

1. (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

(β) Να αποδείξετε ότι  $(x^2)' = 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

i. Ισχύει ότι  $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

ii. Το πεδίο ορισμού της  $f'$  είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της  $f$ .

iii. Ισχύει ότι  $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ .

iv. Ισχύει ότι  $\sin x = \eta \mu x$

v. Ισχύει ότι  $(cf(x))' = cf'(x)$ .

(δ) Να αποδείξετε ότι  $(cf(x))' = cf'(x)$ .

2. (α) Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

i.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \sqrt{2}$     ii.  $f(x) = \eta \mu x - 2\sigma \nu \nu x + \eta \mu \pi$      $x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2}$   
iii.  $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\epsilon \phi x$  ,

(β) Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

i.  $f(x) = x \cdot \eta \mu x$

iii.  $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \epsilon \phi x$  ,

ii.  $f(x) = \eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu x$

$x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2}$

(γ) Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

i.  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

ii.  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ .

(α) Να βρεθούν οι πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της  $f$ .

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \neq 2$  ισχύει

$$-(x-2)^2 f''(x) - (x-2)f'(x) + f(x) = 4$$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + (a-3)x + a - 4$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(3, 4)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $a = 2$ .

(β) Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = x^2 - 2$$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f'(x)} - \sqrt{3}}{x - 2}$$