ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Συστήματα

1.1 Γραμμικά Συστήματα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών, ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της μορφής

$$ax + \beta y = \gamma$$

- Οι μεταβλητές της εξίσωσης είναι οι x, y.
- Οι πραγματικοί αριθμοί a, β λέγονται **συντελεστές** των μεταβλητών.
- Ο πραγματικός αριθμός γ ονομάζεται **σταθερός όρος** της εξίσωσης.

Ορισμός 2 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$ax + \beta y = \gamma$$

ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση.

Ορισμός 3 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2×2
Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους ονομάζεται ο συνδυασμός - σύζευξη δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι της μορφής :

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \tag{1.1}$$

- Οι αριθμοί $a, a', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** του συστήματος ενώ οι $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ λέγονται **σταθεροί όροι**.
- Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος.
- Τα συστήματα τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.
- Ένα σύστημα που έχει λύση λέγεται **συμβιβαστό**. Εάν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο** ενώ αν έχει άπειρες λύσεις **αόριστο**.

Ορισμός 4 : ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Επαλήθευση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε εάν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση του, αντικαθιστώντας τους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

Ορισμός 5 : ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2
Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 της μορφής (1.1). Ορίζουσα των συντελεστών ονομάζεται ο αριθμός $a\beta' - a'\beta$ και συμβολίζεται με D. Μπορεί να γραφτεί στη μορφή πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω:

$$D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}$$

Επίσης D_x, D_y είναι οι ορίζουσες των μεταβλητών που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στην ορίζουσα D τη στήλη των συντελεστών των μεταβλητών x, y αντίστοιχα με τους σταθερούς όρους γ, γ'. Θα είναι:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} \quad , \quad D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$$

Ορισμός 6 : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3 × 3
Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους ονομάζεται ένας συνδυασμός από τρεις γραμμικές εξισώσεις της μορφής

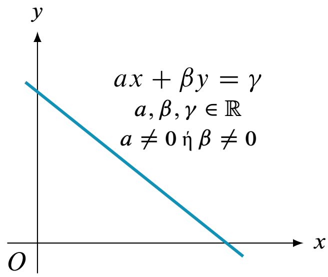
$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = \delta_1 \\ a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = \delta_2 \\ a_3x + \beta_3y + \gamma_3z = \delta_3 \end{cases}$$

με $a_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Κάθε διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x_0, y_0, z_0) η οποία επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις ονομάζεται **λύση** του γραμμικού συστήματος 3×3.

Ορισμός 7 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Παραμετρικό ονομάζεται το γραμμικό σύστημα του οποίου οι συντελεστές ή και οι σταθεροί όροι δίνονται με τη βοήθεια μιας ή περισσότερων παραμέτρων. Η διαδικασία επίλυσης ενός παραμετρικού συστήματος ονομάζεται **διερεύνηση**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
Δίνεται η γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές της μορφής $ax + \beta y = \gamma$. Για τις διάφορες τιμές των συντελεστών a, β καθώς και του σταθερού όρου γ θα μελετήσουμε τη γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης.



i. Αν $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει πλάγια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{\beta}$.
ii. Αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε παίρνει τη μορφή $y = \lambda$ και παριστάνει οριζόντια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$.
iii. Αν $a \neq 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται στη μορφή $x = \lambda$ και παριστάνει κατακόρυφη ευθεία. Οι ευθείες αυτές δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης.
iv. Τέλος αν $a = 0$ και $\beta = 0$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
   α. Αν $\gamma = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $0x + 0y = 0$, είναι αόριστη και αντιστοιχεί σε όλο το καρτεσιανό επίπεδο.
   β. Αν $\gamma \neq 0$ τότε η εξίσωση είναι $0x + 0y = \gamma$, είναι αδύνατη και δεν αντιστοιχεί σε κανένα σημείο.

Θεώρημα 1.2 : ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ
Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει σε μια ευθεία με εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.

Θεώρημα 1.3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα συντελεστών D.

i. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός δηλαδή $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οι τιμές των μεταβλητών δίνονται από τις σχέσεις

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

   ενώ η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.
ii. Αν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι μηδενική δηλαδή $D = 0$ τότε το σύστημα είναι είτε αόριστο είτε αδύνατο. Συγκεκριμένα
   α. αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
   β. αν $D_x = 0$ και $D_y = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέθοδος 1.1 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΕΥΘΕΙΑ - ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ

Δεδομένης μιας γραμμικής εξίσωσης μπορούμε να εξετάσουμε ποια σημεία ανήκουν στην ευθεία που παριστάνει καθώς και τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με του άξονες.

- **Σημεία ευθείας**
  Για να εξετάσουμε αν κάποιο σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία που ορίζει μια γραμμική εξίσωση, αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του A στη θέση των μεταβλητών της εξίσωσης και εξετάζουμε αν οι αριθμοί αυτοί την επαληθεύουν. Αν ναι τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία.
- **Σημεία τομής με τους άξονες**
  Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες τότε θέτουμε όπου $x = 0$ ή $y = 0$ στη γραμμική εξίσωση για τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

Αν αναζητούμε κοινά σημεία δύο ευθειών τότε λύνουμε το γραμμικό σύστημα που ορίζουν οι εξισώσεις των ευθειών. Την περίπτωση αυτή την εξετάζουμε στη **Μέθοδο 1.5**.

Παράδειγμα 1.1 : ΣΗΜΕΙΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

Να εξεταστεί αν τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(-1, 4)$ ανήκουν στην ευθεία $2x + y = 7$.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε τς συντεταγμένες του σημείου $A(2, 3)$ στην εξίσωση και έχουμε αναλυτικά :

$$\text{Για } x = 2 \text{ και } y = 3 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3 = 7 \Rightarrow 4 + 3 = 7 \Rightarrow 7 = 7$$

Η εξίσωση επαληθεύεται οπότε το σημείο A ανήκει στην ευθεία. Ομοίως για το σημείο B θα έχουμε :

$$\text{Για } x = -1 \text{ και } y = 4 \Rightarrow 2 \cdot (-1) + 4 = 7 \Rightarrow -2 + 4 = 7 \Rightarrow 2 = 7$$

Η εξίσωση δεν επαληθεύεται οπότε το σημείο B δεν ανήκει στην ευθεία.

