ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Εμβαδά - Πυθαγόριεο Θεώρημα

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΕΜΒΑΔΟΝ
Εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας ονομάζεται ο θετικός αριθμός ο οποίος εκφράζει το μέγεθος της έκτασης που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή.

Ορισμός 1.2 : ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
Μονάδα μέτρησης επιφάνειας ονομάζεται μια επιφάνεια οποιουδήποτε σχήματος η οποία χρησιμοποιείται για η μέτρηση και σύγκριση όλων των επιφανειών.

1.2 Μονάδες μέτρησης επιφάνειας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.3 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές μονάδες μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε καθώς και τις σχέσεις που τις συνδέουν στο διάγραμμα που ακολουθεί:

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Μονάδα Μέτρησης	Συμβολισμός	Σχέσεις μεταξύ Μ.Μ.
Τ.Χιλιόμετρο	$1km^2$	$1km^2 = 1000$ στρέμματα $= 10^6 m^2$
Στρέμμα	1 στρέμμα	$\frac{1}{1000}km^2 = 1$ στρέμμα $= 1000m^2$
Τ.Μέτρο	$1m^2$	$1m^2 = 100dm^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2$
Τ.Δεκατόμετρο	$1dm^2$	$\frac{1}{100}m^2 = 1dm^2 = 100cm^2 = 10^4 mm^2$
Τ.Εκατοστόμετρο	$1cm^2$	$\frac{1}{10^4}m^2 = \frac{1}{100}dm^2 = 1cm^2 = 100mm^2$
Τ.Χιλιοστόμετρο	$1mm^2$	$\frac{1}{10^6}m^2 = \frac{1}{10^4}dm^2 = \frac{1}{100}cm^2 = 1mm^2$

Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας και ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπουμε μια ποσότητα από μια μονάδα μέτρησης σε άλλη φαίνονται στο διάγραμμα :

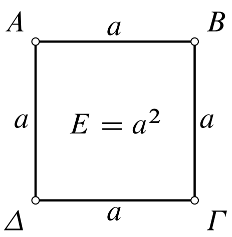
$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Τ.Χιλιόμετρα}\\(km^2)\end{array}} \arrow[r, shift left, "\cdot 10^3"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Στρέμματα}\\\text{στρ.}\end{array}} \arrow[l, shift left, ": 10^3"] \arrow[r, shift left, "\cdot 10^3"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Τ.Μετρα}\\(m^2)\end{array}} \arrow[l, shift left, ": 10^3"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Τ.Δέκατα}\\(dm^2)\end{array}} \arrow[l, shift left, ": 100"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Τ.Εκατοστά}\\(cm^2)\end{array}} \arrow[l, shift left, ": 100"] \arrow[r, shift left, "\cdot 100"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Τ.Χιλιοστά}\\(mm^2)\end{array}} \arrow[l, shift left, ": 100"]
\end{tikzcd}$$

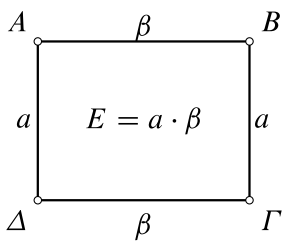
1.3 Εμβαδά βασικών σχημάτων

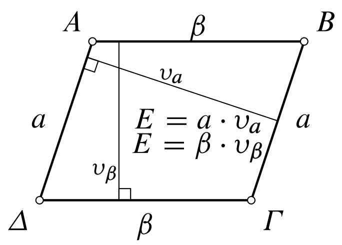
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ
Τα βασικά πολυγωνικά χωρία που συναντάμε είναι το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, το τρίγωνο, το τραπέζιο και ο ρόμβος. Τα εμβαδά τους είναι τα εξής :

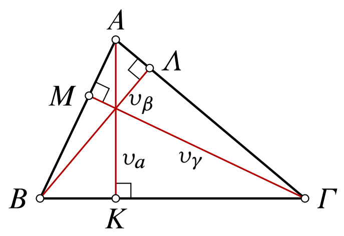
1. **Τετράγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του: $E = a^2$.
2. **Ορθογώνιο**
   Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις a, β ισούται με το γινόμενο του μήκους επί του πλάτους του.
   $$E = a \cdot \beta$$
3. **Παραλληλόγραμμο**
   Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της
   $$E = a \cdot \upsilon_a = \beta \cdot \upsilon_\beta$$



