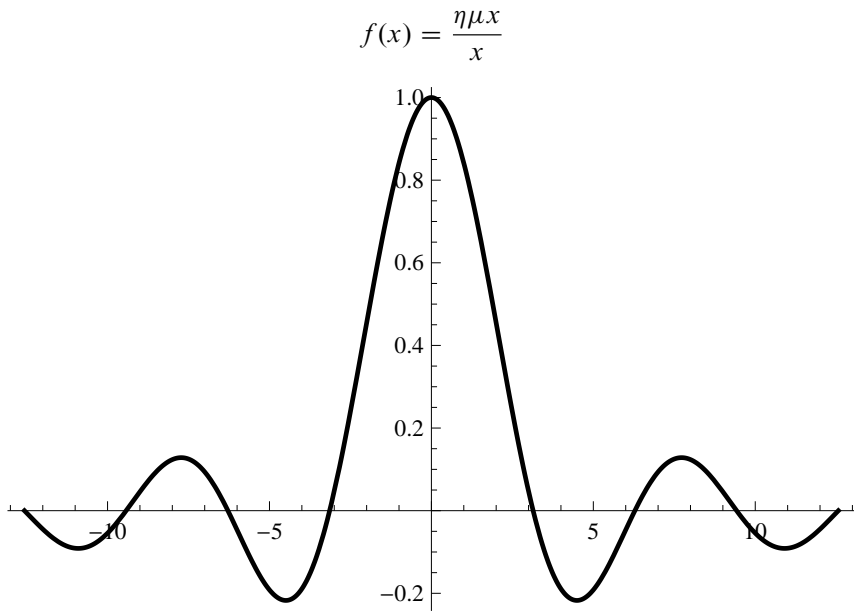


Σπύρος Φρόνιμος  
Μαθηματικός

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ -----  
ΚΕΡΚΥΡΑ 2015

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Γυμνασίου - Λυκείου**

**Σπύρος Φρόνιμος - Μαθηματικός**

e-mail : spyrosfronimos@gmail.com

Σελίδες : ...

ISBN : ...

Εκδόσεις : ...

© Copyright 2015

Φιλολογική Επιμέλεια :

**Μαρία Πρεντουλή** - e-mail : predouli@yahoo.com

Επιστημονική Επιμέλεια :

**Ιωάννα Γραμμένου** - - e-mail : predouli@yahoo.com

**Σπύρος Φρόνιμος**

Εξώφυλλο :

**Δημήτρης Πρεντουλής**

Πνευματικά Δικαιώματα : ...

*Στους γονείς μου.*



# Πρόλογος

Το βιβλίο περιέχει συγκεντρωμένη όλη τη θεωρία των μαθηματικών όλων των τάξεων του γυμνασίου και του λυκείου γραμμένη αναλυτικά και κατανοητά.

Ειδικότερα ο αναγνώστης θα βρει

- Ορισμούς
- Θεωρήματα
- Τυπολόγιο
- Μεθοδολογία

Σκοπό έχει να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για μικρούς ή μεγάλους μαθητές όπου μπορούν να έχουν όλη τη θεωρία της χρονιάς τους συγκεντρωμένη, χρήσιμη για επανάληψη και διαγωνίσματα, αλλά και να μπορούν εύκολα να καλύψουν τυχόν κενά από προηγούμενες τάξεις.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν.



