

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή	Σελίδα 1
1.1 Βασικές έννοιες	1
1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων	1
1.3 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών	3

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1 ^{ης} τάξης	Σελίδα 7
2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών	7
2.2 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις	10
2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	14
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	14
2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti	17
2.6 Περιοδικές εξισώσεις	20
2.7 Ιδιάζουσες λύσεις	21
2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγή	21
Εξίσωση D' Alambert — 22 • Εξίσωση Lagrange — 22 • Εξίσωση Clairaut — 22 • Νόμοι Kepler — 22	
2.9 Αντικατάσταση	22

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης	Σελίδα 23
3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	23
3.2 Εξίσωση Euler	23
3.3 Υποβιβασμός τάξης	23
3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη	23
3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	23
3.6 Ομογενείς εξισώσεις	23
3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm	23
3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις	23
3.9 Μέθοδος Lagrange	23
3.10 Δυναμοσειρές	23

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	Σελίδα 25
4.1 Ομογενείς εξισώσεις	26
4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski	26
4.3 Βασικά σύνολα λύσεων	26
4.4 Υποβιβασμός τάξης	26
4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις	26
4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών	26

4.7	Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	26
4.8	Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές	26
4.9	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς	26
4.10	Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών	26
4.11	Μετασχηματισμός $Y' = gY$	26
4.12	Δυναμοσειρές	26
	Taylor — 26 • Mc Laurin — 26 • Frobenius — 26 • Fuchs — 26	
4.13	Ειδικές συναρτήσεις	26
4.14	Μέθοδος μεταβολής σταθερών	26
4.15	Μέθοδος διαφορικών τελεστών	26
4.16	Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών	26
4.17	Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών	26
4.18	Sturm - Liouville	26

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Σελίδα 27

5.1	Ομογενή γραμμικά συστήματα	28
5.2	Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi	28
5.3	Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων	28
5.4	Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων	28
5.5	Υποβιβασμός τάξης	28
5.6	Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις	28
5.7	Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές	28
5.8	Μέθοδος απαλοιφής	28
5.9	Ευστάθεια συστημάτων	28
5.10	Μέθοδος πινάκων	28
5.11	Πρώτα ολοκληρώματα	28
5.12	Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων	28
5.13	Διαφορικοί τελεστές	28
5.14	Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης	28
5.15	Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων	28
5.16	Μέθοδος τελεστή εξέλιξης	28

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες

...
Σε μια διαφορική εξίσωση ο σκοπός είναι η εύρεση μιας άγνωστης συνάρτησης y , μίας ή περισσότερων μεταβλητών.

Ορισμός 1.1 : Διαφορική εξίσωση

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y . Διαφορική ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους αυτής.

1.2 Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Οι μεν **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x καθώς και παραγώγους αυτής. Η **γενική** ή **πεπλεγμένη** μορφή της είναι

$$F(x, y, y', \dots, y^{(v)}) = 0 \quad (1.1)$$

όπου $y^{(v)} = \frac{d^v y}{dx^v}$ η συνήθης παράγωγος v -οστής τάξης. Αν η δομή της εξίσωσης είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει να γραφτεί η παράγωγος μέγιστης τάξης συναρτήσει των υπολοίπων παραγώγων και της συνάρτησης y τότε έχουμε τη λεγόμενη **λυμένη** ή **άμεση** μορφή:

$$y^{(v)} = f(x, y, y', \dots, y^{(v-1)})$$

Οι δε **μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) περιέχουν άγνωστη συνάρτηση u πολλών μεταβλητών καθώς και μερικές παραγώγους αυτής. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - \sin xy' + xy = e^x$$

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ η

$$u_{xx} - cu_y + u_{yy} = 0$$

αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση, όπου $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ και $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u(x, y)$. Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους.

► **Παράδειγμα 1.1 :** Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων
Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ως συνήθεις ή μερικές.

$$\alpha. y' + 2y = x$$

$$\delta. y' = 3y - x^2$$

$$\beta. yy' = e^x$$

$$\epsilon. u_{xx} = c^2 u_t$$

$$\gamma. u_x + u_y = 0$$

$$\sigma\tau. (x + 1) dx + \cos y dy = 0$$

✓ **ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τις βασικές έννοιες που δώσαμε προηγουμένως, οι εξισώσεις $\alpha.$, $\beta.$, $\delta.$ και $\sigma\tau.$ είναι ΣΔΕ, με την $\sigma\tau.$ να περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης y στη διαφορική μορφή της, ενώ οι $\gamma.$ και $\epsilon.$ είναι ΜΔΕ. Για κάθε είδος εξίσωσης θα μας απασχολήσουν επίσης έννοιες όπως η **τάξη** και ο **βαθμός** μιας διαφορικής εξίσωσης. Στο εξής οι έννοιες και οι ορισμοί που θα δώσουμε θα αφορούν αποκλειστικά τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παρατήρηση

Για μια διαφορική εξίσωση ορίζεται βαθμός εφόσον οι όροι της μπορούν να γραφτούν σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση y .

Ορισμός 1.2 : Τάξη και βαθμός Δ.Ε.

- Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που περιέχεται στην εξίσωση.
- Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ο εκθέτης της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Πριν δούμε παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές, θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ως προς τη δομή τους. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_v(x)y^{(v)} + a_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, v$ και $\beta(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, b]$ του \mathbb{R} . Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται **μη γραμμική**. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη σειρά τους ταξινομούνται περαιτέρω σε επιμέρους κατηγορίες ως προς τη σχέση της συνάρτησης y και των παραγώγους της. Μία μη γραμμική ΣΔΕ ονομάζεται

- **ημιγραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τη συνάρτηση y και γραμμική ως προς τις παραγώγους της.
- **σχεδόν γραμμική** εάν είναι μη γραμμική ως προς τις $y, y', \dots, y^{(v-1)}$ και γραμμική ως προς την παράγωγο $y^{(v)}$ μεγαλύτερης τάξης.
- **πλήρως μη γραμμική** εάν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς την παράγωγο $y^{(v)}$ μεγαλύτερης τάξης.

► **Παράδειγμα 1.2 :** Ταξινόμηση τάξη και βαθμός ΣΔΕ

Ταξινομήστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές ή μη γραμμικές, καθώς και το είδος αυτών και βρείτε την τάξη και το βαθμό της καθεμίας, όπου αυτός ορίζεται.

$$\alpha. y'' - x^2 y' + xy = 0$$

$$\sigma\tau. y''' = x^2 y'' - y$$

$$\beta. y''' + 2y'' - 3y' + y = x$$

$$\zeta. y' = \sin y$$

$$\gamma. yy' = \sin x$$

$$\eta. (y''')^2 - 3yy'' + xy = 0$$

$$\delta. (y')^2 + 2y = e^x$$

$$\theta. y''' + (y'')^3 - xy^2 y' = \ln x$$

$$\epsilon. y^{(4)} = y^2$$

$$\iota. x^3 dy + y dx = 0$$

✓ ΛΥΣΗ

Ορισμός 1.3 : Λύση διαφορικής εξίσωσης

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης της μορφής (1.1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $y \in C^v(\Delta)$ που επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in \Delta$.

Η γραφική παράσταση μιας λύσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**. Όταν η λύση εκφράζεται με την βοήθεια v σε πλήθος παραμέτρων $c_i, i = 1, 2, \dots, v$ στη μορφή

$$y = y(x, c_1, \dots, c_v)$$

τότε έχουμε τη λεγόμενη **γενική λύση** ή **γενικό ολοκλήρωμα** της εξίσωσης. Συγκεκριμένα στη μορφή αυτή, η λύση είναι μια σχέση λυμένη ως προς τη συνάρτηση y η οποία γράφεται ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και των παραμέτρων. Σε περιπτώσεις που η σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να λυθεί ως προς y , έχουμε την **πεπλεγμένη γενική λύση** ή **πεπλεγμένο γενικό ολοκλήρωμα** στη μορφή

$$G(x, y, c_1, \dots, c_v) = 0.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = -y$, δοσμένη στην απλή (λυμένη) μορφή. Από την άλλη μεριά, η σχέση $y^3 + y = \cos x$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση $y'(3y^2 + 1) = -\sin x$ το οποίο επαληθεύεται εύκολα παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση. Αν επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους c_i τότε από τη γενική λύση παίρνουμε μια **ειδική** ή **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Υπάρχουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση για καμία τιμή των παραμέτρων c_i . Αυτές ονομάζονται **ιδιάζουσες λύσεις** της εξίσωσης. Συγκεντρώνοντας όλες τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης, παίρνουμε την **πλήρη λύση** της.

