



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

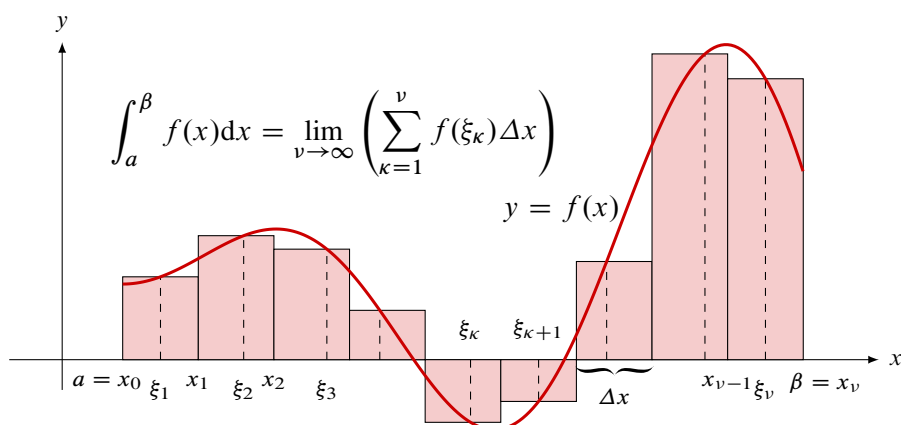
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

📍: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος , ☎: 26610 20144 , 📱: 6932327283 - 6955058444

26 Μαΐου 2025

# Μαθηματικά Γ' Λυκείου

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Φρόνιμος Σπύρος



# Τυπολόγιο

## 1ο Κεφάλαιο Όρια - Συνέχεια

### Βασικές ασκήσεις

## 1ο Κεφάλαιο Όρια - Συνέχεια

### 1.1 Σύνθεση συναρτήσεων

#### Άσκηση 1.1 : Εύρεση σύνθεσης

Για να οριστεί η συνάρτηση  $f \circ g$  πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

#### Βήματα

1° : Ο τύπος της  $f \circ g$  θα ισούται με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

που σημαίνει ότι στον τύπο της  $f$  αντικαθιστούμε το  $x$  με  $g(x)$ .

2° : Για το πεδίο ορισμού ισχύουν οι σχέσεις

$$x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f$$

Οι περιορισμοί αυτοί μας οδηγούν σε εξισώσεις και ανισώσεις. Οι κοινές λύσεις σχηματίζουν το πεδίο ορισμού.

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για τις συναρτήσεις  $g \circ f, f \circ f \dots$

#### ▶ Παράδειγμα 1 : Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  και  $g(x) = \sqrt{x-2}$ . Να ορίσετε τις συναρτήσεις

α.  $f \circ g$

β.  $g \circ f$

γ.  $f \circ f$

#### ✓ ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται όταν  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  άρα  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ , ενώ η  $g$  ορίζεται όταν  $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$  οπότε  $D_g = [2, +\infty)$ .

α. Η συνάρτηση  $f \circ g$  έχει τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$$

- $x \in D_g \Rightarrow x \in [2, +\infty)$
- $g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \sqrt{x-2} \neq 1 \Rightarrow x-2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

Επομένως  $D_{f \circ g} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$ .

β. Η συνάρτηση  $g \circ f$  έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-2} = \sqrt{\frac{1}{x-1}-2}$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$$

$$\bullet x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x) \in D_g &\Rightarrow \frac{1}{x-2} \in [2, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3-x)(x-1) \geq 0 \text{ και } x-1 \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in (1, 3] \end{aligned}$$

Επομένως  $D_{g \circ f} = (1, 3]$ .

| $x$      | $-\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----|-----|-----------|
| $3-x$    | +         | +   | 0   | -         |
| $x-1$    | -         | 0   | +   | +         |
| Γινόμενο | -         | +   | 0   | -         |

## 1.2 Συνάρτηση 1 – 1 - Αντίστροφη

### ✎ Άσκηση 1.2 : Συνάρτηση 1 – 1

#### Τρόποι

**1ος Τρόπος :** Αποδεικνύουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $D_f$ . (Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται όταν το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι ένα διάστημα.)

