ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15 Απριλίου 2020

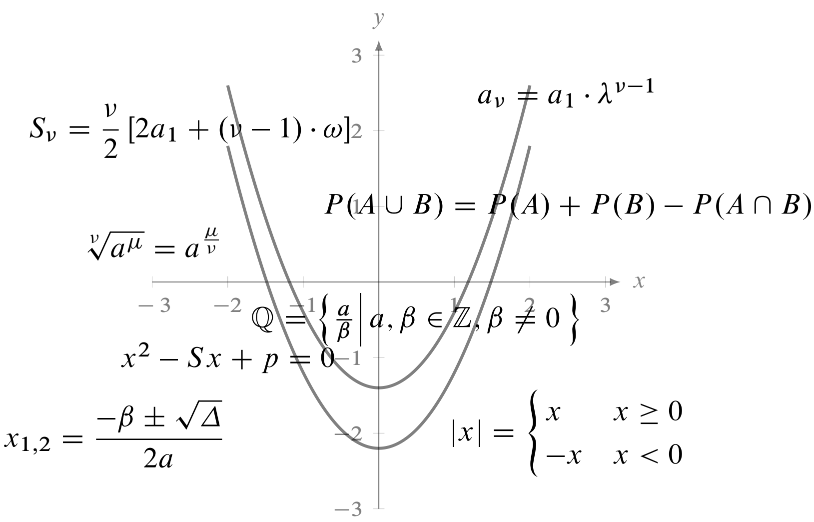
ΤΜΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΦΡΟΝΙΜΟΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αλγεβρα

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ



ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν, φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι.

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626$$

Το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης στην παραπάνω πρόταση φτιάχνουν διαδοχικά τα 23 πρώτα ψηφία του αριθμού π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Σύνολα

1.1 Η έννοια του συνόλου

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 : ΣΥΝΟΛΟ
Σύνολο ονομάζεται μια συλλογή όμοιων αντικειμένων, τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακριτά μεταξύ τους.

- Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **στοιχεία**.
- Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.
- Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x **ανήκει** σε ένα σύνολο A γράφουμε $x \in A$. Ενώ αν το x **δεν ανήκει** στο σύνολο A γράφουμε $x \notin A$.
- **Κενό** ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\}$.
- **Βασικό** ονομάζεται το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία στο χώρο στον οποίο εργαζόμαστε. Συμβολίζεται Ω.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. **Φυσικοί Αριθμοί** : Οι αριθμοί $0, 1, 2, \ldots$. Το σύνολο συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και είναι : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. **Ακέραιοι Αριθμοί** : Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αντίθετους τους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ και είναι : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. **Ρητοί Αριθμοί** : Όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους. Συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$ και είναι : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \middle| a, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$.
4. **Άρρητοι Αριθμοί** : Κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι ρητός. Κατά κύριο λόγο, άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες που δεν έχουν ρητό αποτέλεσμα, ο αριθμός π κ.τ.λ.
5. **Πραγματικοί Αριθμοί** : Οι ρητοί μαζί με το σύνολο των άρρητων μας δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους αριθμούς που γνωρίζουμε. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και είναι : $\mathbb{R} = \{\text{όλοι οι αριθμοί}\}$.

Τα παραπάνω σύνολα **χωρίς το μηδενικό τους στοιχείο** συμβολίζονται αντίστοιχα με $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$.

Ορισμός 1.2 : ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ
Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα A, B τα οποία έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Συμβολίζεται $A = B$. Ισοδύναμα, τα σύνολα , λέγονται ίσα εαν ισχύουν οι σχέσεις :

1. Κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B
2. Κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A.

Ορισμός 1.3 : ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ
Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Συμβολίζεται με τη χρήση του συμβόλου $\subseteq$ ως εξής : $A \subseteq B$.

Ορισμός 1.4 : ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ
Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο είναι οι εξής :

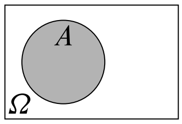
1. **Αναγραφή**
   Γράφουμε τα στοιχεία ενός συνόλου μέσα σε άγκιστρα : { } όπου κάθε στοιχείο αναγράφεται μια φορά.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$$

   Τα στοιχεία του συνόλου χωρίζονται με κομμα (,).

2. **Περιγραφή**
   Γράφουμε που ανήκουν τα στοιχεία και ποιά ιδιότητα έχουν. Έχει τη μορφή: $A = \{x \in \Omega \mid \text{Ιδιότητα } I\}$.

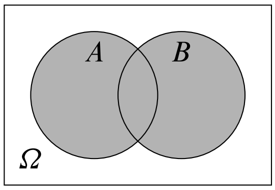
3. **Διάγραμμα Venn**



   Σχεδιάζουμε με ορθογώνιο το βασικό σύνολο και με κύκλους τα υποσύνολά του.

Ορισμός 1.5 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

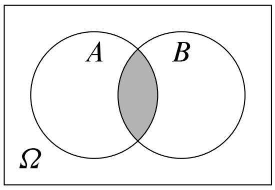
1. **Ένωση**
   Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε **τουλάχιστον ένα** από τα σύνολα A και B. Συμβολίζεται με $A \cup B$.



$$A \cup B = \{x \in \Omega \,| x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

   Η ένωση των συνόλων A και B περιέχει όλα τα στοιχεία των δύο συνόλων. Τα κοινά στοιχεία αναγράφονται μια φορά.

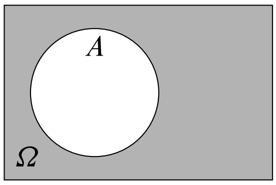
2. **Τομή**
   Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν **και στα δύο** σύνολα A και B. Συμβολίζεται με $A \cap B$.



$$A \cap B = \{x \in \Omega \,| x \in A \text{ και } x \in B\}$$

   Η τομή των συνόλων A και B περιέχει μόνο τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.

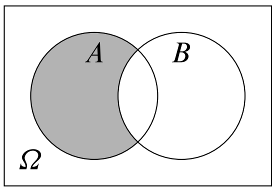
3. **Συμπλήρωμα**
   Συμπλήρωμα ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία **δεν** ανήκουν στο A. Συμβολίζεται με A'.



$$A' = \{x \in \Omega \,| x \notin A\}$$

   Ονομάζεται συμπλήρωμα του γιατί η ένωσή του με το σύνολο αυτό μας δίνει το βασικό σύνολο Ω.

