Φροντιστηριο Μεσης Εκπαιδευσης

ΓΝΩΣΗ

: Βροκίνη Λαυρεντίου 2 (Πλατεία Γεωργάκη) | : 26610 40414

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15 Σεπτεμβρίου 2017

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο μιας συνάρτησης $f : D_f \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ ονομάζεται η προσέγγιση των τιμών της μεταβλητής $f(x)$ σε μια τιμή L καθώς το x πλησιάζει την τιμή x_0. Συμβολίζεται με

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Έστω μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in D_f$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ορίζονται ως εξής:

1. **Αριστερό όριο:**
   Όταν το x τείνει στο x_0 με $x \in (a, x_0)$ τότε το όριο από αριστερά του x_0 συμβολίζεται: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

2. **Δεξί όριο:**
   Όταν το x τείνει στο x_0 με $x \in (x_0, \beta)$ τότε το όριο από δεξιά του x_0 συμβολίζεται: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Έστω μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in D_f$. Αν το όριο της f όταν $x \to x_0$ είναι L τότε από τον ορισμό του ορίου προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις:

i. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0$

ii. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ
Έστω μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in D_f$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν η συνάρτηση ορίζεται σε μια περιοχή του x_0 της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

i. Αν η f ορίζεται μόνο στο διάστημα (a, x_0) τότε: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
ii. Αν η f ορίζεται μόνο στο διάστημα (x_0, β) τότε: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ
Για τα όρια των βασικών συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

1. **Πολυωνυμικές**
Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει
$$\lim_{x \to x_0} P(x) = a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)$$

2. **Ρητές**
Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού και $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\beta_\mu \neq 0$ ένα πολυώνυμο $\mu-$οστού βαθμού. Θα ισχύει
$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0}{\beta_\nu x_0^\nu + \beta_{\mu-1}x_0^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x_0 + \beta_0} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

3. **Άρρητες**
Έστω $f(x) = \sqrt{A(x)}$ με $A(x) \geq 0$ μια άρρητη συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Το όριο της f όταν $x \to x_0$ θα είναι :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{A(x)} = \sqrt{A(x_0)}$$

4. **Τριγωνομετρικές**
Για τα όρια των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

   i. $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
   ii. $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
   iii. $\lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$
   iv. $\lim_{x \to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$

5. **Λογαριθμικές και εκθετικές**
Έστω $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x$ μια λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση αντίστοιχα με $0 < a \neq 1$ και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους. Θα ισχύει:
$$\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0 \text{ και } \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

6. **Ταυτοτική και σταθερές**
Για την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και τις σταθερές συναρτήσεις $f(x) = c$ όπου $c \in \mathbb{R}$ ισχύει αντίστοιχα ότι:
$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \text{ και } \lim_{x \to x_0} c = c$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ 1
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και x_0 ένα σημείο τέτοιο ώστε να ορίζεται η f σε μια περιοχή του. Το πρόσημο του ορίου της f στο x_0 ισούται με το πρόσημο των τιμών της κοντά στο x_0:

i. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του x_0.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ σε μια περιοχή του x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ 2
Έστω συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα σύνολα A, B αντίστοιχα και x_0 ένα σημείο τέτοιο ώστε να ορίζονται οι f, g σε μια περιοχή του στο σύνολο $\in A \cap B$. Θα ισχύει ότι:

i. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x) > g(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ σε μια περιοχή του x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ 3
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Ισχύει ότι:

i. Αν $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.

ii. Αν $f(x) < 0$ σε μια περιοχή του x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ 4
Έστω συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα σύνολα A, B αντίστοιχα και x_0 ένα σημείο τέτοιο ώστε να ορίζονται οι f, g σε μια περιοχή του στο σύνολο $\in A \cap B$. Θα ισχύει ότι:

i. Αν $f(x) > g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ii. Αν $f(x) < g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ
Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού D_f, D_g αντίστοιχα και $x_0 \in D_f \cap D_g$ ένα κοινό στοιχείο των δύο πεδίων ορισμού. Αν τα όρια των δύο συναρτήσεων στο x_0 υπάρχουν με $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε οι πράξεις μεταξύ των ορίων ακολουθούν τους παρακάτω κανόνες :

Όριο	**Κανόνας**
Αθροίσματος	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1 \pm l_2$
Πολλαπλάσιου	$\lim\limits_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \cdot l_1 \ , \ k \in \mathbb{R}$
Γινομένου	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
Πηλίκου	$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \ , \ l_2 \neq 0$
Απόλυτης τιμής	$\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x) \rvert = \left\lvert \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \right\rvert = \lvert l_1 \rvert$
Ρίζας	$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[\kappa]{l_1} \ , \ l_1 \geq 0$
Δύναμης	$\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu} = l_1^{\nu}$

ΔΕΝ ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{\ell}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x) \rvert = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\ell$ διότι δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει πάντα το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, h με πεδία ορισμού D_f, D_g, D_h αντίστοιχα και x_0 ένα σημείο τέτοιο ώστε να ορίζονται οι f, g, h σε μια περιοχή του στο σύνολο $\in D_f \cap D_g \cap D_h$. Αν ισχύουν οι σχέσεις

1. $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και
2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$$|\text{ημ}x| \leq |x|$$

Η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 : ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΟΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ
Τα παρακάτω αποτελούν βασικά τριγωνομετρικά όρια. Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x\to x_0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$$