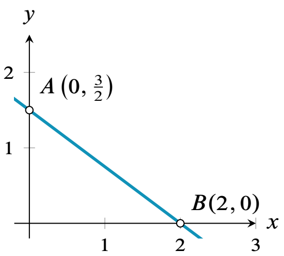
Παράδειγμα 1.2 : ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας $3x + 4y = 6$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα και θα έχουμε :

- Για το σημείο του άξονα $y'y$ έχουμε $x = 0$ άρα $3 \cdot 0 + 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$. Το σημείο θα είναι $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$.
- Για το σημείο του άξονα $x'x$ έχουμε $y = 0$ άρα $3x + 4 \cdot 0 = 6 \Rightarrow x = 2$. Το σημείο θα είναι $B(2, 0)$.



Μέθοδος 1.2 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για την επίλυση ενός συστήματος με δύο μεταβλητές έστω x, y με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1° Βήμα : **Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε μια απ' τις δύο εξισώσεις ώστε να λύσουμε ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή. Θα προκύψει μια σχέση (1) που θα μας δίνει την μεταβλητή αυτή ως συνάρτηση της άλλης.

2° Βήμα : **Αντικατάσταση**
Τη μεταβλητή αυτή την αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Λύνοντας την εξίσωση υπολογίζουμε τον άγνωστο αυτό.

3° Βήμα : **Υπολογισμός 2ου αγνώστου**
Την τιμή που θα βρούμε για τη μια μεταβλητή λύνοντας την εξίσωση, την αντικαθιστούμε στη σχέση (1) ώστε να βρεθεί και η άλλη μεταβλητή του συστήματος.

4° Βήμα : **Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 1.3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε οτι η 2η εξίσωση είναι εύκολο να λυθεί ως προς x οπότε έχουμε

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 4y - 3 \tag{1.2}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της σχέσης (1) στην 1η εξίσωση προκύπτει :

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 5 \Rightarrow 2(4y - 3) + 3y = 5 &\Rightarrow 8y - 6 + 3y = 5 \\ &\Rightarrow 8y + 3y = 5 + 6 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Τη λύση της εξίσωσης (2) την αντικαθιστούμε στην (1) για να υπολογίσουμε τον άγνωστο x

$$x = 4y - 3 = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι η $(x, y) = (1, 1)$.

Μέθοδος 1.3 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για την επίλυση ενός συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

***1ο Βήμα :* Επιλογή μεταβλητής**
Επιλέγουμε ποια από τις δύο μεταβλητές θα απαλείψουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αυτή.

***2ο Βήμα :* Πολλαπλασιασμός εξισώσεων**
Τοποθετούμε δίπλα από κάθε εξίσωση τους συντελεστές την μεταβλητής που επιλέξαμε "χιαστί" αλλάζοντας το πρόσημο του ενός από τους δύο. Πολλαπλασιάζουμε την κάθε εξίσωση με τον αριθμό που προκύπτει.

***3ο Βήμα :* Πρόσθεση κατά μέλη**
Προσθέτουμε κατά μέλη τις νέες εξισώσεις οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και υπολογίζουμε λύνοντας την.

***4ο Βήμα :* Εύρεση 2ης μεταβλητής**
Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα σε οποιαδήποτε εξίσωση του αρχικού συστήματος ώστε να υπολογίσουμε και τη δεύτερη μεταβλητή.

***5ο Βήμα :* Λύση συστήματος**
Όταν βρεθούν οι τιμές x_0, y_0 και των δύο αγνώστων, σχηματίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x_0, y_0)$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 1.4 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε με τη μέθοδο αυτή να απαλοίψουμε τη μεταβλητή y του συστήματος. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Οπότε προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \\ \hline 11x = 22 \end{array} \Rightarrow x = 2 \tag{1.4}$$

Την τιμή αυτή της μεταβλητής x από τη σχέση (1.4) την αντικαθιστούμε σε οποιαδήποτε εξίσωση και υπολογίζουμε τη δεύτερη μεταβλητή y.

$$\begin{aligned} 3x + 2y = 12 &\Rightarrow 3 \cdot 2 + 2y = 12 \Rightarrow 6 + 2y = 12 \\ &\Rightarrow 2y = 12 - 6 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε τη λύση του συστήματος η οποία είναι $(x, y) = (2, 3)$.

Μέθοδος 1.4 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους μπορούμε πλέον να το λύσουμε με τη χρήση οριζουσών ως εξής.

***1ο Βήμα :* Υπολογισμός οριζουσών**
Υπολογίζουμε την ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος καθώς και τις ορίζουσες των μεταβλητών D_x και D_y.

***2ο Βήμα :* Διερεύνηση - Εύρεση λύσεων**
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν $D \neq 0$ τότε υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών σύμφωνα με το **Θεώρημα 3** οπότε η μοναδική λύση θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.
- Αν $D = 0$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
  - Αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
  - Αν $D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο.

Παράδειγμα 1.5 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 4x - 3y = -5 \end{cases}$$

με τη μέθοδο των οριζουσών.

ΛΥΣΗ

Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) = -3 + 20 = 17$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι μη μηδενική οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οι ορίζουσες των μεταβλητών θα είναι

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-5) = -34 \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 4 \cdot 3 = -17$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι τιμές των μεταβλητών του συστήματος θα είναι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-34}{17} = -2 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{17} = -1$$

οι οποίες μας δίνουν τη λύση του συστήματος $(x, y) = (-2, -1)$.

Παράδειγμα 1.6 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών

$$\begin{cases} 4x - 8y = 1 \\ 6x - 12y = 4 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-12) - 6 \cdot (-8) = -48 + 48 = 0$$

Η μηδενική ορίζουσα μας δείχνει ότι το σύστημα είναι είτε αόριστο είτε αδύνατο. Για να προσδιορίσουμε το είδος του υπολογίζουμε τις ορίζουσες D_x, D_y.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12) - 4 \cdot (-8) = -12 + 32 = 20 \neq 0$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 16 - 6 = 10 \neq 0$$

Οι ορίζουσες των μεταβλητών είναι μη μηδενικές οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 1.7 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ
Η ορίζουσα του συστήματος θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$$

Θα πρέπει κι εδώ να προσδιορίσουμε αν το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Για να προσδιορίσουμε το είδος του υπολογίζουμε τις ορίζουσες D_x, D_y.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 10 = -10 + 10 = 0$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 5 \cdot 6 = 30 - 30 = 0$$