# Περιεχόμενα

## ΜΕΡΟΣ 1 ΑΛΓΕΒΡΑ

### Κεφάλαιο 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	ΣΕΛΙΔΑ
1.1 Πράξεις Πραγματικών Αριθμών	3
1.2 Δυνάμεις	6
1.3 Τετραγωνική Ρίζα	9

### Κεφάλαιο 2

ΜΟΝΩΝΤΜΑ	ΣΕΛΙΔΑ
----------	--------

### Κεφάλαιο 3

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ	ΣΕΛΙΔΑ
3.1 Βασικές Έννοιες	13
3.2 Πράξεις Πολυωνύμων	13

### Κεφάλαιο 4

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	ΣΕΛΙΔΑ
4.1 Άθροισμα και Διαφορά στο Τετράγωνο	15
4.2 Άθροισμα στον Κύβο	17
4.3 Διαφορά στον Κύβο	17
4.4 Γινόμενο Αθροίσματος επί Διαφοράς	17
4.5 Άθροισμα Κύβων	17
4.6 Διαφορά Κύβων	17

## Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ	ΣΕΛΙΔΑ
5.1 Κοινός Παράγοντας	19
5.2 Ομαδοποίηση	19
5.3 Διαφορά Τετραγώνων	19
5.4 Άθροισμα - Διαφορά Κύβων	19
5.5 Ανάπτυγμα Τετραγώνου	19

## Κεφάλαιο 6

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	ΣΕΛΙΔΑ
---------------------	--------

## Κεφάλαιο 7

Ε.Κ.Π. ΚΑΙ Μ.Κ.Δ.	
ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ	ΣΕΛΙΔΑ

## Κεφάλαιο 8

ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	ΣΕΛΙΔΑ
8.1 Περιορισμοί	25
8.2 Απλοποίηση	25

## Κεφάλαιο 9

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ	ΣΕΛΙΔΑ
9.1 Πρόσθεση - Αφαίρεση	27
9.2 Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση	27

## Κεφάλαιο 10

ΕΙΣΩΣΕΙΣ 1 <sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ	ΣΕΛΙΔΑ
---------------------------------	--------

## Κεφάλαιο 11

ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2 <sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ	ΣΕΛΙΔΑ
11.1 Λύση Εξισώσεων	31
11.2 Παραγοντοποίηση Τριωνύμου	31

## Κεφάλαιο 12

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	
ΕΙΣΩΣΕΩΝ 2 <sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ	ΣΕΛΙΔΑ



## Κεφάλαιο 13

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ \_\_\_\_\_ ΣΕΛΙΔΑ

## Κεφάλαιο 14

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ \_\_\_\_\_ ΣΕΛΙΔΑ

14.1 Ανισωτικές Σχέσεις 37

14.2 Λύση Ανισώσεων 37



**Μέρος 1**

**ΑΛΓΕΒΡΑ**



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# 1

## ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### 1.1 Πράξεις Πραγματικών Αριθμών

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1.1** Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

i.  $2 \cdot 32 + 3(48 - 7 \cdot 5) + 2(144 : 9 - 10)$

ii.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}\right) + \frac{14}{8} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)$

#### ΛΥΣΗ

i.  $2 \cdot 32 + 3(48 - 7 \cdot 5) + 2(144 : 9 - 10)$

Από τη σειρά των πράξεων γνωρίζουμε ότι προτεραιότητα έχουν οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις και ύστερα προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Οι πράξεις πραγματοποιούνται πρώτα μέσα στις παρενθέσεις και μετά απ' έξω με τη δεδομένη σειρά. Οπότε θα έχουμε :

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 32 + 3(48 - 7 \cdot 5) + 2(144 : 9 - 10) = \\ & 2 \cdot 32 + 3(48 - 35) + 2(16 - 10) = \\ & 2 \cdot 32 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 6 = \\ & 64 + 39 + 12 = 115 \end{aligned}$$

ii.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}\right) + \frac{14}{8} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)$

Ομοίως θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}\right) + \frac{14}{8} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{9}{12} + \frac{5}{12}\right) + \frac{14}{8} : \left(\frac{8}{12} - \frac{15}{12}\right) = \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} - \left(-\frac{4}{12}\right) + \frac{14}{8} : \left(-\frac{7}{12}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} + \frac{4}{12} - \frac{14}{8} : \frac{7}{12} = \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} + \frac{4}{12} - \frac{14}{8} \cdot \frac{12}{7} &= \frac{7}{10} + \frac{4}{12} - \frac{168}{56} \stackrel{\text{απλοποίηση}}{=} \frac{7}{10} + \frac{1}{3} - 3 = \\ \frac{21}{30} + \frac{10}{30} - \frac{90}{30} &= -\frac{59}{30} \end{aligned}$$

## 1.2 Αν είναι γνωστό ότι $a - 2\beta = 3$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 3(a + 2) - 4\beta - 2(2a - 3\beta + 5)$$

### ΛΥΣΗ

Για να υπολογιστεί η τιμή της παραπάνω παράστασης θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή των άγνωστων αριθμών  $a, \beta$ .

Δεν μας είναι γνωστό όμως ποιά είναι η τιμή κάθε αριθμού ξεχωριστά παρά μας δίνεται η σχέση  $a - 2\beta = 3$  μεταξύ των δύο αριθμών.

Αυτό σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε την παράσταση  $A$  θα πρέπει να εμφανίσουμε ύστερα από πράξεις την προηγούμενη σχέση. Έχουμε :

$$\begin{aligned} A &= 3(a + 2) - 4\beta - 2(2a - 3\beta + 5) = 3a + 6 - 4\beta - 4a + 6\beta - 10 = \\ &= -a + 2\beta - 4 = -(a - 2\beta) - 4 \stackrel{a-2\beta=3}{=} -3 - 4 = -7 \end{aligned}$$

## 1.3 Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$2x + 4(1 - y) + 32 : 4 - 2(3 - x) + 3 \cdot 4 - 2 = 4(x - y + 4)$$

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.1 Αποδεικτικές Ασκήσεις

Στις αποδεικτικές ασκήσεις εργαζόμαστε με τους εξής δύο τρόπους :

- Επιλέγουμε το μέλος της σχέσης στο οποίο γίνονται οι πιο πολλές πράξεις και διαδοχικά καταλήγουμε στο άλλο μέλος.
- Κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης και καταλήγουμε σε μια ισοδύναμη σχέση που αληθεύει.

**ΛΥΣΗ**

Για τη συγκεκριμένη άσκηση θα κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας. Έχουμε λοιπόν :

$$2x + 4(1 - y) + 32 : 4 - 2(3 - x) + 3 \cdot 4 - 2 = 4(x - y + 4) \Leftrightarrow$$

$$2x + 4 - 4y + 32 : 4 - 6 + 2x + 3 \cdot 4 - 2 = 4x - 4y + 16 \Leftrightarrow$$

$$2x + 4 - 4y + 8 - 6 + 2x + 12 - 2 = 4x - 4y + 16 \Leftrightarrow$$

$$2x + 4 - 4y + 8 - 6 + 2x + 12 - 2 - 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0 \quad \text{όπου ισχύει } \checkmark$$

**ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****■ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ**

**1.1** Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

i.  $2(4 \cdot 5 + 144 : 16) - 3(100 : 10 - 3 \cdot 4)$       v.  $3 \cdot 5 + 7 \cdot 8 - 5 \cdot 4$

ii.  $4(25 - 4 \cdot 6) + 120 : (9 \cdot 5 - 3 \cdot 10)$       vi.  $3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot 6$

iii.  $(4 \cdot 5 + 2 \cdot 12) : (7 \cdot 8 - 9 \cdot 5)$       vii.  $144 : 16 : 3 + 120 : 8 : 5 + 21 : 3 : 7$

iv.  $(150 : 25 + 2)(81 - 8 \cdot 9) - 5 \cdot 10$       viii.  $3[4(120 : 8 - 7) - 2(4 \cdot 5 + 3)]$