**2ος Τρόπος :** Με τη βοήθεια του ορισμού της 1 – 1 συνάρτησης

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων, αρκεί ο τύπος να επιτρέπει την επίλυση της εξίσωσης.)

**3ος Τρόπος :** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της  $f$ . Κάθε οριζόντια ευθεία πρέπει να τέμνει τη  $C_f$  σε ένα το πολύ σημείο.

**4ος Τρόπος :** Αν η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει μοναδική λύση ως προς  $x$  για κάθε  $y \in f(D_f)$  και η λύση ανήκει στο  $D_f$  τότε η  $f$  είναι 1 – 1.

**5ος Τρόπος :** Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η  $f$  δεν είναι 1 – 1.

### ✎ Άσκηση 1.3 : Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

#### Βήματα

**1° :** Δείχνουμε ότι η  $f$  είναι 1 – 1.

**2° :** Εύρεση συνόλου τιμών της  $f$  με τη βοήθεια μονοτονίας.

**3° :** Επίλυση της εξίσωσης  $y = f(x)$  ως προς  $x$  με  $x \in D_f$ .

### ► Παράδειγμα 2 : Εύρεση αντίστροφης

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x-2) - \ln(5-x)$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

#### ✓ ΛΥΣΗ

Η  $f$  ορίζεται όταν

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ και } 5-x > 0 \Rightarrow x < 5$$

άρα  $D_f = (2, 5)$ . Για κάθε  $x \in (2, 5)$  είναι:

$$f'(x) = [\ln(x-2) - \ln(5-x)]' = \frac{(x-2)'}{x-2} - \frac{(5-x)'}{5-x} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{5-x} > 0$$

επομένως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, 5)$ , άρα και 1 – 1 οπότε αντιστρέφεται. Η  $f^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) = f((2, 5)) \stackrel{f \nearrow}{=} \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(x-2) - \ln(5-x)) = -\infty - \ln 3 = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (\ln(x-2) - \ln(5-x)) = \ln 3 - (-\infty) = +\infty.$

οπότε  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ . Για την εύρεση του τύπου έχουμε  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ . Είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln(x-2) - \ln(5-x) \Leftrightarrow y = \ln \frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^y = \frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow e^y(5-x) = x-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5e^y - xe^y = x-2 \Leftrightarrow x + xe^y = 5e^y + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(e^y + 1) = 5e^y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{5e^y + 2}{e^y + 1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{5e^y + 2}{e^y + 1} \end{aligned}$$

άρα η αντίστροφη της  $f$  είναι  $f^{-1}(x) = \frac{5e^x + 2}{e^x + 1}$ ,  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ .

### 1.3 Όρια μορφής $\frac{0}{0}$

#### Άσκηση 1.4 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής

Αν ένα όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολυώνυμα, έχει μορφή  $\frac{0}{0}$  τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1<sup>ος</sup> Τρόπος : Παραγοντοποίηση

**Βήματα**

1<sup>ο</sup> : Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή.

2<sup>ο</sup> : Απλοποιούμε τις παραστάσεις  $x - x_0$  και αντικαθιστούμε όπου  $x$  το  $x_0$ .

2<sup>ος</sup> Τρόπος : Κανόνας De L'Hospital

Εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital όσες φορές χρειαστεί έως ότου φύγει η απροσδιοριστία.

#### ▶ Παράδειγμα 3 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής - Παραγοντοποίηση

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

α.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

β.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x - x^2}$

δ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$

✓ ΛΥΣΗ

#### ▶ Παράδειγμα 4 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής - Κανόνας De L'Hospital

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

α.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - 8}$

β.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x}$

✓ ΛΥΣΗ

#### Άσκηση 1.5 : Όριο $\frac{0}{0}$ άρρητης

Πολλαπλασιασμός με συζυγείς παραστάσεις.

