

17 Μαΐου 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΕΠΑΛ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

ΘΕΜΑ Α'

Α'.1 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και c πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = cf'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 10**

Α'.2 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

Α'.3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- i. Η μέση τιμή \bar{x} σε πλήθος παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n δίνεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$.
- ii. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και ορίζεται η σύνθεση $f(g(x))$ τότε $[f(g(x))]' = f'(g(x))$.
- iii. Ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής του είναι κάτω από 10%.
- iv. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων σχεδιάζεται για ποιοτικές μεταβλητές.
- v. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της τότε δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β'

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4ax^2 - 16x + 64a}{2x - 8} & , x > 4 \\ a - 1 & , x = 4 \end{cases}$$

Β'.1 Να αποδείξετε ότι $a = 1$. **Μονάδες 9**

Β'.2 Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f . **Μονάδες 9**

Β'.3 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2f(x) + 6f'(x)}{x + 8}$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ'

Θεωρούμε ένα δείγμα n συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
- Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36° .
- $\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18}$ όπου N_1, N_2, N_3, N_4 είναι οι αθροιστικές συχνότητες της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα.

Γ'.1 Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4.

Μονάδες 4

Γ'.2 Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$
$[,)$		
$[,)$		
$[,)$		
$[,)$		
$[,)$		
Σύνολο		

Μονάδες 10

Για τα ερωτήματα Γ3 και Γ4, δίνεται ότι $f_1\% = 20$, $f_2\% = 25$, $f_3\% = 30$, $f_4\% = 15$ και $f_5\% = 10$.

Γ'.3 Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

Μονάδες 5

Γ'.4 Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

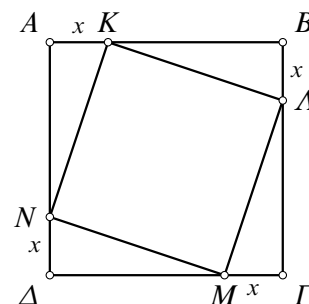
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ'

Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ πλευράς 4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία $K, Λ, Μ$ και N των πλευρών $AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AK = BL = ΓΜ = ΔN = x$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Δ'.1 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $KΛΜΝ$, ως συνάρτηση του x , είναι

$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0, 4) \quad \text{Μονάδες 7}$$



Δ'.2 Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 5

Δ'.3 Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E(x_i)$, $x_i \in (0, 4)$, $i = 1, 2, \dots, 19$ έτσι ώστε :

- Τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
- Η μέση τιμή των x_i και η διάμεσος τους είναι ίσες με 2.
- Η μέση τιμή των y_i είναι ίση με 8,02.

i. Να βρεθεί η μέση τιμή των x_i^2 .

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s_x και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right]$$

Μονάδες 7