ILOCZYNY NIESKOŃCZONE

Definicja 1. *Dla* $a_n > -1$ *rozważamy ciąg iloczynów*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) = (1 + a_1) \cdot ... \cdot (1 + a_n).$$

Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *jest zbieżny, jeśli ciąg* P_n *jest zbieżny do liczby* **dodatniej** P. *Piszemy wtedy*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = P.$$

Jeśli P_n *zbiega do 0 lub* ∞, *to mówimy, że iloczyn jest rozbieżny do* $0/\infty$.

Przykład 2.

$$(1) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0 \quad (\mathit{rozbieżny}).$$

(1) $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$

(2) $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n]{}0$

Uwaga 3. *Jeśli iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny, to* $a_n \to 0$.

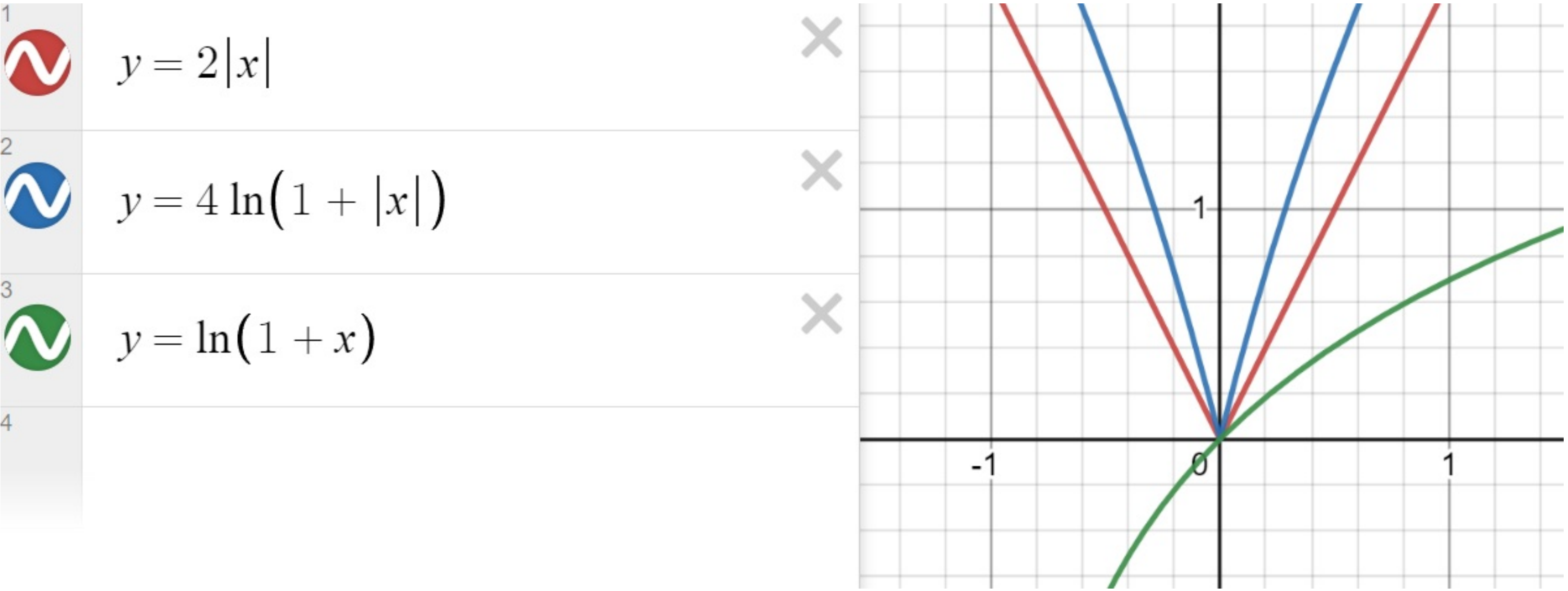
dl-d

uwaga, bo $P \neq 0$

$$1 = \frac{P}{P} \longleftarrow \frac{P_n}{P_{n-1}} = (1 + a_n) \implies a_n \xrightarrow[n]{} 0$$

Lemat 4. *Dla* $|x| < 1/2$ *mamy:*

$$\ln(1+x) \le 2|x| \le 4\ln(1+|x|).$$



Lemat 4. *Dla* $|x| \leqslant 1/2$ *mamy:*

$$\ln(1+x) \overset{(1)}{\leq} 2|x| \overset{(2)}{\leq} 4\ln(1+|x|).$$

d-d

(2) Wystarczy pokazać $f(x) = 4\ln(1+x) - 2x \geqslant 0$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$ (parzystość)

$f'(x) = \frac{4}{1+x} - 2 = \frac{2-2x}{1+x}$, $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$f(0) = 0$, czyli f niemalejąca na $[0, \frac{1}{2}]$, zatem $f(x) \geqslant 0$ $x \in [0, \frac{1}{2}]$

(1) • $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ $\ln(1+x) \leq 0 \leq 2|x|$

• $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $g(x) = 2x - \ln(1+x)$ $g(0) = 0$

$g'(x) = 2 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x} \geqslant 0$

czyli $g(x) \geqslant 0$ $x \in [0, \frac{1}{2}]$

Definicja 5. *Mówimy, że iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny bezwzględnie, jeśli iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie 6. *Iloczyn bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

d-d $\quad P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \qquad \tilde{P}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)$

Z war. koniecznego zbieżności $|a_n| \to 0 \iff a_n \to 0$.