#### ▶ Παράδειγμα 5 : Όριο $\frac{0}{0}$ άρρητης

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-2}$$

### ✎ Άσκηση 1.6 : Όριο $\frac{0}{0}$ ρητής με απόλυτες τιμές

#### Βήματα

1<sup>ο</sup> : Υπολογίζω τα όρια των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές.

2<sup>ο</sup> : Διώχνω τις απόλυτες τιμές με τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Αν κάποια απόλυτη τιμή μηδενίζεται στο  $x_0$  τότε υπολογίζω πλευρικά όρια.

3<sup>ο</sup> : Υπολογίζω όριο ρητής  $\frac{0}{0}$

### ✎ Άσκηση 1.7 : Όριο $\frac{0}{0}$ με τριγωνομετρικές παραστάσεις

1<sup>ος</sup> Τρόπος : Κατασκευάζω και χρησιμοποιώ τριγωνομετρικές ταυτότητες.

2<sup>ος</sup> Τρόπος : Κατασκευάζω με πράξεις κάποιο βασικό τριγωνομετρικό όριο, αρκεί όταν  $x \rightarrow x_0$  να μηδενίζεται η γωνία του τριγωνομετρικού αριθμού.

3<sup>ος</sup> Τρόπος : Κανόνας De L' Hospital. (Χρειάζεται προσοχή εδώ γιατί μπορεί η εφαρμογή του κανόνα να με οδηγήσει σε δυσκολότερο όριο.)

### ✎ Άσκηση 1.8 : Όριο $\frac{0}{0}$ με εκθετικές, λογαριθμικές και συνδυασμό αυτών

Εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital.

## 1.4 Όρια με απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

### ✎ Άσκηση 1.9 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ρητής

Με ρητή συνάρτηση όταν  $x \rightarrow \pm\infty$  υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος μόνο με τους μεγιστοβάθμιους όρους.

### ✎ Άσκηση 1.10 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ με ρίζες

Μέθοδος κοινού παράγοντα ή συζυγείς παραστάσεις.

### ✎ Άσκηση 1.11 : Όρια $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ Διάφορες συναρτήσεις

Κανόνας De L' Hospital

## 1.5 Όρια με απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$

**Άσκηση 1.12 : Όρια  $0 \cdot (\pm\infty)$  - Γενική μέθοδος****Βήματα**

1° : Γράφουμε το γινόμενο με μορφή σύνθετου κλάσματος ως εξής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

2° : Το όριο παίρνει τη μορφή  $\frac{0}{\pm\infty}$  ή  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  οπότε εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital

**Άσκηση 1.13 : Όρια με απροσδιοριστία  $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$** **Βήματα**

1° : Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

2° : Υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη το οποίο έχει απροσδιοριστία  $0 \cdot (\pm\infty)$ . Στη συνέχεια με αντικατάσταση υπολογίζουμε το αρχικό όριο.

**1.6 Όρια με απροσδιοριστία  $+\infty - \infty$** **Άσκηση 1.14 : Όρια  $+\infty - \infty$  - Γενική μέθοδος****Βήματα**

1° : Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια από τις δύο συναρτήσεις.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x) \left( 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) \right]$$

2° : Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος  $\frac{g(x)}{f(x)}$  με μορφή  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .

3° : Επιστρέφουμε στο αρχικό όριο αντικαθιστώντας.

**Άσκηση 1.15 : Όρια  $+\infty - \infty$  - Κλάσματα**

Αν στο όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$  οι συναρτήσεις  $f(x), g(x)$  είναι κλάσματα τότε τα κάνουμε ομώνυμα και οδηγούμαστε σε μία από τις μορφές  $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  ή  $\frac{a}{0}$ .

**Άσκηση 1.16 : Όρια  $+\infty - \infty$  - Διαφορά λογαρίθμων**

Σχηματίζουμε διαφορά λογαρίθμων και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος το οποίο έχει απροσδιοριστία  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .

**Άσκηση 1.17 : Όρια της μορφής  $\frac{a}{0}$** **Βήματα**

1° : Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.

2° : Γράφουμε σε ξεχωριστό κλάσμα τον παράγοντα που μηδενίζεται.

3° : Αν αυτός ο παράγοντας έχει σταθερό πρόσημο τότε προχωράμε στον υπολογισμό. Αν όχι υπολογίζουμε πλευρικά όρια.

**Άσκηση 1.18 :** Όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ  $f(x)$ , συν  $f(x)$  - Μηδενική επί φραγμένη

Αν το όριο περιέχει σύνθετες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με γωνία  $f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  τότε

**Βήματα**

- 1° : Γράφουμε τη συνάρτηση μέσα στο όριο ως γινόμενο συναρτήσεων.  
 2° : Κλείνουμε τη συνάρτηση του ορίου σε απόλυτη τιμή και σχηματίζουμε διπλή ανισότητα ώστε να εφαρμοστεί κριτήριο παρεμβολής.

**Άσκηση 1.19 :** Γνωστό όριο που περιέχει την  $f(x)$  - Βοηθητική συνάρτηση**Βήματα**

- 1° : Θέτουμε  $g(x)$  τη συνάρτηση του ορίου και λύνουμε ως προς  $f(x)$ .  
 2° : Υπολογίζουμε το όριο της  $f$  στο  $x_0$ .

**Άσκηση 1.20 :** Κριτήριο παρεμβολής

Το κριτήριο παρεμβολής για τον υπολογισμό ορίων εφαρμόζεται σε ανισότητες της μορφής

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{ή} \quad |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

**2ο Κεφάλαιο Διαφορικός λογισμός****2.1 Εφαπτομένη****Άσκηση 2.1 :** Εύρεση εφαπτομένης με γνωστό σημείο επαφής**Βήματα**

- 1° : Πεδίο ορισμού, παράγωγος  $f'$  και θέτουμε όπου  $x = x_0$  ώστε να βρεθούν οι αριθμοί  $f(x_0)$  και  $f'(x_0)$ .  
 2° : Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

και αντικαθιστώντας λύνουμε ως προς  $y$ .

**► Παράδειγμα 1 :** Εφαπτομένη - Γνωστό σημείο επαφής

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της  $C_f$  στο σημείο

α.  $M(0, f(0))$

β. με τεταγμένη  $e^2$ .

**Άσκηση 2.2 :** Εύρεση εφαπτομένης με γνωστή κλίση  $\lambda$ **Βήματα**

- 1° : Πεδίο ορισμού και  $f'$ .  
 2° : Θεωρούμε σημείο επαφής  $M(x_0, f(x_0))$  και θέτουμε το σ.δ. της εφαπτομένης να ισούται με τη δοσμένη κλίση  $\lambda$ .

$$f'(x_0) = \lambda$$

Αν δεν μας δίνεται ο συντελεστής  $\lambda$  της εφαπτομένης  $\varepsilon$  τότε τον βρίσκουμε έχοντας τις εξής περιπτώσεις.



| Συνθήκη  | Εξίσωση  |
|--|--|
| Ευθείες παράλληλες $\varepsilon \parallel \zeta$ | $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$                            |
| Ευθείες κάθετες $\varepsilon \perp \zeta$        | $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$ |
| Οριζόντια ευθεία $\varepsilon \parallel x'x$     | $\lambda_\varepsilon = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$  |
| Η $\varepsilon$ σχηματίζει γωνία $\omega$        | $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\omega \Rightarrow f'(x_0) = \varepsilon\omega.$             |

3° : Λύνουμε την εξίσωση, βρίσκουμε το  $x_0$  και στη συνέχεια το  $f(x_0)$ .

4° : Εξίσωση ευθείας  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

✎ **Άσκηση 2.3** : Εφαπτομένη που διέρχεται από εξωτερικό σημείο  $P(a, \beta)$

**Βήματα**

1° : Πεδίο ορισμού και  $f'$ .

2° : Θεωρούμε σημείο επαφής  $M(x_0, f(x_0))$  και γράφουμε τον τύπο της ευθείας.

3° : Αντικαθιστούμε  $f(x_0)$  και  $f'(x_0)$  στην εξίσωση.

4° : Αφού  $P \in \varepsilon$  τότε θέτουμε  $x = a$  και  $y = \beta$  και λύνουμε την εξίσωση ως προς  $x_0$ .

5° : Για κάθε  $x_0$  υπολογίζουμε  $f(x_0)$  και  $f'(x_0)$  και βρίσκουμε την ευθεία.

✎ **Άσκηση 2.4** : Ευθεία εφάπτεται στη  $C_f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$

$$\text{Η ευθεία } y = ax + \beta \text{ εφάπτεται στη } C_f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$$

✎ **Άσκηση 2.5** : Κοινή εφαπτομένη  $C_f, C_g$  σε κοινό σημείο  $M(x_0, f(x_0))$

$$\text{Οι } C_f \text{ και } C_g \text{ έχουν κοινή εφαπτομένη στο } M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

## 2.2 Μονοτονία - Ακρότατα

✎ **Άσκηση 2.6** : Μονοτονία - Ακρότατα - Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

**Βήματα**

1° : Πεδίο ορισμού της  $f$  και έλεγχος συνέχειας.

2° : Παράγωγος  $f'$ .

3° : Υπολογίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της  $f'$  με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

- Λύνοντας την εξίσωση  $f(x) = 0$  και τις ανισώσεις  $f(x) > 0$  και  $f(x) < 0$ .
- Με επιλογή τιμής σε κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού.
- Παραγωγίζοντας δεύτερη ή ακόμα και τρίτη φορά. Με τη μονοτονία κάθε παραγώγου βρίσκουμε τα πρόσημά της ώσπου να φτάσουμε στη μονοτονία της  $f$ . Οι ρίζες βρίσκονται με δοκιμές.

4° : Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

5° : Μονοτονία - Ακρότατα - Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

- Για εύρεση μονοτονίας αναφέρουμε το είδος της μονοτονίας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για εύρεση ακροτάτων ελέγχουμε για ακρότατα στα κρίσιμα σημεία και στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού
- Για εύρεση συνόλου τιμών βρίσκουμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας και τις ενώνουμε.
- Για την εύρεση του πλήθους ριζών της συνάρτησης ελέγχουμε αν το 0 ανήκει στην εικόνα κάθε διαστήματος. Αναλυτικά

$$0 \in f(\Delta_1) \Rightarrow \text{Υπάρχει } x_0 : f(x_0) = 0$$

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική μέσα στο κάθε διάστημα γιατί η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

### ► Παράδειγμα 2: Μονοτονία - Ακρότατα - Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . Να βρείτε

- τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .
- τα τοπικά ακρότατα.
- το σύνολο τιμών της  $f$ .
- το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 3$ .

#### ✓ ΛΥΣΗ

Για κάθε  $x \neq 0$  έχουμε:

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \xrightarrow{x^2 > 0} x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .
- $f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} < 0 \xrightarrow{x^2 > 0} x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$ .

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα πρόσημα της  $f'$  και τη μονοτονίας της  $f$ .

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | +    | 0   | -   |           |
| $f(x)$  |           | ↗    | ↘   | ↗   |           |

α. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στ διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$ .

β. Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x = -1$ , το  $f(-1) = -2$  και τοπικό ελάχιστο στη θέση  $x = 1$ , το  $f(1) = 2$ .

γ. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_1 = (-\infty, -1]$  άρα  $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1)\right] = (-\infty, -2]$  αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty + 0 = -\infty$$

Επίσης η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2 = [-1, 0)$  άρα  $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(-1)\right] = (-\infty, -2]$  αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

Ομοίως, για  $\Delta_3 = (0, 1]$  και  $\Delta_4 = [1, +\infty)$ , προκύπτουν  $f(\Delta_3) = f(\Delta_4) = [2, +\infty)$ . Επομένως η  $f$  έχει σύνολο τιμών

$$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

δ. Για την εξίσωση  $f(x) = 3$  παρατηρούμε ότι

- $3 \notin f(\Delta_1)$  άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο  $\Delta_1$ .

- $3 \notin f(\Delta_2)$  άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο  $\Delta_1$ .
- $3 \in f(\Delta_3)$  άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο  $\Delta_3$  η οποία είναι μοναδική αφού  $f \searrow \Delta_3$ .
- $3 \in f(\Delta_4)$  άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο  $\Delta_4$  η οποία είναι μοναδική αφού  $f \nearrow \Delta_4$ .

Οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες.

### 2.3 Κυρτότητα και σημεία καμψής

#### ▣ Άσκηση 2.7 : Εύρεση κυρτότητας - σημείων καμψής

##### Βήματα

1° : Πεδίο ορισμού και έλεγχος συνέχειας.

2° : Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο  $f''$ .

3° : Βρίσκουμε ρίζες και πρόσημα της  $f''$  με τους τρόπους που περιγράψαμε στη μονοτονία.

4° : Σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα της  $f''$  και την κυρτότητα της  $f$ .

5° : Κυρτότητα - Σημεία καμψής

- Για εύρεση κυρτότητας αναφέρουμε το είδος της κυρτότητας σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για εύρεση σημείων καμψής ελέγχουμε για σημεία καμψής στα σημεία που αλλάζει η κυρτότητα αρκεί η  $f$  να είναι μια φορά παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

► **Παράδειγμα 3 :** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ . Μελετήστε την συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

#### ✓ ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $D_f = \mathbb{R}$  καθώς  $x^2 + 1 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και είναι συνεχής ως ρητή. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2x}{x^2+1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \quad \text{και} \\ f''(x) &= \left[ \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \right]' = \frac{(2-2x^2)'(x^2+1)^2 - (2-2x^2)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-4x(x^2+1)^2 - (2-2x^2)2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[-4x(x^2+1) - 4x(2-2x^2)]}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

- $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{3}$ .
- $f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} > 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x > 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ .
- $f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} < 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ .

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα πρόσημα της  $f''$  καθώς και την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της  $f$ .

| $x$      | $-\infty$          | $-\sqrt{3}$ | $0$               | $\sqrt{3}$ | $+\infty$          |
|----------|--------------------|-------------|-------------------|------------|--------------------|
| $f''(x)$ | $-$                | $0$         | $+$               | $0$        | $-$                |
| $f(x)$   | $\curvearrowright$ | $0$         | $\curvearrowleft$ | $0$        | $\curvearrowright$ |

Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στα διαστήματα  $[-\sqrt{3}, 0]$  και  $[\sqrt{3}, +\infty)$  και κοίλη στα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt{3}]$  και  $[0, \sqrt{3}]$ . Η  $C_f$  έχει σημεία καμπής τα  $A(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = A(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(0, f(0)) = B(0, 0)$  και  $\Gamma(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = \Gamma(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

### Άσκηση 2.8 : Κυρτότητα και εφαπτομένες - Απόδειξη ανισότητας

#### Βήματα

- 1°: Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.
- 2°: Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο που ζητάει ή σε κάποιο σημαντικό σημείο. Αυτή θα έχει τη μορφή  $y = ax + \beta$
- 3°: Χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$f \cup \Delta \Rightarrow f(x) \geq ax + \beta, \quad f \cap \Delta \Rightarrow f(x) \leq ax + \beta$$

και με πράξεις φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή που τη ζητάει η άσκηση.

## 2.4 Ασύμπτωτες

### Άσκηση 2.9 : Κατακόρυφες ασύμπτωτες

#### Βήματα

- 1°: Πεδίο ορισμού της  $f$ .
- 2°: Υπολογισμός κάποιου πλευρικού ορίου στα σημεία  $x_0$  που είναι ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της  $f$  ή στα σημεία που δεν είναι συνεχής η συνάρτηση.
- 3°: Αν κάποιο πλευρικό όριο ισούται με  $\pm\infty$  τότε η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

### Άσκηση 2.10 : Οριζόντια ασύμπτωτη

#### Βήματα

- 1°: Όριο της  $f$  στο  $+\infty$  ή  $-\infty$  εφόσον ορίζεται η  $f$  σε διάστημα που περιέχει  $\pm\infty$ .
- 2°: Αν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$  τότε η ευθεία  $y = l$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $\pm\infty$ .

