INDUKCJA MATEMATYCZNA

Uwaga 18. *Zbiór liczb naturalnych* $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ *jest dobrze uporządkowany, tzn. dla dowolnego podzbioru* A *liczb naturalnych istnieje element najmniejszy.*

Uwaga 19. *Przez* $\mathbb{N}_0$ *będziemy oznaczać zbiór* $\{0, 1, 2, ...\}$.

Uwaga 20. *Niech* $T(n)$ *oznacza pewne stwierdzenie o liczbie naturalnej* n, *tzn. dla każdego* n *mamy inne zdanie, które jest prawdziwe lub fałszywe. Na logice* $T(n)$ *nazywamy "formą zdaniową".*

- $n^2 - 9 = 0$
- $n^3 > 100$
- ...

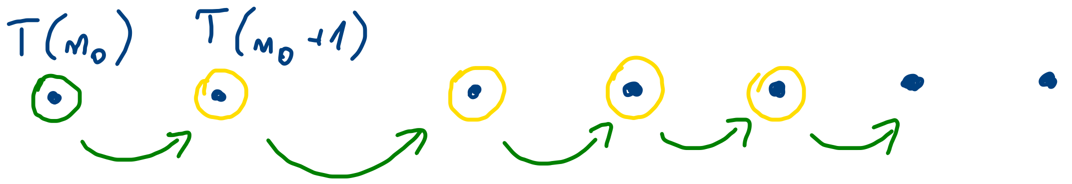
Twierdzenie 21. *[zasada indukcji matematycznej, wersja 1] Jeśli:*

(1) • *dla pewnego* $n_0 \in \mathbb{N}$ *zdanie* $T(n_0)$ *jest prawdziwe oraz*

(2) • *dla dowolnego* $k \geq n_0$ *z prawdziwości zdania* $T(k)$ *wynika prawdziwość zdania* $T(k+1)$ $(\forall k \geq n_0 \quad T(k) \implies T(k+1))$

to dla wszystkich $n \geq n_0$ *zdania* $T(n)$ *są prawdziwe.*

$T(1)$ $T(2)$ $T(3)$



$T(n_0) \Rightarrow \underline{T(n_0+1)}$

d-d

$A = \{ n \geq n_0 : T(n)$ jest nieprawdziwe $\}$ $\qquad$ (CEL: $A = \emptyset$)

Zał nie wprost, że $A \neq \emptyset$. Zatem $\exists\, a_0 \in A \qquad a_0 = \inf(A) = \min(A)$

• (1) $a_0 \neq n_0 \qquad a_0 > n_0$

• (2) $T(\underset{\geq n_0}{a_0 - 1}) \Rightarrow T(a_0)$ $\quad$ prawda $\quad$ fałsz $\quad$ ↯ $\quad$ (zatem $A = \emptyset$)

Twierdzenie 22. *Niech $k, n \in \mathbb{N}_0$ oraz $k \leq n$. Liczba podzbiorów $k-$ elementowych zbioru n-elementowego wynosi*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$T(n)$: Dla $k = 0, 1, \dots, n$ $\underbrace{\text{liczba podzbiorów } k\text{-el. zbioru } n\text{-el.}}_{a_{n,k}}$ wynosi $\binom{n}{k}$.

- $T(0)$ $n=0$, $k=0$ $\emptyset \to \binom{0}{0} = 1$
- $T(1)$ $n=1$ $k=0,1$ $\{a_1\}$ $\binom{1}{0} = 1$ ($\emptyset$) $\binom{1}{1} = 1$ ($\{a\}$)

Załóżmy, że $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę podzbiorów k-el. zbioru n-el.

