Αλέξανδρος Πολίτης
Μαθηματικός

Σπύρος Φρόνιμος
Μαθηματικός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
ΑΠΟ ΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

•

ΕΚΔΟΣΕΙΣ _____
ΚΕΡΚΥΡΑ 2018

Επανάληψη στα μαθηματικά
για τη Γ΄ Λυκείου

Αλέξανδρος Πολίτης - Μαθηματικός
Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός
e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...
ISBN : ...
Εκδόσεις : ...

Φιλολογική Επιμέλεια :
Μαρία Πρεντουλή - e-mail : predouli@yahoo.com

Εξώφυλλο :

Αφιέρωση.

Πρόλογος

Περιεχόμενα

Πίνακας Συμβόλων

Σύμβολο	Όνομα	Περιγραφή
$\neq$	Διάφορο	Εκφράζει ότι δύο στοιχεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
$>$	Μεγαλύτερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μεγαλύτερο του $2^{ου}$).
$<$	Μικρότερο	Δηλώνει ανισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία. (Το $1^{ο}$ μικρότερο του $2^{ου}$).
$\geq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $>$.
$\leq$	Μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $=$ και $<$.
$\gtrless$	Μεγαλύτερο μικρότερο ίσο	Συνδυασμός των σχέσεων $>$ και $<$.
$\pm$	Συν Πλην	Συνδυασμός των προσήμων $+$ και $-$.
$\mp$	Πλην Συν	Έχει την ίδια σημασία με το συμβολισμό $\pm$ και χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία θα εμφανιστούν τα πρόσημα $+$, $-$.
$\Rightarrow$	Συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις, όταν η μια έχει σαν συμπέρασμα την άλλη.
$\Leftarrow$	Αντίστροφη συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με φορά αντίστροφη από το σύνδεσμο $\Rightarrow$.
$\Leftrightarrow$	Διπλή συνεπαγωγή	Συνδέει δύο μαθηματικές προτάσεις με διπλή φορά. Δηλώνει ισοδυναμία μεταξύ τους.
%	Ποσοστό τοις εκατό	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 100 ίσα κομμάτια.
‰	Ποσοστό τοις χιλίοις	Μέρος μιας ποσότητας μοιρασμένης σε 1000 ίσα κομμάτια.
$\lvert\ \rvert$	Απόλυτη τιμή	Απόσταση ενός αριθμού από το 0.
$\sqrt{\ }$	Τετραγωνική ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**

Σύμβολο	**Όνομα**	**Περιγραφή**
$\sqrt[\nu]{}$	ν-οστή ρίζα	Βλ. **Ορισμό ...**
$\in$	Ανήκει	Σύμβολο το οποίο δηλώνει ότι ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο.
$\ni$	Ανήκει	Έχει την ίδια χρησιμότητα με το σύμβολο $\in$ και χρησιμοποιείται όταν το σύνολο γράφεται πριν το στοιχείο.
$\notin$	Δεν ανήκει	Έχει την αντίθετη σημασία από το σύμβολο $\in$ και δηλώνει ότι ένα στοιχείο δεν ανήκει σε ένα σύνολο.
$\subseteq$	Υποσύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
$\cup$, $\cap$	Ένωση, Τομή	Βλ. **Ορισμό ...**
$\varnothing$	Κενό σύνολο	Βλ. **Ορισμό ...**
∞	Άπειρο	
$\perp$	Κάθετο	

Μέρος I

Άλγεβρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εξισώσεις - Ανισώσεις

1

1.1 Εξισώσεις - Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή δηλαδή κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) = 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Εξίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ισότητα η οποία περιέχει μια μεταβλητή.
- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.
- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εάν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εάν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.
- Εάν σε μια εξίσωση πολλών μεταβλητών, ορίσουμε ένα μέρος των μεταβλητών αυτών ώς κύριες μεταβλητές της εξίσωσης τότε οι επιπλέον μεταβλητές ονομάζονται **παράμετροι** ενώ η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.
- Η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

Ορισμός 1.2 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \quad , \quad P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

Ορισμός 1.3 : ΕΞΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.4 : ΑΝΙΣΩΣΗ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \quad , \quad ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.
2. Αν $a = 0$ τότε παίρνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:
   i. Αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.
   ii. Αν $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

Πίνακας 1.1: Λύσεις εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού

Θεώρημα 1.2 : ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Οι λύσεις της ανίσωσης $ax + \beta > 0$ (ή $ax + \beta < 0$) φαίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $a > 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x > -\frac{\beta}{a}$ (ή $x < -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
2. Αν $a < 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x < -\frac{\beta}{a}$ (ή $x > -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
3. Αν $a = 0$ τότε
   i. Αν $\beta > 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αδύνατη ενώ η $0x < \beta$ είναι αόριστη.
   ii. Αν $\beta < 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αόριστη ενώ η $0x < \beta$ είναι αδύνατη.
   iii. Αν $\beta = 0$ τότε οι ανισώσεις $0x > 0$ και $0x < 0$ είναι αδύνατες.

1.2 Εξισώσεις - Ανισώσεις 2ου βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.5 : ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ \ , \ \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
- Ο συντελεστής $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.
- Ο πραγματικός αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου. Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

Ορισμός 1.6 : ΑΝΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \ \ . \ \ ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.3 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση 2ου βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

i. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες είναι: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ii. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2a}$.

iii. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον πίνακα :

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 πραγματικές άνισες λύσεις	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή πραγματική λύση	$x = -\dfrac{\beta}{2a}$
$\Delta < 0$	Καμία πραγματική λύση - Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	

Πίνακας 1.2: Λύσεις εξίσωσης 2ου βαθμού

Θεώρημα 1.4 : ΤΥΠΟΙ VIETA
Έστω $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a\neq 0$ μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωση τότε το άθροισμα S και το γινομενό τους P δίνονται από τους τύπους :

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{a} \quad , \quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{a}$$

οι οποίοι ονομάζονται τύποι του Vieta.