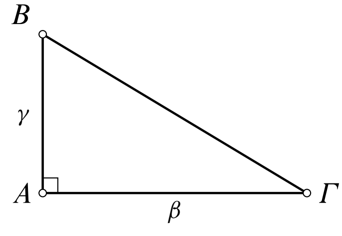




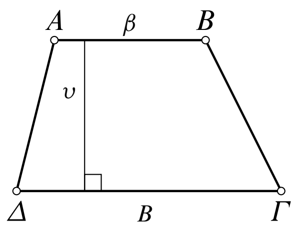
4. **Τρίγωνο**
   Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος της.
   $$E = \frac{1}{2}a \cdot \upsilon_a = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$



5. **Ορθογώνιο τρίγωνο**
   Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου των κάθετων πλευρών του.
   $$E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$$

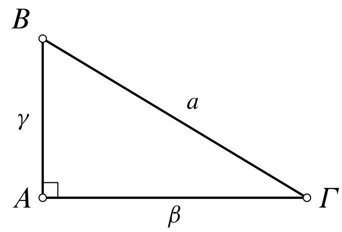


6. **Τραπέζιο**
   Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του αθροίσματος των βάσεων επί το μισό του ύψους του.
   $$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2}$$



1.4 Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ



Θεώρημα 1.2 : ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } a^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Θεώρημα 1.3 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ
Αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

$$\text{Αν } B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

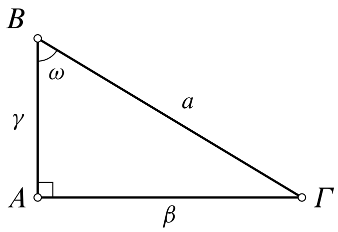
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Τριγωνομετρία - Διανύσματα

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.

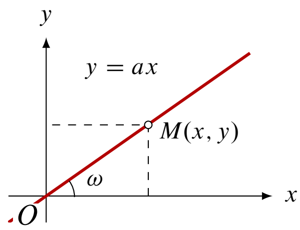
$$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad \text{εφ}\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$$



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ
Η κλίση a μιας ευθείας $y = ax$ ισούται με την εφατομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$a = \frac{y}{x} = \text{εφ}\omega$$

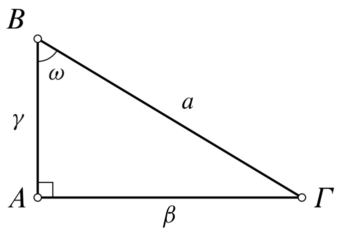


2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.2 : ΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{ημ}\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$



Ορισμός 2.3 : ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad \text{συν}\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. $0 < \eta\mu\omega < 1$ ii. $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ iii. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

2.3 Μεταβολές τριγωνομετρικών αριθμών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.3 : ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία τότε αυξάνεται το ημίτονο και η εφαπτομένη της, ενώ μειώνεται το συνημίτονό της. Αν φ, θ, ω είναι τρεις οξείες γωνίες με $\varphi < \theta < \omega$ τότε:

i. $\eta\mu\varphi < \eta\mu\theta < \eta\mu\omega$ ii. $\sigma\upsilon\nu\varphi > \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\omega$ iii. $\varepsilon\varphi\varphi < \varepsilon\varphi\theta < \varepsilon\varphi\omega$

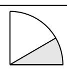
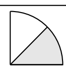
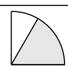
Θεώρημα 2.4 : ΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ
Αν δύο ή περισσότερες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή συνημίτονα ή εφαπτομένες τότε είναι μεταξύ τους ίσες.

$$\text{Αν}\quad \left.\begin{aligned} \eta\mu\varphi &= \eta\mu\omega \text{ ή} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= \sigma\upsilon\nu\omega \text{ ή} \\ \varepsilon\varphi\varphi &= \varepsilon\varphi\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \omega$$

2.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $30°, 45°, 60°$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.5 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ $30°, 45°, 60°$
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το μέτρο μερικών βασικών γωνιών δοσμένο σε μοίρες αλλά και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών αυτών.

Γωνία	$30°$	$45°$	$60°$
Σχήμα			
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varepsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

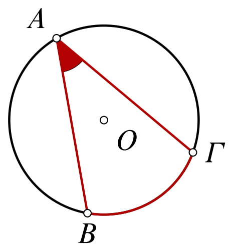
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Μέτρηση κύκλου

3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Εγγεγραμμένη γωνία σε έναν κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει κορυφή ένα σημείο του κύκλου, ενώ οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



- Το τόξο με άκρα τα σημεία τομής της γωνίας και του κύκλου, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας.
- Μια εγγεγραμμένη γωνία θα λέμε ότι **βαίνει** στο αντίστοιχο τόξο της.

