ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

10 Ιουλίου 2015

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1-1$ εαν κάθε στοιχείο $x \in D_f$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης, σε μοναδική τιμή $f(x)$ του συνόλου τιμών της. Για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της f θα ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

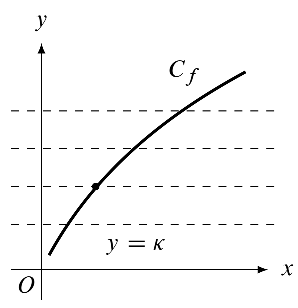
Μια συνάρτηση $1-1$ ονομάζεται και **αμφιμονοσήμαντη** συνάρτηση και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $1-1$ ο οποίος διαβάζεται : “ένα προς ένα ”.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση $1-1$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της, η ισότητα των εικόνων τους συναπάγεται την ισότητα μεταξύ τους. Δηλαδή θα ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 1-1
Έστω μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι μια συνάρτηση $1-1$ τότε γι αυτήν ισχύουν οι παρακάτων ιδιότητες :



i. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
ii. Κάθε οριζόντια ευθεία της μορφής $y = \kappa$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ θα έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
iii. Εαν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε θα είναι και $1-1$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
iv. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο πεδίο ορισμού της f. Εαν $0 \in f(D_f)$ τότε η εξίσωση έχει μια λύση ακριβώς.
v. Κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f έχει μοναδική τετμημένη.

Αν η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in D_f$ που να έχουν την ίδια τιμή δηλαδή :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

Προκειμένου να δείξουμε ή να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι $1-1$ ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους :

***1ος Τρόπος :* Χρήση του Ορισμού**

Κάνουμε χρήση του **Ορισμού 1** οπότε :

> ***1ο Βήμα :* Πεδίο ορισμού**
>
> Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αν αυτό δε μας δίνεται γνωστό.
>
> ***2ο Βήμα :* Πράξεις**
>
> Ξεκινώντας από τη σχέση $x_1 \neq x_2$, καταλλήγουμε κατασκευαστικά κάνοντας πράξεις σε διαδοχικά βήματα, στη σχέση $f(x_1) \neq f(x_2)$.

***2ος Τρόπος :* Χρήση του Θεωρήματος**

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το **Θεώρημα 1** τότε :

> ***1ο Βήμα :* Πεδίο ορισμού**
>
> Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αν αυτό δε μας δίνεται γνωστό.
>
> ***2ο Βήμα :* Πράξεις**
>
> Ξεκινώντας από τη σχέση $f(x_1) = f(x_2)$, καταλλήγουμε κάνοντας πράξεις με διαδοχικές ισοδυναμίες στη σχέση $x_1 = x_2$.

***3ος Τρόπος :* Μονοτονία**

Χρησιμοποιούμε την τον κανόνα **2.iii.** στο **Θεώρημα 2** που αφορά τη μονοτονία της συνάρτησης και

> ***1ο Βήμα :* Πεδίο ορισμού**
>
> Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αν αυτό είναι γνωστό.
>
> ***2ο Βήμα :* Μονοτονία**
>
> Εξετάζουμε σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και αν είναι καταλλήγουμε στο συμπέρασμα οτι είναι $1-1$.

***4ος Τρόπος :* Μοναδική τιμή x για κάθε y**

Σχηματίζουμε και λύνουμε ως προς x την εξίσωση $y = f(x)$ θεωρώντας μεταβλητή το x και παράμετρο το y. Αν η εξίσωση δίνει μοναδική λύση για τη μεταβλητή x ως συνάρτηση του y τότε θα είναι και $1-1$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