Θεώρημα 1.5 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για τη μετατροπή ενός τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a\neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta>0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)(x-x_2)$$

   όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta=0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2+\beta x+\gamma=a\left(x-x_0\right)^2=a\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2$$

   όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta<0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Εναλλακτικά όμως μπορεί να γραφεί :

$$ax^2+\beta x+\gamma=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

Θεώρημα 1.6 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για το πρόσημο των τιμών ενός τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma$ ισχύουν οι παρακάτω κανόνες.

1. Αν η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta>0$) τότε το τριώνυμο είναι

   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται έξω από τις ρίζες x_1, x_2.
   ii. ετερόσημο του a στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες.
   iii. ίσο με το μηδέν στις ρίζες.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$		Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

Πίνακας 1.3: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta>0$

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta=0$) τότε το τριώνυμο είναι

   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της ρίζας x_0.
   ii. ίσο με το μηδέν στη ρίζα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$		Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

Πίνακας 1.4: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta=0$

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του a

Πίνακας 1.5: Πρόσημα τριωνύμου με $\Delta < 0$

1.3 Εξισώσεις - Ανισώσεις $3^{ου+}$ βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.7 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΑΝΙΣΩΣΗ
Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_\kappa \in \mathbb{R} \quad , \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$. **Ρίζα** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζεται η ρίζα του πολυωνύμου της εξίσωσης. Ομοίως, μια πολυωνυμική ανίσωση θα είναι της μορφής:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \gtrless 0$$

1.4 Κλασματικές - Άρρητες εξισώσεις και ανισώσεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.8 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΑΝΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x), R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$. Παρόμοια, μια κλασματική ανίσωση θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) \gtrless 0$$

Ορισμός 1.9 : ΑΡΡΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΑΝΙΣΩΣΗ
Άρρητη ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια άρρητη αλγεβρική παράσταση. Θα είναι

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) = 0$$

όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) \geq 0$. Όμοια, μια άρρητη ανίσωση θα είναι:

$$\sqrt[\nu]{P(x)} + Q(x) \gtrless 0$$

1.5 Εξισώσεις - Ανισώσεις διαφόρων ειδών

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.10 : ΔΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διώνυμη εξίσωση ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση η οποία περιέχει πολυώνυμο με 2 όρους. Θα είναι της μορφής :

$$x^\nu = a \qquad \text{ή} \qquad x^\nu = a^\nu$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.11 : ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διτετράγωνη ονομάζεται κάθε εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού της μορφής :

$$ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ η οποία έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x. Οι εκθέτες του τριωνύμου είναι διπλάσιοι απ' αυτούς της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

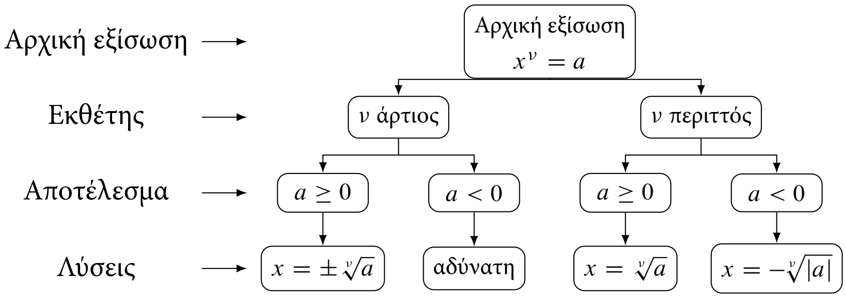
Θεώρημα 1.7 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ
Οι βασικές μορφές των εξισώσεων με απόλυτες τιμές είναι οι ακόλουθες :

1. Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :
   i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις : $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
   ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
2. Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει : $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$
3. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :
   i. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x) \geq 0$.
   ii. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$.

Θεώρημα 1.8 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$
Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το είδος του εκθέτη ν και του πραγματικού αριθμού a.

1. Για ν άρτιο έχουμε :
   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις αντίθετες : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
2. Για ν περιττό έχουμε :
   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 θετική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 αρνητική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|}$

Οι λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε :



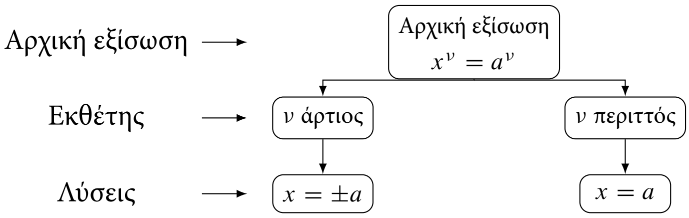
Θεώρημα 1.9 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a^\nu$

Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a^\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

i. Αν ν άρτιος τότε η εξίσωση έχει δύο αντίθετες λύσεις : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = \pm a$

ii. Αν ν περιττός τότε η εξίσωση έχει μια λύση : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = a$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών φαίνονται στο αντίστοιχο διάγραμμα :



ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέθοδος 1.1 : Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Βήματα

Μέρος II

Γεωμετρία

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων