



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

📍 : Ιακώβου Πολυλά 24 - Πεζόδρομος | ☎ : 26610 20144 | 📠 : 6932327283 - 6955058444

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26 Μαρτίου 2024

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

## Αποδείξεις Θεωρημάτων ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

### Θεώρημα 1 : Συμμετρία $C_f$ και $C_{f^{-1}}$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι  $1-1$  άρα και αντιστρέψιμη. Θα ισχύει γι αυτήν ότι

$$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο  $M(a, \beta)$  που ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$  τότε

$$f(a) = \beta \Rightarrow a = f^{-1}(\beta)$$

κάτι που σημαίνει ότι το σημείο  $M'(\beta, a)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ . Τα σημεία όμως  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς της ευθείας  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ . Άρα οι  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.

### Θεώρημα 2 : Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης - Σελ. 167

Δίνεται ένα πολυώνυμο  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω πολυώνυμο  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow x_0} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_1 x + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \end{aligned}$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)$$

Άρα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ .

### Θεώρημα 3 : Όριο ρητής συνάρτησης - Σελ. 167

Αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  είναι μια ρητή συνάρτηση και  $x_0 \in A$ , να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  μια ρητή συνάρτηση όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  είναι πολυώνυμα και έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $Q(x_0) \neq 0$ . Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ .

### Θεώρημα 4 : Διατύπωση 1 Θεώρημα Bolzano - Σελ. 192

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

##### i. Θεώρημα

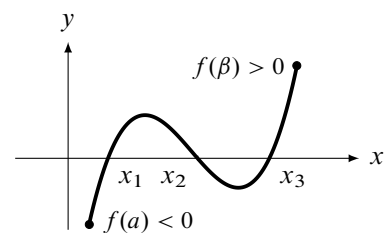
Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν

- α. η  $f$  συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και
- β.  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός  $x_0 \in (a, \beta)$  έτσι ώστε να ισχύει  $f(x_0) = 0$ .

##### ii. Γεωμετρική ερμηνεία

Για μια συνεχή συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[a, \beta]$  η συνθήκη  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$  σημαίνει ότι οι τιμές αυτές θα είναι ετερόσημες οπότε τα σημεία  $A(a, f(a))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  θα βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα  $x'x$ . Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση  $C_f$ , λόγω της συνέχειας, θα τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (a, \beta)$ .



### Θεώρημα 5 : Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών - Σελ. 194

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν

- i. η  $f$  συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και

ii.  $f(a) \neq f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (a, \beta)$  ώστε για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a), f(\beta)$  να ισχύει  $f(x_0) = \eta$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$  με  $x \in [a, \beta]$  και  $\eta$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει  $f(a) < \eta < f(\beta)$ <sup>(1)</sup>. Γι αυτήν θα ισχύει ότι:

- i. είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και επιπλέον
- ii.  $g(a) = f(a) - \eta < 0$  και  $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$  άρα παίρνουμε  $g(a) \cdot g(\beta) < 0$ .

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (a, \beta)$  ώστε να ισχύει

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta$$

#### Θεώρημα 6 : Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ Συνεχής - Σελ. 217

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0 \in A$ . Για κάθε  $x \neq x_0$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

#### Θεώρημα 7 : Παράγωγος σταθερής συνάρτησης. - Σελ 223

Να αποδείξετε ότι  $(c)' = 0$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $f(x) = c$  μια σταθερή συνάρτηση και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \neq x_0$  θα έχουμε ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως παίρνοντας το όριο της παραγώγου θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

Άρα προκύπτει ότι  $(c)' = 0$ .

<sup>(1)</sup> Μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε  $f(\beta) < \eta < f(a)$

**Θεώρημα 8 : Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης. - Σελ. 223**

Να αποδείξετε ότι  $(x)' = 1$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση  $f(x) = x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \neq x_0$  ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

Έτσι για κάθε  $x$  θα ισχύει ότι  $(x)' = 1$ .

**Θεώρημα 9 : Παράγωγος δύναμης - Σελ. 224**

Να αποδείξετε ότι  $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^\nu$  με  $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  και έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \neq x_0$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = \\ &= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1} \end{aligned}$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της παραγώγου θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}) = \\ &= x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} = \nu \cdot x_0^{\nu-1} \end{aligned}$$

Έτσι η παράγωγος της  $f$ , για κάθε  $x \in D_f$  θα είναι  $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ .

**Θεώρημα 10 : Παράγωγος άρρητης συνάρτησης. - Σελ. 224**

Να αποδείξετε ότι  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  με  $x \geq 0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Εξετάζουμε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Στη συνέχεια για κάθε  $x \neq x_0 > 0$  θα ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Επομένως για κάθε  $x > 0$  η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Θεώρημα 11 : Παράγωγος αθροίσματος. - Σελ. 229**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση  $S = f + g$  και για κάθε  $x \neq x_0$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Έτσι για την παράγωγο της συνάρτησης  $S$  θα έχουμε ότι:

$$S'(x_0) = (f + g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης  $f + g$  στο  $x_0$  θα είναι η  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

**Θεώρημα 12 : Παράγωγος γινομένου - Σελ.**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ****Θεώρημα 13 : Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων - Σελ. 229**

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$  του γινομένου τριών παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου δύο συναρτήσεων και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} [(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' &= (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

**Θεώρημα 14 : Παράγωγος δύναμης με αρνητικό εκθέτη - Σελ. 231-232**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^{-\nu}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ , δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου δύο συναρτήσεων θα έχουμε για κάθε  $x \neq 0$  ότι:

$$f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^\nu - 1 \cdot (x^\nu)'}{x^{2\nu}} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

**Θεώρημα 15 : Παράγωγος εφαπτομένης - Σελ. 232**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R} | \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Γνωρίζουμε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ . Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε  $x \in A$  ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \\ &= \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

**Θεώρημα 16 : Παράγωγος συνεφαπτομένης - Σελ. 232**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R} | \eta\mu x \neq 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Γνωρίζουμε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ . Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου θα έχουμε για κάθε  $x \in A$  ότι

$$f'(x) = (\sigma\phi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)' \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{-\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

**Θεώρημα 17 : Παράγωγος δύναμης με μη ακέραιο εκθέτη - Σελ. 234**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a$  με  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = ax^{a-1}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η αρχική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $(0, +\infty)$  και για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

Οπότε η παράγωγός της θα ισούται με

$$f'(x) = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a \frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

**Θεώρημα 18 : Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης - Σελ. 234-235**

Να αποδείξετε ότι η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a \neq 1$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $\mathbb{R}$  ενώ η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Έτσι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θα έχουμε ότι

$$f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

**Θεώρημα 19 : Παράγωγος λογαρίθμου - Σελ. 235**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln |x|$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^*$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $x > 0$  τότε  $f(x) = \ln |x| = \ln x$  επομένως παίρνουμε  $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .
- Αν  $x < 0$  τότε η  $f$  γίνεται  $f(x) = \ln |x| = \ln (-x)$  και άρα η παράγωγός της, για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  θα ισούται με

$$f'(x) = (\ln (-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Θεώρημα 20 : Θεώρημα Rolle - Σελ. 246**

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ****i. Θεώρημα**

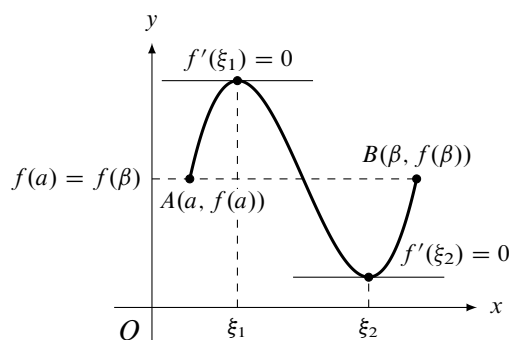
Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι

- συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$ ,
- παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(a, \beta)$  και ισχύει
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**ii. Γεωμετρική ερμηνεία**

Αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο  $[a, \beta]$  τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της  $C_f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'x$ .



**Θεώρημα 21 : Θεώρημα μέσης τιμής - Σελ. 246-247**

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

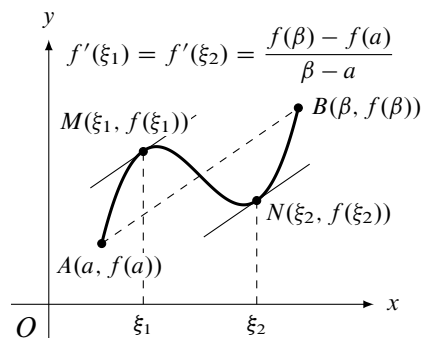
**ΑΠΑΝΤΗΣΗ****i. Θεώρημα**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν αυτή είναι

- α. συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και
- β. παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(a, \beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$  έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

**ii. Γεωμετρική ερμηνεία**

Αν για τη συνάρτηση  $f$  εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  που ενώνει τα σημεία  $A(a, f(a))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  στα άκρα του διαστήματος.

**Θεώρημα 22 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 1 - Σελ. 251**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν

- i. η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και ισχύει
- ii.  $f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος

τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- i. Αν  $x_1 = x_2$  τότε  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- ii. Αν  $x_2 \neq x_1$  θεωρούμε ότι είναι  $x_1 < x_2$  και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  έχουμε ότι
  - α. Η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  και
  - β. παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ .

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει  $f'(x) = 0$  οπότε και  $f'(\xi) = 0$ . Άρα παίρνουμε ότι

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Ομοίως και για  $x_1 > x_2$  καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα οπότε σε κάθε περίπτωση η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .



**Θεώρημα 23 : Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. 2 - Σελ. 251**

Δίνονται δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν

- i. οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $\Delta$  και
  - ii.  $f'(x) = g'(x)$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$
- τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια ώστε να ισχύει  $f(x) = g(x) + c$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Ορίζουμε τη συνάρτηση  $h = f - g$  με  $h(x) = f(x) - g(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ . Για αυτήν θα ισχύει

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος  $\Delta$ . Έτσι η  $h$  θα είναι σταθερή άρα θα υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

**Θεώρημα 24 : Κριτήριο μονοτονίας συνάρτησης - Σελ. 253**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν

- i. αν ισχύει  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος, τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- ii. αν ισχύει  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος, τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Εργαζόμαστε για την περίπτωση  $f'(x) > 0$  και ομοίως αποδεικνύεται και για  $f'(x) < 0$ . Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  έχουμε ότι

- i. η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  και
- ii. παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(x_1, x_2)$

οπότε θα υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση έχουμε  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  άρα προκύπτει

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta$ .

**Θεώρημα 25 : Θεώρημα Fermat - Σελ. 260**

Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat:

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- i.  $x_0$  είναι ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$
- ii. η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και
- iii. είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  τότε

$$f'(x_0) = 0$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Θα υπάρχει έτσι ένας θετικός αριθμός  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει  $f(x_0) \geq f(x)$ . Επίσης η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

- i. Αν  $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$  τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \quad (1)$$

- ii. Αν  $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$  τότε παίρνουμε ομοίως ότι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $f'(x_0) = 0$ . Εργαζόμαστε αναλόγως και για την περίπτωση όπου η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .

#### Θεώρημα 26 : Κριτήριο τοπικών ακρότατων - Σελ. 262

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι

- i. αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .
- ii. αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .
- iii. αν η  $f'$  διατηρεί το πρόσημό της σε κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$  τότε είναι γνησίως μονότονη στο  $(a, \beta)$  και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i. Γνωρίζουμε ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0]$ . Σύμφωνα με το κριτήριο μονοτονίας η  $f$  θα είναι γνησίως αύξουσα στο  $(a, x_0]$ . Έτσι για κάθε  $x \in (a, x_0]$  θα ισχύει

$$x \leq x_0 \xRightarrow{f^3} f(x) \leq f(x_0)$$

Επίσης από το γεγονός ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in [x_0, \beta)$  παίρνουμε ότι  $f$  θα είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Άρα προκύπτει

$$x \geq x_0 \xRightarrow{f^4} f(x) \leq f(x_0)$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση για κάθε  $x \in (a, \beta)$  παίρνουμε ότι  $f(x) \leq f(x_0)$  άρα η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .

- ii. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.
- iii. Θεωρούμε ότι ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Έτσι η συνάρτηση  $f$  θα είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(a, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$  οπότε

$$\text{για } x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

άρα η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0$ . Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $(a, \beta)$ . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- α. Αν  $x_1, x_2 \in (a, x_0]$  με  $x_1 < x_2$  τότε προκύπτει  $f(x_1) < f(x_2)$  αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- β. Ομοίως αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$  με  $x_1 < x_2$  τότε προκύπτει επίσης  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- γ. Τέλος αποδείξαμε προηγουμένως ότι  $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $(a, \beta)$ . Εργαζόμαστε αναλόγως και για  $f'(x) < 0$ .

#### Θεώρημα 27 : Αρχική συνάρτηση - Σελ. 304

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και έστω  $F$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι

- i. όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και ότι

- ii. κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c$$

για κάθε  $x \in \Delta$ , με  $c \in \mathbb{R}$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i. Για να είναι η  $G$  παράγουσα της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  θα πρέπει να ισχύει  $G'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ . Έχουμε λοιπόν

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x), \quad x \in \Delta$$

- ii. Έστω  $G$  μια άλλη παράγουσα της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ . Θα ισχύει γι αυτήν ότι  $G'(x) = f(x)$ . Από την υπόθεση γνωρίζουμε επίσης ότι  $F'(x) = f(x)$  άρα παίρνουμε  $G'(x) = F'(x)$  οπότε θα υπάρχει σταθερά  $c$  ώστε

$$G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

σύμφωνα με το πόρισμα του Θ.Μ.Τ.

#### Θεώρημα 28 : Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού - Σελ. 334-335

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο διάστημα  $[a, \beta]$  τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = G(\beta) - G(a)$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το θεώρημα της αρχικής συνάρτησης, η  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  είναι μια αρχική συνάρτηση της  $f$  στο  $[a, \beta]$ . Έτσι κάθε άλλη παράγουσα της γράφεται ως  $G(x) = F(x) + c$ . Θέτοντας όπου  $x = a$  παίρνουμε:

$$G(a) = F(a) + c \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(x) dx + c \Rightarrow c = G(a)$$

Θέτοντας επίσης όπου  $x = \beta$  προκύπτει ότι:

$$G(\beta) = F(\beta) + c \Rightarrow G(\beta) = \int_a^\beta f(x) dx + G(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(x) dx = G(\beta) - G(a)$$

### Θεώρημα 29 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 1 - Σελ. 343

Δίνονται δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  τέτοιες ώστε

- i.  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και
- ii.  $f, g$  μη αρνητικές στο  $[a, \beta]$ .

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ των γραφικών παραστάσεων  $C_f, C_g$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

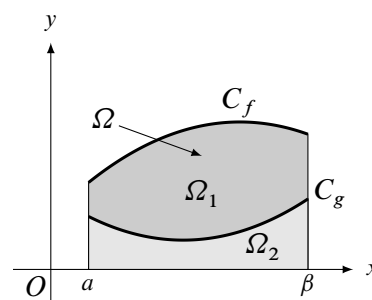
### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν των χωρίων  $\Omega_1, \Omega_2$  μεταξύ της  $C_f$  και αντίστοιχα της  $C_g$ , του άξονα  $x'$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  ομοίως και για την  $C_g$  είναι

$$E(\Omega_1) = \int_a^\beta f(x) dx, \quad E(\Omega_2) = \int_a^\beta g(x) dx$$

Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  θα είναι

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \\ &= \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$



### Θεώρημα 30 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 2 - Σελ. 344

Δίνονται δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  τέτοιες ώστε  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ των γραφικών παραστάσεων  $C_f, C_g$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για τις συνεχείς συναρτήσεις  $f, g$  θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $c$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0.$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των  $f(x) + c, g(x) + c$  από  $x = a$  έως  $x = \beta$  θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_a^\beta [f(x) + c - g(x) - c] dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

**Θεώρημα 31 : Εμβαδόν χωρίου από αρνητική συνάρτηση - Σελ. 344**

Δίνεται συνάρτηση  $g$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  τέτοια ώστε  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ της  $C_g$ , του άξονα  $x'x$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = - \int_a^\beta g(x) dx$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τη μηδενική συνάρτηση  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  παίρνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των  $C_f, C_g$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx = \int_a^\beta (0 - g(x)) dx = - \int_a^\beta g(x) dx$$

**Θεώρημα 32 : Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων 3 - Σελ. 344-345**

Δίνονται δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ των γραφικών παραστάσεων  $C_f, C_g$  και των ευθειών  $x = a, x = \beta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η διαφορά  $f(x) - g(x)$  δεν έχει σταθερό πρόσημο. Θεωρούμε ότι μηδενίζεται σε δύο εσωτερικά σημεία  $\gamma, \delta$  του διαστήματος  $[a, \beta]$ . Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  μεταξύ των  $C_f, C_g$  και των ευθειών  $x = a, x = \gamma, x = \delta, x = \beta$ .

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \\ &= \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

