

1 Η έννοια του διανύσματος

📅 Ημερομηνία:

Πίνακας Ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖

1. Διάνυσμα
2. Αρχή και πέρας
3. Στοιχεία διανύσματος: Μέτρο - διεύθυνση - φορά
4. Φορέας διανύσματος
5. Μηδενικό - Μοναδιαίο διάνυσμα
6. Παράλληλα διανύσματα
7. Ομόρροπα διανύσματα
8. Αντίρροπα διανύσματα
9. Ίσα διανύσματα
10. Αντίθετα διανύσματα

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω ✎

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Εύρεση παράλληλων διανυσμάτων | <input type="checkbox"/> Εύρεση ίσων και αντίθετων διανυσμάτων |
| <input type="checkbox"/> Εύρεση ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων | <input type="checkbox"/> Υπολογισμός γωνίας διανυσμάτων |

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📖

- | | |
|---|--|
| 1. Διάνυσμα \vec{a} ή \overrightarrow{AB} | 5. Ομόρροπα διανύσματα : $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$ |
| 2. Μέτρο διανύσματος $ \vec{a} , \overrightarrow{AB} $ | 6. Αντίρροπα διανύσματα : $\vec{a} \downarrow \vec{\beta}$ |
| 3. Μηδενικό διάνυσμα : $\vec{a} = \vec{0}$ | 7. Γωνία διανυσμάτων : |
| 4. Μοναδιαίο διάνυσμα : $ \vec{a} = 1$ | $\theta = (\vec{a}, \vec{\beta}), \theta \in [0, \pi]$ |

2 Πρόσθεση διανυσμάτων

📅 Ημερομηνία:

Πίνακας Ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖

1. Πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων
2. Κανόνας παραλληλογράμμου
3. Αφαίρεση διανυσμάτων
4. Διάνυσμα θέσης
5. Σημείο αναφοράς

Θεωρήματα - Ιδιότητες ✂

1. Ιδιότητες πρόσθεσης
2. Διαφορά διανυσματικών ακτίνων
3. Μέτρο αθροίσματος - Τριγωνική ανισότητα
4. Κριτήριο ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 📝

- ⚠ ☐ Πρόσθεση και αφαίρεση διαδοχικών διανυσμάτων
- ⚠ ☐ Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων με κανόνα παραλληλογράμμου
- ⚠ ☐ Απόδειξη διανυσματικής ισότητας
- ☐ Απόδειξη ότι δύο σημεία ταυτίζονται
- ☐ Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

- ⚠ ☐ Απόδειξη ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο
- ☐ Προσδιορισμός σημείου
- ☐ Τριγωνική ανισότητα
- ☐ Κριτήριο ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων
- ☐ Γεωμετρικοί τόποι

Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📖

1. Πρόσθεση διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$
2. Αφαίρεση διανυσμάτων : $\vec{a} - \vec{\beta}$
3. Διάνυσμα θέσης σημείου M : \overrightarrow{OM} όπου

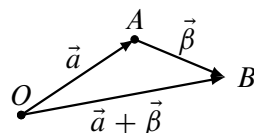
O σημείο αναφοράς.

4. Τριγωνική ανισότητα:
 $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

Πίνακες - Σχήματα

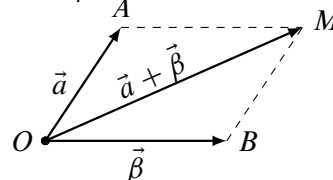
Κανόνας διαδοχικών διανυσμάτων

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

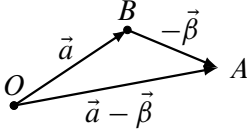


Κανόνας παραλληλογράμμου

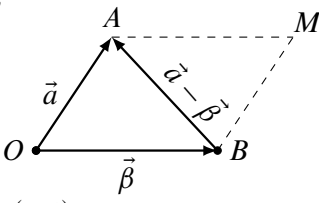
$$\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$$



Κανόνας διαδοχικών διανυσμάτων



Κανόνας παραλληλογράμμου



$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$

Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων	
Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$
Ουδέτερο στοιχείο	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
Αντίθετα διανύσματα	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

3 Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

📅 Ημερομηνία:

