WARUNEK CAUCHY'EGO

Definicja 38. *Mówimy, że ciąg a_n spełnia warunek Cauchy'ego jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich n, m większych od N zachodzi $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

Twierdzenie 40. *Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

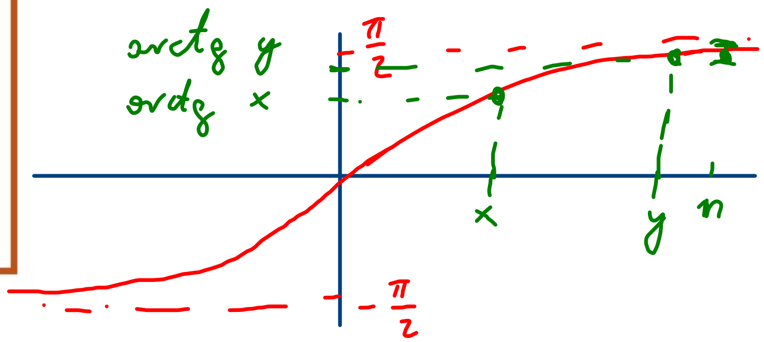
← ciągi liczb rzeczywistych

Uwaga 41.

- *Rozważmy zamiast $\mathbb{R}$ zbiór $X = (0, 1)$. Wtedy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie ma granicy w zbiorze X.*
- *Rozważmy na $\mathbb{R}$ inną niż naturalna odległość, tzn. niech*

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|\,.$$

Wtedy ciąg $a_n = n$ spełnia warunek Cauchy'ego w tej metryce, ale nie jest zbieżny.



LICZBA e

N. Bernoulliego

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$x>-1$

$n\in\mathbb{N}$

Twierdzenie 42.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ciąg x_n jest rosnący, ciąg y_n jest malejący, oba są ograniczone i zbieżne do tej samej liczby. Ich granicę oznaczamy e (liczba Eulera, liczba Nepera).

d-d • $x_n<y_n$

• x_n rosnący:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1-1}}=\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{N.B.}{>}\left(1+(n+1)\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{\frac{n}{n+1}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\frac{n+1}{n}}=1$$

Czyli x_n jest (ściśle rosnący).

• y_n malejący:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+1-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}=\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\underset{N.B}{>}\left(1+\overbrace{(n+1)\frac{1}{n^2-1}}^{\frac{1}{n-1}}\right)\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=1$$

czyli y_n ściśle malejący

Twierdzenie 42.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ciąg x_n jest rosnący, ciąg y_n jest malejący, oba są ograniczone i zbieżne do tej samej liczby. Ich granicę oznaczamy e (liczba Eulera, liczba Nepera).

$x_1 = 2$

$x_2 = \frac{9}{4}$

$x_3 = \frac{64}{27}$

$\vdots$

$$2 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_2 < y_1 = 4$$

Czyli z tw. o ciągu monotonicznym i ogr. x_n i y_n zbiegają.

UWAGA! Definiujemy $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\underset{\downarrow\atop e}{x_n} \cdot \underset{\downarrow\atop 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = y_n$$

zatem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$

(1) $$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = c_n} \qquad 0! = 1$$

$$x_n \geqslant d_n \qquad x_n \to e \qquad d_n \to c_m$$

$\boxed{x_n \leq c_n}$ Niech $m \in \mathbb{N}$ i $n > m$.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > \overbrace{1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!}}^{d_n}$$

$$\frac{n}{n} \to 1, \quad \frac{n-1}{n} \to 1, \quad \frac{n-k+1}{n} \to 1$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}$$

(2) Zatem $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n}_{= e} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = c_m$$

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad \underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{x_m} \overset{(1)}{\leqslant} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}}_{c_m} \overset{(2)}{\leqslant} e$$

$$x_m \leqslant c_m \leqslant e$$

$$x_m \to e, \qquad c_m \to e$$

PODSUMOWANIE

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = \frac{5}{2}, \quad c_3 = 2{,}5 + \frac{1}{6}$$

Twierdzenie 43. *Istnieje ciąg θ_n spełniający $0 < \theta_n < 1$ oraz*
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}.$$
W szczególności:
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

d-d Wiemy już że $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$

Niech $m > n$.

