

二维非稳态导热问题的数值模拟

CSN

2021 年 1 月 1 日

1 题设描述

定义在正方形区域 $H * H = 3m * 3m$ 的二维非稳态导热问题的控制方程及其定解条件为:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \\ q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 750W/m^2 \\ q_e = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=H} = 750W/m^2 \\ T(x, 0, t) = T_1 = 400^\circ C \\ T(x, H, t) = T_0 = 250^\circ C \\ \text{初始时刻, } T(x, y, 0) \text{ 在 } x \in [0, H] \text{ 呈线性分布} \end{cases} \quad (1)$$

其中, 导热体密度 $\rho = 7820 kg/m^3$, 比热 $c = 460 J/(kg \cdot K)$, 导热系数 $\lambda = 15 W/(m \cdot K)$. 将定义域各个方向均匀分为 10 个区块, 取点中心网格分割方式, 各边界共 11 个节点, 按照要求进行数值求解.

2 无量纲化

令

$$\begin{cases} (X, Y) = \frac{(x, y)}{H} \\ \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \\ \tau = \frac{t}{\rho c H^2 / k} \end{cases} \quad (2)$$

将式 (1) 无量纲化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \\ q_w = -\frac{\partial \theta}{\partial X}|_{X=0} = 1 \\ q_e = \frac{\partial \theta}{\partial X}|_{X=1} = 1 \\ T(X, 0, \tau) = \theta_1 = 1 \\ T(X, 1, \tau) = \theta_0 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

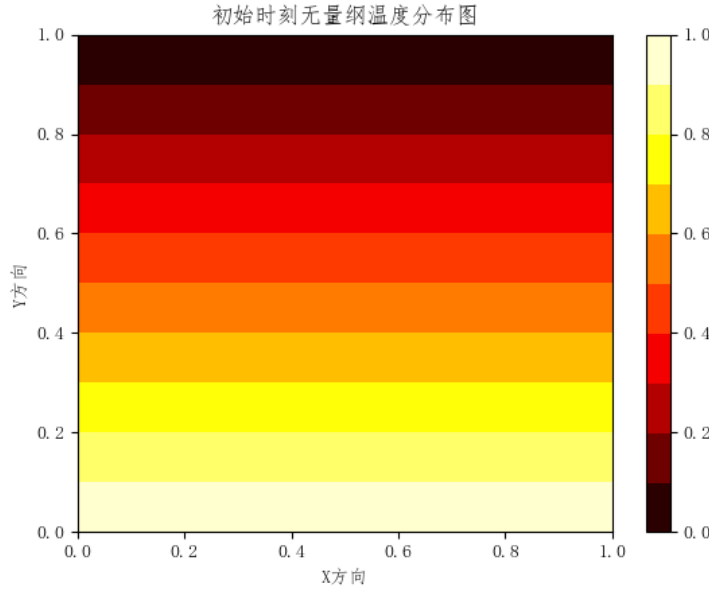


图 1: 初始时刻无量纲温度分布

3 对控制方程离散

3.1 控制容积法显式格式

在点中心网格中选择其中一个控制体，在时间 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内，对控制方程进行时间和空间的积分：

$$\int_s^n \int_w^e \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} d\tau dXdY = \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2\theta}{\partial^2X} dXdY d\tau + \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2\theta}{\partial^2Y} dY dXd\tau \quad (4)$$

对温度进行时间和空间上的型线假设：

- 非稳态项中的温度随空间作阶梯变化，即同一控制体内的温度相同.
- 扩散项中的温度随时间作阶梯显式变化，即使用积分函数下限值替代积分函数值.
- 扩散项中的温度在控制容积界面上随空间作分段线性变化.

可得到由控制容积积分法推导出的方程显式离散形式：

$$\begin{cases} a_P\theta_P = a_W\theta_W^0 + a_E\theta_E^0 + a_N\theta_N^0 + a_S\theta_S^0 + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^0 \\ a_P^0 = -a_W - a_E - a_N - a_S + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^0 \theta_P^0 \end{cases} \quad (5)$$

3.2 控制容积法隐式格式

同 3.1 节理, 由式 (4) 可推出隐式离散形式, 与显式的区别是扩散项中的温度随时间作阶梯隐式变化, 即使用积分函数上限值替代积分函数值:

$$\begin{cases} a_P \theta_P = a_W \theta_W + a_E \theta_E + a_N \theta_N + a_S \theta_S + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^0 \\ a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^0 \theta_P^0 \end{cases} \quad (6)$$

3.3 交替方向隐式离散格式 (ADI)

按 Peaceman-Rachford 方法设计 ADI 离散格式, 可得到由预估-校正多步法构成差分格式中的 ADI 格式:

- 第一步, 空间导数均取二阶中心差分, 对 X 取隐式、对 Y 取显式.
- 第二步, 接前一步计算结果, 空间导数均取二阶中心差分, 对 Y 取隐式、对 X 取显式.

$$\begin{cases} \frac{\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i,j}^n}{\frac{\Delta \tau}{2}} = \frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta X^2} + \frac{\theta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta Y^2} \\ \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta \tau}{2}} = \frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta X^2} + \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\theta_{i,j}^{n+1} + \theta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y^2} \end{cases} \quad (7)$$

整理成通用离散格式:

$$\begin{cases} -a_S \theta_S^{n+\frac{1}{2}} + a_P \theta_P^{n+\frac{1}{2}} - a_N \theta_N^{n+\frac{1}{2}} = a_W \theta_W^n + a_E \theta_E^n + b \\ -a_W \theta_W^{n+1} + a_P \theta_P^{n+1} - a_E \theta_E^{n+1} = a_S \theta_S^{n+\frac{1}{2}} + a_N \theta_N^{n+\frac{1}{2}} + b \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_P = a_S + a_N + a_W + a_E + a_P^0 \\ a_P^0 = \begin{cases} \text{从南向北方向运算时, } a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} - a_W - a_E \\ \text{从西向东方向运算时, } a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} - a_S - a_N \end{cases} \\ b = a_P^0 \theta_P^0 \end{cases} \quad (8)$$

4 Fourier 法稳定性分析

4.1 控制容积法显式格式

根据 Fourier 法，有：

$$\begin{cases} \theta_{i,j}^n = e^{i(k_X X + k_Y Y)} \\ \theta_{i+\Delta i, j+\Delta j}^n = e^{i(k_X (X+\Delta X) + k_Y (Y+\Delta Y))} \\ \theta_{i,j}^{n+1} = g \theta_{i,j}^n \end{cases} \quad (9)$$

把式 (9) 代入到式 (5) 中可得到：

$$g = 1 - \frac{4\Delta\tau}{\Delta X \Delta Y} \left(\sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2} + \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2} \right) \quad (10)$$

若稳定，则要求：

$$|g| \leq 1 \quad (11)$$

解得：

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta X \Delta Y}{4} \quad (12)$$

4.2 控制容积法隐式格式

根据 Fourier 法，同 4.1 理，可得：

$$g = \frac{\frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta\tau}}{\frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta\tau} + \sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2} + \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2}} \quad (13)$$

由式 (13) 可知 $|g| \leq 1$ 恒成立，即控制容积法隐式格式恒稳定。

4.3 交替方向隐式离散格式 (ADI)

由于 ADI 格式将 1 个时间步 $\Delta\tau$ 拆成了 2 步，所以有：

$$\begin{cases} \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = g_1 \theta_{i,j}^n \\ \theta_{i,j}^{n+1} = g_2 \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (14)$$

把式 (9) 和式 (14) 代入到式 (7) 中，可得到：

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1 - \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2}}{1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta Y^2} \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2}} \\ g_2 = \frac{1 - \frac{2\Delta\tau}{\Delta Y^2} \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2}}{1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2}} \\ g = g_1 g_2 = \frac{(1 - \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2})(1 - \frac{2\Delta\tau}{\Delta Y^2} \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2})}{(1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta Y^2} \sin^2 \frac{k_Y \Delta Y}{2})(1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \frac{k_X \Delta X}{2})} \end{cases} \quad (15)$$

由式 (15) 可知 $|g| \leq 1$ 恒成立，即 ADI 格式恒稳定。

5 数值求解

5.1 控制容积法显式格式

对于显式格式的通用离散方程 (5)，通过取左、右边界非角点作半控制体的热量平衡方程而引入左、右边界条件，保持上、下边界非角点及角点的温度恒定以引入上、下边界条件，可以得到：

- 左边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [0] \begin{cases} a_B \theta_B = a_E \theta_E^0 + a_S \theta_S^0 + a_N \theta_N^0 + b \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_E + a_S + a_N + a_P^0 \\ a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} - a_E - a_S - a_N \\ b = a_P^0 \theta_P^0 + q_w \Delta Y \end{cases} \quad (17)$$

$$i = [N-1], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

• 右边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [N-1] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (19)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [N-1] \begin{cases} a_B \theta_B = a_W \theta_W^0 + a_S \theta_S^0 + a_N \theta_N^0 + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_W + a_S + a_N + a_P^0 \\ a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} - a_W - a_S - a_N \\ b = a_P^0 \theta_P^0 + q_e \Delta Y \end{cases} \quad (20)$$

$$i = [N-1], \quad j = [N-1] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

• 非边界节点 ($N = 11$).

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [1, \dots, N-2] \begin{cases} a_P \theta_P = a_W \theta_W^0 + a_E \theta_E^0 + a_N \theta_N^0 + a_S \theta_S^0 + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^0 \\ a_P^0 = -a_W - a_E - a_N - a_S + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^0 \theta_P^0 \end{cases} \quad (22)$$

由 4.1 节可知，显式格式稳定的条件是满足式 (12)，则取：

$$\Delta\tau = 0.001 \quad (23)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n}{\theta_{ij}^n} \right| \leq 0.0001 \quad (24)$$

得到计算结果如下：

```
*****平衡时间如下*****
无量纲时间为0.401000000000003时，传热达到平衡，耗时为0.3267555 sec
总迭代次数为402次
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.28032 0.21776 0.18475 0.16624 0.15659 0.15357 0.15659 0.16624 0.18475 0.21776 0.28032
0.48591 0.40612 0.35515 0.32377 0.30669 0.30126 0.30669 0.32377 0.35515 0.40612 0.48591
0.65135 0.56597 0.50623 0.4673 0.44543 0.43838 0.44543 0.4673 0.50623 0.56597 0.65135
0.78795 0.70056 0.63691 0.59418 0.56973 0.56179 0.56973 0.59418 0.63691 0.70056 0.78795
0.8998 0.81189 0.74711 0.70325 0.678 0.66977 0.678 0.70325 0.74711 0.81189 0.8998
0.98795 0.90056 0.83691 0.79418 0.76973 0.76179 0.76973 0.79418 0.83691 0.90056 0.98795
1.05135 0.96597 0.90623 0.8673 0.84543 0.83838 0.84543 0.8673 0.90623 0.96597 1.05135
1.08591 1.00612 0.95515 0.92377 0.90669 0.90126 0.90669 0.92377 0.95515 1.00612 1.08591
1.08032 1.01776 0.98475 0.96624 0.95659 0.95357 0.95659 0.96624 0.98475 1.01776 1.08032
1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0
```

图 2: 控制容积法显式格式结果

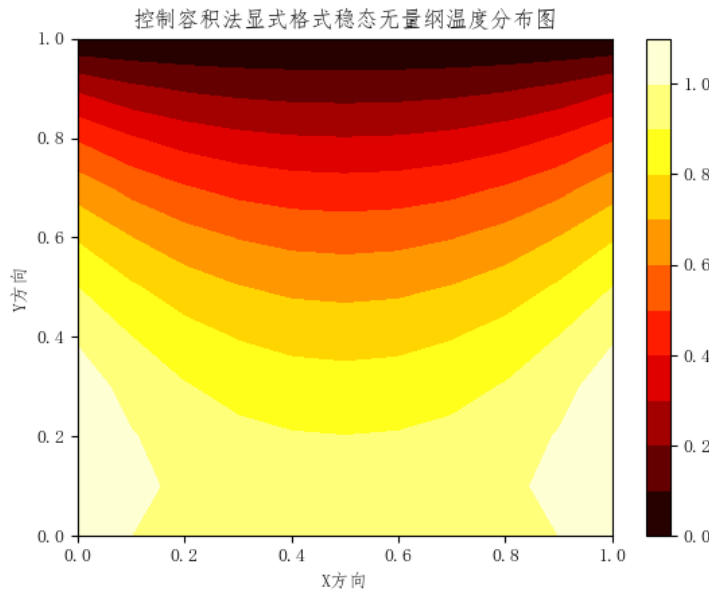


图 3: 控制容积法显式格式稳态无量纲温度分布

5.2 ADI 格式

对于 ADI 格式的通用离散方程式 (8)，通过取左、右边界非角点作半控制体的热量平衡方程而引入左、右边界条件，保持上、下边界非角点及角点的温度恒定以引入上、下边界条件，可以分别得到前半段时间步和后半段时间步的离散方程。

接着，采用 TDMA 方法，先将前半段时间步的温度求解，再将所得温度解代入后半段时间步作为初始条件，利用 TDMA 算法解得经过完整时间步后的温度分布。

• TDMA

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & b_{N-1} & c_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{N-2} \\ \theta_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

5.2.1 前半个时间步

- 所有节点 (N = 9).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{1,2,\dots,N-1} = -1 \\ b_{0,1,\dots,N-1} = 4 \\ c_{0,1,\dots,N-2} = -1 \\ c_{N-1} = 0 \\ \Delta\tau = 0.001, \text{ 下同}. \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} p_i = \frac{-c_i}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ \theta_i = p_i \theta_{i+1} + q_i \\ \theta_N = q_N \end{cases} \quad (27)$$

- 左边界节点 (N = 9).

$$\begin{cases} i = [1], \quad j = [0]: & d_{i-1} = 2 * \theta_{i,j+1} + 1.2 \\ i = [2, 3, \dots, N], \quad j = [0]: & d_{i-1} = 2 * \theta_{i,j+1} + 0.2 \end{cases} \quad (28)$$

- 右边界节点 (N = 9).

$$\begin{cases} i = [1], \quad j = [N+1]: & d_{i-1} = 2 * \theta_{i,j-1} + 1.2 \\ i = [2, 3, \dots, N], \quad j = [N+1]: & d_{i-1} = 2 * \theta_{i,j-1} + 0.2 \end{cases} \quad (29)$$

- 非边界节点 (N = 9).

$$\begin{cases} i = [1], \quad j = [1, 2, \dots, N]: & d_{i-1} = \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1} + 1 \\ i = [2, 3, \dots, N], \quad j = [1, 2, \dots, N]: & d_{i-1} = \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1} \end{cases} \quad (30)$$

5.2.2 后半个时间步

- 所有节点 (N = 11).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{1,2,\dots,N-2} = -1 \\ a_{N-1} = -2 \\ b_{0,1,\dots,N-1} = 4 \\ c_{0,1,\dots,N-2} = -1 \\ c_{N-1} = 0 \\ \Delta\tau = 0.001, \text{ 下同.} \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \text{左边界节点: } i = [1, 2, \dots, N-2], \quad j = [0]: & d_j = \theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} + 0.2 \\ \text{非边界节点: } i = [1, 2, \dots, N-2], \quad j = [1, 2, \dots, N-2]: & d_j = \theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} \\ \text{右边界节点: } i = [1, 2, \dots, N-2], \quad j = [N-1]: & d_j = \theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} + 0.2 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} p_i = \frac{-c_i}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ \theta_i = p_i \theta_{i+1} + q_i \\ \theta_N = q_N \end{cases} \quad (33)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n}{\theta_{i,j}^n} \right| \leq 0.0001 \quad (34)$$

得到计算结果如下:

```
*****平衡时间如下*****
无量纲时间为0.6500000000000004时, 传热达到平衡, 耗时为0.3299265 sec
总迭代次数为65次
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
0.28173  0.21917  0.18616  0.16765  0.15799  0.15498  0.15799  0.16765  0.18616  0.21917  0.28173
0.48858  0.4088  0.35782  0.32645  0.30937  0.30394  0.30937  0.32645  0.35782  0.4088  0.48858
0.65503  0.56965  0.50992  0.47099  0.44911  0.44206  0.44911  0.47099  0.50992  0.56965  0.65503
0.79228  0.70489  0.64124  0.59851  0.57406  0.56611  0.57406  0.59851  0.64124  0.70489  0.79228
0.90435  0.81644  0.75167  0.7078  0.68255  0.67432  0.68255  0.7078  0.75167  0.81644  0.90435
0.99228  0.90489  0.84124  0.79851  0.77406  0.76611  0.77406  0.79851  0.84124  0.90489  0.99228
1.05503  0.96965  0.90992  0.87099  0.84911  0.84206  0.84911  0.87099  0.90992  0.96965  1.05503
1.08858  1.0088  0.95782  0.92645  0.90937  0.90394  0.90937  0.92645  0.95782  1.0088  1.08858
1.08173  1.01917  0.98616  0.96765  0.95799  0.95498  0.95799  0.96765  0.98616  1.01917  1.08173
1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0
```

图 4: ADI 格式结果

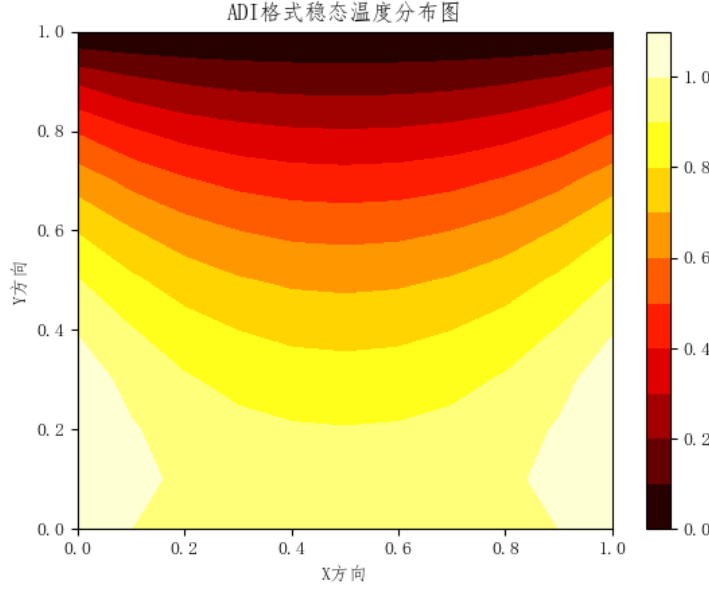


图 5: ADI 格式稳态无量纲温度分布

5.3 Jacobi 简单点迭代

对于隐式格式的通用离散方程式 (3.2)，通过取左、右边界非角点作半控制体的热量平衡方程而引入左、右边界条件，保持上、下边界非角点及角点的温度恒定以引入上、下边界条件，可以得到：

- 左边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (35)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [0] \begin{cases} a_B \theta_B^{(n+1)} = a_E \theta_E^{(n)} + a_S \theta_S^{(n)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_E + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_w \Delta Y \end{cases} \quad (36)$$

$$i = [N-1], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

- 右边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [N-1] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (38)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} a_B \theta_B^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n)} + a_S \theta_S^{(n)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_W + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_e \Delta Y \end{array} \right. \quad (39)$$

$$i = [N-1], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{array} \right. \quad (40)$$

• 非边界节点 ($N = 11$).

