Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

ΤΑ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΛΥΚΕΙΟΥ

Η ”ΑΔΙΚΗΜΕΝΗ” ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

- 100 Ορισμοί
- 250 Θεωρήματα
- 400 Μέθοδοι για λύση ασκήσεων
- 200 Λυμένα παραδείγματα
- 500 Άλυτες ασκήσεις και προβλήματα
- 200 Επαναληπτικά θέματα
- Απαντήσεις ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

Αλγεβρα
Β΄ Λύκειου

Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ΙΣΒΝ : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :**Σπύρος Φρόνιμος**

Εξώφυλλο :
Δημήτρης Πρεντουλής

Στη γυναίκα μου.

Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Άλγεβρα

1.1 Τριγωνομετρικές ανισώσεις

Ανάλογα με τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις που συναντήσαμε στην άλγεβρα της Α΄ και Β΄ Λυκείου, μπορούν να οριστούν και οι τριγωνομετρικές ανισώσεις των οποίων οι βασικές μορφές με τις οποίες θα ασχοληθούμε αρχικά είναι

$$\eta\mu x > a \ (\acute{\eta}\ < a)\ ,\ \sigma\upsilon\nu x > a \ (\acute{\eta}\ < a)\ ,\ \varepsilon\varphi x > a \ (\acute{\eta}\ < a)\ ,\ \sigma\varphi x > a \ (\acute{\eta}\ < a)$$

Η λύση μιας τριγωνομετρικής ανίσωσης ανάγεται στην εύρεση του κατάλληλου συνόλου γωνιών που την ικανοποιούν. Την επίλυση βοηθάει αρκετά η χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου πάνω στον οποίο οι λύσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια, θα παρασταθούν γραφικά ως ένα ή περισσότερα τόξα. Για να απλουστεύσουμε τη διαδικασία εργαζόμαστε αρχικά στο διάστημα ενός κύκλου. Ας δούμε όμως αρχικά τι ονομάζεται τριγωνομετρική ανίσωση.

Ορισμός 1.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΩΣΗ
Τριγωνομετρική ονομάζεται κάθε ανίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα τριγωνομετρικό αριθμό. Οι βασικές μορφές τριγωνομετρικών ανισώσεων είναι :

$$\eta\mu x > a\ ,\ \sigma\upsilon\nu x > a\ ,\ \varepsilon\varphi x > a\ ,\ \sigma\varphi x > a\ ,\ a \in \mathbb{R}$$

- Λύση μιας τριγωνομετρικής ανίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει.
- Το σύνολο των λύσεων σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου της αντίστοιχης συνάρτησης ονομάζεται **ειδική λύση** της ανίσωσης.
- Το σύνολο όλων των λύσεων της ονομάζεται **γενική λύση**.

Ομοίως ορίζονται οι ανισώσεις με τους συμβολισμούς $<, \geq, \leq$ μεταξύ του τριγωνομετρικού αριθμού και του πραγματικού αριθμού a.

Απλά παραδείγματα τέτοιων ανισώσεων όπως ημ$x > \frac{1}{2}$, συν$x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ$x < 1$, σφ$x \geq 0$ είναι αυτά που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τη διαδικασία επίλυσης για κάθε περίπτωση.

1. Η ανίσωση ημ$x > a$
Ας ξεκινήσουμε με τη μελέτη της ανίσωσης ημ$x > a$. Όπως και στην επίλυση των εξισώσεων έτσι κι εδώ αναζητούμε την ύπαρξη κατάλληλης γωνίας της οποίας το ημίτονο να ισούται με τον αριθμό a. Για τον πραγματικό αριθμό a εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

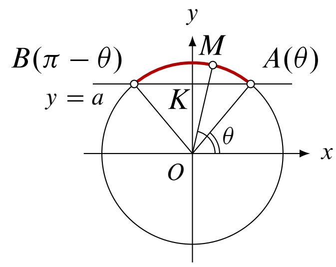
- Αν $a \geq 1$ τότε η ανίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $a < -1$ τότε η ανίσωση είναι αόριστη.
- Αν $a = -1$ τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλες οι γωνίες εκτός από τις λύσεις της εξίσωσης ημ$x = -1$.
- Αν $a \in (-1, 1)$ τότε αναζητούμε κατάλληλη γωνία θ ώστε ημ$\theta = a$. Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις.

i. Αν $a \in [0, 1)$ τότε ας υποθέσουμε ότι $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι η ζητούμενη γωνία. Τότε η ανίσωση θα γραφτεί

$$\eta\mu x > \eta\mu\theta$$

Λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση ημ$x =$ ημθ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παίρνουμε τις γωνίες $x = \theta$ και $x = \pi - \theta$ δηλαδή τις παραπληρωματικές γωνίες. Έτσι οι λύσεις της ανίσωσης θα είναι οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των παραπληρωματικών αυτών γωνιών και θα δίνονται από τον τύπο

$$\theta < x < \pi - \theta \Leftrightarrow x \in (\theta, \pi - \theta)$$



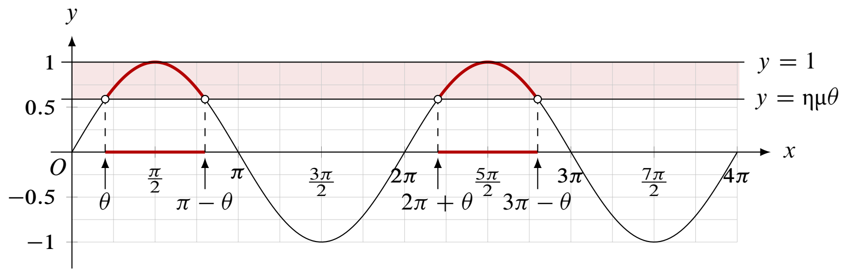
Αντιμετωπίζοντας την αρχική ανίσωση γεωμετρικά με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου σχεδιάζουμε την ευθεία $y = a$ που διέρχεται από το σημείο $K(0, a)$ του άξονα των ημιτόνων. Αυτή τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία A, B των γωνιών $\theta, \pi - \theta$ αντίστοιχα. Τα σημεία του κύκλου με τετμημένη μεγαλύτερη από a ορίζουν τόξο με άκρα τα σημεία A, B. Το τόξο αυτό βρίσκεται **πάνω από την ευθεία** $y = a$. Επομένως οι λύσεις θα είναι οι γωνίες που ορίζουν τα εσωτερικά σημεία M του τόξου AB.

$$x\hat{O}A < x < x\hat{O}B \Rightarrow \text{ημ}\left(x\hat{O}A\right) < \text{ημ}x < \text{ημ}\left(x\hat{O}B\right)$$

Γενικεύοντας τα συμπεράσματα αυτά για τα διαστήματα των υπόλοιπων κύκλων παίρνουμε τη γενική λύση της αρχικής ανίσωσης

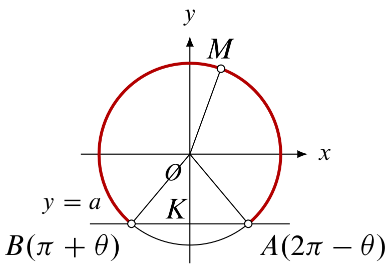
$$x \in (2\kappa\pi + \theta, 2\kappa\pi + (\pi - \theta)) \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Το γενικό σύνολο λύσεων προέκυψε προσθέτοντας πολλαπλάσια της περιόδου 2π της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$. Θα δούμε μια επιπλέον γραφική παράσταση των λύσεων κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ με πεδίο ορισμού ένα διάστημα πλάτους τουλάχιστον μιας περιόδου καθώς και τις οριζόντιες ευθείες $y = a$ και $y = 1$. Το μέρος της γραφικής παράστασης που βρίσκεται **μεταξύ των δύο ευθειών** περιέχει σημεία με τετμημένες που πληρούν τη συνθήκη $\text{ημ}x > \text{ημ}\theta$. Οι τετμημένες αυτές είναι οι λύσεις της ανίσωσης.



ii. Έστω τώρα ότι $a \in (-1, 0]$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η κατάλληλη γωνία ώστε $\text{ημ}\theta = -a$. Τότε η ανίσωση θα γίνει

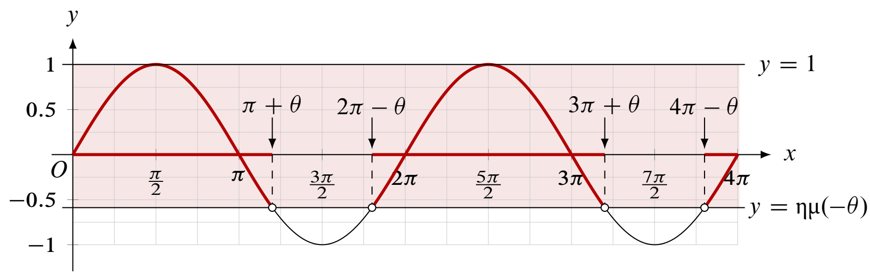
$$\text{ημ}x > \text{ημ}(-\theta)$$



Οι λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης θα είναι οι $\pi + \theta$ και $2\pi - \theta$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα ανήκουν στο σύνολο

$$[0, \pi + \theta) \cup (2\pi - \theta, 2\pi]$$

Αυτό μπορεί να φανεί και γραφικά με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου καθώς και με τη χάραξη της γραφικής παράστασης όπως φαίνεται στα σχήματα : Στον τριγωνομετρκό κύκλο οι γωνίες που ορίζονται από τα εσωτερικά σημεία του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ που βρίσκεται **πάνω από την ευθεία** $y = a$ επαληθεύουν τη συνθήκη $\text{ημ}x > \text{ημ}(-\theta)$ ενώ στο δεύτερο σχήμα, οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση βρίσκεται **μεταξύ των ευθειών** $y = 1$ και $y = a$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης.



Αν προσθέσουμε όπως και προηγουμένως το $2\kappa\pi$ στο παραπάνω σύνολο αποκτάμε τη γενική λύση της ανίσωσης η οποία θα είναι

$$x \in [2\kappa\pi, (2\kappa+1)\pi + \theta) \cup (2(\kappa+1)\pi - \theta, 2(\kappa+1)\pi] \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Οι λύσεις της ανίσωσης ημ$x \geq a$ με $a \in (-1, 1)$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης ημ$x > a$ μαζί με τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης ημ$x = a$.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα το οποίο περιέχει του κανόνες επίλησης των ανισώσεων της μορφής ημ$x > a$.

Θεώρημα 1.1 ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ ημ$x > a$

Οι λύσεις της τριγωνομετρικής ανίσωσης της μορφής ημ$x > a$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a :

i. Για κάθε $a \in (-1, 0]$ υπάρχει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε ημ$\theta = -a$. Τότε θα ισχύει

$$\text{ημ}x > a \Rightarrow x \in [2\kappa\pi, (2\kappa+1)\pi + \theta) \cup (2(\kappa+1)\pi - \theta, 2(\kappa+1)\pi]$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ακέραιος αριθμός.

ii. Για κάθε $a \in [0, 1)$ υπάρχει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε ημ$\theta = a$. Τότε θα ισχύει

$$\text{ημ}x > a \Rightarrow x \in (2\kappa\pi + \theta, 2\kappa\pi + (\pi - \theta))$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ακέραιος αριθμός.

iii. Για κάθε $a \geq 1$ η ανίσωση είναι αδύνατη.

iv. Για κάθε $a < -1$ η ανίσωση είναι αόριστη.

v. Αν $a = -1$ τότε ημ$x > -1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) =$ ημx γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διαστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

i. Έχουμε ημ$x > a$ με $-1 < a \leq 0$. Έστω $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ κατάλληλη γωνία ώστε ημ$\theta = -a > 0$. Τότε η ανίσωση θα πάρει τη μορφή

$$\text{ημ}x > -\text{ημ}\theta \Rightarrow \text{ημ}x > \text{ημ}(-\theta) \Rightarrow \text{ημ}x > \text{ημ}(2\pi - \theta)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση ημ$x = a$ μας δίνει στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τις λύσεις $x = \pi + \theta$ και $x = 2\pi - \theta$. Τότε με τη βοήθεια της μονοτονίας της συνάρτησης και του πρόσημού της αποδεικνύεται ότι :

- Για κάθε $x \in [0, \pi)$ έχουμε ημ$x > 0 > a$.
- Για κάθε $x \in [\pi, \pi + \theta)$ έχουμε : $x < \pi + \theta \xRightarrow{f \searrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]}$ ημ$x >$ ημ$(\pi + \theta) = a$.
- Για κάθε $x \in (2\pi - \theta, 2\pi]$ θα ισχύει : $x > 2\pi - \theta \xRightarrow{f \nearrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$ ημ$x >$ ημ$(2\pi - \theta) = a$

Έτσι οι τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες επαληθεύεται η σχέση ημ$x > a$ είναι οι ακόλουθες

$$x \in [0, \pi) \cup [\pi, \pi + \theta) \cup (2\pi - \theta, 2\pi] = [0, \pi + \theta) \cup (2\pi - \theta, 2\pi]$$

Το παραπάνω σύνολο αποτελεί την ειδική λύση της ανίσωσης. Προσθέτοντας τα πολλαπλάσια $2\kappa\pi$ της περιόδου 2π προκύπτει η γενική λύση

$$x \in [2\kappa\pi, (2\kappa+1)\pi + \theta) \cup (2(\kappa+1)\pi - \theta, 2(\kappa+1)\pi] \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Έστω $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ γωνία ώστε ημ$\theta = a > 0$ με $0 \leq a < 1$. Η αρχική ανίσωση θα γίνει :

$$\text{ημ}x > \text{ημ}\theta$$

Λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παίρνουμε τις λύσεις $x = \theta$ και $x = \pi - \theta$. Έτσι θα ισχύει :

- Για κάθε $x \in \left(\theta, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε $x > \theta \xRightarrow{f \nearrow [0,\frac{\pi}{2}]}$ ημ$x >$ ημ$\theta = a$.
- Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \theta\right)$ έχουμε $x < \pi - \theta \xRightarrow{f \searrow [\frac{\pi}{2},\pi]}$ ημ$x >$ ημ$(\pi - \theta) = a$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι τιμές του x για τις οποίες επαληθεύεται η ανίσωση και ορίζουν έτσι την ειδική λύση είναι οι

$$x \in \left(\theta, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \theta\right) = (\theta, \pi - \theta)$$

Η γενική λύση προκύπτει όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με πρόσθεση του $2\kappa\pi$ και θα είναι

$$x \in (2\kappa\pi + \theta, 2\kappa\pi + (\pi - \theta)) \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. Στην περίπτωση όπου $a \geq 1$ η αρχική ανίσωση γράφεται στη μορφή ημ$x > a \geq 1 \Rightarrow$ ημ$x > 1$ κάτι που είναι αδύνατον διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq$ ημ$x \leq 1$.

iv. Αν $a < -1$ τότε θα ισχύει ημ$x \geq -1 > a$ άρα η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$ οπότε είναι αόριστη.

v. Τέλος για $a = -1$ θα έχουμε ημ$x > -1 \Leftrightarrow$ ημ$x \geq -1$ και ημ$x \neq -1$. Η πρώτη σχέση επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ από τη δεύτερη εξαιρούμε τις λύσεις της εξίσωσης ημ$x = -1$ που είναι $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$. Έτσι

$$x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$$

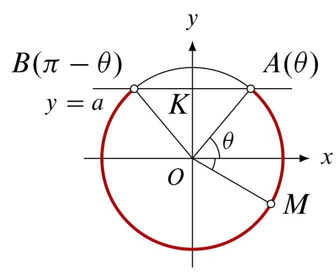
2. Η ανίσωση ημ$x < a$

Εργαζόμαστε αναλόγως για την επίλυση της ανίσωσης ημ$x < a$ διακρίνοντας ξανά τις περιπτώσεις για τον αριθμό a οπότε θα έχουμε :

- Αν $a \leq -1$ τότε η ανίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $a > 1$ τότε η ανίσωση είναι αόριστη.
- Αν $a = 1$ τότε η ανίσωση επαλυθεύεται από όλες της γωνίες εκτός από τις λύσεις της εξίσωσης ημ$x = 1$.
- Αν $a \in (-1, 1)$ τότε αναζητούμε την ύπαρξη κατάλληλης γωνίας θ ώστε ημ$\theta = a$. Εξετάζουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

i. Αν $a \in [0, 1)$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η κατάλληλη γωνία τότε η ανίσωση θα γραφτεί

