Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
: spyrosfronimos@gmail.com | : 693 232 7283 - 697 453 2090
: www.MathWorld.gr

19 Μαρτίου 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2016 - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 262
Α.2 Σχολικό βιβλίο σελ. 142
Α.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α.4 i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Σ v. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης f η οποία θα είναι

$$f'(x) = \frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right) - x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Εξετάζουμε που μηδενίζεται η παράγωγος οπότε θα έχουμε

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Από τον πίνακα προσήμων της παραγώγου και μονοτονίας της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ το οποίο είναι το $f(0) = 0$.

Β.2 Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f οπότε θα έχουμε

$$f''(x) = \frac{(2x)'\left(x^2+1\right)^2 - 2x\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2\left(x^2+1\right)^2 - 2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Θέτοντας τη δεύτερη παράγωγο της f ίση με το 0 θα προκύψει

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow 2\left(1-3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα πρόσημα της δεύτερης παραγώγου και η κυρτότητα της συνάρτησης f. Βλέπουμε λοιπόν ότι

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$	

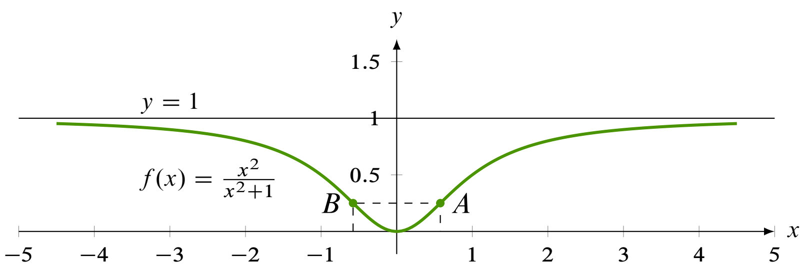
η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ ενώ είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Επίσης $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}$ άρα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι τα $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B.3 Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ τότε δεν εξετάζουμε την ύπαρξη κατακόρυφης ασύμπτωτης. Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες θα έχουμε

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$
- Ομοίως στο $-\infty$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

Έτσι η οριζόντια ευθεία $y = 1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Επίσης αφού η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τότε δεν έχει πλάγιες.

B.4 Σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f λαμβάνουμε υπόψιν μας τη μονοτονία και την κυρτότητά της αφού αρχικά σχεδιάσουμε τα σημεία καμπής, το σημείο στο οποίο παρουσιάζει ολοκό ελάχιστο και την οριζόντια ασύμπτωτη $y = 1$. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Θέτουμε $g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ με $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι μια προφανής ρίζα της συνάρτησης g είναι το 0 αφού $g(0) = e^{0^2} - 0^2 - 1 = 0$. Θα εξετάσουμε αν είναι και μοναδική. Έχουμε

$$g'(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)' = 2xe^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$$

Έστω λοιπόν $g'(x) = 0$ οπότε προκύπτει

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x\left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

άρα η g' μηδενίζεται για $x = 0$. Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων της g' και μονοτονίας της συνάρτησης g φαίνεται ότι

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $g(0) = 0$ ενώ εκατέρωθεν του 0 είναι γνησίως μονότονη. Αυτό σημαίνει ότι $g(x) \geq 0$ με το $=$ να ισχύει μόνο στο 0. Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της συνάρτησης.

Γ.2 Από την ισότητα $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ παίρνουμε $|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right|$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f δε μηδενίζεται και ως συνεχής θα διατηρεί το πρόσημό της. Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις

i. Αν $x \in (-\infty, 0)$ και
- $f(x) > 0$ τότε από την τελευταία ισότητα θα προκύψει : $|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- $f(x) < 0$ τότε ο τύπος της συνάρτησης θα είναι : $|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = -e^{x^2} + x^2 + 1$.

ii. Ομοίως αν $x \in (0, +\infty)$ και
- $f(x) > 0$ τότε ομοίως με προηγουμένως θα έχουμε : $|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- $f(x) < 0$ τότε θα ισχύει : $|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = -e^{x^2} + x^2 + 1$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτουν οι ακόλουθοι τέσσερις τύποι για τη συνάρτηση f

1. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & , x \geq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1 & , x < 0 \end{cases}$
3. $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & , x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

Γ.3 Από το ερώτημα **Γ.1** γνωρίζουμε ότι $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$ άρα για τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ θα έχουμε

$$f''(x) = \left[2x\left(e^{x^2} - 1\right)\right]' = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2e^{x^2}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $e^{x^2} \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επίσης $4x^2e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία ενώ στο υπόλοιπο πδίο ορισμού διατηρεί το πρόσημό της με $f''(x) > 0$. Άρα η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ.4 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x+3) - f(x)$. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή οπότε η f' θα είναι αύξουσα. Έτσι θα ισχύει :

$$x < x + 3 \xrightarrow{f \nearrow} f'(x) < f'(x+3) \Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι συνάρτηση $1-1$ άρα για την αρχική εξίσωση θα ισχύει

$$f(|\text{ημ}x + 3|) - f(|\text{ημ}x|) = f(x+3) - f(x) \Rightarrow h(|\text{ημ}x|) = h(x) \xrightarrow{h\ 1-1} |\text{ημ}x| = x \Rightarrow x = 0$$

αφού είναι γνωστό ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $|\text{ημ}x| \leq x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Από τη δοσμένη σχέση $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\cdot ημx dx = \pi$ μεδιάσπαση και παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\cdot ημx dx = \pi \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot ημx dx + \int_0^\pi f''(x)\cdot ημx dx = \pi \Rightarrow$$
$$\int_0^\pi f(x)\cdot(-συνx)' dx + \int_0^\pi f''(x)\cdot ημx dx = \pi \Rightarrow$$
$$-[f(x)\cdot συνx]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cdot συνx dx + [f(x)\cdot ημx]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cdot συνx dx = \pi \Rightarrow$$
$$-[f(x)\cdot συνx]_0^\pi + [f(x)\cdot ημx]_0^\pi = \pi \Rightarrow$$
$$-f(\pi)\cdot συν\pi + f(0)\cdot συν0 + f(\pi)\cdot ημ\pi - f(0)\cdot ημ0 = \pi \Rightarrow f(\pi)+f(0) = \pi$$

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{ημx} \Rightarrow f(x) = g(x)\cdot ημx$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε υπολογίζοντας το όριο της στο 0 θα ισχύει

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(g(x)\cdot ημx) = 1\cdot 0 = 0$$

οπότε προκύπτει $f(0) = 0$ και έτσι $f(\pi) = \pi$. Επιπλεον από το όριο που μας δίνει η υπόθεση κατασκευάζοντας το $f'(0)$ θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot x}{x\cdot ημx} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{ημx} = 1$$
$$\Rightarrow f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{x}{ημx} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Δ.2 α) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο σε ένα τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Fermat λοιπόν προκύπτει ότι $f'(x_0) = 0$ και παραγωγίζοντας τη συναρτησιακή σχέση της υπόθεσης προκύπτει

$$\left(e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x) + 1 = f'(f(x))\cdot f'(x) + e^x$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση όπου $x = x_0$ έχουμε

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$$

Έτσι παίρνουμε $f'(0) = 0$ που είναι άτοπο διότι από το ερώτημα **Δ.1** λεχουμε $f'(0) = 1$. Επομένως η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η παράγωγος της συνάρτησης f ως συνεχής διατηρεί το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f'(0) = 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ.3 Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \Rightarrow \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$. Επίσης έχουμε ότι $f'(x) > 0$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Για κάθε $x > 0$ θα ισχύει

$$x > 0 \overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$$

Θα ισχύει λοιπόν

$$\left|\frac{ημx + συνx}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{ημx}{f(x)}\right| + \left|\frac{συνx}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} = \frac{2}{f(x)} \Rightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Έχουμε έτσι $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)} = 0$. Έτσι από το κριτήριο παρεμβολής θα πάρουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$$

Δ.4 Για κάθε $x \in [0, e^{\pi}]$ θα ισχύει

$$1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Ολοκληρώνοντας κάθε μέλος της τελευταίας ανισότητας από το 1 ως το e^{π} παίρνουμε

$$\int_1^{e^{\pi}} 0 dx \le \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx \le \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx$$

Οι ισότητες στην τελευταία σχέση ισχύουν μόνο για $x = 1$ και $x = e$ οπότε παίρνουμε

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < [\pi \cdot \ln x]_0^{e^{\pi}} \Rightarrow 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$