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [1, \dots, N-2] \left\{ \begin{array}{l} a_P \theta_P^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n)} + a_E \theta_E^{(n)} + a_N \theta_N^{(n)} + a_S \theta_S^{(n)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^{(n)} \\ a_P^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^{(n)} \theta_P^{(n)} \end{array} \right. \quad (41)$$

由式 (13) 可知, 隐式格式恒稳定, 则取:

$$\Delta \tau = 0.001 \quad (42)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n}{\theta_{i,j}^n} \right| \leq 0.0001 \quad (43)$$

得到计算结果如下:

```
*****Jacobi迭代平衡时间及迭代次数如下*****
传热达到平衡, 程序耗时为0.3408586 sec
总迭代次数为235次
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
0.28111  0.21855  0.18554  0.16703  0.15738  0.15436  0.15738  0.16703  0.18554  0.21855  0.28111
0.48742  0.40763  0.35666  0.32528  0.3082  0.30277  0.3082  0.32528  0.35666  0.40763  0.48742
0.65343  0.56805  0.50831  0.46938  0.4475  0.44045  0.4475  0.46938  0.50831  0.56805  0.65343
0.79039  0.703  0.63935  0.59662  0.57217  0.56423  0.57217  0.59662  0.63935  0.703  0.79039
0.90236  0.81445  0.74968  0.70581  0.68056  0.67234  0.68056  0.70581  0.74968  0.81445  0.90236
0.99039  0.903  0.83935  0.79662  0.77217  0.76423  0.77217  0.79662  0.83935  0.903  0.99039
1.05343  0.96805  0.90831  0.86938  0.8475  0.84045  0.8475  0.86938  0.90831  0.96805  1.05343
1.08742  1.00763  0.95666  0.92528  0.9082  0.90277  0.9082  0.92528  0.95666  1.00763  1.08742
1.08111  1.01855  0.98554  0.96703  0.95738  0.95436  0.95738  0.96703  0.98554  1.01855  1.08111
1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0
```

图 6: Jacobi 简单点迭代结果

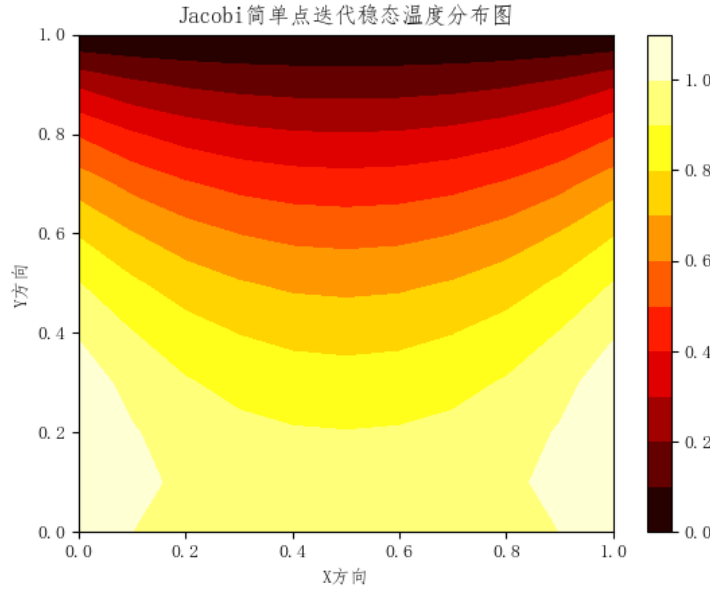


图 7: Jacobi 简单点迭代稳态无量纲温度分布

5.4 Gauss-Seidel 点迭代

与 Jacobi 点迭代相比, G-S 点迭代不是全用上一迭代层的旧值, 但凡某节点已算出新的值, 则立刻用新值去替代旧值. 取从南到北、从西到东的扫描方式, 对 5.3 节中的离散格式进行修改, 可得到 G-S 点迭代的离散格式:

- 左边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (44)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [0] \begin{cases} a_B \theta_B^{(n+1)} = a_E \theta_E^{(n)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_E + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_w \Delta Y \end{cases} \quad (45)$$

$$i = [N-1], \quad j = [0] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

- 右边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [N-1] \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (47)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} a_B \theta_B^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n+1)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_W + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_e \Delta Y \end{array} \right. \quad (48)$$

$$i = [N-1], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

• 非边界节点 ($N = 11$).

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [1, \dots, N-2] \left\{ \begin{array}{l} a_P \theta_P^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n+1)} + a_E \theta_E^{(n)} + a_N \theta_N^{(n)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^{(n)} \\ a_P^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^{(n)} \theta_P^{(n)} \end{array} \right. \quad (50)$$

由式 (13) 可知，隐式格式恒稳定，则取：

$$\Delta \tau = 0.001 \quad (51)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n}{\theta_{ij}^n} \right| \leq 0.0001 \quad (52)$$

得到计算结果如下：

```
*****Gauss-Seidel点迭代迭代平衡时间及迭代次数如下*****
传热达到平衡，程序耗时为0.2724348000000001 sec
总迭代次数为160次
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
0.28137  0.21882  0.18581  0.1673  0.15765  0.15464  0.15765  0.1673  0.18581  0.21881  0.28136
0.48789  0.40812  0.35715  0.32578  0.3087  0.30327  0.3087  0.32578  0.35715  0.40811  0.48788
0.65406  0.56869  0.50897  0.47005  0.44818  0.44113  0.44818  0.47005  0.50896  0.56868  0.65405
0.79111  0.70374  0.6401  0.59739  0.57294  0.565  0.57294  0.59738  0.64009  0.70373  0.79109
0.90309  0.8152  0.75045  0.70659  0.68135  0.67312  0.68134  0.70658  0.75044  0.81519  0.90307
0.99106  0.90369  0.84005  0.79734  0.77289  0.76495  0.77289  0.79733  0.84004  0.90368  0.99104
1.05397  0.96861  0.90889  0.86997  0.84809  0.84104  0.84809  0.86996  0.90888  0.9686  1.05396
1.08779  1.00803  0.95706  0.92569  0.90861  0.90318  0.90861  0.92569  0.95705  1.00802  1.08779
1.0813  1.01875  0.98575  0.96724  0.95759  0.95457  0.95759  0.96724  0.98574  1.01875  1.0813
1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0      1.0
```

图 8: Gauss-Seidel 点迭代结果

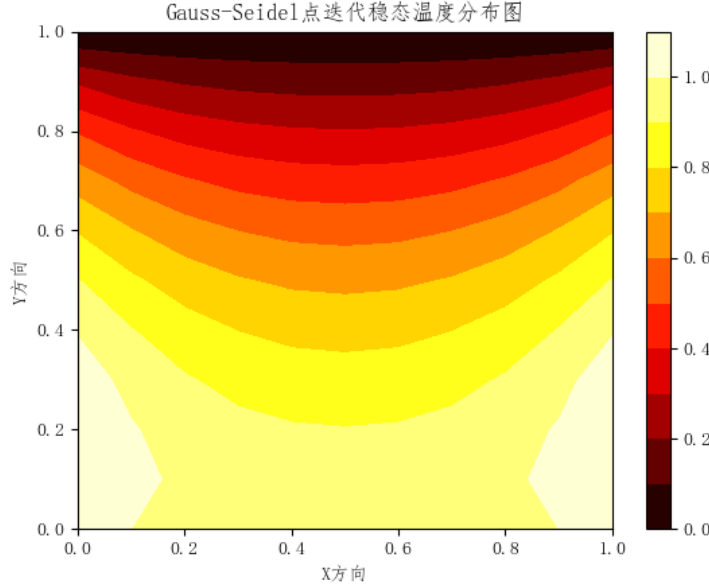


图 9: Gauss-Seidel 点迭代稳态无量纲温度分布

5.5 带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代

与单纯的 Gauss-Seidel 点迭代相比，带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代不是直接使用迭代出的新值，而是将新值与上一轮迭代值加权平均后作为新一轮参与迭代的值。取从南到北、从西到东的扫描方式，对 5.4 节中的离散格式进行修改，可得到带松弛的 G-S 点迭代的离散格式：