Weźmy zbiór $(n+1)$-el. $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. $\binom{n+1}{0} = 1$ $\binom{n+1}{n+1} = 1$

Niech $k \in \{1, \dots, n\}$. Rozważmy podzb. k-el.
$\to$ te które zaw. a_{n+1} $= \binom{n}{k-1}$
$\to$ te które nie zaw. a_{n+1} $= \binom{n}{k}$

$$a_{n+1,k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{(\text{ćw.})}{=} \dots = \binom{n+1}{k}$$

Uwaga 24. *Zasadę indukcji matematycznej możemy modyfikować na różne sposoby. Np. jeśli sprawdzimy prawdziwość* $T(1)$ *oraz krok* $T(k) \implies T(k+2)$ *dla (nieparzystych)* $k \geq 1$*, to otrzymamy prawdziwość* $T(n)$ *dla wszystkich* n *nieparzystych. Ponadto zamiast implikacji* $T(k) \implies T(k+1)$ *możemy dla* $k \geq n_0$ *pokazać następującą implikację:*

$$[T(n_0) \wedge T(2) \wedge \ldots \wedge T(k)] \implies T(k+1),$$

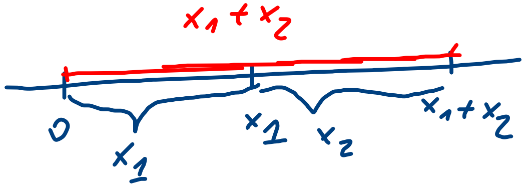
tzn. możemy uzasadnić $T(k+1)$ *używając wszystkich wcześniejszych zdań, a nie tylko jednego poprzedzającego* $T(k)$*.*

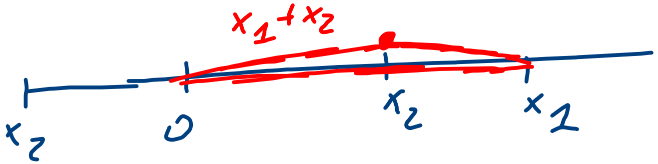
$$\begin{tikzcd}
T(1) \arrow[r, bend right] \arrow[rr, bend right=50] & T(2) \arrow[r, bend right] & T(3) & T(4)
\end{tikzcd}$$

NIERÓWNOŚCI

Twierdzenie 25. *[Nierówność trójkąta] Dla* $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$(1) \qquad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|,$$
$$(2) \qquad ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|,$$
$$(3) \qquad |x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|.$$





D-D

1° $x_1, x_2 \geq 0$

$|x_1 + x_2| = x_1 + x_2$
$|x_1| = x_1$
$|x_2| = x_2$

2° $x_1, x_2 \leq 0$

$|x_1 + x_2| = - x_1 - x_2$
$|x_1| = - x_1$
$|x_2| = - x_2$

3° $x_1 > 0$
$x_2 < 0$
$\quad \shortparallel$
$-y_2 \qquad y_2 > 0$

$|x_1| = x_1$
$|x_2| = -x_2 = y_2$

$L = |x_1 - y_2| \leq x_1 - y_2$
$\qquad\quad \wedge\!\shortparallel$
$P = x_1 + y_2$

Twierdzenie 25. *[Nierówność trójkąta] Dla* $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$(1) \qquad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|,$$

$$(2) \qquad ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|,$$

$$(3) \qquad |x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|.$$

(2) CEL: $|x_1| - |x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$ (b.s.o. $|x_1| \geqslant |x_2|$

$\iff |x_1| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2|$

$\iff |\underbrace{x_1 - x_2}_{y_1} + \underbrace{x_2}_{y_2}| \leqslant |\underbrace{x_1 - x_2}_{y_1}| + |\underbrace{x_2}_{y_2}|$ (wynika z (1))

(3) INDUKCJA $T(n)$: $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ $|x_1 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

- $T(2)$ pokazaliśmy w (1)
- $k \geqslant 2$ i zał. że $T(k)$ zachodzi. Rozważmy $T(k+1)$

$$|\underbrace{x_1 + ... + (x_k + x_{k+1})}_{\text{suma } k \text{ el.}}| \overset{T(k)}{\leqslant} |x_1| + ... + |x_{k-1}| + |x_k + x_{k+1}| \overset{T(2)}{\leqslant} |x_1| + ... + |x_{k+1}|$$