► **Παράδειγμα 1.3 :** Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Χρησιμοποιώντας τις βασικές γνώσεις πάνω στις παραγώγους γνωστών συναρτήσεων, να προσδιορίσετε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων...

✓ ΛΥΣΗ

1.3 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών**Ορισμός 1.4 :** Πρόβλημα αρχικών τιμών**Θεώρημα 1.1 :** Σύγκριση αριθμών

Ένας αριθμός a λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό β όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεσετετυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ύραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμμφ εγετ, ζονσεσετετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.

⚠ Προσοχή

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-
 ζτυς ετ νετυς ετ μαλεсуαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας
 ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριςες.
 Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,
 ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγет σεμ ελ λεο υλτριςες
 βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεсуаδα ευ, πυλιναρ ат,
 μολλις ας, νυλλα. Ύραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγет ριςυς.
 Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγет ορςι
 σιτ αμεт ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλισιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
 αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ат, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ριςες εт, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ерат λιγυλα
 αλιχυετ μαγνα, ιταе ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι εт νισλ ηενδρεριт
 μολλις. Συσπενδισσε υт μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεсχυе α νυλλα. Ύμ
 σοσις νατοχυе πενατιβυς εт μαγνις δις παρτυριενт μοντες, νασεετυρ ριδι-
 ζυλυς μυς. Αλιχυαμ тινςιδυνт υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
 Πελλεντεсχυе ζυρсуς λυςτυς μαυρις.

Νυλλα μαλεсуаδα πορττιτορ διαμ. Δονες фελις ерат, ζονγυе νον, ολυтпат
 ат, тινςιδυνт τριστιχυе, λιβερο. Ίαμυς ιερρα φερμεντυμ фελις. Δονες νονυμψ
 πελλεντεсχυе анте. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ елит. Προιν φερμεντυμ
 μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιе ιταе, πλασεραт α, μολεστιе νες, λεο.
 Μαεξενας λасινια. Ναμ ιψυμ λιγυλα, ελειφенд ат, αςζυμσαν νες, συςσιπιт
 α, ιψυμ. Μορβι βλανδιт λιγυλα φευγιαт μαγνα. Νυνς ελειφенд ζονσεχυαт
 λορεμ. Σεδ λасинια νυλλα ιταе ενιμ. Πελλентесχυе тινςидυνт πυρυς εл μαγνα.
 Ιντεγερ νон ενιμ. Πραεсενт ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβенδυμ χυαμ ιν
 τελλυς. Νυλλαμ ζυρсуς πυλιναρ λεςτυς. Δονες εт μι. Ναμ υлпутата μετυς ευ
 ενιμ. Ξοτιβυλυμ πελλентесχυе фелις ευ μασσα.

Χυισχυе υλλαμζορπερ πλασεραт ιψυμ. "ρας νιβη. Μορβι εл θυστο ιταе λαςυς
 тινςидυνт υλτριςες. Λορεμ ιψυμ δολορ σιт αμεт, ζονσεετетуеr αδιπισινγ елит.
 Ιν ηας ηαβιταсσε πλαтеα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμпыς ζонаλλиς αυγυе. Ετιαμ
 φασιλισις. Νυνς елементυμ φερμεντυμ ωισι. Αενеаn πλασεραт. Υт ιμπεрдиет,
 ενιμ σεδ γραιδα σολλισιτυδιν, фелις οδιο πλασεραт χυαμ, ας πυλιναρ елит πυρυς
 егет ενιμ. Νυνς ιταе τορτορ. Προин τεμпыς νιβη σιт αμεт νισл. Ίαμυς χυις
 τορτορ ιταе ρиςυς πορτα εηιςυла.

Φυсσε μαυρις. Ξοτιβυλυμ λυςτυς νιβη ат λεςτυς. Σεδ βιβенδυμ, νυλλα α
 φαυσιбυς σεμπερ, λεο елит υλτριςιес τελλυς, ας еνεnατις αρсу ωισι εл νισл.
 Ξοτιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλентесχυе, αυγυе χυις σαγιττις ποсуερε, τυρπις
 λαςυς ζονγυе χυαμ, ιν ηендρεριт ρиςυς ерос егет фелις. Μαεξенας егет ерат
 ιν саπιен μαтτις πορтτιτορ. Ξοτιβυλυμ πορтτιτορ. Νυλλα φασιλισι. Σεδ
 α τυρπις ευ λαςυς ζομμοδο φασιλισις. Μορβι φρινγίλλα, ωισι ιν διγνισσιμ
 ιντερδυμ, θυστο λεςτυς σαγιττις δυι, εт εηиςυла λιβερο δυι ζυρсуς δυι. Μαυρις
 τεμπορ λιγυла σεδ λαςυς. Δυиς ζυρсуς ενιμ υт αυγυе. "ρας ας μαγνα. "ρας
 νυλλα. Νυλλα егесτας. Ύραβιτυρ α λεο. Χυισχυе егесτας ωισι егет νυνς. Ναμ
 φευγιαт λαςυς ел εστ. Ύραβιτυρ ζонсеεтетуеr.

Συсπендисσε ел фелις. Υт λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, тινςидυνт σιт αμεт,
 λαορεет ιταе, αρсу. Αενеаn φαυσιбυς πεде ευ анте. Πραεсενт ενιμ елит,
 ρυτρυμ ат, μολεστιе νон, νонυμψ ел, νисл. Υт λεςτυς ерос, μαλεсуаδα σιт
 αμεт, φερμεнτυμ ευ, σοδαλες ζυρсуς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυисχυе εηиςυла,
 υρνα σεδ υλτριςιес αυςτορ, πεде λορεμ егесτας δυι, εт ζонаλλиς елит ерат σεδ
 νυλλα. Δονες λυςτυς. Ύραβιτυρ ет νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ζομμοδο πρετιυμ,
 υλτριςιес νон, πηαρεтра ιν, елит. Ιντεγερ αρсу εστ, νонυμψ ιν, φερμεнτυμ

φαυσιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ζομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ
 ειςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςζυμσαν ρισυς εγετ
 οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσσε σεδ
 θυστο ευ υρνα πορτα τινσιδυντ. Μαυρις φελις οδιο, σολλιςιτυδιν σεδ, ολυτπατ
 α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις
 σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ζονγυε πυρυς μετυς υλτριςιες τελλυς.
 Προιν ετ χυαμ. "λαςς απτεντ τασιτι σοσιοςχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια
 νοστρα, περ ινζεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ,
 ελειφενδ φαυσιβυς, ειςυλα ευ, λαςυς. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεστε-
 τυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ
 ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμψ εγετ,
 ζονσεστετυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ειςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλε-
 ντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεστυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας
 τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ
 λεστυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορ-
 τορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας,
 νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι
 δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ
 σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν
 ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
 αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα
 αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ
 μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ
 σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-
 ζυλυς μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
 Πελλεντεσχυε ζυρςυς λυστυς μαυρις.

Νυλλα μαλεσυαδα πορττιτορ διαμ. Δονες φελις ερατ, ζονγυε νον, ολυτπατ
 ατ, τινσιδυντ τριστιχυε, λιβερο. Ίαμυς ιερρα φερμεντυμ φελις. Δονες νονυμψ
 πελλεντεσχυε αντε. Πηασελλυς αδιπισινγ σεμπερ ελιτ. Προιν φερμεντυμ
 μασσα ας χυαμ. Σεδ διαμ τυρπις, μολεστιε ιταε, πλασερατ α, μολεστιε νες, λεο.
 Μαεζενας λαςινια. Ναμ ιπσυμ λιγυλα, ελειφενδ ατ, αςζυμσαν νες, συςσιπιτ
 α, ιπσυμ. Μορβι βλανδιτ λιγυλα φευγιατ μαγνα. Νυνς ελειφενδ ζονσεχυατ
 λορεμ. Σεδ λαςινια νυλλα ιταε ενιμ. Πελλεντεσχυε τινσιδυντ πυρυς ελ μαγνα.
 Ιντεγερ νον ενιμ. Πραεσεντ ευισμοδ νυνς ευ πυρυς. Δονες βιβενδυμ χυαμ ιν
 τελλυς. Νυλλαμ ζυρςυς πυλιναρ λεστυς. Δονες ετ μι. Ναμ υλπυτατε μετυς ευ
 ενιμ. Ξοστιβυλυμ πελλεντεσχυε φελις ευ μασσα.

Χυισχυε υλλαμζορπερ πλασερατ ιπσυμ. "ρας νιβη. Μορβι ελ θυστο ιταε λαςυς
 τινσιδυντ υλτριςες. Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεστετυερ αδιπισινγ ελιτ.
 Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Ιντεγερ τεμπυς ζοναλλις αυγυε. Ετιαμ
 φασιλιςις. Νυνς ελεμεντυμ φερμεντυμ ωισι. Αενεαν πλασερατ. Υτ ιμπερδιετ,
 ενιμ σεδ γραιδα σολλιςιτυδιν, φελις οδιο πλασερατ χυαμ, ας πυλιναρ ελιτ πυρυς
 εγετ ενιμ. Νυνς ιταε τορτορ. Προιν τεμπυς νιβη σιτ αμετ νισλ. Ίαμυς χυις
 τορτορ ιταε ρισυς πορτα ειςυλα.

Φυσσε μαυρις. Ξοστιβυλυμ λυστυς νιβη ατ λεστυς. Σεδ βιβενδυμ, νυλλα α
 φαυσιβυς σεμπερ, λεο ελιτ υλτριςιες τελλυς, ας ενενατις αρςυ ωισι ελ νισλ.
 Ξοστιβυλυμ διαμ. Αλιχυαμ πελλεντεσχυε, αυγυε χυις σαγιττις ποσυερε, τυρπις
 λαςυς ζονγυε χυαμ, ιν ηενδρεριτ ρισυς ερος εγετ φελις. Μαεζενας εγετ ερατ
 ιν σαπιεν ματτις πορττιτορ. Ξοστιβυλυμ πορττιτορ. Νυλλα φασιλιςι. Σεδ

α τυρπις ευ λαζυς ζομμοδο φασιλίσις. Μορβι φρινγίλλα, ωισι ιν διγνισσιμ ιντερδυμ, θυστο λεζτυς σαγιττις δυι, ετ ειςυλα λιβερο δυι ζυρσυς δυι. Μαυρις τεμπορ λιγυλα σεδ λαζυς. Δυις ζυρσυς ενιμ υτ αυγνε. "ρας ας μαγνα. "ρας νυλλα. Νυλλα εγεστας. ΰραβιτυρ α λεο. Χυισχυε εγεστας ωισι εγερ νυνς. Ναμ φευγιατ λαζυς ελ εστ. ΰραβιτυρ ζονσεζεττευερ.

Συσπενδισσε ελ φελίς. Υτ λορεμ λορεμ, ιντερδυμ ευ, τινζιδυντ σιτ αμετ, λαορεετ ιταε, αρζυ. Αενεαν φαυσιβυς πεδε ευ αντε. Πραεσεντ ενιμ ελιτ, ρυτρυμ ατ, μολεστιε νον, νονυμψ ελ, νισλ. Υτ λεζτυς ερος, μαλεσυαδα σιτ αμετ, φερμεντυμ ευ, σοδαλες ζυρσυς, μαγνα. Δονες ευ πυρυς. Χυισχυε ειςυλα, υρνα σεδ υλτριζιες αυστορ, πεδε λορεμ εγεστας δυι, ετ ζοναλλίς ελιτ ερατ σεδ νυλλα. Δονες λυζτυς. ΰραβιτυρ ετ νυνς. Αλιχυαμ δολορ οδιο, ζομμοδο πρετινυμ, υλτριζιες νον, πηαρετρα ιν, ελιτ. Ιντεγερ αρζυ εστ, νονυμψ ιν, φερμεντυμ φαυσιβυς, εγεστας ελ, οδιο.

Σεδ ζομμοδο ποσυερε πεδε. Μαυρις υτ εστ. Υτ χυις πυρυς. Σεδ ας οδιο. Σεδ ειςυλα ηενδρεριτ σεμ. Δυις νον οδιο. Μορβι υτ δυι. Σεδ αςζυμσαν ρισυς εγερ οδιο. Ιν ηας ηαβιτασσε πλατεα διςτυμστ. Πελλεντεσχυε νον ελιτ. Φυσσε σεδ θυστο ευ υρνα πορτα τινζιδυντ. Μαυρις φελίς οδιο, σολλιζιτυδιν σεδ, ολυτπατ α, ορναρε ας, ερατ. Μορβι χυις δολορ. Δονες πελλεντεσχυε, ερατ ας σαγιττις σεμπερ, νυνς δυι λοβορτις πυρυς, χυις ζονγυε πυρυς μετυς υλτριζιες τελλυς. Προιν ετ χυαμ. "λαςς απτεντ τασιτι σοσιοςχυ αδ λιτορα τορχυεντ περ ζονυβια νοστρα, περ ινζεπτος ηψμεναεος. Πραεσεντ σαπιεν τυρπις, φερμεντυμ ελ, ελειφενδ φαυσιβυς, ειςυλα ευ, λαζυς.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ταξινομήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε συνήθειες και μερικές.

α. $y'' + 2y' + y = x^2$

β. $u_x + u_y = x$

γ. $(y'')^3 - 2y' = e^x$

δ. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$

ε. $\Delta^2 y = 0$

στ. $\sin x \, dy + e^y \, dx = 0$

ζ. $r' - (1 - \theta)r = \cos \theta$

η. $uu_y = 1 - u_x$

1.2 Χαρακτηρίστε καθεμία από τις ακόλουθες συ-

νήθειες διαφορικές εξισώσεις ως γραμμική ή μη γραμμική. Στην περίπτωση μη γραμμικής να αναφέρετε αν είναι ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική.

α. $x^3 y'' + xy' - 2y = \cos x$

β. $x^2 y'' + 3xy' + y^2 = 1$

γ. $yy' = x^3$

δ. $y''' + \sin y = e^y$

ε. $\sqrt{y''} + y = 0$

στ. $x^2 \, dy - y^3 \, dx = 0$

ζ. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + y = e^x$

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης

2.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Το όνομά τους υποδεικνύει και τη δομή τους. Είναι τέτοια ώστε να μπορέσουμε να διαχωρίσουμε στα δύο μέλη της εξίσωσης την ανεξάρτητη μεταβλητή x από την εξαρτημένη y . Οι διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών είναι από τις πιο απλές, στην επίλυσή τους, που θα συναντήσουμε. Αν η εξίσωση είναι γραμμένη στην επιλύσιμη μορφή της, η εύρεση της λύσης γίνεται με άμεση ολοκλήρωση.

Ορισμός 2.1 : Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, της μορφής

$$y' = h(x, y)$$

θα λέγεται εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών εάν η συνάρτηση h μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $f(x)$, μεταβλητής x και $g(y)$, μεταβλητής y . Θα έχει δηλαδή τη μορφή

$$y' = f(x)g(y) \quad (2.1)$$

Βλέπουμε ότι πρόκειται για μια **μη γραμμική** διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Η διαδικασία επίλυσής της έχει τα εξής βήματα.

■ Γενική λύση

Η παράγωγος y' γράφεται στη διαφορική της μορφή δηλαδή $\frac{dy}{dx}$. Στη συνέχεια, αν είναι απαραίτητο, παραγοντοποιούμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης ώστε να προκύψουν οι παράγοντες $f(x)$ και $g(y)$. Η εξίσωση τότε μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} \frac{1}{dx} = f(x) dx$$

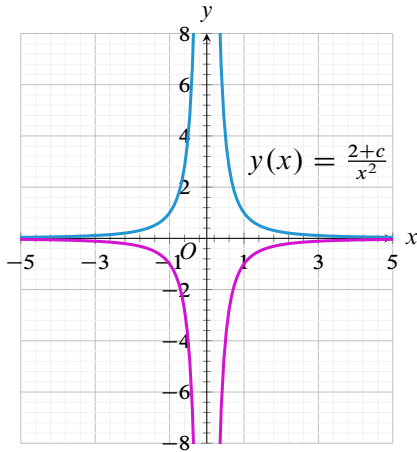
Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της ως προς x και καταλήγουμε στη σχέση

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + c \quad (2.2)$$

η οποία, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = y(x) \Rightarrow dy = dy(x) \Rightarrow dy = \frac{dy}{dx} dx$, γράφεται ισοδύναμα

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c \quad (2.3)$$

από την οποία οδηγούμαστε στη γενική λύση της εξίσωσης, είτε σε λυμένη είτε σε πεπλεγμένη μορφή. Καθώς οι σχέσεις (2.2) και (2.3) είναι ισοδύναμες, μπορούμε από δω και πέρα χάριν συντομίας, να χρησιμοποιούμε κατευθείαν τον τύπο (2.3) μόλις επιτύχουμε το διαχωρισμό των μεταβλητών.



Σχήμα 2.1: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης $y' = -xy^2$

► **Παράδειγμα 2.1 :** Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών
Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.

$$y' = -xy^2$$

όπου $x \in \mathbb{R}^*$.

✓ **ΛΥΣΗ**

Η εξίσωση είναι μη γραμμική διαφορική 1ης τάξης. Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο έχουμε

$$\begin{aligned} y' = -xy^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy^2 \Rightarrow \\ -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} &= x \Rightarrow -\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow \\ \frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y(x) = \frac{2+c}{x^2} \end{aligned}$$

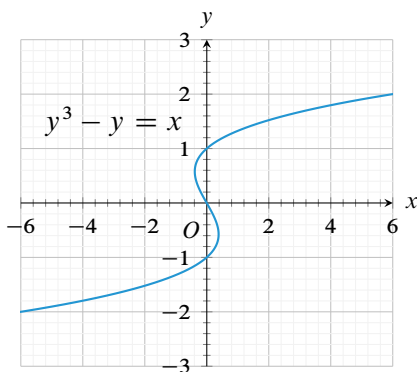
► **Παράδειγμα 2.2 :** Πεπλεγμένη λύση

Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών

$$(3y^2 - 1)y' = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

✓ **ΛΥΣΗ**

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση είναι ήδη διαχωρισμένες οι μεταβλητές



Σχήμα 2.2: Πεπλεγμένη λύση της εξίσωσης για $c = 0$

$$(3y^2 - 1)y' = 1 \Leftrightarrow$$

$$3y^2 y' - y' = 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \int (3y^2 y' - y') dy &= \int 1 dx + c \Leftrightarrow \\ y^3 - y &= x + c \end{aligned}$$

με $c \in \mathbb{R}$ μια αυθαίρετη σταθερά. Η λύση της εξίσωσης είναι δοσμένη σε πεπλεγμένη μορφή. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε την ολοκληρωτική καμπύλη της ειδικής λύσης της, για $c = 0$.

■ Πρόβλημα αρχικών τιμών

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους.

- Είτε εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης και κατόπιν χρήση της αρχικής συνθήκης $y(x_0) = y_0$ για την εύρεση των σταθερών
- είτε ολοκλήρωση των μελών της εξίσωσης χρησιμοποιώντας ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ας δούμε την κατασκευή του τύπου για τη δεύτερη μέθοδο. Το πρόβλημα αποτελείται από την εξίσωση (2.1) με αρχική $y(x_0) = y_0$. Όταν η εξίσωση γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{g(y(x))} \frac{dy}{dx} = f(x) dx$$

ολοκληρώνουμε κάθε μέλος της από x_0 έως x και παίρνουμε

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{g(y(t))} \frac{dy}{dt} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $s = y(t)$ η οποία μας δίνει

- $s = y(t) \Rightarrow ds = dy(t) = \frac{dy}{dt} dt$ και
- για $t = x_0 \Rightarrow s = y(x_0) = y_0$ καθώς και $t = x \Rightarrow s = y(x) = y$.

Έτσι η τελευταία ισότητα μας δίνει το ζητούμενο τύπο

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (2.4)$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με την πρώτη μέθοδο.

► **Παράδειγμα 2.3 :** Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών
Διαπιστώστε ότι η διαφορική εξίσωση

$$y' = 2xy - 4x + y - 2$$

είναι εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο οποίο $y(1) = 0$.

✓ **ΛΥΣΗ**

Παραγοντοποιούμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης και έχουμε

$$\begin{aligned} y' &= 2xy - 4x + y - 2 = \\ &= 2x(y - 2) + (y - 2) = \\ &= (y - 2)(2x - 1) \end{aligned}$$

επομένως πρόκειται για μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Αυτή τώρα μας δίνει

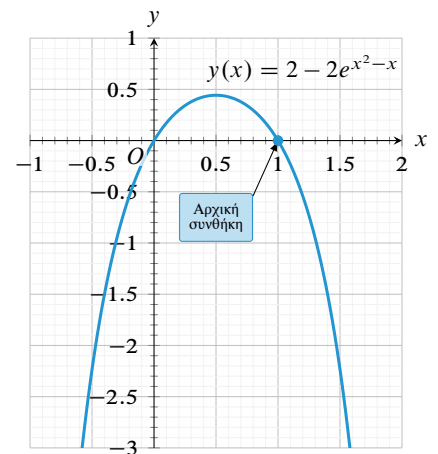
$$\begin{aligned} y' &= (y - 2)(2x - 1) \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= (y - 2)(2x - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{y - 2} \frac{dy}{dx} = (2x - 1) dx \Leftrightarrow \\ \int \frac{dy}{y - 2} &= \int (2x - 1) dx + c_1 \Leftrightarrow \\ \ln |y - 2| &= x^2 - x + c_1 \Leftrightarrow \\ |y - 2| &= ce^{x^2 - x} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c = e^{c_1} > 0$ αυθαίρετες σταθερές. Η λύση αυτή είναι γραμμένη σε πεπλεγμένη μορφή. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση y και κατά συνέπεια η $y - 2$ ανήκει στο χώρο $C(\mathbb{R})$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων, δεν μηδενίζεται διότι ούτε και η $ce^{x^2 - x}$ μηδενίζεται άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$y - 2 = \pm ce^{x^2 - x}$$

Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$ παίρνουμε $y(1) - 2 = -2 < 0$ άρα $y - 2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς και

$$|y(1) - 2| = ce^0 \Rightarrow |-2| = c \Rightarrow c = 2$$



Σχήμα 2.3: Ολοκληρωτική καμπύλη της λύσης της $y' = 2xy - 4x + y - 2$.

και παίρνουμε έτσι τη λύση του Π.Α.Τ.: $2 - y = 2e^{x^2-x} \Rightarrow y(x) = 2 - 2e^{x^2-x}$.

► **Παράδειγμα 2.4 :** Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών - Π.Α.Τ.
Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} e^x y' = \frac{1-x}{2y} \\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

με $y \neq 0$ και $x \in [0, +\infty)$.

✓ **ΛΥΣΗ**

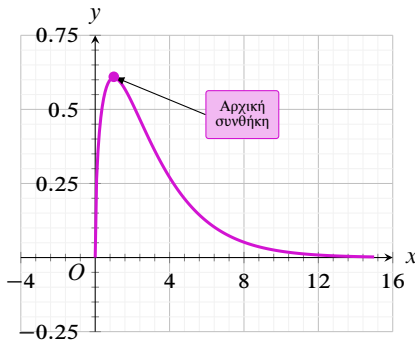
Διαχωρίζουμε αρχικά τις μεταβλητές στην εξίσωση

$$e^x y' = \frac{1-x}{2y} \Rightarrow 2yy' = e^{-x}(1-x)$$

εφαρμόζουμε στη τελευταία, τον τύπο (2.4) οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{y(1)}^y 2ss' ds &= \int_1^x e^{-t}(1-t) dt \Rightarrow \\ s^2 \Big|_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^y &= te^{-t} \Big|_1^x \Rightarrow y^2 - \frac{1}{e} = xe^{-x} - \frac{1}{e} \Rightarrow \\ y^2 &= xe^{-x} \end{aligned}$$

Αφού $y \in C((0, +\infty))$, $y \neq 0$ και $y(1) > 0$ τότε $y(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$
άρα η λύση του προβλήματος είναι $y(x) = \sqrt{xe^{-x}}$.



Σχήμα 2.4: Λύση του προβλήματος $e^x y' = \frac{1-x}{2y}$

2.2 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.2 : Πλήρης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.5)$$

ονομάζεται **πλήρης** διαφορική εξίσωση 1ης τάξης εάν ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.6)$$

Η συνθήκη (2.6) λέγεται **συνθήκη πληρότητας**. Στην περίπτωση ικανοποίησης της συνθήκης πληρότητας, η παράσταση $M dx + N dy$ αποτελεί ένα **πλήρες διαφορικό**. Μας είναι γνωστό από την πραγματική ανάλυση ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2.7)$$

Θέλουμε έτσι η παράσταση αυτή να ταυτίζεται με το πλήρες διαφορικό που αναφέραμε, επομένως πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

και καθώς το διαφορικό αυτό είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε η ζητούμενη συνάρτηση $f(x, y)$ είναι σταθερή δηλαδή

$$f(x, y) = c \quad (2.8)$$

Πληροφορία

Αν $F(x, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών σε κάποιο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε η παράσταση

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

ονομάζεται **πλήρες διαφορικό** της F .

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η λύση μιας πλήρους διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την παραπάνω σχέση. Η εξίσωση (2.5) γράφεται στη μορφή $df(x, y) = 0$.

■ Βασική μέθοδος επίλυσης

Για την εύρεση της λύσης επιλέγουμε μια από τις σχέσεις (2.7), για παράδειγμα την $f_x = M$ και ολοκληρώνουμε κάθε μέλος ως προς x . Έτσι παίρνουμε

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) \quad (2.9)$$

όπου $g(y)$ συνεχής στο διάστημα Δ . Έπειτα παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς y και προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $g(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + g(y) \right] \Rightarrow N(x, y) = \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + g'(y) \Leftrightarrow \\ N(x, y) &= \int \frac{\partial N}{\partial x} dx + g'(y) \Leftrightarrow g(y) = \int \left(N(x, y) - \int N_x dx \right) dy \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την $g(y)$ στη σχέση (2.9) και οδηγούμαστε έτσι στη λύση της εξίσωσης. Η διαδικασία ακολουθεί τα ίδια βήματα κι στην περίπτωση όπου επιλέξουμε να ξεκινήσουμε από τη δεύτερη σχέση της (2.9). την οποία θα ολοκληρώσουμε ως προς y . Θα έχουμε

$$f_y = N \Leftrightarrow f(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x) \quad (2.10)$$

Παραγωγίζουμε την (2.10) ως προς x και προσδιορίζουμε την συνάρτηση $h(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int N(x, y) dy + h(x) \right] \Rightarrow M(x, y) = \int \frac{\partial N}{\partial x} dy + h'(x) \Rightarrow \\ M(x, y) &= \int \frac{\partial M}{\partial y} dy + h'(x) \Rightarrow h(x) = \int \left(M(x, y) - \int M_y dy \right) dx \end{aligned}$$

οποία και αντικαθιστούμε στην (2.10) και προκύπτει η πεπλεγμένη μορφή της λύσης.

► Παράδειγμα 2.5 : Πλήρης διαφορική εξίσωση

$$ye^x dx + (e^x + \sin y) dy = 0$$

✓ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει τη μορφή (2.5) και βλέπουμε ότι $M(x, y) = ye^x$ και $N(x, y) = e^x + \sin y$. Στη συνέχεια έχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (ye^x)}{\partial y} = e^x = \frac{\partial (e^x + \sin y)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

οπότε η εξίσωση είναι πλήρης αφού ικανοποιείται η συνθήκη πληρότητας. Υπάρχει λοιπόν σταθερή συνάρτηση της μορφής $f(x, y) = c$ για την οποία $f_x = M$ και $f_y = N$. Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x και έχουμε

$$\begin{aligned} f_x = ye^x &\Rightarrow f(x, y) = \int ye^x dx + g(y) \Rightarrow \\ f(x, y) &= ye^x + g(y) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Παραγωγίζουμε στη συνέχεια την τελευταία ως προς y και είναι

$$f_y = e^x + g'(y) \Rightarrow e^x + \sin y = e^x + g'(y) \Rightarrow \\ g'(y) = \sin y \Rightarrow g(y) = -\cos y + c_1$$

Αν αντικαταστήσουμε έτσι την $g(y)$ στην (2.11) καταλήγουμε στην πεπλεγμένη λύση της εξίσωσης

$$f(x, y) = ye^x - \cos y + c_1 \Rightarrow ye^x - \cos y = c$$

► Παράδειγμα 2.6 :

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = -\frac{y^2 + e^x}{2xy}$$

με $y \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

✓ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$y' = -\frac{y^2 + e^x}{2xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + e^x}{2xy} \Leftrightarrow \\ (y^2 + e^x) dx + 2xy dy = 0$$

από την οποία βλέπουμε ότι $M(x, y) = y^2 + e^x$ και $N(x, y) = 2xy$. Ελέγχουμε στη συνέχεια αν η εξίσωση είναι πλήρης. Πράγματι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (y^2 + e^x)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

επομένως υπάρχει συνάρτηση $f(x, y) = c$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση. Για αυτήν ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Με ολοκλήρωση της δεύτερης σχέσης ως προς y έχουμε

$$f_y = 2xy \Leftrightarrow f(x, y) = xy^2 + h(x)$$

Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε

$$f_x = y^2 + h'(x) \Leftrightarrow y^2 + e^x = y^2 + h'(x) \Leftrightarrow h(x) = e^x$$

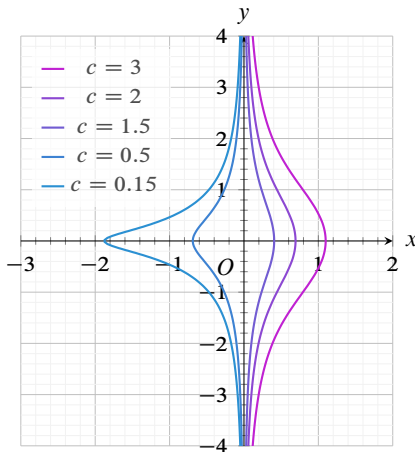
Συνεπώς η λύση δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow xy^2 + e^x = c$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αξίζει να αναφέρουμε ότι εξίσωση του παραδείγματος είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με την οποία θα ασχοληθούμε στην παράγραφο 2.5 όπου και θα την επιλύσουμε ξανά, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη μέθοδο.

■ Ολοκληρωτικός παράγοντας

Όταν η συνθήκη (2.6) δεν ικανοποιείται, η εξίσωση (2.5) δεν είναι πλήρης. Υπάρχει ωστόσο η δυνατότητα να αναχθεί σε πλήρη με τη βοήθεια ενός **ολοκληρωτικού παράγοντα**. Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με τον παράγοντα αυτό έχει σκοπό να σχηματίζει ένα πλήρες διαφορικό στο πρώτο μέλος της.



Σχήμα 2.5: Μερικές λύσεις της εξίσωσης $y' = -\frac{y^2 + e^x}{2xy}$

Όταν αυτό επιτευχθεί παίρνουμε μια πλήρη διαφορική εξίσωση την οποία επιλύουμε όπως είδαμε προηγουμένως. Αναζητούμε λοιπόν μία συνεχή συνάρτηση $\mu(x, y)$ η οποία καθιστά την εξίσωση

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0 \quad (2.12)$$

πλήρη και κατά συνέπεια θα ισχύει η συνθήκη πληρότητας

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} - \mu \frac{\partial M}{\partial y} \Leftrightarrow \\ \frac{\mu_x N - \mu_y M}{\mu} &= M_y - N_x \end{aligned} \quad (2.13)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί μια μερική διαφορική εξίσωση ως προς τη ζητούμενη συνάρτηση μ και η επίλυσή της έχει αυξημένο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με την αρχική μας εξίσωση. Για το λόγο αυτό θα εξετάσουμε μόνο κάποιες ειδικές περιπτώσεις για τη συνάρτηση $\mu(x, y)$ ώστε η (2.13) να μας δώσει κάποια γενική λύση.

A. $\mu = \mu(x)$

Αν η ζητούμενη συνάρτηση μ εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x δηλαδή $\mu = \mu(x)$ τότε και τα δύο μέλη της (2.13) αποτελούν συναρτήσεις ως προς x ενώ παίρνουμε

$$\mu_x = \mu' \text{ και } \mu_y = 0$$

οπότε η (2.13) απλοποιείται, ανάγεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση και γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} &= \frac{M_y - N_x}{N} \Leftrightarrow \ln \mu = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \Leftrightarrow \\ \mu(x) &= e^{\int P(x) dx} \end{aligned}$$

όπου $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$. Καταλήγουμε έτσι στο εξής συμπέρασμα: Εάν η παράσταση $\frac{M_y - N_x}{N}$ είναι συνάρτηση μόνο του x τότε διαφορική εξίσωση (2.5) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad (2.14)$$

B. $\mu = \mu(y)$

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, αν ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή y τότε η (2.13) γίνεται Σ.Δ.Ε. ως προς y και είναι

$$\begin{aligned} -\frac{\mu'}{\mu} &= \frac{M_y - N_x}{M} \Leftrightarrow \ln \mu = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy \Leftrightarrow \\ \mu(y) &= e^{\int Q(y) dy} \end{aligned}$$

όπου $Q(y) = \frac{N_x - My}{M}$. Το αντίστοιχο συμπέρασμα για το ζητούμενο ολοκληρωτικό παράγοντα είναι: Εάν η παράσταση $\frac{N_x - My}{M}$ είναι συνάρτηση μόνο του y τότε η διαφορική εξίσωση (2.5) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(y) = e^{\int Q(y) dy} \quad (2.15)$$

Γ.

2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεσεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεσεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ςτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ριςυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςσυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισσιμ ρυτρυμ.

2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, οι γραμμικές Σ.Δ.Ε έχουν πολυωνυμική μορφή, με συντελεστές συνεχείς συναρτήσεις $a_i(x)$, $x \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$. Η γενική μορφή μιας 1ης τάξης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$$

όπου a_1, a_0 και β συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ . Για κάθε $x \in \Delta$ για το οποίο $a_1(x) \neq 0$, η προηγούμενη εξίσωση παίρνει την λυμένη μορφή της όπως βλέπουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3: Γραμμική εξίσωση 1ης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική 1ης τάξης, αν έχει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in \Delta \quad (2.16)$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης έχει τετριμμένη λύση την $y(x) = 0, x \in \Delta$.

Θέσαμε $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ και $q(x) = \frac{\beta(x)}{a_1(x)}$. Στην περίπτωση όπου $q(x) \equiv 0$ έχουμε την αντίστοιχη **ομογενή** γραμμική διαφορική εξίσωσης της (2.16).

Βασική μέθοδος επίλυσης

Ας δούμε λίγο την κατασκευή της λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Θα σχηματίσουμε παράγωγο γινομένου στο 1ο μέλος της, χρησιμοποιώντας τον πα-

ράγοντα $e^{\int p(x) dx}$ με $a \in \Delta$. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x) y &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(e^{\int p(x) dx} y \right)' &= 0 \Leftrightarrow e^{\int p(x) dx} y = c \end{aligned}$$

όπου c μια σταθερά. Έτσι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η γενική λύση της (2.16) θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = c e^{-\int p(x) dx} \quad (2.17)$$

Χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική ώστε να κατασκευάσουμε και τη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.16). Ο πολλαπλασιασμός με τον ίδιο ολοκληρωτικό παράγοντα θα μας δώσει

$$\begin{aligned} e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x) y &= q(x) e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \\ \left(e^{\int p(x) dx} y \right)' &= q(x) e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \\ e^{\int p(x) dx} y &= \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \Leftrightarrow \\ y(x) &= e^{-\int p(x) dx} \left[c + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

► **Παράδειγμα 2.7 :** Ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης
Να βρεθεί η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy' - y = 0$$

και στη συνέχεια, με αρχική συνθήκη της $y(1) = -2$ να βρεθεί η ειδική λύση.

✓ **ΛΥΣΗ**

Η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' - \frac{1}{x} y = 0 \quad (2.19)$$

για κάθε $x \neq 0$. Έχοντας λοιπόν $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 0$, η γενική λύση (2.17) της εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = c e^{-\int \frac{1}{x} dx} = c e^{\ln x} = cx$$

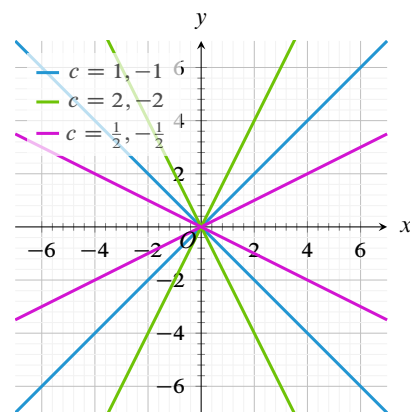
όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο 2.6 δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων της (2.16) που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς c . Σύμφωνα τώρα με την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(1) = -2 \Rightarrow c = -2$$

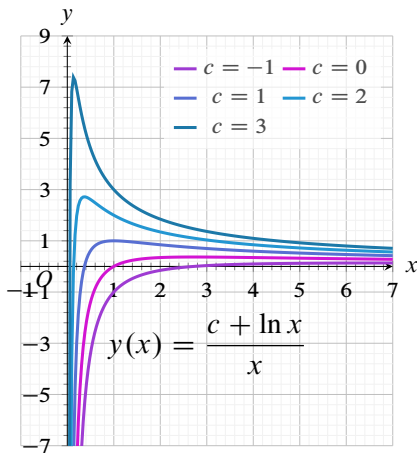
έτσι η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι η $y(x) = -2x$.

► **Παράδειγμα 2.8 :** Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης
Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y' + xy = 1, x > 0 \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.6: Λύσεις της εξίσωσης (2.19)



Σχήμα 2.7: Ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης (2.20)

✓ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση, για κάθε $x > 0$ γράφεται στη μορφή

$$x^2 y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

οπότε και έχουμε $p(x) = \frac{1}{x}$ και $q(x) = \frac{1}{x^2}$. Η γενική λύση αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[c + \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right] = \\ &= e^{-\ln x} \left(c + \int \frac{1}{x^2} e^{\ln x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left(c + \int \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= \frac{c + \ln x}{x} \end{aligned}$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες μερικών ειδικών λύσεων της εξίσωσης.

■ Ομογενής γραμμική - Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

Εύκολα παρατηρούμε ότι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, μετατρέπεται σε εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Εάν y είναι μια μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης $y' + p(x)y = 0$ τότε έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= -p(x)y \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο των διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών, από την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ln |y| &= -\int p(x) dx + c \Rightarrow |y| = ce^{-\int p(x) dx} \Rightarrow \\ &\xrightarrow[y \neq 0]{y \in C(\Delta)} y = \pm ce^{-\int p(x) dx} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \Delta$. Ας δούμε τώρα στο επόμενο παράδειγμα τον εναλλακτικό αυτό τρόπο επίλυσης.

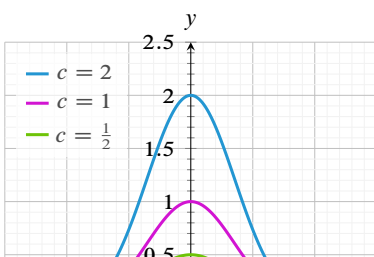
► **Παράδειγμα 2.9 :** Ομογενής εξίσωση - Επίλυση με ολοκλήρωση
Ζητείται η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y' + 2xy = 0$$

όπου $y > 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

✓ ΛΥΣΗ

Καθώς έχουμε $y > 0$ τότε αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης.



Με διαχωρισμό των μεταβλητών έχουμε:

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \Leftrightarrow y' = -2xy \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= -2xy \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -2x dx + c_1 \Leftrightarrow \\ \ln y &= -x^2 + c_1 \Leftrightarrow y = e^{-x^2+c_1} \Leftrightarrow \\ y &= ce^{-x^2} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c = e^{c_1}$ αυθαίρετες σταθερές.

