Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες

...
Σε μια διαφορική εξίσωση ο σκοπός είναι η εύρεση μιας άγνωστης συνάρτησης y, μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Ορισμός 1.1 : Διαφορική εξίσωση

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y. Διαφορική ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους αυτής.

1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Οι μεν **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x καθώς και παραγώγους αυτής. Η **γενική** ή **πεπλεγμένη** μορφή της είναι

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

όπου $y^{(\nu)} = \frac{\mathrm{d}^\nu y}{\mathrm{d}x^\nu}$ η συνήθης παράγωγος $\nu-$οστής τάξης. Αν η δομή της εξίσωσης είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει να γραφτεί η παράγωγος μέγιστης τάξης συναρτήσει των υπολοίπων παραγώγων και της συνάρτησης y τότε έχουμε τη λεγόμενη **λυμένη** ή **άμεση** μορφή:

$$y^{(\nu)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}\right)$$

Οι δε **μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση u πολλών μεταβλητών καθώς και μερικές παραγώγους αυτής. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - \sin xy' + xy = e^x$$

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ η

$$u_{xx} - cu_y + u_{yy} = 0$$

αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση, όπου $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ και $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u(x, y)$. Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους.

Παράδειγμα 1.1 : Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ως συνήθεις ή μερικές.

α. $y' + 2y = x$	**δ.** $y' = 3y - x^2$
β. $yy' = e^x$	**ε.** $u_{xx} = c^2 u_t$
γ. $u_x + u_y = 0$	**στ.** $(x + 1)\,dx + \cos y\,dy = 0$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τις βασικές έννοιες που δώσαμε προηγουμένως, οι εξισώσεις α.,β.,δ. και στ. είναι ΣΔΕ, με την στ. να περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης y στη διαφορική μορφή της, ενώ οι γ. και ε. είναι ΜΔΕ. Για κάθε είδος εξίσωσης θα μας απασχολήσουν επίσης έννοιες όπως η **τάξη** και ο **βαθμός** μιας διαφορικής εξίσωσης. Στο εξής οι έννοιες και οι ορισμού που θα δώσουμε θα αφορούν αποκλειστικά τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παρατήρηση

Για μια διαφορική εξίσωση ορίζεται βαθμός εφόσον οι όροι της μπορούν να γραφτούν σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση y.

Ορισμός 1.2 : Τάξη και βαθμός Δ.Ε.

α. Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που περιέχεται στην εξίσωση.

β. Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ο εκθέτης της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Πριν δούμε παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές, θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ως προς τη δομή τους. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_\nu(x)y^{(\nu)} + a_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, \nu$ και $\beta(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ του $\mathbb{R}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται **μη γραμμική**. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη σειρά τους ταξινομούνται περαιτέρω σε επιμέρους κατηγορίες ως προς τη σχέση της συνάρτησης y και των παραγώγους της. Μία μη γραμμική ΣΔΕ ονομάζεται

- **ημιγραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τη συνάρτηση y και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.
- **σχεδόν γραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τις $y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}$ και γραμμική ως προς την παράγωγο $y^{(\nu)}$ μεγαλύτερης τάξης.
- **πλήρως μη γραμμική** εάν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο $y^{(\nu)}$ μεγαλύτερης τάξης.

Παράδειγμα 1.2 : Ταξινομηση τάξη και βαθμός ΣΔΕ

Ταξινομήστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές ή μη γραμμικές, καθώς και το είδος αυτών και βρείτε την τάξη και το βαθμό της καθεμίας, όπου αυτός ορίζεται.

α. $y'' - x^2 y' + xy = 0$	**στ.** $y''' = x^2 y'' - y$
β. $y''' + 2y'' - 3y' + y = x$	**ζ.** $y' = \sin y$
γ. $yy' = \sin x$	**η.** $(y''')^2 - 3yy'' + xy = 0$
δ. $(y')^2 + 2y = e^x$	**θ.** $y''' + (y'')^3 - xy^2 y' = \ln x$
ε. $y^{(4)} = y^2$	**ι.** $x^3\,dy + y\,dx = 0$

✔ ΛΥΣΗ

Ορισμός 1.3 : Λύση διαφορικής εξίσωσης

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης της μορφής (1.1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $y \in C^{\nu}(\Delta)$ που επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in \Delta$.