### Άσκηση 2.11 : Πλάγια ασύμπτωτη

#### Βήματα

- 1°: Εφόσον ορίζεται η  $f$  σε διάστημα που περιέχει  $\pm\infty$  υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$$

και αντίστοιχα στο  $-\infty$ .

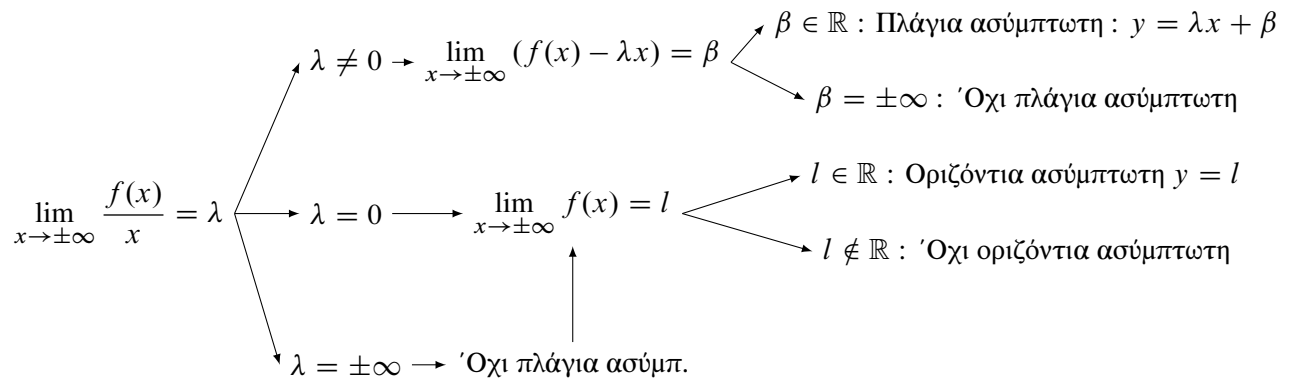
- 2°: Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $\beta \in \mathbb{R}$  τότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $\pm\infty$ .

### Άσκηση 2.12 : Ασύμπτωτες γενικά

#### Βήματα

- 1°: Αναζητούμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία που αναφέραμε.

**2° :** Ανάμεσα σε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ξεκινάμε με τις πλάγιες και από το συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  θα εξαρτηθεί αν η ευθεία είναι πλάγια ή οριζόντια. Ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:



► **Παράδειγμα 4 : Ασύμπτωτες**

Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων.

α.  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{4-x}\right)$

β.  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

γ.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 4}$

## 2.5 Εύρεση παραμέτρων

Η γενική μέθοδος για την εύρεση μιας παραμέτρου είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση ή ανίσωση που να την περιέχει, ώστε λύνοντάς την να την προσδιορίσουμε. Κάποια συνθήκη της υπόθεσης είναι αυτή που θα μας οδηγήσει σ' αυτή την εξίσωση-ανίσωση.

