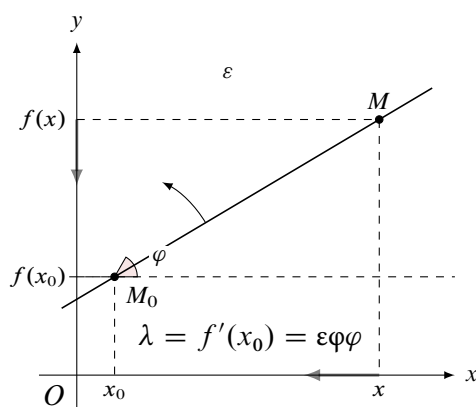


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ' Λυκείου

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

*Τα καθάρα Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση
των λογικών ιδεών.*

Albert Einstein, 1879-1955

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διαφορικός λογισμός

1

1.1 Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

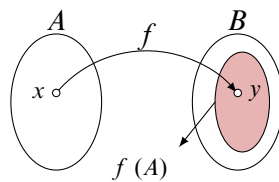
Ορισμός 1.1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Συνάρτηση ονομάζεται ο κανόνας (αντιστοίχιση) με τον οποίο **κάθε** στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B .

Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή και του ελληνικού αλφαβήτου $f, g, h, t, s, \sigma \dots$ και γράφουμε :

$$f : A \rightarrow B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης ($x \in A$), στο πρώτο σύνολο, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης ($y \in B$), στο δεύτερο σύνολο.



- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$.
- Ο κανόνας της συνάρτησης, με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχιση από το x στο $f(x)$, εκφράζεται συμβολικά με τη βοήθεια του x και ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f . Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in A$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f , συμβολίζεται $f(A)$ και ισχύει $f(A) \subseteq B$.
- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \mapsto f(x) \quad , \quad A \xrightarrow{f} f(A)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \quad , \quad g(t) \quad , \quad h(s) \dots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε

1. Το πεδίο ορισμού A .
 2. Το σύνολο B .
 3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in A$.
- Εάν τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.
 - Οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος δίνεται από δύο ή περισσότερες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται **συναρτήσεις πολλαπλού τύπου**.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in A_1 \subseteq A \\ f_2(x) & \text{αν } x \in A_2 \subseteq A \\ \vdots & \vdots \\ f_v(x) & \text{αν } x \in A_v \subseteq A \end{cases}$$

όπου A_1, A_2, \dots, A_v είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού ολόκληρης της συνάρτησης f με $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_v = A$ και $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_v = \emptyset$.

Στον πίνακα βλέπουμε τα βασικά είδη συναρτήσεων τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους.

Είδος	Τύπος	Πεδίο Ορισμού
Πολυωνυμική	$f(x) = a_v x^v + \dots + a_1 x + a_0$	$A = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$
	$f(x) = \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$	$A = \mathbb{R}$
Τριγωνομετρική	$f(x) = \epsilon\phi x$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
	$f(x) = \sigma\phi x$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
Εκθετική	$f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$	$A = \mathbb{R}$
Λογαριθμική	$f(x) = \log x, \ln x$	$A = (0, +\infty)$

Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις

Ταυτοτική	Σταθερή	Μηδενική
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

Ορισμός 1.2 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα τότε οι πράξεις μεταξύ των δύο συναρτήσεων ορίζονται ως εξής.

Τύπος	Πεδίο ορισμού
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$A_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \cap B\}$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$A_{f-g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \cap B\}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$A_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \cap B\}$$

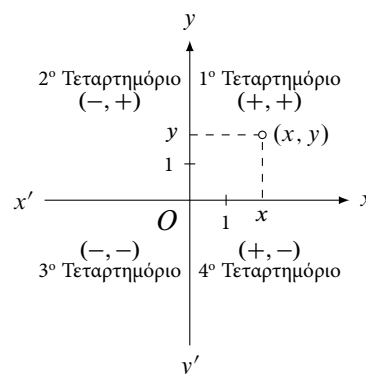
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$A_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \cap B \text{ και } g(x) \neq 0\}$$

Ορισμός 1.3 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης σημείων. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.

- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εάν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζώντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με x' .
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με y' .
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y) . Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.
- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον οριζόντιο άξονα x' , δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα y' , πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y , ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως 1^ο τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy .



Ορισμός 1.4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

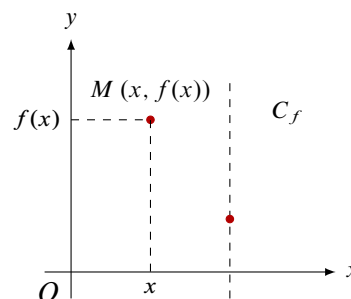
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A, \quad y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράστασης είναι της μορφής $(x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο.



Ορισμός 1.5 : ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**1. Άρτια συνάρτηση**

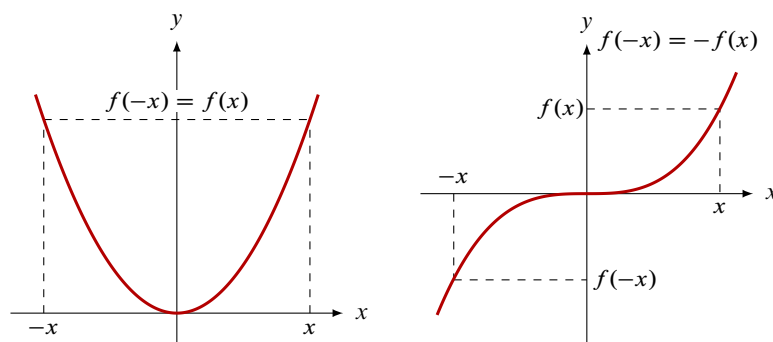
Άρτια ονομάζεται μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

- i. Για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$
- ii. $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$

2. Περιττή συνάρτηση

Περιττή ονομάζεται μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

- i. Για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$
- ii. $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in A$



- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Η αρχή των αξόνων για μια περιττή συνάρτηση ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας** της.

