

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
29 Ιουλίου 2016

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πραγματικοί Αριθμοί

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Πρόσημο παράστασης

Δίνεται πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $1 < a < 4$. Να βρεθούν τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων.

- i. $a - 4$ iii. $1 - a$ v. $a - 5$
ii. $a - 1$ iv. $8 - a$ vi. $7 - a$

2. Πρόσημο παράστασης

Έστω ένας πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $2 < a < 7$. Να βρεθούν τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων.

- i. $(a - 2)(a - 7)$
ii. $(2a - 3)(7 - a)(1 - a)$
iii. $(3a - 5)(14 - 2a)$

3. Πρόσημο παράστασης

Δίνονται τρεις πραγματικοί αριθμοί x, y, z τέτοιοι ώστε $x < y < z$. Να βρεθεί το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων.

- i. $(x - y)(z - x)$
ii. $(x - z)(y - x)$
iii. $(y - z)(x - y)(x - z)$

4. Πρόσημο παράστασης

Έστω ένας πραγματικός αριθμός a για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει $2 < a < 4$. Να βρεθούν οι αριθμοί μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις.

- i. $a^2 - 4$ iii. a^3 v. $3a^2 - a^3$
ii. $2a^2 + 3$ iv. $2a - a^2$ vi. $a^4 - 3a^2$

5. Σύγκριση αριθμών

Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς A και B στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i. $A = 3\sqrt{3} - 1$ και $B = 2\sqrt{3} - 2$
ii. $A = 4\sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $B = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$
iii. $A = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ και $B = \frac{3}{2}$
iv. $A = (\sqrt{2})^3 + 1$ και $B = \sqrt{2} + 2$

6. Σύγκριση αριθμών

Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς A και B στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i. $A = 2^{70}$ και $B = 4^{30}$

ii. $A = 9^{120}$ και $B = 8^{150}$

iii. $A =$ και $B =$

iv. $A =$ και $B =$

7. Σύγκριση αριθμών

Να συγκριθούν οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις A και B στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $A = (x + y)^2$ και $B = 1 - (x - y)^2$

ii.

iii.

iv.

8. Σύγκριση αριθμών

Να συγκριθούν οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις A και B στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $A = \frac{a-\beta}{a+\beta}$ και $B = \frac{a\beta}{a^2-\beta^2}$

ii.

iii.

iv.

9. Τετράγωνο αριθμού

Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για κάθε τιμή της μεταβλητής x .

i. $x^2 + 1 \geq 2x$ iii. $6x - 9 \leq x^2$

ii. $4x \leq 1 + 4x^2$ iv. $(x + 1)^2 \geq 4x$

10. Τετράγωνο αριθμού

Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για κάθε τιμή των μεταβλητών x, y .

i. $x^2 + y^2 \geq 2xy$ iii. $(x + y)^2 \geq 4xy$

ii. $x^2 + 1 \geq 2y - y^2$ iv. $4x^2 \geq x^2 - 4y^2$

v. $3x^2 + 1 \geq 4x - x^2 - y^2$

11. Τετράγωνο αριθμού

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

ii. $(3x - 6)^2 + (2y - 8)^2 = 0$

iii. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

iv. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

12. Ιδιότητες ανισοτήτων

Έστω $a \in \mathbb{R}$ πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $2 < a < 5$. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις.

i. $a - 7$
ii. $3a + 4$

iii. $3 - 2a$
iv. $7a + 13$

i. $-3 \leq x \leq 2$ iii. $0 < x < 10$ v. $x < 0$
ii. $1 < x \leq 5$ iv. $x > -4$ vi. $x \geq 9$

13. Ιδιότητες ανισοτήτων

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $3 < a < 7$ και $2 < \beta < 4$. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες.

i. $8 < 2a + \beta < 18$ iii. $24 < 4a\beta < 112$
ii. $-1 < a - \beta < 5$ iv. $\frac{3}{4} < \frac{a}{\beta} < \frac{7}{2}$

14. Ιδιότητες ανισοτήτων

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $1 < a < 5$ και $2 < \beta < 3$. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις.

