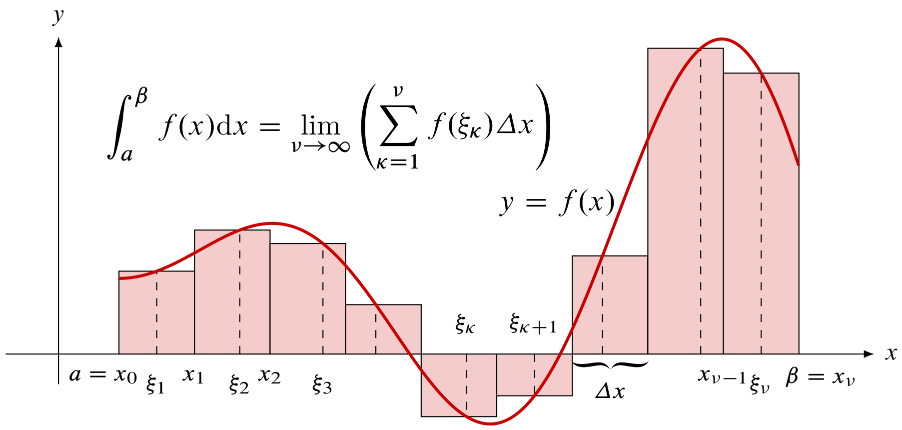
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ
: Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | : 26610 20144 | : 6932327283 - 6955058444

24 Ιουνιου 2025

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ



Φρόνιμος Σπύρος

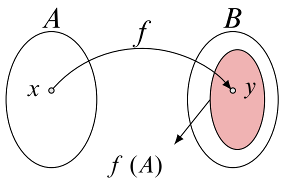
1ο Κεφάλαιο Ορισμοί

Ορισμός 1 : Πραγματική Συνάρτηση

Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι μια διαδικασία (κανόνας) f με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται **τιμή** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.



Ορισμός 2 : Σύνολο τιμών

Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης για κάθε $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

Ορισμός 3 : Γραφική παράσταση

Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x)), x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

$$C_f = \{M(x, y) : y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

Ορισμός 4 : Ίσες συναρτήσεις

Πότε δύο συναρτήσεις f, g ονομάζονται ίσες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες όταν

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Ορισμός 5 : Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Έστω συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

1. Η συνάρτηση $f + g$ του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f+g} = A \cap B$.

2. Η συνάρτηση $f-g$ της διαφοράς των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x)-g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f-g} = A \cap B$.

3. Η συνάρτηση $f \cdot g$ του γινομένου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D_{f \cdot g} = A \cap B$.

4. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ του πηλίκου των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως η συνάρτηση με τύπο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε οι παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζονται.

Ορισμός 6 : Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

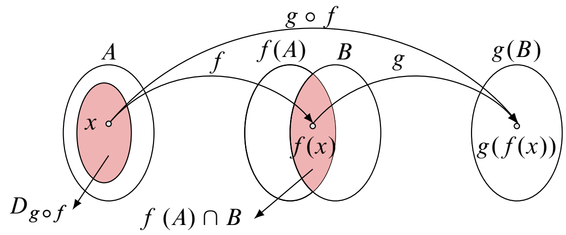
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \ \text{ και } \ f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\ B \neq \varnothing$.



Για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ θα πρέπει να ισχύει $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

(Αντίστοιχα ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \in B \ \text{ και } \ g(x) \in A\}$ και τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.)

Ορισμός 7 : Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η f θα ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός 8 : Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η f θα ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η f σε κάθε περίπτωση λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Ορισμός 9 : Ολικό μέγιστο

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Τι ονομάζεται τοπικό μέγιστο της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ορισμός 10 : Ολικό ελάχιστο

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Τι ονομάζεται τοπικό ελάχιστο της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται **ολικά ακρότατα**. Το x_0 λέγεται **θέση** ακρότατου.