4. **Διαφορά**
   Διαφορά ενός συνόλου B από ένα σύνολο A ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του βασικού συνόλου Ω τα οποία ανήκουν **μόνο** στο σύνολο A, το πρώτο σύνολο της διαφοράς. Συμβολίζεται με $A - B$.



$$A - B = \{x \in \Omega \,| x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ
Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες που αφορούν τη σχέση του υποσυνόλου :

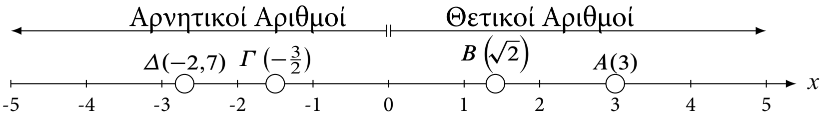
i. Για κάθε σύνολο A ισχύει : $A \subseteq A$.
ii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$.
iii. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Πραγματικοί αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.1 : ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι μια αριθμημένη ευθεία στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. **Αρχή** του άξονα είναι το σημείο O στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός 0.



- Η θέση ενός αριθμού πάνω στην ευθεία σχεδιάζεται με ένα σημείο.
- Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση αυτή ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

Ορισμός 2.2 : ΔΥΝΑΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a ονομάζεται το γινόμενο ν ίσων παραγόντων του αριθμού αυτού. Συμβολίζεται με a^{ν} όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των ίσων παραγόντων.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\nu \text{ παράγοντες}} = a^{\nu}$$

Ο αριθμός a ονομάζεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης** της δύναμης.

Ορισμός 2.3 : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών. Παρακάτω βλέπουμε τις βασικές ταυτότητες.

1. **Άθροισμα στο τετράγωνο**
   $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
2. **Διαφορά στο τετράγωνο**
   $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
3. **Άθροισμα στον κύβο**
   $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
4. **Διαφορά στον κύβο**
   $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
5. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
   $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$
6. **Άθροισμα κύβων**
   $(a+\beta)\left(a^2 - a\beta + \beta^2\right) = a^3 + \beta^3$
7. **Διαφορά κύβων**
   $(a-\beta)\left(a^2 + a\beta + \beta^2\right) = a^3 - \beta^3$

Ορισμός 2.4 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πρώτος ονομάζεται κάθε παράγοντας που δεν παραγοντοποιείται.

Ορισμός 2.5 : ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

1. **Ευθεία απόδειξη**
   Με την ευθεία απόδειξη αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από την υπόθεση και καταλήγοντας στο συμπέρασμα.

2. **Απαγωγή σε άτοπο**
   Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύουμε προτάσεις ξεκινώντας από το αντίθετο του συμπεράσματος και καταλήγουμε σε μια πρόταση που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.1 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a+\beta=\beta+a$	$a\cdot\beta=\beta\cdot a$
Προσεταιριστική	$a+(\beta+\gamma)=(a+\beta)+\gamma$	$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Αντίθετοι / Αντίστροφοι	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
Επιμεριστική	$a\cdot(\beta\pm\gamma)=a\cdot\beta\pm a\cdot\gamma$	

Ισχύουν επίσης :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a\cdot 0=0$
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται **αντίθετοι**.
- Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

Θεώρημα 2.2 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Για κάθε ισότητα της μορφής $a=\beta$ με a,β πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. Τοποθετούμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

$$a=\beta\Rightarrow\begin{cases}a+\gamma=\beta+\gamma\\ a-\gamma=\beta-\gamma\end{cases}\quad \text{και}\quad \begin{array}{l}a\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma\\ \dfrac{a}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}\ ,\ \gamma\neq 0\end{array}$$

ii. Εαν δύο πραγματικοί αριθμοί $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές δυνάμεις τους, $\nu\in\mathbb{N}$, θα είναι ίσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

$$a=\beta\Rightarrow a^\nu=\beta^\nu$$

iii. Εαν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a, \beta > 0$ είναι ίσοι τότε και οι ν-οστές ρίζες τους, $\nu \in \mathbb{N}$, θα είναι με ίσες και αντίστροφα.

$$a = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{\beta}$$

Θεώρημα 2.3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Προσθέτοντας κατά μέλη κάθε ζεύγος ισοτήτων $a = \beta$ και $\gamma = \delta$ προκύπτει ισότητα, με $1^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $1^{\omega\nu}$ μελών τους και $2^{\text{ο}}$ μέλος το άθροισμα των $2^{\omega\nu}$ μελών τους. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κατά μέλη.

$$a = \beta \ \text{ και } \ \gamma = \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma = \beta + \delta \\ \textbf{2. Αφαίρεση κατά μέλη} & a - \gamma = \beta - \delta \\ \textbf{3. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \\ \textbf{4. Διαίρεση κατά μέλη} & \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \ , \ \gamma \cdot \delta \neq 0 \end{cases}$$

Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται και για πράξεις κατα μέλη σε περισσότερες από δύο ισότητες, στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Θεώρημα 2.4 : ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y \quad \text{και} \quad a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

Διαγράφουμε κι απ τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο **μη μηδενικό** παράγοντα.

Θεώρημα 2.5 : ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις που αφορούν το γινόμενό τους.

i. $a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **ή** $\beta = 0$
ii. $a \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ **και** $\beta \neq 0$

Γενικότερα για ν σε πλήθος πραγματικών αριθμών θα ισχύει

i. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$ ή $a_2 = 0$ ή $\ldots$ ή $a_\nu = 0$.
ii. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 0$ και $a_2 \neq 0$ και $\ldots$ και $a_\nu \neq 0$.

Θεώρημα 2.6 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ
Για κάθε δυναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \text{ όπου } a \neq 0 \ , \ a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \ , \text{ όπου } a \neq 0$$

Επίσης για δυνάμεις με βάσεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ και φυσικούς εκθέτες $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Γινόμενο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
2	Πηλίκο δυνάμεων με κοινή βάση	$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
3	Γινόμενο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$(a \cdot \beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$

4	Πηλίκο δυνάμεων με κοινό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}$, $\beta \neq 0$
5	Δύναμη υψωμένη σε δύναμη	$(a^{\nu})^{\mu} = a^{\nu\cdot\mu}$
6	Κλάσμα με αρνητικό εκθέτη	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\nu}$, $a, \beta \neq 0$

Οι ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

$$a^{\nu_1} \cdot a^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a^{\nu_\kappa} = a^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa} \text{ και } (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\kappa)^{\nu} = a_1^{\nu} \cdot a_2^{\nu} \cdot \ldots \cdot a_\kappa^{\nu}$$

Για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ιδιότητες 1 - 6 με την προϋπόθεση οι βάσεις να είναι θετικοί αριθμοί δηλαδή $a, \beta > 0$.

2.2 Διάταξη

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.6 : ΔΙΑΤΑΞΗ
Διάταξη ονομάζεται η ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών κατά την οποία μπορούμε να τους συγκρίνουμε και να τους τοποθετήσουμε σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Οι σχέσεις διάταξης που χρησιμοποιούμε είναι

$<$: μικρότερο , $>$: μεγαλύτερο , $\leq$ μικρότερο ίσο , $\geq$ μεγαλύτερο ίσο

Ορισμός 2.7 : ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ - ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ
Ένας αριθμός a είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε $a > \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

$$a > \beta \Leftrightarrow a - \beta > 0$$

Ένας αριθμός a είναι **μικρότερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε $a < \beta$, όταν η διαφορά $a - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

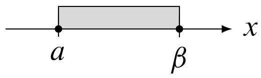
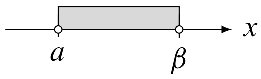
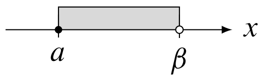
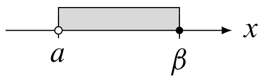
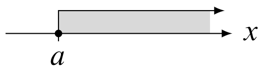
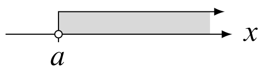
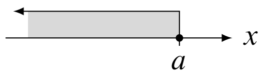
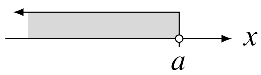
$$a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$$

Ορισμός 2.8 : ΔΙΑΣΤΗΜΑ - ΚΕΝΤΡΟ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ
Κλειστό διάστημα ονομάζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ δύο αριθμών $a, \beta \in \mathbb{R}$. Συμβολίζεται με $[a, \beta]$.

$$[a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq \beta\}$$

- Οι a, β ονομάζονται **άκρα** του διαστήματος.
- Κάθε διάστημα μπορεί να εκφραστεί σαν ανισότητα και αντίστροφα.
- Αν από το κλειστό διάστημα παραλείψουμε τα άκρα a, β τό διάστημα που προκύπτει ονομάζεται **ανοιχτό διάστημα** (a, β).
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $x \geq a$ ορίζουν το διάστημα $[a, +\infty)$. Ομοίως, τα διαστήματα (a, ∞), $(-\infty, a]$ και $(-\infty, a)$ είναι τα σύνολα των αριθμών x για τους οποίους ισχύει αντίστοιχα $x > a$, $x \leq a$ και $x < a$.
- Ο αριθμός $x_0 = \frac{a+\beta}{2}$ ονομάζεται **κέντρο**, ο αριθμός $\mu = \beta - a$ ονομάζεται **μήκος** και ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - a}{2}$ ονομάζεται **ακτίνα** του διαστήματος.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε όλους τους τύπους διαστημάτων, τη γραφική παράστασή τους καθώς και το πως παριστάνεται το καθένα σαν ανισότητα.

Διάστημα	**Ανισότητα**	**Σχήμα**	**Περιγραφή**
$[a,\beta]$	$a \leq x \leq \beta$		Κλειστό a,β
(a,β)	$a < x < \beta$		Ανοιχτό a,β
$[a,\beta)$	$a \leq x < \beta$		Κλειστό a ανοιχτό β
$(a,\beta]$	$a < x \leq \beta$		Ανοιχτό a κλειστό β
$[a,+\infty)$	$x \geq a$		Κλειστό a συν άπειρο
$(a,+\infty)$	$x > a$		Ανοιχτό a συν άπειρο
$(-\infty,a]$	$x \leq a$		Μείον άπειρο a κλειστό
$(-\infty,a)$	$x < a$		Μείον άπειρο a ανοιχτό

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.7 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και φυσικό αριθμό $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

i. Αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow a > \gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα).

ii. i. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$ τότε $a + \beta > 0$.
   ii. Αν $a < 0$ και $\beta < 0$ τότε $a + \beta < 0$.

iii. Αν a,β ομόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta > 0$ και $\frac{a}{\beta} > 0$.

iv. Αν a,β ετερόσημοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta < 0$ και $\frac{a}{\beta} < 0$.

v. Αν $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$ και $a - \gamma > \beta - \gamma$.

vi. i. Αν $\gamma > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{a}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$
   ii. Αν $\gamma < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{a}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$

vii. i. Αν ν **άρτιος** εκθέτης και
   - $a,\beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$ (Η φορά παραμένει ίδια.)
   - $a,\beta < 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu < \beta^\nu$ (Η φορά αλλάζει.)

   ii. Αν ν **περιττός** εκθέτης τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$

viii. Αν $a, \beta > 0$ τότε $a > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} > \sqrt[\nu]{\beta}$

ix. i. Αν a, β ομόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\beta}$

ii. Αν a, β ετερόσημοι τότε $a > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{\beta}$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισότητες $a < \beta, a \geq \beta$ και $a \leq \beta$.

Θεώρημα 2.8 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ
Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη κάθε ζεύγος ανισοτήτων με ίδια φορά και να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες ίδιας φοράς αρκεί όλοι οι όροι τους να είναι θετικοί.

$$a > \beta \;\text{ και }\; \gamma > \delta \Rightarrow \begin{cases} \textbf{1. Πρόσθεση κατά μέλη} & a + \gamma > \beta + \delta \\ \textbf{2. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη} & a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \;\;,\;\; \text{με } a, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

Θεώρημα 2.9 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ
Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού $a \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός :

$$a^2 \geq 0 \;\;,\;\; a^{2\kappa} \geq 0 \;\;,\;\; \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η ιδιότητα ισχύει και για κάθε άρτιο εκθέτη του αριθμού a. Η ισότητα ισχύει όταν η βάση της δύναμης, είναι 0.

Θεώρημα 2.10 : ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ
Το άθροισμα τετραγώνων οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $a, \beta\nu \in \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικός αριθμός

$$a^2 + \beta^2 \geq 0$$

Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται και για άθροισμα πολλών αριθμών υψωμένων σε οποιοδήποτε άρτιο εκθέτη.

$$a_1^{2\kappa_1} + a_2^{2\kappa_2} + \ldots + a_\nu^{2\kappa_\nu} \geq 0 \;\;,\;\; \kappa_i \in \mathbb{Z} \;,\; i = 1, 2, \ldots, \nu$$

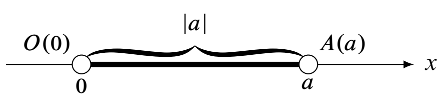
Η ισότητα ισχύει όταν οι βάσεις των δυνάμεων είναι μηδενικές.

2.3 Απόλυτες τιμές

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.9 : ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του αριθμού από το 0 πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

$$|a| = \begin{cases} a \;,\; a \geq 0 \\ -a \;,\; a < 0 \end{cases}$$

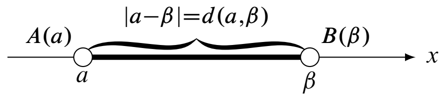


- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού a είναι ίση με τον ίδιο τον αριθμό ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού a είναι ίση με τον αντίθετο του δηλαδή $-a$.

- Η απόσταση δύο αριθμών μεταξύ τους ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

$$|a-\beta| = d(a,\beta)$$

$$|a-\beta| = d(a,\beta)$$



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.11 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις απόλυτες τιμές τους:

	Ιδιότητα	**Συνθήκη**
1	Πρόσημο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert \geq 0$
2	Απόλυτη τιμή μηδενός	$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3	Ανισότητα προσήμων	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$
4	Απόλυτη τιμή γινομένου	$\lvert a\cdot\beta\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert\beta\rvert$
5	Απόλυτη τιμή πηλίκου	$\left\lvert\dfrac{a}{\beta}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert\beta\rvert}$
6	Τετράγωνο απόλυτης τιμής	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
7	Τριγωνική ανισότητα	$\lvert\lvert a-\beta\rvert\rvert \leq \lvert a\pm\beta\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert\beta\rvert$

2.4 Ρίζες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 2.10 : ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ
Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού x ονομάζεται ο **μη αρνητικός** αριθμός a ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό x. Συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

- Ο αριθμός x ονομάζεται **υπόριζο**.
- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού.

Ορισμός 2.11 : ΡΙΖΑ ν-ΤΑΞΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Ρίζα ν-οστής **τάξης** ενός μη αρνητικού αριθμού x ονομάζεται ο **μη αρνητικός** αριθμός a που αν υψωθεί στη δύναμη ν δίνει αποτέλεσμα x (υπόριζο). Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{x}$.

$$\sqrt[\nu]{x} = a \quad , \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ και } a \geq 0$$

Ορισμός 2.12 : ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ
Δύναμη ενός **θετικού** αριθμού a με εκθέτη ένα ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται να είναι η ρίζα ν-τάξης του αριθμού a υψωμένο στη δύναμη μ.

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}\ , \ \text{όπου } a > 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2.12 : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ
Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ πραγματικούς αριθμούς και $\nu, \mu, \rho \in \mathbb{N}$ φυσικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την τετραγωνική και ν-οστή ρίζα τους.

	Ιδιότητα	Συνθήκη
1	Τετράγωνο ρίζας	$\left(\sqrt{x}\,\right)^2 = x\ ,\ \ x \geq 0$
2	Ν-οστή δύναμη ν-οστής ρίζας	$\left(\sqrt[\nu]{x}\,\right)^{\nu} = x\ ,\ \ x \geq 0$
3	Ρίζα τετραγώνου	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$
4	Ν-οστή ρίζα ν-οστής δύναμης	$\sqrt[\nu]{x^{\nu}} = \begin{cases} \lvert x\rvert & x \in \mathbb{R} \text{ αν } \nu \text{ άρτιος} \\ x & x \geq 0 \text{ και } \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$
5	Ρίζα γινομένου	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\ ,\ \ x, y \geq 0$ $\sqrt[\nu]{x \cdot y} = \sqrt[\nu]{x} \cdot \sqrt[\nu]{y}\ ,\ \ x, y \geq 0$
6	Ρίζα πηλίκου	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ \ x \geq 0 \text{ και } y > 0$ $\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\sqrt[\nu]{y}}\ ,\ \ x \geq 0 \text{ και } y > 0$
7	Μ-οστή ρίζα ν-οστής ρίζας	$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{x}} = \sqrt[\nu\cdot\mu]{x}\ ,\ \ x \geq 0$
8	Απλοποίηση ρίζας	$\sqrt[\nu]{x^{\nu} \cdot y} = x\sqrt[\nu]{y}\ ,\ \ x, y \geq 0$
9	Απλοποίηση τάξης και δύναμης	$\sqrt[\mu\cdot\rho]{x^{\nu\cdot\rho}} = \sqrt[\mu]{x^{\nu}}\ ,\ \ x \geq 0$

- Η ιδιότητα 5 ισχύει και για γινόμενο περισσότερων των δύο παραγόντων.

  $$\sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{\nu}} = \sqrt[\nu]{x_1} \cdot \sqrt[\nu]{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{x_{\nu}}$$

  όπου $x_1, x_2, \ldots x_{\nu} \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

- Η ιδιότητα 7 ισχύει και για παραστάσεις που περιέχουν πολλές ρίζες διαφόρων τάξεων στις οποίες η μια ρίζα βρίσκεται μέσα στην άλλη.

  $$\sqrt[\mu_1]{\sqrt[\mu_2]{\ddots \sqrt[\mu_{\nu}]{x}}} = \sqrt[\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_{\nu}]{x}$$

  με $x \geq 0$ και $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu} \in \mathbb{N}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.1 : ΕΞΙΣΩΣΗ
Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή δηλαδή κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) = 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Εξίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ισότητα η οποία περιέχει μια μεταβλητή.
- Μια εξίσωση αποτελείται από **2 μέλη**, τα οποία είναι τα μέρη της δεξιά και αριστερά του $=$.
- **Άγνωστοι** ονομάζονται οι όροι της εξίσωσης οι οποίοι περιέχουν τη μεταβλητή, ενώ **γνωστοί** ονομάζονται οι αριθμοί δηλαδή οι σταθεροί όροι της εξίσωσης.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **λύση** της.
- Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση**.
- Εαν μια εξίσωση έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.
- Εαν μια εξίσωση δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη**.
- Εαν σε μια εξίσωση πολλών μεταβλητών, ορίσουμε ένα μέρος των μεταβλητών αυτών ώς κύριες μεταβλητές της εξίσωσης τότε οι επιπλέον μεταβλητές λέγονται **παράμετροι** ενώ η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.
- Η διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

Ορισμός 3.2 : ΕΞΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta = 0$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν ο συντελεστής της μεταβλητής x είναι διάφορος του 0 τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.

Ορισμός 3.3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Κλασματική ονομάζεται μια εξίσωση η οποία περιέχει τουλάχιστον μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Γενικά έχει τη μορφή :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + R(x) = 0$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με $Q(x) \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Έστω $ax + \beta = 0$ μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού με $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της ανάλογα με την τιμή των συντελεστών της a, β :

1. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$.
2. Αν $a = 0$ και
   i. $\beta = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς οπότε είναι **αόριστη**.
   ii. $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \beta$ η οποία δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

Συντελεστές		**Λύσεις**
$a \neq 0$		$x = -\frac{\beta}{a}$ μοναδική λύση
$a = 0$	$\beta = 0$	$0x = 0$ αόριστη - άπειρες λύσεις
	$\beta \neq 0$	$0x = \beta$ αδύνατη - καμία λύση

Θεώρημα 3.2 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ
Οι βασικές μορφές των εξισώσεων με απόλυτες τιμές είναι οι ακόλουθες :

1. Για κάθε εξίσωση της μορφής $|x| = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις λύσεις της :
   i. Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 αντίθετες λύσεις : $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
   ii. Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση έχει λύση το 0 : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   iii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
2. Για τις εξισώσεις της μορφής $|x| = |a|$ ισχύει : $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$
3. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$ και $|f(x)| = |g(x)|$ όπου $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις :
   i. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x) \geq 0$.
   ii. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$.

3.2 Εξισώσεις της μορφής $x^\nu = a$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.4 : ΔΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διώνυμη εξίσωση ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση η οποία περιέχει πολυώνυμο με 2 όρους. Θα είναι της μορφής :

$$x^\nu = a \qquad \text{ή} \qquad x^\nu = a^\nu$$

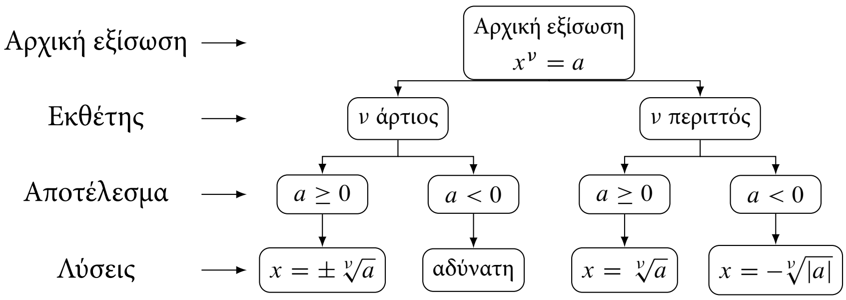
όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3.3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a$
Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το είδος του εκθέτη ν και του πραγματικού αριθμού a.

1. Για ν άρτιο έχουμε :
   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις αντίθετες : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
2. Για ν περιττό έχουμε :
   i. Αν $a \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 θετική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$
   ii. Αν $a < 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 αρνητική λύση : $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|}$

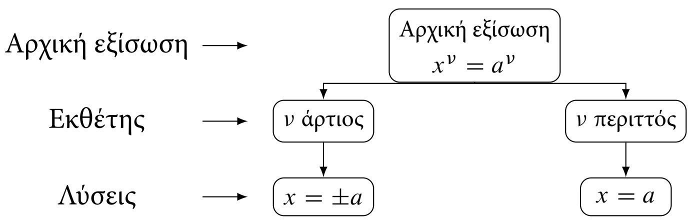
Οι λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε :



Θεώρημα 3.4 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = a^\nu$
Για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $x^\nu = a^\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ θα ισχύουν τα παρακάτω :

i. Αν ν άρτιος τότε η εξίσωση έχει δύο αντίθετες λύσεις : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = \pm a$
ii. Αν ν περιττός τότε η εξίσωση έχει μια λύση : $x^\nu = a^\nu \Leftrightarrow x = a$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών φαίνονται στο αντίστοιχο διάγραμμα :



3.3 Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 3.5 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ \ a \neq 0$$

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
- Ο συντελεστής $\gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερός όρος**.
- Ο πραγματικός αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου. Το πρόσημό της μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

Ορισμός 3.6 : ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
Διτετράγωνη ονομάζεται κάθε εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού της μορφής :

$$ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ η οποία έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x. Οι εκθέτες του τριωνύμου είναι διπλάσιοι απ' αυτούς της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

Θεώρημα 3.5 : ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού τότε με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πλήθος των λύσεων της :

i. Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
ii. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2a}$.
iii. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται επίσης στον πίνακα :

Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\Delta > 0$	2 πραγματικές άνισες λύσεις	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	1 διπλή πραγματική λύση	$x = -\dfrac{\beta}{2a}$
$\Delta < 0$	Καμία πραγματική λύση - Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	

Θεώρημα 3.6 : ΤΥΠΟΙ VIETA
Έστω $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωση τότε το άθροισμα S και το γινομενό τους P δίνονται από τους τύπους :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

οι οποίοι ονομάζονται τύποι του Vieta.

Θεώρημα 3.7 : ΕΞΙΣΩΣΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Εαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς αυτούς δίνεται από τον τύπο :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Θεώρημα 3.8 : ΕΙΔΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ
Εάν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι λύσεις της, S το άθροισμα και P το γινόμενό τους τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το είδος των λύσεων της:

Δ	P	S	Είδος λύσεων	Συμβολισμός
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Δύο θετικές πραγματικές	$x_1 > x_2 > 0$
		$S < 0$	Δύο αρνητικές λύσεις	$x_1 < x_2 < 0$
		$S = 0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P < 0$	$S > 0$	Ετερόσημες (όχι αντίθετες)	$x_1 < 0 < x_2$, $\lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert$
		$S < 0$		$x_1 < 0 < x_2$, $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
		$S = 0$	Αντίθετες	$x_1 = -x_2$
	$P = 0$	$S > 0$	Μηδενική και θετική	$x_1 = 0$, $x_2 > 0$
		$S < 0$	Μηδενική και αρνητική	$x_1 = 0$, $x_2 < 0$
		$S = 0$	Αδύνατη περίπτωση	
	$P = 1$		Αντίστροφες	$x_1 = \frac{1}{x_2}$
$\Delta = 0$	$P > 0$	$S > 0$	Θετικές και ίσες	$x_1 = x_2 > 0$
		$S < 0$	Αρνητικές και ίσες	$x_1 = x_2 < 0$
	$P = 0$	$S = 0$	Μηδενικές	$x_1 = x_2 = 0$
$\Delta < 0$	Αδύνατη στο $\mathbb{R}$			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1 : ΑΝΙΣΩΣΗ
Ανίσωση ονομάζεται κάθε ανισότητα η οποία περιέχει τουλάχιστον μια μεταβλητή, κάθε σχέση της μορφής :

$$P(x, y, \ldots, z) > 0 \ \ , \ \ P(x, y, \ldots, z) < 0$$

όπου $P(x, y, \ldots, z)$ είναι μια αλγεβρική παράσταση πολλών μεταβλητών.

- Ανισώσεις αποτελούν και οι σχέσεις με σύμβολα ανισοϊσότητας $\leq, \geq$.
- Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια ανίσωση ονομάζεται **λύση** της. Κάθε ανίσωση έχει λύσεις ένα **σύνολο αριθμών**.
- Αν μια ανίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **αόριστη**.
- Αν μια ανίσωση δεν έχει καθόλου λύσεις ονομάζεται **αδύνατη**.
- Σχέσεις τις μορφής $Q(x) \leq P(x) \leq R(x)$ λέγονται **διπλές ανισώσεις** όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ αλγεβρικές παρατάσεις. Αποτελείται από δύο ανισώσεις, με κοινό μέλος την παράσταση $P(x)$, οι οποίες συναληθεύουν.
- **Κοινές λύσεις** μιας διπλής ανίσωσης ή δύο ή περισσότερων ανισώσεων ονομάζονται οι αριθμοί που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις συγχρόνως.

