SỰ KỲ DIỆU CỦA DÃY SỐ TỔ HỢP

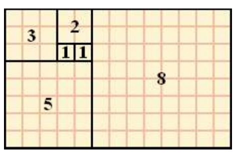
Trại hè miền Bắc 2017 — Bắc Ninh

Đỗ Phan Thuận

Email/Facebook: `thuandp.sinhvien@gmail.com`
Bộ môn Khoa Học Máy Tính, Viện CNTT & TT,
Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội.

Ngày 30 tháng 6 năm 2017

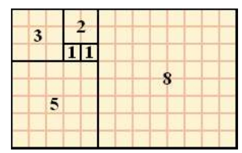
SỰ KỲ DIỆU CỦA DÃY SỐ TỔ HỢP



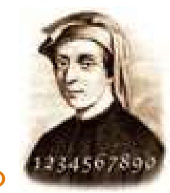
Dãy Fibonacci và Tỉ lệ vàng Φ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, . . . ($\frac{10846}{17711} = 0.61803339$)
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180339887498948482045868343656381177203091798057 6\ldots$

Năm 1202, Leonardo Fibonacci, nhà toán học người Ý, tình cờ phát hiện ra tỉ lệ vàng 0.618... được tiệm cận bằng thương của hai số liên tiếp trong một loại dãy số vô hạn được một số nhà toán học Ấn Độ xét đến từ năm 1150.



Dãy Fibonacci và Tỉ lệ vàng Φ



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, . . . ($\frac{10846}{17711} = 0.61803339$)
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180339887498948482045868343656381177203091798057 6\ldots$

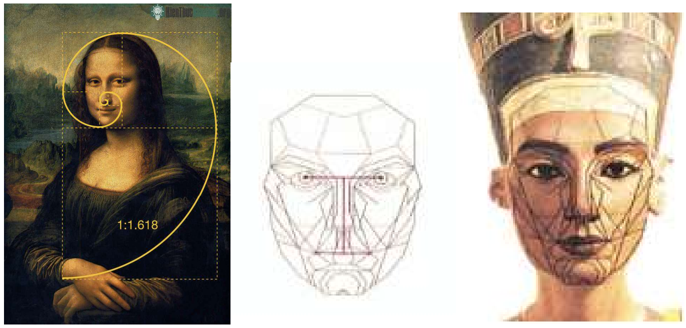
Năm 1202, Leonardo Fibonacci, nhà toán học người Ý, tình cờ phát hiện ra tỉ lệ vàng 0.618... được tiệm cận bằng thương của hai số liên tiếp trong một loại dãy số vô hạn được một số nhà toán học Ấn Độ xét đến từ năm 1150.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1.$

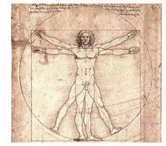
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - (1-\Phi)^n); \quad \Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Công thức dùng các phép toán vô tỷ để biểu diễn một giá trị nguyên :-)

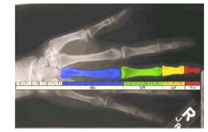
Tỷ lệ vàng khi được áp dụng trong nghệ thuật mang đến cho con người một cảm giác đẹp hài hòa và dễ chịu một cách khó giải thích

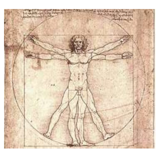


Tỉ lệ vàng được giảng trong các môn học như nghệ thuật, kiến trúc, mỹ thuật, trang trí, hội họa, điêu khắc, nhiếp ảnh, . . . như một quy luật hiển nhiên, và tương hợp kỳ lạ với óc thẩm mỹ tự nhiên của con người

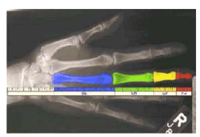


Nếu trên cơ thể bạn ...



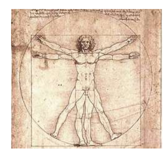


Nếu trên cơ thể bạn ...

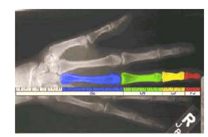


Φ

- = Chiều cao / Đỉnh đầu đến đầu ngón tay
- = Đỉnh đầu tới đầu ngón tay / Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ)
- = Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ) / Đỉnh đầu tới ngực
- = Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ) / Chiều rộng đôi vai
- = Đỉnh đầu tới ngực / Chiều rộng của bụng
- = Chiều dài của cẳng tay / Chiều dài bàn tay
- = Vai đến các đầu ngón tay / Khuỷu tay đến các đầu ngón tay
- = Hông đến mặt đất / Đầu gối đến mặt đất



Nếu trên cơ thể bạn ...



Φ

- = Chiều cao / Đỉnh đầu đến đầu ngón tay
- = Đỉnh đầu tới đầu ngón tay / Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ)
- = Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ) / Đỉnh đầu tới ngực
- = Đỉnh đầu tới rốn (hoặc cùi chỏ) / Chiều rộng đôi vai
- = Đỉnh đầu tới ngực / Chiều rộng của bụng
- = Chiều dài của cẳng tay / Chiều dài bàn tay
- = Vai đến các đầu ngón tay / Khuỷu tay đến các đầu ngón tay
- = Hông đến mặt đất / Đầu gối đến mặt đất

... thì chắc chắn trông bạn sẽ rất cân đối và đẹp thẩm mỹ!

- Gọi độ dài từ rốn lên đến đỉnh đầu là x,
- độ dài từ rốn xuống đến chân là y,
- độ dài một dang tay gọi là a

Nếu $\frac{x}{y} = \frac{a}{x+y} = \Phi$, ..

- Gọi độ dài từ rốn lên đến đỉnh đầu là x,
- độ dài từ rốn xuống đến chân là y,
- độ dài một dang tay gọi là a

Nếu $\frac{x}{y} = \frac{a}{x+y} = \Phi$, ..

... thì đó là thân hình của **siêu người mẫu!**

Tỉ lệ vàng $\leftrightarrow$ Vàng 9999

Các hãng thời trang lớn đều tuân thủ nghiêm ngặt quy định này khi tuyển người mẫu!

- Gọi độ dài từ rốn lên đến đỉnh đầu là x,
- độ dài từ rốn xuống đến chân là y,
- độ dài một dang tay gọi là a

Nếu $\frac{x}{y} = \frac{a}{x+y} = \Phi$, ..

... thì đó là thân hình của **siêu người mẫu!**

Tỉ lệ vàng $\leftrightarrow$ Vàng 9999

Các hãng thời trang lớn đều tuân thủ nghiêm ngặt quy định này khi tuyển người mẫu!

Biểu diễn nốt nhạc: C, D, E, F, G, A, B

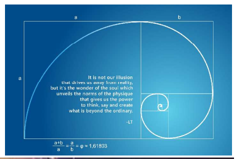
$1 \leftrightarrow$ C, $2 \leftrightarrow$ D, $3 \leftrightarrow$ E, $4 \leftrightarrow$ F, $5 \leftrightarrow$ G, $6 \leftrightarrow$ A, $7 \leftrightarrow$ B, $8 \leftrightarrow$ C, ...

Điệu VALSE FIBONACCI

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A G F D A C B C... *Click here*

"Dường như Đấng Tạo Hóa đang tiết lộ với chúng ta về bí mật của bản thiết kế mà Ngài đưa vào trong mỗi phần tử của vũ trụ!"



SỰ KỲ DIỆU CỦA DÃY SỐ TỔ HỢP

Giới thiệu chung

Khoa Học Máy Tính ⊂ Toán Học

Giới thiệu chung

- Trong kì thi thường xuyên có bài toán giải bằng phương pháp toán học.
- Bài toán cần được phân tích toán học để có thể giải được hiệu quả.
- Sử dụng một chút toán học trước khi lập trình có thể làm ngắn và đơn giản hóa chương trình.

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.
- Nếu tìm được quy luật, bài coi như giải xong.
- Bài có thể được phân loại là dạng bài toán học ad-hoc.
- Đòi hỏi tư duy toán học.

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.
- Nếu tìm được quy luật, bài coi như giải xong.
- Bài có thể được phân loại là dạng bài toán học ad-hoc.
- Đòi hỏi tư duy toán học.
- Một số mẹo hữu ích:
  - Giải một số test nhỏ bằng tay.
  - Quan sát xem lời giải có quy luật gì không.

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.
- Nếu tìm được quy luật, bài coi như giải xong.
- Bài có thể được phân loại là dạng bài toán học ad-hoc.
- Đòi hỏi tư duy toán học.
- Một số mẹo hữu ích:
  - Giải một số test nhỏ bằng tay.
  - Quan sát xem lời giải có quy luật gì không.
- Liệu quy luật của lời giải có bao hàm các bài toán con chồng nhau?

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.
- Nếu tìm được quy luật, bài coi như giải xong.
- Bài có thể được phân loại là dạng bài toán học ad-hoc.
- Đòi hỏi tư duy toán học.
- Một số mẹo hữu ích:
  - Giải một số test nhỏ bằng tay.
  - Quan sát xem lời giải có quy luật gì không.
- Liệu quy luật của lời giải có bao hàm các bài toán con chồng nhau? Ta có thể sử dụng phương pháp QHĐ.

Tìm quy luật và công thức

- Một số bài toán mà lời giải có quy luật nào đó.
- Nếu tìm được quy luật, bài coi như giải xong.
- Bài có thể được phân loại là dạng bài toán học ad-hoc.
- Đòi hỏi tư duy toán học.
- Một số mẹo hữu ích:
  - Giải một số test nhỏ bằng tay.
  - Quan sát xem lời giải có quy luật gì không.
- Liệu quy luật của lời giải có bao hàm các bài toán con chồng nhau? Ta có thể sử dụng phương pháp QHĐ.
- Quan sát sự lặp lại một số cá thể hay một số chuỗi.

Cấp số cộng

- Ta thường nhìn thấy quy luật dạng

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

Cấp số cộng

- Ta thường nhìn thấy quy luật dạng

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

- Đây gọi là cấp số cộng.

$$a_n = a_{n-1} + c$$

Cấp số cộng

- Tùy vào tình huống ta có thể có được phần tử thứ n

$$a_n = a_1 + (n-1)c$$

- Hoặc tổng một đoạn

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Cấp số cộng

- Tùy vào tình huống ta có thể có được phần tử thứ n

$$a_n = a_1 + (n-1)c$$

- Hoặc tổng một đoạn

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Còn nhớ công thức?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cấp số nhân

- Một số quy luật khác ta thường gặp là Cấp số nhân

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

Cấp số nhân

- Một số quy luật khác ta thường gặp là Cấp số nhân

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

- Tổng quát hơn

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \ldots$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

Cấp số nhân

- Tổng của một đoạn

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Cấp số nhân

- Tổng của một đoạn

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

- Hoặc từ phần tử thứ m đến phần tử thứ n

$$\sum_{i=m}^{n} ar^i = \frac{a(r^m-r^{n+1})}{(1-r)}$$

Một chút về log

- Đôi khi tính toán trên log có thể là một sự lựa chọn hiệu quả.

Một chút về log

- Đôi khi tính toán trên log có thể là một sự lựa chọn hiệu quả.
- Trong cả C++(`<cmath>`) và Java(`java.lang.Math`) ta đều có log cơ số tự nhiên

```
double log(double x);
```

Một chút về log

- Đôi khi tính toán trên log có thể là một sự lựa chọn hiệu quả.
- Trong cả C++(<cmath>) và Java(java.lang.Math) ta đều có log cơ số tự nhiên

```
    double log(double x);
```

và log cơ số 10 10

```
    double log10(double x);
```


Một chút về log

- Đôi khi tính toán trên log có thể là một sự lựa chọn hiệu quả.
- Trong cả C++(<cmath>) và Java(java.lang.Math) ta đều có log cơ số tự nhiên

```
    double log(double x);
```

và log cơ số 10 10

```
    double log10(double x);
```

- Hàm số mũ

```
    double exp(double x);
```


Ví dụ

- Số nào là lũy thừa của 17 đầu tiên mà có k chữ số trong hệ cơ số b?

Ví dụ

- Số nào là lũy thừa của 17 đầu tiên mà có k chữ số trong hệ cơ số b?
- Phương pháp trực tiếp: Lặp lần lượt các lũy thừa của 17 và tính số chữ số.