Ορισμός 11 : Συνάρτηση $1-1$

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ονομάζεται συνάρτηση $1-1$;

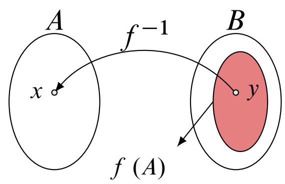
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται $1-1$ εάν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1, x_2 \in A$ του πεδίου ορισμού της f ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ορισμός 12 : Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση μία $1-1$ συνάρτηση. Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί σε ένα **μοναδικό** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f.



Ορισμός 13 : Συνεχής συνάρτηση σε σημείο

Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός 14 : Συνεχής συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής**, εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 15 : Συνεχής συνάρτηση σε διάστημα

Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα

1. ανοικτό διάστημα (a, β);
2. κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **ανοιχτό** διάστημα (a, β) εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Ορισμός 16 : Παράγωγος σε σημείο

Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Ορισμός 17 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, λέγεται παραγωγίσιμη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη στο **πεδίο ορισμού** της ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in D_f$.

Ορισμός 18 : Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα

1. ανοικτό διάστημα (a, β);
2. κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **ανοικτό** διάστημα (a, β) του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.

2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 19 : Πρώτη παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση $f : \to \mathbb{R}$ και έστω A_1 το σύνολο των σημείων $x \in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχεί στο $f'(x)$ ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της f η απλά **παράγωγος** της f. Συμβολίζεται με f'.

Ορισμός 20 : Δεύτερη παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Τι ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f. Πως ορίζεται η $\nu-$οστή παράγωγος της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''. Επαγωγικά ορίζεται και η $\nu-$οστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)}\right]'$$

Ορισμός 21 : Ρυθμός μεταβολής

Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής ενός ποσού $y = f(x)$ ως προς ένα ποσό x σε ένα σημείο x_0;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Ορισμός 22 : Τοπικό μέγιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Ορισμός 23 : Τοπικό ελάχιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0 \in A$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** η σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Ορισμός 24 : Τοπικά ακρότατα

Τι ονομάζουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα της f ονομάζονται τοπικά ακρότατα της f.

Ορισμός 25 : Κυρτή συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε οτι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ορισμός 26 : Κοίλη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε οτι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Μια συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ορισμός 27 : Σημείο καμπής

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0. Αν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) η αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της C_f.

Ορισμός 28 : Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $x = x_0$ ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ισούται με $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

Ορισμός 29 : Οριζόντια ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $y = y_0$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$) τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$).

Ορισμός 30 : Πλάγια ασύμπτωτη

Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντίστοιχα στο $-\infty$ αν

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

- Αν $\lambda = 0$ η ασύμπτωτη είναι οριζόντια.
- Αν $\lambda \neq 0$ η ασύμπτωτη είναι πλάγια.

Ορισμός 31 : Αρχική συνάρτηση

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \ , \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

2ο Κεφάλαιο Αποδείξεις - Διατυπώσεις Θεωρημάτων

Θεώρημα 1 : Συμμετρία C_f και $C_{f^{-1}}$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη. Θα ισχύει γι αυτήν ότι

$$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $M(a, \beta)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε

$$f(a) = \beta \Rightarrow a = f^{-1}(\beta)$$

κάτι που σημαίνει ότι το σημείο $M'(\beta, a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία όμως M και M' είναι συμμετρικά ως προς της ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x;\hat{O}y'$. Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.

Θεώρημα 2 : Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης - Σελ. 167

Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \\
&= \lim_{x\to x_0} a_\nu x^\nu + \lim_{x\to x_0} a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\
&= a_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + a_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\
&= a_\nu x_0^\nu + a_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Θεώρημα 3 : Όριο ρητής συνάρτησης - Σελ. 167

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι μια ρητή συνάρτηση και $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Q(x_0) \neq 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως ισχύει $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Θεώρημα 4 : Διατύπωση 1 Θεώρημα Bolzano - Σελ. 192

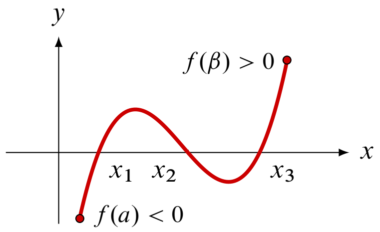
Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. **Θεώρημα**
   Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν
   - η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
   - $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

   τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$.

