

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Μελέτη συνάρτησης

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = \eta\mu(3x) & \delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right) \\ \beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu(4x) & \epsilon. f(x) = \eta\mu(\pi x) \\ \gamma. f(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{4}\right) & \sigma\tau. f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{array}$$

2. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = 3\eta\mu x & \delta. f(x) = \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{4} \\ \beta. f(x) = 4\sigma\upsilon\nu x & \epsilon. f(x) = -3\eta\mu x \\ \gamma. f(x) = \frac{\eta\mu x}{2} & \sigma\tau. f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x \end{array}$$

3. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = 2\eta\mu(3x) & \delta. f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right) \\ \beta. f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(4x) & \epsilon. f(x) = -3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ \gamma. f(x) = 4\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) & \sigma\tau. f(x) = 4\sigma\upsilon\nu(\pi x) \end{array}$$

4. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

$$\begin{array}{ll} \alpha. f(x) = 2\eta\mu(2x) - 1 & \\ \beta. f(x) = 5\sigma\upsilon\nu(3x) + 3 & \\ \gamma. f(x) = -3\eta\mu(3x) + 2 & \\ \delta. f(x) = -3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) - 1 & \\ \epsilon. f(x) = 8\eta\mu(\pi x) - 7 & \\ \sigma\tau. f(x) = -5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3 & \end{array}$$

■ Χάραξη γραφικής παράστασης

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η περίοδος καθώς και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μιας περιόδου.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η περίοδος καθώς και τα ακρότατα της f .

β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 4\pi]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$.
- γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(\pi x) - 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
 β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 3]$.
 γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

13. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

α. $f(x) = \varepsilon\varphi(2x)$ γ. $f(x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{3}\right)$
 β. $f(x) = \sigma\varphi(3x)$ δ. $f(x) = \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$

14. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$
 β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu(3x)$
 γ. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right)$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$
 ε. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu(\pi x)$
 στ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

15. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 2\eta\mu x$
 β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$
 γ. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -4\eta\mu x$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = -\frac{4\sigma\upsilon\nu x}{3}$

16. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 2\eta\mu(3x)$
 β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = 4\sigma\upsilon\nu(2x)$
 γ. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -3\eta\mu(4x)$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$

17. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = \varepsilon\varphi x$ και $g(x) = \varepsilon\varphi(2x)$

β. $f(x) = \sigma\varphi x$ και $g(x) = \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$
 γ. $f(x) = \varepsilon\varphi x$ και $g(x) = 2\varepsilon\varphi x$
 δ. $f(x) = \sigma\varphi x$ και $g(x) = \frac{\sigma\varphi x}{2}$

18. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h .

α. $f(x) = \eta\mu x, g(x) = \eta\mu x + 2$ και $h(x) = \eta\mu x - 1$
 β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 3$ και $h(x) = \sigma\upsilon\nu x + 4$
 γ. $f(x) = \eta\mu x, g(x) = \eta\mu(x - \pi)$ και $h(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, g(x) = \sigma\upsilon\nu(x + \pi)$ και $h(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

19. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 2\eta\mu(3x)$
 β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = -3\sigma\upsilon\nu(2x)$
 γ. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 4\eta\mu\left(\frac{\pi x}{12}\right)$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

■ Άρτιες - Περιπές

20. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιπές.

α. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2 + 3}$ γ. $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{|x| - 1}$
 β. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ δ. $f(x) = \eta\mu(x^3 - x)$

■ Περιοδικότητα

21. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδική, με περίοδο τον δοσμένο αριθμό T .

α. $f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(4x)$, με $T = \pi$
 β. $f(x) = \eta\mu(4x) + \varepsilon\varphi(2x)$, με $T = \frac{\pi}{2}$
 γ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(4x) + \varepsilon\varphi(4x)$, με $T = \frac{\pi}{2}$
 δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x) \cdot \sigma\varphi x$, με $T = \pi$

- ε. $f(x) = \sigma\phi(2x) + \epsilon\phi(8x)$, με $T = \frac{\pi}{2}$
στ. $f(x) = \eta\mu(2x) \cdot \epsilon\phi x$, με $T = \pi$
ζ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x) + \epsilon\phi(4x)$, με $T = \frac{2\pi}{3}$

22.

■ Σύγκριση αριθμών

23. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{8}\right), \eta\mu\left(\frac{\pi}{10}\right), \eta\mu\left(\frac{\pi}{12}\right), \eta\mu\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

24. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

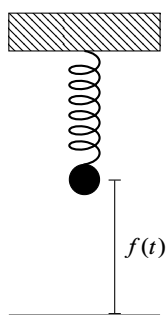
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right), \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right), \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{8}\right), \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(4x)$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{\pi}{3})$ και $f(\frac{\pi}{4})$.

■ Προβλήματα

26. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ενός κατακόρυφου ελατηρίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ύψος, (σε m), του σώματος από το έδαφος, κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), δίνεται από τη συνάρτηση



$$f(t) = \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 3$$

- α. Σε τι ύψος βρίσκεται το σώμα όταν το ελατήριο είναι σε κατάσταση ισορροπίας;
β. Πόσα δευτερόλεπτα διαρκεί μια πλήρης ταλάντωση του σώματος;
γ. Ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος που μπορεί να φτάσει το σώμα;
δ. Βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σώμα απομακρύνεται από το έδαφος.

27. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου ($^{\circ}C$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, 0 \leq t \leq 24$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου, καθώς και την περίοδο της συνάρτησης.
β. Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.
γ. Να βρείτε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, σε ποια διαστήματα μέσα στη μέρα η θερμοκρασία αυξάνεται και σε ποια μειώνεται.
δ. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, τις ώρες στις οποίες η θερμοκρασία ισούται με $8^{\circ}C$.

■ Παραμετρικές

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu x$, $a > 0$ η οποία έχει ελάχιστη τιμή το -2 .

- α. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a .
β. Να χαράξετε τη C_f στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\lambda x)$, $\lambda > 0$ με περίοδο $T = \pi$.

- α. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ .
β. Να χαράξετε τη C_f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu(\beta x)$, με $a, \beta > 0$, η οποία έχει περίοδο $T = \pi$ και μέγιστη τιμή 3.

- α. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a και β .
β. Τοποθετήστε τις τιμές $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{4})$ και $f(\frac{\pi}{3})$ σε φθίνουσα σειρά.
γ.

■ Ερωτήσεις θεωρίας

31. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σωστό) λανθασμένες (Λάθος).

- α. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(3x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$.
β. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi(2x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$.

- γ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ταυτίζονται.
- δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{2}$ τέμνει τον άξονα $x'x$.
- ε. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ δεν έχει ακρότατα.
- στ. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- ζ. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(4x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.
- η. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi(2x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
- θ. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.
- ι. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
- ια. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \epsilon\phi x$ και $g(x) = \epsilon\phi(-x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.