Lista 12, Analiza Matematyczna I

1. Wykazać, że dla $x \neq y$, $x, y > 0$ zachodzi

a)

$$\min(x,y) \leq \frac{x-y}{\log x - \log y} \leq \max(x,y)$$

ḃ)

$$\min(x,y) \leq \left(\frac{n}{m}\frac{x^m - y^m}{x^n - y^n}\right)^{1/(m-n)} \leq \max(x,y).$$

2. Wykazać nierówności.

ȧ)

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0,$$

ḃ)

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad x > 0,$$

ċ)

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}, \quad x > 0,$$

d̈)

$$e^x \geq \left(\frac{ex}{n}\right)^n, \quad x \geq 0.$$

3̇. Niech $h(x) = f(x)g(x)$. Wyrazić drugą pochodną funkcji $h(x)$ za pomocą funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz ich pochodnych. Wyprowadzić wzór na n-tą pochodną funkcji $h(x)$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

przy czym $f^{(0)}(x) = f(x)$.

4. Znaleźć wzór na n-tą pochodną funkcji:

ȧ) $x^{-1}\log x$,

ḃ) $e^x \cos x$.

5̇. Gracz baseballa biegnie po linii prostej, aby schwytać piłkę przy środku ogrodzenia boiska. Prędkość gracza w stopach na sekundę wynosi

$$v(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{11}{10}x + 25$$

gdy znajduje się w odległości x stóp od środka ogrodzenia. Jakie jest przyśpieszenie gracza, gdy znajduje się w odległości 1 stopy od środka płotu?

6. Zastosować różniczkowanie niejawne, aby obliczyć dy/dx w podanym punkcie.

a) $x^2 + xy + 2y^2 = 4$; $(-1,-1)$

b) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+2) = 8$; $(1,4)$

7̇. Znaleźć styczną do wykresu $x^3 + y^3 = 3xy$ w punkcie $(3/2, 3/2)$.

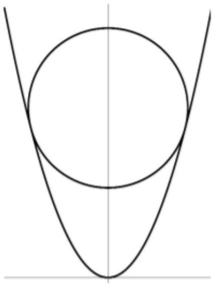
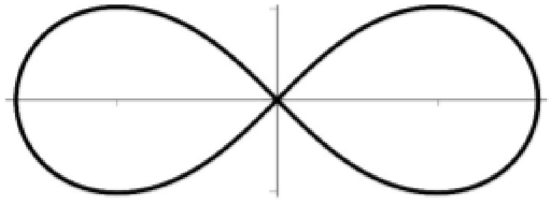
8. Podać przybliżone wartości liczb używając wzoru $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

a) $\sqrt[3]{29}$

b) $(28)^{4/3}$

c) $\operatorname{tg}(99\pi/100)$

9. Okrąg o promieniu 1 i środku na osi y jest wpisany w parabolę $y = 2x^2$. Znaleźć punkty, w których parabola i okrąg stykają się.[1]

10. Dla jakich wartości parametru a parabola $y = ax^2$ jest styczna do krzywej $y = \ln x$.

11. Lemniskata na rysunku powyżej zadana jest wzorem $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Znaleźć punkty wykresu, w których styczna jest pozioma.

12. Obliczyć d^2y/dx^2 w poniższych przykładach.

a) $x^2 - y^4 = 6$ b) $x^2 \sin(2xy) = 1$

13. W poniższych przykładach x i y są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej t. Wyrazić dy/dt za pomocą x, y oraz dx/dt.

a) $x \sin y = 2$ b) $x^2 + y^3 = x$ c) $y = \cos(xy^2)$

14. Znak drogowy w kształcie kwadratu o boku 50 cm i zaniedbywalnej grubości obraca się wokół swojej osi pionowej przechodzącej przez środek w tempie 10 obrotów na minutę. Osoba obserwująca znak z dużej odległości widzi go jako prostokąt o zmieniającej się szerokości. Jak szybko zmienia się szerokość znaku, gdy robi wrażenie prostokąta o szerokości 30 cm i szerokość się powiększa?[2]

15. Woda jest wypuszczana ze stożkowego pojemnika o wysokości 120 cm i promieniu 40 cm do pojemnika w kształcie prostopadłościanu, którego pole podstawy wynosi 1000 cm^2. Gdy wysokość poziomu wody w stożku wynosi x cm wysokość ta maleje w tempie $100 - x$ cm na minutę. W jakim tempie podnosi się poziom wody w dolnym pojemniku, gdy wysokość wody w górnym pojemniku będzie równa 10 cm ?

16. Nocna łódź patrolowa zbliża się do punktu $(0, 0)$ na brzegu wzdłuż krzywej $y = -\frac{1}{2}x^3$, $x < 0$. Oś OX utożsamiamy z brzegiem. Łódź porusza się tak, że $dx/dt = -x$, jej reflektor jest skierowany na wprost. Jak szybko przesuwa się oświetlony punkt na brzegu, gdy $x = -2$?

[1] *Wskazówka:* W tych punktach mają wspólne styczne

[2] *Wskazówka:* Rozważyć kąt jaki tworzy płaszczyzna znaku z linią łącząca go z obserwatorem.