# 1 Η έννοια του διανύσματος

Ε΄ Ημερομηνία: .....

Πίνακας Ύλης		
Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏		
<ul> <li>1.1 Διάνυσμα</li> <li>1.2 Αρχή και πέρας</li> <li>1.3 Στοιχεία διανύσματος: Μέτρο - διεύθυνση - φορά</li> <li>1.4 Φορέας διανύσματος</li> <li>1.5 Μηδενικό - Μοναδιαίο διάνυσμα</li> </ul>	<ul> <li>1.6 Παράλληλα διανύσματα</li> <li>1.7 Ομόρροπα διανύσματα</li> <li>1.8 Αντίρροπα διανύσματα</li> <li>1.9 Ίσα διανύσματα</li> <li>1.10 Αντίθετα διανύσματα</li> </ul>	
Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🧨		
<ul><li>☑ Εύρεση παράλληλων διανυσμάτων</li><li>□ Εύρεση ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων</li></ul>	<ul><li>Εύρεση ίσων και αντίθετων διανυσμάτων</li><li>Υπολογισμός γωνίας διανυσμάτων</li></ul>	
Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 🖺		
1. Διάνυσμα $\vec{a}$ ή $\overrightarrow{AB}$ 2. Μέτρο διανύσματος $ \vec{a} ,  \overrightarrow{AB} $ 3. Μηδενικό διάνυσμα : $\vec{a} = \vec{0}$ 4. Μοναδιαίο διάνυσμα : $ \vec{a}  = 1$	5. Ομόρροπα διανύσματα : $\overrightarrow{a} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\beta}$ 6. Αντίρροπα διανύσματα : $\overrightarrow{a} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\beta}$ 7. Γωνία διανυσμάτων : $\theta = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}), \ \theta \in [0, \pi]$	

# Πρόσθεση διανυσμάτων

🗰 Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

#### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 2.1 Πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων
- 2.2 Κανόνας παραλληλογράμμου
- 2.3 Αφαίρεση διανυσμάτων
- 2.4 Διάνυσμα θέσης
- 2.5 Σημείο αναφοράς

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 2.1 Ιδιότητες πρόσθεσης
- 2.2 Διαφορά διανυσματικών ακτίνων
- 2.3 Μέτρο αθροίσματος Τριγωνική ανισό-
- 2.4 Κριτήριο ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- ☑ Πρόσθεση και αφαίρεση διαδοχικών δια-
- ☑ Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων με κανόνα παραλληλογράμμου
- **Δ** Απόδειξη διανυσματικής ισότητας
  - Απόδειξη ότι δύο σημεία ταυτίζονται
  - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

- 🗹 🗌 Απόδειξη ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο
  - □ Προσδιορισμός σημείου
- **Γ** Τριγωνική ανισότητα
  - □ Κριτήριο ομόρροπων και αντίρροπων διανυσμάτων
  - □ Γεωμετρικοί τόποι

# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Πρόσθεση διανυσμάτων  $\vec{a} + \vec{\beta}$
- 2. Αφαίρεση διανυσμάτων :  $\vec{a} \vec{\beta}$
- 3. Διάνυσμα θέσης σημείου  $M: \overrightarrow{OM}$  όπου

Ο σημείο αναφοράς.

4. Τριγωνική ανισότητα:

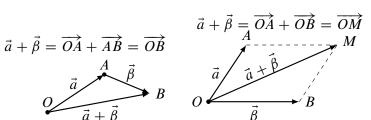
$$\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{a} + \vec{\beta}$$

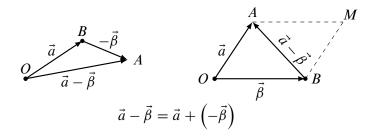
$$\vec{a} + \vec{\beta}$$

$$\vec{a} + \vec{\beta}$$

Σχήμα 2.1: Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων



Σχήμα 2.2: Κανόνας παραλληλογράμμου



Σχήμα 2.3: Διαφορά διαδοχικών διανυσμάτων - Κανόνας παραλληλογράμμου

Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\vec{a} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \left(\vec{a} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma}$
Ουδέτερο στοιχείο	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
Αντίθετα διανύσματα	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Πίνακας 2.1: Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