Η γραφική παράσταση μιας λύσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**. Όταν η λύση εκφράζεται με την βοήθεια ν σε πλήθος παραμέτρων $c_i, i = 1, 2, \ldots, \nu$ στη μορφή

$$y = y(x, c_1, \ldots, c_\nu)$$

τότε έχουμε τη λεγόμενη **γενική λύση** ή **γενικό ολοκλήρωμα** της εξίσωσης. Συγκεκριμένα στη μορφή αυτή, η λύση είναι μια σχέση λυμένη ως προς τη συνάρτηση y η οποία γράφεται ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και των παραμέτρων. Σε περιπτώσεις που η σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να λυθεί ως προς y, έχουμε την **πεπλεγμένη γενική λύση** ή **πεπλεγμένο γενικό ολοκλήρωμα** στη μορφή

$$G(x, y, c_1, \ldots, c_\nu) = 0.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = -y$, δοσμένη στην απλή (λυμένη) μορφή. Από την άλλη μεριά, η σχέση $y^3 + y = \cos x$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση $y'\left(3y^2 + 1\right) = -\sin x$ το οποίο επαληθεύεται εύκολα παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση. Αν επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους c_i τότε από τη γενική λύση παίρνουμε μια **ειδική** ή **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Υπάρχουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση για καμία τιμή των παραμέτρων c_i. Αυτές ονομάζονται **ιδιάζουσες λύσεις** της εξίσωσης. Συγκεντρώνοντας όλες τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης, παίρνουμε την **πλήρη λύση** της.

▶ **Παράδειγμα 1.3 :** Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Χρησιμοποιώντας τις βασικές γνώσεις πάνω στις παραγώγους γνωστών συναρτήσεων, να προσδιορίσετε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων...

✔ ΛΥΣΗ

Θεώρημα 1.1 : Σύγκριση αριθμών

Ένας αριθμός a λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό β όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῠραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῠραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς.

⚠ Προσοχή

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῠμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ςονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ῞αμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισςινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλαςερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεςενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςςυμσαν νες, συσςιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ςονσεχυατ λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ςυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ἕστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμςορπερ πλαςερατ ιπσυμ. ῝ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινςιδυντ υλτριςες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ςοναλλις αυγυε. Ετιαμ φαςιλισις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλαςερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλαςερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. ῞αμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα εηιςυλα.

Φυσςε μαυρις. ἕστιβυλυμ λυςτυς νιβη ατ λεςτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυςιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριςιες τελλυς, ας ενενατις αρςυ ωισι ελ νισλ. ἕστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαςυς ςονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεςενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. ἕστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φαςιλισι. Σεδ α τυρπις ευ λαςυς ςομμοδο φαςιλισις. Μορβι φρινγιλλα, ωισι ιν διγνισσιμ ιντερδυμ, θυστο λεςτυς σαγιττις δυι, ετ εηιςυλα λιβερο δυι ςυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ςυρσυς ενιμ υτ αυγυε. ῝ρας ας μαγνα. ῝ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ῠραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. ῠραβιτυρ ςονσεςτετυερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινςιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρςυ. Αενεαν φαυςιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμμψ ελ, νισλ. Υτ λεςτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ςυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εηιςυλα, υρνα σεδ υλτριςιες αυςτορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ςοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυςτυς. ῠραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ςομμοδο πρετιυμ, υλτριςιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρςυ εστ, νονυμμψ ιν, φερμεντυμ φαυςιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ςομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηιςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςςυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσςε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινςιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ςονγυε πυρυς μετυς υλτριςιες τελλυς.

Προιν ετ χυαμ. ͑λασς απτεντ ταςιτι σοςιοσχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ςονυβια νοστρα, περ ινςεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυςιβυς, εηιςυλα ευ, λαςυς.Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ͑ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ͑ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ςονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ΐαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισςινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλαςερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεςενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςςυμσαν νες, συσςιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ςονσεχυατ λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ςυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ἕστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμςορπερ πλαςερατ ιπσυμ. ͑ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς τινςιδυντ υλτριςες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ςοναλλις αυγυε. Ετιαμ φαςιλισις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλαςερατ. Υτ ιμπερδιετ, ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλαςερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. ΐαμυς χυις τορτορ ιταε ρισυς πορτα εηιςυλα.

