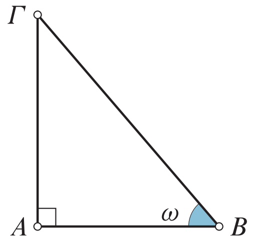
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Τριγωνομετρία

## 1.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 1 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**
Έστω $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με $A = 90°$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξείων γωνιών του τριγώνου ορίζονται ως εξής :



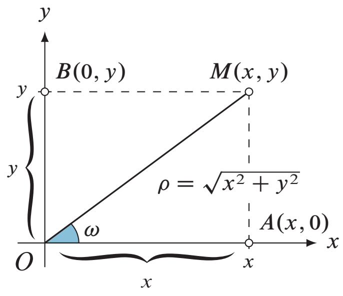

*Σχήμα 1.1:* Τριγωνομετρικοί αριθμοι οξείας γωνίας

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
   $$\text{Ημίτονο} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad ημω = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$
2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
   $$\text{Συνημίτονο} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} \quad , \quad συνω = \frac{AB}{B\Gamma}$$
3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη.
   $$\text{Εφαπτομένη} = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}} \quad , \quad εφω = \frac{A\Gamma}{AB}$$
4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την απέναντι κάθετη.
   $$\text{Συνεφαπτομένη} = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}} \quad , \quad σφω = \frac{AB}{A\Gamma}$$

**Ορισμός 2 : ΤΡΙΓ. ΑΡ. ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**
Έστω $Oxy$ ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και $M(x, y)$ ένα σημείο του. Ενώνοντας το σημείο $M$ με την αρχή των αξόνων, το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει δημιουργεί μια γωνία $\omega$ με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα $Ox$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $OM$ είναι :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}y$ ορίζονται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του σημείου και είναι




*Σχήμα 1.2:* Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων.

1. **Ημίτονο**
   Ημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.
   $$\eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{\rho}$$

2. **Συνημίτονο**
   Συνημίτονο της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την απόσταση του από την αρχή των αξόνων.
   $$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

3. **Εφαπτομένη**
   Εφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τεταγμένης του σημείου προς την τετμημένη του.
   $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{y}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

4. **Συνεφαπτομένη**
   Συνεφαπτομένη της γωνίας ονομάζεται ο λόγος της τετμημένης του σημείου προς την τεταγμένη του.
   $$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{y} \quad . \quad y \neq 0$$

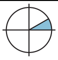
**Ορισμός 3 : ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ - ΤΟΞΩΝ**
Μονάδες μέτρησης γωνιών - τόξων λέγονται οι γωνίες ή τα τόξα αντίστοιχα με τα οποία μετράμε το μέτρο (άνοιγμα) των πλευρών μιας γωνίας ή αντίστοιχα το μέτρο ενός τόξου. Οι βασικές μονάδες μέτρησης για τη μέτρηση γωνιών ή τόξων είναι :

1. **Μοίρα**
   Μοίρα ονομάζεται το τόξο το οποίο είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου. Ισοδύναμα είναι η γωνία η οποία αν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο ίσο με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου.

   - Συμβολίζεται με $1^\circ$.
   - Μια μοίρα χωρίζεται σε 60 πρώτα λεπτά $(60')$ και κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά $(60'')$.

2. **Ακτίνιο**
   Ακτίνιο ονομάζεται το τόξο ενός κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ορίζεται και ως η γωνία που αν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Συμβολίζεται με $1rad$.

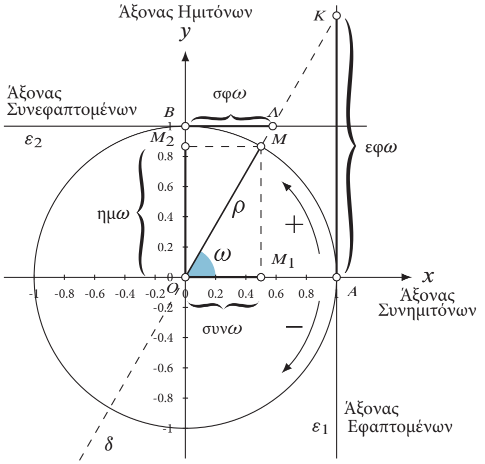
**Βασικές Γωνίες**

| **Μοίρες** | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ακτίνια** | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| **Σχήμα** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ημω | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| συνω | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| εφω | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | Δεν ορίζεται | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| σφω | Δεν ορίζεται | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | Δεν ορίζεται |

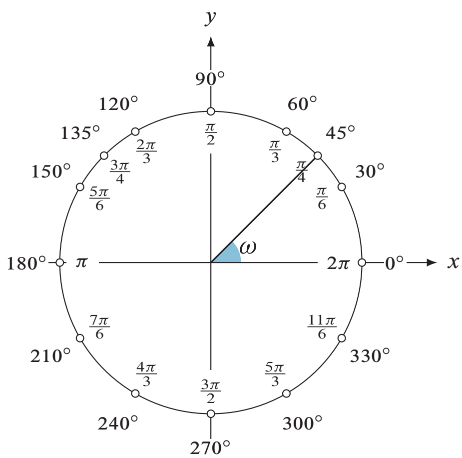
***Πίνακας 1.1:*** Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

**Ορισμός 4 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ**
Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος με ακτίνα ίση με τη μονάδα και κέντρο την αρχή των αξόνων ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, στους άξονες του οποίου παίρνουν τιμές οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών.

## Τριγωνομετρικός Κύκλος




***Σχήμα 1.3:*** Τριγωνομετρικός κύκλος



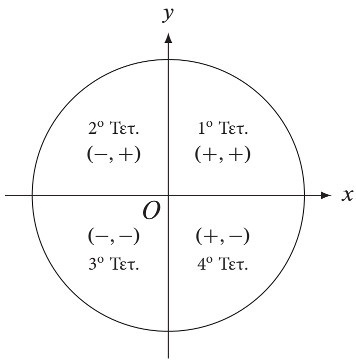

***Σχήμα 1.4:*** Βασικές γωνίες

- Κάθε γωνία $\omega$ έχει πλευρές, τον θετικό ημιάξονα $Ox$ και την ακτίνα $\rho$ του κύκλου, μετρώντας τη γωνία αυτή αριστερόστροφα, φορά που ορίζεται ως **θετική**.
- Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ είναι ο άξονας συνημιτόνων ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ ο άξονας ημιτόνων.
- Κάθε σημείο $M$ του κύκλου έχει συντεταγμένες $M(\text{συν}\omega, \text{ημ}\omega)$.
- Η τετμημέμη του σημείου είναι ίση με το συνημίτονο της γωνίας, ενώ η τεταγμένη ίση με το ημίτονο της.
$$x = \text{συν}\omega \quad , \quad y = \text{ημ}\omega$$
- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $A(1,0)$ είναι ο **άξονας των εφαπτομένων**. Η εφαπτομένη της γωνίας $\omega$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $\varepsilon_1$ με το φορέα $\delta$ της ακτίνας.
$$y_\kappa = \text{εφ}\omega$$
- Η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο στο σημείο $B(0,1)$ είναι ο **άξονας των συνεφαπτομένων**. Η συνεφαπτομένη της γωνίας $\omega$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας $\varepsilon_2$ με το φορέα $\delta$ της ακτίνας.
$$x_\kappa = \text{σφ}\omega$$

Πιο κάτω βλέπουμε τα τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία χωρίσουν οι άξονες το επίπεδο και τον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών σε κάθε τεταρτημόριο.

| **Τεταρτημόριο** | **ημω** | **συνω** | **εφω** | **σφω** |
|---|---|---|---|---|
| **1ο Τεταρτημόριο** | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| **2ο Τεταρτημόριο** | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| **3ο Τεταρτημόριο** | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| **4ο Τεταρτημόριο** | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ |

***Πίνακας 1.2:*** Πρόσημα τριγωνομετρικών αριθμών




***Σχήμα 1.5:*** Τεταρτημόρια και πρόσημα τεταρτημορίων τριγωνομετρικού κύκλου.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.1 : ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

Το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας $\omega$ παίρνει τιμές από $-1$ μέχρι $1$. Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες :

i. $-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1$ , $-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$ ii. $|\text{ημ}\omega| \leq 1$ , $|\text{συν}\omega| \leq 1$

**Θεώρημα 1.2 : ΤΡ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ**

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας $\omega$ της οποίας το μέτρο είναι μικρότερο του ενός κύκλου είναι ίσοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας που θα προκύψει εαν στρέψουμε την $\omega$ κατά πολλαπλάσια του κύκλου.

$$\begin{array}{ll} \text{ημ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{ημ}\omega & \text{συν}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{συν}\omega \\ \text{εφ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{εφ}\omega & \text{σφ}\,(360^\circ \cdot \kappa + \omega) = \text{σφ}\omega \end{array}$$

ή ισοδύναμα με τη βοήθεια ακτινίων

$$\begin{array}{ll} \text{ημ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{ημ}\omega & \text{συν}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{συν}\omega \\ \text{εφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{εφ}\omega & \text{σφ}\,(2\kappa\pi + \omega) = \text{σφ}\omega \end{array}$$

**Θεώρημα 1.3 : ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ**

Αν $\mu$ είναι το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και $a$ το μέτρο της ίδιας γωνίας σε ακτίνια, η σχέση που τα συνδέει και με την οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα είναι :

$$\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{a}{\pi}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1.1 Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια**
Οι παρακάτω γωνίες οι οποίες είναι δοσμένες σε μοίρες να εκφραστούν σε ακτίνια (rad).

i. $30^\circ$ ii. $60^\circ$ iii. $45^\circ$ iv. $120^\circ$ v. $150^\circ$ vi. $300^\circ$ vii. $270^\circ$ viii. $240^\circ$ ix. $330^\circ$ x. $400^\circ$ xi. $480^\circ$ xii. $1200^\circ$

**1.2 Μετατροπή ακτινίων σε μοίρες**
Οι παρακάτω γωνίες οι οποίες είναι δοσμένες σε ακτίνια να εκφραστούν σε μοίρες.

i. $\frac{\pi}{4}$ ii. $\frac{2\pi}{3}$ iii. $\frac{\pi}{6}$ iv. $\frac{3\pi}{4}$ v. $\frac{2\pi}{5}$ vi. $\pi$ vii. $\frac{3\pi}{2}$ viii. $\frac{4\pi}{5}$ ix. $24\pi$ x. $\frac{35\pi}{3}$ xi. $\frac{105\pi}{4}$ xii. $400\pi$

**1.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί**
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών.

i. $390^\circ$ ii. $450^\circ$ iii. $780^\circ$ iv. $1260^\circ$ v. $1125^\circ$ vi. $1845^\circ$

**1.4 Τρ. αριθμοί γωνίας σε καρτεσιανό σύστημα**
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$ η οποία σχηματίζεται μέσα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $xOy$ για καθένα από τα παρακάτω σημεία $M$.

i. $M(3,4)$ ii. $M(5,12)$ iii. $M(-8,15)$ iv. $M(6,-8)$ v. $M(-4,-3)$ vi. $M(12,-9)$

**1.5 Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε τρίγωνο**
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega$ σε καθένα από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

**1.6 Τρ. αριθμοί βασικών γωνιών**
Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις.

i. $ημ30^\circ \cdot ημ60^\circ$ ii. $ημ^2 40^\circ - 2συν60^\circ$ iii. $εφ45^\circ + 2συν^2 30^\circ$ iv. $σφ^2 60^\circ - ημ^2 60^\circ$

# 1.2 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 5 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ**
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, οι ταυτότητες οι οποίες περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς θα ονομάζονται τριγωνομετρικές ταυτότητες.

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
### ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.4 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**
Για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ ισχύουν οι παρακάτω βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες :

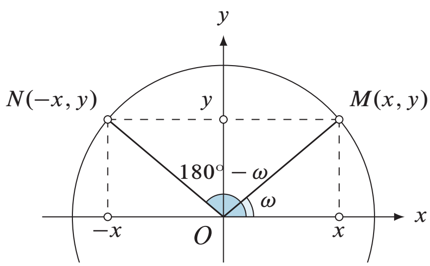
1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
2. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
3. $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
4. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$
5. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$
6. $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

# 1.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ<br>ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

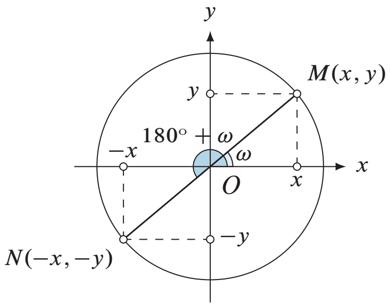
**Θεώρημα 1.5 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1$^o$ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ**
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που καταλήγουν στο $2^o$, $3^o$ ή $4^o$ ανάγωνται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών του $1^{ου}$ τεταρτημορίου σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους.

1. **Παραπληρωματικές γωνίες (2$^o$ τεταρτημόριο)**
   Γωνίες που καταλήγουν στο $2^o$ τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως παραπληρωματικές γωνιών του $1^{ου}$ τεταρτημορίου. Εαν $\omega$ είναι μια γωνία του $1^{ου}$ τεταρτημορίου τότε η παραπληρωματική της θα είναι της μορφής $180^\circ - \omega$. Οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών τους αριθμών φαίνονται παρακάτω :
   - $\eta\mu\,(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
   - $\sigma\upsilon\nu\,(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
   - $\varepsilon\varphi\,(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$
   - $\sigma\varphi\,(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

   Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία $M, N$ του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών $\omega$ και $180^\circ - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς άξονα $y'y$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τετμημένες.

2. **Γωνίες με διαφορά 180$^\circ$**
   Γωνίες που καταλήγουν στο $3^o$ τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως γωνίες με διαφορά $180^\circ$ γωνιών του $1^{ου}$ τεταρτημορίου. Εαν $\omega$ είναι μια γωνία του $1^{ου}$ τεταρτημορίου, η γωνία η οποία διαφέρει από την $\omega$ κατά $180^\circ$ θα είναι της μορφής $180^\circ + \omega$. Οι σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των δύο γωνιών θα είναι :

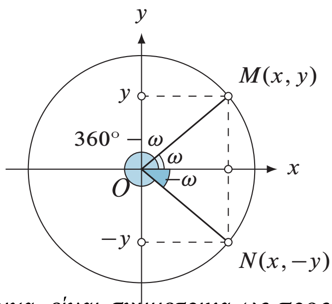



- $\etaμ\,(180^\circ + \omega) = -\etaμ\omega$
- $συν\,(180^\circ + \omega) = -συν\omega$
- $εφ\,(180^\circ + \omega) = εφ\omega$
- $σφ\,(180^\circ + \omega) = σφ\omega$

Οι γωνίες με διαφορά $180^\circ$ έχουν αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα ενώ έχουν ίσες εφαπτομένες και συνεφαπτομένες. Τα σημεία $M, N$ του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών $\omega$ και $180^\circ + \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την αρχή των αξόνων και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

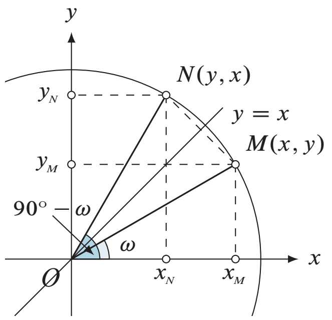
3. **Αντίθετες γωνίες - Γωνίες με άθροισμα $360^\circ$ ($4^o$ Τεταρτημόριο)**
Γωνίες που καταλήγουν στο $4^o$ τεταρτημόριο μπορούν να γραφτούν ως αντίθετες γωνιών του $1^{ου}$ τεταρτημορίου. Η αντίθετη γωνία, μιας γωνίας $\omega$ του $1^{ου}$ τεταρτημορίου, ορίζεται να είναι η γωνία η οποία έχει ίσο μέτρο με τη γωνία $\omega$, με φορά αντίθετη απ' αυτήν και θα έχει τη μορφή $-\omega$. Επιπλέον η γωνία η οποία έχει με τη γωνία $\omega$, άθροισμα $360^\circ$ καταλήγει στο ίδιο σημείο και θα είναι $360^\circ - \omega$.

- $\etaμ\,(-\omega) = \etaμ\,(360^\circ - \omega) = -\etaμ\omega$
- $συν\,(-\omega) = συν\,(360^\circ - \omega) = συν\omega$
- $εφ\,(-\omega) = εφ\,(360^\circ - \omega) = -εφ\omega$
- $σφ\,(-\omega) = σφ\,(360^\circ - \omega) = -σφ\omega$




Οι γωνίες με άθροισμα $360^\circ$ καθώς και οι αντίθετες έχουν ίσα συνημίτονα και αντίθετους όλους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Τα σημεία $M, N$ του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών $\omega$ και $360^\circ - \omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς τον άξονα $x'x$ και κατά συνέπεια έχουν αντίθετες τεταγμένες. Τα σημεία του κύκλου των γωνιών $360^\circ - \omega$ και $-\omega$ καθώς και οι ακτίνες τους ταυτίζονται.

4. **Συμπληρωματικές γωνίες**
Η συμπληρωματική γωνία μιας οξείας γωνίας $\omega$ θα είναι της μορφής $90^\circ - \omega$ η οποία ανήκει και αυτή στο $1^o$ τεταρτημόριο. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τους συνδέονται από τις παρακάτω σχέσεις :

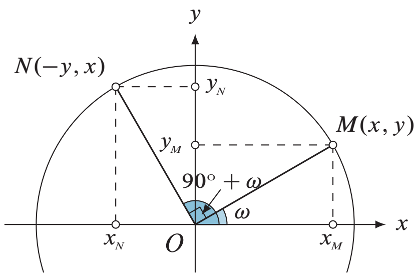



- ημ (90° − ω) = συνω
- συν (90° − ω) = ημω
- εφ (90° − ω) = σφω
- σφ (90° − ω) = εφω

Για δύο συμπληρωματικές γωνίες έχουμε οτι το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης. Τα σημεία $M$, $N$ του τριγωνομετρικού κύκλου, των γωνιών $\omega$ και $90°-\omega$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικα ως προς την ευθεία $y = x$ οπότε έχουν συμμετρικές συντεταγμένες.

5. **Γωνίες με διαφορά 90°**
   Γωνίες οι οποίες διαφέρουν κατά 90° έχουν τη μορφή $\omega$ και $90° + \omega$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $90° + \omega$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

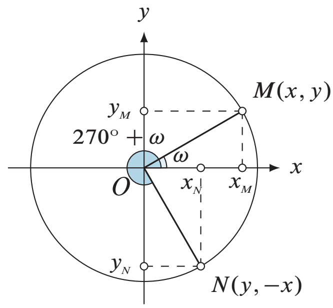
   - ημ (90° + ω) = συνω
   - συν (90° + ω) = −ημω
   - εφ (90° + ω) = −σφω
   - σφ (90° + ω) = −εφω




   Για δύο γωνίες με διαφορά 90° ισχύει οτι το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης, ενώ συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη της πρώτης γωνίας είναι αντίθετα με τα ημίτονο, συνεφαπτομένη και εφαπτομένη αντίστοιχα, της δεύτερης.

6. **Γωνίες με διαφορά 270°**
   Η γωνία η οποία διαφέρει κατά 270° από μια γωνία $\omega$ θα είναι της μορφής $270° + \omega$. Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της χρησιμοποιούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς :

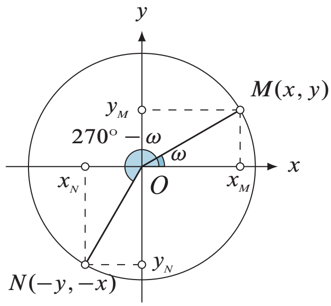
   - ημ (270° + ω) = −συνω
   - συν (270° + ω) = ημω
   - εφ (270° + ω) = −σφω
   - σφ (270° + ω) = −εφω




   Για δύο γωνίες με διαφορά 270° ισχύει οτι το συνημίτονο της μιας είναι ίσο με το ημίτονο της άλλης, ενώ το ημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη της πρώτης είναι αντίθετα με το συνημίτονο, τη συνεφαπτομένη και την εφαπτομένη της δεύτερης αντίστοιχα.

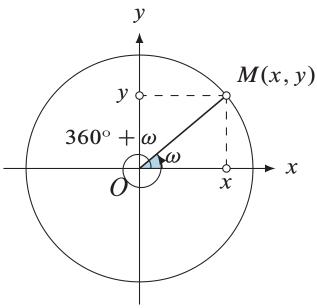
7. **Γωνίες με άθροισμα 270°**
   Η γωνία η οποία έχει άθροισμα 270° με μια γωνία $\omega$ θα γράφεται ως $270° - \omega$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αυτής δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

- ημ $(270^\circ - \omega) = -$συν$\omega$
- συν $(270^\circ - \omega) = -$ημ$\omega$
- εφ $(270^\circ - \omega) =$ σφ$\omega$
- σφ $(270^\circ - \omega) =$ εφ$\omega$




Για δύο γωνίες με άθροισμα 270° ισχύει οτι το ημίτονο και συνημίτονο της μιας είναι αντίθετα με το συνημίτονο και ημίτονο της άλλης αντοίστοιχα, ενώ το εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη της πρώτης είναι ίση με το τη συνεφαπτομένη και την εφαπτομένη της δεύτερης αντίστοιχα.

8. **Γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$**
Εαν στρέψουμε μια γωνία $\omega$ κατά γωνία της μορφής $\kappa \cdot 360^\circ$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ δηλαδή ακέραια πολλαπλάσια ενός κύκλου προκύπτει γωνία του τύπου $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$. Γωνίες αυτής της μορφής διαφέρουν κατά πολλαπλάσια ενός κύκλου. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των δύο γωνιών συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις :




- ημ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) =$ ημ$\omega$
- συν $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) =$ συν$\omega$
- εφ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) =$ εφ$\omega$
- σφ $(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) =$ σφ$\omega$

Οι γωνίες με διαφορά $\kappa \cdot 360^\circ$ έχουν ίσους όλους τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς καθώς ταυτίζονται και τα σημεία των γωνιών πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και οι ακτίνες των γωνιών.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**1.7** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών κάνοντας αναγωγή στο $1^o$ τεταρτημόριο.

i. $120^\circ$ iii. $135^\circ$ v. $480^\circ$ vii. $840^\circ$
ii. $150^\circ$ iv. $495^\circ$ vi. $510^\circ$ viii. $1935^\circ$

**1.8** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών κάνοντας αναγωγή στο $1^o$ τεταρτημόριο.

i. $-45^\circ$ iii. $-60^\circ$ v. $300^\circ$ vii. $1020^\circ$
ii. $-30^\circ$ iv. $330^\circ$ vi. $315^\circ$ viii. $1395^\circ$

