Λύσεις διαγωνίσματος

ΘΕΜΑ Α

Α.1 α. Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών.

β. $\varDelta = \beta^2 - 4a\gamma$, $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2a}$

γ. Η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος.

δ. Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά γωνίες ίσες, μια προς μια.

Α.2 α. Σωστό

β. Λάθος. Πρέπει τα τρίγωνα να είναι ίσα για να συμβεί αυτό.

γ. Σωστό

δ. Λάθος. Μπορεί να έχει μια λύση ή να είναι αδύνατη.

ε. Λάθος. Μόνο η διάμεσος που καταλήγει στη βάση είναι και διχοτόμος και ύψος.

Α.3 α. ii. $4x^2 - 12x + 9$

β. i. έχει δύο λύσεις

γ. iii. $(2x+5)(2x-5)$

δ. iii. τις περιεχόμενες γωνίες ίσες

ε. i. $\varepsilon\varphi x = \frac{8}{15}$

Α.4 α. γινόμενο

β. δύο γωνίες

γ. αντικατάστασης , αντίθετων συντελεστών

δ. ισαπέχει

ε. $\varDelta < 0$

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Κάνοντας τις πράξεις στο 1ο μέλος θα καταλήξουμε στο 2ο.

$$\begin{aligned}
&(x+y)^2 - (x-y)^2 = \\
&= x^2 + 2xy + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) = \\
&= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy
\end{aligned}$$

Β.2 Η παράσταση A έχει την ίδια μορφή με το πρώτο μέλος της ταυτότητας που αποδείξαμε, με $x = 20$ και $y = \frac{1}{80}$ άρα δίχως πράξεις γράφουμε το δεύτερο μέλος της βάζοντας όπου x και y τους αριθμούς αυτούς.

$$A = \left(20 + \frac{1}{80}\right)^2 - \left(20 - \frac{1}{80}\right)^2 = 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{80}$$

Β.3 α. Βγάζοντας κοινό παράγοντα από όλους τους όρους της παράστασης έχουμε

$$A = 12x^3y^4 - 16x^4y^2z + 18x^3y^3z^2 = 2x^3y^2\left(6y^2 - 8xz + 9yz^2\right)$$

β. Η παράσταση θα παραγοντοποιηθεί με ομαδοποίηση άρα

$$\begin{aligned}
B &= x^3 - 4x^2 + 5x - 20 = \\
&= x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)\left(x^2+5\right)
\end{aligned}$$

γ. Η παράσταση είναι διαφορά τετραγώνων με $a = x - 2$ και $\beta = 3$ άρα

$$\varGamma = (x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = (x-2+3)(x-2-3) = (x+1)(x-5)$$

δ. Η παράσταση αποτελεί ανάπτυγμα ταυτότητας άρα

$$\varDelta = 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = (2x-1)^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 α. Για την εξίσωση $x^2 - 8x + 15 = 0$ έχουμε $a = 1, \beta = -8$ και $\gamma = 15$ άρα

$$\varDelta = \beta^2 - 4a\gamma = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις που είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

άρα έχουμε

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

β. Για την εξίσωση $(x-1)^2+3x-5 = 7x-12$ αρχικά αναπτύσσουμε την ταυτότητα, έπειτα μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και ύστερα από αναγωγή ομοίων όρων προκύπτει απλή εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Είναι λοιπόν

$$\begin{gathered}(x-1)^2 + 3x - 5 = 7x - 12 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + 3x - 5 = 7x - 12 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + 3x - 5 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \\ x^2 - 6x + 8 = 0\end{gathered}$$

Άρα σύμφωνα με τα γνωστά

$$\varDelta = \beta^2 - 4a\gamma = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$$

Η εξίσωση λοιπόν έχει δύο λύσεις που είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

άρα έχουμε

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ και } x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Γ.2 Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών θα έχουμε

$$\left\{\begin{array}{rl|l} 3x + 2y = 7 & & \times 1 \\ x - 4y = -7 & & \times(-3) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{l} 3x + \ \ 2y = 7 \\ -3x + 12y = 21 \end{array}\right. \\ \hline 14y = 28 \end{array} \Rightarrow y = 2$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$x - 4\cdot 2 = -7 \Rightarrow x - 8 = -7 \Rightarrow x = 8 - 7 \Rightarrow x = 1$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι $(x, y) = (1, 2)$.

