Σπυρος Φρονιμος - Μαθηματικος
✉ : spyrosfronimos@gmail.com | 📱 : 6932327283 - 6974532090

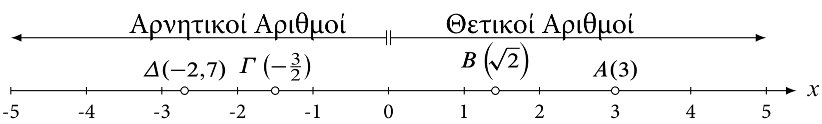
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
2 Αυγούστου 2016

ΑΛΓΕΒΡΑ Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πραγματικοί Αριθμοί

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο O στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.



- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^ν όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^\nu$$

Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών. Παρακάτω βλέπουμε τις βασικές ταυτότητες.

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πρώτος ονομάζεται κάθε παράγοντας που δεν παραγοντοποιείται περαιτέρω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

1. **Ευθεία απόδειξη**
   Με την ευθεία απόδειξη αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από την υπόθεση και καταλλήγοντας στο συμπέρασμα.

2. **Απαγωγή σε άτοπο**
   Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από το αντίθετο του συμπεράσματος και καταλλάγουμε σε μια πρόταση που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$	$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
Επιμεριστική	$a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$	

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a\cdot 0=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Για κάθε ισότητα της μορφής $a=\beta$ με a,β πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. Τοποθετούμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

$$a=\beta\Rightarrow\begin{cases}a+\gamma=\beta+\gamma\\a-\gamma=\beta-\gamma\end{cases}\quad\text{και}\quad\begin{array}{l}a\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma\\ \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}\ ,\ \gamma\neq 0\end{array}$$

ii. Εαν δύο πραγματικοί αριθμοί $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές δυνάμεις τους, $\nu\in\mathbb{N}$, θα είναι ίσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

$$a=\beta\Rightarrow a^{\nu}=\beta^{\nu}$$

iii. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a, \beta > 0$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων $a = \beta$ και $\gamma = \delta$ προκύπτει ισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διάιρεση κατά μέλη.

$$a = \beta \ \text{ και } \ \gamma = \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma = \beta + \delta \\ \textbf{2. Αφαίρεση κατά μέλη} & a - \gamma = \beta - \delta \\ \textbf{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \\ \textbf{4. Διαίρεση κατά μέλη} & \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \ , \ \gamma \cdot \delta \neq 0 \end{cases}$$

Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται και για πράξεις κατα μέλη σε περισσότερες από δύο ισότητες, στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y \quad \text{και} \quad a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

Διαγράφουμε κι απ τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο **μη μηδενικό** παράγοντα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι μηδενικό τότε τουλάχιστον ένας απ' αυτούς είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \textbf{ή} \ \beta = 0$$

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί και για γινόμενο περισσοτέρων των δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ ή } a_2 = 0 \text{ ή } \ldots \text{ ή } a_\nu = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Εαν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι διάφορο του μηδενός τότε κανένας απ' αυτούς δεν είναι ίσος με το 0.

$$a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \ \textbf{και} \ \beta \neq 0$$

Το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων από δύο παραγόντων. Για ν πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 0 \text{ και } a_2 \neq 0 \text{ και } \ldots \text{ και } a_\nu \neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Για κάθε δυναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

Επίσης για δυνάμεις με βάσεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ και φυσικούς εκθέτες $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^{\nu} \cdot a^{\mu} = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^{\nu} : a^{\mu} = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^{\nu} = a^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$
4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}$, $\beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^{\nu})^{\mu} = a^{\nu \cdot \mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\nu}$, $a, \beta \neq 0$

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa} \text{ και } (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^{\nu} = a_1^{\nu} \cdot a_2^{\nu} \cdot \ldots \cdot a_\kappa^{\nu}$$

Για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ιδιότητες 1 - 6 με την προϋπόθεση οι βάσεις να είναι θετικοί αριθμοί δηλαδή $a, \beta > 0$.