Ví dụ

- Số nào là lũy thừa của 17 đầu tiên mà có k chữ số trong hệ cơ số b?
- Phương pháp trực tiếp: Lặp lần lượt các lũy thừa của 17 và tính số chữ số.
- Tuy nhiên lũy thừa của 17 tăng rất nhanh theo hàm số mũ!

$$17^{16} > 2^{64}$$

- Điều gì xảy ra nếu $k = 500$ ($\sim 1.7 \cdot 10^{615}$), hoặc lớn hơn?

Ví dụ

- Số nào là lũy thừa của 17 đầu tiên mà có k chữ số trong hệ cơ số b?
- Phương pháp trực tiếp: Lặp lần lượt các lũy thừa của 17 và tính số chữ số.
- Tuy nhiên lũy thừa của 17 tăng rất nhanh theo hàm số mũ!

$$17^{16} > 2^{64}$$

- Điều gì xảy ra nếu $k = 500$ ($\sim 1.7 \cdot 10^{615}$), hoặc lớn hơn?
- Không thể giải được với cách biểu diễn thông thường.
- Tại sao không dùng log?

Ví dụ

- Nhớ rằng ta có thể tính số chữ số của một số n trong hệ cơ số b bằng $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$.

Ví dụ

- Nhớ rằng ta có thể tính số chữ số của một số n trong hệ cơ số b bằng $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$.
- Nhưng làm thế nào để thực hiện với chỉ các hàm ln or $\log_{10}$?

Ví dụ

- Nhớ rằng ta có thể tính số chữ số của một số n trong hệ cơ số b bằng $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$.
- Nhưng làm thế nào để thực hiện với chỉ các hàm ln or $\log_{10}$?
- Hãy đổi cơ số!

$$\log_b(a) = \frac{\log_d(a)}{\log_d(b)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

- Bấy giờ ít nhất ta có thể tính số chữ số mà không cần đảo cơ số

```
int digitsInBase(int n, int b){
  return static_cast<int>(floor(log(n)/log(b)) + 1);
}
```


Ví dụ

- Ta vẫn phải thử lần lượt các lũy thừa của 17 nhưng có thể làm dạng log

$$\ln(17^{x-1} \cdot 17) = \ln(17^{x-1}) + \ln(17)$$

Ví dụ

- Ta vẫn phải thử lần lượt các lũy thừa của 17 nhưng có thể làm dạng log

$$\ln(17^{x-1} \cdot 17) = \ln(17^{x-1}) + \ln(17)$$

- Tổng quát

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

- Đối với phép chia

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Ví dụ: Cách đơn giản hơn nữa:

- Giải bài toán: tìm x nhỏ nhất sao cho

$$\lfloor \log_b(17^x) \rfloor = k - 1$$

Ví dụ: Cách đơn giản hơn nữa:

- Giải bài toán: tìm x nhỏ nhất sao cho

$$\lfloor \log_b(17^x) \rfloor = k - 1$$

- Sử dụng tính chất quan trọng: $\log_b(a^c) = c \cdot \log_b(a)$,

$$\left\lfloor x \cdot \frac{\ln(17)}{\ln(b)} \right\rfloor = k - 1,$$

$$(k-1) \cdot \frac{\ln(b)}{\ln(17)} \leq x < k \cdot \frac{\ln(b)}{\ln(17)}$$

- Vậy, $x = \left\lceil (k-1) \cdot \frac{\ln(b)}{\ln(17)} \right\rceil$

Đổi cơ số

- Vai trò của cơ số.

Đổi cơ số

- Vai trò của cơ số.
- Làm thế nào nếu ta thực sự cần đổi cơ số?

Đổi cơ số

- Vai trò của cơ số.
- Làm thế nào nếu ta thực sự cần đổi cơ số?
- Thuật toán đơn giản

```
vector<int> toBase(int base, int val) {
    vector<int> res;
    while(val) {
        res.push_back(val % base);
        val /= base;
    }
    return val;
```

- Bắt đầu từ số thứ 0, tính toán bội số của từng lũy thừa.

Làm việc với kiểu double

Làm việc với kiểu double

- So sánh các số double, nghe có vẻ là ý tưởng tồi.

Làm việc với kiểu double

- So sánh các số double, nghe có vẻ là ý tưởng tồi.
- Làm gì khác nếu ta làm việc với các số thực?