Ορισμός 1.6 : MONOTONIA

Μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα, χαρακτηρίζεται ως **μονότονη**. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αφορούν τη **μονοτονία** μιας συνάρτησης, μια ιδιότητα των συναρτήσεων η οποία δείχνει την αύξηση ή τη μείωση των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού.

1. Γνησίως αύξουσα

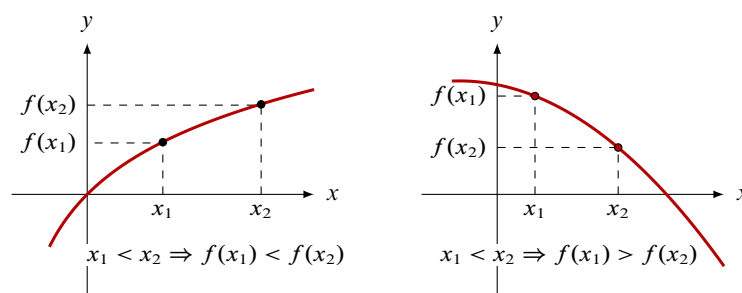
Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ εάν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

2. Γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ εάν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2)$$



Ορισμός 1.7 : ΤΟΠΙΚΑ - ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Ακρότατα, τοπικά ή ολικά ονομάζονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τις οποίες παίρνει σε ένα διάστημα ή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

1. Τοπικό μέγιστο

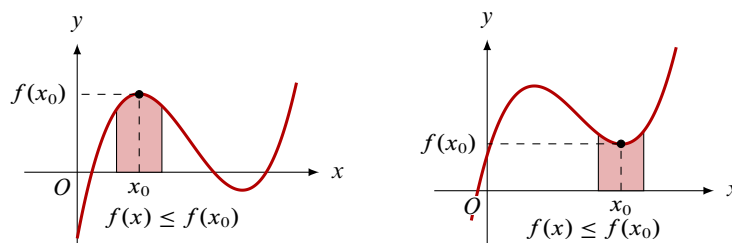
Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0 .

$$f(x) \leq f(x_0)$$

2. Τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0 .

$$f(x) \geq f(x_0)$$

**3. Ολικό μέγιστο**

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο $x_0 \in A$. Συμβολίζεται με $\max f(x)$.

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A$$

4. Ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της όταν η τιμή $f(x_0)$ είναι μικρότερη από κάθε άλλη $f(x)$ για κάθε σημείο $x_0 \in A$. Συμβολίζεται με $\min f(x)$.

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A$$

Ορισμός 1.8 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 ονομάζεται η προσέγγιση των τιμών της μεταβλητής $f(x)$ σε μια τιμή L καθώς το x πλησιάζει την τιμή x_0 . Συμβολίζεται με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Ορισμός 1.9 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο της στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο σημείο αυτό. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** εαν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

- i. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη ίση με το 0. Οι τετμημένες των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης :

$$f(x) = 0$$

- ii. Το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ έχουν τεταγμένη ίση με το 0. Θα είναι της μορφής $M(0, f(0))$.
- iii. Στα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g ισχύει $f(x) = g(x)$. Οι τετμημένες x_0 των σημείων αυτών είναι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ενώ ισχύει $x_0 \in A \cap B$.

Θεώρημα 1.2 : ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

- i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν θετική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :

$$f(x) > 0$$

- ii. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν αρνητική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :

$$f(x) < 0$$

- iii. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) > g(x) , \quad x \in A \cap B$$

- iv. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < g(x) , \quad x \in A \cap B$$

Θεώρημα 1.3 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Για τα όρια των βασικών συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

1. Πολυωνυμικές

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ ένα πολώνυμο n -οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)$$

2. Ρητές

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ ένα πολώνυμο n -οστού βαθμού και $Q(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + b_1 x + b_0$ με $b_\mu \neq 0$ ένα πολώνυμο μ -οστού βαθμού. Θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0}{b_\mu x_0^\mu + b_{\mu-1} x_0^{\mu-1} + \dots + b_1 x_0 + b_0} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

3. Άρρητες

Έστω $f(x) = \sqrt{A(x)}$ με $A(x) \geq 0$ μια άρρητη συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Το όριο της f όταν $x \rightarrow x_0$ θα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{A(x)} = \sqrt{A(x_0)}$$

4. Τριγωνομετρικές

Για τα όρια των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\phi x = \sigma\phi x_0$$

5. Λογαριθμικές και εκθετικές

Έστω $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x$ μια λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση αντίστοιχα με $0 < a \neq 1$ και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους. Θα ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

Θεώρημα 1.4 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και $x_0 \in A \cap B$ ένα κοινό στοιχείο των δύο πεδίων ορισμού. Αν τα όρια των δύο συναρτήσεων στο x_0 υπάρχουν με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ τότε οι πράξεις μεταξύ των ορίων ακολουθούν τους παρακάτω κανόνες :

Όριο	Κανόνας
Αθροίσματος	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \pm l_2$
Πολλαπλασίσιου	$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot l_1$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$
Γινομένου	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
Πηλίκου	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$
Απολύτου	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right = l_1 $
Ρίζας	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[k]{l_1}$, $l_1 \geq 0$
Δύναμης	$\lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v = l_1^v$

Θεώρημα 1.5 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα κοινό σημείο x_0 των πεδίων ορισμού τους τότε και οι συναρτήσεις

$$f + g, f - g, c \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, f^v \text{ και } \sqrt[\mu]{f}$$

με $v \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο σημείο x_0 εφόσον ορίζονται στο σημείο αυτό.

Θεώρημα 1.6 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$ η σύνθεση τους $g(f(x))$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 .

1.2 Η έννοια της παραγώγου**ΟΡΙΣΜΟΙ****Ορισμός 1.10 :** ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 αν το όριο της παραγώγου υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

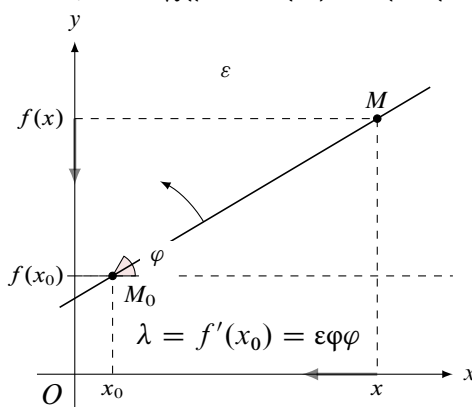
Το κλάσμα $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ονομάζεται **λόγος μεταβολής** της f .

Ορισμός 1.11 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in A$ παριστάνει το **συντελεστή διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο επαφής $(x_0, f(x_0))$.

$$\lambda = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \epsilon\phi\varphi$$

Είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία ϵ με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.



Όσο πλησιάζει το x στο x_0 τόσο αλλάζει η θέση του τυχαίου σημείου ώστε να τείνει να ταυτιστεί με το M_0 . Τότε η ευθεία MM_0 τείνει να γίνει εφαπτόμενη στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 1.12 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας $f(x)$ ως προς x σε μια συγκεκριμένη θέση $x = x_0$ ονομάζεται η παράγωγος $f'(x_0)$ της ποσότητας αυτής στο x_0 .

- Ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας f σε κάθε θέση είναι η ποσότητα $f'(x)$, $x \in A$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $s(t)$ ως προς το χρόνο t , ενός αντικειμένου είναι η ταχύτητά του : $s'(t) = v(t)$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ ως προς το χρόνο t , ενός αντικειμένου είναι η επιτάχυνσή του : $v'(t) = a(t)$. Επίσης η επιτάχυνση του αντικειμένου ισούται και με τη δεύτερη παράγωγο της απόστασης : $a(t) = x''(t)$.
- Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός ποσού $f(x)$ σε κάποια θέση x_0 είναι θετικός τότε το ποσό αυτό **αυξάνεται**. Εάν ο ρυθμός είναι αρνητικός το ποσό **μειώνεται**.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.7 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και $x_0 \in A$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο

$$y = f'(x_0) + \beta$$

1.3 Παράγωγος συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.13 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση με την οποία κάθε τιμή $x_0 \in A$ μιας μεταβλητής x αντιστοιχεί στην παράγωγο $f'(x_0)$ στο σημείο x_0 , μιας συνάρτησης f , ονομάζεται **παράγωγος συνάρτησης** της συνάρτησης f . Συμβολίζεται με f' και η τιμή της $f'(x)$ στο x ισούται με

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in A \subset \mathbb{R}$$

- Το σύνολο είναι το υποσύνολο του πεδίου ορισμού A της συνάρτησης f στο οποίο είναι παραγωγίσιμη.
- Η παράγωγος της f λέγεται και **πρώτη παράγωγος** της.
- Η παράγωγος της πρώτης παραγώγου f' ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** και συμβολίζεται f'' .
- Ομοίως η παράγωγος της f'' λέγεται **τρίτη παράγωγος** και συμβολίζεται f''' .
- Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης ονομάζεται **παραγωγή**.
- Ο αριθμός που μας δίνει το πλήθος των παραγωγίσεων ονομάζεται **τάξη** της παραγώγου.
- Οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 3 συμβολίζονται $f^{[v]}$ όπου $v > 3$ είναι η τάξη της παραγώγου.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.8 : ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τους κανόνες υπολογισμού της παραγώγου παραστάσεων που αποτελούν πράξεις συναρτήσεων. Για οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g θα ισχύει :

Πράξη	Συνάρτηση	Παράγωγος
Άθροισμα - Διαφορά	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
Πολλαπλάσιο	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Γινόμενο	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Πηλίκο	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Αντίστροφη	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
Σύνθεση	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Θεώρημα 1.9 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τύπους για την παραγωγή των βασικών συναρτήσεων καθώς και κανόνες παραγωγής σύνθετων συναρτήσεων. Η απλή συνάρτηση και η σύνθεση συναρτήσεων που βρίσκονται στην ίδια γραμμή έχουν την ίδια μορφή ως προς τον τύπο τους.

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'	Συνάρτηση $g \circ f$	Παράγωγος $(g \circ f)'$
c	0		
x	1		
x^v	$v x^{v-1}$	$f^v(x)$	$v f^{v-1}(x) \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu f(x)$	$\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu f(x)$	$-\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$\epsilon\phi x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\epsilon\phi f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
$\sigma\phi x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\sigma\phi f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\ln f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

1.4 Εφαρμογές των παραγώγων

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.10 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ 1^{ης} ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

- i. Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως άξουσα στο διάστημα Δ .
- ii. Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

Θεώρημα 1.11 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ η οποία είναι παραγωγίσιμη και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

- i. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\bullet f'(x_0) = 0 \quad \bullet f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x < x_0 \text{ και } \bullet f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x > x_0$$

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0 .

- ii. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\bullet f'(x_0) = 0 \quad \bullet f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x < x_0 \text{ και } \bullet f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > x_0$$

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Στατιστική

2

2.1 Βασικές έννοιες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Πληθυσμός ονομάζεται ένα σύνολο όμοιων στοιχείων τα οποία εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Το πλήθος των στοιχείων ενός πληθυσμού ονομάζεται **μέγεθος** του πληθυσμού.

