Twierdzenie 44. *Istnieje najmniejsze dodatnie miejsce zerowe funkcji zmiennej rzeczywistej* $\cos(x)$*. Liczbę* π *definiujemy jako dwukrotność tego miejsca zerowego.*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Dowód pominięty.

Tw. 2π jest okresem $\sin x$ i $\cos x$.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$1 = |e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$\cos y \in [-1, 1]$$

Wniosek 45.

$$e^{-i\pi} + 1 = 0.$$

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$$

Definicja 46. *Podziałem $\mathcal{P}$ odcinka $[a, b]$ nazywamy ciąg liczb $x_0, \dots, x_n$, taki że:*

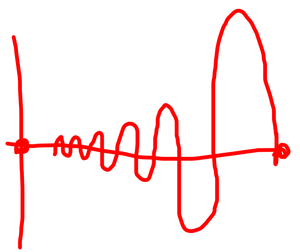
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Definicja 47. *Niech $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, czyli krzywą na płaszczyźnie. Dla podziału $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ długością łamanej nazywamy wielkość:*

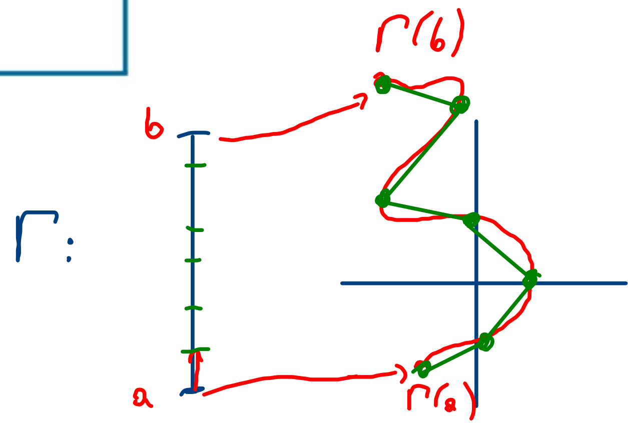
$$L(\Gamma, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |\Gamma(x_k) - \Gamma(x_{k-1})|.$$ ← dł. łamanej

Długością krzywej nazywamy wielkość:

$$L(\Gamma) = \sup\{L(\Gamma, \mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} - \textit{podział } [a,b]\}.$$



Uwaga: $L(\Gamma)$ może być $+\infty$



Np. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

f – ciągła $\Rightarrow$ Γ – ciągła

$\Gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ $\qquad \Gamma(t)=(t,f(t))$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1 \iff \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\qquad x_k=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $\qquad x_2<y_2<x_1<y_1<1$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)=-1 \iff \frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\qquad y_k=\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

$P_n=\{0,\ x_n,y_n,\ x_{n-1},y_{n-1},\ \dots,\ x_1,y_1,\ 1\}$ $\qquad \Gamma(x_n)=(x_n,x_n)$

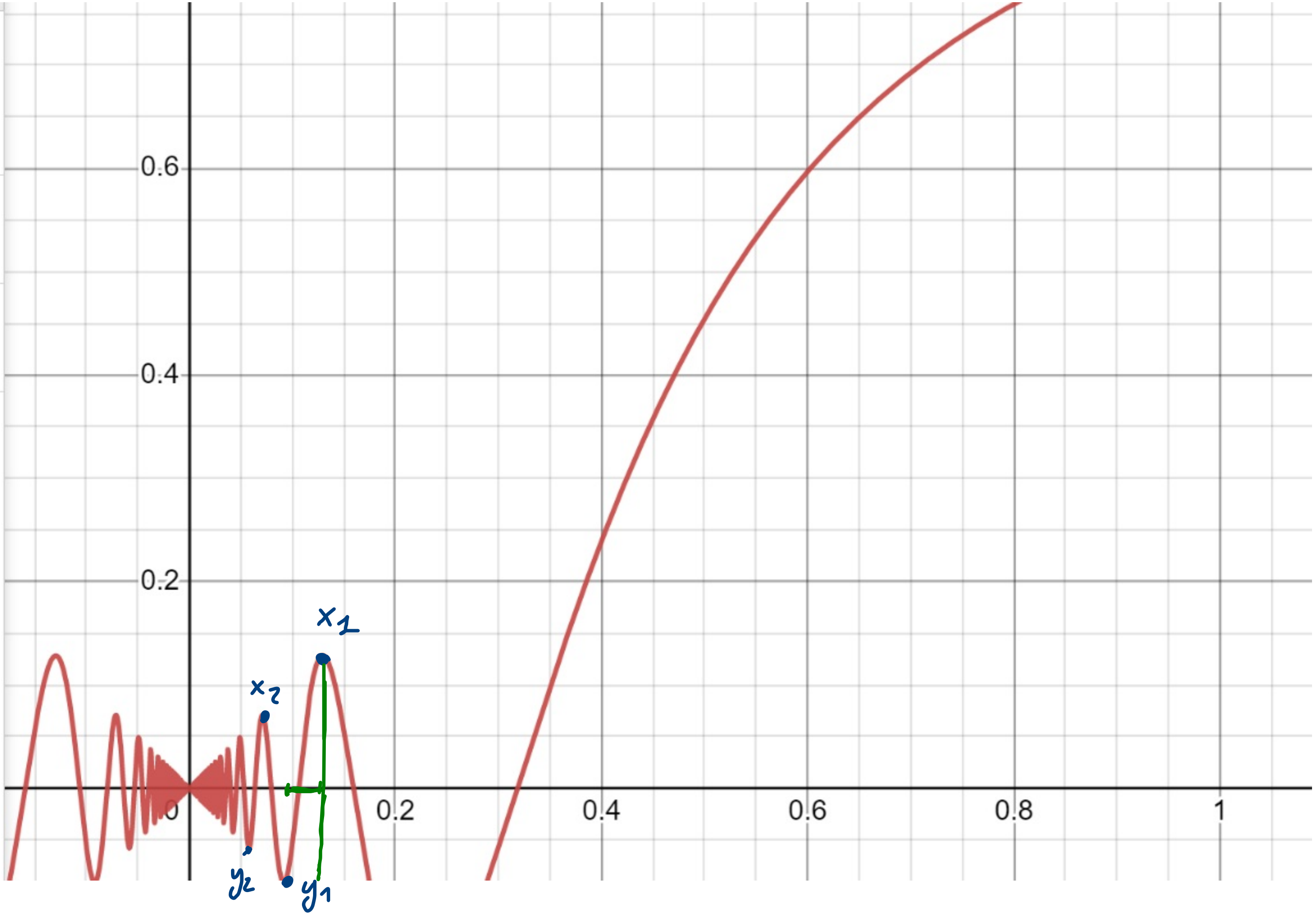
$\Gamma(y_n)=(y_n,-y_n)$

$$L(\Gamma,P_n)\geq\sum_{k=1}^{n}|\Gamma(x_n)-\Gamma(y_n)|=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|x_n-y_n|^2+|x_n+y_n|^2}\geq\sum_{k=1}^{n}|x_n+y_n|\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k}\xrightarrow[n]{}\infty$$

$$L(\Gamma)=\infty$$

$$y = x\sin\left(\frac{1}{(x)}\right)$$

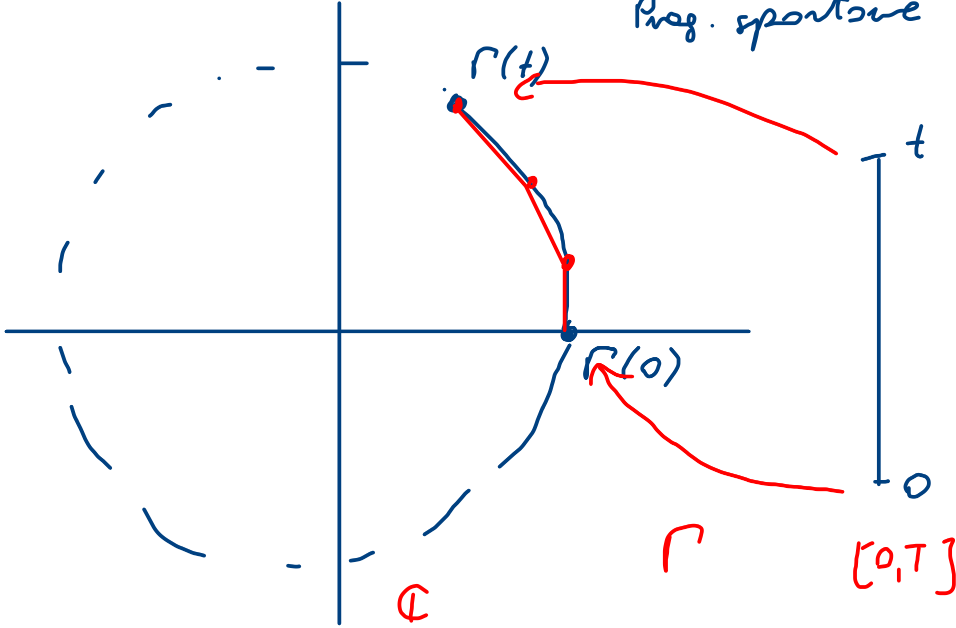


obsługiwane przez desmos

Twierdzenie 48. *Długość łuku* $\Gamma_t : [0,t] \to \mathbb{C}$, $\Gamma(t) = e^{+it}$ *wynosi* $L(\Gamma_t) = t$.