2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ η συνθήκη $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ σημαίνει ότι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f, λόγω της συνέχειας, θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.



Θεώρημα 5 : Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών - Σελ. 194

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a), f(\beta)$ να ισχύει $f(x_0) = \eta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ με $x \in [a, \beta]$ και η είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$[1]. Γι αυτήν θα ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και επιπλέον
- $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ άρα παίρνουμε $g(a) \cdot g(\beta) < 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta$$

Θεώρημα 6 : Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ Συνεχής - Σελ. 217

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

[1]Μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε $f(\beta) < \eta < f(a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow \\ \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα 7 : Παράγωγος σταθερής συνάρτησης. - Σελ 223

Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f(x) = c$ μια σταθερή συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως παίρνοντας το όριο της παραγώγου θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Άρα προκύπτει ότι $(c)' = 0$.

Θεώρημα 8 : Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης. - Σελ. 223

Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως η παράγωγος της f στο x_0 θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Έτσι για κάθε x θα ισχύει ότι $(x)' = 1$.

Θεώρημα 9 : Παράγωγος δύναμης - Σελ. 224

Να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} &= \frac{(x - x_0)\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right)}{x - x_0} = \\ &= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1} \end{aligned}$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της παραγώγου θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+xx_0^{\nu-2}+x_0^{\nu-1}\right) =$$
$$= x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1} = \nu\cdot x_0^{\nu-1}$$

Έτσι η παράγωγος της f, για κάθε $x\in D_f$ θα είναι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Θεώρημα 10 : Παράγωγος άρρητης συνάρτησης. - Σελ. 224

Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με $x\geq 0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Εξετάζουμε αν η f είναι παγαγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Στη συνέχεια για κάθε $x\neq x_0>0$ θα ισχύει ότι:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Επομένως για κάθε $x>0$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Θεώρημα 11 : Παράγωγος αθροίσματος. - Σελ. 229

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g και $x_0\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $S=f+g$ και για κάθε $x\neq x_0$ θα έχουμε:

$$\frac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} = \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Έτσι για την παράγωγο της συνάρτησης S θα έχουμε ότι:

$$S'(x_0) = (f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης $f+g$ στο x_0 θα είναι η $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

Θεώρημα 12 : Παράγωγος γινομένου - Σελ.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεώρημα 13 : Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων - Σελ. 229

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ του γινομένου τριών παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου δύο συναρτήσεων και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}[(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' &= (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

Θεώρημα 14 : Παράγωγος δύναμης με αρνητικό εκθέτη - Σελ. 231-232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου δύο συναρτήσεων θα έχουμε για κάθε $x \neq 0$ ότι:

$$f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{\nu} - 1 \cdot (x^{\nu})'}{x^{2\nu}} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

Θεώρημα 15 : Παράγωγος εφαπτομένης - Σελ. 232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | \text{συν}x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \\ &= \frac{(\text{ημ}x)' \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}\end{aligned}$$

Θεώρημα 16 : Παράγωγος συνεφαπτομένης - Σελ. 232

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = σφx$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} | ημx \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2 x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $σφx = \frac{συνx}{ημx}$. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε $x \in A$ ότι

$$f'(x) = (σφx)' = \left(\frac{συνx}{ημx}\right)' = \frac{(συνx)' \cdot ημx - συνx \cdot (ημx)'}{ημ^2 x} = \frac{-ημ^2 x - συν^2 x}{ημ^2 x} = -\frac{1}{ημ^2 x}$$

Θεώρημα 17 : Παράγωγος δύναμης με μη ακέραιο εκθέτη - Σελ. 234

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = ax^{a-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η αρχική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