Làm việc với kiểu double

- So sánh các số double, nghe có vẻ là ý tưởng tồi.
- Làm gì khác nếu ta làm việc với các số thực?
- So sánh chúng với một vài độ chính xác.

Làm việc với kiểu double

- So sánh các số double, nghe có vẻ là ý tưởng tồi.
- Làm gì khác nếu ta làm việc với các số thực?
- So sánh chúng với một vài độ chính xác.
- Hai số coi như bằng nhau nếu khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một hằng số epsilon rất nhỏ nào đó.

```
const double EPS = 1e-9;

if (abs(a - b) < EPS) {
...
}
```


Làm việc với kiểu double

- Toán tử nhỏ hơn:

```
    if (a < b - EPS) {
    ...
    }
```

- Nhỏ hơn hoặc bằng:

```
    if (a  < b + EPS) {
    ...
    }
```

- Các toán tử khác làm tương tự.

Làm việc với kiểu double

- Điều này giúp ta sử dụng được các thuật toán dùng phép so sánh.

Làm việc với kiểu double

- Điều này giúp ta sử dụng được các thuật toán dùng phép so sánh.
- Ví dụ

```

struct cmp {
    bool operator(){double a, double b}{
        return a < b - EPS;
    }
};

set<double, cmp> doubleSet();
```

- Các toán tử khác có thể viết tương tự.

SỰ KỲ DIỆU CỦA DÃY SỐ TỔ HỢP

Nghiên cứu các cấu trúc rời rạc đếm được.

Nghiên cứu các cấu trúc rời rạc đếm được.

Bài toán liệt kê gốc: Cho một chuỗi vô hạn các tập $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ chứa các đối tượng thỏa mãn một tập các đặc tính. Hãy xác định

$$a_n := |A_n|$$

với n tổng quát.

Phương pháp đếm cơ bản

- Giai thừa, số lượng hoán vị của n đối tượng

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

- Hệ số nhị thức,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Phương pháp đếm cơ bản

- Giai thừa, số lượng hoán vị của n đối tượng

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

- Hệ số nhị thức,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Số cách chọn k đối tượng từ n đối tượng, không kể thứ tự.

Phương pháp đếm cơ bản

Một số tính chất

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Phương pháp đếm cơ bản

Tam giác Pascal!

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8} \\
\binom{9}{0} \quad \binom{9}{1} \quad \binom{9}{2} \quad \binom{9}{3} \quad \binom{9}{4} \quad \binom{9}{5} \quad \binom{9}{6} \quad \binom{9}{7} \quad \binom{9}{8} \quad \binom{9}{9} \\
\binom{10}{0} \quad \binom{10}{1} \quad \binom{10}{2} \quad \binom{10}{3} \quad \binom{10}{4} \quad \binom{10}{5} \quad \binom{10}{6} \quad \binom{10}{7} \quad \binom{10}{8} \quad \binom{10}{9} \quad \binom{10}{10}
\end{array}$$

Một số tính chất hữu ích

Một số tính chất hữu ích

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Một số tính chất hữu ích

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Một số tính chất hữu ích

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

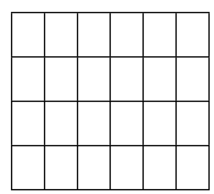
- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- Tính chất không thông dụng “tổng gậy hockey ”

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$$

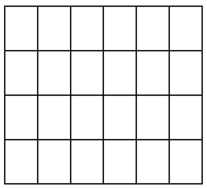
Ví dụ

Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



Ví dụ

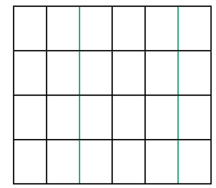
Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.

Ví dụ

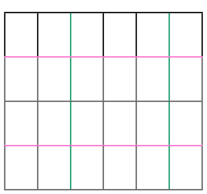
Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng

Ví dụ

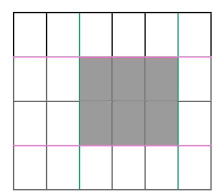
Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng
  - 2 cạnh ngang

Ví dụ

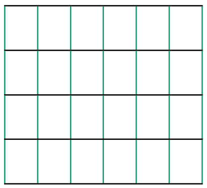
Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng
  - 2 cạnh ngang

Ví dụ

Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?