Πίνακας Ύλης	
Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖	Θεωρήματα - Ιδιότητες ✂
1. Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα 2. Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων	1. Ιδιότητες γινομένου 2. Συνθήκη παραλληλίας 3. Διανυσματική ακτίνα μέσου
Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω ✎	
⚠ <input type="checkbox"/> Απόδειξη - Έλεγχος παραλληλίας διανυσμάτων	<input type="checkbox"/> Απόδειξη διανυσματικής ισότητας <input type="checkbox"/>
Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📄	
1. Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα: $\lambda \cdot \vec{a}$ 2. Συνθήκη παραλληλίας: $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ 3. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda > 0$	4. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda < 0$ 5. Διανυσματική ακτίνα μέσου: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ 6. Γραμμικός συνδυασμός: $\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta}$
Πίνακες - Διαγράμματα	
Ιδιότητες γινομένου αριθμού με διάνυσμα	
Ιδιότητα	Συνθήκη
Επιμεριστική (ως προς αριθμό)	$\lambda (\vec{a} \pm \vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{a} \pm \lambda \cdot \vec{\beta}$
Επιμεριστική (ως προς διάνυσμα)	$(\lambda \pm \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} \pm \mu \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
Πρόσημο γινομένου	$(-\lambda \cdot \vec{a}) = (-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a})$
Νόμος διαγραφής (ως προς διάνυσμα)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$
Νόμος διαγραφής (ως προς αριθμό)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

4 Συντεταγμένες διανύσματος

📅 Ημερομηνία:

Πίνακας Ύλης

Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖

1. Συντεταγμένες διανύσματος
2. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος
3. Ορίζουσα διανυσμάτων

Θεωρήματα - Ιδιότητες ✂

1. Ίσα διανύσματα
2. Οριζόντια - Κατακόρυφα διανύσματα
3. Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού
4. Συντεταγμένες μέσου τμήματος
5. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα
6. Συνθήκες παραλληλίας διανυσμάτων
7. Μέτρο διανύσματος
8. Απόσταση σημείων

Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🖋



Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📖

1. Συντεταγμένες διανύσματος: $\vec{a} = (x, y)$
2. $\lambda = \frac{y}{x}$
3. $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$
4. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$
5. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

6. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$
7. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{b}}$
8. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
9. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
10. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Πίνακες - Διαγράμματα

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού

Πράξη

Συντεταγμένες

Άθροισμα

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Πολλαπλασιασμός

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

5 Εσωτερικό γινόμενο

📅 Ημερομηνία:

Πίνακας Ύλης																	
<div>Ορισμοί - Βασικές έννοιες 📖</div> <div><div>1. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων</div><div>2. Εσωτερικό γινόμενο - Αναλυτικός τύπος</div></div>	<div>Θεωρήματα - Ιδιότητες ✂</div> <div><div>1. Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου</div><div>2. Συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων</div><div>3. Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων</div></div>																
<div>Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🖋</div> <div><div>⚠</div><div></div></div>																	
<div>Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 📋</div>																	
<div>1. Εσωτερικό γινόμενο:</div> <div>$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \vec{\beta} \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})})$</div>	<div>2. Αναλυτικός τύπος γινομένου:</div> <div>$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$</div>																
<div>Πίνακες - Διαγράμματα</div>																	
<div>Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου</div> <table><tr><th>Ιδιότητα</th><th>Συνθήκη</th></tr><tr><td>Κάθετα διανύσματα</td><td>$\text{Av } \vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ και } \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$</td></tr><tr><td>Ομόρροπα διανύσματα</td><td>$\text{Av } \vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$</td></tr><tr><td>Αντίρροπα διανύσματα</td><td>$\text{Av } \vec{a} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta}$</td></tr><tr><td>Τετράγωνο διανύσματος</td><td>$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$</td></tr><tr><td>Αντιμεταθετική</td><td>$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$</td></tr><tr><td>Προσεταιριστική</td><td>$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu \vec{\beta}) \cdot \vec{a}$</td></tr><tr><td>Επιμεριστική</td><td>$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$</td></tr></table>		Ιδιότητα	Συνθήκη	Κάθετα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ και } \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$	Ομόρροπα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta} $	Αντίρροπα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta} $	Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$	Αντιμεταθετική	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$	Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu \vec{\beta}) \cdot \vec{a}$	Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$
Ιδιότητα	Συνθήκη																
Κάθετα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ και } \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$																
Ομόρροπα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta} $																
Αντίρροπα διανύσματα	$\text{Av } \vec{a} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta} $																
Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$																
Αντιμεταθετική	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$																
Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu \vec{\beta}) \cdot \vec{a}$																
Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$																