Lista 3, Analiza Matematyczna I

1. Sprawdzić, które z podanych warunków są równoważne zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do liczby a.

ȧ) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \{m > N \Rightarrow |a_m - a| < \frac{1}{n}\}$

ḃ) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\}$

ċ) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{N}\}$

ḋ) $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{N}\}$

ė) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \{m > 2^N \Rightarrow |a_m - a| < \frac{1}{2^n}\}$

2. Obliczyć granice ciągów.[1]

a)
$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$$

ḃ)
$$\sqrt[n]{3^n - 2^n}$$

c)
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

ḋ)
$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{2n}{\sqrt{n^4+2n}}$$

ė)
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

ḟ)
$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

ġ)
$$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

3. Zbadać zbieżność ciągów:

ȧ) [2]
$$\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$$

ḃ)
$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{2^n})$$

c̈) [3]
$$(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \ldots (1 + \frac{1}{2^n})$$

ḋ)
$$x_1 = 2, \; x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}$$

4̇. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony a ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Pokazać, że ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli dodatkowo ciąg $\{a_n\}$ ma wyrazy dodatnie, to czy ciąg $\{a_n b_n\}$ musi być rozbieżny do $+\infty$?

5. Sprawdzić, które z podanych warunków są równoważne warunkowi Cauchy'ego dla ciągu $\{a_n\}$.

ȧ) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \qquad \{n > m > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{k}\}$

ḃ) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \qquad \{n > N, m > N^2 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\}$

ċ) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \{m > N, n \leq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{2^k}\}$

---

[1] *Wskazówka:* Twierdzenie o dwóch/trzech ciągach.

[2] *Wskazówka:* Zauważ, że ciąg jest malejący od pewnego miejsca i ma wyrazy mniejsze od $c(3/4)^n$.

[3] *Wskazówka:* Zauważ, że ciąg z podpunktu b) ma granicę dodatnią oraz iloczyn ciągów z podpunktów b) i c) jest mniejszy niż 1. W celu udowodnienia dodatniości granicy można wykazać nierówność $1-2^{-n} \geq \xi_n/\xi_{n-1}$ gdzie $\xi_n = 1 + 2/(n-1)$

6. Sprawdzić, czy podane ciągi spełniają warunek Cauchy'ego:

a)

$$\frac{\operatorname{arctg} 1}{3} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg} n}{3^n}$$

ḃ)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

c̈)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$$

ḋ) [4]

$$x_1 = 0, \; x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2}.$$

7̈. Wiadomo, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n = n(b_n - b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?

8̈. Pokazać, że jeśli ciąg x_n jest zbieżny, to także ciąg średnich arytmetycznych $\xi_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ jest zbieżny i posiada tę samą granicę.

9̈. Ciąg x_n jest określony następująco : $0 < x_1 < 1$, $x_n = x_{n-1}/2$ dla parzystych n, oraz $x_n = (1 + x_{n-1})/2$ dla nieparzystych n. Jakie punkty skupienia ma ten ciąg?[5]

1̇0. Czy ciąg $\sin n$ jest zbieżny?

---

[4] *Wskazówka:* Pokazać, że $|x_{n+1} - x_{m+1}| \leq (3/4)|x_n - x_m|$.

[5] *Wskazówka:* Obliczyć x_{2n} oraz x_{2n+1}.