**1.9** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών κάνοντας αναγωγή στο $1^o$ τεταρτημόριο.

i. $210^\circ$ iii. $225^\circ$ v. $600^\circ$ vii. $1680^\circ$
ii. $240^\circ$ iv. $570^\circ$ vi. $945^\circ$ viii. $-120^\circ$

**1.10** Να υπολογίσετε την τιμή κάθεμιάς από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

i. $\etaμ40^\circ + \etaμ140^\circ - 2συν50^\circ$
ii. $\etaμ50^\circ \cdot συν70^\circ + \etaμ130^\circ \cdot συν110^\circ$
iii. $εφ45^\circ \cdot σφ135 - \etaμ^2 225^\circ$
iv. $\etaμ^2 35^\circ + συν^2 145^\circ$
v. $εφ^2 330^\circ + σφ^2 240^\circ$

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

**1.11** Να αποδειχθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες.

i. $\etaμ(\pi - x) - \etaμx = 0$
ii. $συν^2(\pi + x) + \etaμ^2(\pi - x) = 1$
iii. $εφ\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot εφ(\pi + x) = 1$
iv. $\etaμ^2(\pi - x) + συν^2(-x) = 1$

### ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**1.12** Να δειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύουν οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες.

i. $\etaμ(A + B) = \etaμΓ$
ii. $συν(B + Γ) = συν(\pi - A)$
iii. $εφ(\pi - Γ - A) = σφ\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$
iv. $\etaμ(A + B) = συν\left(Γ - \frac{\pi}{2}\right)$

**1.13** Να υπολογιστούν οι ζητούμενες γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$ από τις παρακάτω εξισώσεις.

i. $\etaμ(A - B) = \etaμ\left(Γ + \frac{\pi}{2}\right)$

# *1.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ορισμός 6 : ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**
Μια συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιοδική εαν υπάρχει ένας θετικός αριθμός $T$ ώστε οι τιμές της να επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους $T$ του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή θα ισχύει :

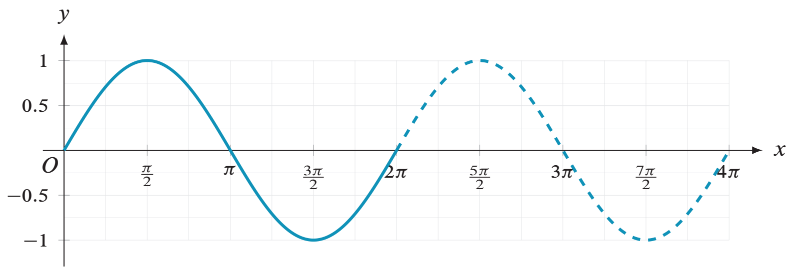
i. Για κάθε $x \in D_f$ έχουμε $x + T \in D_f$ και $x - T \in D_f$.
ii. $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$ για κάθε $x \in D_f$.

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**
Εδώ θα αναφέρουμε τις ιδιότητες των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αφορούν μονοτονία, ακρότατα, περιοδικότητα και άλλα βασικά στοιχεία τους.

1. **Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x$**
Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x$ του ημίτονου ισχύουν τα εξής :

i. Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
ii. Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
iv. Μελετώντας τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου έχουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
v. Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή $-1$ στη θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.



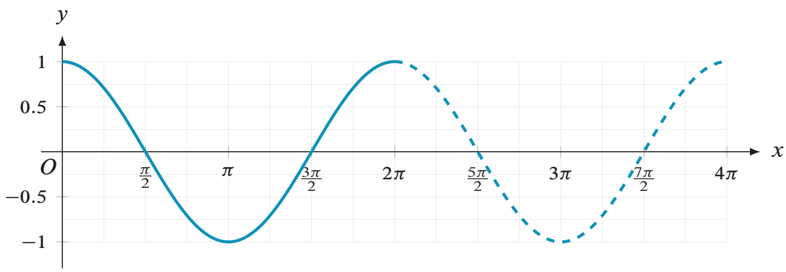

vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι τιμές, η μονοτονία τα ακρότατα και κάθε άλλο χαρακτηριστικό επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου $2\pi$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2(\kappa+1)\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
vii. Γενικά η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(\kappa+1)\pi\right]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $\left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ την τιμή $-1$.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**2. Η συνάρτηση $f(x) = συνx$**

Για την απλή τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = ημx$ του ημιτόνου ισχύουν τα εξής :

i. Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
ii. Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.
iii. Αποτελεί περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$.
iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ πλάτους μιας περιόδου βλέπουμε οτι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.
v. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέση $x = 0$ και $x = 2\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστη τιμή $-1$ στη θέση $x = \pi$.

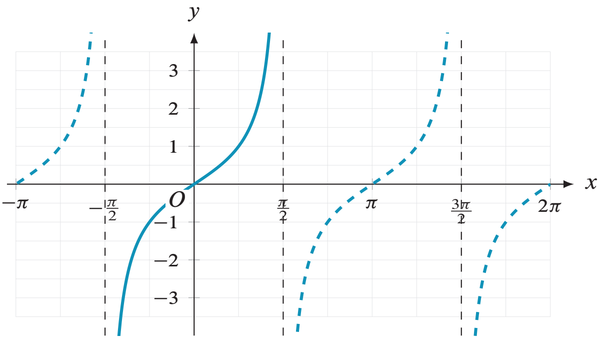



vi. Ως περιοδική συνάρτηση, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα πλάτους μιας περιόδου $2\pi$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι της μορφής $[2\kappa\pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
vii. Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi + \pi, 2(\kappa + 1)\pi]$ ενώ είναι γνησίως φθήνουσα στα διαστήματα $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \pi]$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.
viii. Παρουσιάζει μέγιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi$ και $x = 2(\kappa+1)\pi$ την τιμή 1 και ελάχιστο στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \pi$ την τιμή $-1$.
ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**3. Η συνάρτηση $f(x) = εφx$**

Οι ιδιότητες της συνάρτησης της εφαπτομένης είναι οι εξής :

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$.
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.
iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$
iv. Αν μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε παρατηρούμε οτι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα.
v. Δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.




vi. Οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \text{εφ}x$ επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right]$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα $\left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}, \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}\right]$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Η γραφική της παράσταση προσεγγίζει τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{(2\kappa+1)\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ οι οποίες ονομάζονται **ασύμπτωτες**.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

4. **Η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$**
Οι ιδιότητες της συνάρτησης της συνεφαπτομένης είναι οι ακόλουθες :

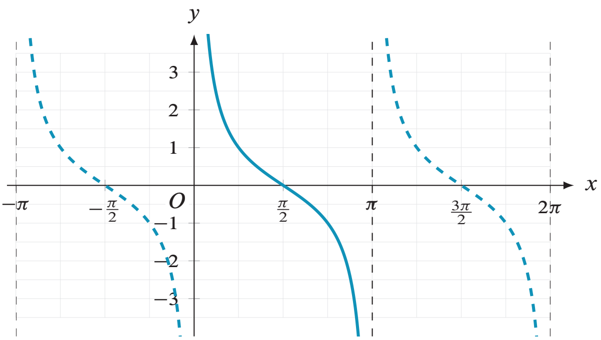
i. Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \kappa\pi\}$.

