ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιδιότητες Συναρτήσεων

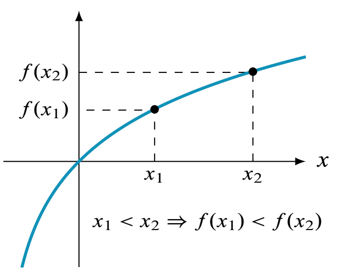
1.1 Μονοτονία - Ακρότατα

ΟΡΙΣΜΟΙ

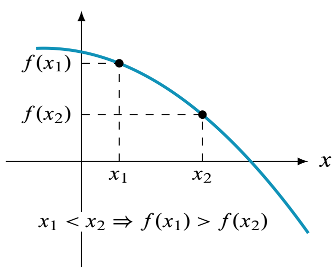
Ορισμός 1 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ
Μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα, χαρακτηρίζεται ως **μονότονη**, ενώ μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως **γνησίως μονότονη**. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αφορούν τη **μονοτονία** μιας συνάρτησης, μια ιδιότητα των συναρτήσεων η οποία δείχνει την αύξηση ή τη μείωση των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού.

1. **Γνησίως αύξουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) < f(x_2)$$

2. **Γνησίως φθίνουσα**
   Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ εαν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) > f(x_2)$$



Σχήμα 1.1: Γνησίως αύξουσα



Σχήμα 1.2: Γνησίως φθίνουσα

Ορισμός 2 : ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

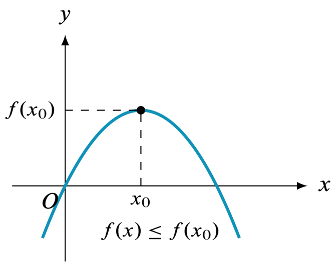
Ακρότατα ονομάζονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ τις οποίες παίρνει σε ένα διάστημα ή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

1. **Ολικό μέγιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού.

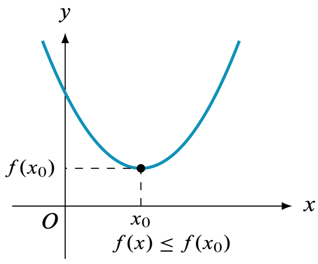
$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

2. **Ολικό ελάχιστο**
   Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$



Σχήμα 1.3: Ολικό μέγιστο



Σχήμα 1.4: Ολικό ελάχιστο

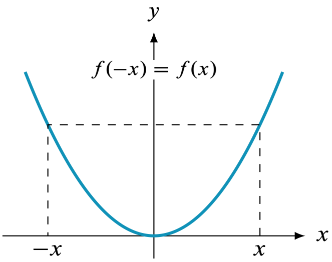
Ορισμός 3 : ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. **Άρτια συνάρτηση**
   Άρτια ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

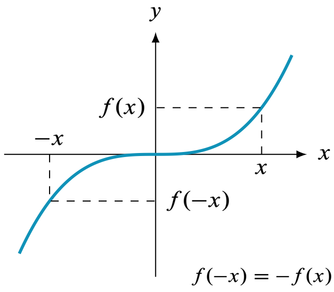
   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

2. **Περιττή συνάρτηση**
   Περιττή ονομάζεται μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

   i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
   ii. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$



Σχήμα 1.5: Άρτια συνάρτηση



Σχήμα 1.6: Περιττή συνάρτηση

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Η αρχή των αξόνων για μια περιττή συνάρτηση ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας** της.

1.2 Μετατόπιση γραφικής παράστασης

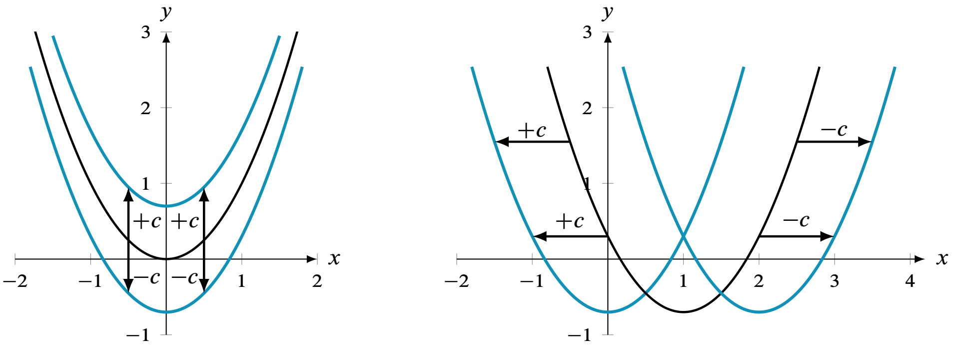
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ
Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά c μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω, εαν αυξήσουμε ή μειώσουμε αντίστοιχα τις τεταγμένες $f(x)$ των σημείων της κατά c μονάδες.

$$g(x) = f(x) \pm c \quad , \quad c > 0$$

Η γραφική παράσταση C_g της νέας συνάρτησης $g(x)$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες.



Θεώρημα 1.2 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f μετατοπίζεται οριζόντια κατά c μονάδες προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά, εαν αυξήσουμε ή μειώσουμε αντίστοιχα τις τετμημένες x των σημείων της κατά c μονάδες.

$$g(x) = f(x \pm c) \ \ , \ \ c > 0$$

Η γραφική παράσταση C_g της νέας συνάρτησης $g(x)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες.