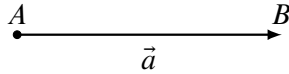


Τυπολόγιο Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1 Διανύσματα

1.1 Η έννοια του διανύσματος

1. Διάνυσμα: Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα:

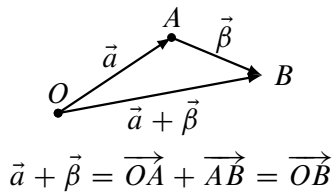


A : αρχή , B : πέρας.

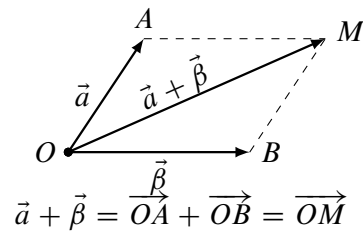
2. Ομόρροπα διανύσματα: $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$. 3. Αντίρροπα διανύσματα: $\vec{a} \downarrow \vec{\beta}$.
4. Ίσα διανύσματα: $\vec{a} = \vec{\beta}$. Έχουν ίσα μέτρα και ίδια κατεύθυνση.
5. Αντίθετα διανύσματα: $\vec{a} = -\vec{\beta}$. Έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.
6. Γωνία διανυσμάτων: $(\vec{a}, \vec{\beta})$. 7. Μέτρο διανύσματος: $|\vec{a}|$.

1.2 Πρόσθεση διανυσμάτων

1. Διαδοχικά διανύσματα:



2. Κανόνας παραλληλογράμμου:

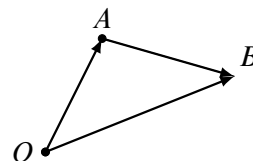


3. Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων:

Ιδιότητα	Συνθήκη	Ιδιότητα	Συνθήκη
Αντιμεταθετική	$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$	Ουδέτερο στοιχείο	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$	Αντίθετα διανύσματα	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

4. Διάνυσμα θέσης:

- \vec{OA}, \vec{OB} διανυσματικές ακτίνες των A, B
- O σημείο αναφοράς.



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

5. Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων: $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

1.3 Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

1. Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα: $\lambda \cdot \vec{a}$.
2. Γραμμικός συνδυασμός: $\vec{\delta} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{\beta}$.
3. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού:

Ιδιότητα	Συνθήκη
Επιμεριστική (ως προς αριθμό)	$\lambda (\vec{a} \pm \vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{a} \pm \lambda \cdot \vec{\beta}$
Επιμεριστική (ως προς διάνυσμα)	$(\lambda \pm \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} \pm \mu \cdot \vec{a}$
Προσεταιριστική	$\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Μηδενικό γινόμενο	$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
Πρόσημο γινομένου	$(-\lambda \cdot \vec{a}) = (-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a})$
Νόμος διαγραφής (ως προς διάνυσμα)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$
Νόμος διαγραφής (ως προς αριθμό)	Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

4. Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων: $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$.

5. Διανυσματική ακτίνα μέσου διανύσματος: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

1.4 Συντεταγμένες διανύσματος

1. Συντεταγμένες διανύσματος: $\vec{a} = (x, y)$.
2. Ίσα διανύσματα $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_1 \text{ και } y_1 = y_2$.
3. Μηδενικά διανύσματα: $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0$
4. Οριζόντια και κατακόρυφα διανύσματα: $\vec{a} \parallel x'x \Leftrightarrow y = 0$ και $\vec{a} \parallel y'y \Leftrightarrow x = 0$
5. Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων:

Πράξη	Συντεταγμένες
Άθροισμα	$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Πολλαπλασιασμός	$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
Γραμμικός συνδυασμός	$\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

6. Συντεταγμένες μέσου διανύσματος: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

7. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα: $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

8. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\omega \text{ όπου } \omega \text{ είναι η γωνία του } \vec{a} \text{ με τον } x'x$$

9. Συνθήκες παραλληλίας διανυσμάτων:

- i. Οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων είναι ίσοι : $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- ii. Η ορίζουσα $\det(\vec{a}, \vec{\beta})$ των συντεταγμένων των διανυσμάτων ισούται με το 0.

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

10. Μέτρο διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. Μέτρο διανύσματος με γνωστά άκρα: $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο

1. Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos \varphi$.

2. Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

Ιδιότητα	Συνθήκη	Ιδιότητα	Συνθήκη
Κάθετα διανύσματα	$\text{Αν } \vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$	Αντιμεταθετική	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$
Ομόρροπα	$\vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta} $	Προσεταιριστική	$\mu(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\mu \vec{\beta}) \cdot \vec{a}$
Αντίρροπα	$\vec{a} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta} $	Επιμεριστική	$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$
Τετράγωνο διανύσματος	$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$		

3. Συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων: $\lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$.

4. Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

5. Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων: $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

2 Ευθεία

2.1 Η ευθεία $y = ax + \beta$

1. Απλή μορφή εξίσωσης ευθείας: $y = ax + \beta$.
2. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας:
 - $\lambda = \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$ όπου $\omega = x\hat{O}M$ με $M(x, y)$ σημείο της ευθείας.
 - $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας.
3. Εξίσωση ευθείας: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
 - Εξίσωση οριζόντιας ευθείας $y = y_0$.
 - Εξίσωση κατακόρυφης ευθείας $x = x_0$.
4. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών: Αν $\varepsilon_1 \parallel \vec{\delta}_1$ και $\varepsilon_2 \parallel \vec{\delta}_2$ τότε
 - $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ή $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$
 - $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ ή $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$.

2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
2. Συντελεστής διεύθυνσης: $\lambda = -\frac{A}{B}$.
3. Παράλληλο διάνυσμα: $\varepsilon \parallel \vec{\delta} = (B, -A)$ ή $\vec{\delta} = (-B, A)$.
4. Κάθετο διάνυσμα: $\varepsilon \perp \vec{n} = (A, B)$ ή $\vec{n} = (-A, -B)$.
5. Γωνία φ δύο ευθειών ε_1 και ε_2 : $\sin\varphi = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|}$ όπου $\varepsilon_1 \parallel \vec{\delta}_1$ και $\varepsilon_2 \parallel \vec{\delta}_2$.

2.3 Απόσταση σημείου από ευθεία

1. Απόσταση σημείου από ευθεία: $d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
2. Απόσταση παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$.

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

3. Εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{B\Gamma}, \vec{A\Gamma}) \right|$$

3 Κωνικές τομές

3.1 Κύκλος

1. Εξίσωση με κέντρο $O(0, 0)$: $x^2 + y^2 = \rho^2$.
2. Εξίσωση με κέντρο $K(x_0, y_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.
3. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
4. Γενική εξίσωση κύκλου: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
 - i. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.
 - ii. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
 - iii. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η εξίσωση δεν αντιστοιχεί σε σχήμα.

3.2 Παραβολή

3.2.1 Εστία στον άξονα $x'x$

1. Εξίσωση: $y^2 = 2px$.
2. Εστία: $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.
3. Διευθετούσα: $x = -\frac{p}{2}$.
4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

3.2.2 Εστία στον άξονα $y'y$

1. Εξίσωση: $x^2 = 2py$.
2. Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$.
3. Διευθετούσα: $y = -\frac{p}{2}$.
4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

3.3 Έλλειψη

3.3.1 Εστίες στον άξονα $x'x$

1. Εξίσωση: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Εστίες: $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$.
3. Παράμετροι a, β, γ ($a > \gamma$):
 - i. Μήκος μεγάλου άξονα: $AA' = 2a$.
 - ii. Μήκος μικρού άξονα: $BB' = 2\beta$.
 - iii. Εστιακή απόσταση: $EE' = 2\gamma$.
 - iv. $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$
4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

5. Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$.

3.3.2 Εστίες στον άξονα $y'y$

1. Εξίσωση: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.
2. Εστίες: $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$.
3. Παράμετροι a, β, γ ($a > \gamma$):
 - i. Μήκος μεγάλου άξονα: $AA' = 2a$.
 - ii. Μήκος μικρού άξονα: $BB' = 2\beta$.
 - iii. Εστιακή απόσταση: $EE' = 2\gamma$.
 - iv. $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$
4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$\frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

5. Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$.

3.4 Υπερβολή

3.4.1 Εστίες στον άξονα $x'x$

1. Εξίσωση: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
2. Εστίες: $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$.
3. Παράμετροι a, β, γ ($a < \gamma$):
 - i. Μήκος άξονα: $AA' = 2a$.
 - ii. Εστιακή απόσταση: $EE' = 2\gamma$.
 - iii. $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$

4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

5. Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$.
6. Ασύμπτωτες ευθείες: $y = \frac{\beta}{a}x, y = -\frac{\beta}{a}x$.

3.4.2 Εστίες στον άξονα $y'y$

1. Εξίσωση: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.
2. Εστίες: $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$.
3. Παράμετροι a, β, γ ($a < \gamma$):
 - i. Μήκος άξονα: $AA' = 2a$.
 - ii. Εστιακή απόσταση: $EE' = 2\gamma$.
 - iii. $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$

4. Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, y_1)$:

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

5. Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$.
6. Ασύμπτωτες ευθείες: $y = \frac{a}{\beta}x, y = -\frac{a}{\beta}x$.