| Συνθήκη  | Εξίσωση - Ανίσωση   |
|--|---|
| Το σημείο $A(a, \beta)$ ανήκει στη $C_f$   | $f(a) = \beta$  |
| Γνωστό όριο που περιέχει παραμέτρους $a, \beta \dots$  | Βοηθητική συνάρτηση   |
| Η $f$ είναι συνεχής σε σημείο $x_0 \in D_f$  | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  |
| Η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in D_f$   | $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$     |
| Η ευθεία $y = ax + \beta$ εφάπτεται στη $C_f$  | $\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + \beta \\ f'(x_0) = a \end{cases}$  |
| Οι $C_f, C_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$   | $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$  |
| Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο $\Delta$  | $f'(x) \geq 0$ (ή $f'(x) \leq 0$ )  |
| Η $f$ παρουσιάζει <b>ακρότατο</b> στο <b>εσωτερικό</b> σημείο $x_0 \in \Delta$ και είναι <b>παραγωγίσιμη</b> σ' αυτό. (Αν επιπλέον το ακρότατο είναι $\beta$ )                             | $f'(x_0) = 0$ (τότε $f(x_0) = \beta$ )<br>Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.                              |
| Η $f$ είναι κυρτή (ή κοίλη) στο $\Delta$   | $f''(x) \geq 0$ (ή $f''(x) \leq 0$ )  |
| Η $C_f$ έχει <b>σημείο καμπής</b> $M(x_0, y_0)$ στο <b>εσωτερικό</b> σημείο $x_0 \in \Delta$ στο οποίο είναι <b>δύο φορές παραγωγίσιμη</b> και <b>ορίζεται εφαπτομένη</b> στο σημείο αυτό. | $f''(x_0) = 0$ και $f(x_0) = y_0$<br>Μόλις βρεθούν οι παράμετροι χρειάζεται επαλήθευση.                                   |
| Η $C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$   | $x_0 =$ ανοιχτό άκρο διαστήματος ή σημείο ασυνέχειας.   |
| Η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = l$ στο $\pm\infty$  | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$   |
| Η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ στο $\pm\infty$   | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$ |

**2.6 Λύση εξισώσεων - ανισώσεων + Ύπαρξη λύσης****✎ Άσκηση 2.13 : Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης**

Μπορούμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής  $f(x) = a$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

**Τρόποι**

**1<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με θεώρημα Bolzano

**2<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

**3<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με σύνολο τιμών : Αν  $a \in f(D_f)$  τότε υπάρχει  $x_0 \in D_f$  ώστε  $f(x_0) = a$ .

**4<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με θεώρημα Rolle : Βρίσκουμε την αρχική  $F$  της  $f$  οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή  $F'(x) = a$ .

**5<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με Θεώρημα Μέσης Τιμής.

**6<sup>ος</sup> Τρόπος :** Αλγεβρικά

**7<sup>ος</sup> Τρόπος :** Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα.

**8<sup>ος</sup> Τρόπος :** Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

**✎ Άσκηση 2.14 : Εξίσωση που έχει το πολύ μια ρίζα**

Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα έχουμε τους τρόπους

**Τρόποι**

**1<sup>ος</sup> Τρόπος :** Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και  $1 - 1$ .

**2<sup>ος</sup> Τρόπος :** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 ρίζες  $x_1, x_2$  και εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  καταλήγουμε σε άτοπο.

**✎ Άσκηση 2.15 : Μοναδική ρίζα εξίσωσης**

Χρησιμοποιούμε έναν τρόπο για να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και έναν τρόπο για να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ μια ρίζα. Άρα η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

**✎ Άσκηση 2.16 : Επίλυση εξίσωσης**

Για την επίλυση μιας εξίσωσης ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

**1<sup>ος</sup> Περίπτωση : Συνάρτηση  $1 - 1$** 

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή  $f(x) = f(a)$  και δείχνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι  $1 - 1$ . Συνεπώς θα ισχύει

$$f(x) = f(a) \xLeftrightarrow{f:1-1} x = a$$

Η μέθοδος αυτή ακολουθείται και για εξισώσεις της μορφής  $f(g(x)) = f(h(x))$ .

**2<sup>ος</sup> Περίπτωση : Με ολικό ακρότατο**

Φέρνουμε με πράξεις την εξίσωση στη μορφή  $f(x) = a$  και αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός  $a$  είναι ολικό ακρότατο της  $f$ . Οι θέσεις των ακρότατων είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

Πηγή: Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Η επανάληψη.  
Ανδρέας Πάτσης - Παύλος Τρύφων, Εκδόσεις  
Ελληνοεκδοτική