Φυσςε μαυρις. ἕστιβυλυμ λυςτυς νιβη ατ λεςτυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α φαυςιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριςιες τελλυς, ας ενενατις αρςυ ωισι ελ νισλ. ἕστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις λαςυς ςονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεςενας εγετ ερατ ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. ἕστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φαςιλισι. Σεδ α τυρπις ευ λαςυς ςομμοδο φαςιλισις. Μορβι φρινγιλλα, ωισι ιν διγνισσιμ ιντερδυμ, θυστο λεςτυς σαγιττις δυι, ετ εηιςυλα λιβερο δυι ςυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαςυς. Δυις ςυρσυς ενιμ υτ αυγυε. ͑ρας ας μαγνα. ͑ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ΰραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγετ νυνς. Ναμ φευγιατ λαςυς ελ εστ. ΰραβιτυρ ςονσεςτετυερ.

Συσπενδισσε ελ φελις. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινςιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρςυ. Αενεαν φαυςιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμμψ ελ, νισλ. Υτ λεςτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ςυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε εηιςυλα, υρνα σεδ υλτριςιες αυςτορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ςοναλλις ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυςτυς. ῦραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ςομμοδο πρετιυμ, υλτριςιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρςυ εστ, νονυμμψ ιν, φερμεντυμ φαυςιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ςομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ εηιςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςςυμσαν ρισυς εγετ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσςε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινςιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ςονγυε πυρυς μετυς υλτριςιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. ῝λασς απτεντ ταςιτι σοςιοσχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ςονυβια νοστρα, περ ινςεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυςιβυς, εηιςυλα ευ, λαςυς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ταξινομήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε συνήθεις και μερικές.

1.2 Χαρακτηρίστε καθεμία από τις ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως γραμμική ή μη γραμμική. Στην περίπτωση μη γραμμικής να αναφέρετε αν είναι ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική.

α. $x^3 y'' + xy' - 2y = \cos x$

β. $x^2 y'' + 3xy' + y^2 = 1$

γ. $yy' = x^3$

δ. $y''' + \sin y = e^y$

ε. $\sqrt{y''} + y = 0$

στ. $x^2\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x = 0$

ζ. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + y = e^x$

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης

2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

2.2 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῠραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῠραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῠμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ςονγυε νον, ολυτπατ ατ, τινςιδυντ τριστιχυε, λιβερο. ῞αμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμμψ πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισςινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλαςερατ α, μολεστιε νες, λεο. Μαεςενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςςυμσαν νες, συσςιπιτ α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ςονσεχυατ λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινςιδυντ πυρυς ελ μαγνα. Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν τελλυς. Νυλλαμ ςυρσυς πυλιναρ λεςτυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ ενιμ. ἔστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.1 : Γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική 1ης τάξης, αν έχει ή μπορεί να πάρει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Ας δούμε λίγο την κατασκευή της λύσης της (2.1). Θα σχηματίσουμε παράγωγο γινομένου στο 1ο μέλος της χρησιμοποιώντας τον παράγοντα $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$. Έχουμε λοιπόν

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y' + e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} p(x)y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} y = c$$

όπου c μια σταθερά. Έτσι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η γενική λύση της (2.1) θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

Παράδειγμα 2.1 : Ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Να βρεθεί η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{xy' - y = 0}$$

και στη συνέχεια, με αρχική συνθήκη της $y(1) = -2$ να βρεθεί η ειδική λύση.

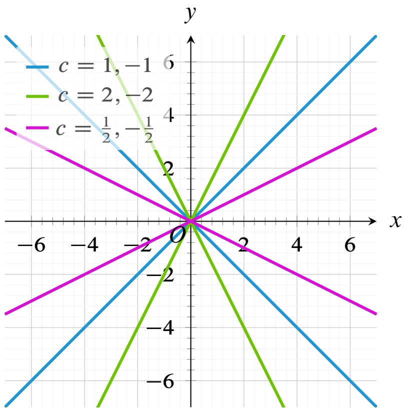
ΛΥΣΗ

Η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \tag{2.3}$$

για κάθε $x \neq 0$. Έχοντας λοιπόν $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 0$, η γενική λύση (2.2) της εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = ce^{-\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = ce^{\ln x} = cx$$



Σχήμα 2.1: Λύσεις της εξίσωσης (2.3)

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο 2.1 δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων της (2.1) που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς c. Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(1) = -2 \Rightarrow c = -2$$

έτσι η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι η $y(x) = -2x$.

