Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
12 Απριλίου 2016

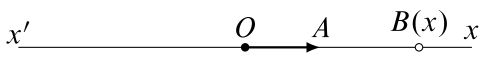
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Διανύσματα

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

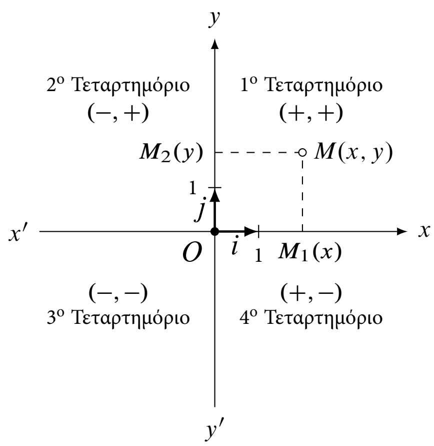
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
Μοναδιαίο ονομάζεται κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ του οποίου το μέτρο ισούται με τη μονάδα. Ως μονάδα ορίζουμε οποιοδήποτε μήκος το οποίο δεχόμαστε ως μονάδα μέτρησης.



- Το μοναδιαίο διάνυσμα μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στον άξονα των αριθμών, με αρχή την αρχή O του άξονα $x'x$. Η ημιευθεία Ox ονομάζεται **θετικός** ημιάξονας ενώ η Ox' **αρνητικός ημιάξονας**.
- Για κάθε σημείο B του άξονα θα υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OB} = x \cdot \vec{i}$. Αντίστροφα, για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει σημείο B του άξονα ώστε $\overrightarrow{OB} = x \cdot \vec{i}$.
- Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου B.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές x, y.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε την ίδια μονάδα μέτρησης.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο M του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο M του επιπέδου.



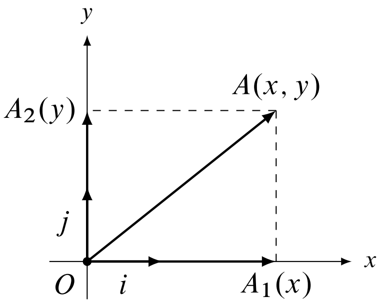
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.

- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον ημιάξονα Ox βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ στον Ox' οι αρνητικές. Το μοναδιαίο διάνυσμα του οριζόντιου άξονα είναι το $\vec{i}$.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο ημιάξονα Oy βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ στον Oy' οι αρνητικές τιμές. Το μοναδιαίο διάνυσμα του κατακόρυφου άξονα είναι το $\vec{j}$.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ του επιπέδου, ονομάζεται το μοναδικό ζεύγος αριθμών (x, y) με το οποίο το διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j.

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad \text{ή} \qquad \vec{a} = (x, y)$$



i. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ γράφεται κατά **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j.
ii. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{a}$.
iii. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** ενώ ο y **τεταγμένη** του διανύσματος $\vec{a}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Συντελεστής διεύθυνσης λ ενός μη μηδενικού διανύσματος $\vec{a}$ με συντεταγμένες (x, y) ισούται με το πηλίκο της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος.

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\beta = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί τότε οι συντεταγμένες του αθροίσματος, του γινομένου και του γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

Πράξη	**Συντεταγμένες**
Άθροισμα	$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Πολλαπλασιασμός	$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
Γραμμικός συνδυασμός	$\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων A και B.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ισούνται με τις συντεταγμένες του πέρατος μείον τις συντεταγμένες της αρχής.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

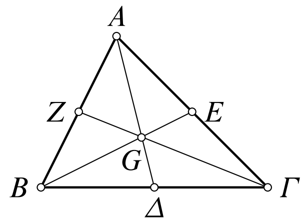
ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, θα είναι παράλληλα αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις.

i. Οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων είναι ίσοι : $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

ii. Η ορίσουσα $\det(\vec{a}, \vec{\beta})$ των συντεταγμένων των διανυσμάτων ισούται με το 0

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι ίσες με το ένα τρίτο του αθροίσματος των συντεταγμένων των κορυφών του τριγώνου.



$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad , \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ - ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ
Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ του επιπέδου ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντεταγμένων του.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχαία σημεία του επιπέδου τότε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ή ισοδύναμα η απόσταση ανάμεσα στα σημεία A και B δίνεται από τον τύπο.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$