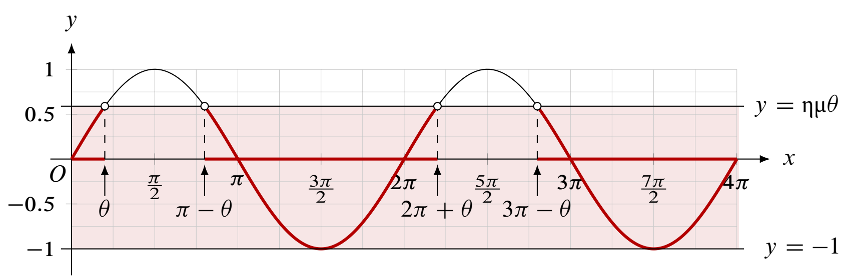
$$\text{ημ}x < \text{ημ}\theta$$



Οι λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι παραπληρωματικές γωνίες $x = \theta$ και $x = \pi - \theta$. Έτσι η ανίσωση θα έχει ειδική λύση την

$$x \in [0, \theta) \cup (\pi + \theta, 2\pi]$$

Γραφικά βλέπουμε ότι η ευθεία $y = a$ τέμνει τον τριγονομετρικό κύκλο στα σημεία $A(\theta)$ και $B(\pi - \theta)$. Έτσι οι γωνίες που ορίζονται από τα εσωτερικά σημεία του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ που βρίσκεται **κάτω από την ευθεία** δίνουν την ειδική λύση της ανίσωσης.

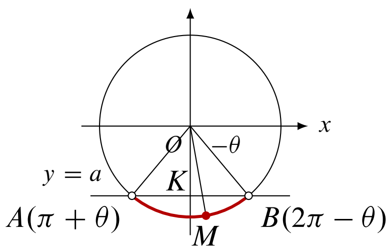


Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ καθώς και τις ευθείες $y = -1$ και $y = a$ βλέπουμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση βρίσκεται **μεταξύ των ευθειών** είναι πάλι ανήκουν πάλι στο σύνολο $[0, \theta) \cup (\pi + \theta, 2\pi]$. Έτσι η γενική λύση της αρχικής ανίσωσης θα είναι

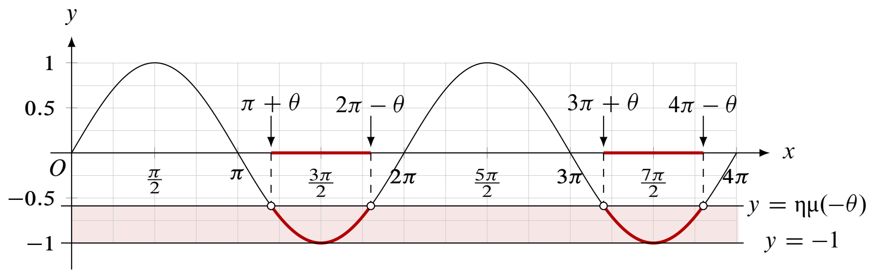
$$x \in [2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \theta) \cup (2\kappa\pi + (\pi - \theta), 2(\kappa + 1)\pi] \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Ομοίως για $a \in (-1, 0]$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $\text{ημ}\theta = -a > 0$ η αρχική ανίσωση γίνεται $\text{ημ}x < \text{ημ}(-\theta)$. Η εξίσωση $\text{ημ}x = \text{ημ}(-\theta)$ δίνει στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τις λύσεις $x = \pi + \theta$ και $x = 2\pi - \theta$. Οπότε η ειδική λύση της ανίσωσης θα είναι η

$$x \in (\pi + \theta, 2\pi - \theta)$$



Στον τριγωνομετρικό κύκλο οι ζητούμενες γωνίες ορίζονται από τα εσωτερικά σημεία M του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ που βρίσκεται **κάτω από την ευθεία** $y = a$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αντίστοιχα οι τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται **μεταξύ των ευθειών** $y = -1$ και $y = a$ επαληθεύουν την ανίσωση. Σε κάθε περίπτωση η ειδική λύση της θα είναι η $x \in (\pi + \theta, 2\pi - \theta)$.



Γενικεύοντας τα παραπάνω προκύπτει η γενική λύση της ανίσωσης προσθέτοντας τα πολλαπλάσια $2\kappa\pi$ της περιόδου 2π της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ η οποία θα είναι

$$x \in (2\kappa\pi + (\pi + \theta), 2(\kappa + 1)\pi - \theta) \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Μπορούμε να δούμε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα συγκεντρωτικά στο επόμενο θεώρημα που αφορά τις λύσεις της ανίσωσης $\text{ημ}x < a$.

Θεώρημα 1.2 ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ ημx < a

Οι λύσεις τριγωνομετρικών ανισώσεων της μορφής $\text{ημ}x < a$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a :

i. Για κάθε $a \in (-1, 0]$ υπάρχει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $\text{ημ}\theta = -a$. Τότε θα ισχύει

$$\text{ημ}x < a \Rightarrow x \in (2\kappa\pi + (\pi + \theta), 2(\kappa + 1)\pi - \theta)$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ακέραιος αριθμός.

ii. Για κάθε $a \in [0, 1)$ υπάρχει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $\text{ημ}\theta = a$. Τότε θα ισχύει

$$\text{ημ}x > a \Rightarrow x \in [2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \theta) \cup (2\kappa\pi + (\pi - \theta), 2(\kappa + 1)\pi]$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ακέραιος αριθμός.

iii. Για κάθε $a \leq -1$ η ανίσωση είναι αδύνατη.

iv. Για κάθε $a > 1$ η ανίσωση είναι αόριστη.

v. Αν $a = 1$ τότε $\text{ημ}x < 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διαστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

i. Έχουμε την ανίσωση ημ$x < a$ όπου $-1 < a \leq 0$ και ας θεωρήσουμε $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ κατάλληλη γωνία ώστε ημ$\theta = -a > 0$. Τότε η ανίσωση θα γίνει

$$\text{ημ}x < -\text{ημ}\theta \Rightarrow \text{ημ}x < \text{ημ}\,(-\theta) \Rightarrow \text{ημ}x < \text{ημ}\,(2\pi - \theta)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης ημ$x = a$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι $x = \pi + \theta$ και $x = 2\pi - \theta$. Από τη μονοτονία της συνάρτησης και του πρόσημού της θα έχουμε ότι :

- Για κάθε $x \in \left(\pi + \theta, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε : $x > \pi + \theta \xRightarrow{f \searrow [\pi, \frac{3\pi}{2}]} \text{ημ}x < \text{ημ}(\pi + \theta) = a$.
- Για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi - \theta\right)$ θα ισχύει : $x < 2\pi - \theta \xRightarrow{f \nearrow [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]} \text{ημ}x < \text{ημ}(2\pi - \theta) = a$

Έτσι οι τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες επαληθεύεται η σχέση ημ$x > a$ είναι οι ακόλουθες

$$x \in \left(\pi + \theta, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi - \theta\right) = (\pi + \theta, 2\pi - \theta)$$

Το παραπάνω σύνολο αποτελεί την ειδική λύση της ανίσωσης. Προσθέτοντας τα πολλαπλάσια $2\kappa\pi$ της περιόδου 2π προκύπτει η γενική λύση

$$x \in (2\kappa\pi + (\pi + \theta), 2(\kappa + 1)\pi - \theta)\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Για κάθε $a \in [0, 1)$ θα υπάρχει $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ γωνία ώστε ημ$\theta = a > 0$. Η αρχική ανίσωση θα γίνει :

$$\text{ημ}x < \text{ημ}\theta$$

Οι λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παίρνουμε τις λύσεις $x = \theta$ και $x = \pi - \theta$. Έτσι παίρνουμε :

- Για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$ θα ισχύει : ημ$x < 0 < a$.
- Για κάθε $x \in [0, \theta)$ έχουμε $x < \theta \xRightarrow{f \nearrow [0, \frac{\pi}{2}]} \text{ημ}x < \text{ημ}\theta = a$.
- Για κάθε $x \in (\pi - \theta, \pi)$ έχουμε $x > \pi - \theta \xRightarrow{f \searrow [\frac{\pi}{2}, \pi]} \text{ημ}x < \text{ημ}\,(\pi - \theta) = a$.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι οι τιμές του x για τις οποίες επαληθεύεται η ανίσωση και μας δίνουν την ειδική λύση είναι :

$$x \in [0, \theta) \cup [\pi, 2\pi] \cup (\pi - \theta, \pi) = [0, \theta) \cup (\pi + \theta, 2\pi]$$