# 3 Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

**ដែ** Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

#### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 3.1 Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα
- 3.2 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 3.1 Ιδιότητες γινομένου
- 3.2 Συνθήκη παραλληλίας
- 3.3 Διανυσματική ακτίνα μέσου

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- ☑ Απόδειξη Έλεγχος παραλληλίας διανυσμάτων
- 🗹 🗆 Απόδειξη διανυσματικής ισότητας
  - υνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων
  - 🔲 Συνευθειακά σημεία

- 🗹 🗆 Διανυσματική ακτίνα μέσου
  - Προσδιορισμός αριθμού
- Γραμμικός συνδυασμός
  - □ Γεωμετρικοί τόποι
  - □ Γεωμετρικές εφαρμογές

### Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα:  $\lambda \vec{a}$
- 2. Συνθήκη παραλληλίας:  $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$
- 3.  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ kai } \lambda > 0$

- 4.  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ kai } \lambda < 0$
- 5. Διανυσματική ακτίνα μέσου:  $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$
- 6. Γραμμικός συνδυασμός:  $\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta}$

Ιδιότητα	Συνθήκη	
Επιμεριστική (ως προς αριθμό)	$\lambda \left( \vec{a} \pm \vec{\beta} \right) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{\beta}$	
Επιμεριστική (ως προς διάνυσμα)	$(\lambda \pm \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a}$	
Προσεταιριστική	$\lambda \left(\mu \vec{a}\right) = (\lambda \mu)  \vec{a}$	
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \dot{\eta} \ \vec{a} = \vec{0}$	
Πρόσημο γινομένου	$(-\lambda \vec{a}) = (-\lambda)\vec{a} = -(\lambda \vec{a})$	
Νόμος διαγραφής (ως προς διάνυσμα)	Αν λ $\vec{a}=\mu\vec{a}$ και $\vec{a}\neq 0$ τότε $\lambda=\mu$	
Νόμος διαγραφής (ως προς αριθμό)	Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$	

Πίνακας 3.2: Ιδιότητες γινομένου αριθμού με διάνυσμα

# 4 Συντεταγμένες διανύσματος

Ε΄ Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

#### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 4.1 Συντεταγμένες διανύσματος
- 4.2 Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος
- 4.3 Ορίζουσα διανυσμάτων

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 4.1 Ίσα διανύσματα
- 4.2 Οριζόντια Κατακόρυφα διανύσματα
- 4.3 Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού
- 4.4 Συντεταγμένες μέσου τμήματος
- 4.5 Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα
- 4.6 Συνθήκες παραλληλίας διανυσμάτων
- 4.7 Μέτρο διανύσματος
- 4.8 Απόσταση σημείων

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🧨



Οριζόντια - Κατακόρυφα διανύσματα

🗹 🗆 Συντεταγμένες αθροίσματος - Γινομένου

- Γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

🗹 🗆 Συντεταγμένες μέσου τμήματος

Υπολογισμός διανύσματος με γνωστά άκρα

# 🗷 🗌 Παράλληλα διανύσματα

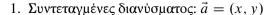
Υπολογισμός συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος

🗹 🗆 Υπολογισμός μέτρου διανύσματος

🗹 🗌 Υπολογισμός απόστασης σημείων

□ Γεωμετρικές εφαρμογές

# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί



2. Συντελεστής διεύθυνσης:  $\lambda = \frac{y}{r}$ 

3. Ίσα διανύσματα:  $\vec{a} = \vec{\beta} \Rightarrow x_1 = x_2 \ \ \text{και} \ \ y_1 = y_2$ 

4. Ορίζουσα διανυσμάτων:  $\det(\vec{a},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$ 

5. Συντεταγμένες μέσου:  $x_{M} = \frac{x_{A} + x_{B}}{2} \text{ και } y_{M} = \frac{y_{A} + y_{B}}{2}$ 

6. Διάνυσμα με γνωστά άκρα:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

7. Παράλληλα διανύσματα:

i. 
$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$$

ii. 
$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$$

- 8. Μέτρο διανύσματος:  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 9. Απόσταση μεταξύ σημείων:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Πράξη	Συντεταγμένες
Άθροισμα	$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Πολλαπλασιασμός	$\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
Γραμμικός συνδυασμός	$\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

