



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

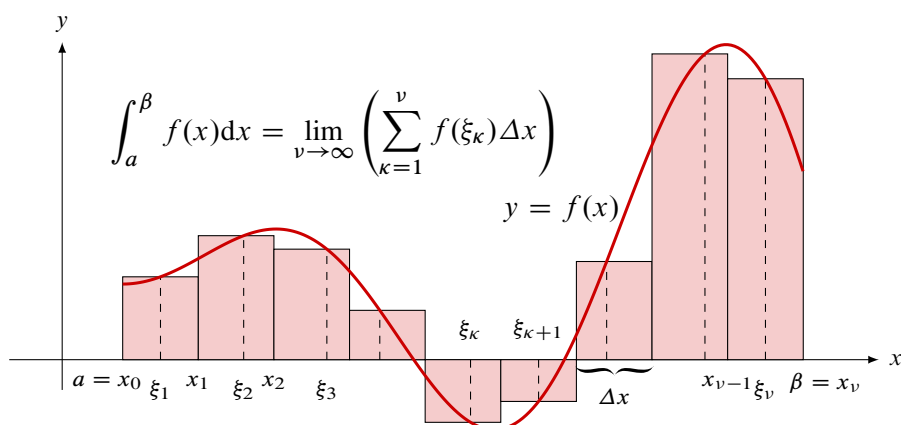
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

📍: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , ☎: 26610 20144 , 📱: 6932327283 - 6955058444

7 Ιουλίου 2025

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Φρόνιμος Σπύρος

Επαναληπτικά Θέματα Β

1ο Κεφάλαιο Όρια - Συνέχεια

1ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

- B.1** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
- B.2** Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B.3** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- B.4** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \ln 9$.

2ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ και $g(x) = e^x$.

- B.1** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Αν $h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$ με $x \in \mathbb{R}$:

- B.2** δείξτε ότι η h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$, $x > 0$.
- B.3** βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων h και h^{-1} .
- B.4** βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_h η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta : y = -\frac{x}{2} + 1$.

3ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- B.1** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B.2** Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B.3** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
- B.4** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1, x = 2$.

4ο Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

- B.1** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B.2** Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- B.3** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- B.4** Αν $\varepsilon : y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο A , να δείξετε ότι ισχύει $2\sqrt{x} + x - 3 \geq \ln x$ για κάθε $x > 0$.
- B.5** Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x))$.
- B.6** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την ευθεία ε και την ευθεία $x = 3$.

5ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x - x$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$.

B.1 Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Αν $h(x) = e^x(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$:

B.2 μελετήστε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B.3 να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B.4 να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -2$.

6ο Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ και $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = e^x$.

B.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f = h \circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_f = (1, +\infty)$ και τύπο $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

B.2 Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f και k με $k(x) = x - \frac{1}{x}$ είναι ίσες. Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ισχύει $f(x) = k(x)$.

B.3 Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την f^{-1} .

B.4 Αν $f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$, $x > 0$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$$

Επαναληπτικά Θέματα Γ

1ο Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^2 f'(x) + x f(x) = 1, \quad x > 0$$

Να δείξετε ότι:

Γ.1 ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Γ.2 υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $1 - \ln x_0 = 2x_0^2$.

Γ.3 ισχύει $e \ln x \leq x$ για κάθε $x > 0$.

Γ.4 Ένα σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f του οποίου η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό $2\mu/s$. Τη στιγμή που το σημείο M βρίσκεται στη θέση $A(e, f(e))$ να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του.

2ο Θέμα Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x \geq 0 \\ xe^x - x + \beta & , x < 0 \end{cases}$$

Γ.1 Να δείξετε ότι $a = \beta = -1$.

Γ.2 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$$

Γ.3 Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Γ.4 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = x + 1$.

3ο Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{-ax}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = \frac{1}{e}$.

Γ.1 Να δείξετε ότι $a = 1$.

Γ.2 Προσδιορίστε το είδος και την τιμή του ακρότατου και δείξτε ότι $ex \ln x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Γ.3 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \eta \mu x)$$

Γ.4 Ένα σημείο M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f έτσι ώστε η τεταγμένη του να αυξάνεται με ρυθμό $3\mu/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή που αυτό διέρχεται από το $A(e, f(e))$.