Ορισμός 4.2 : ΑΝΙΣΩΣΗ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax + \beta > 0 \ \ , \ \ ax + \beta < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.1 : ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Οι λύσεις της ανίσωσης $ax + \beta > 0$ (ή $ax + \beta < 0$) φαίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $a > 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x > -\frac{\beta}{a}$ (ή $x < -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
2. Αν $a < 0$ τότε οι ανίσωση έχει λύσεις τις $x < -\frac{\beta}{a}$ (ή $x > -\frac{\beta}{a}$ αντίστοιχα).
3. Αν $a = 0$ τότε

i. Αν $\beta > 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αδύνατη ενώ η $0x < \beta$ είναι αόριστη.
ii. Αν $\beta < 0$ τότε η ανίσωση $0x > \beta$ είναι αόριστη ενώ η $0x < \beta$ είναι αδύνατη.
iii. Αν $\beta = 0$ τότε οι ανισώσεις $0x > 0$ και $0x < 0$ είναι αδύνατες.

Θεώρημα 4.2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ
Για τις ανισώσεις που περιέχουν παραστάσεις μέσα σε απόλυτες τιμές μελετάμε τις εξής μορφές. Έστω $f(x), g(x)$ αλγεβρικές παραστάσεις και $\theta > 0$ θετκός πραγματικός αριθμός.

1. Για τις ανισώσεις της μορφής $|x| < a$ οι λύσεις θα είναι : $-a < x < a$.
2. Για τις ανισώσεις της μορφής $|x| > a$ οι λύσεις θα είναι : $x > a$ ή $x < -a$.
3. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)| < \theta$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $-\theta < f(x) < \theta$.
4. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)| > \theta$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $f(x) > \theta$ και $f(x) < -\theta$.
5. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)| < g(x)$ οι λύσεις δίνονται από τη σχέση $-g(x) < f(x) < g(x)$ όπου θα πρέπει να ισχύει $g(x) \geq 0$.
6. Για τις ανισώσεις της μορφής $|f(x)| > g(x)$ οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $f(x) > g(x)$ και $f(x) < -g(x)$.

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.3 : ΑΝΙΣΩΣΗ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ
Ανίσωση 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε πολυωνυμική ανίσωση της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού. Είναι της μορφής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \ \ . \ \ ax^2 + \beta x + \gamma < 0$$

με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4.3 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για τη μετατροπή ενός τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\,(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$$

όπου x_0 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο δεν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Εναλλακτικά όμως μπορεί να γραφεί :

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

Θεώρημα 4.4 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
Για το πρόσημο των τιμών ενός τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ ισχύουν οι παρακάτω κανόνες.

1. Αν η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta > 0$) τότε το τριώνυμο είναι

   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται έξω από τις ρίζες x_1, x_2.
   ii. ετερόσημο του a στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες.
   iii. ίσο με το μηδέν στις ρίζες.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

2. Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική ($\Delta = 0$) τότε το τριώνυμο είναι

   i. ομόσημο του συντελεστή a στα διαστήματα που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της ρίζας x_0.
   ii. ίσο με το μηδέν στη ρίζα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

3. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική ($\Delta < 0$) τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του a	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Πρόοδοι

5.1 πρόοδοι

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.1 : ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ
Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ όπου κάθε φυσικός αριθμός $\nu \in \mathbb{N}^*$, εκτός του μηδενός, αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό αριθμό $a(\nu) \in \mathbb{R}$ ή πιο απλά a_ν.

- Η ακολουθία των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται (a_ν).
- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας.
- Ο όρος a_ν ονομάζεται **ν-οστός** ή **γενικός** όρος της ακολουθίας.
- Οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να δίνονται είτε από
  - έναν **γενικό τύπο** της μορφής $a_\nu = f(\nu)$, όπου δίνεται κατευθείαν ο γενικός όρος της
  - είτε από **αναδρομικό τύπο** όπου κάθε όρος δίνεται με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων προηγούμενων όρων. Θα είναι της μορφής

    $$a_{\nu+i} = f(a_{\nu+i-1}, \ldots, a_{\nu+1}, a_\nu) \quad , \quad a_1, a_2, \ldots, a_i \text{ γνωστοί όροι.}$$

    Στον αναδρομικό τύπο, ο αριθμός $i \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των προηγούμενων όρων από τους οποίους εξαρτάται ο όρος $a_{\nu+i}$. Είναι επίσης αναγκαίο να γνωρίζουμε τις τιμές των i πρώτων όρων της προκειμένου να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους.
- Μια ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι ονομάζεται **σταθερή**.

5.2 Αριθμιτική προόδος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο, προσθέτοντας κάθε φορά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ισχύει δηλαδή

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$$

Ο αριθμός $\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$ ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και είναι σταθερός.

Ορισμός 5.3 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Αριθμητικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας αριθμητικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο έχουμε

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{a+\gamma}{2}$$

Γενικότερα, αριθμητικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ μιας αριθμητικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{\nu}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5.1 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$$

Θεώρημα 5.2 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}$$

Γενικά έχουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί αριθμητική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$2a_\nu = a_{\nu+1} + a_{\nu-1}$$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 5.4 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται κάθε ακολουθία $(a_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ πραγματικών αριθμών στην οποία κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον προηγούμενο όρο με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Θα ισχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

Ορισμός 5.5 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Γεωμετρικός μέσος τριών διαδοχικών όρων a, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου (a_ν) ονομάζεται ο μεσαίος όρος β για τον οποίο ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Πιο γενικά, ο γεωμετρικός μέσος ν διαδοχικών όρων $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ γεωμετρικής προόδου ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός μ για τον οποίο ισχύει

$$\mu^\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$$

Θεώρημα 5.3 : ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ
Εαν (a_ν) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τότε ο γενικός όρος της a_ν θα δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Θεώρημα 5.4 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ
Τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Θα έχουμε ισοδύναμα $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$. Γενικά έχουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$a_\nu^2 = a_{\nu+1} \cdot a_{\nu-1}$$

	Αριθμιτική Πρόοδος	**Γεωμετρική Πρόοδος**
Όροι	$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega$	$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu$
Διαφορά / Λόγος	$\omega = a_{\nu+1} - a_\nu$	$\lambda = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$
Μέσος	$2\beta = a + \gamma$ ή $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$	$\beta^2 = a \cdot \gamma$
Γενικός Όρος	$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$	$a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Συναρτήσεις

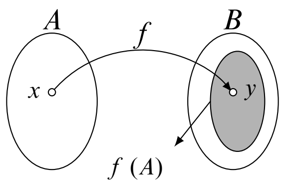
6.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία (αντιστοίχηση) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο ενός συνόλου B.
Συμβολίζεται με οποιοδήποτε γράμμα του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου $f, g, h, t, s, \sigma \ldots$ και είναι :

$$f : A \to B$$

Είναι η σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές x, y όπου κάθε τιμή της πρώτης ($x \in A$), του πρώτου συνόλου, αντιστοιχεί σε μόνο μια τιμή της δεύτερης ($y \in B$), του δεύτερου συνόλου.



- Η μεταβλητή x του συνόλου A ονομάζεται **ανεξάρτητη** ενώ η y **εξαρτημένη**.
- Η τιμή της y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$.
- Ο κανόνας της συνάρτησης, με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχηση από το x στο $f(x)$, εκφράζεται συμβολικά με τη βοήθεια του x και ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f. Είναι το σύνολο των δυνατών τιμών την ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.
- Το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές τιμές $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε $x \in A$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f, συμβολίζεται $f\ (A)$ και ισχύει $f\ (A) \subseteq B$.
- Μια συνάρτηση συμβολίζεται επίσης με τους εξής τρόπους :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \quad , \quad A \xrightarrow{f} f\ (A)$$

- Για το συμβολισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής ή της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό στη θέση της μεταβλητής x ή του ονόματος f της συνάρτησης αντίστοιχα.

$$f(x) \quad , \quad g(t) \quad , \quad h(s) \ldots$$

- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε

1. Το πεδίο ορισμού A.
2. Το σύνολο B.
3. Τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης, για κάθε $x \in A$.

- Εάν τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τότε μιλάμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.
- Οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος δίνεται από δύο ή περισσότερες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται συναρτήσεις **πολλαπλού τύπου**.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in A_1 \subseteq A \\ f_2(x) & \text{αν } x \in A_2 \subseteq A \\ \vdots & \vdots \\ f_\nu(x) & \text{αν } x \in A_\nu \subseteq A \end{cases}$$

όπου $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού ολόκληρης της συνάρτησης f με $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu = A$ και $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu = \varnothing$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα βασικά είδη συναρτήσεων τον τύπο τους καθώς και το πεδίο ορισμού τους.

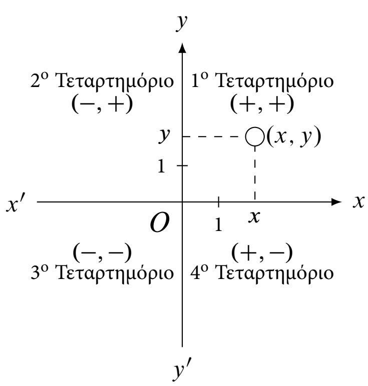
Είδος	**Τύπος**	**Πεδίο Ορισμού**
Πολυωνυμική	$f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_0$	$A = \mathbb{R}$
Ρητή	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$

Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις πολυωνιμικών συναρτήσεων αποτελούν οι παρακάτω συναρτήσεις :

Ταυτοτική	**Σταθερή**	**Μηδενική**
$f(x) = x$	$f(x) = c$	$f(x) = 0$

Ορισμός 6.2 : ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται το σύστημα αξόνων προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου. Στο επίπεδο αποτελείται από δύο κάθετα τοποθετημένους μεταξύ τους άξονες αρίθμησης πάνω στους οποίους παίρνουν τιμές δύο μεταβλητές.



- Το σημείο τομής των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Σε κάθε άξονα του συστήματος, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μήκος το οποίο ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Εάν σε κάθε άξονα θέσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό**.
- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας τετμημένων** και συμβολίζεται με $x'x$.
- Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζεται με $y'y$.
- Κάθε σημείο του επιπέδου του συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι αριθμών της μορφής (x, y). Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.

- Το ζεύγος αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος αριθμών** διότι έχει σημασία η διάταξη δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί.
- Οι αριθμοί x, y ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου στο οποίο αντιστοιχούν. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου ενώ ο y **τεταγμένη**.
- Στον οριζόντιο άξονα $x'x$, δεξιά της αρχής των αξόνων, βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής x ενώ αριστερά, οι αρνητικές.
- Αντίστοιχα στον κατακόρυφο άξονα $y'y$, πάνω από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι θετικές τιμές της μεταβλητής y, ενώ κάτω οι αρνητικές τιμές.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Ως $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο ορίζουμε το μέρος εκείνο στο οποίο ανήκουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy.

6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΙ

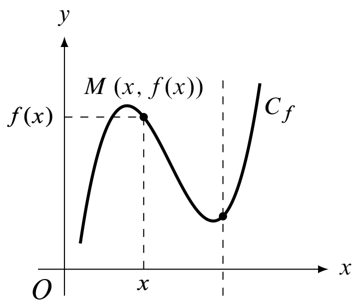
Ορισμός 6.3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $M(x, y)$ όπου

$$x \in A \quad , \quad y = f(x)$$

Το σύνολο των σημείων της γραφικής παράστασης είναι

$$C_f = \{M(x, y) | y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

- Συμβολίζεται με C_f και το σύνολο των σημείων της παριστάνει σχήμα.
- Τα σημεία της γραφικής παράστασης είναι της μορφής $(x, f(x))$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της.
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon \parallel y'y$ της μορφής $x = \kappa$ τέμνει τη C_f **σε ένα το πολύ** σημείο.



6.3 Η ευθεία $y = ax + \beta$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 6.4 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ
Συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ του συστήματος συντεταγμένων.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.1 : ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

i. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη ίση με το 0. Οι τετμημένες των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης :

$$f(x) = 0$$

ii. Το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη ίση με το 0. Θα είναι της μορφής $M(0, f(0))$.

iii. Στα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g ισχύει $f(x) = g(x)$. Οι τετμημένες x_0 των σημείων αυτών είναι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ενώ ισχύει $x_0 \in A \cap B$.

