

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

# Γεωμετρία

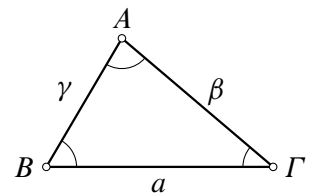
## ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

### ΟΡΙΣΜΟΙ

#### ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΤΡΙΓΩΝΟ - ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τρίγωνο ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες.

- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές, οι γωνίες και οι κορυφές του.
- Κάθε τρίγωνο συμβολίζεται με τη χρήση των ονομάτων των τριών κορυφών του για παράδειγμα  $AB\Gamma$ .



$$B\Gamma \rightarrow a, \quad A\Gamma \rightarrow \beta, \quad AB \rightarrow \gamma$$

- Οι πλευρές ενός τριγώνου, εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος, μπορούν εναλλακτικά να συμβολιστούν με ένα μικρό γράμμα, αντίστοιχο του ονόματος της απέναντι κορυφής.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τα δευτερεύοντα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος του. Αναλυτικά ορίζονται ως εξής :

##### 1. Διάμεσος

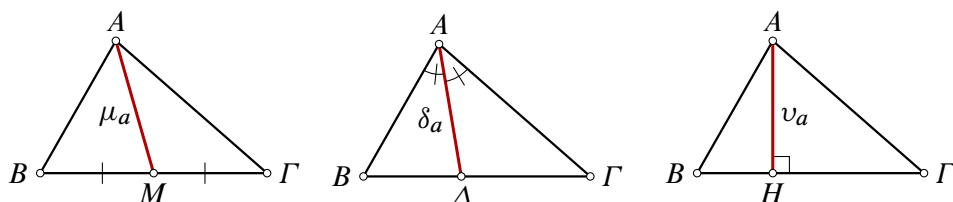
Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

- Κάθε διάμεσος συμβολίζεται είτε με τα γράμματα των δύο άκρων της είναι με το γράμμα  $\mu$  το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διάμεσος.
- Οι διάμεσοι για ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  θα συμβολίζονται  $\mu_a, \mu_\beta, \mu_\gamma$ .

##### 2. Διχοτόμος

Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο χωρίζει μια γωνία του τριγώνου σε δύο ίσα μέρη.

- Κάθε διχοτόμος συμβολίζεται εναλλακτικά με το γράμμα  $\delta$  το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
- Οι διχοτόμοι για ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  θα συμβολίζονται  $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$ .



### 3. Ύψος

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει το ένα άκρο του σε μια κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο με την απέναντι πλευρά.

- Τα ύψη ενός τριγώνου συμβολίζονται με το γράμμα  $\upsilon$  το οποίο θα έχει δείκτη, το όνομα της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί η διχοτόμος.
- Τα ύψη για ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  θα συμβολίζονται  $\upsilon_a, \upsilon_b, \upsilon_\gamma$ .

## ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τα τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς το είδος των γωνιών που περιέχουν και ως προς τη σχέση των πλευρών μεταξύ τους.

### 1. Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Με κριτήριο το είδος των γωνιών που περιέχει ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα παρακάτω τρία είδη τριγώνων.

Οξυγώνιο	Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο
<p><math>\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} &lt; 90^\circ</math></p>	<p><math>\hat{B} = 90^\circ</math></p>	<p><math>\hat{B} &gt; 90^\circ</math></p>
Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>οξυγώνιο</b> εαν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>ορθογώνιο</b> εαν έχει μια ορθή γωνία.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>αμβλυγώνιο</b> εαν έχει μια αμβλεία γωνία.

### 2. Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

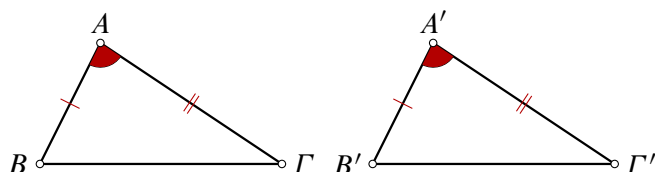
Με βάση τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου χωρίζουμε τα τρίγωνα στις παρακάτω τρεις κατηγορίες.

