Η έννοια του πολυωνύμου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Βασικές έννοιες

1. Για καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα να βρείτε τους όρους, τους συντελεστές, το σταθερό όρο και το βαθμό.

$$\alpha$$
. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

$$\beta. \ O(x) = x^2 + 5x - 2$$

$$y. S(x) = -x^4 + x^3 - 5x + 8$$

$$\delta. K(x) = x^2 - x^3 + 1$$

$$\varepsilon. \ M(x) = \frac{x^3}{4} - \sqrt{2}x^2 + \frac{3x}{5}$$

2. Βρείτε το βαθμό σε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα.

$$\alpha. P(x) = 3x - x^3 + 5 + x^2$$

$$\beta. \ Q(x) = 4x^2 + 0x^4 - x^3 + 7$$

y.
$$R(x) = x^4 - 2x^2 + 4x^3 - x^4 + 7 - 5x$$

$$\delta. S(x) = 0x^2 + 0x + 3$$

$$\epsilon$$
. $K(x) = -5$

$$στ. G(x) = 0$$

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda) x^3 - (\lambda - 3)x^2 + (9 - \lambda^2) x + 2\lambda - 6$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το βαθμό του P(x) για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

4. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (a^2 - a)x^3 + (a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - 1)x + |a| - 1$$

Βρείτε τις τιμές τις παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το P(x):

- α. να είναι 3ου βαθμού.
- β. να είναι 2ου βαθμού.
- γ. να είναι 1ου βαθμού.
- δ. να είναι μηδενικού βαθμού.
- ε. να μην έχει βαθμό.

5. Δίνεται το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού

$$P(x) = (a - \beta - 2)x^3 + (2a + 3\beta)x^2 + 2ax - 5\beta$$

 $\mu \in a, \beta \in \mathbb{R}.$

- α. Να δείξετε ότι a=4 και $\beta=2$.
- β. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$$Q(x) = P^2(x) - xP(x)$$

Ισότητα πολυωνύμων

6. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = (|a|-1)x^3 + (a^2-a)x^2 + (2a-2)x + a^2 - 1$$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

7. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα πολυώνυμα

$$A(x) = (\lambda + 1)x^{3} + (\lambda^{2} + 2)x^{2} + 2\lambda x - 3 \kappa \alpha x$$

$$B(x) = (\lambda^2 - 1) x^3 + 3\lambda x^2 + 4x - 1 - \lambda$$

να είναι ίσα.

8. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου *a* ώστε τα παρακάτω πολυώνυμα να είναι ίσα.

$$P(x) = (a^2 - 3a)x^3 + x^2 + a$$
 και

$$Q(x) = -2x^3 + a^2x^2 + (a^3 - 1)x + 1$$

Τιμές - Ρίζες πολυωνύμων

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

- α. Να υπολογίσετε τις τιμές P(-2), P(1), P(0) και P(3).
- β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $3P^2(2) 4P(-1) + P(0)$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ είναι ρίζες του P(x).

11. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 - (2a - 1)x - 3$$
, us $a \in \mathbb{R}$.

για το οποίο ισχύει P(2) = 7.

- α. Να δείξετε ότι a=3.
- β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του P(x).
- γ. Να υπολογίσετε τις τιμές P(3), P(-1), P(0) και P(-4).
- 12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (3 - a)x^2 + a^2x - 4$$

με $a \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- α. Να δείξετε ότι a=2.
- β. Να βρεθούν οι τιμές P(-1), P(2) και P(0).
- 13. Δίνεται το πολυώνυμο 3ου βαθμού

$$P(x) = (a^{2}-1)x^{3} + (a^{2}-3a+2)x^{2} + (a+2)x - 8$$

με $a \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει P(1) = -1.

- α. Να δείξετε ότι a=2.
- β. Να γράψετε τους όρους και τους συντελεστές του P(x).
- γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{2P(2) - P^2(-1)}{P(0)}$$

14. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + 2x + 5$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει P(2) = -1 και P(-1) = 2.

- α. Να δείξετε ότι a=1 και $\beta=-2$.
- β. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης P(P(1)).
- 15. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-2)^8 + 3(x-1)^7 - 4(2x-1)^6 - (2-x)^5 + 1$$

Nα βρεθεί για το P(x):

- α. το άθροισμα των συντελεστών του.
- β. ο σταθερός όρος του.
- 16. Δίνεται πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει

$$P(2x-3) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6$$

- α. Να βρεθούν οι τιμές P(3), P(-1) και P(0).
- β. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι ρίζα του P(x).

Πράξεις πολυωνύμων

17. Δίνονται τα ακόλουθα πολυώνυμα

$$A(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4,$$

$$B(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x - 10 \text{ } \kappa\alpha \text{!}$$

$$\Gamma(x) = 3x - 4$$

α. Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα

i.
$$P(x) = A(x) + B(x)$$

ii.
$$Q(x) = B(x) - A(x)$$

iii.
$$R(x) = \Gamma(x) \cdot A(x)$$

- β. Ποιος είναι ο βαθμός αυτών των πολυωνύμων;
- 18. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε

$$(x-2) \cdot P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

- α. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο P(x).
- β. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $2P(-1) + P^2(0)$.
- 19. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^2 3x + 2$ και $B(x) = x^3 x^2 + 4x 3$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα
 - $\alpha. P^2(x)$
- γ . $P^2(x) xQ(x)$
- $\beta. P(x) \cdot Q(x)$
- $\delta . xP(x) Q(x)$
- 20. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

Να βρεθεί πολυώνυμο Q(x) έτσι ώστε να ισχύει $Q^2(x) = P(x)$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 3$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει P(-2) = 7 και P(1) = 10.

- α. Να δείξετε ότι a=4 και $\beta=2$.
- β. Να βρεθεί το πολυώνυμο (x-1)P(x).
- 22. Δίνεται πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει:

$$P(x + 3) = x^3 + x^2 + 3x - 5$$

- α. Να δείξετε ότι P(2) = -8.
- β. Να βρεθεί το P(x).
- 23. Δίνονται πολυώνυμα P(x), Q(x) για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - x^2 - 2x - 8$$

Να βρεθούν τα P(x) και Q(x).

Τράπεζα Θεμάτων - ΙΕΠ

24. Θέμα 2 - 21998

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-2) \cdot (x^6+1)$$

- α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x).

25. Θέμα 2 - 20640

Δίνεται το πολυώνυμο

$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$$

- α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- β. Έστω Q(x) πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
 - ί. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_1(x) = P(x) + Q(x)$$

δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

έχει ρίζα τον αριθμό 1.

26. Θέμα 2 - 15113

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ kat } Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}$$

- α. Είναι το πολυώνυμο P(x) 3^{ov} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

Ερωτήσεις θεωρίας

27.