Άρα η γενική λύση με πρόσθεση του $2\kappa\pi$ στα διαστήματα της ειδικής θα είναι

$$x \in [2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \theta) \cup (2\kappa\pi + (\pi - \theta), 2(\kappa + 1)\pi]\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. Για κάθε $a \leq -1$ η αρχική ανίσωση θα γραφτεί στη μορφή ημ$x < a \leq 1 \Rightarrow$ ημ$x < -1$ άρα αδύνατη γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $-1 \leq$ ημ$x \leq 1$.

iv. Αν $a > 1$ τότε ισχύει ημ$x \leq 1 < a$ άρα η ανίσωση είναι αόριστη γιατί επαληθεύεται για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

v. Τέλος για $a = 1$ θα πάρουμε ημ$x < 1 \Leftrightarrow$ ημ$x \leq 1$ και ημ$x \neq 1$. Η πρώτη επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ από τη δεύτερη εξαιρούμε τις λύσεις της εξίσωσης ημ$x = 1$ που είναι $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Έτσι

$$x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ημ$x > a$
Να λυθεί η ανίσωση ημ$x > \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

***1^{ος} Τρόπος :* Αλγεβρική επίλυση**
Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω για την ανίσωση ημ$x > \frac{1}{2}$. Σχηματίζουμε και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και θα έχουμε :

$$\text{ημ}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6}$$

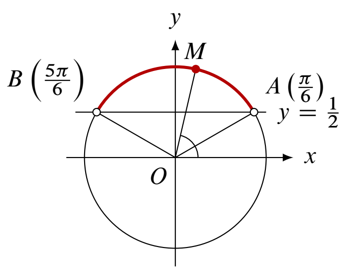
Έτσι, οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα είναι μεταξύ των παραπληρωματικών γωνιών $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$ δηλαδή $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Στη συνέχεια γενικεύουμε προσθέτοντας στα διαστήματα την ποσότητα $2\kappa\pi$ και έτσι αποκτάμε τη γενική λύση

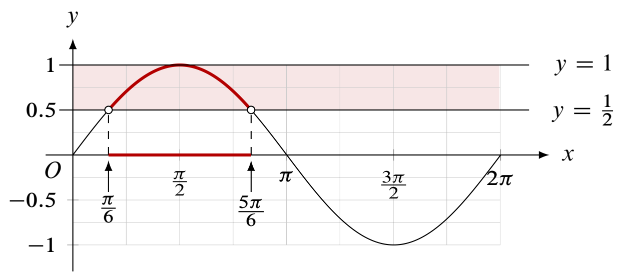
$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$$

***2^{ος} Τρόπος :* Γραφική επίλυση**
Η γραφική επίλυση της ανίσωσης μπορεί να γίνει και με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου αλλά και με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ σχεδιασμένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Στον άξονα των ημιτόνων φέρουμε την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Για τις γωνίες $x\hat{O}M$ που ορίζονται από τα εσωτερικά σημεία M του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ θα ισχύει

$$\text{ημ}\left(x\hat{O}M\right) > \frac{1}{2}$$

άρα είναι οι λύσεις της ανίσωσης δηλαδή $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Ομοίως για την επίλυση της με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης σχεδιάζουμε τις οριζόντιες ευθείες $y = 1$ και $y = \frac{1}{2}$.





Μεταξύ των ευθειών αυτών βρίσκεται το μέρος της γραφικής παράστασης που μας ενδιαφέρει. Τα σημεία αυτά έχουν τεταγμένες για τις οποίες ισχύει $y = \text{ημ} > \frac{1}{2}$. Έτσι οι τετμημένες x των σημείων αυτών που βρίσκονται μεταξύ των θέσεων $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης άρα $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Σε κάθε περίπτωση η γενική λύση προκύπτει προσθέτοντας $2\kappa\pi$ στο διάστημα της ειδικής λύσης και θα είναι

$$x \in \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right), \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ημ$x \geq a$
Να λυθεί η ανίσωση ημ$x \geq -\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

***1^{ος} Τρόπος :* Αλγεβρική επίλυση**

Η αρχική ανίσωση αποτελείται από τις σχέσεις ημ$x > -\frac{1}{2}$ και ημ$x = -\frac{1}{2}$. Λύνουμε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την εξίσωση ημ$x = -\frac{1}{2}$. Γι αυτήν θα έχουμε

$$\text{ημ}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ημ}x = -\text{ημ}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

και έτσι παίρνουμε τις λύσεις $\frac{7\pi}{6}$ και $\frac{11\pi}{6}$. Οι ειδικές λύσεις της ανίσωσης ημ$x > -\frac{1}{2}$ στο ίδιο αρχικό διάστημα θα είναι $x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Οπότε με γενίκευση και σε συνδυασμό με τις λύσεις της εξίσωσης παίρνουμε τις λύσεις της αρχικής ανίσωσης ημ$x \geq -\frac{1}{2}$ που θα είναι :

$$x \in \left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6}, 2(\kappa+1)\pi\right] \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

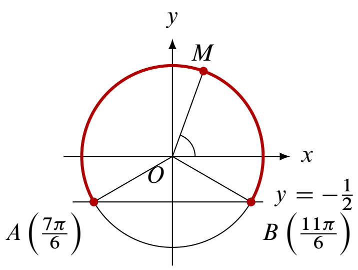
***2^{ος} Τρόπος :* Γραφική επίλυση**

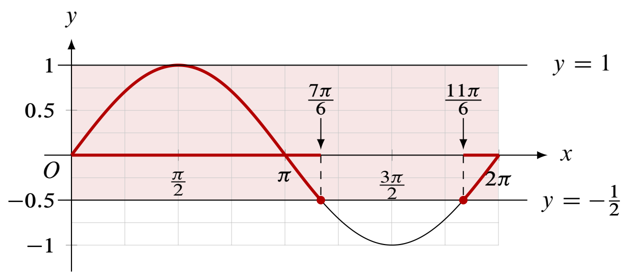
Σχεδιάζοντας την ευθεία $y = -\frac{1}{2}$ στο σύστημα αξόνων του τριγωνομετρικού κύκλου αυτή τον τέμνει στα σημεία $A\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ και $B\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. Τα εσωτερικά σημεία M του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ με τεταγμένη στον άξονα των ημιτόνων μεγαλύτερη του $-\frac{1}{2}$ ορίζουν γωνίες $x\hat{O}M$ που είναι λύσεις της ανίσωσης ημ$x > -\frac{1}{2}$: $x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Στο σύνολο των σημείων αυτών εισάγουμε και τα άκρα του τόξου που είναι οι θέσεις των λύσεων της εξίσωσης ημ$x = -\frac{1}{2}$ και έτσι η ειδική λύση της αρχικής ανίσωσης θα είναι :

$$x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης και των ευθειών $y = 1$ και $y = -\frac{1}{2}$ βλέπουμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = -\frac{1}{2}$ είναι όπως και πριν οι $x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Επιλέγοντας και τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης και της ευθείας $y = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε την ειδική λύση

$$x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$





Τέλος προσθέτουμε στα διαστήματα τα πολλαπλάσια $2\kappa\pi$ της περιόδου 2π της συνάρτησης $f(x) =$ ημx και παίρνουμε τη γενική λύση της αρχικής ανίσωσης

$$x \in \left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6}, 2(\kappa+1)\pi\right] \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

1.2 Συστήματα ανισώσεων

1.3 Αρμονική πρόοδος

1.4 Πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.2 ΠΙΝΑΚΑΣ
Πίνακας ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες. Αν ν είναι το πλήθος των γραμμών και μ το πλήθος των στήλων της διάταξης, τότε ο πίνακας ονομάζεται **πίνακας $\boldsymbol{\nu \times \mu}$**. Κάθε πίνακας συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα όπως A, B, κ.τ.λ.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{c} j-\text{στήλη} \\ \downarrow \end{array} & \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} & \leftarrow i-\text{γραμμή} \end{array}$$

- Οι αριθμοί που βρίσκονται μέσα στον πίνακα ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα.
- Τη θέση ενός στοιχείου στον πίνακα την προσδιορίζουμε συνδυάζοντας τον αριθμό της γραμμής με τον αριθμό της στήλης στην οποία βρίσκεται.
- Κάθε στοιχείο ενός πίνακα συμβολίζεται με μικρό γράμμα π.χ. a με δείκτη ij δηλαδή a_{ij}. Ο αριθμός i με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ μας δίνει τη θέση της γραμμής στην οποία βρίσκεται το στοιχείο a_{ij} ενώ ο αριθμός j με $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$ μας δίνει τη θέση της στήλης. Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας συμβολίζεται εν συντομία $= [a_{ij}]$ με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$.
- Ο πίνακας όπου όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται .

Ορισμός 1.3 ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για ειδικές τιμές των αριθμών ν και μ καθώς και για συνθήκες που αφορούν τα στοιχεία a_{ij} ενός πίνακα και τους δίκτες i, j προκύπτουν οι παρακάτω ειδικά είδη πινάκων.

1. **Πίνακας γραμμή**
   Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A έχουμε $\nu = 1$ τότε ο $1 \times \mu$ πίνακας που προκύπτει έχει μια γραμμή και τη μορφή
   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Πίνακας } 1 \times \mu$$
2. **Πίνακας στήλη**
   Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A έχουμε $\mu = 1$ τότε ο $\nu \times 1$ πίνακας που προκύπτει έχει μια στήλη και τη μορφή
   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\nu 1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Πίνακας } \nu \times 1$$
3. **Πίνακας στοιχείο**
   Αν σε ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A θέσουμε $\mu = 1$ και $\mu = 1$ τότε ο 1×1 πίνακας που προκύπτει έχει ένα στοιχείο και τη μορφή
   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Πίνακας } 1 \times 1$$
4. **Άνω κλιμακωτός - Κάτω κλιμακωτός**
   Αν για ένα $\nu \times \mu$ πίνακα A ισχύει η σχέση $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$ τότε ο πίνακας λέγεται **άνω κλιμακωτός**. Αντίστοιχα αν ισχύει a_{ij} για κάθε $i < j$ ονομάζεται **κάτω κλιμακωτός**. Οι πίνακες αυτοί είναι της μορφής

Άνω κλιμακωτός **Κάτω κλιμακωτός**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\mu} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

5. **Τετραγωνικός πίνακας**
Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας ονομάζεται τριγωνικός εαν έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στήλων δηλαδή $\nu = \mu$. Ο πίνακας ονομάζεται **τάξης $\boldsymbol{\nu}$**. Τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα $\nu \times \nu$ της μορφής a_{ii} με $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ δηλαδή σε θέση όπου ο αριθμός της γραμμής και της στήλης είναι ίδιος, αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \boldsymbol{a_{ii}} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu j} & \dots & \boldsymbol{a_{\nu\nu}} \end{bmatrix} , \quad \text{Πίνακας } \nu \times \nu$$

6. **Άνω τριγωνικός - Κάτω τριγωνικός**
Ένας κλιμακωτός και τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας ονομάζεται **άνω τριγωνικός** ή **κάτω τριγωνικός** εαν είναι άνω κλιμακωτός ή κάτω κλιμακωτός αντίστοιχα.

Άνω τριγωνικός **Κάτω τριγωνικός**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

7. **Διαγώνιος πίνακας**
Ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$ ονομάζεται **διαγώνιος** εαν όλα τα στοιχεία του εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδενικά. Δηλαδή $a_{ij} = 0 \ , \ \forall i \neq j$ με $i, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

8. **Μοναδιαίος πίνακας**
Ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$ ονομάζεται **μοναδιαίος** αν είναι διαγώνιος με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι ίσα με τη μονάδα. Δηλαδή $a_{ij} = 0 \ , \ \forall i \neq j$ και $a_{ii} = 1$ με $i, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$. Συμβολίζεται με I_ν.

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.4 ΙΣΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
Ίσοι ονομάζονται δύο $\nu \times \mu$ πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ όταν όλα τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα μεταξύ τους.

$$A = B \text{ εαν } a_{ij} = \beta_{ij} \quad , \forall i, j$$

Ορισμός 1.5 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ
Άθροισμα δύο $\nu \times \nu$ τετραγωνικών πινάκων $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ ίδιας τάξης ν ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας $\varGamma = [\gamma_{ij}]$ ο οποίος έχει στοιχεία τα αθροίσματα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B.

$$\varGamma = A + B \quad \text{με} \quad \gamma_{ij} = a_{ij} + \beta_{ij} \quad , \forall i, j$$

Ορισμός 1.6 ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Αντίθετος ενός $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας $-A$ του οποίου τα στοιχεία είναι αντίθετα από τα αντίστοιχα στοιχεία του A

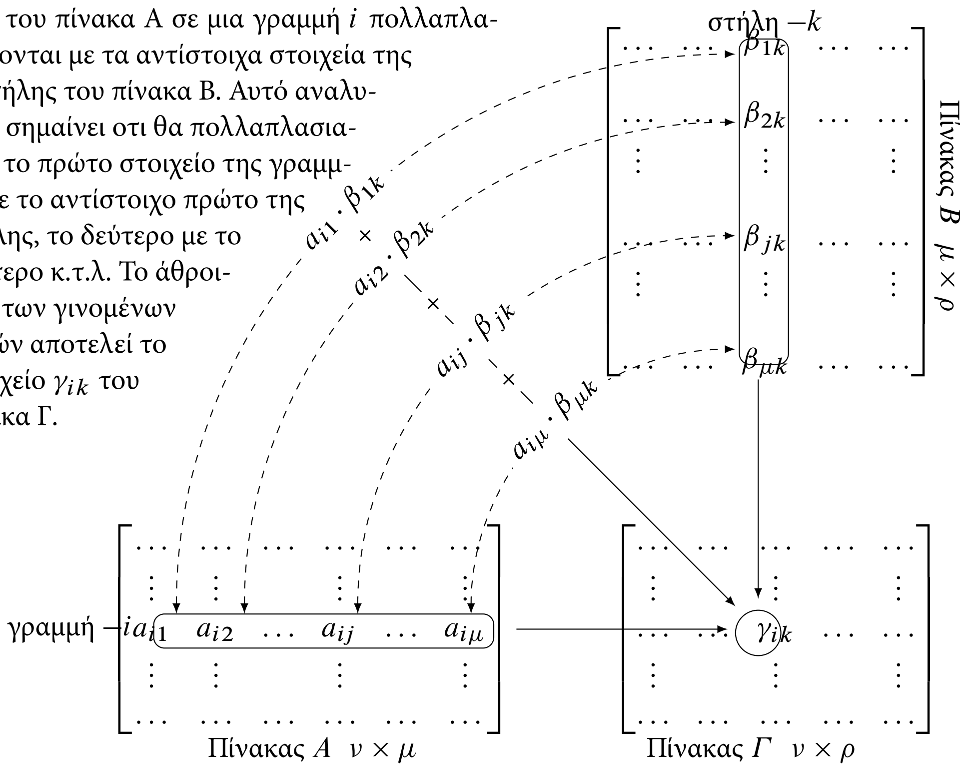
$$-A = [-a_{ij}] \quad , \forall i, j$$

Ορισμός 1.7 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ
Γινόμενο ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με έναν $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας λA του οποίου τα στοιχεία είναι πολλαπλάσια των αντιστοιχων στοιχείων του A.

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \quad , \forall i, j$$

Ορισμός 1.8 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ
Γινόμενο ενός $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ με έναν $\mu \times \rho$ πίνακα $B = [\beta_{jk}]$ ονομάζεται ο $\nu \times \rho$ πίνακας $\varGamma = [\gamma_{ik}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} αποτελεί το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της $i-$γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της $k-$στήλης του B.

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε πως τα στοιχεία του πίνακα A σε μια γραμμή i πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα στοιχεία της k στήλης του πίνακα B. Αυτό αναλυτικά σημαίνει οτι θα πολλαπλασιαστεί το πρώτο στοιχείο της γραμμής με το αντίστοιχο πρώτο της στήλης, το δεύτερο με το δεύτερο κ.τ.λ. Το άθροισμα των γινομένων αυτών αποτελεί το στοιχείο γ_{ik} του πίνακα Γ.



Σχήμα 1.1: Γινόμενο πινάκων

- Κάθε στοιχείο του πίνακα γινόμενο θα είναι

$$\gamma_{ij} = a_{i1} \cdot \beta_{1k} + a_{i2} \cdot \beta_{2k} + \ldots a_{\mu 1} \cdot \beta_{\mu k} = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} \cdot \beta_{jk}$$

- Το γινόμενο δύο πινάκων A, B ορίζεται όταν ο πρώτος πίνακας A έχει αριθμό στηλών ίσο με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα B.

