Φροντιστηριο Μεσης Εκπαιδευσης

ΓΝΩΣΗ

: Βροκίνη Λαυρεντίου 2 (Πλατεία Γεωργάκη) | : 26610 40414

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25 Σεπτεμβρίου 2017

ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όρια - Συνέχεια

ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$. Το όριο της f όταν το x τείνει στο $+\infty$ θα είναι είτε ένας πραγματικός αριθμός είτε ένα από τα $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \text{ ή} \\ \pm\infty \end{cases}$$

Ομοίως αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ έχουμε το όριο της όταν το $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΟΡΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. **Όριο πολυωνυμικών συναρτήσεων**
   Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο $\nu-$στού βαθμού. Το όριο του πολυωνύμου όταν $x \to \pm\infty$ ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.
   $$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_\nu x^\nu$$
2. **Όριο ρητής συνάρτησης**
   Έστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση με $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ βαθμών ν και μ αντίστοιχα. Το όριο της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ ισούται με
   $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

i. Αν $\nu > \mu$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

ii. Αν $\nu < \mu$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

iii. Αν $\nu = \mu$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_\nu}{\beta_\mu}$.

3. Όριο εκθετικής - λογαριθμικής για $a > 1$.

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

γ. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$

δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$

4. Όριο εκθετικής - λογαριθμικής για $0 < a < 1$.

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

γ. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

5. Βασικά όρια

α. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$

β. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$

γ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ημ\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} ημ y = 0$

δ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} συν\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} συν y = 1$

ε. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x ημ\dfrac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{ημ y}{y} = 1$

στ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ημ x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} ημ x = 0$ Μηδενική επί φραγμένη (αποδεικνείεται με κριτήριο παρεμβολής)

ζ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x + ημ x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(1 + \dfrac{ημ x}{x}\right) = \pm\infty$

Τα παρακάτω όρια ΔΕΝ υπάρχουν

η. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ημ x$

θ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} συν x$