Πίνακας 4.1: Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και συντεταγμένες

# 5 Εσωτερικό γινόμενο

Ε΄ Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

#### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 5.1 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
- 5.2 Εσωτερικό γινόμενο Αναλυτικός τύπος

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 5.1 Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου
- 5.2 Συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων
- 5.3 Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- 🗹 🗌 Υπολογισμός εσωτερικού γινομένου
- 🗹 🗆 Έλεγχος καθετότητας διανυσμάτων
  - Μέτρο γραμμικού συνδυασμού

- □ Γραμμικός συνδυασμός ίσος με μηδέν
- Υπολογισμός γωνίας συνημιτόνου γωνίας διανυσμάτων
  - □ Γεωμετρικοί τόποι

### Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

1. Εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \text{ouv}(\vec{a}, \vec{\beta})$$

2. Αναλυτικός τύπος γινομένου:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

3. Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων:

$$\operatorname{sun}\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}||\vec{\beta}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

4. Κάθετα διανύσματα:

Aν 
$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$$
 και  $\lambda_{\vec{a}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ 

Ιδιότητα	Συνθήκη	
Ομόρροπα διανύσματα	Av $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} =  \vec{a}  \cdot  \vec{\beta} $	
Αντίρροπα διανύσματα	Av $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a}  \cdot  \vec{\beta} $	
Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 =  \vec{a} ^2$	
Αντιμεταθετική	$\vec{a}\cdot\vec{eta}=\vec{eta}\cdot\vec{a}$	
Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a}\cdot\vec{\beta}) = (\mu\vec{\beta})\cdot\vec{a}$	
Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot \left( \vec{\beta} + \vec{\gamma} \right) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$	

Πίνακας 5.2: Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

# 6 Εξίσωση ευθείας

**ដែ** Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

#### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 6.1 Εξίσωση γραμμής
- 6.2 Γωνία ευθείας
- 6.3 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 6.1 Εξίσωση ευθείας Είδη ευθειών
- 6.2 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία.
- 6.3 Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- Γωνία Συντελεστής διεύθυνσης
  - Συντελεστής διεύθυνσης με δύο γνωστά σημεία της ευθείας
- 🗷 🗆 Εξίσωση ευθείας
  - με σημείο και συντελεστή
  - 🔲 με γνωστά δύο σημεία της
- $m{\Sigma}$  Συνθήκες για παράλληλες και κάθετες ευθείες

- Κοινά σημεία ευθειών Σημεία τομής με άξονες
- 🖸 🗆 Σημείο που ανήκει σε ευθεία
  - Ευθεία με γνωστό συντελεστή και ιδιότητα
  - 🔲 Ευθεία με γνωστό σημείο και ιδιότητα
- 🗹 🗆 Στοιχεία τριγώνου
- Λ □ Γεωμετρικοί τόποι
- 🗹 🗆 Γεωμετρικές εφαρμογές

# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Γωνία ευθείας  $0^{\circ} \le \omega < 180^{\circ}$
- 2. Οριζόντια ευθεία  $\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \omega = 0^{\circ}$
- 3. Κατακόρυφη ευθεία:  $\varepsilon \parallel y'y \Leftrightarrow \omega = 90^{\circ}$
- 4. Πλάγια ευθεία  $0^{\circ} < \omega < 180^{\circ}$
- 5. Συντελεστής διεύθυνσης:  $\lambda = \epsilon \phi \omega$
- 6. Συντελεστής ευθείας με δύο σημεία:  $\lambda_{AB} = \frac{y_2 y_1}{x_2 x_1}$

- 7. Εξίσωση ευθείας:  $y y_0 = \lambda(x x_0)$
- 8. Εξίσωση οριζόντιας ευθείας:  $y = y_0$
- 9. Εξίσωση κατακόρυφης ευθείας:  $x = x_0$
- 10. Ευθεία που διέρχεται από το O(0,0) :  $y = \lambda x$
- 11. Παράλληλες ευθείες:  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- 12. Κάθετες ευθείς:  $\varepsilon_1\bot\varepsilon_2\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$