Οι ορίζουσες των μεταβλητών είναι μηδενικές οπότε το σύστημα είναι αόριστο. Για να βρούμε τη μορφή όλων των λύσεων τις εκφράζουμε με τη βοήθεια μιας παραμέτρου ως εξής : Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y :

$$3x - y = 5 \Rightarrow -y = 5 - 3x \Rightarrow y = 3x - 5 \tag{1.6}$$

Θέτουμε στη δεύτερη μεταβλητή $x = \lambda$ και παίρνουμε από τη σχέση (1.6) $y = 3\lambda - 5$. Επομένως οι άπειρες λύσεις δίνονται παραμετρικά από τη σχέση

$$(x, y) = (\lambda, 3\lambda - 5)$$

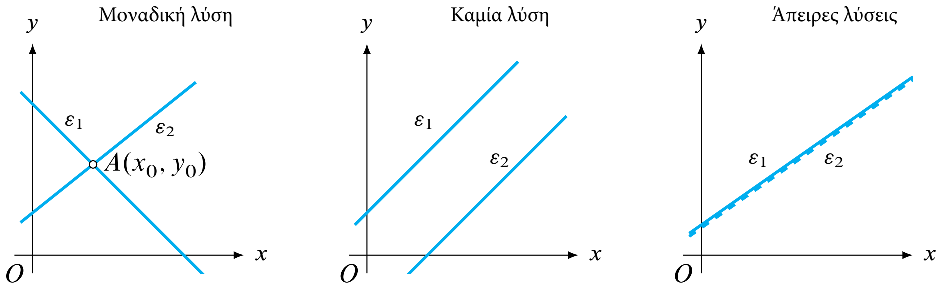
Μέθοδος 1.5 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να λυθεί και γεωμετρικά με τη βοήθεια των ευθειών των εξισώσεων.

***1ο Βήμα :* Χάραξη των ευθειών**
Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες του συστήματος βρίσκοντας για καθεμιά δύο σημεία της με τη βοήθεια της εξίσωσης της.

***2ο Βήμα :* Σχετική θέση ευθειών**
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τη σχετική θέση των δύο ευθειών

- Αν οι ευθείες **τέμνονται** σε ένα σημείο τότε οι συντεταγμένες του κοινού αυτού σημείου είναι η ζητούμενη λύση του συστήματος. Τις συντεταγμένες αυτές τις βρίσκουμε σχεδιάζοντας από το σημείο, κάθετες γραμμές προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Αν οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε **δεν υπάρχουν κοινά σημεία** μεταξύ τους και κατά συνέπεια το σύστημα δεν έχει λύση οπότε είναι **αδύνατο**.
- Τέλος αν οι ευθείες **ταυτίζονται** τότε έχουν μεταξύ τους άπειρα κοινά σημεία οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις δηλαδή είναι **αόριστο**.



Παράδειγμα 1.8 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα

i. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ **iii.** $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$

Για κάθε μια από τις εξισώσεις των παραπάνω συστημάτων θα βρούμε δύο ζεύγη αριθμών που τις επαληθεύουν τα οποία θα παριστάνουν σημεία στο επίπεδο έτσι ώστε να σχεδιαστούν οι ευθείες.

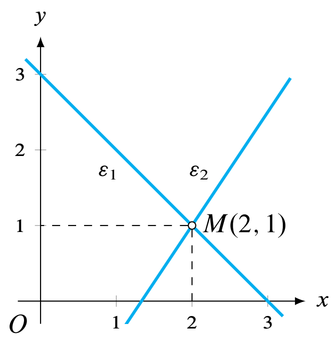
i. Στην πρώτη εξίσωση επιλέγουμε $x = 0$ οπότε έχουμε

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 2y = 4 \Rightarrow y = -2$$

Αποκτάμε έτσι το σημείο $A(0, -2)$. Ένα δεύτερο σημείο θα βρεθεί παίρνοντας π.χ. $y = 0$ οπότε με πράξεις προκύπτει

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3 - 2 \cdot 0 = 4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

Προκύπτει έτσι το σημείο $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε δύο σημεία και της $2^{ης}$ ευθείας. Έχουμε από τη $2^{η}$ εξίσωση για $y = 0$



$$x + y = 3 \Rightarrow x + 0 = 3 \Rightarrow x = 3$$

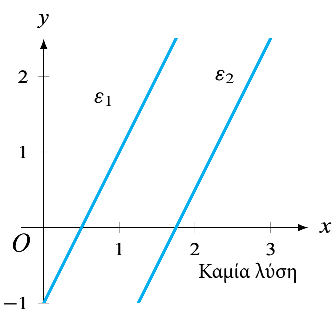
και παίρνουμε έτσι το σημείο $\Gamma(3, 0)$. Επίσης για $x = 0$

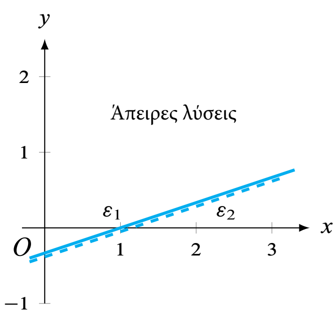
$$x + y = 3 \Rightarrow 0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$$

άρα το δεύτερο σημείο της θα είναι το $\Delta(0, 3)$. Σχεδιάζοντας τις δύο ευθείες προκύπτει το διπλανό σχήμα. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε οτι οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινο σημείο M. Από το σημείο αυτό αν σχεδιάσουμε κάθετες γραμμές πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου οι οποίες είναι $(x, y) = (2, 1)$. Οι συντεταγμένες αυτές είναι η λύση του συστήματος.

ii. Με παρόμοιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα δύο σημεία για κάθε ευθεία είναι τα $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(2, -1)$, $\Delta(2{,}5, 0)$ αντίστοιχα. Σχεδιάζοντας τις δύο ευθείες στο σύστημα συντεταγμένων παρατηρούμε ότι είναι παράλληλες άρα δεν έχουν κοινά σημεία οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Σχεδιάζοντας τις ευθείες και του τρίτου συστήματος με τον τρόπο που είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε ότι ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι έχουν άπειρα κοινά σημεία και κατά συνέπεια το σύστημα είναι αόριστο.





Μέθοδος 1.6 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Αν μας ζητείται να λύσουμε ένα σύστημα του οποίου οι εξισώσεις δεν είναι στην απλή γραμμική μορφή όπως φαίνεται στον **Ορισμό 3**, τότε

***1ο Βήμα :* Πράξεις**
Εκτελούμε πράξεις και στα δύο μέλη κάθε εξίσωσης και διαχωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους, ώστε να τις φέρουμε σε γραμμική μορφή.

***2ο Βήμα :* Λύση γραμμικού συστήματος**
Λύνουμε το γραμμικό πλέον σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο μας συμφέρει, επιλέγοντας μια από τις **Μεθόδους 1,2,3** και **4**.

Παράδειγμα 1.9 : ΣΥΝΘΕΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{1-y}{2}=2 \\ \dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{y}{3}=-\dfrac{2}{15} \end{array}\right.$$

ΛΥΣΗ

Η μορφή στην οποία βρίσκεται κάθε εξίσωση του συστήματος δεν είναι η απλή γραμμική. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί ακόμα κάποια από τις μεθόδους επίλυσης. Κάνοντας πράξεις θα απλοποιήσουμε τη μορφή του συστήματος.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{1-y}{2}=2 \\ \dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{y}{3}=-\dfrac{2}{15} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6\dfrac{x+2}{3}+6\dfrac{1-y}{2}=2\cdot 6 \\ 15\dfrac{2x-1}{5}+15\dfrac{y}{3}=-15\dfrac{2}{15} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x+2)+3(1-y)=12 \\ 3(2x-1)+5y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+4+3-3y=12 \\ 6x-3+5y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ 6x+5y=1 \end{array}\right.$$

Το τελευταίο σύστημα έχει τη ζητούμενη μορφή οπότε μπορούμε να το λύσουμε με μια από τις παραπάνω μεθόδους. Με τη μέθοδο των οριζουσών έχουμε :

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=28\ ,\ D_x=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=28\ ,\ D_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-28$$

Οπότε οι τιμές των δύο μεταβλητών είναι $x=\frac{D_x}{D}=\frac{28}{28}=1$ και $y=\frac{D_y}{D}=\frac{-28}{28}=-1$ που μας δίνουν τη λύση $(x,y)=(1,-1)$.

Μέθοδος 1.7 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 3×3

Για να λυθεί ένα 3×3 γραμμικό σύστημα με μεταβλητές έστω x, y, z, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ώστε να μεταβούμε σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα.

***1º Βήμα :* Επιλογή εξίσωσης**
Επιλέγουμε μια από τις τρεις εξισώσεις για να λύσουμε ως προς οποιονδήποτε άγνωστο.

***2º Βήμα :* Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή αυτή στις υπόλοιπες δύο εξισώσεις του συστήματος με αποτέλεσμα να μετατραπούν σε γραμμικές εξισώσεις με δύο άγνωστους.

***3º Βήμα :* Επίλυση συστήματος 2 x 2**
Απλοποιούμε τις δύο νέες εξισώσεις ώστε να τις φέρουμε στην απλή γραμμική μορφή και λύνουμε το 2×2 σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο.

***4º Βήμα :* Εύρεση τρίτου αγνώστου**
Όταν βρεθούν οι τιμές των δύο μεταβλητών του 2×2 συστήματος τις αντικαθιστούμε στη σχέση που προέκυψε στο **1º Βήμα** και υπολογίζουμε και τον τρίτο άγνωστο.

***5º Βήμα :* Λύση συστήματος**
Σχηματίζουμε τη λύση του αρχικού συστήματος η οποία θα είναι μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών της μορφής $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$.

Παράδειγμα 1.10 : ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 3×3

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \mathbf{2x - y + 3z = 8} \\ \mathbf{3x + 4y - z = 1} \\ \mathbf{x + y - 4z = -3} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε την 3η εξίσωση προκειμένου να λύσουμε ως προς τη μεταβλητή x οπότε θα έχουμε

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x + 4y - z = 1 \\ x + y - 4z = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 4z - y - 3 \tag{1.7}$$

Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x από τη σχέση (8) στις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος προκύπτει

$$\begin{cases} 2(4z - y - 3) - y + 3z = 8 \\ 3(4z - y - 3) + 4y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8z - 2y - 6 - y + 3z = 8 \\ 12z - 3y - 9 + 4y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y + 11z = 14 \\ y + 11z = 10 \end{cases}$$

Η μορφή του συστήματος μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα για να φτάσουμε γρήγορα στη λύση. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -3y + 11z = 14 \\ \quad y + 11z = 10 \end{cases} \\ \hline -4y = 4 \end{array} \Rightarrow y = -1 \tag{1.8}$$

Από την πρώτη εξίσωση και τη σχέση (9) υπολογίζουμε τον άγνωστο z

$$-3y + 11z = 14 \Rightarrow -3\cdot(-1) + 11z = 14 \Rightarrow 3 + 11z = 14 \Rightarrow 11z = 11 \Rightarrow z = 1 \tag{1.9}$$

Τις τιμές των μεταβλητών y, z από τις σχέσεις (9) και (10) τις αντικαθιστούμε στην ισότητα (8) και υπολογίζουμε τη μεταβλητή x.

$$x = 4z - y - 3 = 4\cdot 1 - (-1) - 3 = 4 + 1 - 3 = 2$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Μέθοδος 1.8 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Συχνά καλούμαστε να λύσουμε προβλήματα τα οποία μας ζητούν την εύρεση δύο αγνώστων αριθμών, οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ τους. Τότε χρειάζεται η κατασκευή και επίλυση ενός συστήματος ώστε να βρεθούν συγχρόνως και οι δύο άγνωστοι. Για να γίνει αυτό

***1ο Βήμα :* Συμβολισμός αγνώστων**
Αφού εντοπίσουμε τους ζητούμενους άγνωστους αριθμούς του προβλήματος, τους συμβολίζουμε χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές.

***2ο Βήμα :* Κατασκευή συστήματος**
Με τη βοήθεια των δεδομένων του προβλήματος, αναγνωρίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των δύο αγνώστων και κατασκευάζουμε τις εξισώσεις.

***3ο Βήμα :* Επίλυση συστήματος**
Με τις εξισώσεις αυτές σχηματίζουμε το γραμμικό σύστημα το οποίο και λύνουμε.

***4ο Βήμα :* Λύση συστήματος - Εξέταση περιορισμών**
Αφού βρεθεί η λύση του συστήματος, επαληθεύουμε τη λύση αυτή εξετάζοντας τυχόν περιορισμούς του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.11 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θέλουμε να μοιράσουμε 210 βιβλία σε 40 πακέτα των 4 και 6 βιβλίων. Πόσα μικρά πακέτα των 4 βιβλίων και πόσα μεγάλα πακέτα των 6 θα χρειαστούμε;

ΛΥΣΗ

Από την εκφώνηση του προβλήματος παρατηρούμε ότι αυτό που ζητάει το πρόβλημα είναι ο αριθμός των μικρών πακέτων, δηλαδή των πακέτων με τα 4 βιβλία, και ο αριθμός των μεγάλων πακέτων, αυτών με τα 6 βιβλία. Έτσι θα πρέπει να κατασκευάσουμε 2 εξισώσεις με 2 άγνωστους αριθμούς και συνδυάζοντας τες να βρούμε μοναδική λύση γι αυτούς. Συμβολίζουμε τους άγνωστους αριθμούς με μεταβλητές :

$$\begin{aligned} x &: \text{ Το πλήθος των μικρών πακέτων με τα 4 βιβλία} \\ y &: \text{ Το πλήθος των μεγάλων πακέτων με τα 6 βιβλία} \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε τις 2 εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος.

1ο στοιχείο
Όλα τα πακέτα μαζί θα πρέπει να είναι 40. Άρα η πρόταση αυτή θα γραφτεί συμβολικά

$$x + y = 40 \tag{1.10}$$

2ο στοιχείο
Όλα τα βιβλία είναι 210. Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε :

- Ένα μικρό πακέτο έχει 4 βιβλία οπότε x μικρά πακέτα θα έχουν $4 \cdot x$ βιβλία.
- Ένα μεγάλο πακέτο έχει 6 βιβλία οπότε x μικρά πακέτα θα έχουν $6 \cdot y$ βιβλία.

Επομένως η ζητούμενη ισότητα θα είναι

$$4x + 6y = 210 \tag{1.11}$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις εξισώσεις (1.10) και (1.11) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 4x + 6y = 210 \\ \;\; x + \;\; y = 40 \end{cases} \tag{1.12}$$

Λύνοντας το σύστημα (1.12) θα φτάσουμε στο ζητούμενο. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς x

$$\begin{cases} 4x + 6y = 210 \\ \;\; x + \;\; y = 40 \end{cases} \Rightarrow x = 40 - y \tag{1.13}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην πρώτη έχουμε

$$4x + 6y = 210 \Rightarrow 4(40 - y) + 6y = 210 \Rightarrow 160 - 4y + 6y = 210 \Rightarrow 2y = 50 \Rightarrow y = 25$$

Έτσι, ο αριθμός των μεγάλων πακέτων είναι 25.Θέτοντας την τιμή αυτή στη σχέση (1.13) ο αριθμός των μικρών πακέτων θα είναι

$$x = 40 - y = 40 - 25 = 15$$

Έχουμε λοιπόν $(x, y) = (15, 25)$ άρα 15 μικρά και 25 μεγάλα πακέτα.

Μέθοδος 1.9 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση-διερεύνηση ενός παραμετρικού συστήματος γίνεται ευκολότερα με τη μέθοδο των οριζουσών.

1ο Βήμα : Υπολογισμός ορίζουσας
Υπολογίζουμε την ορίζουσα D του συστήματος η οποία θα αποτελεί μια παράσταση που θα περιέχει την παράμετρο.

2ο Βήμα : Περιπτώσεις
Η ορίζουσα, ως αλγεβρική παράσταση, παίρνει διάφορες τιμές οπότε στο βήμα αυτό εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με τη **Μέθοδο 3**.Η λύση γράφεται με τη βοήθεια της παραμέτρου.
- Αν $D = 0$ τότε τοποθετούμε στο αρχικό σύστημα τις τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν την ορίζουσα και με οποιαδήποτε μέθοδο καταλήγουμε είτε σε αόριστο είτε σε αδύνατο σύστημα.

Παράδειγμα 1.12 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Να βρεθούν οι λύσεις του παρακάτω συστήματος για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ (\lambda - 2)x + \lambda y = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος η οποία θα είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda - 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda - 2) \cdot (-1) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Εξετάζουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις

i. Έστω $D \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$. Τότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση την οποία υπολογίζουμε με τη βοήθεια των τύπων. Έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 \ , \ D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{vmatrix} = \lambda + 2$$

Επομένως οι τιμές των μεταβλητών του συστήματος θα γραφτούν με τη βοήθεια της παραμέτρου ως εξής

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda - 2} = \frac{\lambda + 2}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda - 1}$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda - 2} = \frac{\lambda + 2}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

Η λύση λοιπόν του συστήματος θα δίνεται από τον τύπο $(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\lambda-1}\right)$.

ii. Αν $D = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$. Εδώ διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

- Αν $\lambda = 1$ τότε το αρχικό σύστημα θα πάρει τη μορφή

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

  Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος έχουν ίσα πρώτα μέλη ενώ τα δεύτερα τους μέλη είναι άνισα. Οπότε το σύστημα θα είναι αδύνατο άρα δεν έχει καμία λύση.

- Αν $\lambda = -2$ τότε θα προκύψει το σύστημα

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ -4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 1 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

  στο οποίο παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις ταυτίζονται άρα το σύστημα είναι αόριστο οπότε θα έχει άπειρες λύσεις. Για την παραμετρική μορφή των λύσεων θα έχουμε :

$$-2x - y = 1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

  και θέτοντας όπου $x = \kappa$ προκύπτουν οι λύσεις : $(x, y) = (\kappa, -2\kappa - 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Γραμμικη Εξισωση

1.1 Σημείο ευθείας
Να εξεταστεί αν το σημείο $A(2,1)$ ανήκει σε καθεμία από τις παρακάτω ευθείες.

i. $x - 3y = 4$
ii. $2x + 3y = 7$
iii. $4x + 2y = 5$
iv. $8x - 7y = 9$

1.2 Σημεία τομής με άξονες
Να βρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

i. $x - 2y = 4$
ii. $4x - y = 8$
iii. $2x - 3y = -6$
iv. $7x - 4y = 11$

1.3 Σημεία τομής με άξονες
Να βρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

i. $x = 3$
ii. $y = 5$
iii. $-x = -7$
iv. $2y = 4$

1.4 Εύρεση παραμέτρων
Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\lambda x + (\lambda - 1)y = 4$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.

1.5 Εύρεση παραμέτρων
Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\lambda^2 - 1)x + (1 - \lambda)y = 2$ να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

Μεθοδος Αντικαταστασης

1.6 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

i. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$
ii. $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 3 \end{cases}$
iii. $\begin{cases} x = 4 \\ x - y = 9 \end{cases}$
iv. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$

1.7 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

i. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
ii. $\begin{cases} x + 4y = -2 \\ 3x - 7y = 13 \end{cases}$
iii. $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$
iv. $\begin{cases} 7x + 2y = 29 \\ 3x - y = 18 \end{cases}$

1.8 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

i. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$
ii. $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases}$
iii. $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$

1.9 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

i. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$
ii. $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4x - 8y = 5 \end{cases}$
iii. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 7 - 2x \end{cases}$

Μεθοδος Αντιθετων Συντελεστων

1.10 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

i. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} -x - y = 4 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases}$

1.11 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

i. $\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 10 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 11x - 8y = 27 \\ 5x + 9y = -13 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 8x + 6y = 28 \\ 7x - 5y = 4 \end{cases}$

Μεθοδος Οριζουσων

1.12 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών.

i. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x + 5y = 12 \\ 7x + 3y = 17 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 6x - y = 20 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases}$

1.13 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών.

i. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$

Γραφικη Επιλυση

1.14 Γραφική επίλυση συστήματος
Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω γραμμικά συστήματα.

i. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$

1.15 Κοινά σημεία ευθειών
Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των παρακάτω ευθειών.

i. $x + 3y = 6$ και $2x + y = 8$
ii. $3x + 4y = 5$ και $-x + 5y = 3$
iii. $2x - y = 10$ και $4x - 2y = 7$
iv. $3x - y = 2$ και $6x - 2y = 4$

Συνθετα Συστηματα

1.16 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

i. $\begin{cases} 2(x-1) + 3(y+2) = 11 \\ x + 3 - (4 - y) = 2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 3(x+y) - 2y = 1 + x \\ x - 4y + 2 = 3x + 4 \end{cases}$

1.17 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

i. $\begin{cases} 4(x-3) + 3(y+2) = 1 \\ 3x - 5 = 2(3 - y) + 2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 5(x-y) + 3(2x+y) = 16 \\ 15 - x - y = 3x + 2y + 3 \end{cases}$

1.18 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

i. $\begin{cases} 2(x-1)-(y-2)=9 \\ -(1-x)+3y=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2(x-1)+3(y+2)=13 \\ x-(2y-1)=2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2(x-2)+3(y+1)=1 \\ 4x-(2-y)=2 \end{cases}$

1.19 Επίλυση συστήματος
Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με οποιαδήποτε μέθοδο.

i. $\begin{cases} (2x-1)(y+1)-(x+4)(2y-3)=1 \\ (1-x)(3y+1)+(x+2)(3y+4)=2 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-y}{3}=1-2x \\ \dfrac{3y-x}{4}-\dfrac{3(y-2x)}{2}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{3(y-2)}{4}=1 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{2-y}{2}=x+y \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dfrac{3x^2-x+1}{3}-\dfrac{2x^2-y}{2}=-2 \\ \dfrac{5y^2-x}{5}-\dfrac{y(3y-2)}{3}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$

Γραμμικα Συστηματα 3 × 3

1.20 Επίλυση συστήματος
Να επιλυθούν τα παρακάτω 3×3 γραμμικά συστήματα.

i. $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x-3y-z=3 \\ 2x+y-4z=-3 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ x-y-z=2 \\ 2x+3y-3z=0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x-4y+6z=12 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

1.21 Σύνθετη άσκηση
Οι ορίζουσες D, D_x, D_y ενός 2×2 γραμμικού συστήματος με μεταβλητές x, y ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{cases} D-2D_x-2D_y=-6 \\ 4D-3D_x-2D_y=-1 \\ 2D+3D_x-D_y=-4 \end{cases}$$

Να βρεθεί η λύση (x, y) του 2×2 γραμμικού συστήματος.

1.22 Εύρεση παραμέτρων
Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής $y = ax^2+\beta x+\gamma$ η οποία διέρχεται από τα σημεία

i. $A(-2,1)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,-2)$
ii. $A(-1,1)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(0,-2)$
iii. $A(-4,3)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(0,1)$
iv. $A(-2,4)$, $B(3,9)$ και $\Gamma(1,1)$

Προβληματα

1.23 Πρόβλημα
Ένα ξενοδοχείο έχει 45 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα. Συνολικά τα κρεβάτια είναι 110. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

1.24 Πρόβλημα
Ένας μαθητής έχει στο πορτοφόλι του 15 χαρτονομίσματα. Κάποια είναι των 5€ και κάποια των 10€. Με τα χρήματα αυτά αγοράζει ένα κινητό τηλέφωνο αξίας 112€ και παίρνει ρέστα 8€. Πόσα χαρτονομίσματα είναι των 5€ και πόσα των 10€;

1.25 Πρόβλημα
Μια εταιρία κινητής τηλεφωνίας έχει τις εξής χρεώσεις : 0,07€/sms και 0,09€/1' ομιλίας. Ένας συνδρομητής, με μια κάρτα των 10€ ξόδεψε συνολικά 120 λεπτά και μηνύματα. Πόσα ήταν τα λεπτά ομιλίας και πόσα τα μηνύματα;

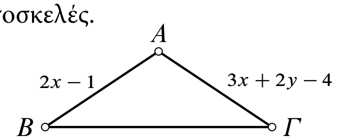
1.26 Πρόβλημα
Ένας πατέρας είναι 32 χρόνια μεγαλύτερος από το γιο του. Σε 8 χρόνια ο πατέρας θα έχει τα 3πλάσια χρόνια από το γιο του. Ποια είναι η ηλικία του πατέρα και του γιού;

1.27 Πρόβλημα
Σε ένα κουτί υπάρχουν κόκκινες και πράσινες μπάλες. Αν προσθέσουμε στο κουτί 3 κόκκινες μπάλες, οι πράσινες θα είναι διπλάσιες από τις κόκκινες ενώ αν προσθέσουμε 4 πράσινες τότε, κόκκινες και πράσινες θα είναι ίσες. Πόσες μπάλες από το κάθε χρώμα υπάρχουν;

1.28 Πρόβλημα
Σε μια φάρμα ζουν 80 σε πλήθος κότες και αγελάδες. Αν όλα τα ζώα έχουν συνολικά 260 πόδια να βρεθούν πόσες κότες και πόσες αγελάδες ζουν στη φάρμα.

1.29 Πρόβλημα
Σε ένα ορθογώνιο, το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους ενώ η περίμετρος είναι ίση με το μήκος αυξημένο κατά 12 μέτρα. Να βρεθούν οι πλευρές του ορθογωνίου.

1.30 Πρόβλημα
Η περίμετρος του τριγώνου του παρακάτω σχήματος είναι 28 εκατοστά. Να βρεθούν πραγματικοί οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές.



Παραμετρικά Συστήματα

1.31 Παραμετρικά συστήματα
Δίνεται το παρακάτω παραμετρικό σύστημα με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 2)y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda - 1 \end{cases}$$

i. Να βρεθούν οι ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος με τη βοήθεια της παραμέτρου λ.
ii. Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου το σύστημα έχει μοναδική λύση.
iii. Για ποια τιμή της παραμέτρου το σύστημα είναι αόριστο και για ποια αδύνατο;

1.32 Παραμετρικά συστήματα
Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $\begin{cases} 2\lambda x + (\lambda + 3)y = 2 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x + \lambda y = 2 - \lambda \\ \lambda x + y = \lambda \end{cases}$

1.33 Παραμετρικά συστήματα

Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $\begin{cases} (\lambda^2+1)x - y = 2 \\ 2\lambda x + y = 4 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} (\lambda+2)x - 3y = \lambda + 2 \\ \lambda x + (\lambda-2)y = 1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \lambda^2 x + 4y = 2\lambda \\ (\lambda-1)x + y = \lambda - 1 \end{cases}$

1.34 **Παραμετρικά συστήματα**
Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $\begin{cases} \lambda x + (\lambda-3)y = -1 \\ 2x + (\lambda-3)y = 1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} (\lambda+1)x - 3y = -1 \\ x + (\lambda-3)y = 1 \end{cases}$

1.2 Μη γραμμικά Συστήματα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 8 : ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
Ένα σύστημα εξισώσεων θα ονομάζεται μη γραμμικό όταν τουλάχιστον μια εξίσωσή του δεν αποτελεί γραμμική εξίσωση.

Μέθοδος 1.10 : ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Μια γενική μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων είναι η μέθοδος της αντικατάστασης που συναντήσαμε και στα γραμμικά συστήματα. Έχει ως εξής

1ο Βήμα : Επιλογή εξίσωσης
Επιλέγουμε εκείνη την εξίσωση του συστήματος η οποία είναι στην πιο απλή μορφή και είναι εύκολο να λυθεί ως προς κάποιον άγνωστο. Λύνουμε ως προς αυτόν τον άγνωστο.

2ο Βήμα : Αντικατάσταση
Τον άγνωστο αυτό τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος και υπολογίζουμε και τη δεύτερη μεταβλητή. Αν οι εξισώσεις του συστήματος είναι περισσότερες από δύο τότε αντικαθιστούμε τον άγνωστο στις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος και καταλήγουμε σε ένα σύστημα μιας τάξης μικρότερης. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία όσες φορές χρειαστεί.

Παράδειγμα 1.1 : ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
Να λυθεί το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε η 2^{η} εξίσωση του συστήματος είναι γραμμική και κατά συνέπεια είναι εύκολο να λυθεί ως προς τη μεταβλητή y. Προκύπτει

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - \ \ y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 1 \tag{1.14}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1) στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (2x-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(5x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας έδωσε δύο λύσεις ως τιμές της μεταβλητής x. Οπότε για κάθε τιμή αυτή θα βρεθεί και η αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής y και κατά συνέπεια θα προκύψουν δύο λύσεις του συστήματος. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

i. Για $x = 0$ έχουμε $y = 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$.
ii. Για $x = \frac{4}{5}$ έχουμε $y = 2x - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$.

Οι λύσεις λοιπόν του συστήματος θα είναι $(x, y) = (0, -1)$ και $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Μέθοδος 1.11 : ΑΝΑΘΕΣΗ

Σε ορισμένα μη γραμμικά συστήματα οι μεταβλητές των εξισώσεων βρίσκονται στην ίδια μορφή ή και μέσα σε ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το μη γραμμικό σύστημα μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό ως εξής :

***1^o Βήμα :* Ανάθεση**
Αναγνωρίζουμε την κοινή σύνθετη αλγεβρική παράσταση στην οποία βρίσκεται μέσα κάθε μεταβλητή σε όλες τις εξισώσεις και την θέτουμε ίση με μια νέα μεταβλητή.

***2^o Βήμα :* Αντικατάσταση**
Αντικαθιστούμε σε όλες τις εξισώσεις τις παραστάσεις αυτές με τις νέες μεταβλητές που ορίσαμε οπότε και καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα με νέους άγνωστους.

***3^o Βήμα :* Λύση γραμμικού συστήματος**
Λύνουμε το γραμμικό σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο προτιμάμε.

***4^o Βήμα :* Αρχικοί άγνωστοι**
Αφού λυθεί το γραμμικό σύστημα και βρεθούν οι νέες μεταβλητές, αντικαθιστούμε τις τιμές στις σχέσεις του **$1^{ου}$ Βήματος** οπότε προκύπτουν εξισώσεις με τις αρχικές μεταβλητές του συστήματος, τις οποίες είτε λύνουμε αν περιέχουν μόνο μια μεταβλητή είτε συνδιάζουμε αν περιέχουν περισσότερες για να προκύψει σύστημα, γραμμικό ή μη γραμμικό. Στην περίπτωση συστήματος εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μεθόδους.

Παράδειγμα 1.2 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΑΘΕΣΗ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = -1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 7 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε οτι και στις δύο εξισώσεις οι μεταβλητές βρίσκονται μέσα στις ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις. Αυτές είναι οι $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{y}$. Θέτουμε λοιπόν

$$\lambda = \frac{1}{x} \text{ και } \kappa = \frac{1}{y} \tag{1.15}$$

Το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε γραμμικό ως εξής

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = -1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{1}{x} + 4\dfrac{1}{y} = -1 \\ 2\dfrac{1}{x} - 5\dfrac{1}{y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 4\kappa = 1 \\ 2\lambda - 5\kappa = 7 \end{cases}$$

Με τις γνωστές μεθόδους υπολογίζουμε τη λύση του γραμμικού συστήματος η οποία είναι $(\lambda, \kappa) = (1, -1)$. Με τις τιμές αυτές των νέων μεταβλητών θα υπολογίσουμε τις τιμές των αρχικών μεταβλητών από τη σχέση (2). Έχουμε λοιπόν :

$$\lambda = \frac{1}{x} \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1 \text{ και } \kappa = \frac{1}{y} \Rightarrow -1 = \frac{1}{y} \Rightarrow y = -1$$

Η λύση λοιπόν του αρχικού συστήματος θα είναι $(x, y) = (1, -1)$.

