ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

21 Μαΐου 2015

ΘΕΜΑ Α΄.

Α.1 Έστω $H(x) = f(x) + g(x)$. Η παράγωγος της h θα είναι :

$$H'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Α.2 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εαν το όριο στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της f στο x_0 δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Α.3 Ο σταθμικός μέσος των παρατηρήσεων $x_1.x_2, \ldots, x_\nu$ με συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ αντίστοιχα δίνεται από τον τύπο

$$\overline{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Α.4 α΄) Σωστό β΄) Σωστό γ΄) Λάθος δ΄) Λάθος ε΄) Σωστό

ΘΕΜΑ Β΄.

Β.1 Λύνοντας την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$(3x-1)\left(8x^2 - 6x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 8x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

επομένως το σύνολο των λύσεων της πρώτης εξίσωσης είναι $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. Επίσης για τα σύνολα $A, A \cap B$ και $A \cup B$ ισχύει η σχέση $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. Επομένως θα ισχύει

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$$

επομένως οι παραπάνω πιθανότητες είναι αντίστοιχα

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \;\;,\;\; P(A) = \frac{1}{3} \;\;,\;\; P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Β.2 Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $A' - B'$ ισχύει

$$P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = P(A') - P\left((A \cup B)'\right) =$$
$$1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Επίσης το ενδεχόμενο Δ : να πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα δύο ενδεχόμενα A και B μεταφράζεται συμβολικά $\Delta = (A \cap B)'$. Επομένως

$$P(\Delta) = P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

B.3 Το ενδεχόμενο E : να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα δύο ενδεχόμενα A και B μεταφράζεται συμβολικά $E = (A - B) \cup (B - A)$. Οπότε για την πιθανότητα του E θα ισχύει

$$P(E) = P\left((A - B) \cup (B - A)\right) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Επίσης από τον προσθετικό νόμο τα έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

Άρα προκύπτει

$$P(E) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

B.4 Οι λύσεις της δεύτερης εξίσωσης είναι

$$9x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ή ; } x = -\frac{1}{3}$$

όμως η δεύτερη λύση απορρίπτεται λόγω του ότι $0 \leq P(\Gamma) \leq 1$ άρα

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

Έστω οτι τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε από τον προσθετικό νόμο θα ισχύει

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$$

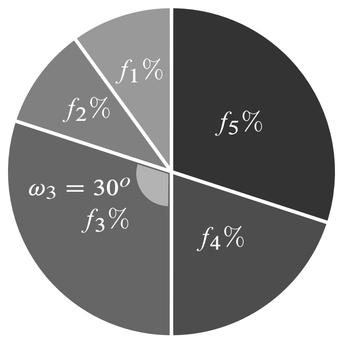
άτοπο. Επομένως τα ενδεχόμενα B και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ΄.

Γ.1 Από την υπόθεση της άσκησης γνωρίζουμε οτι

i. Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10% άρα έχουμε $f_1\% = 10\%$.
ii. Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30% άρα $f_5\% = 30\%$.

Επίσης είναι γνωστό οτι η κεντρική γωνία του κυκλικού διαγράμματος είναι οτι η κεντρική γωνία του τομέα της τρίτης σχετικής συχνότητας είναι 108°. Εαν ω_3 είναι η κεντρική γωνία της f_3 τότε



$$f_3 = \frac{\omega_3}{360°} = \frac{108°}{360°} = 0{,}3$$

Από τον πίνακα προκύπτουν οι κεντρικές τιμές των κλάσεων $x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 15, x_5 = 17$. Επίσης για τη μέση τιμή του δείγματος ισχύει

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Rightarrow 9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0{,}3 = 14 \Rightarrow$$
$$11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4{,}1$$

Γνωρίζουμε οτι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων είναι ίσο με 1 οπότε θα αποκτήσουμε μια ακόμα σχέση με τις ζητούμενες συχνότητες :

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Rightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{cases} 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4{,}1 \\ \quad f_2 + \quad f_4 = 0{,}3 \end{cases} \Rightarrow f_2 = 0{,}1 = 10\% \text{ και } f_4 = 0{,}2 = 20\%$$

Γ.2 Η διακύμανση των τιμών του δείγματος έχει ως εξής :

$$s^2 = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \overline{x})^2 f_i = (9-14)^2 0{,}1 + (11-14)^2 0{,}1 + (13-14)^2 0{,}3 +$$
$$(15-14)^2 0{,}2 + (17-14)^2 0{,}3 = 6{,}6$$

Επομένως η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6{,}6} = 2{,}57$. Για το συντελεστή μεταβλητότητας θα έχουμε

$$CV = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{2{,}57}{14} \simeq 0{,}187 > 0{,}1$$

πράγμα που μας δείχνει οτι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ.3 Ισχύει οτι

$$\overline{x} = 14 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = 14 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} = 14 \Rightarrow \frac{1780}{\nu} + x_5 f_5 = 14 \Rightarrow$$
$$\frac{1780}{\nu} = 14 - 17 \cdot 0{,}3 \Rightarrow \frac{1780}{\nu} = 8{,}9 \Rightarrow \nu = 200$$

Γ.4 Η μέση τιμή των παρατηρήσεων β_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ θα είναι

$$\overline{\beta} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \beta_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{5} = \frac{a_1 - \overline{a} + a_2 - \overline{a} + a_3 - \overline{a} + a_4 - \overline{a} + a_5 - \overline{a}}{5 s_a} =$$
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5 s_a} - \frac{5\overline{a}}{5 s_a} = \frac{\overline{a}}{s_a} - \frac{\overline{a}}{s_a} = 0$$

Επίσης για τη διακύμανση των τιμών αυτών ισχύει

$$s_\beta^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} (\beta_i - \overline{\beta})^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + \beta_5^2}{5} = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + \ldots + (a_5 - \overline{a})^2}{5 s_a^2} = \frac{s_a^2}{s_a^2} = 1$$

ΘΕΜΑ Δ′.

Δ.1

Σπύρος Φρόνιμος