Οπότε η παράγωγός της θα ισούται με

$$f'(x) = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

Θεώρημα 18 : Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης - Σελ. 234-235

Να αποδείξετε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ ενώ η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι

$$f'(x) = (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

Θεώρημα 19 : Παράγωγος λογαρίθμου - Σελ. 235

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x > 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln x$ επομένως παίρνουμε $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β. Αν $x < 0$ τότε η f γίνεται $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ και άρα η παράγωγός της, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ θα ισούται με

$$f'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Θεώρημα 20 : Θεώρημα Rolle - Σελ. 246

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

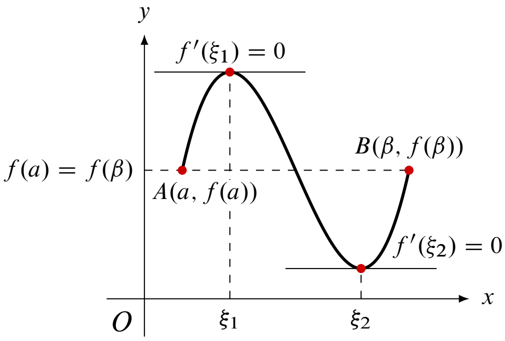
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. **Θεώρημα**
   Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι

   - συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$,
   - παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και ισχύει
   - $f(a) = f(\beta)$

   τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

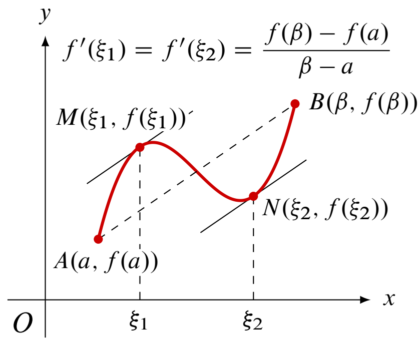
2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.



Θεώρημα 21 : Θεώρημα μέσης τιμής - Σελ. 246-247

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



1. **Θεώρημα**
   Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν αυτή είναι

   - συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και
   - παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

   τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

2. **Γεωμετρική ερμηνεία**
   Αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ στα άκρα του διαστήματος.

Θεώρημα 22 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 1 - Σελ. 251

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει**
- **$f'(x) = 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν $x_2 \neq x_2$ θεωρούμε ότι είναι $x_1 < x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2).

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$ οπότε και $f'(\xi) = 0$. Άρα παίρνουμε ότι

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Ομοίως και για $x_1 > x_2$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα οπότε σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Θεώρημα 23 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 2 - Σελ. 251

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

- **οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και**
- **$f'(x) = g'(x)$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h = f - g$ με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Γι αυτήν θα ισχύει

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ. Έτσι η h θα είναι σταθερή άρα θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

Θεώρημα 24 : Κριτήριο μονοτονίας συνάρτησης - Σελ. 253

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν

α. αν ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

β. αν ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του διαστήματος, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εργαζόμαστε για την περίπτωση $f'(x) > 0$ και ομοίως αποδεικνύεται και για $f'(x) < 0$. Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ έχουμε

- η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2)

οπότε θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ άρα προκύπτει

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \xRightarrow{x_1 < x_2} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

Θεώρημα 25 : Θεώρημα Fermat - Σελ. 260

Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat:
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **x_0 είναι ένα *εσωτερικό* σημείο του Δ**
- **η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και**
- **είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε**

$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Θα υπάρχει έτσι ένας θετικός αριθμός $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$ τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \tag{1}$$

β. Αν $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$ τότε παίρνουμε ομοίως ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $f'(x_0) = 0$. Εργαζόμαστε αναλόγως και για την περίπτωση όπου η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Θεώρημα 26 : Κριτήριο τοπικών ακρότατων - Σελ. 262

Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι

α. αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

β. αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

γ. αν η f' διατηρεί το πρόσημό της σε κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. Σύμφωνα με το κριτήριο μονοτονίας η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ θα ισχύει

$$x \leq x_0 \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Επίσης από το γεγονός ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ παίρνουμε ότι f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Άρα προκύπτει

$$x \geq x_0 \overset{f \searrow}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ παίρνουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

β. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

γ. Θεωρούμε ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Έτσι η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ οπότε

$$\text{για } x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα (α, β). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- Ομοίως αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ με $x_1 < x_2$ τότε προκύπτει επίσης $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος αποδείξαμε προηγουμένως ότι $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα (α, β). Εργαζόμαστε αναλόγως και για $f'(x) < 0$.

Θεώρημα 27 : Αρχική συνάρτηση - Σελ. 304

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω F μια παράγουσα της f στο Δ. Να αποδείξετε ότι

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και ότι

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c$$

για κάθε $x \in \Delta$, με $c \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Για να είναι η G παράγουσα της f στο διάστημα Δ θα πρέπει να ισχύει $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Έχουμε λοιπόν

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x) \ , \ x \in \Delta$$

β. Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο διάστημα Δ. Θα ισχύει γι αυτήν ότι $G'(x) = f(x)$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε επίσης ότι $F'(x) = f(x)$ άρα παίρνουμε $G'(x) = F'(x)$ οπότε θα υπάρχει σταθερά c ώστε

$$G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

σύμφωνα με το πόρισμα του Θ.Μ.Τ.

Θεώρημα 28 : Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού - Σελ. 334-335

Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν G είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(a)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το θεώρημα της αρχικής συνάρτησης, η $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $[a, \beta]$. Έτσι κάθε άλλη παράγουσα της γράφεται ως $G(x) = F(x) + c$. Θέτοντας όπου $x = a$ παίρνουμε:

$$G(a) = F(a) + c \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(x)\,dx + c \Rightarrow c = G(a)$$

Θέτοντας επίσης όπου $x = \beta$ προκύπτει ότι:

$$G(\beta) = F(\beta) + c \Rightarrow G(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx + G(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(a)$$

Θεώρημα 29 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 1 - Σελ. 343

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοιες ώστε

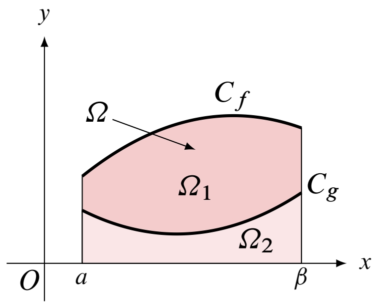
- **$f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και**
- **f, g μη αρνητικές στο $[a, \beta]$.**

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,dx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν των χωρίων Ω_1, Ω_2 μεταξύ της C_f και αντίστοιχα της C_g, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ ομοίως και για την C_g είναι



$$E(\Omega_1) = \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ , \ E(\Omega_2) = \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω θα είναι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) =$$
$$= \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Θεώρημα 30 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 2 - Σελ. 344

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοιες ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός c τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0.$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $f(x) + c, g(x) + c$ από $x = a$ έως $x = \beta$ θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)]\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta [f(x) + c - g(x) - c]\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Θεώρημα 31 : Εμβαδόν χωρίου από αρνητική συνάρτηση - Σελ. 344

Δίνεται συναρτήση g ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ της C_g, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x))\,\mathrm{d}x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη μηδενική συνάρτηση $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ παίρνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f, C_g και των ευθειών $x = a, x = \beta$ θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta (0 - g(x))\,\mathrm{d}x = -\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

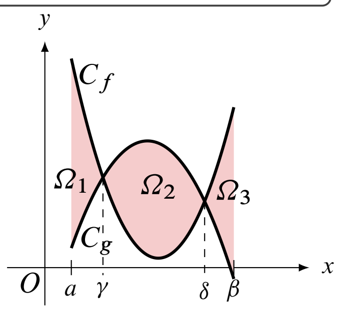
Θεώρημα 32 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 3 - Σελ. 344-345

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και των ευθειών $x = a, x = \beta$ δίνεται από τον

τύπο

$$\boldsymbol{E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο. Θεωρούμε ότι μηδενίζεται σε δύο εσωτερικά σημεία γ, δ του διαστήματος $[a, \beta]$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ μεταξύ των C_f, C_g και των ευθειών $x = a, x = \gamma, x = \delta, x = \beta$.

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$$
$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

3ο Κεφάλαιο Ιδιότητες

Ιδιότητα 1 : Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια $1-1$ συνάρτηση. Για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύουν τα εξής:

- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f.
- Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.
- Ισχύει ότι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$.
- $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.
- $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$.

Ιδιότητα 2 : Πλευρικά Όρια

Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **υπάρχει** αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια της f το x_0 είναι ίσα.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$$

Ιδιότητα 3 : Όρια

Δίνονται συναρτήσεις $f.g$ με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και $x_0 \in A \cap B$. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \cdot l_1 \quad , \quad k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \quad , \quad l_2 \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |l_1|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[\kappa]{l_1} \quad , \quad l_1 \geq 0$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu} = l_1^{\nu}$

Ιδιότητα 4 : Βασικά τριγωνομετρικά όρια

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

β. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Ιδιότητα 5 : Μη πεπερασμένο όριο

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty$.
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

5. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

6. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

7. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = +\infty$.

8. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

9. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = 0$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

11. Αν $\nu \in \mathbb{N}$ τότε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}}$ δεν υπάρχουν.

4ο Κεφάλαιο Προτάσεις χωρίς απόδειξη

Πρόταση 1 Συνάρτηση $1-1$

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Πρόταση 2 Βασικές ανισότητες

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Ειδικότερα έχουμε:

   α. $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \neq 0$ β. $\eta\mu x < x$, για κάθε $x > 0$ γ. $\eta\mu x > x$, για κάθε $x < 0$

2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$

3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Πρόταση 3 Όρια και διάταξη

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Πρόταση 4 Όρια και διάταξη 2

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει

- $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Πρόταση 5 Όρια και διάταξη 3

- Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$ (ή < 0) τότε $f(x) > 0$ (αντίστοιχα < 0) για κάθε $x \in (a, +\infty)$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > 0$ (ή < 0) τότε $f(x) > 0$ (αντίστοιχα < 0) για κάθε $x \in (-\infty, a)$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 6 Όρια και διάταξη 4

Έστω δύο συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Πρόταση 7 Κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Πρόταση 8 **Όριο πολυωνυμικής στο άπειρο**

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_\nu x^\nu\right)$$

Πρόταση 9 **Όριο ρητής στο άπειρο**

Έστω ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$ με $a_\nu \neq 0$ με $a_\nu, \beta_\mu \neq 0$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

Πρόταση 10 **Εικόνα διαστήματος**

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Πρόταση 11 **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής**

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

5ο Κεφάλαιο Προτάσεις με απόδειξη

6ο Κεφάλαιο Αντιπαραδείγματα

Αντιπαράδειγμα 1 : Θέση ολικού μεγίστου

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ολικό μέγιστο, έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστη τιμή το 1 στις θέσεις $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

7ο Κεφάλαιο Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος

Βασικές έννοιες για τις προτάσεις

Μια πρόταση στα μαθηματικά συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαίο γράμμα π.χ. $A, B, \ldots$. Για παράδειγμα η

$$A\text{: Ο αριθμός 3 είναι ακέραιος}$$

αποτελεί μια μαθηματική πρόταση. Ένα θεώρημα στα μαθηματικά αποτελείται από δύο προτάσεις, την **υπόθεση** A και το **συμπέρασμα** B, που συνδέονται με την πράξη της συνεπαγωγής. Έχει δηλαδή τη μορφή

$$A \Rightarrow B$$

και έχει το νόημα ότι **αν ισχύει η A τότε ισχύει η B**. Για τις προτάσεις ισχύουν τα εξής:

- Κάθε πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ως μεταβλητή και η μεταβλητή αυτή παίρνει δύο τιμές: **Αληθής** (✔) και **Ψευδής** (✘).
- Η πράξη της **άρνησης** στις προτάσεις, μας δίνει το αντίθετο μιας πρότασης, συμβολίζεται με $\neg$ και μετατρέπει μια πρόταση από αληθή σε ψευδή και αντίστροφα. Για παράδειγμα

$$\neg A\text{: Ο αριθμός 3 } \textbf{δεν} \text{ είναι ακέραιος.}$$

- Το **αντίστροφο** μιας συνεπαγωγής $A \Rightarrow B$ γράφεται είτε $A \Leftarrow B$ είτε $B \Rightarrow A$.
- Για μια συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$, ο συνδυασμός της άρνησης και του αντιστρόφου ονομάζεται **αντιθετοαντίστροφη** συνεπαγωγή και συμβολίζεται $\neg B \Rightarrow \neg A$. Έχει την έννοια του **αν δεν ισχύει το συμπέρασμα B τότε δεν ισχύει και η υπόθεση A**.
- Η **διπλή συνεπαγωγή**, ή αλλιώς **ισοδυναμία**, συμβολίζεται $\Leftrightarrow$ και δηλώνει ότι ισχύει και το ορθό $A \Rightarrow B$ και το αντίστροφο $A \Leftarrow B$. Όταν δύο προτάσεις A, B είναι ισοδύναμες τότε είναι είτε και οι δύο αληθείς είτε και οι δύο ψευδείς.

Θεωρήματα Γ' Λυκείου

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα όσα αναφέραμε στα θεωρήματα και τι προτάσεις των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Λυκείου. Ο γενικός σκοπός μας είναι να διατυπώσουμε για κάθε θεώρημα, τις εξής 4 «μορφές» που μπορεί να πάρει και να τις μελετήσουμε ως προς την ισχύ:

1: Θεώρημα	2: Αντίστροφο	3: Αντιθετοαντίστροφο του 1	4: Αντιθετοαντίστροφο του 2
$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \Rightarrow \neg B$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον εξής σημαντικό κανόνα:

Κάθε συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της

ο οποίος μας δίνει τα ακόλουθα συμπεράσματα:

$$1 \Leftrightarrow 3 \quad \text{και} \quad 2 \Leftrightarrow 4$$

Θεώρημα Bolzano

1 Θεώρημα: ✔ Αληθές

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$.

2 Αντίστροφο: ✘ Ψευδές

1η μορφή: Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in [a, \beta]$ τότε: $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

3 Αντιθετοαντίστροφο του 1: ✔ Αληθές

4 Αντιθετοαντίστροφο του 2: ✘ Ψευδές

8ο Κεφάλαιο Τυπολόγιο - Πίνακες

Πράξη	Μορφή
Πηλίκο	$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
Γινόμενο	$0 \cdot (\pm\infty)$
Άθροισμα	$+\infty - \infty$
Δύναμη	$0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$

Όριο Αθροίσματος

$\lim_{x\to x_0} f(x) =$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$-\infty$