Θεώρημα 6.2 : ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα. Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών θα ισχύουν οι εξής προτάσεις.

i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν θετική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :

$$f(x) > 0$$

ii. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουν αρνητική τεταγμένη. Οι τετμημένες των σημείων είναι λύσεις της ανίσωσης :

$$f(x) < 0$$

iii. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) > g(x) \ , \ x \in A \cap B$$

iv. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι λύσεις της ανίσωσης

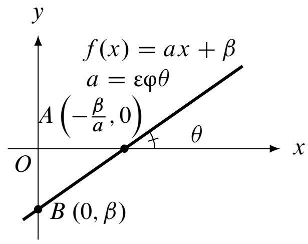
$$f(x) < g(x) \ , \ x \in A \cap B$$

Θεώρημα 6.3 : Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$
Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $1^{ου}$ βαθμού της μορφής $f(x) = ax + \beta$ με πραγματικούς συντελεστές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

ii. Ο συντελεστής a ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$a = \varepsilon\varphi\theta \ , \ 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$



iii. Αν $a \neq 0$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a = 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή $f(x) = \beta$ οπότε έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $f(A) = \{\beta\}$.

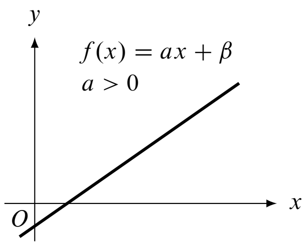
iv. Αν $a \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$, ενώ αν $a = 0$ η ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα.

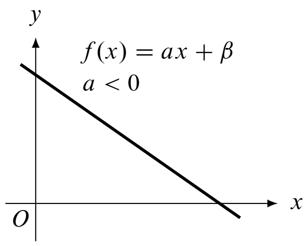
v. Αν $\beta = 0$ τότε η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ax$ με την ευθεία της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

vi. Αν $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα την $x = -\frac{\beta}{a}$, αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ δεν έχει ρίζες, ενώ αν $a = 0$ και $\beta = 0$ έχει άπειρες ρίζες.

vii. Αν $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{a}, 0\right)$ και τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $B\left(-\frac{\beta}{a}, 0\right)$.

viii. Αν $a > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ αν $a < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.





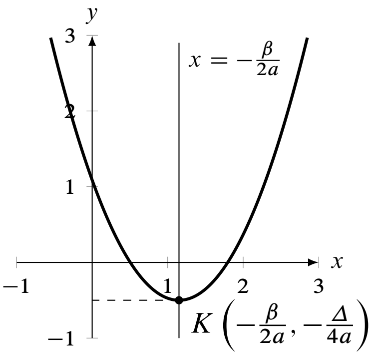
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Βασικές Συναρτήσεις

7.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 7.1 : ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Παραβολή ονομάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ και γενικότερα της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.



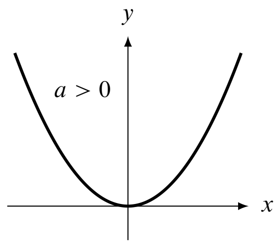
- Οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ονομάζονται **συντελεστές**.
- Το σημείο στο οποίο παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή η συνάρτηση ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής. Οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της παραβολής ονομάζεται **αξονας συμμετρίας** της παραβολής. Η εξίσωσή της ευθείας αυτής είναι $x = -\frac{\beta}{2a}$.
- Η παραβολή $f(x) = ax^2$ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα τον $y'y$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 7.1 : ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2$

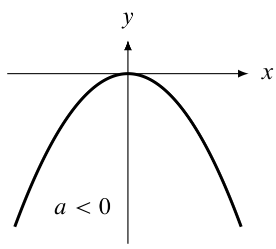
Για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2$ και τη γραφική της παράσταση έχουμε τις εξής προτάσεις :

i. Αν ο συντελεστής a είναι θετικός : $a > 0$ τότε



  - η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
  - η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή την $f(0) = 0$ για $x = 0$.
  - η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διαστημα $[0, +\infty)$.

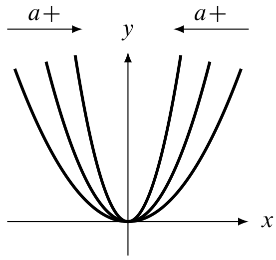
ii. Αν ο συντελεστής a είναι αρνητικός : $a < 0$ τότε



  - η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
  - η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή την $f(0) = 0$ για $x = 0$.
  - η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διαστημα $[0, +\infty)$.

iii. Για κάθε τιμή του a

- η γραφική παράσταση εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα στην αρχή των αξόνων. Το σημείο αυτό είναι η κορυφή της.
- η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.
- Καθώς αυξάνεται η τιμή του $|a|$ τόσο η καμπύλη "στενεύει".



7.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

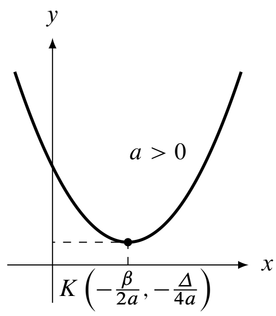
Θεώρημα 7.2 : ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$
Για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και τη γραφική της παράσταση έχουμε τις εξής προτάσεις :

i. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε δύο σημεία $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ όπου $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Αν $\Delta = 0$ τότε η γρ. παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_0, 0)$ με $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$.
- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

ii. Αν ο συντελεστής a είναι θετικός : $a > 0$ τότε

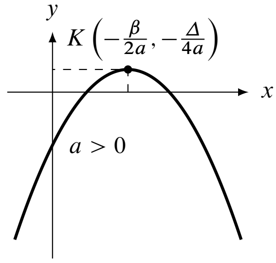
- η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή την $f\left(-\frac{\beta}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ για $x = -\frac{\beta}{2a}$.
- η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διαστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$.
- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα διαστήματα έξω των σημείων τομής A, B.



- Αν $\Delta = 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ ενώ εφάπτεται στο σημείο A.
- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

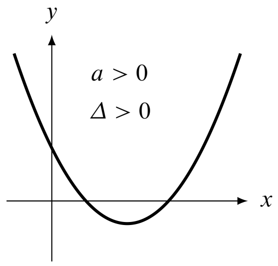
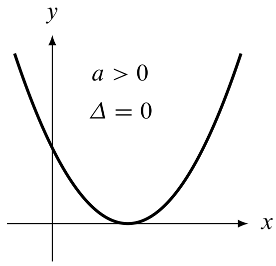
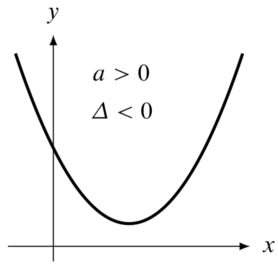
iii. Αν ο συντελεστής a είναι αρνητικός : $a < 0$ τότε

- η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή την $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$ για $x = -\frac{\beta}{2a}$.
- η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διαστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$.
- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα διαστήματα έξω των σημείων τομής A, B.



- Αν $\Delta = 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ ενώ εφάπτεται στο σημείο A.

- Αν $\Delta > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη κάτω από τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$a > 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

$a < 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$