Ask
Prog. ob.
Prog. spontowe

$\Gamma(t) = \cos t + i \sin t$



1° Niech $P = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = t\}$

$$L(\Gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |e^{it_k} - e^{it_{k-1}}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|e^{it_k}|}_{=1} \, \underbrace{|1 - e^{i(t_{k-1} - t_k)}|}_{\leqslant |t_{k-1} - t_k|}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = t_n - t_0 = t$$

$\Rightarrow L(\Gamma, P) \leqslant t \qquad \boxed{L(\Gamma) \leqslant t}$

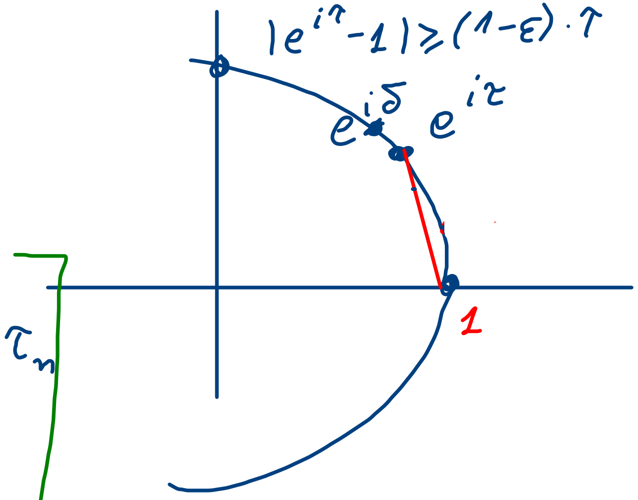
$$|\exp(iy)| = 1,$$
$$|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)) \leq \exp(|z|),$$
$$|\exp(iy) - 1| \leq |y|.$$

2° Załóżmy teraz, że $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ jest taki, że

$$śr(P) := \max_{k=1,\dots,n} (t_k - t_{k-1})$$

było: $|e^{i\tau}-1| \leqslant \tau$

$|e^{i\tau}-1| \geqslant (1-\varepsilon)\cdot\tau$



Fakt: Dla ust. $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $|e^{i\tau}-1| \geqslant (1-\varepsilon)\cdot\tau$ dla $0 < \tau < \delta$

d-d

Gdyby tak nie było, to $\exists \tau_n \to 0^+$ $|e^{i\tau_n}-1| \leqslant (1-\varepsilon)\cdot\tau_n$

wtedy $1 \xleftarrow[\tau_n \to 0]{} \left|\dfrac{e^{i\tau_n}-1}{i\tau_n}\right| \leqslant 1-\varepsilon$ sprzeczność

Niech $\varepsilon > 0$. Niech P będzie podziałem takim, że $śr(P) < \delta$ (δ z faktu).

$|t_k - t_{k-1}| < \delta$

$$L(\Gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |e^{it_k} - e^{it_{k-1}}| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|e^{it_k}|}_{=1} \cdot |1 - e^{i(t_{k-1}-t_k)}| \underset{\text{Fakt}}{\geqslant} (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})$$

$$= (1-\varepsilon)(t_n - t_0) = (1-\varepsilon)\cdot t$$

$$t \geqslant L(\Gamma) = \sup_P L(\Gamma, P) \geqslant (1-\varepsilon)\cdot t \quad \Rightarrow L(\Gamma) = t$$

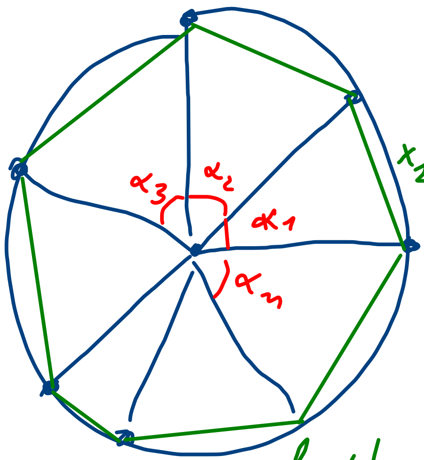
f wypukła na (a,b) $\quad x_1,\dots,x_n \in (a,b)$ $\quad t_1+\dots+t_n = 1$ $\quad t_i > 0$

(N. Jensena) $$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \qquad (= \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n)$$

Zad. Znaleźć n-kąt wpisany w okrąg o największym możliwym obwodzie.

$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = 2\pi$ $\qquad \alpha \in (0,\pi)$

Dł. n-kąta: $$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha_i}$$



Rozważmy $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$

$$f''(x) = -\frac{\sin^4 x/2}{(1-\cos x)^{3/2}} < 0 \quad \text{na } (0,\pi)$$

$$l = \sqrt{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) = \sqrt{2}\, n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(\alpha_i)} \leq \sqrt{2}\cdot n \cdot f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot \alpha_i\right) = \overbrace{\sqrt{2}\cdot n \cdot f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}^{\text{obwód } n\text{-kąta foremnego}}$$