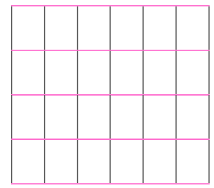


- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng
  - 2 cạnh ngang
- Số cách chọn 2 cạnh đứng là

$$\binom{n}{2}$$

Ví dụ

Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?

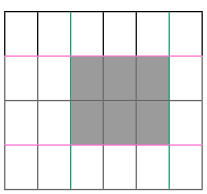


- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng
  - 2 cạnh ngang
- Số cách chọn 2 cạnh ngang là

$$\binom{m}{2}$$

Ví dụ

Có thể có bao nhiêu hình chữ nhật trên lưới $m \times n$?



- Một hình chữ nhật cần 4 cạnh, 2 cạnh ngang và 2 cạnh đứng.
  - 2 cạnh đứng
  - 2 cạnh ngang
- Vậy tổng số cách tạo ra một hình chữ nhật là

$$\binom{n}{2}\binom{m}{2} = \frac{n!m!}{(n-2)!(m-2)!2!2!} = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$$

Đa thức

Điều gì xảy ra nếu ta có nhiều đối tượng có cùng giá trị?

Đa thức

Điều gì xảy ra nếu ta có nhiều đối tượng có cùng giá trị?

- Số lượng hoán vị trên n đối tượng, với n_i là số đối tượng cùng giá trị thứ i.(Đa thức)

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Đa thức

Điều gì xảy ra nếu ta có nhiều đối tượng có cùng giá trị?

- Số lượng hoán vị trên n đối tượng, với n_i là số đối tượng cùng giá trị thứ i.(Đa thức)

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- Số cách chọn k đối tượng từ một tập n đối tượng với mỗi đối tượng có thể chọn nhiều hơn 1 lần.

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Ví dụ

Có bao nhiêu cách khác nhau để cho k quả bóng giống nhau vào n cái hộp?

Ví dụ

Có bao nhiêu cách khác nhau để cho k quả bóng giống nhau vào n cái hộp?

- Bằng số lời giải không âm của

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

Ví dụ

Có bao nhiêu cách khác nhau để cho k quả bóng giống nhau vào n cái hộp?

- Bằng số lời giải không âm của

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

- Tưởng tượng ta có một chuỗi bit gồm toàn số 1 có độ dài $n + k - 1$

$$\underbrace{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \ldots 1}_{n+k-1}$$

Ví dụ

- Chọn $n - 1$ bit để đổi thành 0

$$1 \ldots 1\,0\,1 \ldots 1\,0 \ldots 0\,1 \ldots 1$$

Ví dụ

- Chọn $n - 1$ bit để đổi thành 0

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{x_1}0\underbrace{1 \ldots 1}_{x_2}0 \ldots 0\underbrace{1 \ldots 1}_{x_n}$$

- Sau đó tổng số số 1 sẽ là k, mỗi số 1 tượng trưng cho một phần tử, và được chia thành n nhóm

Ví dụ

- Chọn $n - 1$ bit để đổi thành 0

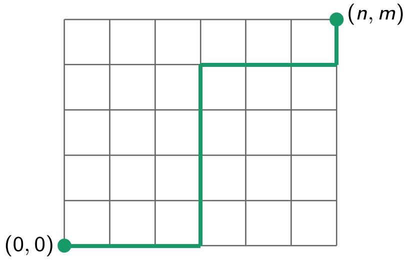
$$\underbrace{1 \ldots 1}_{x_1}0\underbrace{1 \ldots 1}_{x_2}0 \ldots 0\underbrace{1 \ldots 1}_{x_n}$$

- Sau đó tổng số số 1 sẽ là k, mỗi số 1 tượng trưng cho một phần tử, và được chia thành n nhóm
- Số cách chọn các bit để chuyển

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

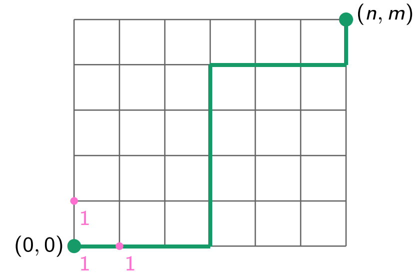
Hệ số nhị thức

Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?



Hệ số nhị thức

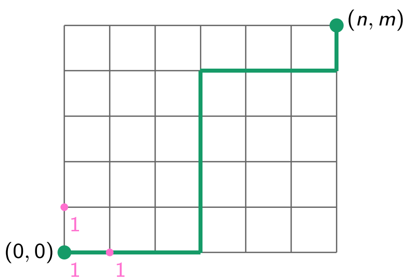
Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?



- Có 1 đường đi đến vị trí $(0,0)$

Hệ số nhị thức

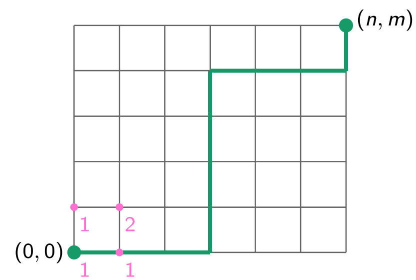
Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?



- Có 1 đường đi đến vị trí $(0,0)$
- Có 1 đường đi đến $(1,0)$ và $(0,1)$

Hệ số nhị thức

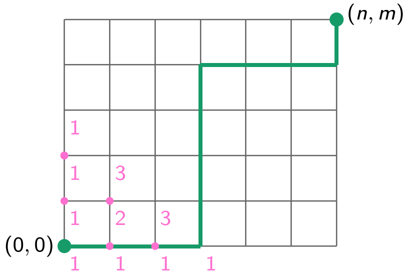
Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?



- Có 1 đường đi đến vị trí $(0,0)$
- Có 1 đường đi đến $(1,0)$ và $(0,1)$
- Các đường đi đến $(1,1)$ là tổng số đường đi đến $(0,1)$ và $(1,0)$.

Hệ số nhị thức

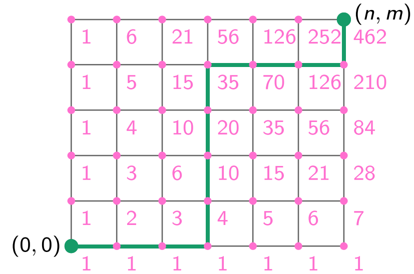
Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?



- Có 1 đường đi đến vị trí $(0,0)$
- Có 1 đường đi đến $(1,0)$ và $(0,1)$
- Các đường đi đến $(1,1)$ là tổng số đường đi đến $(0,1)$ và $(1,0)$.
- Số đường đi đến (i,j) là tổng số đường đi đến $(i-1,j)$ và $(i,j-1)$.

Hệ số nhị thức

Có bao nhiêu đường đi trên lưới từ vị trí $(0,0)$ đến vị trí (n,m) trên lưới?

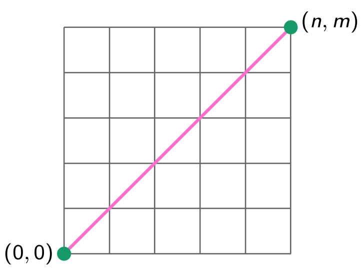


- Có 1 đường đi đến vị trí $(0,0)$
- Có 1 đường đi đến $(1,0)$ và $(0,1)$
- Các đường đi đến $(1,1)$ là tổng số đường đi đến $(0,1)$ và $(1,0)$.
- Số đường đi đến (i,j) là

$$\binom{i+j}{i}$$

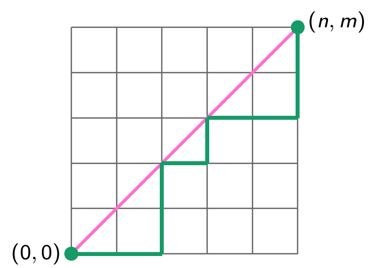
Catalan

Điều gì xảy ra nếu ta không được phép đi qua đường chéo chính của lưới?



Catalan

Điều gì xảy ra nếu ta không được phép đi qua đường chéo chính của lưới?

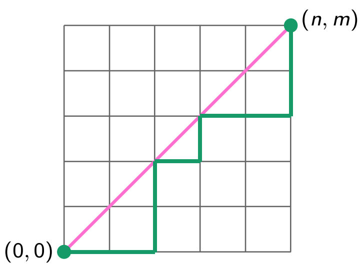


- Số lượng đường đi từ $(0,0)$ đến (n,m)

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Catalan

Điều gì xảy ra nếu ta không được phép đi qua đường chéo chính của lưới?



- Số lượng đường đi từ $(0, 0)$ đến (n, m)

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- C_n được gọi là số Catalan.
- Rất nhiều bài toán có lời giải liên quan đến số Catalan.

- Số cách đặt toàn bộ dấu ngoặc đúng cho $n + 1$ phần tử.

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

- Số cách đặt toàn bộ dấu ngoặc đúng cho $n + 1$ phần tử.

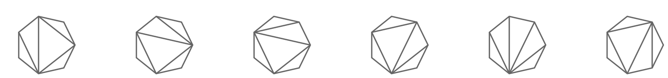
$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

- Số lượng các hoán vị có thể sắp xếp được qua stack độ dài n.

- Số cách đặt toàn bộ dấu ngoặc đúng cho $n + 1$ phần tử.

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

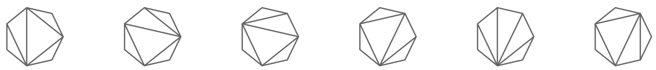
- Số lượng các hoán vị có thể sắp xếp được qua stack độ dài n.
- Số lượng cách tam giác phân đa giác có $n + 2$ cạnh



- Số cách đặt toàn bộ dấu ngoặc đúng cho $n+1$ phần tử.

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

- Số lượng các hoán vị có thể sắp xếp được qua stack độ dài n.
- Số lượng cách tam giác phân đa giác có $n+2$ cạnh



- Số lượng cây nhị phân đầy đủ có $n+1$ lá.

- Số cách đặt toàn bộ dấu ngoặc đúng cho $n+1$ phần tử.

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

- Số lượng các hoán vị có thể sắp xếp được qua stack độ dài n.
- Số lượng cách tam giác phân đa giác có $n+2$ cạnh

- Số lượng cây nhị phân đầy đủ có $n+1$ lá.
- Và rất nhiều nữa.

Số Fibonacci

Dãy Fibonacci được định nghĩa đệ quy như sau

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \end{aligned}$$

Số Fibonacci

Dãy Fibonacci được định nghĩa đệ quy như sau

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \end{aligned}$$

Có thể tính f_n trong thời gian $O(N)$ bằng QHĐ.

Số Fibonacci

Dãy Fibonacci được định nghĩa đệ quy như sau

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Có thể tính f_n trong thời gian $O(N)$ bằng QHĐ.
Tuy nhiên ta có thể làm tốt hơn nữa.

Biểu diễn ma trận dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci có thể được biểu diễn bằng các vectơ

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Biểu diễn ma trận dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci có thể được biểu diễn bằng các vectơ

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Hoặc đơn giản như một ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Biểu diễn ma trận dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci có thể được biểu diễn bằng các vectơ

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Hoặc đơn giản như một ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Sử dụng tính toán hàm mũ nhanh, ta có thể tính f_n trong thời gian $O(\log N)$.

Với bất kỳ công thức tuyến tính

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \dots c_k a_{n-k}$$

đều có thể biểu diễn tương tự

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

Với bất kỳ công thức tuyến tính

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \dots c_k a_{n-k}$$

đều có thể biểu diễn tương tự

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

Với một công thức đệ quy được định nghĩa như một hàm tuyến tính của k biến, thời gian tính toán sẽ là $O(k^3 \log N)$.

Các bước giải bài toán cho STT tìm dãy số

1. Tìm công thức truy hồi bằng TƯ DUY hoặc KHẢO SÁT. Ví dụ: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, nếu phần tử thứ nhất a_1 được chọn thì là $\binom{n-1}{k-1}$, nếu a_1 không được chọn thì là $\binom{n-1}{k}$.
2. Truy hồi theo các thành phần của công thức. Ví dụ, với $\binom{n}{k}$, nếu STT $\le \binom{n-1}{k-1}$ thì phần tử thứ nhất sẽ được chọn và truy hồi theo phần trên $\binom{n-1}{k-1}$, nếu không thì phần tử thứ nhất không được chọn và truy hồi theo phần dưới $\binom{n-1}{k}$.

- Có thể phải Xử lý số lớn / Xử lý phép chia lấy dư.