**1.2** Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

i.  $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \left(-\frac{7}{15}\right) + \frac{2}{15}$       v.  $\left(3 - \frac{4}{5} : \frac{3}{15}\right) \left(-\frac{5}{8} : \frac{3}{4} + 1\right)$

ii.  $\frac{3}{2} \left(2 - \frac{4}{3}\right) + 4 : \left(\frac{9}{5} - 1\right)$       vi.  $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{8} \cdot \frac{5}{9} - \frac{15}{14} \cdot \frac{7}{5}$

iii.  $\frac{3}{4} \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) + \frac{20}{12} : \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{4}\right)$       vii.  $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} : \frac{4}{10} + \frac{4}{3} : \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} - 2 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{9}$

iv.  $\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{12}\right) : \left(\frac{4}{12} + \frac{7}{6}\right)$       viii.  $\frac{2}{5} \left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} + 1\right)$

**1.3** Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

i.  $\frac{1 + \frac{3}{2}}{4}$

iii.  $\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$

v.  $\frac{3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{2}{5}}$

ii.  $\frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2}$

iv.  $\frac{\frac{4}{5} - 1 + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$

vi.  $\frac{\frac{7}{2} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{10}}$

**1.4** Να βρεθεί η τιμή της παρακάτω παράστασης.

$$A = a + 3(2 - \beta) + 2(a - 4)$$

i. για  $a = 2$  και  $\beta = -1$       ii. για  $a = -3$  και  $\beta = 4$       iii. για  $a - b = 2$

#### ■ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.5** Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.

i.  $3(4 \cdot 7 - 85 : 5) + 140 : 20 - (90 : 15 + 4) = 30$

ii.  $-\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(7 - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{17}{10}$

iii.  $3(2 - a) + 4(\beta - 1) + 2(a - 2\beta) = 2 - a$

## 1.6

---

## 1.2 Δυνάμεις

---

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1.4** Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις.

i.  $3^2 \cdot 3^4$

iii.  $(4 \cdot x)^2$

v.  $(3^2)^3$

vii.  $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

ii.  $5^7 : 5^4$

iv.  $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

vi.  $4^{-3}$

viii.  $5^7 \cdot 5^{-7}$



**ΛΥΣΗ**

Εφαρμόζοντας τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε :

- |  |   |
|--|---|
| i. $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$                           | v. $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$  |
| ii. $5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3 = 125$                              | vi. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$   |
| iii. $(4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$                                    | vii. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$ |
| iv. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$ | viii. $5^7 \cdot 5^{-7} = 5^{7+(-7)} = 5^0 = 1$   |

**1.5 Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις.**

- |                          |   |   |
|--------------------------|---|---|
| i. $7^2 \cdot 7^3 : 7^4$ | v. $7^4 \frac{343}{7^2}$                    | ix. $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^8$ |
| ii. $2^5 \cdot 5^5$      | vi. $3^{20} : 9^7$                          | x. $\frac{21^5}{7^5}$   |
| iii. $4^3 \cdot 2^6$     | vii. $\frac{2^8 \cdot 5^4}{4^4 \cdot 25^2}$ | xi. $(3^2)^{-3} \cdot 9^3$  |
| iv. $243 : 3^2$          | viii. $(-2)^{10} \cdot 2^4$                 |   |

**ΛΥΣΗ**

- i. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι έχουμε γινόμενο και πηλίκο δυνάμεων που έχουν κοινή βάση.

Οπότε σύμφωνα με τις αντίστοιχες ιδιότητες θα έχουμε :

$$7^2 \cdot 7^3 : 7^4 = \frac{7^2 \cdot 7^3}{7^4} = \frac{7^{2+3}}{7^4} = \frac{7^5}{7^4} = 7^{5-4} = 7^1 = 7$$

Κάτι που βοηθάει στο να κατανοούμε και να παρατηρούμε μια παράσταση καλύτερα είναι να μετατρέπουμε το συμβολισμό της διαίρεσης από “ : ” σε μορφή κλάσματος.

- ii. Οι δυνάμεις της παράστασης  $2^5 \cdot 5^5$  παρατηρούμε ότι έχουν κοινό εκθέτη οπότε :

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100.000$$

- iii. Οι δυνάμεις της συγκεκριμένης παράστασης δεν παρουσιάζουν κάτι κοινό επομένως, προκειμένου να την απλοποιήσουμε θα εξετάσουμε μήπως υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα σε βάσεις ή εκθέτες.

Έχουμε λοιπόν :

$$4^3 \cdot 2^6 = (2^2)^3 \cdot 4^3 = 2^6 \cdot 2^6 = 2^{6+6} = 2^{12}$$

- iv. Για να απλοποιηθεί η παράσταση  $243 : 3^2$  με τη χρήση των ιδιοτήτων των δυνάμεων θα πρέπει να γράψουμε το 243 ως δύναμη του 3.

$$243 : 3^2 = 3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

- v. Ομοίως θα έχουμε

$$7^4 \frac{343}{7^2} = 7^4 \frac{7^3}{7^2} = 7^4 \cdot 7 = 7^{4+1} = 7^5$$

- vi. Οι βάση της  $2^{15}$  δύναμης είναι πολλαπλάσια της  $1^{15}$  οπότε :

$$3^{20} : 9^7 = 3^{20} : (3^2)^7 = 3^{20} : 3^{14} = 3^{20-14} = 3^6$$

vii. 
$$\frac{2^8 \cdot 5^4}{4^4 \cdot 25^2} = \frac{2^8 \cdot 5^4}{(2^2)^4 \cdot (5^2)^2} = \frac{2^8 \cdot 5^4}{2^8 \cdot 5^4} = 1$$

- viii. Για την παράσταση  $(-2)^{10} \cdot 2^4$  θα εκμεταλευτούμε το γεγονός ότι ένας αρνητικός αριθμός όταν υψωθεί σε **άρτιο** εκθέτη, δίνει θετικό αποτέλεσμα. Άρα :

$$(-2)^{10} \cdot 2^4 \stackrel{(-2)^{10}=2^{10}}{=} 2^{10} \cdot 2^4 = 2^{10+4} = 2^{14}$$

ix. 
$$\left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^8 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^8 = 1^8 = 1$$

x. 
$$\frac{21^5}{7^5} = \left(\frac{21}{7}\right)^5 = 3^5$$

xi. 
$$(3^2)^{-3} \cdot 9^3 = 3^{-6} \cdot (3^2)^3 = 3^{-6} \cdot 3^6 = 3^{-6+6} = 3^1 = 3$$

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.2 Απλοποίηση Παραστάσεων με Δυνάμεις

Σε παραστάσεις όπως οι προηγούμενες, όπου μας ζητείται να απλοποιηθούν, εξετάζουμε αν υπάρχουν κοινές βάσεις ή κοινοί εκθέτες και εφαρμόζουμε την κατάλληλη ιδιότητα.

Εαν δεν παρουσιάζονται ούτε κοινοί εκθέτες ούτε κοινές βάσεις, τότε :

- Εξετάζουμε αν είτε οι βάσεις είτε οι εκθέτες είναι πολλαπλάσια του ίδιου αριθμού και εμφανίζουμε το κοινό αυτό πολλαπλάσιο.

- Μετατρέπουμε όσους αριθμούς μπορούν να μετατραπούν, σε δύναμη ώστε να προκύψει βάση ή εκθέτης κοινός με τις υπόλοιπες δυνάμεις.

