Wróćmy do przykładu.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Cel: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(0) = 0$ dla $n \geq 0$

ale $f \not\equiv 0$

Dla $x \neq 0$.

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot (2x^{-3})$$

- Teza: $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ dla wiel. p_n.

indukcyjnie

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= e^{-1/x^2} \cdot \left(p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 2x^{-3}\right)$$

$$= e^{-1/x^2} \cdot p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

gdzie $p_{n+1}(t) = p_n'(t) \cdot (-t^2) + p_n(t) \cdot 2t^3$

Indukcyjnie pokażemy, że $f^{(n)}(0) = 0$.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - \overbrace{f^{(n)}(0)}^{=0 \text{ zał. ind.}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot p_n\left(\frac{1}{h}\right) \cdot e^{-\frac{1}{h^2}} =$$

$h^{-1} = s$

$h \to 0$

$s \to \pm\infty$

$$= \lim_{|s|\to\infty} s \cdot p_n(s) \cdot e^{-s^2} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{s\, p_n(s)}{e^{s^2}} = 0$$

$$\left|\frac{s\, p_n(s)}{e^{s^2}}\right| \leq \frac{c\,|s|^{\deg(p)+1}}{s^{2N}}$$

$\forall N \ \exists C$

$e^{-x} \leq C \cdot x^{-N}$

$\forall x > 0$

Więc:

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

na żadnym otoczeniu 0.

Uwaga 87. *Załóżmy, że szereg* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ma dodatni promień zbieżności. Wtedy:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Zatem szereg McLaurina funkcji $f(x)$ *jest równy wyjściowemu szeregowi.*

d-d

Szereg. pot. można różniczkować wyraz po wyrazie:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_n = a_n\cdot n!$$

Uwaga 88. *Jeśli na pewnym otoczeniu zera mamy równość:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

to $a_k = b_k$ *dla* $k = 0, 1, \ldots$.

d-d

$$f(0) = a_0 = b_0$$

$$g(x) = \frac{f(x) - a_0}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k-1}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = a_1 = b_1$$

itd.

Przykład 89. *Oblicz $f^{(2023)}(0)$ dla funkcji*

$$f(x) = x^3 e^{x^4}.$$

$$f(x) = x^3 e^{x^4} = x^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^{4k+3} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= \dots + \frac{1}{(505)!} \cdot x^{2023} + \dots$$

czyli $\frac{1}{(505)!} = a_{2023} = \frac{f^{(2023)}(0)}{(2023)!}$ $\qquad f^{(2023)}(0) = \frac{(2023)!}{(505)!}$

Definicja 90. *Dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ uogólniony symbol Newtona definiujemy jako:*

$$\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!}.$$

Dodatkowo określamy $\binom{a}{0} := 1$.

$k, n \in \mathbb{N}_0$

$k \leq N$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$n < k \qquad n-k < 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots 0 \, (n-k+1)}{k!} = 0$$

Przykład 91. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Dla $|x| < 1$ mamy:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad , x > -1$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

Ze wzoru Taylora: $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k + R_n \qquad \} R_n(x)$

Cel: dla $|x|<1$ pokażemy, że $R_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$

Z postaci Cauchy'ego reszty: istnieje $\theta = \theta(n,x) \in (0,1)$

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) =$$

$$= \frac{n\, x^n}{n(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n} \cdot \alpha\cdot(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

$$= \underbrace{n\, x^n \binom{\alpha}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n}}_{W}$$

$a_n = n \cdot x^n \cdot \binom{\alpha}{n} \longrightarrow 0$

bo $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)|x|^{n+1} \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{n\,|x|^n \left|\binom{\alpha}{n}\right|}$$

$$= \frac{n+1}{n}|x| \cdot \frac{|\alpha - n|}{n+1} \to |x|$$

~~bo $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{|x|^{n}\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \frac{n+1}{n}|x|\cdot\frac{|\alpha-n|}{n+1} \to |x|$~~

Cel: W jest ograniczone.

$$W = (1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

$$\le (1+\theta x)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n} = (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

$$\left(1-\theta \le 1+\theta x \iff 0 \le \theta(1+x)\right)$$

$|\theta x|<1 \quad \theta\in(0,1) \quad |x|<1$

Pamiętajmy, że $\theta = \theta(n,x)$, więc oszacujemy:

$$(1+\theta x)^{\alpha-1} \le \underbrace{\begin{cases} 2^{\alpha-1} & \alpha \ge 1 \\ 1-|x| & \alpha < 1 \end{cases}}_{\text{koniec celu zielonego}}$$

