Lista 6, Analiza Matematyczna I

1. Znaleźć granice funkcji korzystając z definicji Heine'go.

a)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}$$

b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^4-x-14}$$

c)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^4+1}-2}{\sqrt{x^3+3}-2}$$

d)
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h},\qquad a>0,$$

e)
$$\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y},\qquad n\in\mathbb{N},$$

ḟ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2},\qquad n,m\in\mathbb{N},$$

ġ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^4+x^3+1}-1}{x}$$

ḧ) [1]
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$$

2. Który z poniższych warunków jest równoważny temu, że funkcja $f(x)$ określona na całej prostej ma granicę 1 w punkcie 0 ?

a) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 0$, $x_n\neq 0$, zachodzi $f(x_n^3)\xrightarrow{n} 1$.
b) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 0$, $x_n\neq 0$, zachodzi $f(x_n^2)\xrightarrow{n} 1$.
ċ) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 1$, $x_n\neq 1$, zachodzi $f(x_n-x_n^2)\xrightarrow{n} 1$.
d̈) Dla każdej liczby $x\neq 0$ zachodzi $f(x/n)\xrightarrow{n} 1$.
ë) Dla każdej liczby $0<|q|<1$ zachodzi $f(q^n)\xrightarrow{n} 1$.

3. Dla $\varepsilon>0$ znaleźć $\delta>0$ aby dla $0<|x-a|<\delta$ spełniony był warunek $|f(x)-g|<\varepsilon$.

a)
$$f(x)=x^2,\quad a=2,\quad g=4$$

b)
$$f(x)=\frac{1}{x+1},\quad a=-\frac{1}{2},\quad g=2$$

ċ)
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+7},\quad a=1,\quad g=2$$

ḋ)
$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{3+4x-7x^2},\quad a=1,\quad g=-0,3$$

4. Obliczyć granice korzystając z $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

ḃ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$$

ċ)
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

ḋ)
$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg} h}{h}$$

e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x+2x^2}$$

f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$$

ġ)
$$\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$$

ḣ)
$$\lim_{x\to \infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

5. Udowodnić, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x)=g$, to istnieje liczba $\delta>0$ taka, że zbiór wartości $f(x)$ dla $x\neq a$ oraz $|x-a|<\delta$ jest ograniczony.

---

[1] *Wskazówka:* Skorzystać z nierówności $\dfrac{1}{n+1}\le \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}$.

6̇. Udowodnić, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, to istnieją liczby $\eta, \delta > 0$ takie, że $f(x) > \eta$ dla $0 < |x-a| < \delta$.

7. Podać definicje następujących granic i znaleźć odpowiednie przykłady (a^+ i a^- oznaczają granicę prawo i lewostronną)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty.$$

8̈. Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$[2]

Wyprowadzić stąd, że

$$e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

9. Obliczyć granice

ä)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

ḃ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

c̈)
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$$

ḋ)
$$\lim_{x\to 0} x^{-2006}e^{-1/x^2}$$

[2] *Wskazówka:* Zauważyć, że jeśli $n \le x < n+1$, to

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$