ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ - Rolle - Θ.Μ.Τ.

27 Ιουλίου 2016

ΘΕΜΑ Α′.

Α.1 Έστω μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο Δ. Αν ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ να δειχθεί οτι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Μονάδες 10

Α.2 Να δώσεις τη γεωμερτρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 5

Α.3 Να χαρακτηρίσεις τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α′. Εαν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M\ (\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

β′. Εαν για μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώατε να ισχύει $f'(\xi) = 0$ τότε $f(a) = f(\beta)$.

γ′. Έστω μια $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = -1$.

δ′. Εαν μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

ε′. Υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) = x^2 - 2x$, στο οποίο η εφαπτομένη να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : x + y + 1 = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β′.

Β.1 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta + 1 & x \leq 1 \\ \gamma x^2 + 2(a+1)x & x > 1 \end{cases}$

Αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1, 3]$ τότε :

i. να βρεθούν οι τιμές των a, β, γ.

ii. να εφαρμοστεί για τη συνάρτηση f στο θεώρημα Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1, 3]$.

Μονάδες 12

Β.2 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Να δειχθεί οτι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ΄. Έστω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Να δειχθεί οτι

Γ.1 για τη συνάρτηση f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$ όπου ισχύει $1 < a < \beta$.

Μονάδες 9

Γ.2 η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$.

Μονάδες 9

Γ.3

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} < \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{a^2 - 1}}{\beta - a} < \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ΄.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με :

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ.1 Να εκφραστεί η f' ώς συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

Δ.2 Να αποδειχθεί οτι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο αριθμός $f''(0)$.

Μονάδες 5

Δ.3 Να αποδειχθεί οτι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες.

Μονάδες 8

Δ.4 Να αποδειθχεί οτι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 7

Σπύρος Φρόνιμος