ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

3 Σεπτεμβρίου 2015

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΙΖΑΣ

Ένας μεγάλος αριθμός ριζών που θα συναντήσουμε υπολογίζονται χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης. Αυτό σημαίνει ότι όταν καλούμαστε να υπολογίσουμε μια τετραγωνική ρίζα όπως παράδειγμα : $\sqrt{a}$ τότε θα πρέπει με δοκιμές να υπολογίσουμε το θετικό αριθμό που αν υψωθεί στο τετράγωνο θα μας δώσει a.

Αριθμός a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τετράγωνο αριθμού a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Προκειμένου να αποκτήσουμε μια εμπειρία στον υπολογισμό ριζών, είναι καλό να γνωρίζουμε τα τετράγωνα των αριθμών 1 έως 10 όπως αυτά φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΙΖΑΣ
Να υπολογιστούν οι παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

i. $\sqrt{25}$ ii. $\sqrt{144}$ iii. $\sqrt{1600}$ iv. $\sqrt{0{,}09}$

ΛΥΣΗ
Σύμφωνα με τη **Μέθοδο 1** αρκεί να υπολογίσουμε με δοκιμές το θετικό αριθμό που θα υψωθεί στο τετράγωνο ώστε να μας δώσει σαν αποτέλεσμα το υπόριζο της κάθε ρίζας.

i. Με μια απλή δοκιμή εύκολα βρίσκουμε οτι $\sqrt{25} = 5$ διότι $5^2 = 25$.

ii. Ομοίως με πριν με δοκιμή έχουμε οτι $\sqrt{144} = 12$ διότι $12^2 = 144$.

iii. Πολλά υπόριζα αποτελούν πολλαπλάσια των τετραγώνων των αριθμών που συναντήσαμε στον πίνακα στη **Μέθοδο 1** οπότε μπορούν να γραφτούν και με τη βοήθειά τους ως γινόμενο ώστε διασπόντας τη μια ρίζα σε δύο να υπολογιστούν. Έχουμε

$$\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$$

Με λίγη παραπάνω εμπειρία στις ρίζες θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε αμέσως οτι $\sqrt{1600} = 40$ διότι $40^2 = 1600$.

iv. Συναντούμε επίσης περιπτώσεις όπου το υπόριζο της ρίζας αποτελεί υποπολλαπλάσιο ενός τετραγώνου ακεραίου. Στην περίπτωση αυτή μετατρέπουμε το δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα και υπολογίζουμε αν είναι δυνατόν τις ρίζες αριθμητή και παρονομαστή εκμεταλευόμενοι την ιδιότητα **4** του **Θεωρήματος 1**.

$$\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Πιο σύντομα θα έχουμε οτι $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ διότι $0{,}3^2 = 0{,}09$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΙΖΑΣ

Τις τετραγωνικές ρίζες με υπόριζο ένα σύνθετο αριθμό, τις οποίες δεν μπορούμε να υπολογίζουμε χωρίς τη βοήθεια αριθμομηχανής μπορούμε να τις γράψουμε με τη βοήθεια απολούστερων ριζών με μικρότερα υπόριζα ως εξής.

1ο Βήμα : **Μετατροπή υπόριζου σε γινόμενο**
Προσπαθούμε να γράψουμε το υπόριζο σαν γινόμενο δύο αριθμών, εκ των οποίων ο ένας θα αποτελεί τετράγωνο ακέραιου αριθμού. Αν θέλουμε να απλοποιήσουμε τη ρίζα $\sqrt{x}$ τότε :

1ος Τρόπος : **Διαιρέτες**
Υπολογίζουμε τους διαιρέτες του αριθμού x. Κάθε διαρέτης a του αρθμού x με το αντίστοιχο πηλίκο β της διαίρεσης $x : a$ έχουν γινόμενο τον αριθμό x :

$$x = a \cdot \beta$$

Από όλα αυτά τα ζεύγη διαιρετών που έχουν γινόμενο τον αριθμό x επιλέγουμε εκείνο στο οποίο συναντάμε το μεγαλύτερο τετράγωνο ακέραιου αριθμού. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τον αριθμό x με το γινόμενο $a \cdot \beta$ που επιλέξαμε.

2ος Τρόπος : **Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων**
Ένας επιπλέον τρόπος για να γραφτεί το υπόριζο ως γινόμενο αριθμών είναι να το αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων αριθμών με τη μέθοδο που συναντήσαμε στην Α′ Γυμνασίου.

2ο Βήμα : **Διάσπαση ρίζας**
Αφού γραφτεί το υπόριζο x ως γινόμενο αριθμών, τότε εκμεταλευόμαστε την ιδιότητα **3** του **Θεωρήματος 1**. Χωρίζουμε τη μια ρίζα σε γινόμενο ριζών. Τουλάχιστον μια από τις ρίζες αυτές θα περιέχει τετράγωνο ακέραιου αριθμού ή δύναμη με άρτιους εκθέτες ανάλογα τον τρόπο που ακολουθήσαμε στο **1ο Βήμα**. Υπολογίζοντας τις ρίζες αυτές έχουμε απλοποιήσει την αρχική $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = \sqrt{a^2 \cdot \beta} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{\beta} = a \cdot \sqrt{\beta}$$

Η μέθοδος αυτή μας χρησιμεύει στην απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων που περιέχουν ρίζες με σύνθετα υπόριζα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΙΖΑΣ
Να δείχθεί οτι

$$\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

ΛΥΣΗ
Για να προκύψει το ζητούμενο θα ακολουθήσουμε τη **Μέθοδο 2** για την απλοποίηση ριζών. Θα μετατρέψουμε τον αριθμό 300 σε γινόμενο παραγόντων χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους της μεθόδου.

1ος Τρόπος : **Διαιρέτες**
Αφού υπολογίσουμε τους διαιρέτες του 300 σε ζευγάρια (κάνοντας διαίρεση) θα επιλέξουμε το ζευγάρι με το μεγαλύτερο τετράγωνο ακέραιου αριθμού. Παρατηρούμε οτι από όλα τα ζευγάρια διαιρετών του 300 εκείνο που περιέχει το μεγαλύτερο τετράγωνο είναι το (3, 100). Άρα θα έχουμε

$$300 = 3 \cdot 100$$

2ος Τρόπος : **Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων**
Για να γραφτεί ο αριθμός 300 ώς γινόμενο θα τον αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Άρα το 300 θα γραφτεί $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Οποιονδήποτε τρόπο και να επιλέξουμε για να γράψουμε τον αριθμό 300 ως γινόμενο συνεχίζουμε χωρίζοντας την τετραγωνική ρίζα του γινομένου σε γινόμενο ριζών σύμφωνα με την ιδιότητα **3** του **Θεωρήματος 1**. Οπότε από τον **1^{ο} Τρόπο** θα έχουμε

$$\sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 100} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{100} = 10\sqrt{3}$$

ενώ σύμφωνα με το **2^{ο} Τρόπο** θα προκύψει

$$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Να απλοποιηθεί η παρακάτω αριθμητική παράσταση.

$$\sqrt{50} + \sqrt{32} - 2 \cdot \sqrt{18}$$

ΛΥΣΗ
Οι τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{50}$, $\sqrt{32}$ και $\sqrt{18}$ δεν έχουν ακέραια αποτελέσματα. Κατά συνέπεια δεν μπορούν να υπολογιστούν με απλό τρόπο κάνοντας δοκιμές. Μπορούν όμως να απλοποιηθούν όπως είδαμε στη **Μέθοδο 2** οπότε να απλοποιηθεί και ολόκληρη η παράσταση. Έχουμε

$$\begin{gathered}\sqrt{50} + \sqrt{32} - 2 \cdot \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = \\ \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \\ 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\end{gathered}$$

Στο τελευταίο βήμα των πράξεων προέκυψαν όμοιες τετραγωνικές ρίζες όπου με αναγωγή ομοίων όρων προκύπτει το αποτέλεσμα $3\sqrt{2}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΡΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Κλάσματα τα οποία έχουν άρρητο παρονομαστή και πιο συγκεκριμένα παρονομαστή μια τετραγωνική ρίζα της μορφής $\sqrt{a}$ μετατρέπονται σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή ως εξής :

***1^{ο} Βήμα :* Πολλαπλασιασμός**
Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

***2^{ο} Βήμα :* Πράξεις**
Απαλοίφουμε τη δύναμη και την τετραγωνική ρίζα που εμφανίζονται στον παρονομαστή και συγχρόνως κάνουμε πράξεις στον αριθμητή.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : ΡΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Να μετατραπεί το παρακάτω κλάσμα σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τη **Μέθοδο 3** θα χρειαστεί να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή. Οπότε θα έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$