

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

■ Μελέτη συνάρτησης

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

α. $f(x) = \eta\mu(3x)$	δ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$
β. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(4x)$	ε. $f(x) = \eta\mu(\pi x)$
γ. $f(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{4}\right)$	στ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

2. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

α. $f(x) = 3\eta\mu x$	δ. $f(x) = \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{4}$
β. $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu x$	ε. $f(x) = -3\eta\mu x$
γ. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2}$	στ. $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$

3. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

α. $f(x) = 2\eta\mu(3x)$	δ. $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$
β. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(4x)$	ε. $f(x) = -3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
γ. $f(x) = 4\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$	στ. $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu(\pi x)$

4. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα.

α. $f(x) = 2\eta\mu(2x) - 1$
β. $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu(3x) + 3$
γ. $f(x) = -3\eta\mu(3x) + 2$
δ. $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) - 1$
ε. $f(x) = 8\eta\mu(\pi x) - 7$
στ. $f(x) = -5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3$

■ Χάραξη γραφικής παράστασης

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η περίοδος καθώς και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μιας περιόδου.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η περίοδος καθώς και τα ακρότατα της f .

β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 4\pi]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$.
- γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(\pi x) - 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2]$.
- γ. Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f .
- β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 3]$.
- γ. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

13. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

$$\alpha. f(x) = \varepsilon\varphi(2x) \quad \gamma. f(x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\beta. f(x) = \sigma\varphi(3x) \quad \delta. f(x) = \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

14. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = \eta\mu(2x)$$

$$\beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \sigma\upsilon\nu(3x)$$

$$\gamma. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\varepsilon. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = \eta\mu(\pi x)$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

15. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = 2\eta\mu x$$

$$\beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$$

$$\gamma. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = -4\eta\mu x$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = -\frac{4\sigma\upsilon\nu x}{3}$$

16. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = 2\eta\mu(3x)$$

$$\beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = 4\sigma\upsilon\nu(2x)$$

$$\gamma. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = -3\eta\mu(4x)$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$$

17. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

$$\alpha. f(x) = \varepsilon\varphi x \text{ και } g(x) = \varepsilon\varphi(2x)$$

$$\beta. f(x) = \sigma\varphi x \text{ και } g(x) = \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\gamma. f(x) = \varepsilon\varphi x \text{ και } g(x) = 2\varepsilon\varphi x$$

$$\delta. f(x) = \sigma\varphi x \text{ και } g(x) = \frac{\sigma\varphi x}{2}$$

18. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και h .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu x, g(x) = \eta\mu x + 2 \text{ και } h(x) = \eta\mu x - 1$$

$$\beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x, g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 3 \text{ και } h(x) = \sigma\upsilon\nu x + 4$$

$$\gamma. f(x) = \eta\mu x, g(x) = \eta\mu(x - \pi) \text{ και } h(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x, g(x) = \sigma\upsilon\nu(x + \pi) \text{ και } h(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

19. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $x\hat{O}y$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = 2\eta\mu(3x)$$

$$\beta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = -3\sigma\upsilon\nu(2x)$$

$$\gamma. f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = 4\eta\mu\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

■ Άρτιες - Περιπέες

20. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\alpha. f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2 + 3} \quad \gamma. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{|x| - 1}$$

$$\beta. f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \quad \delta. f(x) = \eta\mu(x^3 - x)$$

■ Περιοδικότητα

21. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδική, με περίοδο τον δοσμένο αριθμό T .

$$\alpha. f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(4x), \text{ με } T = \pi$$

$$\beta. f(x) = \eta\mu(4x) + \varepsilon\varphi(2x), \text{ με } T = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma. f(x) = \sigma\upsilon\nu(4x) + \varepsilon\varphi(4x), \text{ με } T = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta. f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x) \cdot \sigma\varphi x, \text{ με } T = \pi$$

$$\varepsilon. f(x) = \sigma\varphi(2x) + \varepsilon\varphi(8x), \text{ με } T = \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \eta\mu(2x) \cdot \varepsilon\varphi x, \text{ με } T = \pi$$

$$\zeta. f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x) + \varepsilon\varphi(4x), \text{ με } T = \frac{2\pi}{3}$$

22.

■ Σύγκριση αριθμών

23. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{8}\right), \eta\mu\left(\frac{\pi}{10}\right), \eta\mu\left(\frac{\pi}{12}\right), \eta\mu\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

24. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

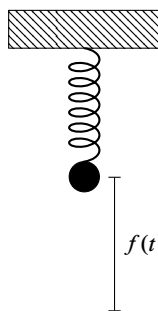
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right), \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right), \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{8}\right), \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(4x)$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{\pi}{3})$ και $f(\frac{\pi}{4})$.

■ Προβλήματα

26. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ενός κατακόρυφου ελατηρίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ύψος, (σε m), του σώματος από το έδαφος, κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), δίνεται από τη συνάρτηση



$$f(t) = \frac{1}{2} \eta \mu \left(\frac{\pi t}{4} \right) + 3$$

- α. Σε τι ύψος βρίσκεται το σώμα όταν το ελατήριο είναι σε κατάσταση ισορροπίας;
 β. Πόσα δευτερόλεπτα διαρκεί μια πλήρης ταλάντωση του σώματος;
 γ. Ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος που μπορεί να φτάσει το σώμα;
 δ. Βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σώμα απομακρύνεται από το έδαφος.

27. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8 \sin \frac{\pi t}{12} + 4, \quad 0 \leq t \leq 24$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου, καθώς και την περίοδο της συνάρτησης.
 β. Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.
 γ. Να βρείτε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, σε ποια διαστήματα μέσα στη μέρα η θερμοκρασία αυξάνεται και σε ποια μειώνεται.
 δ. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, τις ώρες στις οποίες η θερμοκρασία ισούται με 8°C .

■ Παραμετρικές

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \eta \mu x$, $a > 0$ η οποία έχει ελάχιστη τιμή το -2 .

- α. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a .

- β. Να χαράξετε τη C_f στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin(\lambda x)$, $\lambda > 0$ με περίοδο $T = \pi$.

- α. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ .

- β. Να χαράξετε τη C_f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \eta \mu(\beta x)$, με $a, \beta > 0$, η οποία έχει περίοδο $T = \pi$ και μέγιστη τιμή 3.

- α. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a και β .

- β. Τοποθετήστε τις τιμές $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{4})$ και $f(\frac{\pi}{3})$ σε φθίνουσα σειρά.

γ.

■ Ερωτήσεις θεωρίας

31. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σωστό) λανθασμένες (Λάθος).

- α. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu(3x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$.

- β. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi(2x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$.

- γ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ταυτίζονται.

- δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin x + \frac{3}{2}$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

- ε. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma \phi x$ δεν έχει ακρότατα.

- στ. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- ζ. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu(4x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.

- η. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi(2x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

- θ. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu(2x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

- ι. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sin(\pi - x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

- ια. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \epsilon \phi x$ και $g(x) = \epsilon \phi(-x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.