Σκαληνό	Ισοσκελές	Ισόπλευρο
<p><math>AB \neq A\Gamma \neq B\Gamma</math></p>	<p><math>AB = A\Gamma</math></p>	<p><math>AB = A\Gamma = B\Gamma</math></p>
Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>σκαληνό</b> εαν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους άνισες.	Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>ισοσκελές</b> εαν έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά ονομάζεται <b>βάση</b> .	Ένα τρίγωνο ονομάζεται <b>ισόπλευρο</b> εαν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : 1<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

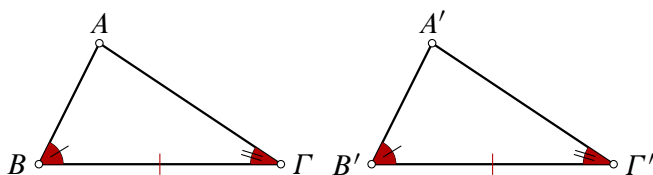
Αν ένα τρίγωνο έχει δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες μεταξύ τους ίσες τότε είναι ίσα.



$$\begin{aligned}AB &= A'B' \\AC &= A'G' \\ \hat{A} &= \hat{A}'\end{aligned}$$

### ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : 2<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

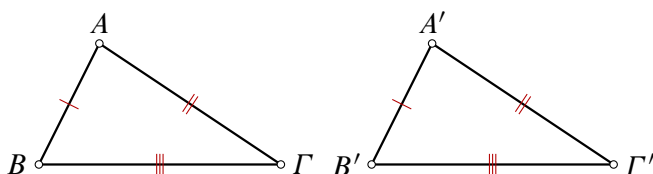
Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



$$\begin{aligned}BG &= B'G' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{G} &= \hat{G}'\end{aligned}$$

### ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : 3<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αν δυο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

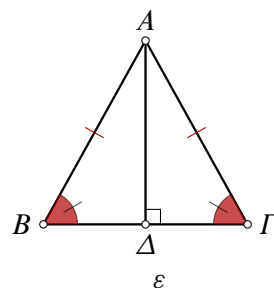


$$\begin{aligned}AB &= A'B' \\AC &= A'G' \\BG &= B'G'\end{aligned}$$

### ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : 1<sup>ο</sup> ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο

- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
- Η διάμεσος το ύψος και η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν.

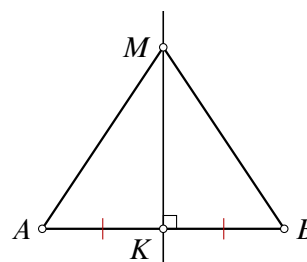


### ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : 1<sup>ο</sup> ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

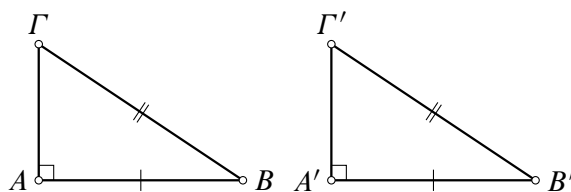
### ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : 2<sup>ο</sup> ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ

Κάθε σημείο το οποίο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα ανήκει στη μεσοκάθετό του.



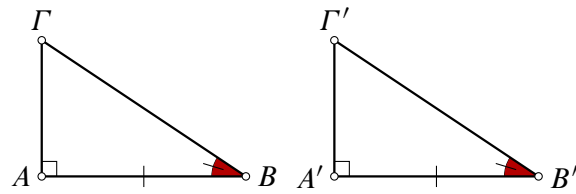
### ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : 1<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες τότε είναι ίσα.

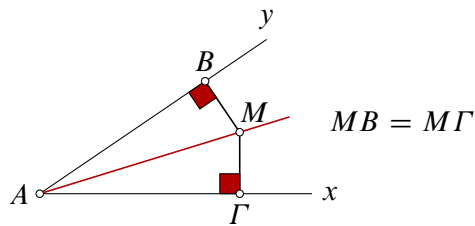


**ΘΕΩΡΗΜΑ 8: 2<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ**

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες αντίστοιχα τότε είναι ίσα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 9: ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ**

Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της. Αντίστροφα, κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας θα ανήκει στη διχοτόμο της.



Προκύπτει λοιπόν ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.