Μεταφέροντας όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος, αυτή θα πάρει τη μορφή:

$$x^2 - \text{συν}(x\pi) - e^x = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - \text{συν}(x\pi) - e^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γι αυτήν θα έχουμε ότι

i. είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-2, 0]$ και

ii.
   - $f(-2) = (-2)^2 - \text{συν}(-2\pi) - e^{-2} = 4 - 1 - e^{-2} = 3 - \frac{1}{e^2} > 0$
   - $f(0) = 0^2 - \text{συν}0 - e^0 = -1 - 1 = -2 < 0$

   οπότε παίρνουμε $f(-2) \cdot f(0) = -2\left(3 - \frac{1}{e^2}\right) < 0$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Βολζανο η συνάρτηση f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-2, 0)$, ή ισοδύναμα η αρχική εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο ανοικτό διάστημα $(-2, 0)$. Θα σχηματίσουμε από τη ζητούμενη ισότητα την αντίστοιχη εξίσωση θέτοντας όπου x_0 τη μεταβλητή x. Προκύπτει λοιπόν η εξίσωση

$$e^x = \text{ημ}(\pi x) - 2x \Rightarrow e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - \text{ημ}(\pi x) + 2x$. Θα ισχύει ότι

i. η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και

ii.
   - $f(-1) = e^{-1} - \text{ημ}(-\pi) + 2(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$
   - $f(0) = e^0 - \text{ημ}0 + 2 \cdot 0 = 1 > 0$

   οπότε προκύπτει $f(-1) \cdot f(0) = \frac{1}{e} - 2 < 0$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Βολζανο η f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$, ή ισοδύναμα η εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο $(-1, 0)$ άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} = \text{ημ}(\pi x_0) - 2x_0$$

Για την αρχική εξίσωση απαιτούμε να ισχύει $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Όμως για κάθε $x \in (0, 1)$ η αρχική μετατρέπεται στην ισοδύναμη εξίσωση:

$$e^x = (x - 1)\left(x^2 - 3\right) \tag{1}$$

Οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες στο $(0, 1)$ γιατί στο διάστημα αυτό δεν ανήκει το $x = 1$ του περιορισμού.

Στη συνέχεια, η τελευταία θα γραφτεί:

$$e^x - (x - 1)\left(x^2 - 3\right) = 0$$

Ορίζουμε έτσι τη συνάρτηση $f(x) = e^x - (x - 1)\left(x^2 - 3\right)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Το θεώρημα Βολζανο εφαρμόζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και έτσι έχουμε ότι

i. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και επιπλέον

ii.
   - $f(0) = e^0 - (0 - 1)\left(0^2 - 3\right) = -2 < 0$
   - $f(1) = e^1 - (1 - 1)\left(1^2 - 3\right) = e > 0$

   οπότε παίρνουμε $f(0) \cdot f(1) = -2e < 0$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Βολζανο η εξίσωση (;;) και κατά συνέπεια η αρχική εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση x_0 στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

Η άσκηση Alg-Anis1ou-AnisApT-SectEx3 δεν είναι λυμένη

Η άσκηση Alg-Anis1ou-AnisApT-SectEx4 δεν είναι λυμένη

Η άσκηση Alg-Anis2ou-EpilAnis-SectEx4 δεν είναι λυμένη