$$c_m = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}}_{c_n} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{m!} = c_n + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

$m - n$ składników

$$= c_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot \ldots \cdot m}\right)$$

$m - n - 1$ czynników

$$< c_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$

$$= c_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{n+2}} < c_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$\to \frac{n+1}{n+2}$

$q = \frac{1}{n+2}$

$$1 + q + \ldots + q^{m-n-1} = \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}$$

$$c_n < c_m < c_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

bo c_m rośnie

Przechodząc z m do ∞:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}}_{\frac{1}{n! \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}}$$

$\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$\wedge$

1

$$\theta_n = \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) n \cdot n!$$

$$0 < \theta_n < 1$$

Uwaga 44. *Rozwinięcie dziesiętne liczby e ma postać $e = 2,7182818284590\ldots$.*

Twierdzenie 45. *Liczba e jest niewymierna.*

d-d załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$ dla $p, q \in \mathbb{N}$.

Mamy $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$ $\quad n = q$

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q \cdot q!} \quad / \cdot q!$$

$$0 < \underbrace{p \cdot (q-1)!}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < \frac{1}{q} < 1$$

↯

Twierdzenie 46. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$(n+1)^n \overset{L}{<} e^n n! \overset{P}{<} (n+1)^{n+1}.$$

Ponadto

$$(W)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$$

d-d

$$(L)\quad e^n > 2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$(P)\quad e^n < 2^2 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$$n+1 < 2n$$

$$(W)\quad \underbrace{\frac{n+1}{n\cdot e}}_{\to \frac{1}{e}} \overset{L}{<} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \overset{P}{<} \frac{\sqrt[n]{(n+1)^n \cdot (n+1)}}{n\cdot e} < \underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}_{\to \frac{1}{e}}$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < n! < n^n$$

Uwaga 47. *Można udowodnić, że liczba e jest przestępna, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Liczby będące pierwiastkami takich wielomianów nazywamy liczbami algebraicznymi.*

- x jest algebraiczna, jeśli $\exists W$ - wielomian o wsp. całkowitych $W(x) = 0$
- x jest przestępna jeśli nie jest algebraiczna.

np. $\sqrt{2}$

$W(x) = x^2 - 2$

$\log_2 3 = x$

$2^x = 3$

LICZBA γ

Twierdzenie 48.

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),\ v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Ciąg u_n jest rosnący, ciąg v_n jest malejący, oba są ograniczone i zbieżne do tej samej liczby. Ich granicę oznaczamy γ (stała Eulera).

d-d $\quad (1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \quad / \ln \qquad$ • $u_n < v_n$

$$n \ln(1+\tfrac{1}{n}) \overset{P}{<} 1 \overset{L}{<} (n+1) \cdot \ln(1+\tfrac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n+1} \overset{L}{<} \ln(1+\tfrac{1}{n}) \overset{P}{<} \frac{1}{n}$$

$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} \overset{P}{>} 0 \qquad u_n$ rosnący

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} \overset{L}{<} 0 \qquad v_n$ malejący

$$1 - \ln 2 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < v_n < \ldots < v_2 < v_1 = 1$$

2 tw. o ciągu monot. i ogr. $\lim u_n$ i $\lim v_n$ istnieją

$$0 < v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(1+\tfrac{1}{n}) \longrightarrow 0$$

$$\gamma := \lim_n v_n = \lim_n u_n$$

Uwaga 49. *Rozwinięcie dziesiętne liczby* γ *ma postać* $\gamma = 0,5772156649\ldots$. *Ciekawostka: nie wiadomo, czy* γ *jest liczbą wymierną. Jeśli jest wymierna, to mianownik musi mieć więcej niż 200 000 cyfr.*

SZEREGI LICZBOWE

Definicja 1. *Dla ciągu a_n wyrażenia*

$$s_n = a_1 + ... + a_n$$

nazywamy ciągiem sum częściowych. Jeśli s_n jest zbieżny do liczby s, to piszemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

i mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny do liczby s.

Definicja 2. *Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach <u>dodatnich</u> jest rozbieżny do $+\infty$, gdy ciąg sum częściowych $s_n = a_1 + ... + a_n$ dąży do ∞. Piszemy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Podobnie definiujemy szeregi rozbieżne do $-\infty$.