Zatem $|a_k| \leq \frac{1}{2}$ dla $k \geq N$. Wtedy dla $m > n \geq N$ mamy

(*) $\underline{|\log P_m - \log P_n|} = |\log(1+a_{n+1})\dots(1+a_m)| \leq$

$\leq |\log(1+a_{n+1})| + \dots + |\log(1+a_m)| \overset{\text{lem.}}{\leq} 4\cdot\log(1+|a_{n+1}|) + \dots$

$+ 4\log(1+|a_m|)$

Z zał. $\tilde{P}_n$ zbiega.

$\Downarrow$ $\qquad = \underline{4\cdot\left(\log(\tilde{P}_m) - \log(\tilde{P}_n)\right)} < 4\varepsilon$

$\log\tilde{P}_n$ zbiega $\Rightarrow$ $\log\tilde{P}_n$ spełnia war. Cauchy'ego

Z (*) wynika że $\log P_n$ sp. war Cauchy'ego więc jest zbieżny

$\lim_n(\ln P_n) = g \qquad P_n = e^{\ln P_n} \longrightarrow e^g \in (0,\infty)$

Twierdzenie 7. *Dla $a_n \geq 0$ iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

d-d $\quad \underline{a_n \geq 0}$

($\Rightarrow$) Zał. że $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ zb. $\quad P_n \nearrow P = \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$

$$1+S_n = 1+a_1+\ldots+a_n \leq (1+a_1)\ldots(1+a_n) \leq \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) = P \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

$x_k > -1$, x_k tego samego znaku

$(1+x_1)\ldots(1+x_k) \geq 1+x_1+\ldots+x_k$

($\Leftarrow$) Zał. że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Wtedy $\exists N$ $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \frac{1}{2}$.

$n > N$

Z nierówności Bernoulliego (lista 1, indukcja):

$$(1-a_{N+1})(1-a_{N+2})\ldots(1-a_n) \geq 1-a_{N+1}-\ldots-a_n = 1-(a_{N+1}+\ldots+a_n) \geq \frac{1}{2}$$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = \prod_{k=1}^{N}(1-a_k)\prod_{N+1}^{n}(1-a_k) \geq c\cdot\frac{1}{2}$$

Zauważmy $\quad P_n\cdot Q_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)(1-a_k) = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k^2) \leq 1$

$P_n \leq \frac{1}{Q_n} \leq \frac{2}{c}$, czyli P_n rosnący i ograniczony, więc zbieżny.

Wniosek 8. *Dla $a_n \in [0,1)$ iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

d-d można było z poprzedniego dowodu.

$(\Leftarrow)$ $\sum a_n < \infty \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n)$ zbieżny, ale $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n) = \prod_{k=1}^{\infty} 1+|-a_n|$,

czyli $\prod_{k=1}^{\infty} 1-a_n$ bezwzg. zb. $\Rightarrow$ zbieżny.

$(\Rightarrow)$ Zał. że $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ zbieżny $\quad P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_n) \to P$ $\quad \frac{1-a_n+a_n}{1-a_n} = 1+\frac{a_n}{1-a_n}$

$$P_n^{-1} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_n}{1-a_n}\right) \to P^{-1}$$

Skoro Iloczyn $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_k}{1-a_k}\right)$ jest zb., to $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n} < \infty$, zatem $\sum_n a_n \leq \sum_n \frac{a_n}{1-a_n} < \infty$.

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że $a_n < 1$ oraz a_n maleje do zera. Wtedy iloczyn*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n a_n)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

d-d Ponieważ $a_n \to 0$, to wystarczy rozważać $P_{2m} = \prod_{k=1}^{2m} (1+(-1)^k a_k) =$

$$= \prod_{k=1}^{m} (1-a_{2k-1})(1+a_{2k}) = \prod_{k=1}^{m} \Big(1-\big(\underbrace{a_{2k-1}-a_{2k}}_{+} + \underbrace{a_{2k-1}\cdot a_{2k}}_{+}\big)\Big) \qquad -a_{2k}^2 + a_{2k}^2$$

Zatem iloczyn $\prod_{k=1}^{\infty} (1+(-1)^k \cdot a_k)$ jest zb. $\iff \sum_k (\underbrace{a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k-1}\cdot a_{2k}}_{= S}) < \infty.$