Ορισμός 3.2 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ
Εγγεγραμμένη γωνία σε έναν κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει κορυφή στο κέντρο του κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

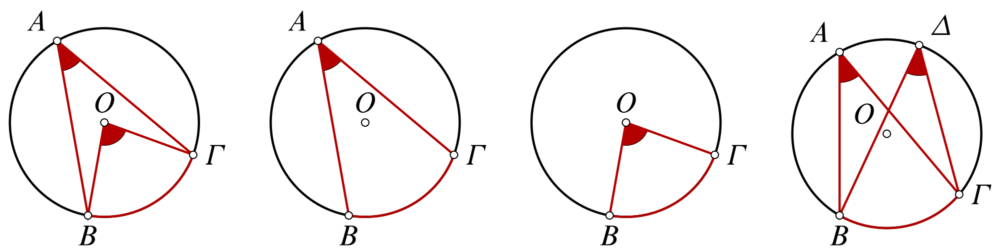
Θεώρημα 3.1 : ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΟΞΟ
Μεταξύ των εγγεγραμμένων των επίκεντρων γωνιών και των αντίστοιχων τόξων τους ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

i. Αν μια εγγεγραμμένη και μια επίκεντρη γωνία βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε η εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης : $\hat{A} = \dfrac{\hat{O}}{2}$.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{A} = \dfrac{\widehat{B\Gamma}}{2}$.

iii. Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της : $\hat{A} = \hat{O}$.

iv. Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων τότε είναι ίσες. $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

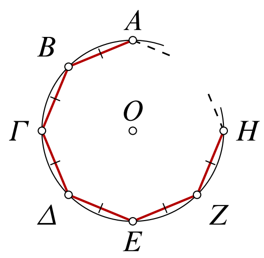


3.2 Κανονικά πολύγωνα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.3 : ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟ (ν-ΓΩΝΟ)

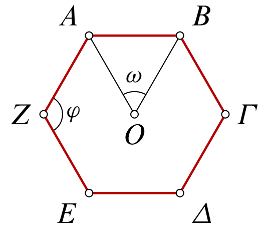
Κανονικό ονομάζεται κάθε πολύγωνο το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.



- Ένα κανονικό πολύγωνο συμβολίζεται ν-γωνο, όπου ν είναι ο φυσικός αριθμός που καθορίζει το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου με $\nu \geq 3$.
- Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος του πολυγώνου**.
- Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **κέντρο του πολυγώνου**

Ορισμός 3.4 : ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Οι γωνίες που σχηματίζονται μέσα σε ένα κανονικό $\nu-$γωνο είναι οι εξής:



1. **Κεντρική γωνία**
   Η κεντρική γωνία είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο ακτίνες του κύκλου του πολυγώνου που ενώνουν το κέντρο με δύο διαδοχικές κορυφές του. Συμβολίζεται με ω.
2. **Γωνία πολυγώνου**
   Η γωνία του πολυγώνου είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται φ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.2 : ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Για τις γωνίες , ω, φ ενός κανονικού πολυγώνου ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η κεντρική γωνία ω ισούται με $\omega = \dfrac{360^\circ}{\nu}$.
ii. Η γωνία φ του πολυγώνου ισούται με $\varphi = 180^\circ - \omega$.

3.3 Μήκος κύκλου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.5 : Ο ΑΡΙΘΜΟΣ π

Ο αριθμός π ορίζεται ως το πηλίκο του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του. Ο π είναι άρρητος αριθμός. Ισούται κατά προσέγγιση με

$$\pi = 3.14$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.3 : ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ
Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας ρ και διαμέτρου δ δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$L = \pi\delta \text{ ή } L = 2\pi\rho$$

3.4 Μήκος τόξου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.6 : ΑΚΤΙΝΙΟ
Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Συμβολίζεται με $1rad$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.4 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ
Αν μ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και a το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{a}{\pi}$$

Θεώρημα 3.5 : ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ
Το μήκος ℓ του τόξου ενός κύκλου μέτρου μ μοιρών ή a ακτινίων δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\ell = \frac{2\pi\rho\mu}{360^\circ} \text{ ή } \ell = a\rho$$

3.5 Εμβαδόν κύκλου

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.6 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ
Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E = \pi\rho^2$$