- 左边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [0] \quad \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (53)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [0] \quad \begin{cases} \theta_B^{(n+1)} = \omega \theta_{B-GS}^{(n+1)} + (1 - \omega) \theta_B^{(n)} \\ a_B \theta_{B-GS}^{(n+1)} = a_E \theta_E^{(n)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_E + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_w \Delta Y \end{cases} \quad (54)$$

$$i = [N-1], \quad j = [0] \quad \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

- 右边界节点 ($N = 11$).

$$i = [0], \quad j = [N-1] \quad \begin{cases} \theta_B(\tau) = \theta_0 \\ \theta_0(\tau) = 1 \end{cases} \quad (56)$$

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} \theta_B^{(n+1)} = \omega \theta_{B-GS}^{(n+1)} + (1 - \omega) \theta_B^{(n)} \\ a_B \theta_{B-GS}^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n+1)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + a_N \theta_N^{(n)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_S = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_N = \frac{\Delta X}{2\Delta Y} \\ a_B = a_W + a_S + a_N + a_B^{(n)} \\ a_B^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{2\Delta \tau} \\ b = a_B^{(n)} \theta_B^{(n)} + q_e \Delta Y \end{array} \right. \quad (57)$$

$$i = [N-1], \quad j = [N-1] \left\{ \begin{array}{l} \theta_B(\tau) = \theta_1 \\ \theta_1(\tau) = 0 \end{array} \right. \quad (58)$$

• 非边界节点 ($N = 11$).

$$i = [1, \dots, N-2], \quad j = [1, \dots, N-2] \left\{ \begin{array}{l} \theta_P^{(n+1)} = \omega \theta_{P-GS}^{(n+1)} + (1 - \omega) \theta_P^{(n)} \\ a_P \theta_P^{(n+1)} = a_W \theta_W^{(n+1)} + a_E \theta_E^{(n)} + a_N \theta_N^{(n)} + a_S \theta_S^{(n+1)} + b \\ a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_E = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ a_N = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_S = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \\ a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^{(n)} \\ a_P^{(n)} = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \\ b = a_P^{(n)} \theta_P^{(n)} \end{array} \right. \quad (59)$$

由式 (13) 可知，隐式格式恒稳定，则取：

$$\Delta \tau = 0.001 \quad (60)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n}{\theta_{ij}^n} \right| \leq 0.0001 \quad (61)$$

对于 ω 的取值，将 ω 取值范围设置为 0.1 到 2.0，每隔 0.1 进行一次计算，并比较 ω 及其相应的迭代次数，如图 10 所示：

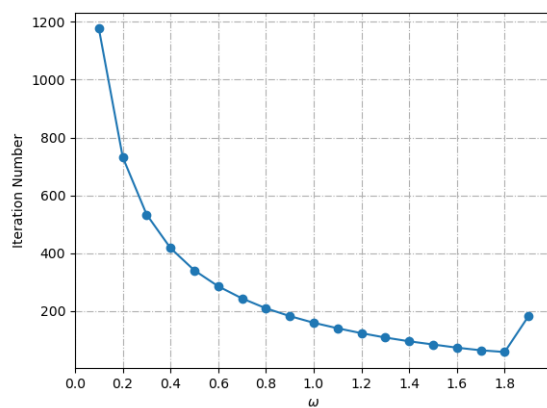


图 10: 带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代的 ω 及其迭代次数

取迭代次数最少的 $\omega = 1.8$ 进行作图，得到计算结果如下：

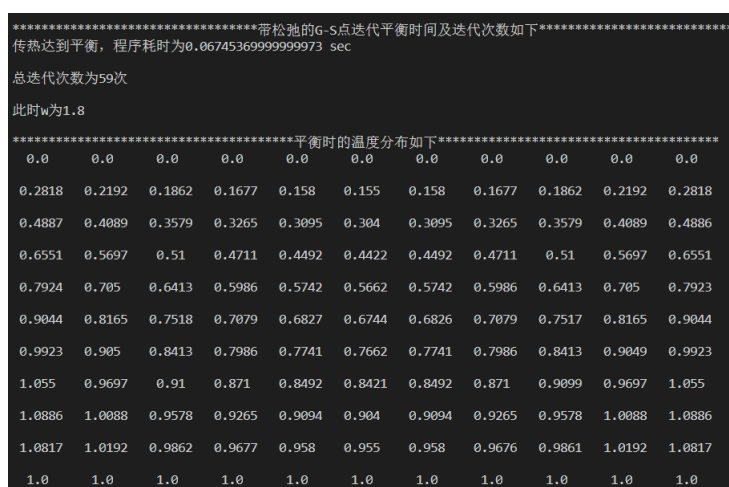


图 11: 带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代结果

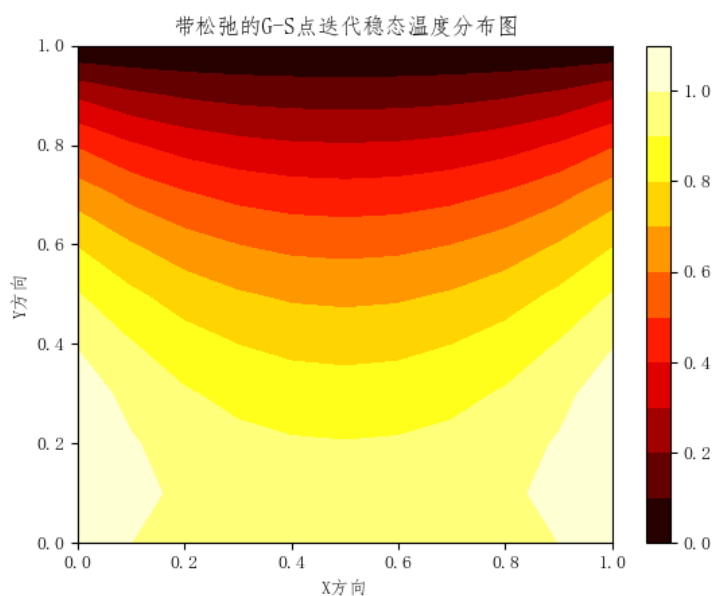


图 12: 带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代稳态无量纲温度分布

5.6 带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代

带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代与带松弛的 Gauss-Seidel 点迭代的最大区别在于其通用离散格式由显式变为了隐式，所以需要 TDMA 进行联立求解。取从南到北、从西到东的扫描方式，可以得到：