# 7 Γενική μορφή εξίσωση ευθείας

Ε΄ Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 7.1 Γενική εξίσωση ευθείας
- 7.2 Παράλληλο και κάθετο διάνυσμα με ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  ,  $A \neq 0, B \neq 0$

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🧨

- **Ε΄** Ελεγχος αν μια εξίσωση παριστάνει ευ-
  - Ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο
  - Σχετική θέση ευθειών

- **Δ** Παράλληλες και κάθετες ευθείες με τη χρήση του παράλληλου ή κάθετου διανύσματος.
- 🗹 🗆 Γωνία δύο ευθειών

#### Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Γενική εξίσωση ευθείας:  $Ax + By + \Gamma = 0 \; , \; A \neq 0 \; \dot{\mathbf{n}} \; B \neq 0$
- 2. Συντελεστής διεύθυνσης:  $\lambda = -\frac{A}{B}$
- 3. Διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία:  $\vec{\delta}=(B,-A)$  ή  $\vec{\delta}=(-B,A)$
- 4. Διάνυσμα κάθετο στην ευθεία:

$$\vec{n} = (A, B) \, \dot{\eta} \, \vec{n} = (-A, -B)$$

5. Συνημίτονο γωνίας δύο ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ :  $\sigma \text{υν}(\widehat{\vec{\delta_1}}, \widehat{\vec{\delta_2}}) = \frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| |\vec{\delta_2}|} \text{ όπου } \vec{\delta_1} \parallel \varepsilon_1 \text{ και } \vec{\delta_2} \parallel \varepsilon_2$ 

# Απόσταση σημείου από ευθεία - Εμβαδόν τριγώνου

🗰 Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 8.1 Απόσταση σημείου από ευθεία
- 8.2 Απόσταση μεταξύ παράλληλων ευθειών
- 8.3 Εμβαδόν τριγώνου

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- 🗹 🗆 Απόσταση σημείου από ευθεία
- 🗹 🗆 Απόσταση μεταξύ παράλληλων ευθειών
- 🗹 🗆 Εμβαδόν τριγώνου
  - □ Μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών
- Διχοτόμος γωνίας
- ▲ □ Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας
  - □ Γεωμετρικός τόπος
  - Ελάχιστη απόσταση σημείου ευθείας από σταθερό σημείο

### Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Απόσταση σημείου  $M(x_0, y_0)$  από ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$ :  $d(M, ε) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- 2. Απόσταση μεταξύ παράλληλων ευθειών
- $$\begin{split} \varepsilon_1 : y &= \lambda x + \beta_1 \text{ kai } \varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2 \\ d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{|\beta_1 \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \end{split}$$
- 3. Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ:  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right| = 0$

# 9 Κύκλος

Ε΄ Ημερομηνία: .....

# Πίνακας Ύλης

### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 9.1 Εξίσωση κύκλου
- 9.2 Μοναδιαίος κύκλος
- 9.3 Εφαπτομένη κύκλου

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 9.1 Εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων
- 9.2 Εξίσωση κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$
- 9.3 Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
- 9.4 Εξίσωση εφαπτομένης

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

- $\square$  Εξίσωση κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$ 
  - Σχετική θέση σημείου και κύκλου

$$\square$$
 Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ 

- Περιγεγραμμένος κύκλος
- Σχετική θέση ευθείας και κύκλου
- □ Γεωμετρικές εφαρμογές
- □ Κύκλος που εφάπτεται με τους άξονες.
- Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο O(0,0)

- $lackbox{$lackbox{$\lower L$}$}$  Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο  $K(x_0,y_0)$  και
  - $\Box$  σημείο επαφής  $A(x_1, y_1)$
  - γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ
  - $\square$  γνωστό εξωτερικό σημείο  $M(x_0, y_0)$
  - Σχετική θέση κύκλων Κοινές εφαπτομένες κύκλων
- ▲ □ Γεωμετρικοί τόποι
- ▲ □ Ελάχιστη και μέγιστη απόσταση

# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 🖺

- 1. Εξίσωση κύκλου με κέντρο O(0,0):  $x^2 + y^2 = \rho^2$
- 2. Εξίσωση κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$ :  $(x x_0)^2 + (y y_0)^2 = \rho^2$
- 3. Γενική εξίσωση κύκλου:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

- α. αν  $A^2+B^2-4\Gamma>0$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$  και ακτίνα  $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$
- β. αν  $A^2 + B^2 4\Gamma = 0$  η εξίσωση παριστάνει σημείο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

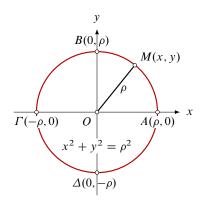
- γ. αν  $A^2+B^2-4\Gamma>0$  η εξίσωση δεν αντιστοιχεί σε σημείο
- 4. Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο O(0,0):

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

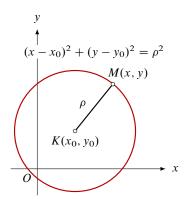
5. Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$ :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$$

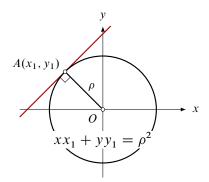
όπου M(x,y) σημείο της ευθείας και  $A(x_1,y_1)$  το σημείο επαφής



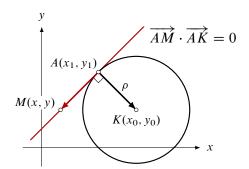
**Σχήμα 9.1:** Κύκλος με κέντρο O(0,0)



**Σχήμα 9.2:** Κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$ 



Σχήμα 9.3: Εφαπτομένη κύκου με κέντρο O(0,0)

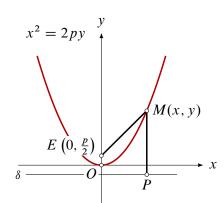


Σχήμα 9.4: Εφαπτομένη κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$ 

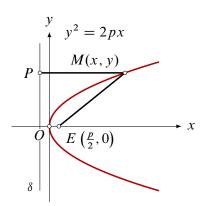
# 10 Παραβολή

<b>ii</b> Ημερομηνία:	
-----------------------	--

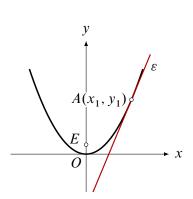
Πίνακας Ύλης		
Ορισμοί - Βασικές έννοιες Ε  10.1 Ορισμός παραβολής  10.2 Εστία παραβολής  10.3 Άξονας παραβολής  10.4 Διευθετούσα παραβολής	Οεωρήματα - Ιδιότητες **  10.1 Εξίσωση παραβολής με άξονα x'x' και y'y'  10.2 Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής  10.3 Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής  10.4 Γεωμετρικοί τόποι  10.5 Γεωμετρικές εφαρμογές	
Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🧨		
<ul> <li>Εύρεση στοιχείων παραβολής (Εξίσωση, εστία, διευθετούσα, παράμετρος p)</li> <li>Εξίσωση εφαπτομένης</li> <li>Προσδιορισμός σημείων</li> </ul>	<ul> <li>□ Κοινές εφαπτ. κύκλου και παραβολής</li> <li>□ Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής</li> <li>□ Σχετική θέση παραβολής και ευθείας</li> <li>▲ □ Γεωμετρικές εφαρμογές</li> </ul>	
Τυπολόγιο - Συμβολισμοί 🖹		
<ol> <li>Παραβολή με εστία στον άξονα x'x</li> <li>α. Εξίσωση: y² = 2px</li> <li>β. Εστία: E (<sup>p</sup>/<sub>2</sub>, 0)</li> <li>γ. Διευθετούσα: x = -<sup>p</sup>/<sub>2</sub></li> <li>Παραβολή με εστία στον άξονα y'y</li> <li>α. Εξίσωση: x² = 2py</li> </ol>	β. Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ γ. Διευθετούσα: $y = -\frac{p}{2}$ 3. Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής στο σημείο $A(x_1, y_1)$ α. και άξονα $x'x$ : $yy_1 = p(x + x_1)$ β. και άξονα $y'y$ : $xx_1 = p(y + y_1)$	



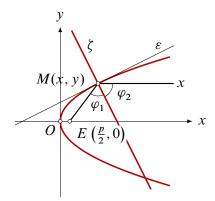
**Σχήμα 10.1:** Παραβολή με εστία στον άξονα y'y



Σχήμα 10.2: Παραβολή με εστία στον άξονα x'x



Σχήμα 10.3: Εφαπτομένη παραβολής στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ 



Σχήμα 10.4: Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής

# Έλλειψη

苗 Ημερομηνία:	
---------------	--

# Πίνακας Ύλης

### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 11.1 Ορισμός έλλειψης
- 11.2 Εστίες έλλειψης
- 11.3 Άξονες έλλειψης
- 11.4 Κορυφές έλλειψης
- 11.5 Εκκεντρότητα
- 11.6 Εστιακή απόσταση

# Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 11.1 Εξίσωση έλλειψης με μεγάλο άξονα x'x'και y'y'
- 11.2 Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης

#### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

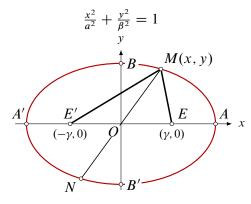
Εύρεση	στοιχείων	έλλειψης	(εξίσωση
παράμετ	ροι, εστίες,	άξονες, κα	ρυφές)

- Υπολογισμός εκκεντρότητας συμπεράσματα
- Εφαπτομένες έλλειψης
- Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης
- □ Γεωμετρικοί τόποι
- □ Γεωμετρικές εφαρμογές

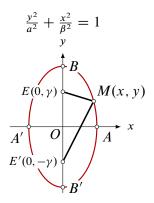
# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

- 1. Παράμετροι  $a, \beta, \gamma \ (a > \gamma)$ :
  - i. Μήκος μεγάλου άξονα: AA' = 2a.
  - ii. Μήκος μικρού άξονα:  $BB' = 2\beta$ .
  - iii. Εστιακή απόσταση:  $EE' = 2\gamma$ .
  - iv.  $\beta = \sqrt{a^2 \gamma^2}$
- 2. Έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x
  - α. Εξίσωση:  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$
  - β. Εστίες:  $E(\gamma, 0)$  και  $E'(-\gamma, 0)$

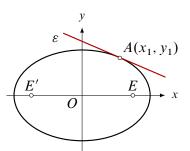
- 3. Έλλειψη με εστίες στον άξονα y'y
  - α. Εξίσωση:  $\frac{y^2}{a} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ β. Εστίες:  $E(0, \gamma)$  και  $E'(0, -\gamma)$
- 4. Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ 
  - α. και εστίες στον άξονα x'x:  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
  - β. και εστίες στον άξονα  $y'y: \frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$
- 5. Εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$



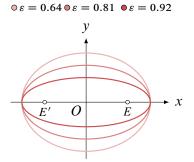
**Σχήμα 11.1:** Έλλειψη με εστέις στον άξονα x'x



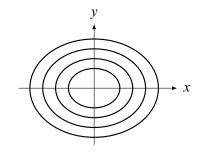
Σχήμα 11.2: Έλλειψη με εστίες στον άξονα y'y



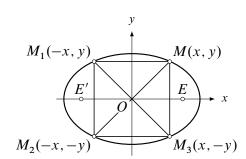
Σχήμα 11.3: Εφαπτομένη έλλειψης στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ 



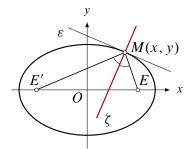
Σχήμα 11.4: Εκκεντρότητα



Σχήμα 11.5: Όμοιες ελλείψεις



Σχήμα 11.6: Συμμετρικά σημεία πάνω σε έλλειψη



Σχήμα 11.7: Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης

# 12 Υπερβολή

# Πίνακας Ύλης

### Ορισμοί - Βασικές έννοιες 🗏

- 12.1 Ορισμός υπερβολής
- 12.2 Εστίες υπερβολής
- 12.3 Άξονες υπερβολής
- 12.4 Κορυφές υπερβολής
- 12.5 Εκκεντρότητα
- 12.6 Εστιακή απόσταση

### Θεωρήματα - Ιδιότητες 💥

- 12.1 Εξίσωση υπερβολής με μεγάλο άξονα x'x' και y'y'
- 12.2 Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής

### Είδη ασκήσεων - Τι πρέπει να γνωρίζω 🥕

Εύρεση στοιχείων υπερβολής (Εξίσωση, παράμετροι, εστίες, κορυφές, άξονας)
Ασύμπτωτες υπερβολής
Υπολογισμός εκκεντρότητας - συμπερά-

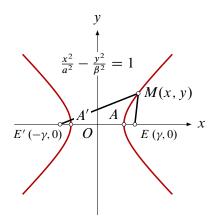
- □ Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής
- Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής
- □ Γεωμετρικοί τόποι
- □ Γεωμετρικές εφαρμογές

# Τυπολόγιο - Συμβολισμοί

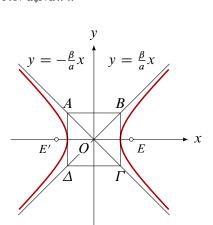
σματα

- 1. Παράμετροι  $a, \beta, \gamma \ (a < \gamma)$ :
  - α. Μήκος άξονα: AA' = 2a.
  - β. Εστιακή απόσταση:  $EE' = 2\gamma$ .
  - $\gamma$ .  $\beta = \sqrt{\gamma^2 a^2}$
- 2. Εστίες στον άξονα x'x
  - α. Εξίσωση:  $\frac{x^2}{a^2} \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .
  - β. Εστίες:  $E(\gamma,0)$ ,  $E'(-\gamma,0)$ .
  - γ. Ασύμπτωτες ευθείες:  $y = \frac{\beta}{a}x, \ y = -\frac{\beta}{a}x.$
- 3. Εστίες στον άξονα γ' γ

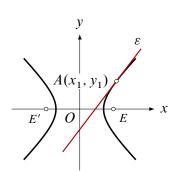
- a. Exiswsh:  $\frac{y^2}{a^2} \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ .
- β. Εστίες:  $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$ .
- γ. Ασύμπτωτες ευθείες:  $y = \frac{a}{\beta}x$ ,  $y = -\frac{a}{\beta}x$ .
- 4. Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής στο  $A(x_1, y_1)$ 
  - α. και εστίες στον άξονα x'x:  $\frac{xx_1}{a^2} \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
  - β. και εστίες στον άξονα y'y:  $\frac{yy_1}{a^2} \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$
- 5. Εκκεντρότητα:  $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$ .



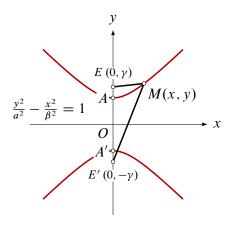
Σχήμα 12.1: Υπερβολή με εστίες στον άξονα x'x



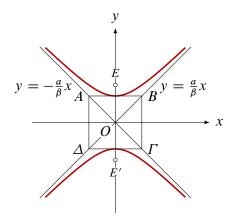
Σχήμα 12.3: Ασύμπτωτες υπερβολής με εστίες στον άξονα x'x - Ορθογώνιο βάσης



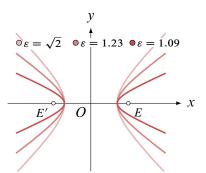
Σχήμα 12.5: Εφαπτομένη υπερβολής στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ 



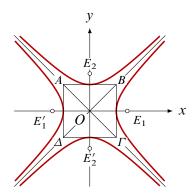
Σχήμα 12.2: Υπερβολή με εστίες στον άξονα y'y



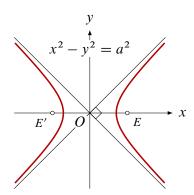
Σχήμα 12.4: Ασύμπτωτες υπερβολής με εστίες στον άξονα y'y - Ορθογώνιο βάσης



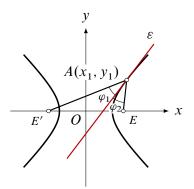
Σχήμα 12.6: Εκκεντρότητα



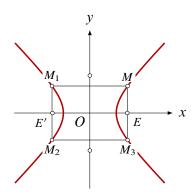
Σχήμα 12.7: Συζυγείς υπερβολές



Σχήμα 12.8: Ισοσκελής υπερβολή



Σχήμα 12.9: Ανακλαστική ιδιότητα



**Σχήμα 12.10:** Συμετρικά σημεία πάνω σε υπερβολή