Γ.3 i. Από τη σχέση $ημ^2 x + συν^2 x = 1$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} ημ^2 x + συν^2 x = 1 \Rightarrow \\ \left(\frac{5}{13}\right)^2 + συν^2 x = 1 \Rightarrow \\ \frac{25}{169} + συν^2 x = 1 \Rightarrow \\ συν^2 x = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \\ συν^2 x = \frac{144}{169} \Rightarrow \\ συν x = \pm\frac{12}{13} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η γωνία x είναι αμβλεία και έτσι έχει αρνητικό συνημίτονο. Επομένως θα είναι $συν x = -\frac{12}{13}$.

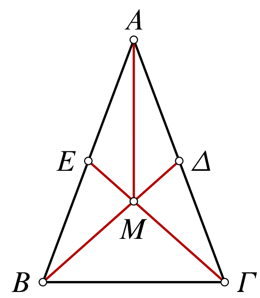
ii. Από τη σχέση $εφ x = \frac{ημ x}{συν x}$ έχουμε

$$εφ x = \frac{ημ x}{συν x} = εφ x = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5 \cdot 13}{12 \cdot 13} = -\frac{5}{12}$$

Γ.4 Αναπτύσσοντας τις ταυτότητες θα έχουμε

$$\begin{aligned} &(ημ x + συν x)^2 + (ημ x - συν x)^2 = \\ &= ημ^2 x + 2ημ x συν x + συν^2 x + ημ^2 x - 2ημ x συν x + συν^2 x = \\ &= 2ημ^2 x + 2συν^2 x = \\ &= 2\left(ημ^2 x + συν^2 x\right) = 2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ.1 α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$. Έχουμε ότι

i. $AB = AΓ$ διότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές.

ii. Επίσης

$$AB = AΓ \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AΓ}{2} \Rightarrow AΔ = AE$$

iii. Τέλος η γωνία A είναι κοινή γωνία των δύο τριγώνων .

Από τις σχέσεις i.,ii. και iii. παίρνουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το 1^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων. Κατά συνέπεια θα ισχύει $BΔ = ΓE$.

β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABM και $AΓM$. Έχουμε ότι

i. $AB = AΓ$ διότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές.

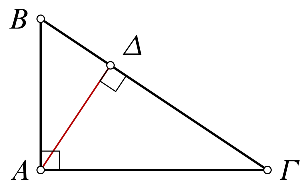
ii. AM κοινή πλευρά

iii. και $BM = ΓM$ όπως γνωρίζουμε από την υπόθεση.

Άρα από τις σχέσεις i.,ii. και iii. παίρνουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το 3^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων. Έτσι θα είναι

$$B\hat{A}M = Γ\hat{A}M \Rightarrow AM \text{ διχοτόμος της γωνίας } \hat{A}$$

Δ.2 α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια διοτι



i. $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ διότι είναι ορθογώνια και
ii. η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι κοινή γωνία

β. Αφού, όπως δείξαμε προηγουμένως, τα τρίγωνα είναι όμοια τότε οι πλευρές τους θα είναι ανάλογες δηλαδή

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$$

Από τα δύο πρώτα κλάσματα έχουμε

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{20}{\Gamma\Delta} \Rightarrow$$
$$15\Gamma\Delta = 240 \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{240}{15} = 16$$

Ομοίως από το $1^{\text{ο}}$ και το $3^{\text{ο}}$ κλάσμα παίρνουμε

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{B\Gamma}{20} \Rightarrow$$
$$12B\Gamma = 300 \Rightarrow B\Gamma = \frac{300}{12} = 25$$

Άρα $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta = 25 - 16 = 9$.