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών.

iii. Είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$

iv. Αν γίνει μελέτη της συνάρτησης στο διάστημα $[0, \pi]$ τότε έχουμε οτι είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα.

v. Δεν έχει ακρότατα δηλαδή δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.




vi. Αφού η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ είναι περιοδική, οι ιδιότητες οι τιμές και τα χαρακτηριστικά της επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα της μορφής $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ πλάτους μιας περιόδου, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

vii. Είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ του πεδίου ορισμού της, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

viii. Οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης είναι οι κατακόρυφες ευθείες $x = \kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ix. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

| $f(x)$ | **Π.Ο.** | $T$ | **Ρίζες** | **Αύξουσα** | **Φθίνουσα** | **Μέγ.** | **Ελάχ.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ημ$x$** | $\mathbb{R}$ | $2\pi$ | $\kappa\pi$ | $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ | $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ | $1$ | $-1$ |
| **συν$x$** | $\mathbb{R}$ | $2\pi$ | $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ | $[0, \pi]$ | $[\pi, 2\pi]$ | $1$ | $-1$ |
| **εφ$x$** | $\mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ | $\pi$ | $\kappa\pi$ | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| **σφ$x$** | $\mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$ | $\pi$ | $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ | $-$ | $(0, \pi)$ | $-$ | $-$ |

**Γενικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις**

| $f(x)$ | **Π.Ο.** | $T$ | **Ρίζες** | **Αύξουσα** | **Φθίνουσα** | **Μέγ.** | **Ελάχ.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ρημ$(\omega x)$** | $\mathbb{R}$ | $\frac{2\pi}{\omega}$ | $\frac{\kappa T}{2}$ | $\left[0, \frac{T}{4}\right], \left[\frac{3T}{4}, T\right]$ | $\left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$ | $\rho$ | $-\rho$ |
| **ρσυν$(\omega x)$** | $\mathbb{R}$ | $\frac{2\pi}{\omega}$ | $\frac{(2\kappa+1)T}{4}$ | $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ | $\left[\frac{T}{2}, T\right]$ | $\rho$ | $-\rho$ |
| **ρεφ$(\omega x)$** | $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2\kappa+1)T}{4}\right\}$ | $\frac{\pi}{\omega}$ | $\frac{\kappa T}{2}$ | $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| **ρσφ$(\omega x)$** | $\mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$ | $\frac{\pi}{\omega}$ | $\frac{(2\kappa+1)T}{4}$ | $-$ | $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ | $-$ | $-$ |

# *1.5 Τριγωνομετρικές εξισώσεις*

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.7 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

Οι λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

1. **Η εξίσωση ημ$x = a$**
   Σε κάθε εξίσωση της μορφής ημ$x = a$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i. Αν $a \in [-1,1]$ τότε θα υπάρχει γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ ώστε η εξίσωση να έχει τα παρακάτω σύνολα λύσεων :

$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Αν $a \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. **Η εξίσωση συν$x = a$**
Σε κάθε εξίσωση της μορφής συν$x = a$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i. Αν $a \in [-1,1]$ τότε θα υπάρχει γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ ώστε η εξίσωση να έχει τα παρακάτω σύνολα λύσεων :

$$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Αν $a \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. **Η εξίσωση εφ$x = a$**
Σε κάθε εξίσωση της μορφής εφ$x = a$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $a$ θα υπάρχει γωνία $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε οι λύσεις να δίνονται από τον τύπο :

$$x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

4. **Η εξίσωση σφ$x = a$**
Σε κάθε εξίσωση της μορφής σφ$x = a$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $a$ θα υπάρχει γωνία $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε οι λύσεις να δίνονται από τον τύπο :

$$x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

# ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

## Μέθοδος 1.1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η επίλυση των απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων της μορφής (I) $\etaμx = a, συνx = a$, $εφx = a$ και $σφx = a$ επιτυγχάνεται με απλή επιλογή του κατάλληλου συνόλου λύσεων που αντιστοιχεί σε κάθεμία από τις εξισώσεις αυτές.

***1ο Βήμα :* Απλοποίηση εξίσωσης**
Αν είναι αναγκαίο, γράφουμε την εξίσωση στην απλή μορφή (I) εκτελώντας πράξεις.

***2ο Βήμα :* Εύρεση γωνίας**
Αντικαθιστούμε τον αριθμό $a$ στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης με τον αντίστοιχο τριγωνομετρικό αριθμό, επιλέγοντας την κατάλληλη γωνία.

***3ο Βήμα :* Ίσες γωνίες**
Εξισώνουμε τις γωνίες που βρίσκονται στους όμοιους τριγωνομετρικούς αριθμούς στα δύο μέλη της εξίσωσης καταλήγοντας στο κατάλληλο σύνολο λύσεων.

### Παράδειγμα 1.1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
**Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις**

**i.** $\boldsymbol{ημx = \frac{1}{2}}$ **ii.** $\boldsymbol{2συνx = \sqrt{2}}$ **iii.** $\boldsymbol{εφx - \sqrt{3} = 0}$ **iv.** $\boldsymbol{σφx = 0}$

**ΛΥΣΗ**

i. Αναζητούμε μια γωνία του πρώτου τεταρτημορίου της οποίας το ημίτονο να ισούται με $\frac{1}{2}$. Η ζητούμενη γωνία είναι η $\frac{\pi}{6}$ οπότε η εξίσωση θα γραφτεί

$$ημx = ημ\frac{\pi}{6}$$

Έτσι σύμφωνα με το **Θεώρημα 1.7** οι λύσεις θα δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$\begin{aligned} x &= 2κ\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή} \\ x &= 2κ\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2κ\pi + \frac{5\pi}{6} \ , \ κ \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ii. Θα πρέπει να φέρουμε την εξίσωση $2συνx = \sqrt{2}$ στη απλή της μορφή οπότε θα έχουμε :

$$2συνx = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2συνx}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow συνx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η γωνία της οποίας το συνημίτονο ισούται με $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι η $\frac{\pi}{4}$ και έτσι η τελευταία εξίσωση θα γίνει

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

Τα σύνολα λύσεων αυτής θα είναι $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ , $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. Εκτελώντας πράξεις στην αρχική εξίσωση θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι εφ$\frac{\pi}{3}$ και έτσι η τελευταία εξίσωση γράφεται $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$. Άρα οι λύσεις της θα δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

iv. Ομοίως με τα προηγούμενα παραδείγματα θα έχουμε για την εξίσωση $\sigma\varphi x = 0$

$$\sigma\varphi x = 0 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{2}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ , $\kappa \in \mathbb{Z}$.

## Μέθοδος 1.2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ - ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Εαν για τις απλές εξισώσεις $\eta\mu x = a, \sigma\upsilon\nu x = a$, $\varepsilon\varphi x = a$ και $\sigma\varphi x = a$ ισχύει $a < 0$ τότε χρησιμοποιώντας την αναγωγή στο $1^o$ τεταρτημόριο εργαζόμαστε ως εξής :

***1º Βήμα :* Εύρεση γωνίας**
Αναζητούμε τη γωνία $\theta$ της οποίας ο αντίστοιχος τριγωνομετρικός αριθμός ισούται με $|a|$ και φέρνουμε την εξίσωση σε μια από τις μορφές :

$$\eta\mu x = -\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\theta, \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\theta, \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\theta$$

***2º Βήμα :* Αντικατάσταση αρνητικού τριγωνομετρικού αριθμού**
Κάνοντας αναγωγή στο $1^o$ τεταρτημόριο χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις

$$-\eta\mu\theta = \eta\mu(-\theta), -\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta), -\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(-\theta), -\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi(-\theta)$$

ώστε να αντικαταστήσουμε τον αρνητικό τριγωνομετρικό αριθμό από το δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

***3º Βήμα :* Λύση εξίσωσης**
Λύνουμε σύμφωνα με τη **Μέθοδο 1.1** τη νέα τριγωνομετρική εξίσωση.

### Παράδειγμα 1.2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ - ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

**Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις**

**i.** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi x = -1}$ **ii.** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

**ΛΥΣΗ**

i. Στην εξίσωση εφ$x = -1$ η γωνία της οποιας η εφαπτομένη ισούται με 1 είναι η $\frac{\pi}{4}$. Οπότε η εξίσωση θα γραφτει :

$$\varepsilon\varphi x = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνοται από τον τύπο : $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ , $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. Η γωνία της οποίας το συνημίτονο ισούται με $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι η $\frac{\pi}{6}$. Επομένως η εξίσωση θα γίνει :

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο :

$$x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

## Μέθοδος 1.3 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Η επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης σε ένα διάστημα $\Delta$ ανάγεται στην εύρεση κατάλληλων τιμών του ακέραιου αριθμού $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε οι γωνίες που θα προκύψουν να ανήκουν στο διάστημα αυτό. Ακολουθούμε τα εξής βήματα :

***1ο Βήμα :*** **Επίλυση εξίσωσης - γενική λύση**
Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση σύμφωνα με τη **Μέθοδο 1.1** ώστε να βρούμε το γενικό σύνολο λύσεων της.

***2ο Βήμα :*** **Εύρεση σταθεράς** $\boldsymbol{\kappa}$
Οι λύσεις θα πρέπει να ανήκουν στο δοσμένο διάστημα $\Delta = (a, \beta)$ οπότε στην ανίσωση $a < x < \beta$ αντικαθιστούμε το $x$ με το σύνολο λύσεων και με διαδοχικές απαλοιφές τη λύνουμε ως προς $\kappa$. Θα καταλλήξουμε σε μια ανισότητα της μορφής $\gamma < \kappa < \delta$ όπου $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Οι ακέραιες τιμές μεταξύ των αριθμών $\gamma, \delta$ είναι οι ζητούμενες.

***3ο Βήμα :*** **Εύρεση γωνιών**
Αντικαθιστούμε κάθε ακέραια τιμή του $\kappa$ στον τύπο που μας δίνει τη γενική λύση οπότε και υπολογίζουμε τις γωνίες που ανήκουν στο διάστημα $\Delta$.

## Παράδειγμα 1.3 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

**Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις στα διαστήματα που δίνονται.**

**i.** $\boldsymbol{\eta\mu x = \frac{1}{2}\ ,\ x \in (0, \pi)}$ **ii.** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x \in [4\pi, 5\pi]}$

**ΛΥΣΗ**

i. Λύνοντας την εξίσωση ημ$x = \frac{1}{2}$ καταλλήγουμε στους παρακάτω γενικούς τπυους λύσεων

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Απαιτούμε όμως οι λύσεις αυτές να ανήκουν στο διάστημα $(0, \pi)$. Έτσι σχηματίζουμε την ανισότητα $0 < x < \pi$ και από τον πρώτο τύπο με αντικατάσταση θα έχουμε :

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2\kappa < \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{3}$$

Επίσης επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε η μοναδική ακέραια τιμή μεταξύ των αριθμών $-\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$ είναι $\kappa = 0$. Οπότε θα ισχύει :

$$\text{Για } \kappa = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Εργαζόμαστε ομοίως και για το δεύτερο τύπο λύσεων της εξίσωσης και καταλλήγουμε στην ανισότητα $-\frac{1}{3} < \kappa < \frac{1}{6}$ άρα $\kappa = 0$. Έτσι θα έχουμε :

$$\text{Για } \kappa = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης που ανήκουν στο διάστημα $(0, \pi)$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{2\pi}{3}$.

ii. Οι τύποι που δίνουν τις γενικές λύσεις της εξίσωσης συν$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$. Αναζητούμε όμως τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $[3\pi, 4\pi]$ άρα από την ανισότητα $3\pi \leq x \leq 4\pi$ και τον πρώτο τύπο θα πάρουμε :

$$4\pi \leq x \leq 5\pi \Rightarrow 4\pi \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 5\pi \Rightarrow 4\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq 5\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{15\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{19\pi}{4} \Rightarrow \frac{15}{4} \leq 2\kappa \leq \frac{19}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{15}{8} \leq \kappa \leq \frac{19}{8}$$

Επομένως θα ισχύει $\kappa = 2$ οπότε με αντικατάσταση στον πρώτο τύπο η ζητούμενη γωνία θα είναι :

$$\text{Για } \kappa = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$$

Ομοίως από το δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $\frac{17}{8} \leq \kappa \leq \frac{21}{8}$ που όμως δεν επαληθεύεται από καμία ακέραια τιμή του $\kappa$ άρα δεν παίρνουμε καμία λύση. Μοναδική λύση της εξίσωσης θα είναι η $x = \frac{9\pi}{4}$.

## Μέθοδος 1.4 : ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σε τριγωνομετρικές εξισώσεις οι οποίες δεν έχουν την απλή μορφή ώστε να είναι άμεσα επιλύσιμες, εφαρμόζουμε γνωστούς κανόνες και διαδικασίες της άλγεβρας που έχουμε συναντήσει μέχρι και σήμερα ώστε να τις απλοποιήσουμε φέρνοντας τες στην επιλύσιμη μορφή τους.Θυμίζουμε μερικούς απ' αυτούς στην παρακάτω λίστα.

- Ταυτότητες
- Παραγοντοποίηση
- Μηδενικό γινόμενο : $a \cdot \beta = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$.
- Ανάθεση
- Απαλοιφή παρονομαστών
- Αντικατάσταση
- Επίλυση εξισώσεων 1ου και 2ου β.

## Παράδειγμα 1.4 : ΣΥΝΘΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

**Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις**

i. $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x \cdot (2\eta\mu x - 1) = 0}$

ii. $\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2 x + 1 = 2\varepsilon\varphi x}$

iii. $\boldsymbol{2\eta\mu^2 x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0}$

iv. $\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2 x - 3 = 0}$

v. $\boldsymbol{\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0}$

vi. $\boldsymbol{1 + \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x = 0}$

**ΛΥΣΗ**

i. Στην πρώτη εξίσωση έχουμε μηδενικό γινόμενο δύο παραγόντων. Έτσι με τη χρήση της γνωστής ιδιότητας θα έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot (2\eta\mu x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ 2\eta\mu x - 1 = 0 \Rightarrow 2\eta\mu x = 1 \Rightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Λύνουμε καθεμία από τις δύο απλές εξισώσεις με την προηγούμενη μέθοδο :

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

ii. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi^2 x + 1 = 2\varepsilon\varphi x$ είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς την $\varepsilon\varphi x$. Μεταφέροντας όλους τους όρους στο 1ο μέλος θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi^2 x + 1 = 2\varepsilon\varphi x \Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x - 2\varepsilon\varphi x + 1 = 0 \Rightarrow (\varepsilon\varphi x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi x = 1$$

Στο 1ο μέλος της σχηματίστικε ανάπτυγμα ταυτότητας και έτσι καταλλήξαμε στην απλή εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1$ η οποία μας δίνει τις λύσεις :

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. Παραγοντοποιώντας το $1^{\text{ο}}$ μέλος της αρχικής εξίσωσης $2\text{ημ}^2 x - \sqrt{3}\text{ημ}x = 0$ θα προκύψει

$$2\text{ημ}^2 x - \sqrt{3}\text{ημ}x = 0 \Rightarrow \text{ημ}x\left(2\text{ημ}x - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ημ}x = 0 \\ 2\text{ημ}x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{ημ}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Λύνοντας τις επιμέρους εξισώσεις παίρνουμε :

- $\text{ημ}x = 0 \Rightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}0 \Rightarrow x = \kappa\pi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\text{ημ}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$

iv. Για την εξίσωση $\text{εφ}^2 x - 3 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής :

$$\text{εφ}^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \text{εφ}^2 x = 3 \Rightarrow \text{εφ}x = \pm\sqrt{3}$$

Έτσι για κάθε απλή εξίσωση θα έχουμε τις λύσεις :

- $\text{εφ}x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{εφ}x = \text{εφ}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\text{εφ}x = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{εφ}x = -\text{εφ}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{εφ}x = \text{εφ}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$

v. Η εξίσωση $\text{ημ}^2 x - 3\text{ημ}x + 2 = 0$ είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς ημ$x$. Επίσης παρατηρούμε ότι αποτελείται από τρεις όρους και έτσι έχει την ίδια δομή με ένα τριώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού. Θέτοντας όπου $\text{ημ}x = y$ καταφέρνουμε να μετατρέψουμε την τριγωνομετρική εξίσωση σε πολυωνυμική. Συγκεκριμένα η εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Λύνοντας τη νέα εξίσωση θα προκύψουν οι λύσεις $y = 1$, $y = 2$. Για κάθε λύση της βοηθητικής μεταβλητής $y$ θα έχουμε

- Για $y = 1 \Rightarrow \text{ημ}x = 1 \Rightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Για $y = 2$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

vi. Η εξίσωση $2 + \text{συν}x - 2\text{ημ}^2 x = 0$ δεν αποτελείται από έναν τριγωνομετρικό αριθμό. Με τη βοήθεια της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1$ προκύπτει :

$$\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1 \Rightarrow \text{ημ}^2 x = 1 - \text{συν}^2 x$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην αρχική εξίσωση καταλλήγουμε σε μια εξίσωση που θα περιέχει έναν τριγωνομετρικό αριθμό :

$$\begin{aligned} 2 + \text{συν}x - 2\text{ημ}^2 x = 0 &\Rightarrow 2 + \text{συν}x - 2\left(1 - \text{συν}^2 x\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 + \text{συν}x - 2 - 2\text{συν}^2 x = 0 \Rightarrow \text{συν}x - 2\text{συν}^2 x = 0 \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση με παραγοντοποίηση θα πάρουμε :

$$\text{συν}x - 2\text{συν}^2 x = 0 \Rightarrow \text{συν}x\left(1 - 2\text{συν}x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{συν}x = 0 \\ 1 - 2\text{συν}x = 0 \Rightarrow \text{συν}x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Λύνουμε έτσι τις δύο επιμέρους εξισώσεις και προκύπτουν τα ζητούμενα σύνολα λύσεων :

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

### Οι εξισώσεις ημ$x = a$, συν$x = a$, εφ$x = a$, σφ$x = a$

**1.14** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$
ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
iii. $\eta\mu x = 1$
iv. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**1.15** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
ii. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
iii. $\sigma\upsilon\nu x = 0$
iv. $\sigma\upsilon\nu x = 1$

**1.16** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
ii. $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$
iii. $\varepsilon\varphi x = 1$
iv. $\varepsilon\varphi x = 0$

**1.17** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
ii. $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$
iii. $\sigma\varphi x = 1$
iv. $\sigma\varphi x = 0$

### Εξισώσεις με αρνητικό αριθμό

**1.18** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$
ii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
iii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
iv. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
v. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$
vi. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**1.19** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
ii. $\sigma\varphi x = -1$
iii. $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$
iv. $\sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
v. $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$
vi. $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

### Σύνθετες τριγωνομετρικές εξισώσεις

**1.20** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
ii. $\eta\mu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
iii. $\eta\mu(x+\pi) = \frac{1}{2}$
iv. $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

**1.21** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\sigma\upsilon\nu(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
ii. $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1}{2}$
iii. $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$
iv. $\sigma\upsilon\nu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**1.22** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
ii. $\sigma\varphi(5x) = 1$
iii. $\sigma\varphi\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
iv. $\varepsilon\varphi\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**1.23** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ii. $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1$

iv. $\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**1.24** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi(2x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii. $\sigma\varphi\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=1$

iv. $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$

### Αναγωγή στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο

**1.25** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu(\pi-x)=\frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-1$

iii. $\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

iv. $\eta\mu(\pi+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

**1.26** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi(\pi-x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii. $\sigma\varphi(\pi-x)=0$

iii. $\sigma\varphi(\pi+x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv. $\varepsilon\varphi(\pi+x)=1$

**1.27** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{2}$

iii. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv. $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$

### Τριγωνομετρικές εξισώσεις πολυωνυμικής μορφής

**1.28** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $2\eta\mu x-1=0$

ii. $2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}=0$

iii. $(\eta\mu x-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x=0$

iv. $(2\sigma\upsilon\nu x-1)\left(2\eta\mu x-\sqrt{3}\right)=0$

**1.29** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\varepsilon\varphi x-1=0$

ii. $3\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0$

iii. $\left(\sigma\varphi x-\sqrt{3}\right)\cdot\sigma\varphi x=0$

iv. $\left(2\sigma\varphi x-2\sqrt{3}\right)\left(\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}\right)=0$

**1.30** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu x+\eta\mu(\pi-x)=1$

ii. $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\sqrt{2}$

iii. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu(-x)=\sqrt{3}$

iv. $\sigma\upsilon\nu(2018\pi+x)-\sigma\upsilon\nu x=1$

**1.31** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu^2x=\frac{3}{4}$

ii. $4\sigma\upsilon\nu^2x-1=0$

iii. $\varepsilon\varphi^2x-3=0$

iv. $\sigma\varphi^2x=1$

**1.32** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $(2\sigma\upsilon\nu x-1)\left(2\eta\mu^2x-1\right)=0$

ii. $\left(2\eta\mu x-\sqrt{3}\right)\left(3-\varepsilon\varphi^2x\right)=0$

iii. $\left(1-\varepsilon\varphi^2x\right)\left(\sigma\varphi x-\sqrt{3}\right)=0$

**1.33** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $4\eta\mu^2x-4\eta\mu x+1=0$

ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x+1=0$

iii. $3\varepsilon\varphi^2x-(3+\sqrt{3})\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0$

**1.34** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $|2\eta\mu x|=1$

ii. $|\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $|\sigma\upsilon\nu^2 x - 1| = \frac{1}{4}$

iv. $|\eta\mu x| = |\eta\mu x - 1|$

**1.35** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $|3\varepsilon\varphi x| = \sqrt{3}$

ii. $\left|\frac{1}{2} - \sigma\varphi x\right| = \frac{1}{2}$

iii. $|\varepsilon\varphi^2 x - 2| = 1$

iv. $|\sigma\varphi x| = |\varepsilon\varphi x|$

**1.36** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu^4 x = \frac{1}{16}$

ii. $\sigma\upsilon\nu^5 x = 1$

iii. $\eta\mu^6 x = \frac{1}{8}$

iv. $\sigma\upsilon\nu^7 x = -1$

**1.37** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$

ii. $4\eta\mu^3 x - \eta\mu x = 0$

iii. $3\varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi x = 0$

iv. $\sigma\varphi^4 x = \sigma\varphi^2 x$

**1.38** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 6\eta\mu x + 3 = 0$

ii. $\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

iii. $\varepsilon\varphi^3 x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\varepsilon\varphi^2 x + \sqrt{3}\varepsilon\varphi x = 0$

iv. $\sigma\varphi^3 x - \sigma\varphi^2 x + \sigma\varphi x - 1 = 0$

**1.39** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu^2 x + (\sigma\upsilon\nu y - 1)^2 = 0$

ii. $(2\eta\mu x - 1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 y = 0$

iii. $\varepsilon\varphi^4 x + \left(\sigma\varphi^2 y - 3\right)^4 = 0$

iv. $(2\eta\mu x - 3)^2 + \left(\varepsilon\varphi y - \sqrt{3}\right)^2 = 0$

**1.40** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $4\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 1 + \sigma\upsilon\nu^2 y = 0$

ii. $\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu^2 y - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu y = -4$

### Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Τρ. ταυτότητες

**1.41** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

ii. $\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2 x = 2$

iii. $\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x = 0$

iv. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

**1.42** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu x = -2$

ii. $\varepsilon\varphi x - 2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3} - 1$

iii. $\varepsilon\varphi x + \sqrt{3}\sigma\varphi x = 4$

iv. $(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2 = \eta\mu x + 1$

### Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

**1.43** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x \in [0, \pi]$

iii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

iv. $\eta\mu x = 1$ , $x \in (\pi, 3\pi]$

**1.44** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x \in [0, \pi]$

ii. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

iii. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ , $x \in [0, 2\pi]$

iv. $\sigma\upsilon\nu x = 0$ , $x \in [\pi, 3\pi)$

**1.45** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , $x \in [0, \pi]$
ii. $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ , $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
iii. $\sigma\varphi x = 1$ , $x \in [0, 2\pi]$
iv. $\varepsilon\varphi x = 0$ , $x \in [3\pi, 4\pi)$

**1.46** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\eta\mu(3x) = \frac{1}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
ii. $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $x \in [0, \pi]$
iii. $\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
iv. $\eta\mu\left(\frac{x+2\pi}{3}\right) = 0$ , $x \in [2\pi, 3\pi]$

**1.47** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
ii. $\sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $x \in [0, 2\pi]$
iii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x}{4}\right) = \frac{1}{2}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
iv. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x+\pi}{2}\right) = 1$ , $x \in [\pi, 3\pi]$

**1.48** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις σε καθένα από τα διαστήματα που δίνονται.

i. $\varepsilon\varphi(4x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
ii. $\sigma\varphi\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ , $x \in [0, \pi]$
iii. $\varepsilon\varphi\left(\frac{3x}{2}\right) = 1$ , $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
iv. $\sigma\varphi\left(\frac{2x+\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ , $x \in [2\pi, 4\pi]$

**Συστήματα τριγωνομετρικών εξισώσεων**

**1.49** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

i. $\begin{cases} 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu y = 2 \\ 2\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu y = -1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y = \frac{1}{4} \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{4} \end{cases}$

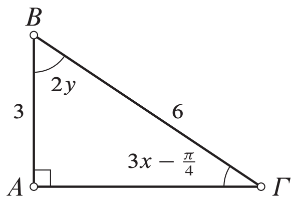
iii. $\begin{cases} 3\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi y = 2 \\ \varepsilon\varphi x + 2\frac{1}{\sigma\varphi y} = -1 \end{cases}$

**1.50** Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η παρακάτω τριγωνομετρική εξίσωση

$$\eta\mu\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Γεωμετρικές εφαρμογές**

**1.51** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $(\hat{A} = 90°)$ του παρακάτω σχήματος έχουμε ότι $AB = 3$ και $B\Gamma = 6$.




Να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών $x, y$.

**Σύνθετες ασκήσεις**

**1.52** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $2\sigma\upsilon\nu(3x) - 1 = 0$
ii. $3\varepsilon\varphi(2x) - \sqrt{3} = 0$
iii. $2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$
iv. $\sigma\varphi(3x - \pi) - 1 = 0$

**1.53** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $\eta\mu(2x)\,(\sigma\upsilon\nu(3x) - 1) = 0$
ii. $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)[\eta\mu(4x) - 1] = 0$
iii. $\left[\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\right]\sigma\varphi(3x) = 0$
iv. $\left[\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right]\varepsilon\varphi(2x) = 0$

**1.54** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $4\eta\mu^2(2x) - 1 = 0$

ii. $\sigma\upsilon\nu^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} = 0$

iii. $3\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

iv. $\sigma\varphi^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

**1.55** Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις.

i. $4\eta\mu^2(2x) - 3\eta\mu(2x) + 1 = 0$

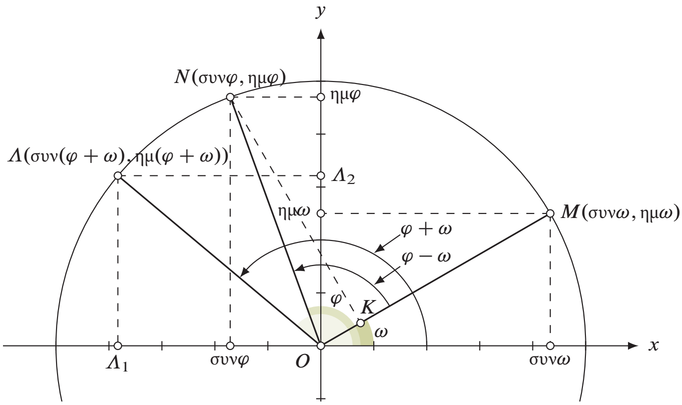
ii. $2\sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(2 + \sqrt{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

iii. $3\varepsilon\varphi^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$

# 1.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.8 : ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ & ΔΙΑΦΟΡΑΣ**
Έστω $\omega, \varphi$ δύο γωνίες. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος $\varphi + \omega$ και της διαφοράς τους $\varphi - \omega$ δίνονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών $\omega, \varphi$ από τους παρακάτω τύπους.




$$OK = \sigma\upsilon\nu\,(\varphi - \omega)$$

$$KN = \eta\mu\,(\varphi - \omega)$$

$$O\Lambda_1 = \sigma\upsilon\nu\,(\varphi + \omega)$$

$$O\Lambda_2 = \eta\mu\,(\varphi + \omega)$$

***Σχήμα 1.6:*** Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

### Τριγωνομετρικοι αριθμοι αθροισματος γωνιων

1. $\eta\mu\,(\varphi + \omega) = \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu\omega$

2. $\sigma\upsilon\nu\,(\varphi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\omega$

3. $\varepsilon\varphi\,(\varphi + \omega) = \dfrac{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega}{1 - \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\omega}$

4. $\sigma\varphi\,(\varphi + \omega) = \dfrac{\sigma\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\omega - 1}{\sigma\varphi\varphi + \sigma\varphi\omega}$

### Τριγωνομετρικοι αριθμοι διαφορας γωνιων

1. $\etaμ(\varphi-\omega)=\etaμ\varphi\cdot συν\omega-συν\varphi\cdot \etaμ\omega$
2. $συν(\varphi-\omega)=συν\varphi\cdot συν\omega+\etaμ\varphi\cdot \etaμ\omega$
3. $εφ(\varphi-\omega)=\dfrac{εφ\varphi-εφ\omega}{1+εφ\varphi\cdot εφ\omega}$
4. $σφ(\varphi-\omega)=\dfrac{σφ\varphi\cdot σφ\omega+1}{σφ\varphi-σφ\omega}$

# *1.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας*

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
### ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**Θεώρημα 1.9 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ**
Οι τριγωνομετρικοί της διπλάσιας γωνίας $2\cdot\varphi$ μιας γωνίας $\varphi$, γράφονται με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της αρχικής γωνίας $\varphi$ και δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

1. $\etaμ2\varphi=2\etaμ\varphi\cdot συν\varphi$
2. $συν2\varphi=\begin{cases}συν^2\varphi-\etaμ^2\varphi\\ 1-2\etaμ^2\varphi\\ 2συν^2\varphi-1\end{cases}$
3. $εφ2\varphi=\dfrac{2εφ\varphi}{1-εφ^2\varphi}$
4. $σφ2\varphi=\dfrac{σφ^2\varphi-1}{2σφ\varphi}$

**Θεώρημα 1.10 : ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**
Οι ακόλουθες ταυτότητες μας δίνουν σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να γράψουμε τα τετράγωνα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιασδήποτε γωνίας $\varphi$ ως συνάρτηση του συνημιτόνου της διπλασιας γωνίας $2\varphi$

1. $\etaμ^2\varphi=\dfrac{1-συν2\varphi}{2}$
2. $συν^2\varphi=\dfrac{1+συν2\varphi}{2}$
3. $εφ^2\varphi=\dfrac{1-συν2\varphi}{1+συν2\varphi}$
4. $σφ^2\varphi=\dfrac{1+συν2\varphi}{1-συν2\varphi}$