

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
25 Ιουλίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
Εξισώσεις - Ανισώσεις
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΑΝΙΣΩΣΗ

Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή. Μια ανίσωση μιας μεταβλητής θα έχει τη μορφή

$$ax + \beta > 0 \text{ ή } ax + \beta < 0$$

όπου a, β οποιοιδήποτε αριθμοί.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας \leq, \geq .
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις της μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x), Q(x), R(x)$ είναι αλγεβρικές παρατάξεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Εάν σε μια ανισότητα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και απ' τα δύο μέλη της, προκύπτει ξανά ανισότητα με την ίδια φορά της αρχικής.

$$a > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + \gamma > \beta + \gamma \\ a - \gamma > \beta - \gamma \end{cases}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :
 - i. Εάν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια** φορά της αρχικής.

- ii. Εάν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά **αντίθετη** της αρχικής.

$$\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\text{Αν } \gamma < 0 \text{ τότε } a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta$, $a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων προκύπτει ανισότητα, με 1^ο μέλος το άθροισμα των 1^{ων} μελών τους και 2^ο μέλος το άθροισμα των 2^{ων} μελών τους με φορά ίδια της αρχικής. Ομοίως πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη δύο ανισότητες προκύπτει ανισότητα με φορά ίδια της αρχικής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο ανισότητες κατά μέλη πρέπει όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \text{ και } \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ 2. \text{ Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta, \text{ με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.