Άσκηση 1

Ερώτημα Α

i . Η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αρχικά βγάζουμε κοινό παράαγοντα το $2x$ και έχουμε:

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x\left(2x^2 - 3x + 1\right)$$

Για το πολυώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

άρα

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

οπότε $x = 1$ ή $x = \frac{1}{2}$. Επομένως γράφεται $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$. Τελικά έχουμε

$$f(x) = 2x\left(2x^2 - 3x + 1\right) = 2x(x-1)(2x-1)$$

ii . Για να λύσουμε την εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε την f παραγοντοποιημένη

$$\begin{gathered} f(x) = 0 \Rightarrow \\ 2x(x-1)(2x-1) = 0 \\ 2x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } 2x - 1 = 0 \Rightarrow \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \end{gathered}$$

iii . Λύνοντας την ανίσωση $h(x) < 1$ έχουμε

$$\begin{gathered} h(x) < 1 \Rightarrow \\ 2x^2 - 3x - 9 < 1 \Rightarrow \\ 2x^2 - 3x - 10 < 0 \end{gathered}$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα και τις ρίζες του πολυωνύμου.

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 9 + 80 = 89$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{89}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4}$$

Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα του τριωνύμου ο οποίος θα μας δώσει τις λύσεις της ανίσωσης.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{89}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{89}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το σύνολο $\left(\frac{3-\sqrt{89}}{4}, \frac{3+\sqrt{89}}{4}\right)$.

Ερώτημα Β

Η εξίσωση είναι λογαριθμική και χρειάζεται τους εξής περιορισμούς. Πρέπει

- $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
- $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ και
- $2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$

Οι περιορισμοί συναληθεύουν όταν $x > 2$. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{gathered}\ln(x-2)+\ln(x-1)=\ln(2x+8) \Rightarrow\\ \ln(x-2)(x-1)=\ln(2x+8) \Rightarrow\\ (x-2)(x-1)=2x+8 \Rightarrow\\ x^2-2x-x+2=2x+8 \Rightarrow\\ x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=3\end{gathered}$$

Σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει $x > 2$ άρα η δεκτή λύση είναι η $x = 3$.

Άσκηση 2

Ερώτημα Α

i . Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB δίνεται από τον τύπο $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Είναι λοιπόν

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-7}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\begin{gathered}y - y_A = a(x - x_A) \Rightarrow\\ y - 7 = 1(x-4) \Rightarrow y = x+3\end{gathered}$$

ii . Αν a_1, a_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών τότε ισχύει

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1 =\Leftrightarrow 1 \cdot a_2 = -1 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

Έτσι η εξίσωση της θα είναι

$$\begin{gathered}y - y_A = a_2(x - x_A) \Rightarrow\\ y - 7 = -1(x-4) \Rightarrow\\ y - 7 = -x + 4 \Rightarrow\\ y = -x + 11\end{gathered}$$

Ερώτημα Β

Η εξίσωση της ευθείας ε_4 γράφεται στη μορφή

$$y = \frac{(a-3)x+13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{a-3}{4}x + \frac{13}{4}$$

άρα χει συντελεστή διεύθυνσης $a_4 = \dfrac{a-3}{4}$. Για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει

$$a_3 = a_4 \Leftrightarrow a+1 = \frac{a-3}{4} \Leftrightarrow 4a+4 = a-3 \Leftrightarrow 3a = -7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{3}$$

Για να είναι κάθετες οι ευθείες πρέπει

$$\begin{gathered}a_3 \cdot a_4 = -1 \Leftrightarrow (a+1)\cdot\frac{a-3}{4} = -1 \Leftrightarrow (a+1)(a-3) = -4 \Leftrightarrow\\ a^2 - 3a + a - 3 = -4 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1\end{gathered}$$

Άσκηση 3

Ερώτημα Α

i . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $g(x) = 0$. Οπότε

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{11}}{5} \text{ ή } x = \frac{1-\sqrt{11}}{5}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $A\left(\frac{1+\sqrt{11}}{5}, 0\right)$ και $B\left(\frac{1-\sqrt{11}}{5}, 0\right)$. Επίσης η γραφική παράστση τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $x = 0$ άρα

$$g(0) = 5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2 = -2$$

οπότε το σημείο τομή είναι το $\Gamma(0, -2)$.

ii .

Ερώτημα Β

i . Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

- $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ και
- $\sqrt{x-2} \neq 0 \Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

οπότε έχει πεδίο ορισμού το διάστημ $D_f = (2, +\infty)$. Η g αντίστοιχα ορίζεται όταν

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

άρα $D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Το κοινό πεδίο ορισμού προκύπτει από την τομή των δύο συνόλων δηλαδή

$$D = D_f \cap D_g = (2, +\infty)$$

ii . Η λύση της εξίσωσης $g(x) = 1$ θα αντικατασταθεί στην f. Έχουμε λοιπόν

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Οπότε για $x = 3$ είναι $f(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$. Ομοίως οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{3}$ θα αντικατστaθούν στην g. Είναι

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 9 \Leftrightarrow x = 11$$

Άρα για $x = 11$ είναι $g(11) = \dfrac{4}{11+1} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Άσκηση 4

Ερώτημα Α

i . Το σημείο τομής των δύο καμπυλών προκύπτει από τη λύση του παρακάτω συστήματος

$$\begin{cases} Y = 1.100 - 2.000r \\ Y = 800 + 4.000r \end{cases} \Rightarrow 1.100 - 2.000r = 800 + 4.000r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6.000r = 300 \Rightarrow r = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

Επίσης για $r = 0{,}05$: $Y = 1.100 - 2.000 \cdot 0{,}05 = 1.100 - 100 = 1000$. Έτσι το σημείο τομής είναι το $(Y, r) = (1000, 5\%)$

ii .

Ερώτημα Β

i . Η συνάρτηση του κέρδους $\Pi(Q)$ δίνεται από τον τύπο $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$. Είναι λοιπόν

$$\begin{aligned}\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) &= 50Q - 0{,}0005Q^2 - \left(2Q + 0{,}0025Q^2 + 101.250\right) = \\ &= 50Q - 0{,}0005Q^2 - 2Q - 0{,}0025Q^2 - 101.250 = -0{,}003Q^2 + 48Q - 101.250\end{aligned}$$

ii . Η παραγωγική δυναμικότητα της επιχείρησης είναι $Q = 9.500$ άρα οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $D = [0, 9.500]$. Για την εύρεση του νεκρού σημείου λύνουμε την εξίσωση $\Pi(Q) = 0$ οπότε είναι

$$\Pi(Q) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003Q^2 + 48Q - 101.250 = 0$$
$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 48^2 - 4 \cdot (-0{,}003) \cdot (-101.250) = 2.304 - 1.215 = 1.089$$

οπότε

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48 \pm \sqrt{1.089}}{2(-0{,}003)} = \frac{-48 \pm 33}{-0{,}006}$$

και τελικά προκύπτει $Q_1 = 2.500$ ή $Q_2 = 13.500$ το οποίο όμως ξεπερνά την παραγωγική δυνατότητα άρα το απορρίπτουμε. Έτσι το νεκρό σημείο είναι $Q = 2.500$.

iii . Για να έχουμε θετικό κέρδος πρέπει

$$\Pi(Q) > 0 \Leftrightarrow -0{,}003Q^2 + 48Q - 101.250 > 0$$

Έχοντας υπολογίσει τις ρίζες του τρυωνύμου στο προηγούμενο ερώτημα, προχωράμε στον πίνακα προσήμων:

Q	0		2.500		9.500		13.500
$-0{,}003Q^2 + 48Q - 101.250$		−	0	+			0

από τον οποίο προκύπτει ότι το κέρδος είναι θετικό όταν $Q \in (2.500, 9.500]$.