Lista 9, Analiza Matematyczna I

1. Wykazać, że ciąg funkcji $f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$ dla $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $a_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ jest zbieżny do zera.

2. Ciąg funkcji $f_n(x)$ na przedziale $[0,1]$ jest zbieżny jednostajnie do zera. Niech x_n będzie dowolnym ciągiem liczb z przedziału $[0,1]$. Udowodnić, że $\lim\limits_n f_n(x_n) = 0$.

3̇. Ciąg funkcji f_n na przedziale $[0,1]$ jest zbieżny punktowo do zera. Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby δ istnieje ciąg $x_n \in [0,1]$ spełniający $|f_n(x_n)| \geq \delta$. Czy ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do zera?

4̇. Czy ciąg $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ jest zbieżny jednostajnie do zera na przedziale $[0,1]$?[1]

5. [2] Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na przedziale $[0,1]$.

ȧ)
$$f_n(x) = \frac{x}{1+\sqrt{nx}}$$

ḃ)
$$f_n(x) = (1-x)^n$$

ċ)
$$f_n(x) = (0.5-x)^n$$

ḋ)
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

ė)
$$f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

f̈)
$$f_n(x) = x(1-x)^n$$

ġ)
$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

ḣ)
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n}$$

6. Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na podanych zbiorach.

a)
$$f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad x > 0,$$

b)
$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ċ)
$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

ḋ)
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ë)
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

7̇. Ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że dla pewnej stałej liczby $M > 0$ zachodzi
$$|f_n(x)| \leq M, \qquad n \in \mathbb{N},\ a \leq x \leq b.$$

8̈. Funkcja ciągła $f(x)$ zmienia znak w przedziale $[a,b]$ przynajmniej raz. Pokazać, że jeśli ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$ na tym przedziale, to dla dostatecznie dużych n każda z funkcji $f_n(x)$ zeruje się w w $[a,b]$.

---

[1] *Wskazówka:* $x_n = 1 - (1/n)$.

[2] *Wskazówka:* (do zadań 5 i 6) Zacząć od znalezienia granicy punktowej f. Następnie w zależności od sytuacji:

- oszacować $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$,
- znaleźć punkty x_n, że $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \delta > 0$,
- skorzystać z twierdzenia Dini'ego,
- skorzystać z nieciągłości funkcji $f(x)$.

9. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych korzystając z twierdzenia Weierstrassa o majoryzacji.

ȧ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x}, \qquad x \geq 0,$$

ḃ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ċ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ḋ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^2+n\log^2 n}, \qquad |x| \leq 1,$$

ë)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \qquad x \geq 0,$$

f̈)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1̈0. Znaleźć ciągi funkcyjne $f_n(x)$ i $g_n(x)$, które są zbieżne jednostajnie na $\mathbb{R}$, a ciąg $f_n(x)g_n(x)$ nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

1̈1. Ciąg liczb dodatnich a_n jest malejący i zbieżny do zera. Ciąg funkcji $b_n(x)$ spełnia
$$|s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq M, \qquad x \in A.$$
Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na A.[3]

1̈2. Pokazać, że szeregi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$
są zbieżne niemal jednostajnie na $(0, 2\pi)$ [4]

1̈3. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$ jest jednostajnie zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$?[5]

1̈4. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ nie jest bezwzględnie zbieżny dla żadnej liczby $x \neq k\pi$.[6]

15. Obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych oraz zbadać zachowanie się szeregów na brzegu przedziału zbieżności (nie dotyczy przykładu b).

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} x^n$$

ḃ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{\sqrt{n}}$$

ḋ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{n^2}$$

---

[3] *Wskazówka:* Przeanalizować dowód twierdzenia Dirichleta.

[4] Tzn. zbieżne jednostajnie na $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ dla dowolnej liczby $0 < \varepsilon < \pi$).

[5] *Wskazówka:* Pokazać, że $|s_n(x) - s(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

[6] *Wskazówka:* $2|\sin nx| \geq 2\sin^2 nx = 1 - \cos 2nx$.

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

ḟ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n) x^{2n}$$

ġ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n!}$$

ḣ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2^{-n}) x^{4n}$$

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + 3^{-n}) x^{n^2}$$

j̈)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^{[n!\sqrt{2}]}$$

ï6. Niech a_n będzie ciągiem Fibonacciego określonym przez $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geq 1$.

- Pokazać, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wynosi przynajmniej $1/2$.[7]
- Pokazać, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$[8]

---

[7] *Wskazówka:* Pokazać, że $0 \leq a_n \leq 2a_{n-1}$, czyli $a_n \leq 2^n$.

[8] *Wskazówka:* Pokazać, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x$$