$\Leftarrow \quad 1+\theta x \ge 1-|x|$

$\iff |x| + \theta x \ge 0$

Zatem $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{R_n} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k. \quad \text{dla } |x|<1$$

Definicja 92. *Dla* $k \in \mathbb{N}$ *definiujemy:*

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1),$$

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k).$$

Wniosek 93. *Dla* $|x|<1$ *mamy:*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \cancel{x^n} x^{2n}, = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot x^{2n}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Ponadto mamy:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{-n}}{2n+1}\binom{2n}{n}.$$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$

d-d

z przykładu 91 dla $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $|x|<1$ ($\Leftrightarrow$ $|x^2|<1$) mamy

$$(1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots\overbrace{(-\frac{1}{2}-n+1)}^{-\frac{2n-1}{2}}}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n \cdot n! \cdot (2n)!!} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Zdefiniujmy: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$ $\quad g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin(x))'$

$g(0) = 0 = \arcsin(0)$

Zatem $\arcsin(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$ $\quad |x|<1$

bo $g(0) = \arcsin(0)$ i te funkcje mają tą samą pochodną

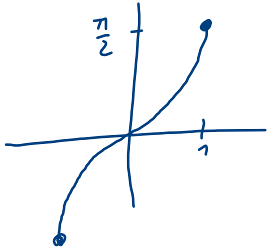
Wniosek 93. *Dla $|x| < 1$ mamy:*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot x^{2n}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Ponadto mamy:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{-n}}{2n+1} \binom{2n}{n}.$$



$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{dla } |x| < 1$$

ale arcsin jest ciągły z $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

[Zatem z tw. Abela mamy
$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n}$$
]

Uwaga: to jest OK, gdy wiemy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n}$ zbiega.

Tak jest, ale jeszcze tego nie wiemy.

Inaczej: dla $x \in (0,1)$

(*) $$\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 > \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} \cdot x^{2n+1} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} x^{2n+1}$$

(*) przy $x \to 1^-$ $$\frac{\pi}{2} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} = S$$

odwrotnie dla $x \in (0,1)$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} x^{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\cdot 4^n} = S$$

$\downarrow x \to 1^-$

$\frac{\pi}{2}$ czyli: $\frac{\pi}{2} \leq S$ zatem $\frac{\pi}{2} = S$

Uwaga: zbieżny szereg: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2n+3}\binom{2n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}} = \frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,\frac{1}{4} \longrightarrow 1$$

Uwaga 94. *Dowodząc ostatniej równości chciałoby się skorzystać z tw. Abela, ale pokazanie zbieżności szeregu po prawej wymaga dokładniejszej asymptotyki na $n!$ (wzór Stirlinga $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$, będzie w przyszłości).*

Wzór Stirlinga

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n]{} 1$$

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{4^n} =$$

$$= \underbrace{\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}}_{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}\right)^2}{(n!)^2}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Twierdzenie 95. *[Wzór Taylora z resztą w postaci Peano] Niech f będzie funkcją $(n-1)$-krotnie różniczkowalną na przedziale otwartym I oraz $a, b \in I$. Wtedy ~~istnieje liczba $\theta \in (0,1)$, taka że~~*

$$\overbrace{f(\cancel{x})}^{a+h} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\overbrace{\cancel{b-a}}^{h})^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

gdzie

$$R_n = \underset{\text{dla } h \to 0}{o(h^{n-1})}, \qquad \textit{tzn.} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^{n-1}} = 0.$$

d-d

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n(h)}{h^{n-1}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1!} f'(a) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a)}{h^{n-1}} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - \frac{h}{1!} \cdot f''(a) - \ldots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \cdot f^{(n-1)}(a)}{(n-1)\, h^{n-2}}$$

$$\overset{H}{=} \ldots =$$

$$\overset{H}{=} \frac{1}{n!} \lim_{h \to 0} \left[\frac{f^{(n-2)}(a+h) - f^{(n-2)}(a)}{h} - f^{(n-1)}(a) \right] = 0$$

Uwaga 96. *Jeśli założymy, że funkcja jest n-krotnie różniczkowalna, to można wywnioskować tę postać z reszty w postaci Lagrange'a/Cauchy'ego.*

Przykład 97. *Wyznaczyć granicę:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^7} - 1 - \frac{1}{3}x^7}{(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2})(\sin x - x + \frac{x^3}{6})^2}.$$

Wniosek 98. *Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Dla $|x| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots ,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots .$$