Όριο Γινομένου

$\lim_{x\to x_0} f(x) =$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΑΠΛΕΣ		ΣΥΝΘΕΤΕΣ		
Συνάρτηση f	**Παράγωγος f'**	**Συνάρτηση $g \circ f$**	**Παράγωγος $(g \circ f)'$**	**Λεκτική περιγραφή**
c	0			
x	1			
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$f^\nu(x)$	$\nu f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$	$\nu(\text{βάση})^{\nu-1}(\text{βαση})'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{(\text{Παρονομαστής})'}{\text{Παρονομαστής}^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\frac{(\text{Υπόριζο})'}{2 \cdot \text{Ρίζα}}$
$\text{ημ}x$	$\text{συν}x$	$\text{ημ} f(x)$	$\text{συν} f(x) \cdot f'(x)$	$\text{συν}(\text{Γωνία}) \cdot (\text{Γωνία})'$
$\text{συν}x$	$-\text{ημ}x$	$\text{συν} f(x)$	$-\text{ημ} f(x) \cdot f'(x)$	$-\text{ημ}(\text{Γωνία}) \cdot (\text{Γωνία})'$
$\text{εφ}x$	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$\text{εφ} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\text{συν}^2 f(x)}$	$\frac{(\text{Γωνία})'}{\text{συν}^2(\text{Γωνία})}$
$\text{σφ}x$	$-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	$\text{σφ} f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\text{ημ}^2 f(x)}$	$-\frac{(\text{Γωνία})'}{\text{ημ}^2(\text{Γωνία})}$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$	$a^{\text{Εκθέτης}} \cdot \ln a \cdot (\text{Εκθέτης})'$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{\text{Εκθέτης}} \cdot (\text{Εκθέτης})'$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|f(x)\|$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{(\text{Παράσταση})'}{\text{Παράσταση}}$

Συνάρτηση	Παράγουσα	Ορισμένο ολοκλήρωμα
c	cx	$\int_a^\beta c\mathrm{d}x = [cx]_a^\beta = c(\beta - a)$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\int_a^\beta x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\beta = \frac{\beta^2}{2} - \frac{a^2}{2}$
x^ν	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$	$\int_a^\beta x^\nu\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_a^\beta = \frac{\beta^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{a^{\nu+1}}{\nu+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\int_a^\beta \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = [\sqrt{x}]_a^\beta = \sqrt{\beta} - \sqrt{a}$
$\sqrt[\nu]{x^\mu}$	$\frac{x^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1}$	$\int_a^\beta \sqrt[\nu]{x^\nu}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1}\right]_a^\beta = \frac{\beta^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1} - \frac{a^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\int_a^\beta \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^\beta = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{a}$
$\etaμx$	$-\sigmaυνx$	$\int_a^\beta \etaμx\mathrm{d}x = [-\sigmaυνx]_a^\beta = -\sigmaυν\beta + \sigmaυνa$
$\sigmaυνx$	$\etaμx$	$\int_a^\beta \sigmaυνx\mathrm{d}x = [\etaμx]_a^\beta = \etaμ\beta - \etaμa$
$\frac{1}{\sigmaυν^2x}$	$\varepsilonφx$	$\int_a^\beta \frac{1}{\sigmaυν^2x}\mathrm{d}x = [\varepsilonφx]_a^\beta = \varepsilonφ\beta - \varepsilonφa$
$\frac{1}{\etaμ^2x}$	$\sigmaφx$	$\int_a^\beta \frac{1}{\etaμ^2x}\mathrm{d}x = [-\sigmaφx]_a^\beta = -\sigmaφ\beta + \sigmaφa$
e^x	e^x	$\int_a^\beta e^x\mathrm{d}x = [e^x]_a^\beta = e^\beta - e^a$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\int_a^\beta \mu^x\mathrm{d}x = \left[\frac{\mu^x}{\ln\mu}\right]_a^\beta = \frac{\mu^\beta}{\ln\mu} - \frac{\mu^a}{\ln\mu}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\int_a^\beta \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln\|x\|]_a^\beta = \ln\|\beta\| - \ln\|a\|$

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f^{\nu}(x)\cdot f'(x)$	$\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}$
$f(x)\cdot f'(x)$	$\dfrac{f^2(x)}{2}$
$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{f(x)}$
$\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\dfrac{1}{f(x)}$
$\text{ημ} f(x)\cdot f'(x)$	$-\text{συν} f(x)$
$\text{συν} f(x)$	$\text{ημ} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{\text{συν}^2 f(x)}$	$\text{εφ} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{\text{ημ}^2 f(x)}$	$\text{σφ} f(x)$
$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$e^{f(x)}$
$a^{f(x)}\cdot f'(x)$	$\dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x)$