Ορισμός 1.9 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν ονομάζεται ο $\nu \times \nu$ πίνακας A^{-1} ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τον A μας δίνει το μοναδιαίο πίνακα I_ν.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_\nu$$

Αντιστρέψιμος ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει αντίστροφο.

Ορισμός 1.10 ΠΙΝΑΚΑΣ - ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Πίνακας ενός $\nu \times \mu$ γραμμικού συστήματος ονομάζεται ο $\nu \times \mu$ πίνακας, με στοιχεία τους συντελεστές του συστήματος. Επαυξημένος ονομάζεται ο $\nu \times (\mu + 1)$ πίνακας ο οποίος έχει στοιχεία του, τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους ενός γραμμικού συστήματος ν εξισώσεων με μ μεταβλητές. Αν

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{i\mu}x_\mu = \beta_j \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu j}x_j + \ldots + a_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases}$$

είναι το γραμμικό σύστημα με πραγματικούς συντελεστές a_{ij}, β_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$ τότε ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του θα είναι της μορφής

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ **ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu j} & \ldots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} , \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1\mu} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2\mu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i\mu} & \beta_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu j} & \ldots & a_{\nu\mu} & \beta_\nu \end{array}\right]$$

- Οι συντελεστές των μεταβλητών στο γραμμικό σύστημα συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο συμβολίζονται και σε έναν αντίστοιχο πίνακα.
- Ο κάθε συντελεστής a_{ij} έχει διπλό δείκτη ij. Ο δείκτης i μας δίνει τη θέση της εξίσωσης στην οποία ανήκει. Ο δείκτης j μας βοηθάει να παρατηρούμε καλύτερα με ποιά μεταβλητή πολλαπλασιάζεται ο συντελεστής.
- Η τελευταία στήλη του αποτελείται από τους σταθερούς όρους του συστύματος και χωρίζεται με μια γραμμή από τον υπόλοιπο πίνακα με τους συντελεστές.

Ορισμός 1.11 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΠΙΝΑΚΑ
Ορίζουσα ενός ν τάξης τετραγωνικού πίνακα A ονομάζεται ο αριθμός $|A|$ ο οποίος είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu j} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1\nu}A_{1\nu}$$

- Για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ έχουμε $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.
- D_{ij} είναι η $\nu - 1$ τάξης ορίζουσα που προκύπτει αν παραλείψουμε από την ορίζουσα $|A|$, τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} και ονομάζεται **ελλάσων** ορίζουσα του στοιχείου αυτού.
- Το γινόμενο $(-1)^{i+j} D_{ij}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του κάθε στοιχείου a_{ij}.
- Ο αριθμός $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1\nu}A_{1\nu}$ ονομάζεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς την 1^{η} γραμμή.

Ορισμός 1.12 ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Προσαρτημένοσ πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν ονομάζεται ο πίνακας με στοιχεία του τα αλγεβρικά συμπληρώματα A_{ij} των στοιχείων a_{ij} του πίνακα A. Είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \ldots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.13 ΑΝΗΓΜΕΝΟΣ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟΣ
Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας A ονομάζεται ανηγμένος κλιμακωτός όταν

i. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές.
ii. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο από αριστερά μιας μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.

$$a_{ij} = 1 \text{ και } a_{i,j-\kappa} = 0\ ,\ \forall \kappa \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$$

iii. Κάθε άλλο στοιχείο μετά τη μονάδα στην ίδια γραμμή, είναι διάφορο του 1

$$\text{Αν } a_{ij} = 1 \text{ τότε } a_{i,j+\kappa} \neq 1\ ,\ \forall \kappa \in \{1, 2, \ldots, \mu - j\}$$

iv. Η μονάδα σε κάθε μη μηδενική γραμμή θα πρέπει να βρίσκεται αριστερά από τη μονάδα της επόμενης γραμμής.

$$\exists \kappa \in \{1, 2, \ldots, \mu - j\} : a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{i+1,j+\kappa} = 1$$

Ορισμός 1.14 ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΙΣ
Γραμμοπράξεις ονομάζονται οι πράξεις οι οποίες εκτελούνται μεταξύ των γραμμών ενός πίνακα και είναι οι ακόλουθες :

1. **Εναλλαγή γραμμών**
   Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών. $\Gamma_\kappa \leftrightarrow \Gamma_\lambda$
2. **Πολλαπλασιασμός με αριθμό**
   Πολλαπλασιασμός των στοιχείων μιας γραμμής με έναν πραγματικό μη μηδενικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $\Gamma_\kappa \rightarrow \lambda\Gamma_\kappa$
3. **Γραμμικός συνδυασμός**
   Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής με τα πολλαπλάσια των στοιχείων μιας άλλης γραμμής. $\Gamma_\kappa \rightarrow \Gamma_\kappa + \lambda\Gamma_\rho$

- Με το σύμβολο Γ_κ με δείκτη κ συμβολίζουμε τη γραμμή ενός πίνακα στη θέση κ.
- Αν από έναν πίνακα A προκύπτει ένας πίνακας B ύστερα από γραμμοπράξεις τότε οι πίνακες ονομάζονται **ισοδύναμοι**.

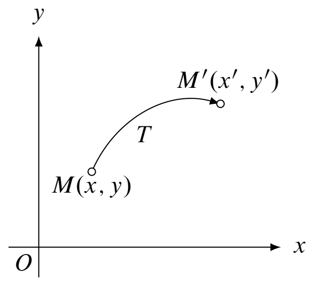
Ορισμός 1.15 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
Γεωμετρικός μετασχηματισμός στο επίπεδο ή απλά γεωμετρικός μετασχηματισμός, ονομάζεται μια συνάρτηση (απεικόνιση) T από το σύνολο $\mathcal{E}$ των σημείων του επιπέδου xOy στο ίδιο σύνολο $\mathcal{E}$

$$T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

μέσω του οποίου, κάθε σημείο $M(x, y)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων xOy αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο $M'(x', y')$.

- Το σημείο $M'(x', y')$ ονομάζεται **εικόνα** του M και συμβολίζεται $T()$.
- Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός συμβολίζεται και

$$(x, y) \xrightarrow{T} M'(x', y')$$



Σχήμα 1.2: Γεωμετρικός μετασχηματισμός

Ορισμός 1.16 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός εαν οι συντεταγμένες x', y' της εικόνας ′ ενός σημείου $M(x, y)$ αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των συντεταγμένων x, y δηλαδή είναι της μορφής

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα του γραμμικού μετασχηματισμού μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση πινάκων :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ονομάζεται **πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού**.

Βασικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. **Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων**
Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί στο συμμετρικό του $M'(x', y')$ ως προς την αρχή των αξόνων. Ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού είναι
$$A = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **Συμμετρία ως προς ευθεία**
Συμμετρία ως προς ευθεία ε ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί στο συμμετρικό του $M'(x', y')$ ως προς την ευθεία ε. Οι πίνακες των μετασχηματισμών ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $y = x$ είναι οι παρακάτω :
   i. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
   ii. Συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   iii. Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. **Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ**
Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο $M'(x', y')$ ύστερα από στροφή του κατα γωνία θ με κέντρο την αρχή O των αξόνων με σταθερή ακτίνα OM. Ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι :
$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$$
Για τις παρακάτω τιμές της γωνίας θ οι πίνακες των αντίστοιχων μετασχηματισμών είναι οι εξής :

i. $\theta = 0 \Rightarrow A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii. $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

iii. $\theta = \pi \Rightarrow A = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iv. $\theta = 2\pi \Rightarrow A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. **Ομοιοθεσία**
   Ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί στο σημείο $M'(x', y')$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM'}$ να είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{OM}$.
   $$\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
   Ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι
   $$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

5. **Παράλληλη μεταφορά**
   Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ονομάζεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο $M'(x', y')$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ να είναι παράλληλο με το δεδομένο διάνυσμα $\vec{a}$.
   $$\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$
   Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των σημείων M και M' είναι
   $$\begin{cases} x' = 1x + 0y + a_1 \\ y' = 0x + 1y + a_2 \end{cases}$$
   που με τη χρήση πινάκων γράφεται
   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

   i. Ο πίνακας της παράλληλης μεταφοράς είναι $= = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   ii. Η παράλληλη μεταφορά **δεν** είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Ορισμός 1.17 ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ
Ισομετρία ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός με τον οποίο οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων A, B και των εικόνων τους A', B' αντίστοιχα παραμένουν ίσες.

