα πολυώνυμα μεταξύ τους εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των συντελεστών των όμοιων μονωνύμων τους κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων.

Παράδειγμα 1.6 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ και $B(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 4$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα

i. $\boldsymbol{A(x) + B(x)}$ **ii.** $\boldsymbol{B(x) - A(x)}$

ΛΥΣΗ
Όπως και στην πρόσθεση έτσι και στην αφαίρεση των πολυωνύμων θα χρειαστεί να ξεχωρίσουμε τους όμοιους μεταξύ τους όρους.

i. Έχουμε λοιπόν

$$A(x) + B(x) = \left(x^3 - 5x^2 + 2x + 1\right) + \left(3x^3 - x^2 + 5x + 4\right) =$$
$$x^3 + 3x^3 - 5x^2 - x^2 + 2x + 5x + 1 + 4 = 4x^3 - 6x^2 + 7x + 5$$

ii. Για τη διαφορά των δύο πολυωνύμων θα χρειαστεί να αλλάξουμε τα πρόσημα του δεύτερου πολυωνύμου.

$$B(x) - A(x) = \left(3x^3 - x^2 + 5x + 4\right) - \left(x^3 - 5x^2 + 2x + 1\right) =$$
$$3x^3 - x^2 + 5x + 4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3$$

Μέθοδος 1.5 : ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων κάνουμε χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

***1ο Βήμα :* Πολλαπλασιασμός**
Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα μεταξύ τους πολλαπλασιάζουμε κάνοντας χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας κάθε όρο του πρώτου με κάθεναν από τους όρους του δεύτερο πολυωνύμου.

***2ο Βήμα :* Αναγωγή ομοίων όρων**
Αφού βρεθεί το ανάπτυγμα του γινομένου προσθέτουμε αν υπάρχουν τους όμοιους όρους που θα προκύψουν μεταξύ τους ώστε να απλοποιηθεί η παράσταση.

Παράδειγμα 1.7 : ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Να υπολογιστεί το γινόμενο $\boldsymbol{A(x) \cdot B(x)}$ των πολυωνύμων $\boldsymbol{A(x) = x^2 - 4x + 3}$ και $\boldsymbol{B(x) = 3x + 5}$.

ΛΥΣΗ
Το γινόμενο των πολυωνύμων θα έχει ως εξής :

$$A(x) \cdot B(x) = \left(x^2 - 4x + 3\right) \cdot (3x + 5) = x^2 \cdot 3x + x^2 \cdot 5 - 4x \cdot 3x - 4x \cdot 5 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 5$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 12x^2 - 20x + 9x + 15 = 3x^3 - 7x^2 - 11x + 15$$

Μέθοδος 1.6 : ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Ο βαθμός ενός πολυωνύμου καθορίζεται από το μέγιστο εκθέτη της μεταβλητής του. Για να βρεθεί ο βαθμός ενός πολυωνύμου

1.2 Διαίρεση πολυωνύμων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.6 : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x), \delta(x)$ (Διαιρετέος και διαιρέτης αντίστοιχα) προκύπτουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x), \upsilon(x)$ (πηλίκο και υπόλοιπο) για τα οποία ισχύει :

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

- Η παραπάνω ισότητα ονομάζεται **ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης**.
- Εαν $\upsilon(x) = 0$ τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** ενώ η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

- Στην τέλεια διαίρεση τα πολυώνυμα $\delta(x), \pi(x)$ ονομάζονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.3 : ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ $x - \rho$
Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με διαρέτη ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής $x - \rho$ ισούται με την τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$.

$$\upsilon = P(\rho)$$

Θεώρημα 1.4 : ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ αν και μόνο αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

$$x - \rho \text{ παράγοντας } \Leftrightarrow P(\rho) = 0$$

1.3 Διαίρεση με σχήμα Horner

1.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις - Ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_\kappa \in \mathbb{R} \quad , \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$. **Ρίζα** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζεται η ρίζα του πολυωνύμου της εξίσωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.5 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ
Αν ένας μη μεδενικός ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ τότε ο αριθμός αυτός θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 του πολυωνύμου.

1.5 Μη πολυωνυμικές εξισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.8 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

Ορισμός 1.9 : ΑΡΡΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Άρρητη ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$.