### 1.6 Να υπολογιστούν οι παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις.

i.  $3^2(144 : 4^2 - 4^3 : 16) - (7^2 + 56 : 2^3 - 10)$

ii.  $\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{2^3}{4^2} - \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

#### ΛΥΣΗ

Ακολουθώντας τη σειρά των πράξεων εκτελούμε τις πράξεις πρώτα μέσα στις παρενθέσεις και ύστερα απ' έξω.

i.  $3^2(144 : 4^2 - 4^3 : 16) - (7^2 + 56 : 2^3 - 10) =$   
 $3^2(144 : 16 - 64 : 16) - (49 + 56 : 8 - 10) =$   
 $3^2(9 - 4) - (49 + 7 - 10) = 3^2 \cdot 5 - 46 =$   
 $9 \cdot 5 - 46 = 45 - 46 = -1$

ii.  $\left(\frac{3}{2}\right)^3$

### 1.7 Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις.

i.  $(x^2 \cdot y^3)^3 \cdot x^4 : y^2$

ii.  $[x^3 \cdot y^4 \cdot (x^2 y)^2]^3 : (xy^3)^2$

#### ΛΥΣΗ

Στις παραπάνω παραστάσεις μπορούν να εφαρμοστούν πολλές από τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Η σειρά με την οποία θα τις εφαρμόσουμε μας δίνει το αποτέλεσμα σε λίγο ή περισσότερο χρόνο κάθε φορά.

i.  $(x^2 \cdot y^3)^3 \cdot x^4 : y^2 = (x^2)^3 \cdot (y^3)^3 \cdot x^4 : y^2 = x^6 \cdot y^9 \cdot x^4 : y^2 = x^{6+4} \cdot y^{9-2} = x^{10} \cdot y^7$

ii. Ομοίως θα έχουμε :

$$[x^3 \cdot y^4 \cdot (x^2 y)^2]^3 : (xy^3)^2 = \frac{[x^3 \cdot y^4 \cdot (x^2 y)^2]^3}{(xy^3)^2} = \frac{(x^3)^3 \cdot (y^4)^3 \cdot (x^2 y)^{2 \cdot 3}}{x^2 (y^3)^2} =$$

$$\frac{x^9 \cdot y^{12} \cdot x^{12} \cdot y^6}{x^2 \cdot y^6} = \frac{x^{21} \cdot y^{18}}{x^2 \cdot y^6} = x^{21-2} \cdot y^{18-6} = x^{19} \cdot y^{12}$$

## 1.3 Τετραγωνική Ρίζα



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

## ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

---

### 3.1 Βασικές Έννοιες

---

### 3.2 Πράξεις Πολυωνύμων

---





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

# 4

### 4.1 Άθροισμα και Διαφορά στο Τετράγωνο

#### ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**4.1** Να βρεθούν τα αναπτύγματα.

i.  $(x + 2)^2$

vi.  $(x^3 + 3x)^2$

ix.  $(\sqrt{x} + 3)^2$

ii.  $(2x + 1)^2$

vii.  $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2$

x.  $(y + \sqrt{3})^2$

iii.  $(3x + 2y)^2$

xi.  $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2$

iv.  $(4x + 5y)^2$

viii.  $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)^2$

xii.  $(x^2 + x^4)^2$

v.  $(x^2 + 3)^2$

**4.2** Να βρεθούν τα αναπτύγματα.

i.  $(x - 1)^2$

vi.  $(2x^2 - x^3)^2$

ix.  $(\sqrt{x} - 2)^2$

ii.  $(3x - 2)^2$

vii.  $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

x.  $(z - \sqrt{2})^2$

iii.  $(2x - y)^2$

xi.  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

iv.  $(3x - 7y)^2$

viii.  $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^2$

xii.  $(z^3 - z^4)^2$

v.  $(x^2 - x)^2$

**4.3** Να βρεθούν τα αναπτύγματα.

- |                      |                                |  |
|----------------------|--------------------------------|--|
| i. $(xy + 2)^2$      | vi. $(x^2y + xy^2)^2$          | x. $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^2$              |
| ii. $(x + xy)^2$     | vii. $(x\sqrt{y} + y)^2$       | xi. $\left(\frac{1}{2x} + 2\sqrt{x}\right)^2$                  |
| iii. $(2x + x^2y)^2$ | viii. $(\sqrt{xy} + 1)^2$      | xii. $\left(\frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)^2$ |
| iv. $(xy^2 + 3y)^2$  | ix. $(\sqrt{x} + x\sqrt{y})^2$ |  |
| v. $(xy + yz)^2$     |                                |  |

**4.4** Να βρεθούν τα αναπτύγματα.

- |                      |                                |   |
|----------------------|--------------------------------|---|
| i. $(x - 2xy)^2$     | vi. $(x^2y - xy^2)^2$          | x. $\left(\frac{2}{y} - \frac{y^2}{2}\right)^2$               |
| ii. $(2x - x^2y)^2$  | vii. $(x\sqrt{y} - y)^2$       | xi. $\left(\frac{1}{4x} - 4\sqrt{x}\right)^2$                 |
| iii. $(x^2 - 3xy)^2$ | viii. $(\sqrt{xy} - 4)^2$      | xii. $\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)^2$ |
| iv. $(xy^2 - y)^2$   | ix. $(\sqrt{x} - x\sqrt{y})^2$ |   |
| v. $(xy - yz)^2$     |                                |   |

**4.5** Να βρεθούν τα αναπτύγματα.

- |  |  |
|--|--|
| i. $(x + y + 1)^2$                       | v. $(x - y + 2)^2$                           |
| ii. $(2x + 3y + 4)^2$                    | vi. $(3x + 5y - 1)^2$                        |
| iii. $(x^2 + y^3 + z^4)^2$               | vii. $(x^2 - y^3 - z^4)^2$                   |
| iv. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$ | viii. $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ |

**4.6** Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις.

- |                                 |   |   |
|---------------------------------|---|---|
| i. $(\sqrt{2} + 1)^2$           | v. $\left(\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$                           | viii. $(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2$                     |
| ii. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$   | vi. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}\right)^2$ | ix. $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$                       |
| iii. $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2$ | vii. $(\sqrt{3} - 1)^2$   | x. $(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})^2$                      |
| iv. $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2$ |   | xi. $\left(\sqrt{18} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ |

**4.7** Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες.

i.  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

iii.  $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$

ii.  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

iv.  $(x + y)^2 - 2(\sqrt{xy})^2 = (x - y)^2$

v.  $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xyz \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

---

## 4.2 Άθροισμα στον Κύβο

---

---

## 4.3 Διαφορά στον Κύβο

---

---

## 4.4 Γινόμενο Αθροίσματος επί Διαφοράς

---

---

## 4.5 Άθροισμα Κύβων

---

---

## 4.6 Διαφορά Κύβων

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

---

5

---

5.1 Κοινός Παράγοντας

---

5.2 Ομαδοποίηση

---

5.3 Διαφορά Τετραγώνων

---

5.4 Άθροισμα - Διαφορά Κύβων

---

5.5 Ανάπτυγμα Τετραγώνου

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

6

## ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

---





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

7

Ε.Κ.Π. ΚΑΙ Μ.Κ.Δ.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

8

## ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

---

### 8.1 Περιορισμοί

---

---

### 8.2 Απλοποίηση

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

9

## ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

---

---

### 9.1 Πρόσθεση - Αφαίρεση

---

---

### 9.2 Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

10

ΕΙΣΩΣΕΙΣ 1<sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ

---





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# 11

## ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2<sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ

---

---

### 11.1 Λύση Εξισώσεων

---

---

### 11.2 Παραγοντοποίηση Τριωνύμου

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

12

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΩΣΕΩΝ 2<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

13

## ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# 14

## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Ι<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ

---

---

### 14.1 Ανισωτικές Σχέσεις

---

---

### 14.2 Λύση Ανισώσεων

---





# Βιβλιογραφία

- [1] Νίκος Καρανικόλας. *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Εκδόσεις Βολονάκη, 2007.
- [2] Βασίλης Παπάδακης. *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Εκδόσεις Σαββάλας, 2009.
- [3] Αργυράκης & Βουργάνας & Μεντής & Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης. *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. ΟΕΒΔ, 2008.