Zauważmy, że S_1 jest zbieżny, bo jego sumy częściowe: $\sum_k \Big(\underbrace{(a_{2k-1}-a_{2k})(1+a_{2k})}_{S_1} + \underbrace{a_{2k}^2}_{S_2}\Big)$

$$\sum_{k=2}^{m} (a_{2k-1}-a_{2k})\underbrace{(1+a_{2k})}_{\le 2} \le 2\cdot \sum_{k=2}^{m} (a_{2k-2}-a_{2k}) = 2(a_2 - a_{2m}) \le 2a_2.$$

Skoro S_1 zbieżny i S zbieżny, to $S_2 = \sum_k a_{2k}^2$ zbieżny $\iff \sum_k a_k^2$ zbieżny

Twierdzenie 10. *Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad |q|<1$$

d-d Rozważmy $\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\ldots\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$\underset{1}{\vee}$

po wymnożeniu są tu wszystkie odwrotności liczb naturalnych mających w rozkł. na wyrazy pierwsze $p_1, \ldots, p_n$, czyli na pewno odwrotności od $1, \ldots, n$

Zatem $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} \xrightarrow[n]{} \infty$

$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \to 0$

$\underset{1}{\wedge}$

$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ jest. rozb. (do 0) $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n} = \infty$ ✓

Twierdzenie 11. *Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Dla $\alpha > 1$ mamy*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

d-d

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_k^{\alpha}}+\frac{1}{p_k^{2\alpha}}+\dots\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

Zatem

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}\xrightarrow[n]{}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}}_{\text{tożsamość Eulera}}$$

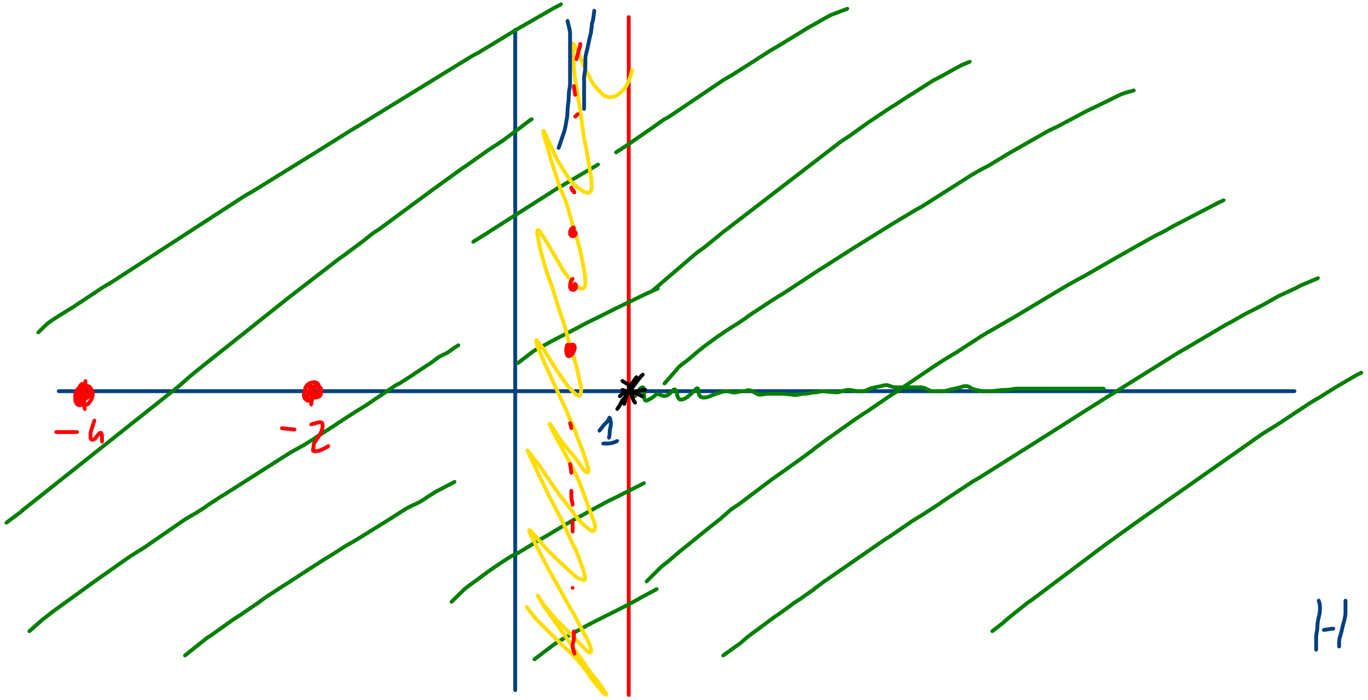
Uwaga 12. *Ostatnie twierdzenie ma związek ze funkcją dzeta Riemmana:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1.$$

Tę funkcję przedłuża się na zbiór

$$\mathbb{C} \setminus \{0\},$$

a słynna hipoteza Riemmana jest pytaniem o to gdzie znajdują się zera tej funkcji.



Dla jakich $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\zeta(s) = 0 \ ?$$

- $s = -2, -4, -6, \ldots$
- pozostałe są $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$

HR: $\left.\begin{matrix}\zeta(s) = 0 \\ s \notin \mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$