- 所有节点 ($N = 11$).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{1,2,\dots,N-2} = -0.2 * \omega \\ a_{10} = -0.4 * \omega \\ b_{0,1,\dots,N-1} = 1 \\ c_0 = -0.4 * \omega \\ c_{1,\dots,N-2} = -0.2 * \omega \\ c_{N-1} = 0 \\ \Delta\tau = 0.001, \text{下同.} \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{cases} p_i = \frac{-c_i}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ \theta_i = p_i \theta_{i+1} + q_i \\ \theta_N = q_N \end{cases} \quad (63)$$

$$\begin{cases} \text{左边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], j=[0]: \\ \quad d_j = (1 - \omega) * \theta_{i,j}^{(n)} + 0.2 * \omega (\theta_{i-1,j}^{(n+1)} + \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i,j}^{(n)}) + 0.04 * \omega \\ \text{非边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], j=[1, 2, \dots, N-2]: \\ \quad d_j = (1 - \omega) * \theta_{i,j}^{(n)} + 0.2 * \omega (\theta_{i-1,j}^{(n+1)} + \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i,j}^{(n)}) \\ \text{右边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], j=[N-1]: \\ \quad d_j = (1 - \omega) * \theta_{i,j}^{(n)} + 0.2 * \omega (\theta_{i-1,j}^{(n+1)} + \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i,j}^{(n)}) + 0.04 * \omega \end{cases} \quad (64)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{i,j}^{(n+1)} - \theta_{i,j}^{(n)}}{\theta_{i,j}^{(n)}} \right| \leq 0.0001 \quad (65)$$

对于 ω 的取值，将 ω 取值范围设置为 0.1 到 1.6，每隔 0.1 进行一次计算，并比较 ω 及其相应的迭代次数，如图 13 所示：

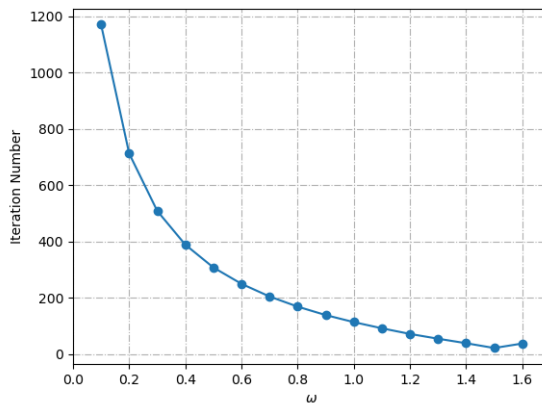


图 13: 带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代的 ω 及其迭代次数

取迭代次数最少的 $\omega = 1.5$ 进行作图，得到计算结果如下：

```
*****带松弛的GS线迭代平衡时间及迭代次数如下*****
传热达到平衡，程序耗时为0.06478180000000044 sec
总迭代次数为22次
此时w为1.5
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.28186 0.2193 0.18629 0.16778 0.15812 0.15511 0.15812 0.16778 0.18629 0.2193 0.28186
0.48883 0.40904 0.35807 0.32669 0.30961 0.30418 0.30961 0.32669 0.35807 0.40904 0.48883
0.65536 0.56998 0.51025 0.47132 0.44944 0.44239 0.44944 0.47132 0.51025 0.56998 0.65536
0.79266 0.70527 0.64162 0.59889 0.57444 0.56649 0.57444 0.59889 0.64162 0.70527 0.79266
0.90474 0.81683 0.75206 0.70819 0.68294 0.67471 0.68294 0.70819 0.75206 0.81683 0.90474
0.99264 0.90525 0.84159 0.79887 0.77442 0.76647 0.77442 0.79887 0.84159 0.90525 0.99264
1.05532 0.96994 0.91021 0.87128 0.8494 0.84235 0.8494 0.87128 0.91021 0.96994 1.05532
1.08878 1.009 0.95802 0.92665 0.90957 0.90414 0.90957 0.92665 0.95802 1.009 1.08878
1.08183 1.01927 0.98625 0.96775 0.95809 0.95508 0.95809 0.96775 0.98625 1.01927 1.08183
1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0
```

图 14: 带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代结果

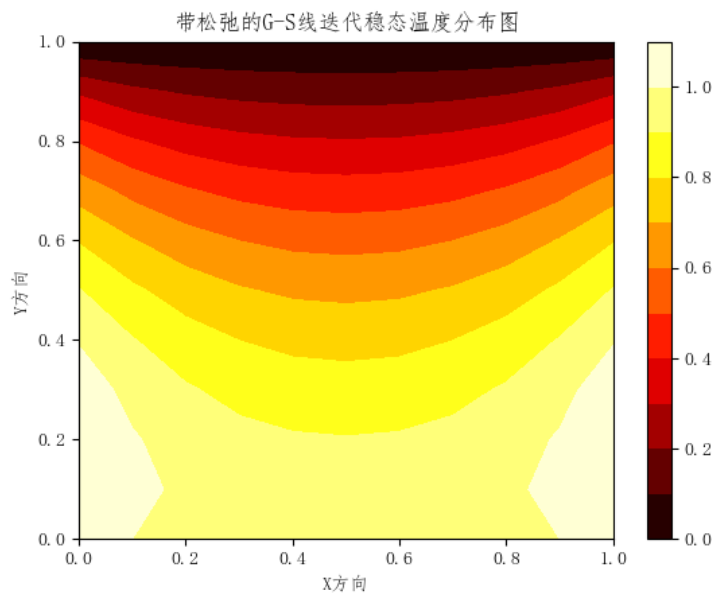


图 15: 带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代稳态无量纲温度分布

5.7 基于 Gauss-Seidel 的交替方向线迭代

基于 Gauss-Seidel 的交替方向线迭代是带松弛的 Gauss-Seidel 线迭代与 ADI 格式的结合，所以需要 TDMA 进行联立求解。取前 0.5 个迭代步从南到北 (求解所得温度是行方向的)、后 0.5 个迭代步从西到东 (求解所得温度是列方向) 的扫描方式，可以得到：

5.7.1 前半迭代步

- 所有节点 ($N = 11$)。

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{1,2,\dots,N-2} = -1 \\ a_{N-1} = -2 \\ b_{0,1,\dots,N-1} = 4 \\ c_0 = -2 \\ c_{1,2,\dots,N-2} = -1 \\ c_{N-1} = 0 \end{cases} \quad (66)$$

$$\begin{cases} p_i = \frac{-c_i}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ \theta_i = p_i \theta_{i+1} + q_i \\ \theta_N = q_N \end{cases} \quad (67)$$

$$\begin{cases} \text{左边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], \quad j=[0]: \\ \quad d_j = \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i-1,j}^{(n)} + 0.2 \\ \text{非边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], \quad j=[1, 2, \dots, N-2]: \\ \quad d_j = \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i-1,j}^{(n)} \\ \text{右边界节点: } i=[1, 2, \dots, N-2], \quad j=[N-1]: \\ \quad d_j = \theta_{i+1,j}^{(n)} + \theta_{i-1,j}^{(n)} + 0.2 \end{cases} \quad (68)$$

5.7.2 后半迭代步

- 所有节点 ($N = 9$).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{1,2,\dots,N-1} = -1 \\ b_{0,1,\dots,N-1} = 4 \\ c_{0,1,\dots,N-2} = -1 \\ c_{N-1} = 0 \end{cases} \quad (69)$$

$$\begin{cases} p_i = \frac{-c_i}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{a_i p_{i-1} + b_i} \\ \theta_i = p_i \theta_{i+1} + q_i \\ \theta_N = q_N \end{cases} \quad (70)$$

- 左边界节点 ($N = 9$).

$$\begin{cases} i=[0], \quad j=[0]: & d_i = 2 * \theta_{i+1,j+1}^{(n+\frac{1}{2})} + 1.2 \\ i=[1, 2, \dots, N-1], \quad j=[0]: & d_i = 2 * \theta_{i+1,j+1}^{(n+\frac{1}{2})} + 0.2 \end{cases} \quad (71)$$

- 非边界节点 ($N = 9$).

$$\begin{cases} i = [0], \quad j = [1, 2, \dots, N]: & d_i = \theta_{i+1,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + \theta_{i+1,j+1}^{(n+\frac{1}{2})} + 1 \\ i = [1, 2, \dots, N-1], \quad j = [1, 2, \dots, N]: & d_i = \theta_{i+1,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + \theta_{i+1,j+1}^{(n+\frac{1}{2})} \end{cases} \quad (72)$$

• 右边界节点 ($N = 9$).

$$\begin{cases} i = [0], \quad j = [N+1]: & d_i = 2 * \theta_{i+1,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + 1.2 \\ i = [1, 2, \dots, N-1], \quad j = [N+1]: & d_i = 2 * \theta_{i+1,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + 0.2 \end{cases} \quad (73)$$

• Gauss-Seidel 松弛处理

$$\theta_p^{(n+1)} = \omega * \theta_{p-GS}^{(n+1)} + (1 - \omega) * \theta_p^{(n+1)} \quad (74)$$

令中止迭代 (结果收敛) 的判据为

$$\left| \frac{\theta_{i,j}^{(n+1)} - \theta_{i,j}^{(n)}}{\theta_{i,j}^{(n)}} \right| \leq 0.0001 \quad (75)$$

对于 ω 的取值, 将 ω 取值范围设置为 0.1 到 2.0, 每隔 0.1 进行一次计算, 并比较 ω 及其相应的迭代次数, 如图 16所示:

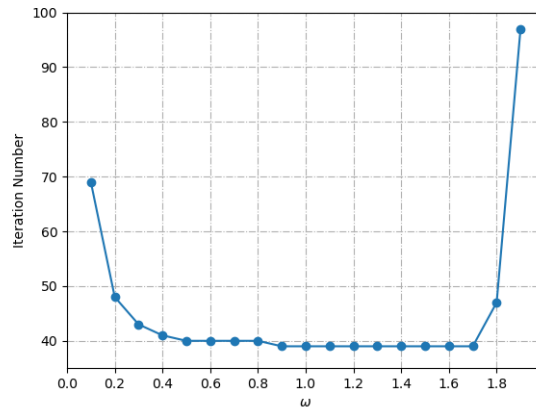


图 16: 基于 Gauss-Seidel 的交替方向线迭代的 ω 及其迭代次数

取迭代次数最少的其中之一的 $\omega = 1.5$ 进行作图, 得到计算结果如下:

```
*****基于带松弛的GS的交替方向隐式迭代平衡时间及迭代次数如下*****
传热达到平衡, 程序耗时为0.20490540000000035 sec
总迭代次数为39次
此时w为1.5
*****平衡时的温度分布如下*****
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.2818 0.21924 0.18623 0.16773 0.15887 0.15506 0.15808 0.16773 0.18624 0.21925 0.28181
0.48872 0.40894 0.35797 0.3266 0.30952 0.30409 0.30952 0.32661 0.35798 0.40896 0.48875
0.65522 0.56984 0.51011 0.47119 0.44931 0.44226 0.44932 0.4712 0.51013 0.56987 0.65526
0.79249 0.70511 0.64146 0.59874 0.57429 0.56635 0.5743 0.59875 0.64148 0.70514 0.79254
0.90456 0.81666 0.7519 0.70883 0.68279 0.67457 0.6828 0.70885 0.75192 0.8167 0.90462
0.99248 0.9051 0.84145 0.79873 0.77428 0.76634 0.77429 0.79875 0.84148 0.90514 0.99253
1.0552 0.96982 0.91009 0.87117 0.8493 0.84225 0.8493 0.87119 0.91012 0.96986 1.05525
1.0887 1.00892 0.95795 0.92658 0.9095 0.90407 0.9095 0.92659 0.95797 1.00895 1.08874
1.08178 1.01923 0.98622 0.96771 0.95806 0.95505 0.95807 0.96772 0.98623 1.01924 1.08181
1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0
```

图 17: 基于 Gauss-Seidel 的交替方向线迭代结果

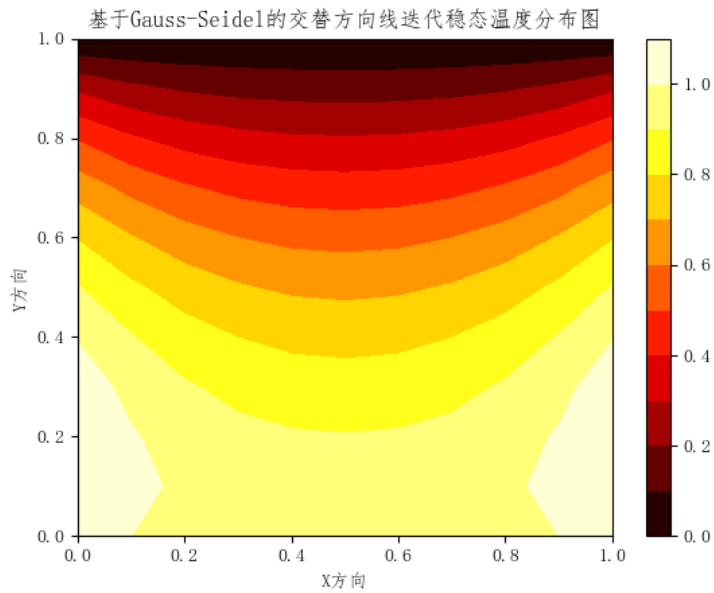


图 18: 基于 Gauss-Seidel 的交替方向线迭代稳态无量纲温度分布

6 温度变化分析

选取 5.4 节中的 Gauss-Seidel 点迭代, 可知其总迭代次数为 160 次. 将其平均分割为 5 组, 每组涵盖 32 个迭代步. 结合初始时刻的温度分布, 将归一化过的无量纲温度 θ 还原为绝对温度 T 进行作图, 如图 19 所示.

分析图 19 温度变化趋势, 可以看出, 初始时刻温度从北到南线性升高, 而由于东西两侧的热流流入, 导致南部的东西两端的归一化温度率先超过 1, 而温度等值线总体是一个向南凸的趋势. 随着时间推进, 南部的东西两端的温度最大值区域不断扩大, 直到达到平衡.

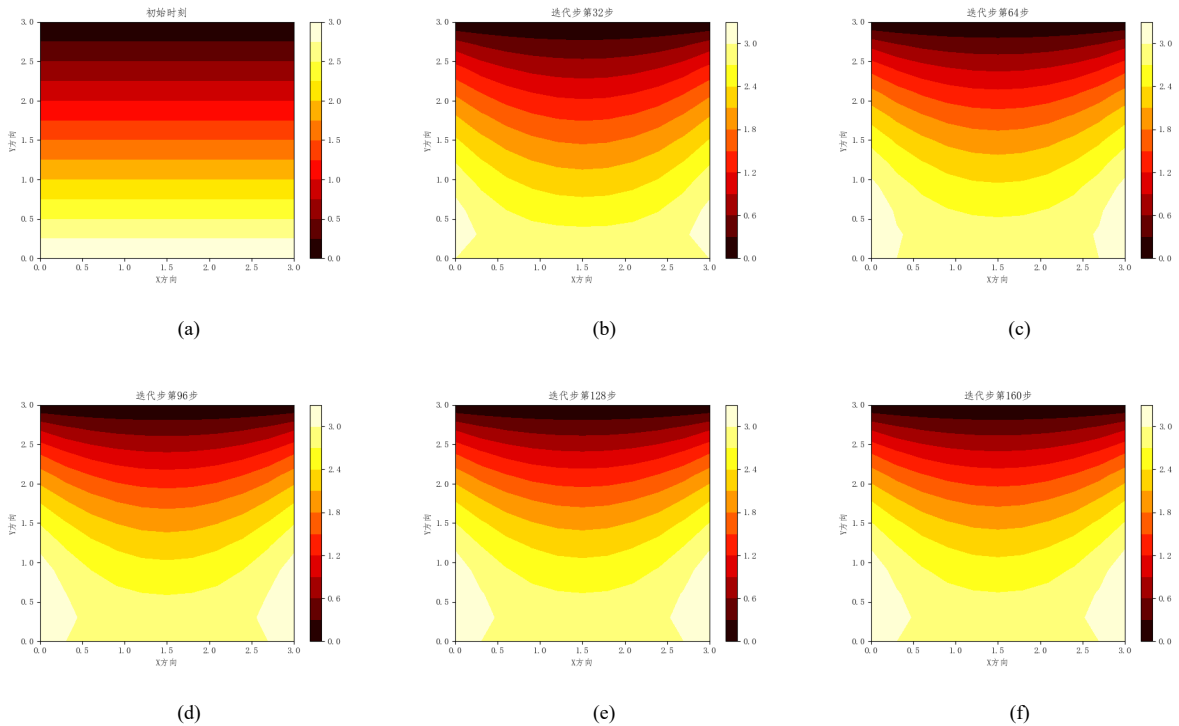


图 19: Gauss-Seidel 点迭代绝对温度分布随迭代次数变化图

7 离散方法分析

7.1 精度

上述方法的离散方程都是二阶精度，所以结果都是二阶精度。

7.2 CPU 时间消耗

CPU: i7-10710U CPU@1.10GHz 1.61GHz

编程语言: Python 3.8.1

IDE: VSCode

格式	显式	ADI	Jacobi 点迭代	G-S 点迭代	松弛 G-S 点迭代	松弛 G-S 线迭代	G-S 交替方向线迭代
迭代次数	402	65	235	160	59	22	39
计算耗时	0.326s	0.329s	0.341s	0.272s	0.0675s	0.0648s	0.204s

由上表可看出，控制容积法显式、ADI 格式和 Jacobi 点迭代的计算耗时最长，控制容积法显式是因为没有保证每步都收敛而是直接进入下一个时间步的计算，所以迭代次数最多导致耗时长；ADI 格式是因为利用了 TDMA 解方程以及交替方向扫描，所以耗时长，但总迭代次数中等；Jacobi 点迭代能够保证每个时间步的结果收敛，所以总迭代次数较控制容积法显式而下降了一半，但依然有 235 步，所以程序总运行时间长。

对于 G-S 点迭代，由于其计算出节点新值后立即启用，所以总迭代次数和运行时间较 Jacobi 点迭代下降。

对于带松弛的 G-S 点迭代和线迭代，其计算耗时是这 7 个程序中最少的，总迭代次数也较少，主要是因为引入了松弛因子，可以调节其收敛幅度，以达到最快收敛速度。

对于 G-S 交替方向线迭代，它利用了交替方向扫描而在一个迭代步中更新两次温度值，所以其总迭代次数较少，但相应的代价是程序总耗时较长。

7.3 编程难度

编程难度最简单的是控制容积法显式格式、Jacobi 点迭代，可以直接求解，引入边界条件也比较容易。

编程难度中等的是 G-S 点迭代、带松弛 G-S 点迭代、带松弛 G-S 线迭代，对于点迭代类型，也可以直接求解；对于 G-S，需要修改程序使得结果能够在还在迭代的过程中进行实时更新；对于松弛，需要在一个迭代步完毕时引入松弛因子进行加工；对于线迭代，需要用 TDMA 求解。

编程难度最难的是 ADI 和 G-S 交替方向线迭代，除了需要用 TDMA 求解之外，其难度主要来源于东西方向和南北方向的边界条件的引入方式不同，尤其是解为南北方向、从西向东推进的方向，需要分为左边界、中间点和右边界分别计算 d 值，而且计算 d 值时，还需要单独计算紧邻南边界北边的节点的 d ，即 d_0 。

8 作业感受和建议

因为本科是核物理相关的，所以对传热和流体的知识非常陌生。第一次写这样的大作业，花了一周多的时间，所学的全新知识得到了运用，心里感受到了踏实。