Ορισμός 2.2 : ΔΕΙΓΜΑ

Δείγμα ονομάζεται ένα υποσύνολο ενός πληθυσμού.

- Ένα δείγμα λέγεται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού όταν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του είναι αρκετά αξιόπιστα ώστε να μπορούν να γενικευτούν για ολόκληρο τον πληθυσμό.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός δείγματος ονομάζεται **μέγεθος** του δείγματος.

Ορισμός 2.3 : ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ - ΕΙΔΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μεταβλητή ονομάζεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζονται τα στοιχεία ενός πληθυσμού.

- Συμβολίζεται με οποιοδήποτε κεφαλαίο γράμμα : X, Y, A, B, \dots
- Οι πιθανές τιμές οι οποίες μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ονομάζονται **τιμές της μεταβλητής**. Συμβολίζονται με το ίδιο μικρό γράμμα του ονόματος της μεταβλητής π.χ. $x_i, y_i \dots$ όπου ο δείκτης i φανερώνει τον αύξοντα αριθμό της τιμής.
- Τα στατιστικά δεδομένα που συλλέγονται από ένα πληθυσμό ή δείγμα που εξετάζεται ως προς κάποια μεταβλητή ονομάζονται **παρατηρήσεις**. Συμβολίζονται συνήθως με t_i όπου ο δείκτης i φανερώνει τον αύξοντα αριθμό της παρατήρησης.

Οι μεταβλητές διακρίνονται στις εξής κατηγορίες :

1. Ποιοτικές

Ποιοτική ονομάζεται κάθε μεταβλητή της οποίας οι τιμές δεν είναι αριθμητικές.

2. Ποσοτικές

Ποσοτική ονομάζεται κάθε μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι αριθμοί. Οι ποσοτικές μεταβλητές χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς.

- Διακριτές** ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές που παίρνουν μεμονωμένες τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή ένα διάστημα αυτού.
- Συνεχείς** ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές που παίρνουν όλες τις τιμές στο σύνολο ή σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 2.4 : ΑΠΟΓΡΑΦΗ - ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

1. Απογραφή

Απογραφή ονομάζεται η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων από έναν ολόκληρο πληθυσμό.

2. Δειγματοληψία

Δειγματοληψία ονομάζεται η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων από ένα δείγμα ενός πληθυσμού.

2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.5 : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι πίνακες στους οποίους συγκεντρώνουμε τα στατιστικά δεδομένα καθώς και πληροφορίες που μας βοηθούν να εξαγάγουμε συμπεράσματα για το δείγμα ή πληθυσμό ονομάζονται στατιστικοί πίνακες. Οι κατηγορίες πινάκων είναι :

1. Γενικοί πίνακες

Οι γενικοί πίνακες περιέχουν αναλυτικά όλες τις πληροφορίες που αφορούν τα δεδομένα που συλλέξαμε.

2. Ειδικοί πίνακες

Οι ειδικοί πίνακες είναι συνοπτικοί και περιέχουν πληροφορίες από τους γενικούς πίνακες.

Ορισμός 2.6 : ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

Συχνότητες ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν πληροφορίες για τις τιμές των μεταβλητών των δεδομένων που έχουμε συλλέξει από ένα δείγμα ή πληθυσμό, όπως ο αριθμός εμφανίσεων, το ποσοστό και άλλα. Έστω ένα δείγμα μεγέθους n το οποίο μελετάται ως προς μια μεταβλητή X με k σε πλήθος τιμές x_i , $1 \leq i \leq k \leq n$. Οι βασικές συχνότητες είναι οι ακόλουθες :

1. Απόλυτη συχνότητα ή Συχνότητα

Συχνότητα μιας τιμής x_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός v_i ο οποίος μας δίνει το πλήθος των εμφανίσεων της τιμής αυτής μέσα στο δείγμα.

2. Σχετική συχνότητα

Σχετική συχνότητα μιας τιμής x_i ονομάζεται το κλάσμα $f_i = \frac{v_i}{n}$ το οποίο μας δίνει το ποσοστό εμφάνισης της τιμής ως μέρος του δείγματος. Μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό επί τοις 100 και είναι

$$f_i \% = \frac{v_i}{n} \cdot 100\%$$

3. Αθροιστική συχνότητα

Αθροιστική συχνότητα ονομάζεται ο φυσικός αριθμός N_i ο οποίος μας δίνει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες την τιμή x_i .

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

Υπολογίζεται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

4. Σχετική αθροιστική συχνότητα

Σχετική αθροιστική συχνότητα ονομάζεται ο φυσικός αριθμός F_i ο οποίος μας δίνει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες την τιμή x_i .

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

Υπολογίζεται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές. Μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό επί τοις 100 και είναι $F_i \% = F_i \cdot 100\%$.

Ορισμός 2.7 : ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι η διαδικασία με την οποία μοιράζονται οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής σε ομάδες. Χρησιμοποιείται όταν παρουσιάζεται μεγάλο πλήθος διαφορετικών μεταξύ τους παρατηρήσεων ώστε να μελετηθεί καλύτερα το δείγμα.

