Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ
25 Απριλίου 2016

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σύνολα - Πιθανότητες

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
Πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του A προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $N(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ορίζεται ώς το άθροισμα των πιθανοτήτων $P(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ των απλών ενδεχομένων του.

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_\kappa)$$

- Για κάθε στοιχείο ω_i , $i = 1, 2, \ldots, \nu$ του δειγματικού χώρου Ω ονομάζουμε τον αριθμό $P(\omega_i)$ πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **αξιοματικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο A δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες :

i. Πιθανότητα κενού συνόλου : $P(\varnothing) = 0$.
ii. Πιθανότητα δειγματικού χώρου : $P(\Omega) = 1$.
iii. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει : $0 \leq P(A) \leq 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
Οι παρακάτω ιδιότητες μας δείχνουν τις σχέσεις με τις οποίες συνδέονται οι πιθανότητες οποιονδήποτε ενδεχομένων A, B με τις πιθανότητες των ενδεχομένων των πράξεων που περιέχουν τα ενδεχόμενα αυτά.

Ενδεχόμενο	**Πιθανότητα**
Ένωση	$P(a \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ , \ \text{αν } A \cap B \neq \varnothing \\ P(A) + P(B) \ , \ \text{αν } A \cap B = \varnothing \end{cases}$
Συμπλήρωμα	$P(A') = 1 - P(A)$
Διαφορά	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
Υποσύνολο	$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Μεταξύ των πιθανοτήτων δύο οποιονδήποτε ενδεχομένων A, B καθώς και των ενδεχομένων που προκύπτουν από πράξεις που τα περιέχουν, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες.

i. $P(A) \leq P(A \cup B)$
ii. $P(B) \leq P(A \cup B)$
iii. $P(A \cap B) \leq P(A)$
iv. $P(A \cap B) \leq P(B)$
v. $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$
vi. $P(A - B) \leq P(A)$
vii. $P(B - A) \leq P(B)$
viii. $P(A - B) \leq P(A \cup B)$
ix. $P(B - A) \leq P(A \cup B)$