$$T \text{ ισομετρία} : AB \to A'B' \text{ με } AB = A'B'$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B, Γ ίδιων διαστάσεων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη της πρόσθεσης :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$A + B = B + A$
Προσεταιριστική	$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$A + O = A$
Αντίθετοι πίνακες	$A + (-A) = O$
Νόμος διαγραφής	$A + B = \ + \Gamma \Rightarrow B = \Gamma$

Πίνακας 1.1: Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων

Θεώρημα 1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B ίδιων διαστάσεων και για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη του γινομένου αριθμού με πίνακα :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Νόμοι διαγραφής	$\lambda A = \lambda B \Rightarrow A + B \ , \ \lambda \neq 0$
	$\lambda A = \mu A \Rightarrow \lambda = \mu \ , \ A \neq O$
Προσεταιριστική	$\lambda (AB) = (\lambda A) B$
	$\lambda (\mu B) = (\lambda \mu) B$
Επιμεριστική	$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
	$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda A = O \Rightarrow \lambda = 0$ ή $A = O$

Πίνακας 1.2: Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

Θεώρημα 1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΙΝΑΚΩΝ
Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B, Γ ίδιων διαστάσεων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την πράξη του πολλαπλασιασμού :

Ιδιότητα	Συνθήκη
Προσεταιριστική	$A (B\Gamma) = (AB) \Gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$AI = IA = A$
Αντίστροφοι πίνακες	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Επιμεριστική	$A\,(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$

Πίνακας 1.3: Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων **δεν** είναι αντιμεταθετική πράξη.
- Αν για δύο πίνακες , ίδιας τάξης ισχύει $AB =$ τότε **δεν** ισχύει υποχρεωτικά $A =$ ή $B =$.

Θεώρημα 1.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ
Κάθε σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με μ άγνωστους μπορεί να γραφτεί με τη χρήση πινάκων ως εξίσωση πινάκων στη μορφή

$$AX = B$$

όπου A είναι ο $\nu \times \mu$ πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος, X είναι ο $\nu \times 1$ πίνακας στήλη των μεταβλητών και ο $\nu \times 1$ πίνακας στήλη των σταθερών όρων. Ο πίνακας X των μεταβλητών του συστήματος καθώς και ο πίνακας B των σταθερών όρων είναι αντίστοιχα

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση πινάκων $AX = B$ γράφεται αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Ένα ομογενές σύστημα γράφεται $AX = O$.

Θεώρημα 1.7 ΑΝΗΓΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Κάθε πίνακας διαστάσεων $\nu \times \mu$ μετατρέπεται σε έναν ανηγμένο πίνακα με τη χρήση πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Θεώρημα 1.8 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Αν σε ένα γραμμικό σύστημα που με τη βοήθεια πινάκων γράφεται στη μορφή $AX = B$, ο πίνακας των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}B$.

Θεώρημα 1.9 ΛΥΣΗ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER
Για κάθε γραμμικό $\nu \times \nu$ σύστημα εξισώσεων $AX = B$ ισχύει οτι :

- Αν $|A| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\nu-$άδα αριθμών $(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ με

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, x_\nu = \frac{D_{x_\nu}}{D}$$

  Αν $|A| = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.

όπου $D = |A|$ και $D_{x_i}, i = 1, 2, \dots, \nu$ είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών της μεταβλητής x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.

Θεώρημα 1.10 ΛΥΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Ένα ομογενές σύστημα $AX = O$ έχει

- μοναδική λύση τη μηδενική αν $|A| \neq 0$
- άπειρες λύσεις (αόριστο) αν $|A| = 0$

Θεώρημα 1.11 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ
Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός τετραγωνικου πίνακα τάξης ν ως προς οποιαδήποτε γραμμή i είναι ίσο με το ανάπτυγμα της ως προς οποιαδήποτε στήλη j.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{i\nu}A_{i\nu} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{\nu j}A_{\nu j} \quad \text{ή}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}A_{ij} \ , \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

Θεώρημα 1.12 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
Ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

$$A \text{ αντιστρέψιμος } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \ldots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ θα είναι της μορφής

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 1.13 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ
Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφός του A^{-1} υπάρχει και είναι μοναδικός.

Θεώρημα 1.14 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΣΩ ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΩΝ
Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν. Ο $\nu \times 2\nu$ πίνακας της μορφής $[A|I_\nu]$ μετασχηματίζεται σε έναν $\nu \times 2\nu$ πίνακα $[B|\Gamma]$ με τη χρήση γραμμοπράξεων με τον πίνακα να είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

- Αν $B = I_\nu$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = \Gamma$.
- Αν $B \neq I_\nu$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 1.15 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
Αν A, B δύο ίδιας τάξης ν τετραγωνικοί πίνακες τότε

$$AB = I_\nu \Leftrightarrow BA = I_\nu$$

Θεώρημα 1.16 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Για κάθε ζεύγος τετραγωνικών πινάκων A, B ίδιας τάξης ν και πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν τις ορίζουσες των A και B.

i. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με αλλαγή της θέσης δύο γραμμών ή δύο στηλών τότε

$$|B| = -|A|$$

ii. Αν ο πίνακας B προκύπτει από πολλαπλασιασμό κ σε πλήθος γραμμών ή στήλων του πίνακα A με έναν πραγματικό αριθμό λ τότε
$$|B| = \lambda^{\kappa}|A|$$

iii. Αν τα στοιχεία μια γραμμής (ή στήλης) σε ένα τετραγωνικό πίνακα A είναι πολλαπλάσια μιας άλλης γραμμής (ή στήλης αντίστοιχα) τότε η ορίζουσά του είναι $0 : |A| = 0$.

iv. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A περιέχει τουλάχιστον μια μηδενική γραμμή ή στήλη τότε η ορίζουσά του είναι $0 : |A| = 0$.

v. Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων A, B τάξης ν είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών.
$$|AB| = |A||B|$$

vi. Αν μια ή περισσότερες γραμμές ή στήλές του πίνακα A αποτελούν άθροισμα προσθετέων τότε η ορίζουσά του γράφεται ως άθροισμα οριζουσών.
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+\beta_{11} & \dots & a_{1\mu}+\beta_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix}$$

vii. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A προσθέτοντας σε μια γραμμή ή στήλη του τα πολλαπλάσια μιας άλλης πολλαπλασιασμένα με τον ίδιο αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε
$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{i1} & \dots & a_{1\mu}+\lambda a_{i\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\mu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\mu} \end{vmatrix} = |A|$$

Θεώρημα 1.17 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ
Η ορίζουσα ενός $\nu \times \nu$ τριγωνικού πίνακα A είναι ίση με το γινόμενο των στοχείων της κύριας διαγωνίου.
$$A \text{ τριγωνικός } \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{\nu\nu} = \prod_{i=1}^{\nu} a_{ii}$$

Θεώρημα 1.18 ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ
Έστω $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και ο πίνακάς του. Εαν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει κάθε σχήμα σε ένα σχήμα του ιδίου είδους.

1.5 Μιγαδικοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.18 ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
Μιγαδικό σύνολο ονομάζεται το συνολο των αριθμών για το οποίο έχουμε :

- Είναι **υπερσύνολο** των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$) και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.
- Περιέχει όλες τις ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν και στο $\mathbb{R}$.
- Περιέχει το στοιχειο i που ικανοποιεί τη σχέση $i^2 = -1$ το οποίο ονομάζεται **φανταστική μονάδα**.
- Τα στοιχεια του συνόλου $\mathbb{C}$ ονομάζονται **μιγαδικοί αριθμοί**.

- Η ιδιότητα της διάταξης που ισχύει στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών **δεν** μεταφέρεται και στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών. Κατά συνέπεια αν $z = a + \beta i$ ειναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε δεν έχει νόημα μια σχέση της μορφής $z > 0$ παρά μόνο αν ο αριθμός z είναι πραγματικός ώστε να ισχύει η διάταξη δηλαδή έχουμε

$$z > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ και } \beta = 0$$

Ορισμός 1.19 ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
Μιγαδικός αριθμός ονομάζεται κάθε στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ του μιγαδικού συνόλου και είναι της μορφής $z = a + \beta i$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

- Ο αριθμός $a \in \mathbb{R}$ λέγεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z .
- Ο αριθμός $\beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z.