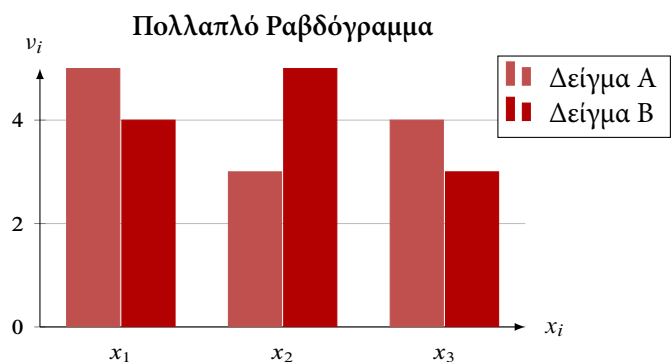
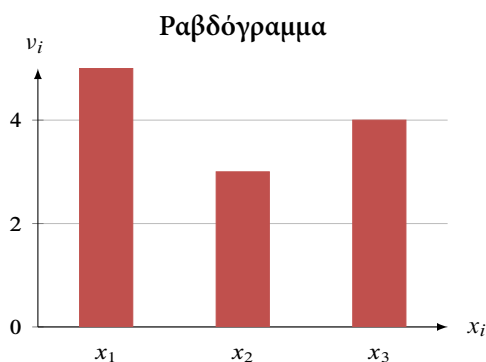
- Οι ομάδες στις οποίες μοιράζονται οι παρατηρήσεις ονομάζονται **κλάσεις**. Αποτελούν διαστήματα τιμών της μορφής $[,)$.
- Τα άκρα των κλάσεων ονομάζονται **όρια**. Επιλέγουμε το άνω όριο της τελευταίας κλάσης να είναι κλειστό ώστε αυτή να έχει τη μορφή $[,]$.
- Το μέγεθος κάθε κλάσης δίνεται από τον τύπο $c = \frac{R}{k}$ όπου R είναι το εύρος των παρατηρήσεων και k το πλήθος των κλάσεων.
- Το κέντρο κάθε κλάσης ονομάζεται **κεντρική τιμή** και συμβολίζεται x_i .

Ορισμός 2.8 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει σε μια κατανομή συχνοτήτων μπορούμε να τα παραστήσουμε γραφικά με τη χρήση διαφόρων ειδών διαγραμμάτων ανάλογα το είδος της μεταβλητής. Έστω μια μεταβλητή X με τιμές x_1, x_2, \dots, x_k . Βασικοί τρόποι γραφικής παράστασης δεδομένων είναι οι ακόλουθοι :

1. Ραβδόγραμμα

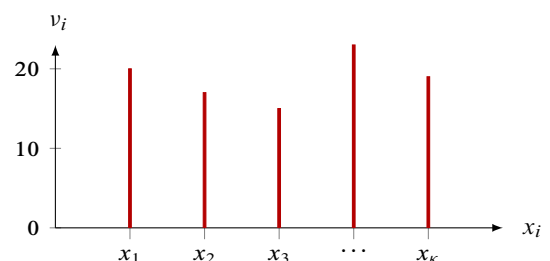
Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση δεδομένων ενός δείγματος το οποίο έχει εξεταστεί ως προς **ποιοτική** μεταβλητή X . Σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων θέτουμε στον οριζόντιο άξονα τις τιμές της μεταβλητής X ενώ στον κατακόρυφο οποιαδήποτε συχνότητα θέλουμε να μελετήσουμε. Σχεδιάζουμε κάθετες μπάρες στη θέση κάθε τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ των οποίων το ύψος ισούται με την τιμή της αντίστοιχης συχνότητας.



Αν εξετάζονται δύο ή περισσότερα δείγματα ως προς την ίδια ποιοτική μεταβλητή τότε χρησιμοποιούμε το πολλαπλό ραβδόγραμμα το οποίο περιέχει σε κάθε θέση x_i τις ράβδους συχνοτήτων από όλα τα δείγματα.

2. Διάγραμμα

Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται στην περίπτωση μιας **ποσοτικής** μεταβλητής και σε αντίθεση με το ραβδόγραμμα αποτελείται από κατακόρυφες ευθείες τοποθετημένες στις θέσεις x_1, x_2, \dots, x_n των τιμών της μεταβλητής. Κάθε ευθεία έχει ύψος ίσο με την τιμή της συχνότητας που αντιστοιχεί σε κάθε x_i .



3. Πολύγωνο συχνοτήτων

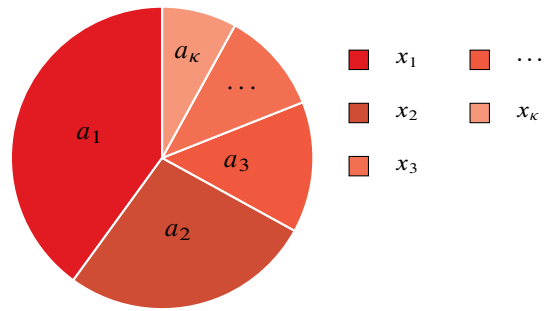


Το πολύγωνο συχνοτήτων χρησιμοποιείται στην παράσταση δεδομένων που μελετήθηκαν ως προς **ποσοτική μεταβλητή**. Είναι μια τεθλασμένη γραμμή η οποία ενώνει τα σημεία της μορφής (x_i, ν_i) ή (x_i, f_i) κ.τ.λ. δηλαδή τα σημεία με συντεταγμένες τις τιμές x_i και τις αντίστοιχες συχνότητες.

4. Κυκλικό διάγραμμα

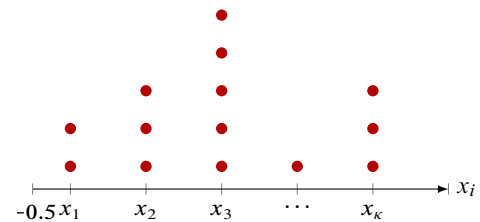
Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παράσταση δεδομένων που έχουν μελετηθεί και ως προς ποιοτική και ως προς ποσοτική μεταβλητή X με τιμές x_1, x_2, \dots, x_k . Ένας κύκλος χωρίζεται σε k κυκλικούς τομείς όπου το μέγεθος του κάθε κυκλικού τομέα είναι αντίστοιχο της τιμής της συχνότητας που μελετάμε. Το μέτρο του τόξου κάθε τομέα συμβολίζεται με a_i , $i = 1, 2, \dots, k$ και είναι :

$$a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ$$



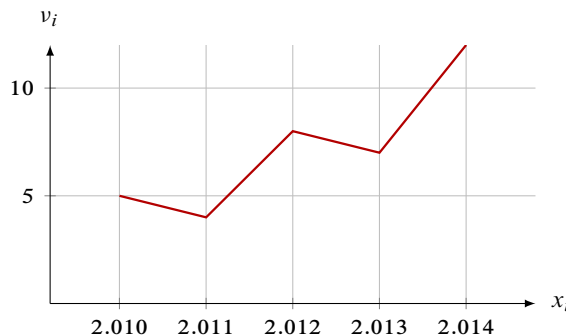
5. Σημειόγραμμα

Το σημειόγραμμα αποτελείται από έναν άξονα στον οποίο τοποθετούμε τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_k της μεταβλητής X και σε κάθε θέση σχεδιάζονται κατακόρυφα τόσα σημεία όσα και η συχνότητα της κάθε τιμής.



6. Χρονόγραμμα

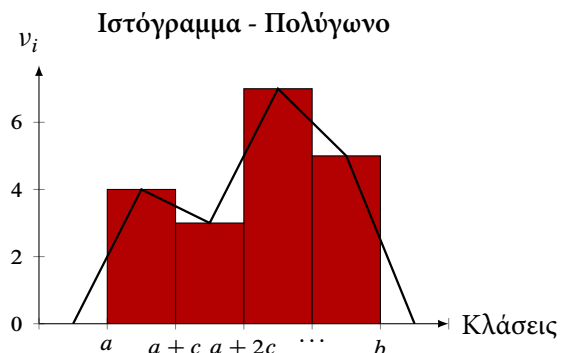
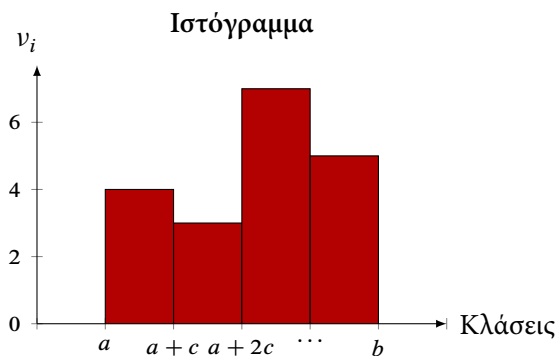
Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται στην περίπτωση μιας ποσοτικής μεταβλητής όταν αυτή παριστάνει χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής του χρόνου ενώ στο κατακόρυφο οποιαδήποτε από τις συχνότητες των τιμών αυτών.



Το χρονόγραμμα μας δίνει μια εικόνα για τις διάφορες μεταβολές της εκάστοτε συχνότητας κατά την πάροδο του χρόνου.

7. Ιστόγραμμα

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παρουσίαση ομαδοποιημένων δεδομένων. Οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των ομάδων ενώ κατακόρυφος ο άξονας της οποιαδήποτε συχνότητας.

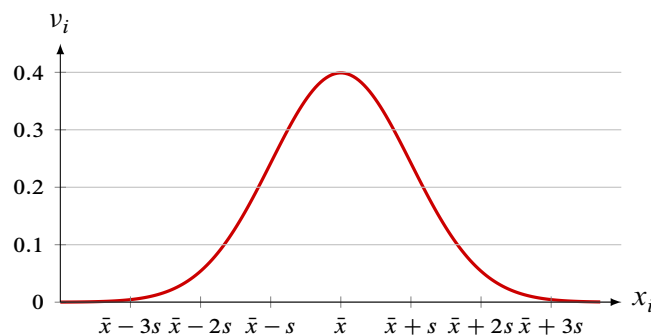


Αποτελείται από μπάρες (ιστοί) ίσου πλάτους μιας κλάσης και ύψους ίσου με την τιμή της συχνότητας.

- Το εμβαδόν κάθε ιστού ισούται με την τιμή της αντίστοιχης συχνότητας αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το πλάτος c της ομάδας.
- Το εμβαδόν όλων των ιστών ισούται με το μέγεθος n του δείγματος.
- Ενώνοντας το μέσο της άνω πλευράς κάθε ιστού συμπεριλαμβάνοντας την αμέσως προηγούμενη και αμέσως επόμενη κλάση, πορεύεται το **πολύγωνο συχνοτήτων**.

Ορισμός 2.9 : ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Η καμπύλη συχνοτήτων αποτελεί ένα πολύγωνο συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων στην περίπτωση όπου το πλήθος των ομάδων είναι αρκετά μεγάλο ενώ το πλάτος κάθε ομάδας πολύ μικρό. Έτσι το πολύγωνο τείνει να γίνει μια ομαλή καμπύλη.



Βασική περίπτωση καμπύλης συχνοτήτων είναι αυτή της κανονικής κατανομής στην οποία οι παρατηρήσεις είναι εξίσου κατανεμημένες εκατέρωθεν της μέσης τιμής ενώ το μεγαλύτερο πλήθος τους συσπειρώνεται γύρω της.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Έστω ένα δείγμα μεγέθους n το οποίο μελετάται ως προς μια μεταβλητή X με k σε πλήθος τιμές x_i , $1 \leq i \leq k \leq n$. Για τις συχνότητες των τιμών του ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

- Για κάθε συχνότητα ν_i , $i = 1, 2, \dots, k$ ισχύει $0 \leq \nu_i \leq n$.
- Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ν_i , $i = 1, 2, \dots, k$ ισούται με το μέγεθος του δείγματος.

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$$

- Για κάθε σχετική συχνότητα f_i και σχετική συχνότητα τοις 100 $f_i\%$, $i = 1, 2, \dots, k$ ισχύουν οι σχέσεις $0 \leq f_i \leq 1$ και $0 \leq f_i\% \leq 100\%$.
- Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ ισούται με τη μονάδα ενώ το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων επί τοις 100 είναι ίσο με 100%.

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1 \text{ και } f_1\% + f_2\% + \dots + f_k\% = 100\%$$

- | | | |
|----------------------------------|---|---------------------|
| v. $\nu_i = N_i - N_{i-1}$ | ix. $F_i\% = \frac{N_i}{n} \cdot 100\%$ | xiii. $N_k = n$ |
| vi. $f_i = F_i - F_{i-1}$ | x. $\nu_1 = N_1$ | xiv. $F_k = 1$ |
| vii. $f_i\% = F_i\% - F_{i-1}\%$ | xi. $f_1 = F_1$ | xv. $F_k\% = 100\%$ |
| viii. $F_i = \frac{N_i}{n}$ | xii. $f_1\% = F_1\%$ | |

2.3 Μέτρα θέσης και διασποράς

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.10 : ΜΕΤΡΟ ΘΕΣΗΣ

Μέτρα θέσης ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν τη θέση του κέντρου των παρατηρήσεων μιας δειγματοληψίας. Τα μέτρα θέσης ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n για μια μεταβλητή X είναι τα εξής :

1. Μέση τιμή

Η μέση τιμή ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήσεων ενός δείγματος προς το πλήθος τους. Συμβολίζεται \bar{x} και είναι :

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Εναλλακτικοί τύποι για τη μέση τιμή είναι οι ακόλουθοι οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε κατανομές συχνότητων. Αν κάποια μεταβλητή X έχει τιμές x_1, x_2, \dots, x_k με συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k και σχετικές συχνότητες f_1, f_2, \dots, f_k τότε θα έχουμε :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i \quad \text{και} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

Για τα ομαδοποιημένα δεδομένα το x_i συμβολίζει την κεντρική τιμή κάθε κλάσης.

2. Σταθμικός μέσος

Ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως η μέση τιμή των παρατηρήσεων όταν αυτές έχουν ξεχωριστό συντελεστή βαρύτητας. Ισούται με

$$\bar{x} = \frac{t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

όπου w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι συντελεστές βαρύτητας των παρατηρήσεων.

3. Διάμεσος

Διάμεσος ονομάζεται η κεντρική παρατήρηση n σε πλήθους παρατηρήσεων όταν αυτές έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά. Συμβολίζεται με δ . Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις :

- i. Αν το πλήθος των n παρατηρήσεων είναι περιττό τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση.

$$\delta = t_{\frac{n}{2}}$$

- ii. Αν το πλήθος των n παρατηρήσεων είναι άρτιο τότε η διάμεσος ισούται με το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\delta = \frac{t_{\frac{n}{2}} + t_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Η διάμεσος σε κατανομή συχνοτήτων ισούται με την τιμή x_i για την οποία η σχετική αθροιστική συχνότητα $F_i\%$ είτε ισούται είτε ξεπερνάει για πρώτη φορά το 50%. Δηλαδή

$$\delta = x_i \quad \text{για την οποία} \quad F_{i-1}\% < 50\% \leq F_i\%$$

Ορισμός 2.11 : ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Μέτρα διασποράς ονομάζονται τα αριθμητικά μεγέθη τα οποία μας δίνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων μιας δειγματοληψίας γύρω από το κέντρο. Τα μέτρα θέσης ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n για μια μεταβλητή X είναι τα εξής :

1. Εύρος

Εύρος ονομάζεται η διαφορά την μέγιστης μείον την ελάχιστη παρατήρηση του δείγματος. Συμβολίζεται με R και είναι :

$$R = t_{\max} - t_{\min}$$

2. Διακύμανση

Διακύμανση ονομάζεται η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή \bar{x} τους. Συμβολίζεται με s^2 .

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$$

Σε μια κατανομή συχνοτήτων αν μια μεταβλητή έχει τιμές x_1, x_2, \dots, x_k με συχνότητες n_1, n_2, \dots, n_k και σχετικές συχνότητες f_1, f_2, \dots, f_k τότε η διακύμανση δίνεται από τους παρακάτω τύπους :

$$\text{i. } s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n} \right\} \qquad \text{iii. } s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i n_i \right)^2}{n} \right\}$$

$$\text{ii. } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

$$\text{iv. } s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$\text{v. } s^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

$$\text{vi. } s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \text{ όπου } \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i$$

3. Τυπική απόκλιση

Η τυπική απόκλιση ορίζεται ως η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

$$s = \sqrt{s^2}$$

4. Συντελεστής μεταβλητότητας

Συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας ονομάζεται ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς την απόλυτη τιμή του μέσου όρου του δείγματος. Συμβολίζεται CV .

$$CV = \frac{s}{|x|} \cdot 100\%$$

- Μας δίνει την ομοιογένεια των δεδομένων ενός δείγματος.
- Ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής του είναι μικρότερος του 10%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Πιθανότητες

3

3.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ

Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί με απόλυτη βεβαιότητα όσες φορές κι αν αυτό επαναληφθεί, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Ορισμός 3.2 : ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Δειγματικός χώρος ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. Ο δειγματικός αποτελεί βασικό σύνολο.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Ορισμός 3.3 : ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

Ενδεχόμενο ονομάζεται το σύνολο το οποίο περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία του δειγματικού χώρου ενός πειράματος.

- Κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού του χώρου.
- Συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα π.χ. : A, B, \dots
- Τα ενδεχόμενα που έχουν ένα στοιχείο ονομάζονται απλά ενδεχόμενα, ενώ αν περιέχουν περισσότερα στοιχεία ονομάζονται σύνθετα.
- Εαν το αποτέλεσμα ενός πειράματος είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου τότε το ενδεχόμενο πραγματοποιείται.
- Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις.
- Ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.
- Εαν δύο ενδεχόμενα A, B δεν έχουν κοινά στοιχεία τότε ονομάζονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους δηλαδή :

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Ορισμός 3.4 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων ορίζονται ακριβώς όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Κάθε ορισμός προσαρμόζεται ώστε να περιγράψει την ισχύ του ενδεχομένου σε κάθε περίπτωση.

1. Ένωση

Ένωση δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η ένωση πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A ή B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ή } x \in B$$

2. Τομή

Τομή δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων. Η τομή πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα A και B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B$$

3. Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει τα στοιχεία εκείνα τα οποία δεν ανήκουν στο σύνολο A . Το συμπλήρωμα πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A .

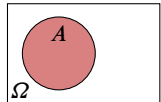
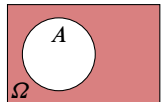
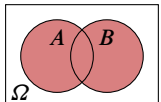
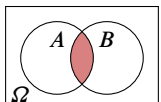
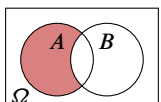
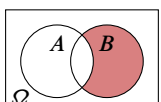
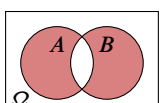
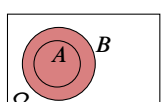
$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

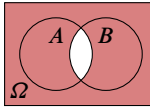
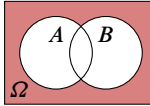
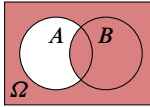
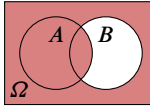
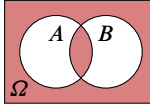
4. Διαφορά

Διαφορά ενός ενδεχομένου A από ένα ενδεχόμενο B ονομάζεται το ενδεχόμενο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο στο ενδεχόμενο A . Η διαφορά πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A .

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \notin B$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ενδεχόμενα, οι πράξεις μεταξύ δύο ενδεχομένων A, B , οι συμβολισμοί τους, λεκτική περιγραφή καθώς και διάγραμμα για κάθε περίπτωση.

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Περιγραφή	Διάγραμμα
$x \in A$	Ενδεχόμενο A	Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται.	
$x \in A'$	Συμπλήρωμα του A	Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται.	
$x \in A \cup B$	Ένωση του A με το B	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .	
$x \in A \cap B$	Τομή του A με το B	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδ. A και B .	
$x \in A - B$	Διαφορά του B απ' το A	Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A .	
$x \in B - A$	Διαφορά του A απ' το B	Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο B .	
$x \in (A - B) \cup (B - A)$	Ένωση διαφορών	Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα δύο ενδεχόμενα (ή μόνο το A ή μόνο το B).	
$A \subseteq B$ $x \in A \Rightarrow x \in B$	A υποσύνολο του	Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται πραγμ/ση του B .	

$x \in (A \cap B)'$	Συμπλήρωμα τομής	Δεν πραγματοποιούνται συγχρονως τα ενδ. A και B .	
$x \in (A \cup B)'$	Συμπλήρωμα ένωσης	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδ. A και B .	
$x \in (A - B)'$	Συμπλήρωμα διαφοράς	Δεν πραγματοποιείται αποκλειστικά το ενδεχόμενο A .	
$x \in (B - A)'$	Συμπλήρωμα διαφοράς	Δεν πραγματοποιείται αποκλειστικά το ενδεχόμενο B .	
$x \in ((A - B) \cup (B - A))'$	Συμπλήρωμα ένωσης διαφορών	Δεν πραγματοποιείται αποκλειστικά ένα από τα δύο ενδεχόμενα (ή κανένα από τα δύο ή και τα δύο).	

3.2 Η έννοια της πιθανότητας

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.5 : ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του A προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $N(A)$.

Ορισμός 3.6 : ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ορίζεται ως το άθροισμα των πιθανοτήτων $P(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ των απλών ενδεχομένων του.

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

- Για κάθε στοιχείο ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$ του δειγματικού χώρου Ω ονομάζουμε τον αριθμό $P(\omega_i)$ πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
- Ο παραπάνω ορισμός ονομάζεται **αξιοματικός ορισμός** της πιθανότητας και εφαρμόζεται όταν το ενδεχόμενο A δεν αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες :

- i. Πιθανότητα κενού συνόλου : $P(\emptyset) = 0$.
- ii. Πιθανότητα δειγματικού χώρου : $P(\Omega) = 1$.
- iii. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Θεώρημα 3.2 : ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Οι παρακάτω ιδιότητες μας δείχνουν τις σχέσεις με τις οποίες συνδέονται οι πιθανότητες οποιονδήποτε ενδεχομένων A, B με τις πιθανότητες των ενδεχομένων των πράξεων που περιέχουν τα ενδεχόμενα αυτά.

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα
Ένωση	$P(A \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A \cap B) , & \text{αν } A \cap B \neq \emptyset \\ P(A) + P(B) , & \text{αν } A \cap B = \emptyset \end{cases}$
Συμπλήρωμα	$P(A') = 1 - P(A)$
Διαφορά	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
	$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
Υποσύνολο	$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Θεώρημα 3.3 : ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Μεταξύ των πιθανοτήτων δύο οποιονδήποτε ενδεχομένων A, B καθώς και των ενδεχομένων που προκύπτουν από πράξεις που τα περιέχουν, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες.

- i. $P(A) \leq P(A \cup B)$
- ii. $P(B) \leq P(A \cup B)$
- iii. $P(A \cap B) \leq P(A)$
- iv. $P(A \cap B) \leq P(B)$
- v. $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$
- vi. $P(A - B) \leq P(A)$
- vii. $P(B - A) \leq P(B)$
- viii. $P(A - B) \leq P(A \cup B)$
- ix. $P(B - A) \leq P(A \cup B)$