Παράδειγμα 1.3 : ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΑΘΕΣΗ

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} - \dfrac{3}{2x+y} = -2 \\ -\dfrac{4}{x-3y} + \dfrac{9}{2x+y} = 5 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραστάσεις $\frac{1}{x-3y}$ και $\frac{1}{2x+y}$ εμφανίζονται και στις δύο εξισώσεις. Άρα θέτουμε

$$z = \frac{1}{x-3y} \text{ και } t = \frac{1}{2x+y} \tag{1.16}$$

Το αρχικό σύστημα θα μετατραπείο ως εξής

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} - \dfrac{3}{2x+y} = -2 \\ -\dfrac{4}{x-3y} + \dfrac{9}{2x+y} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 3t = -2 \\ -4z + 9t = 5 \end{cases}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα που προέκυψε προκύπτει η λύση για τις μεταβλητές z, t η οποία θα είναι $(z, t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις σχέσεις (3) οι σχέσεις αυτές μας δίνουν ένα νέο γραμμικό σύστημα με τις αρχικές μεταβλητές.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{x-3y} \\ t = \frac{1}{2x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x+y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Με τις γνωστές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων προκύπτει η λύση του παραπάνω συστήματος η οποία είναι και λύση του αρχικού συστήματος $(x, y) = (1, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.35 **Μη γραμμικά συστήματα**
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα συστήματα

i. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$

1.36 **Μη γραμμικά συστήματα**
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα συστήματα

i. $\begin{cases} x^2+2y=4 \\ x-y=-5 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^4-y^4=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x+y^2=2y-1 \\ x^2+y=1 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

1.37 **Μη γραμμικά συστήματα**
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα συστήματα.

i. $\begin{cases} (x-y)^2+(x+y)^2=13 \\ (x-y)-2(x+y)=-4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ x+4y=6 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ |x-y|=1 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y^2}+\dfrac{1}{y-x^2}=2 \\ x^2+y^2-x-y=4 \end{cases}$

1.38 **Μη γραμμικά συστήματα**
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα συστήματα

i. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} xyz=9 \\ x-y=2 \\ xy-z=0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ x+y+z=1 \\ x-z=1 \end{cases}$

1.39 **Μη γραμμικά συστήματα**
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα συστήματα

i. $\begin{cases} x^3+y^3=3z^3 \\ x^2y+xy^2=2z^3 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=98 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}=0 \\ x+2y+z=11 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} xy=2 \\ yz=3 \\ xz=8 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} y(x^2-y^2)=z \\ -y(x^2+y^2)=z \\ (1-x)^2=-(y-z-1)^2 \end{cases}$ v. $\begin{cases} x^3+y^3=4 \\ y^3+z^3=2 \\ x^3+z^3=4 \end{cases}$ vi. $\begin{cases} x+y^2=2y-1 \\ x^2+y=1 \end{cases}$

1.40 Επίλυση με ανάθεση
Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα

i. $\begin{cases} |x|-|y|=3 \\ 2|x|+3|y|=11 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} |x-1|+2|y+2|=7 \\ 3|x-1|-4|y+2|=1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x^2+2y^3=0 \\ 3x^2+5y^3=11 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2(x^2+3x-3)+3(y^2-5y+7)=5 \\ -(x^2+3x-3)+2(y^2-5y+7)=1 \end{cases}$

v. $\begin{cases} \sqrt{x}-3\sqrt{y}=-1 \\ 2\sqrt{x}+9\sqrt{y}=13 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7 \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{2y}=4 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 2ημx+συνy=2 \\ 3ημx-4συνy=\frac{5}{2} \end{cases}$

1.41 Κοινά σημεία καμπυλών
Σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα να βρεθούν τα κοινά σημεία των καμπυλών.

i. του κύκλου $x^2+y^2=1$ και της ευθείας $2x+3y=1$
ii. του κύκλου $x^2+y^2=4$ και της παραβολής $3x-y^2=0$
iii. της υπερβολής $xy=4$ και της ευθείας $3x-y=-1$
iv. των κύκλων $x^2+y^2=12$ και $x^2+y^2=9$

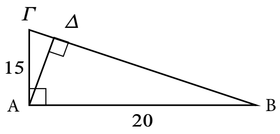
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.42 Πρόβλημα
Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $24m$ και εμβαδόν $32m^2$. Να βρεθεί το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου.

1.43 Πρόβλημα
Δύο τετράγωνα με πλευρές $x-2$ και $2y+3$ αντίστοιχα έχουν συνολικό εμβαδόν 90τ.μέτρα. Αν ξέρουμε ότι η περίμετρος του 2^{ου} είναι 3πλάσια από την περίμετρο του 1^{ου} τότε να βρεθούν οι αριθμοί x, y.

1.44 Πρόβλημα
Η διαγώνιος μιας τηλεόρασης είναι $42''$ και γνωρίζουμε επίσης ότι οι πλευρές έχουν αναλογία 16:9 (HD Video Standard). Να βρεθούν οι διαστάσεις της τηλεόρασης.
Υπόδειξη : Το μέγεθος μιας τηλεόρασης δίνεται από το μήκος της διαγωνίου της οθόνης δοσμένο σε ίντσες. Μια ίντσα $1''=2{,}54cm$

1.45 Πρόβλημα
Αν $AΔ=12$ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου στην υποτείνουσα και $BΔ=x, ΓΔ=y$ να βρεθούν οι θετικοί πραγματικοί οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}^+$ ώστε να ισχύει $AΔ^2=BΔ\cdot ΓΔ$.



1.46 **Πρόβλημα**

Δύο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται με μέση συνολική ταχύτητα $150 km/h$. Αν γνωρίζουμε ότι κάθε αυτοκίνητο διένυσε απόσταση $56 km/h$ και ταξίδευαν συνολικά για 1μιση ώρα τότε να βρεθεί ο χρόνος που ταξίδευε το κάθε αμάξι.