Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

27 Σεπτεμβρίου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

ΘΕΜΑ Α′

Α′.1 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ αυτό το σημείο τότε να δείξεις οτι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

Α′.2 Να δώσεις τη γεωμερτρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle. *Μονάδες 5*

Α′.3 Να χαρακτηρίσεις τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α′. Αν $z \in \mathbb{C}^*$, τότε οι εικόνες των $z, -iz, \frac{z}{i^2}$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$.

β′. $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_0^x e^t \mathrm{d}t = 1$

γ′. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

δ′. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ε′. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = g'(x)$ για $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β′

Αν για τους μιγαδικούς $z = a + i$ και $u = \frac{\beta - i}{\beta + i}$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$z + 2u - \overline{z} = 0 \text{ και } z + \overline{z} = 2ui$$

τότε να αποδείξεις ότι :

Β′.1 $a = \beta = 1$ και $z + u = 1$ *Μονάδες 7*

Β′.2 Η εικόνα του u κινείται στον μοναδιαίο κύκλο. *Μονάδες 4*

Β′.3 Η εικόνα του $w = \left(\frac{z}{u}\right)^3$ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας του 1ου και 3ου τεταρτημορίου στο μιγαδικό επίπεδο. *Μονάδες 7*

Β′.4 $\left|\frac{w^3}{z - w - 2u}\right| = 16$ *Μονάδες 7*

ΘΕΜΑ Γ′

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x - 2x$$

Να δείξεις ότι :

Γ′.1 $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 9*

Γ′.2 Η εξίσωση $x + 1 - xe^{f(x)} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο διάστημα $(0, 1)$. *Μονάδες 7*

Γ′.3 Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - 1}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής. *Μονάδες 9*

ΘΕΜΑ Δ′

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 4$

iv. $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_x^a f(t)\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξεις οτι :

Δ′.1 $g(x) = -\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 7*

Δ′.2 Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$, ώστε $\displaystyle\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t = 2$ και $\displaystyle\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = -2$ *Μονάδες 8*

Δ′.3 Η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο ξ. *Μονάδες 5*

Δ′.4 $\displaystyle\lim_{x\to\xi} \frac{4 - g(x)}{(x - \xi)^2} = f^2(\xi)$ *Μονάδες 5*