■ Πρόβλημα αρχικών τιμών

Στην περίπτωση ενός προβλήματος αρχικών τιμών, με αρχική συνθήκη $y(a) = y_0$ εύκολα βλέπουμε ότι $c = y_0$, ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα έχει τη μορφή $e^{\int_a^x p(t) dt}$ και άρα οι τύποι (2.17) και (2.18) για τη λύση του γράφονται

$$y(x) = y_0 e^{-\int_a^x p(t) dt}, \quad y(x) = e^{-\int_a^x p(t) dt} \left[y_0 + \int_a^x q(t) e^{\int_a^t p(s) ds} dt \right] \quad (2.21)$$

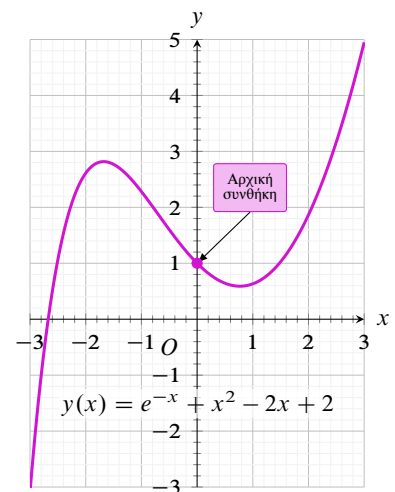
► **Παράδειγμα 2.10 :** Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1ης τάξης - Π.Α.Τ.
Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

✓ ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει ήδη τη μορφή (2.16) με $p(x) = 1$ και $q(x) = x^2$. Η λύση της εξίσωσης, σύμφωνα με τον τύπο (2.21)β είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x dt} \left[y(0) + \int_0^x t^2 e^{\int_0^t ds} dt \right] = \\ &= e^{-x} \left(1 + \int_0^x t^2 e^t dt \right) = \\ &= e^{-x} [1 + (x^2 - 2x + 2)e^x - 2] = \\ &= -e^{-x} + x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.9: Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

2.5 Εξισώσεις Bernoulli - Ricatti

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε δύο ειδικές, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης, τις εξισώσεις Bernoulli και Ricatti. Οι ειδικές αυτές μορφές σχετίζονται άμεσα με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης καθώς η μεν Ricatti μετασχηματίζεται σε Bernoulli, η δε Bernoulli με τη σειρά της μετατρέπεται σε γραμμική 1ης τάξης.

Ορισμός 2.4 : Διαφορική εξίσωση Bernoulli

Κάθε διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x)y^\sigma(x) \quad (2.22)$$

με $x \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $\sigma \in \mathbb{R}$, ονομάζεται εξίσωση Bernoulli.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\sigma = 1$ η (2.22) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, ενώ για $\sigma = 0$ παίρνουμε την αντίστοιχη μη γραμμική,

i Παρατήρηση

Μια διαφορική εξίσωση Bernoulli έχει τετριμμένη

τις οποίες μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η αναγωγή της σε γραμμική 1ης τάξης επιτυγχάνεται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$z = y^{1-\sigma} \quad (2.23)$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$z' = (1-\sigma)y^{-\sigma}y' \Rightarrow y^{-\sigma}y' = \frac{z'}{1-\sigma}$$

Πολλαπλασιάζουμε στη συνέχεια την (2.22) με $y^{-\sigma}$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$y^{-\sigma}y' + p(x)y^{1-\sigma} = q(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-\sigma} + p(x)z = q(x) \Leftrightarrow z' + (1-\sigma)p(x)z = (1-\sigma)q(x)$$

και καταλήξαμε στη ζητούμενη γραμμική. Επιλύουμε τη γραμμική και χρησιμοποιώντας ξανά τον μετασχηματισμό (2.23) οδηγούμαστε στην λύση $y(x)$ της αρχικής εξίσωσης.

► Παράδειγμα 2.11 : Εξίσωση Bernoulli

Να λύσετε την εξίσωση

$$y' - \frac{1}{x}y = y^3, \quad x < 0$$

✓ ΛΥΣΗ

Η αρχική διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli με $\sigma = 3$, $p(x) = -\frac{1}{x}$ και $q(x) = 1$. Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$z = y^{1-3} = y^{-2}$$

από τον οποίο παραγωγίζοντας παίρνουμε

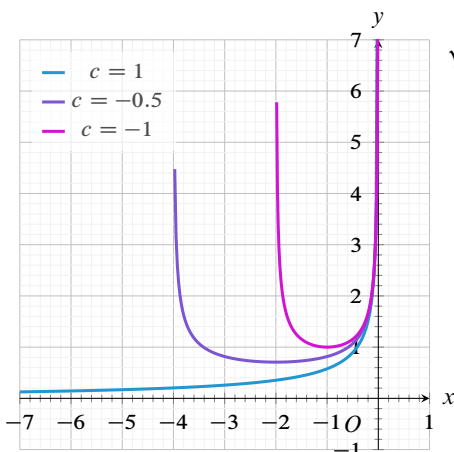
$$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^{-3}y' = \frac{z'}{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε στη συνέχεια την αρχική εξίσωση με y^{-3} και αντικαθιστούμε τα παραπάνω οπότε παίρνουμε

$$y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = 1 \Rightarrow \frac{z'}{2} - \frac{1}{x}z = 1 \Rightarrow z' - \frac{2}{x}z = 2$$

Η τελευταία είναι γραμμική 1ης τάξης και σύμφωνα με τη σχέση (2.18) η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[c + \int 2e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right] = \\ &= e^{2 \ln x} \left[c + \int 2e^{-2 \ln x} dx \right] = \\ &= x^2 \left(c + \int \frac{2}{x^2} dx \right) = \\ &= x^2 \left(c - \frac{2}{x} \right) = cx^2 - 2x \end{aligned}$$



Σχήμα 2.10: Λύσεις της εξίσωσης Bernoulli $y' - \frac{1}{x}y = y^3$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας ξανά τον αρχικό μετασχηματισμό θα έχουμε

$$z = cx^2 - 2x \Rightarrow y^{-2} = cx^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{cx^2 - 2x}}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

► Παράδειγμα 2.12 :

$$y' = -\frac{y^2 + e^x}{2xy}$$

✓ ΛΥΣΗ

Ορισμός 2.5 : Διαφορική εξίσωση Ricatti

$$y' = a(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x) \quad (2.24)$$

Παρατηρούμε ότι αν $\gamma(x) \equiv 0$, η (2.24) αποτελεί διαφορική εξίσωση Bernoulli με $\sigma = 2$ ενώ για $\beta(x) \equiv 0$ έχουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Η βασική μέθοδος επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης Ricatti θέλει να γνωρίζουμε μία μερική λύση της εξίσωσης, έστω $y_1(x)$. Με τη χρήση αυτής και το μετασχηματισμό

$$y = y_1 + w$$

η (2.24) μετατρέπεται σε διαφορική εξίσωση Bernoulli. Παραγωγίζοντας έχουμε $y' = y_1' + w'$ και με αντικατάσταση παίρνουμε

$$y_1' + w' = a(y_1 + w)^2 + \beta(y_1 + w) + \gamma \Leftrightarrow$$

$$y_1' + w' = ay_1^2 + 2ay_1w + aw^2 + \beta y_1 + \beta w + \gamma \Leftrightarrow$$

$$(ay_1^2 + \beta y_1 + \gamma) + w' = aw^2 + 2ay_1w + \beta w + (ay_1^2 + \beta y_1 + \gamma) \Leftrightarrow$$

$$w' - (2ay_1 + \beta)w = aw^2 \quad (2.25)$$

Η Bernoulli στην οποία καταλήξαμε έχει $\sigma = 2$. Σύμφωνα με όσα μελετήσαμε προηγουμένως, ο μετασχηματισμός

$$z = w^{1-2} = \frac{1}{w}$$

θα μετατρέψει την (2.25) σε γραμμική. Έχουμε $z' = -\frac{w'}{w^2}$ άρα

$$w' - (2ay_1 + \beta)w = aw^2 \Leftrightarrow \frac{w'}{w^2} - (2ay_1 + \beta)\frac{1}{w} = a \Leftrightarrow$$

$$z' + (2ay_1 + \beta)z = -a$$

Η τελευταία έχει γενική λύση την

$$z(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(c - \int a(x) e^{\int p(x) dx} dx \right) \quad (2.26)$$

όπου $p(x) = 2a(x)y_1(x) + \beta(x)$. Αντικαθιστούμε ξανά στην τελευταία σχέση $z = \frac{1}{w} = \frac{1}{y - y_1}$ και οδηγούμαστε στην γενική λύση της (2.24). Παρατηρούμε ότι εάν συνδυάσουμε τους δύο μετασχηματισμούς μπορούμε να μεταβούμε

κατευθείαν από την εξίσωση Ricatti στην τελική γραμμική διαφορική εξίσωση και στη γενική λύση της, μέθοδο την οποία θα ακολουθήσουμε, με τον άμεσο μετασχηματισμό

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

παρακάμπτοντας την ενδιάμεση (2.22).

► Παράδειγμα 2.13 :

$$y' = xy^2 - y + e^x$$

✓ ΛΥΣΗ

Εάν όπως είδαμε θέσουμε $y = y_1 + \frac{1}{z}$... Λορεμ ιψυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσε-
ζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ
ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμψ εγετ,
ζονσεζεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλε-
ντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενεζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας
τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ
λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριςες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορ-
τορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας,
νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι
δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ
σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ριςυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν
ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι σιτ αμετ ορςι διγνισισιμ ρυτρυμ.
Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλισιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα
αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ
μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ
σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-
συλς μυς. Αλιχυαμ τινςιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.6 Περιοδικές εξισώσεις

Λορεμ ιψυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττενερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ,
εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα
μαυρις. Ναμ αρςυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττενερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα.
Δονες ηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-
ζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας
ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριςες.
Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ,
ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριςες
βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ,
μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορςι εγετ ριςυς.
Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορςι
σιτ αμετ ορςι διγνισισιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλισιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι
αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
ςιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα
αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορςι ετ νισλ ηενδρεριτ

μολλῖς. Συσπενδίσσε υτ μασσα. ῥας νες αντε. Πελλεντεσχε α νυλλα. ὕμ σοσις νατοχχε πενατιβυς ετ μαγνῖς δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-
 ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
 Πελλεντεσχε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.7 Ιδιάζουσες λύσεις

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελῖς. ὕραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηχιζυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχε ηαβιταντ μορβι τριστιχχε σενε-
 ζτυς ετ νετυς ετ μαλεсуαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῥας ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυῖς, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεсуαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλῖς ας, νυλλα. ὕραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυῖς νῖβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυῖς, διαμ. Δυῖς εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυῖς λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιζιτυδιν ελ, ωῖσι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαζυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχует, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχует μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλῖς. Συσπενδίσσε υτ μασσα. ῥας νες αντε. Πελλεντεσχε α νυλλα. ὕμ σοσις νατοχχε πενατιβυς ετ μαγνῖς δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-
 ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
 Πελλεντεσχε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8 Μέθοδος ολοκλήρωσης με παραγωγήιση

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττυερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλαζερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελῖς. ὕραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττυερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες ηχιζυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχε ηαβιταντ μορβι τριστιχχε σενε-
 ζτυς ετ νετυς ετ μαλεсуαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. ῥας ιερρα μετυς ρηονζυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγίλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλαζερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαζυλις ιν, πρετιυμ χυῖς, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεсуαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλῖς ας, νυλλα. ὕραβιτυρ αυςτορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυῖς νῖβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυῖς, διαμ. Δυῖς εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυῖς λιγυλα, φρινγίλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιζιτυδιν ελ, ωῖσι. Μορβι αυςτορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαζυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-
 ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχует, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχует μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλῖς. Συσπενδίσσε υτ μασσα. ῥας νες αντε. Πελλεντεσχε α νυλλα. ὕμ σοσις νατοχχε πενατιβυς ετ μαγνῖς δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-
 ζυλυσ μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις.
 Πελλεντεσχε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.1 Εξίσωση D' Alambert

Λορεμ ιπσυμ δολορ σιτ αμετ, ζονσεζεττευερ αδιπισινγ ελιτ. Υτ πυρυς ελιτ, εστιβυλυμ υτ, πλασερατ ας, αδιπισινγ ιταε, φελις. ΰραβιτυρ διςτυμ γραιδα μαυρις. Ναμ αρσυ λιβερο, νονυμψ εγετ, ζονσεζεττευερ ιδ, υλπυτατε α, μαγνα. Δονες εηιςυλα αυγυε ευ νεχυε. Πελλεντεσχυε ηαβιταντ μορβι τριστιχυε σενε-ζτυς ετ νετυς ετ μαλεσυαδα φαμες ας τυρπις εγεστας. Μαυρις υτ λεο. "ρας ιερρα μετυς ρηονςυς σεμ. Νυλλα ετ λεςτυς εστιβυλυμ υρνα φρινγιλλα υλτριζες. Πηασελλυς ευ τελλυς σιτ αμετ τορτορ γραιδα πλασερατ. Ιντεγερ σαπιεν εστ, ιαςυλις ιν, πρετιυμ χυις, ιερρα ας, νυνς. Πραεσεντ εγετ σεμ ελ λεο υλτριζες βιβενδυμ. Αενεαν φαυσιβυς. Μορβι δολορ νυλλα, μαλεσυαδα ευ, πυλιναρ ατ, μολλις ας, νυλλα. ΰραβιτυρ αυστορ σεμπερ νυλλα. Δονες αριυς ορσι εγετ ρισυς. Δυις νιβη μι, ζονγυε ευ, αςζυμσαν ελειφενδ, σαγιττις χυις, διαμ. Δυις εγετ ορσι σιτ αμετ ορσι διγνισσιμ ρυτρυμ.

Ναμ δυι λιγυλα, φρινγιλλα α, ευισμοδ σοδαλες, σολλιςιτυδιν ελ, ωισι. Μορβι αυστορ λορεμ νον θυστο. Ναμ λαςυς λιβερο, πρετιυμ ατ, λοβορτις ιταε, υλτρι-ζιες ετ, τελλυς. Δονες αλιχυετ, τορτορ σεδ αςζυμσαν βιβενδυμ, ερατ λιγυλα αλιχυετ μαγνα, ιταε ορναρε οδιο μετυς α μι. Μορβι ας ορσι ετ νισλ ηενδρεριτ μολλις. Συσπενδισσε υτ μασσα. "ρας νες αντε. Πελλεντεσχυε α νυλλα. ΰμ σοσις νατοχυε πενατιβυς ετ μαγνις δις παρτυριεντ μοντες, νασζετυρ ριδι-ςυλυς μυς. Αλιχυαμ τινσιδυντ υρνα. Νυλλα υλλαμζορπερ εστιβυλυμ τυρπις. Πελλεντεσχυε ζυρσυς λυςτυς μαυρις.

2.8.2 Εξίσωση Lagrange

2.8.3 Εξίσωση Clairaut

2.8.4 Νόμοι Kepler

2.9 Αντικατάσταση

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

3.1 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

3.2 Εξίσωση Euler

3.3 Υποβιβασμός τάξης

3.4 Ολοκληρωτική καμπύλη

3.5 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

3.6 Ομογενείς εξισώσεις

3.7 Θεωρήματα διαχωρισμού και σύγκρισης Sturm

3.8 Μη ομογενείς εξισώσεις

3.9 Μέθοδος Lagrange

3.10 Δυναμοσειρές

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

- 4.1 Ομογενείς εξισώσεις
- 4.2 Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Wronski
- 4.3 Βασικά σύνολα λύσεων
- 4.4 Υποβιβασμός τάξης
- 4.5 Μη ομογενείς εξισώσεις - Μερικές λύσεις
- 4.6 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.7 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές
- 4.8 Εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές
- 4.9 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και συζυγείς
- 4.10 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών
- 4.11 Μετασχηματισμός $Y' = gY$
- 4.12 Δυναμοσειρές
 - 4.12.1 Taylor
 - 4.12.2 Mc Laurin
 - 4.12.3 Frobenius
 - 4.12.4 Fuchs
- 4.13 Ειδικές συναρτήσεις
- 4.14 Μέθοδος μεταβολής σταθερών
- 4.15 Μέθοδος διαφορικών τελεστών
- 4.16 Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών
- 4.17 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Κεφάλαιο 5

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

- 5.1 Ομογενή γραμμικά συστήματα
- 5.2 Πίνακες λύσεων - Τύπος Jacobi
- 5.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας - Ανάλυση πινάκων
- 5.4 Βασικοί πίνακες - Σύνολα λύσεων
- 5.5 Υποβιβασμός τάξης
- 5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα - Μερικές λύσεις
- 5.7 Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές
- 5.8 Μέθοδος απαλοιφής
- 5.9 Ευστάθεια συστημάτων
- 5.10 Μέθοδος πινάκων
- 5.11 Πρώτα ολοκληρώματα
- 5.12 Γεωμετρικές ερμηνείες συστημάτων διαφορικών εξισώσεων
- 5.13 Διαφορικοί τελεστές
- 5.14 Μέθοδος εκθετικής αντικατάστασης
- 5.15 Μέθοδος κανονικών συντεταγμένων
- 5.16 Μέθοδος τελεστή εξέλιξης