

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

21 Αυγούστου 2015

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1. Θεωρία

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχή σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) του πεδίου ορισμού της;
- Να διατυπώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συνέχεια σε σημείο

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} & , \text{αν } x < 1 \\ \ln x e^x + \frac{1}{3} \eta \mu \frac{\pi x}{6} & , \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

2. Εύρεση παραμέτρου

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + (1 - a)\sin \pi x - 2 & , \text{αν } x < 2 \\ \sqrt{ax - 1} + e^{x-2} & , \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3. Εύρεση παραμέτρου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (1 - a)x^2 - \beta \ln ex^2 & , x < 1 \\ 3\sin(2\pi x) - |x - 3| + 1 & , 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{2x + 5} - 3}{|x - 2|} + ax - \beta & , x > 2 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

4. Εύρεση τύπου

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$x^2 f(x) = |x^2 - 3x| - 2x + f(x)$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

5. Αποδεικτική

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$x^2 - x \eta \mu x + 1 \leq x^2 f(x) + 1 \leq \sin^2 x - 2x \sin x + 2$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.