TÌM VÀNG

Giáo sư X chế tạo một robot tìm vàng. Robot hoạt động trên một vùng đất có bản đồ là hình chữ nhật kích thước $m \times n$ được chia làm lưới ô vuông đơn vị. Các hàng của bảng được đánh số từ 1 tới m từ trên xuống và các cột của bảng được đánh số từ 1 tới n từ trái qua phải, ô nằm trên hàng i và cột j của bảng gọi là ô (i, j) và có trữ lượng vàng là a_{ij}.

Robot có một chỉ số năng lượng cố định bằng k. Khi đặt robot tại một ô (i, j) nào đó làm vị trí xuất phát, robot có thể thực hiện không quá k bước di chuyển từ một ô sang ô kề cạnh và không được đi ra ngoài bản đồ. Gọi trữ lượng vàng lớn nhất của một ô mà robot có thể đến được nếu xuất phát từ ô (i, j) là b_{ij}

Yêu cầu: Xác định các giá trị b_{ij} $(\forall i, j: 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$

Dữ liệu: Vào từ file văn bản MINER.INP

- Dòng 1 chứa ba số nguyên m, n, k $(1 \leq m, n \leq 500; 0 \leq k \leq 500)$
- m dòng tiếp theo, dòng thứ i chứa n số nguyên dương, số thứ j là a_{ij} $(\forall i, j: 0 \leq a_{ij} \leq 10^6)$

Kết quả: Ghi ra file văn bản MINER.OUT m dòng, dòng thứ i ghi n số nguyên, số thứ j là b_{ij}

Các số trên một dòng của input/output files được/phải ghi cách nhau bởi ít nhất một dấu cách

Ví dụ

MINER.INP	MINER.OUT
6 6 2 6 0 0 0 0 7 0 2 0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 0 4 0 9 0 0 0 0 8	6 6 6 7 7 7 6 6 3 3 7 7 6 5 2 3 4 7 9 5 5 4 4 8 9 9 5 5 8 8 9 9 9 8 8 8
6 4 3 24 23 22 21 9 8 7 20 10 1 6 19 11 2 5 18 12 3 4 17 13 14 15 16	24 24 24 24 24 24 24 23 24 24 23 22 24 23 22 21 17 18 19 20 16 17 18 19

Thuật toán

Nhận xét trước hết là nếu không bị giới hạn bởi cạnh bảng, vùng các ô đến được của một robot có dạng một hình vuông nghiêng 45 độ so với cạnh bảng. Nếu Robot xuất phát từ ô (i, j) thì 4 đỉnh của hình vuông này là các ô $(i + k, j), (i, j + k), (i - k, j), (i, j - k)$

Ví dụ với $k = 2$ và bảng kích thước 5×5 như hình dưới đây

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	W	X	Y

Hình vuông dạng này khá khó để xử lý trong những thao tác truy vấn tổng, max, min. Kỹ thuật để đơn giản hóa khá phổ biến là ta "xoay" sao cho cạnh hình vuông song song với cạnh bảng (hình vuông trực giao) nhằm dễ dàng tận dụng các cấu trúc dữ liệu truy vấn phạm vi.

Khởi tạo bảng A' ban đầu các phần tử bằng 0. Với mỗi phần tử $a[i,j]$, ta đặt $a'[i-j,i+j] \coloneqq a[i,j]$. Cách ánh xạ tọa độ này dựa trên quan sát: Trên bảng A, những ô nằm trên một đường chéo song song với đường chéo chính có tính chất hàng $-$ cột $=$ hằng số, còn những ô nằm trên một đường chéo song song với đường chéo phụ có tính chất hàng $+$ cột $=$ hằng số. Dưới đây là ví dụ về bảng A và bảng A' tương ứng:

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	W	X	Y

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-4					E				
-3				D		J			
-2			C		I		O		
-1		B		H		N		T	
0	A		G		M		S		Y
1		F		L		R		X	
2			K		Q		W		
3				P		V			
4					U				

Bởi những ô trong bảng A' không có ô tương ứng trong bảng A được gán bằng 0. Việc tìm giá trị lớn nhất trong một phạm vi hình vuông nghiêng 45° của bảng A được quy về tìm giá trị lớn nhất trong một phạm vi hình vuông trực giao của bảng A'. Cạnh hình vuông truy vấn trên bảng A' có độ dài $2k+1$ (Suy ra từ phép ánh xạ tọa độ 4 ô đỉnh).

Việc tìm max trong tất cả các hình vuông kích thước $(2k+1)\times(2k+1)$ thực hiện như sau:

- Bước 1: Với mỗi ô (x,y), xác định $c[x,y]$ là số lớn nhất ghi trong $2k+1$ ô tính từ ô (x,y) về bên phải của bảng A'
- Bước 2: Với mỗi ô (x,y), xác định $d[x,y]$ là số lớn nhất ghi trong $2k+1$ ô tính từ ô (x,y) về phía dưới của bảng C

Khi đó, $\forall x,y$; $d[x,y]$ là giá trị lớn nhất trong hình vuông kích thước $(2k+1)\times(2k+1)$ của bảng A' với góc trái trên là ô (x,y):

1	18	3	19	15	$\xRightarrow{max}$	19	
8	23	12	4	24	$\xRightarrow{max}$	24	
17	7	2	5	20	$\xRightarrow{max}$	20	$\xRightarrow{max}$ 25
13	22	6	14	25	$\xRightarrow{max}$	25	
17	10	11	21	9	$\xRightarrow{max}$	21	

Bởi việc tính các giá trị lớn nhất trong tất cả các phạm vi $2k+1$ phần tử liên tiếp trên một mảng độ dài n có thể thực hiện trong thời gian $O(n)$ (sử dụng hàng đợi hai đầu – DEQUEUE). Suy ra độ phức tạp tính toán của thuật toán là $O(mn)$.