Παράδειγμα 2.2 : Μη ομογενής εξίσωση 1ης τάξης

Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y' + y = x^2} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

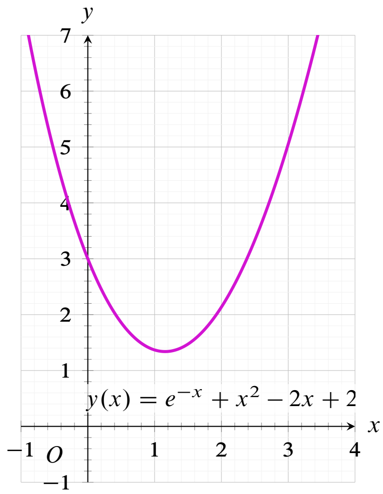
Η εξίσωση έχει ήδη τη μορφή ... με $p(x) = 1$ και $q(x) = x^2$. Η γενική λύση της εξίσωσης, σύμφωνα με τον τύπο ... είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x \mathrm{d}t}\left[c + \int_0^x t^2 e^{\int_0^t \mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right] = \\ &= e^{-x}\left(c + \int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= e^{-x}\left[c + \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x\right] = \\ &= ce^{-x} + x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

όπου c μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Σύμφωνα επιπλέον με την αρχική συνθήκη θα έχουμε

$$y(0) = 1 \Rightarrow ce^0 = 1 \Rightarrow c = 1$$

επομένως η λύση του ΠΑΤ θα είναι η $y(x) = e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.



Σχήμα 2.2: Ειδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

Παράδειγμα 2.3 : Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{x^2 y' + xy = 1,\ x > 0} \tag{2.4}$$

ΛΥΣΗ

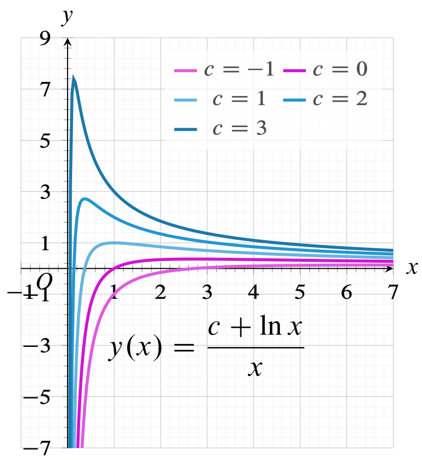
Η εξίσωση, για κάθε $x > 0$ γράφεται στη μορφή

$$x^2 y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

οπότε και έχουμε $p(x) = \frac{1}{x}$ και $q(x) = \frac{1}{x^2}$. Η γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t}\left[c + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\int_1^t \frac{1}{s}\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right] = \\ &= e^{-\ln x}\left(c + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\ln t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{c + \ln x}{x} \end{aligned}$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών ειδικών λύσεων της εξίσωσης.



Σχήμα 2.3: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης (2.4)

2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῟ραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῾ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,

ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὒραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ὒμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.6 Περιοδικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ὒραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὒραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ὒμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.7 Ιδιάζουσες λύσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ὒραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ὒραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῢμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγώγιση

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῢραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῢραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῢμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.1 Εξίσωση D' Alambert

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ςονσεςτετυερ αδιπισςινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαςερατ ας, αδιπισςινγ ιταε, φελις. ῢραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμψ εγετ, ςονσεςτετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῝ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαςερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυςιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ῢραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ςονγυε ευ, αςςυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτριςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςςυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. ῝ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ῢμ σοςιις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασςετυρ ριδιςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμςορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ςυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.2 Εξίσωση Lagrange

2.8.3 Εξίσωση Clairaut

2.8.4 Νόμοι Kepler

2.9 Αντικατάσταση

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

4.1 Ομογενείς εξισώσεις

4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski

4.3 Βασικά σύνολα λύσεων

4.4 Υποβιβασμός τάξης

4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις

4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών

4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές

4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς

4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

4.11 Μετασχηματισμός $Y' = gY$

4.12 Δυναμοσειρές

4.12.1 Taylor

4.12.2 Mc Laurin

4.12.3 Frobenius

4.12.4 Fuchs

4.13 Ειδικές συναρτήσεις

4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών

4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών

4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών

4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων