

Η έννοια του πολυωνύμου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Βασικές έννοιες

1. Για καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα να βρείτε τους όρους, τους συντελεστές, το σταθερό όρο και το βαθμό.

α. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

β. $Q(x) = x^2 + 5x - 2$

γ. $S(x) = -x^4 + x^3 - 5x + 8$

δ. $K(x) = x^2 - x^3 + 1$

ε. $M(x) = \frac{x^3}{4} - \sqrt{2}x^2 + \frac{3x}{5}$

2. Βρείτε το βαθμό σε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα.

α. $P(x) = 3x - x^3 + 5 + x^2$

β. $Q(x) = 4x^2 + 0x^4 - x^3 + 7$

γ. $R(x) = x^4 - 2x^2 + 4x^3 - x^4 + 7 - 5x$

δ. $S(x) = 0x^2 + 0x + 3$

ε. $K(x) = -5$

στ. $G(x) = 0$

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda)x^3 - (\lambda - 3)x^2 + (9 - \lambda^2)x + 2\lambda - 6$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το βαθμό του $P(x)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

4. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (a^2 - a)x^3 + (a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - 1)x + |a| - 1$$

Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$:

α. να είναι 3^{ου} βαθμού.

β. να είναι 2^{ου} βαθμού.

γ. να είναι 1^{ου} βαθμού.

δ. να είναι μηδενικού βαθμού.

ε. να μην έχει βαθμό.

5. Δίνεται το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού

$$P(x) = (a - \beta - 2)x^3 + (2a + 3\beta)x^2 + 2ax - 5\beta$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 2$.

β. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$$Q(x) = P^2(x) - xP(x)$$

■ Ισότητα πολυωνύμων

6. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = (|a| - 1)x^3 + (a^2 - a)x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 1$$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

7. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα πολυώνυμα

$$A(x) = (\lambda + 1)x^3 + (\lambda^2 + 2)x^2 + 2\lambda x - 3 \text{ και}$$

$$B(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + 3\lambda x^2 + 4x - 1 - \lambda$$

να είναι ίσα.

8. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου a ώστε τα παρακάτω πολυώνυμα να είναι ίσα.

$$P(x) = (a^2 - 3a)x^3 + x^2 + a \text{ και}$$

$$Q(x) = -2x^3 + a^2x^2 + (a^3 - 1)x + 1$$

■ Τιμές - Ρίζες πολυωνύμων

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $P(-2)$, $P(1)$, $P(0)$ και $P(3)$.

β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $3P^2(2) - 4P(-1) + P(0)$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς ± 1 , ± 2 , ± 3 είναι ρίζες του $P(x)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 - (2a - 1)x - 3, \text{ με } a \in \mathbb{R},$$

για το οποίο ισχύει $P(2) = 7$.

α. Να δείξετε ότι $a = 3$.

β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του $P(x)$.

γ. Να υπολογίσετε τις τιμές $P(3)$, $P(-1)$, $P(0)$ και $P(-4)$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (3 - a)x^2 + a^2x - 4$$

με $a \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

25. Θέμα 2 - 20640

Δίνεται το πολυώνυμο

$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$$

- α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- β. Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_1(x) = P(x) + Q(x)$$

δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

έχει ρίζα τον αριθμό 1.

26. Θέμα 2 - 15113

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}$$

- α. Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

■ Ερωτήσεις θεωρίας

27.