i. $3a + 2\beta$ iii. $4a\beta - 5$
ii. $4a - 3\beta$ iv. $\frac{3a}{2\beta}$

15. Διαστήματα

Να γραφούν τα παρακάτω διαστήματα με τη μορφή ανισοτήτων.

i. $[3, 7]$ iii. $(0, 3]$ v. $(0, +\infty)$
ii. $[-2, 5)$ iv. $(-\infty, 4]$ vi. $(-4, 4)$

16. Διαστήματα

Να γραφούν οι παρακάτω ανισότητες με τη μορφή διαστημάτων.

i. $2 \leq x \leq 8$ iv. $x \leq 4$
ii. $-3 < x < 10$ v. $-1 \leq x < 3$
iii. $x > -2$ vi. $x \geq 0$

17. Διαστήματα

Να παρασταθούν τα παρακάτω διαστήματα γραφικά, πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

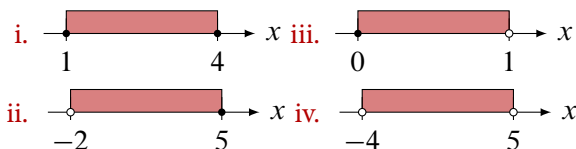
i. $[-2, 2]$ iii. $(-3, 0]$ v. $(-\infty, 3]$
ii. $[4, 9)$ iv. $(4, +\infty)$ vi. $(-4, 5)$

18. Διαστήματα

Να παραστήσετε γραφικά σε άξονα τα σύνολα αριθμών που ορίζονται από τις παρακάτω ανισότητες.

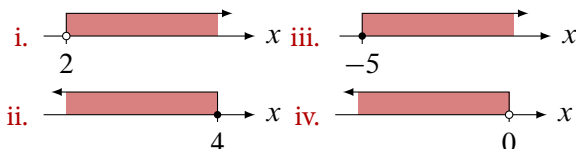
19. Διαστήματα

Να γράψετε σε μορφή διαστήματος κάθε σύνολο αριθμών από τα παρακάτω, όπως αυτά φαίνονται στους άξονες.



20. Διαστήματα

Να γράψετε σε μορφή διαστήματος κάθε σύνολο αριθμών από τα παρακάτω, όπως αυτά φαίνονται στους άξονες.



21. Διαστήματα

Να βρεθούν τα κοινά στοιχεία των παρακάτω διαστημάτων.

i. $[2, 4]$, $[3, 7]$ iv. $(-\infty, 4)$, $[5, +\infty)$
ii. $(-\infty, 5)$, $(-3, 7)$ v. $(-3, 4]$, $(-\infty, 4)$
iii. $[0, 3)$, $(1, 3]$ vi. $[2, +\infty)$, $(3, +\infty)$

22. Διαστήματα

Αν Δ_1, Δ_2 είναι δύο διαστήματα πραγματικών αριθμών τότε να βρεθεί η ένωση $\Delta_1 \cup \Delta_2$ και η τομή τους $\Delta_1 \cap \Delta_2$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $\Delta_1 = [-3, 3]$ και $\Delta_2 = (-2, 4]$.
ii. $\Delta_1 = [1, 4)$ και $\Delta_2 = (0, +\infty)$.
iii. $\Delta_1 = (-4, 0)$ και $\Delta_2 = (-\infty, -2]$.
iv. $\Delta_1 = (-\infty, 10)$ και $\Delta_2 = (11, +\infty)$.

23. Διαστήματα

Δίνονται τα διαστήματα πραγματικών αριθμών $\Delta_1 = [1, 4]$, $\Delta_2 = (2, +\infty)$. Να βρεθούν τα παρακάτω σύνολα.

i. $\Delta_1 \cup \Delta_2$ iii. Δ'_1 v. $\Delta_1 - \Delta_2$
ii. $\Delta_1 \cap \Delta_2$ iv. Δ'_2 vi. $\Delta_2 - \Delta_1$

24. Μετατροπή σχήματος σε σύνολο

Να βρείτε και να γράψετε στη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα κοινά στοιχεία των συνόλων που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

