Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
1 Ιουνίου 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εξισώσεις

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Για το γενικό τρόπο επίλυσης μιας κλασματικής εξίσωσης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

1ο Βήμα : **Παραγοντοποίηση παρονομαστών**
Παραγοντοποιούμε όσους παρονομαστές των ρητών παραστάσεων μπορούν να παραγοντοποιηθούν.

2ο Βήμα : **Ε.Κ.Π.**
Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

3ο Βήμα : **Περιορισμοί**
Θέτουμε τους περιορισμούς της εξίσωσης παίρνοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών διάφορο του μηδενός : $E.K.\Pi. \neq 0$. Λύνουμε την εξίσωση που σχηματίζεται ώστε να προκύψουν οι τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης.

4ο Βήμα : **Απαλοιφή παρονομαστών**
Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και διαιρούμε τους κοινούς παράγοντες του με τους παρονομαστές.

5ο Βήμα : **Πράξεις**
Εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις ώστε να απαλοιφθούν τυχόν παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

6ο Βήμα : **Λύση εξίσωσης**
Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.

7ο Βήμα : **Έλεγχος λύσεων**
Ελέγχουμε αν είναι δεκτές οι λύσεις της εξίσωσης εξετάζοντας τους περιορισμούς (**Βήμα 3**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ
Να λύθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση

$$\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2 - x}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι από τους παρονομαστές της εξίσωσης παραγοντοποιείται μόνο ο τρίτος παρονομαστής οπότε θα έχουμε :

$$x^2 - x = x(x-1)$$

Έτσι το Ε.Κ.Π. των τριών παρονομαστών θα είναι : $E.K.\Pi. = x(x-1)$. Για να ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει :

$$E.K.\Pi. \neq 0 \Rightarrow x(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. θα προκύψει :

$$\cancel{x}(x-1) \cdot \frac{x+1}{\cancel{x}} + x\cancel{(x-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x-1}} = \cancel{x(x-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x(x-1)}} \Rightarrow$$
$$(x-1)\cdot(x+1) + x \cdot 1 = 1 \Rightarrow$$
$$x^2 - 1 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια πολυωνυμική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία μας δίνει τις λύσεις $x = -2$ και $x = 1$. Παρατηρούμε όμως ότι η λύση $x = 1$ έρχεται σε αντίθεση με τους περιορισμούς της αρχικής εξίσωσης οπότε και απορρίπτεται. Επομένως μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = -2$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΔΥΟ ΟΡΟΙ

Στην ειδική περίπτωση μιας κλασματικής εξίσωσης με δύο όρους, εκτός από τη γενική μέθοδο, μπορούμε εναλλακτικά να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα :

***1ο Βήμα :* Περιορισμοί**
Θέτουμε τους περιορισμούς της εξίσωσης παίρνοντας κάθε διάφορο του μηδενός. Λύνουμε τις εξισώσεις που σχηματίζονται ώστε να προκύψουν οι τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης.

***2ο Βήμα :* Ισότητα κλασμάτων**
Μεταφέρουμε αν αυτό χρειαστεί, έναν από τους δύο όρους της εξίσωσης σε διαφορετικό μέλος από τον άλλο ώστε να αποκτήσουμε μια ισότητα με κλάσματα.

***3ο Βήμα :* Χιαστί πολλαπλασιασμός**
Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τους όρους των δύο κλασμάτων οπότε και αποκτάμε μια πολυωνυμική εξίσωση.

***4ο Βήμα :* Πράξεις - Λύση εξίσωσης**
Εκτελούμε τις πράξεις και λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση.

***5ο Βήμα :* Έλεγχος λύσεων**
Ελέγχουμε αν είναι δεκτές οι λύσεις της εξίσωσης εξετάζοντας τους περιορισμούς (**Βήμα 1**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΟΡΟΥΣ

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{x+3}{x+1} - \frac{7-x}{2+x} = 0$$

ΛΥΣΗ

Προκειμένου να ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει :

- $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ και
- $2 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Μεταφέροντας το ένα από τα δύο κλάσματα στο δεύτερο μέλος η εξίσωση θα πάρει τη μορφή :

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{7-x}{2+x} \Rightarrow (x+3)(2+x) = (x+1)(7-x) \Rightarrow$$
$$2x + x^2 + 6 + 3x = 7x - x^2 + 7 - x \Rightarrow 2x + x^2 + 6 + 3x - 7x + x^2 - 7 + x = 0 \Rightarrow$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού μας δίνει λύσεις τις $x = 1$ και $x = -\frac{1}{2}$. Εξετάζοντας τους περιορισμούς βλέπουμε οτι και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 : ΟΜΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Σε αρκετές κλασματικές εξισώσεις είναι δυνατό να μετατρέψουμε εύκολα τις ρητές παραστάσεις σε ομώνυμες ώστε να μπορέσουμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση. Για να γίνει αυτό έχουμε :

***1º Βήμα :* Παραγοντοποίηση παρονομαστών**
Παραγοντοποιούμε όσους παρονομαστές των ρητών παραστάσεων μπορούν να παραγοντοποιηθούν.

***2º Βήμα :* Ε.Κ.Π.**
Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

***3º Βήμα :* Περιορισμοί**
Θέτουμε τους περιορισμούς της εξίσωσης παίρνοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών διάφορο του μηδενός : $E.K.\Pi. \neq 0$. Λύνουμε την εξίσωση που σχηματίζεται ώστε να προκύψουν οι τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης.

***4º Βήμα :* Ομόνυμα κλάσματα**
Μετατρέπουμε όλους τους όρους της εξίσωσης σε ομώνυμα κλάσματα. Στη συνέχεια μεταφέρουμε όλα τα κλάσματα αυτά στο πρώτο μέλος της εξίσωσης.

***5º Βήμα :* Πρόσθεση κλασμάτων - Μηδενικός αριθμητής**
Αφού προσθέσουμε τα ομώνυμα κλάσματα και απλοποιήσουμε τον αριθμητή με αναγωγή ομοίων όρων, τότε αποκτάμε ένα κλάσμα ίσο με το 0 κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο αριθμητής του θα ισούται με 0.

***6º Βήμα :* Λύση εξίσωσης**
Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.

***7º Βήμα :* Έλεγχος λύσεων**
Ελέγχουμε αν είναι δεκτές οι λύσεις της εξίσωσης εξετάζοντας τους περιορισμούς (**Βήμα 3**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : ΝΑ ΛΥΘΕΙ Η ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$\frac{x}{x-2} + \frac{3x-4}{x} = 4$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι κανένας από τους παρονομαστές της εξίσωσης δεν παραγοντοποιήται οπότε και υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. τους το οποίο είναι :

$$E.K.\Pi. = x(x-2)$$

Για να ορίζονται οι ρητές παραστάσεις της εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει :

$$E.K.\Pi. \neq 0 \Rightarrow x(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Μετατρέποντας όλους τους όρους σε ομώνυμα κλάσματα θα έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\frac{\overset{x}{\smile}x}{x-2}+\frac{\overset{x-2}{\smile}3x-4}{x}=\overset{x(x-2)}{\smile}4 &\Rightarrow \frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{(3x-4)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4x(x-2)}{x(x-2)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{(3x-4)(x-2)}{x(x-2)}-\frac{4x(x-2)}{x(x-2)}=0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{x^2+3x^2-6x-4x+8-4x^2+8x}{x(x-2)}=0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{-2x+8}{x(x-2)}=0 \Rightarrow -2x+8=0 \Rightarrow -2x=-8 \Rightarrow x=4
\end{aligned}
$$

Η λύση $x = 4$ στην οποία καταλλήξαμε, είναι δεκτή καθώς δεν έρχεται σε αντίθεση με τους περιορισμούς.