$\square$

Twierdzenie 26. *[Nierówność między średnimi] Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \dots, x_n \in \cancel{\mathbb{R}}$ mamy* > 0

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Dodatkowo: równość zachodzi tylko wtedy gdy wszystkie liczby są równe.

prawda $\longrightarrow$ $0 \le (x_1 - x_2)^2$

i $(x_1 - x_2)^2 > 0$

$x_1 \ne x_2$

$$0 \le (x_1 - x_2)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$0 \le x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$\Updownarrow$$
$$0 \le x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2$$
$$\Updownarrow$$

DOWÓD 1 (INDUKCJA)

- $n = 1$ $\quad L = \sqrt[1]{x_1} = x_1 \quad P = \frac{x_1}{1} = x_1$

$n = 2$ $\quad x_1, x_2 > 0$ $\quad \underline{\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}} \iff 2\sqrt{x_1 x_2} \le x_1 + x_2 \iff 4x_1x_2 \le (x_1 + x_2)^2$

$n = 4$

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_3 x_4}} \overset{T(2)}{\le} \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \le \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

- $T(m) \Rightarrow T(2m)$

$x_1, \dots, x_{2m}$

$$\sqrt[2m]{x_1 \dots x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_{2m}} \overset{T(2)}{\le} \frac{\sqrt[m]{x_1 \dots x_m} + \sqrt[m]{x_{m+1} \dots x_{2m}}}{2} \overset{T(m)}{\le}$$

$$\le \frac{\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{m}}{2} = \frac{x_1 + \dots + x_{2m}}{2m}$$

• $T(n) \Rightarrow T(n-1)$ $\quad n \geq 3$ $\quad G_{n-1} = \sqrt[n-1]{x_1 \dots x_{n-1}}$

CEL:

$$\boxed{A_{n-1} \geq G_{n-1}}$$

$$x_1, \dots, x_{n-1}, \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}_{A_{n-1}} \leftarrow n \text{ liab.}$$

$T(n) \Rightarrow$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot A_{n-1}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \overset{A_{n-1}}{\overset{\shortparallel}{A_{n-1}}}}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}$$

$$= \left(\frac{(x_1 + \dots + x_{n-1})\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}{n}\right)$$

$$1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} \qquad \frac{1}{n-1} = \frac{\frac{n-1+1}{n-1}}{n}$$

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \cdot A_{n-1}^{\frac{1}{n}} \leq A_{n-1}$$

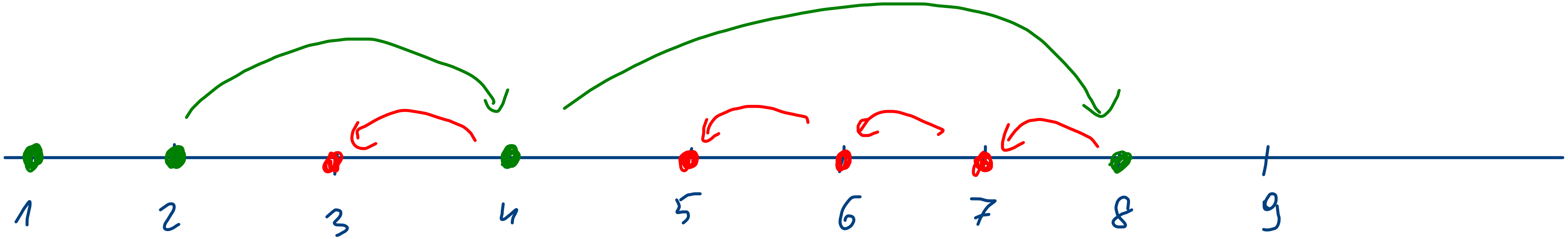
$$(x_1 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \leq A_{n-1}^{1 - \frac{1}{n}} = A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \quad \Big/ \; (\;)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$G_{n-1} = (x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq A_{n-1}$$

- $T(2)$
- $T(m) \Rightarrow T(2m) \quad \forall m \geq 1$
- $T(m) \Rightarrow T(m-1) \quad \forall m \geq 2$

KROK 1: $\forall k \geq 1 \quad T(2^k)$ zachodz

KROK 2: Jeśli $T(N)$ zachodzi, to $T(n)$ zachodzi dla $n < N$.



Twierdzenie 26. *[Nierówność między średnimi] Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in \cancel{\mathbb{R}}$ > 0 mamy*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Dodatkowo: równość zachodzi tylko wtedy gdy wszystkie liczby są równe.

UDOWODNIMY $T(n)$

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} < \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

o ile nie wszystkie $x_1, \ldots, x_n$ są sobie równe

DOWÓD (INDUKCJA)

- $T(2)$ (było) $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$
- $T(k) \Rightarrow T(k+1)$

Chcemy $x_1, \ldots, x_{k+1}$ (nie wszystkie równe)

$$G = \sqrt[k+1]{x_1 \ldots x_{k+1}} \overset{(*)}{<} \frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}$$

$$y_1 = \frac{x_1}{G}, \quad y_2 = \frac{x_2}{G}, \quad \ldots, \quad y_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{G}$$

$$(*) \Leftrightarrow G < \frac{y_1 \cdot G + \ldots + y_{k+1} \cdot G}{k+1} \Leftrightarrow \underbrace{1 < \frac{y_1 + \ldots + y_{k+1}}{k+1}}$$

$$\underbrace{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{k+1}} = \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}}{G^{k+1}} = \underbrace{1}$$

Przypadek ogólny wynika z nierówności $y_1+\dots+y_{k+1} > k+1$ dla $y_1,\dots,y_{k+1}>0$ t. że $y_1\cdot\ldots\cdot y_{k+1}=1$ i nie wszystkie są sobie równe.

Jest liczba mniejsza od 1 i większa od 1.

$y_1>1$, $y_2<1$.

B.S.O.

$$\left(\begin{aligned} &y_1+\dots+y_{k+1}\geq k+1\\ &y_1\cdot\ldots\cdot y_{k+1}=1\end{aligned}\right)$$

$$\underbrace{y_1+y_2}+\dots+y_{k+1} > \underbrace{y_1\cdot y_2+1}+y_3+\dots+y_{k+1}$$

$$=\underbrace{y_1y_2+y_3+\dots+y_{k+1}}_{\text{k liczb, których iloczyn } =1}+1 \overset{T(k)}{\geq} k+1$$

$y_1>1$

$y_2<1$

$y_1+y_2>y_1y_2+1$

$y_1-y_1y_2+y_2-1>0$

$y_1(1-y_2)-(1-y_2)>0$

$(\underset{\overset{\vee}{0}}{y_1-1})(\underset{\overset{\vee}{0}}{1-y_2})>0$

TW. 1 Dla liczb $y_1, \dots, y_k > 0$ t. że $y_1 \cdot \dots \cdot y_k = 1$ zachodzi

$$\frac{y_1 + \dots + y_k}{k} \geq 1$$

TW. 2 Dla liczb $x_1, \dots, x_k > 0$ zachodzi

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \geq \underbrace{\sqrt[k]{x_1 \cdot \dots \cdot x_k}}_{\text{„}G}$$

$G = \sqrt[k]{x_1 \cdot \dots \cdot x_k}$

$G^k = x_1 \cdot \dots \cdot x_k$

TW. 2 $\Rightarrow$ TW. 1 OCZYWISTE

TW. 1 $\Rightarrow$ TW. 2 $x_1, \dots, x_k$ $y_j = \frac{x_j}{G}$ $j = 1, \dots, k$

$$y_1 \cdot \dots \cdot y_k = \frac{x_1}{G} \cdot \dots \cdot \frac{x_k}{G} = 1 \qquad \frac{y_1 + \dots + y_k}{k} \geq 1 \qquad \frac{\frac{x_1}{G} + \dots + \frac{x_k}{G}}{k} \geq 1$$