Συμβολίζονται ως εξής :

$$a = Re(z) \qquad \beta = Im(z)$$

Ορισμός 1.20 ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
Φανταστικό ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων z της μορφής βi τα οποία ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί** και συμβολίζεται με $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \{\beta i | \beta \in \mathbb{R}\}$$

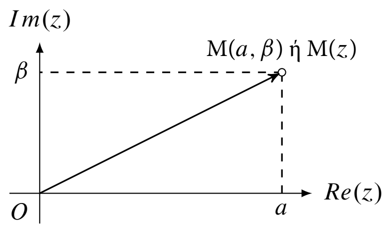
Ορισμός 1.21 ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Αν $z = a + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε ο μιγαδικός

$$\overline{z} = a - \beta i$$

ονομάζεται **συζυγής** του z.

Ορισμός 1.22 ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
Μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές τα μέρη των μιγαδικών αριθμών.

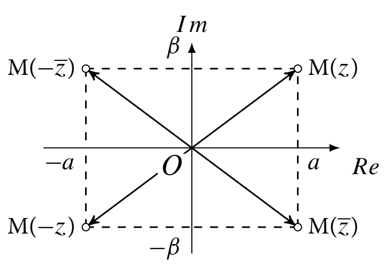
- Ο οριζόντιος άξονας λέγεται **πραγματικός** και είναι ο άξονας των πραγματικών μερών των μιγαδικών αριθμών
- ο κατακόρυφος άξονας λέγεται **φανταστικός** και είναι ο άξονας των φανταστικών μερών των μιγαδικών αριθμών.
- Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$ παριστάνεται γραφικά με δύο τρόπους
  - Σαν σημείο με συντεταγμένες (a, β) το οποίο ονομάζεται **εικόνα** του μιγαδικού.
  - Σαν διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας την εικόνα του μιγαδικού. Ονομάζεται **διανυσματική ακτίνα** του z.



Σχήμα 1.3: Μιγαδικό επίπεδο - Εικόνα μιγαδικού

Εαν $z = a + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε

- η εικόνα του συζυγή του $\overline{z} = a - \beta i$ ειναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον πραγματικό άξονα.
- η εικόνα του αντίθετου $-z = -a - \beta i$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς την αρχή των αξόνων O.
- η εικόνα του αντίθετου του συζυγή $-\overline{z} = -a + \beta i$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον φανταστικό άξονα.



Σχήμα 1.4: Εικόνες συζυγή, αντίθετου και συζηγή του αντίθετου

Ορισμός 1.23 ΙΣΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Ίσοι ονομάζονται δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί οι οποίοι έχουν τα πραγματικά μέρη τους ίσα και τα φανταστικά μέρη τους αντίστοιχα ίσα.

$$\text{Για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 = z_2 \Rightarrow Re\,(z_1) = Re\,(z_2) \text{ και } Im\,(z_1) = Im\,(z_2)$$

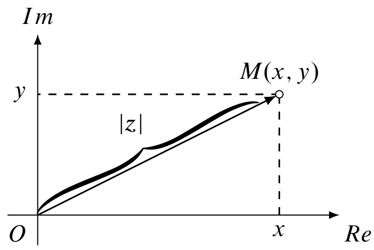
Ορισμός 1.24 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$ ονομάζεται η απόσταση της εικόνας του $M(z)$ από την αρχή O των αξόνων. Ισοδύναμα το μέτρο ενός μιγαδικού $z \in \mathbb{C}$ είναι το μήκος της διανυσματικής ακτίνας του. Συμβολίζεται με $|z|$

$$|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}|$$

Αν η εικόνα του μιγαδικού z είναι το σημείο $M(x, y)$ το μέτρο του μιγαδικού δίνεται από τη σχέση

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Σχήμα 1.5: Μέτρο μιγαδικού

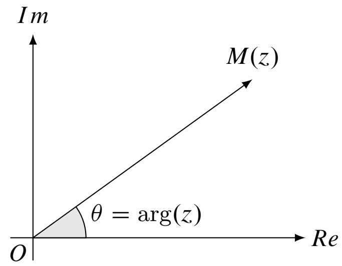
Ορισμός 1.25 ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού z ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από τον ημιάξονα Ox και τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μιγαδικού όπου $M(z)$ είναι η εικόνα του. Συμβολίζεται με $\arg z$.

$$\arg(z) = \theta = x\hat{O}M$$

Αν η γωνία του μιγαδικού ανήκει στο διάστημα ενός κύκλου τότε το όρισμα ονομάζεται πρωτεύον όρισμα και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \theta \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi)$$



Σχήμα 1.6: Όρισμα μιγαδικού

Ορισμός 1.26 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Τριγωνομετρική ή πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z λέγεται ή έκφραση του με τη χρήση του μέτρου $|z| = \rho$ και ενός ορίσματος του $\arg(z) = \theta$.

$$z = \rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

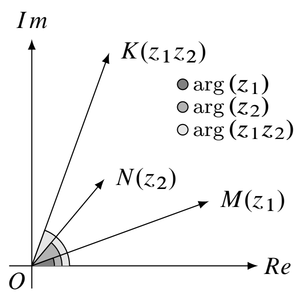
Θεώρημα 1.19 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
Θεώρημα 1.20 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
Θεώρημα 1.21 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ
Θεώρημα 1.22 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ
Θεώρημα 1.23 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Εαν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί με μέτρα ρ_1, ρ_2 και ορίσματα $\arg(z_1) = \theta_1$ και $\arg(z_2) = \theta_2$ αντίστοιχα τότε η τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ των μιγαδικών είναι

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\,(\text{συν}\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{ημ}\,(\theta_1 + \theta_2))$$

- Το μέτρο του γινομένου $z_1 z_2$ είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των z_1 και z_2.
- Το όρισμα του γινομένου $z_1 z_2$ είναι ίσο με το άθροισμα των ορισμάτων $\arg(z_1)$ και $\arg(z_2)$.

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 \quad , \quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$$



Σχήμα 1.7: Όρισμα γινομένου μιγαδικών

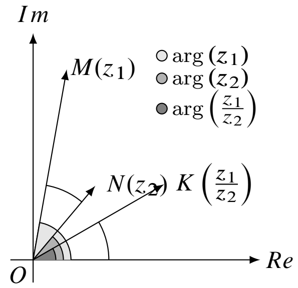
Θεώρημα 1.24 **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΗΛΙΚΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ**

Εαν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί με μέτρα ρ_1, ρ_2 και ορίσματα $\arg(z_1) = \theta_1$ και $\arg(z_2) = \theta_2$ αντίστοιχα τότε η τριγωνομετρική μορφή του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ των μιγαδικών είναι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\text{συν}\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\,\text{ημ}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$$

- Το μέτρο του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με το πηλίκο των μέτρων των z_1 και z_2.
- Το όρισμα του πηλίκου $z_1 z_2$ είναι ίσο με τη διαφορά των ορισμάτων $\arg(z_1)$ και $\arg(z_2)$.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad , \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$



Σχήμα 1.8: Όρισμα πηλίκου μιγαδικών

Θεώρημα 1.25 **ΘΕΩΡΗΜΑ DE MOIVRE**

Έστω $z \in \mathbb{C}$ ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο ρ και όρισμα $\arg(z) = \theta$. Η τριγωνομετρική μορφή της δύναμης z^ν του μιγαδικού, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ δίνεται από τον τύπο

$$z^\nu = \rho^\nu\left(\text{συν}\nu\theta + i\,\text{ημ}\nu\theta\right)$$

1.6 Θεωρία αριθμών

1.7 Προτασιακός λογισμός

1.8 Ομάδες Δακτύλιοι και Σώματα

1.9 Ακολουθίες

1.10 Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων

1.11 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\text{ημ}x + \beta\text{συν}x$

1.12 Σειρές πραγματικών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γεωμετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στατιστική - Πιθανότητες

3.1 Συνδυαστική

3.2 Κατανομές πιθανοτήτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανάλυση

4.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

4.2 Διαφορικές εξισώσεις

4.3 Ολοκλήρωμα - Όγκος εκ περιστροφής

4.4 Θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού