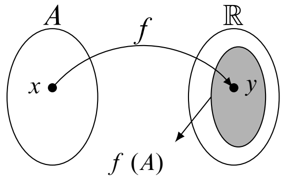
1. Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι μια διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται **τιμή** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.



2. Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου
$$y = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in A$$
δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με C_f είναι
$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

3. Δύο συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A ονομάζονται ίσες δηλαδή $f = g$ όταν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

4. Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.
   (α΄) Η συνάρτηση $f + g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.
   (β΄) Η συνάρτηση $f - g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.
   (γ΄) Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.
   (δ΄) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

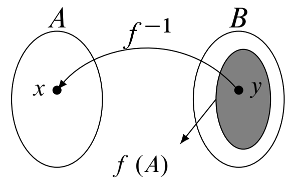
   Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

5. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και έστω $x_0 \in A$. Η f θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση x_0, το $f(x_0)$ όταν
$$f(x) \leq f(x_0) \;\text{ για κάθε }\; x \in A$$
Το x_0 λέγεται **θέση** του μέγιστου.

6. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και έστω $x_0 \in A$. Η f θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_0, το $f(x_0)$ όταν
$$f(x) \geq f(x_0) \;\text{ για κάθε }\; x \in A$$
Το x_0 λέγεται **θέση** του ελάχιστου.

7. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1 - 1$ εάν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της θα ισχύει
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
Δηλαδή κάθε στοιχείο $x \in A$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της.

8. Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f.



- Συμβολίζεται με f^{-1} και είναι $f^{-1} : f(A) \to A$.
- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f, ενώ το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.
- Ισχύει ότι $x = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f(A)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι $1 - 1$ άρα και αντιστρέψιμη. Θα ισχύει γι αυτήν ότι

$$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $M(a, \beta)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε

$$f(a) = \beta \Rightarrow a = f^{-1}(\beta)$$

κάτι που σημαίνει ότι το σημείο $M'(\beta, a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία όμως M και M' είναι συμμετρικά ως προς της ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x;\hat{O}y'$. Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.