Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ
20 Οκτωβρίου 2015

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ακολουθίες - Πρόοδοι

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο, προσθέτοντας κάθε φορά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ισχύει δηλαδή

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$$

Ο αριθμός $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και είναι σταθερός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Αριθμητικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{a+\gamma}{2}$$

Γενικότερα, αριθμητικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ μιας αριθμητικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{\nu}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ
Αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β, ονομάζονται ν σε πλήθος πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ όταν αυτοί μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των a και β ώστε οι πραγματικοί αριθμοί

$$a, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$$

να αποτελούν, $\nu + 2$ σε πλήθος, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega \neq 0$, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τους παρακάτω τύπους :

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) \quad , \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu - 1)\omega\right]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικά έχουμε οτι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί αριθμητική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$2a_\nu = a_{\nu+1} + a_{\nu-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
Εαν οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι αριθμητικοί ενδιάμεσοι δύο αριθμών a και β τότε η διαφορά της αριθμητικής προόδου στην οποία ανήκουν θα είναι

$$\omega = \frac{\beta - a}{\nu + 1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τους όρους της :

i. Εαν $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ είναι ν διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ο $\mu-$οστός όρος από το τέλος βρίσκεται στη θέση $\nu - \mu + 1$ και δίνεται από τον τύπο

$$a_{\nu-\mu+1} = a_\nu - (\mu - 1)\omega$$

ii. Το άθροισμα S των μ τελευταίων όρων μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) είναι

$$S = S_\nu - S_{\nu-\mu}$$