

101. Udowodnij, że dla parami różnych liczb całkowitych a, b, c i dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

jest całkowita.

102. Niech L będzie obwodem, a P polem trójkąta. Wykaż, że

$$L^2 \geq 12\sqrt{3}P.$$

Kiedy w powyższej nierówności zachodzi równość?

103. Niech x będzie liczbą niewymierną. Pokazać, że zbiór

$$\{\{nx\}^1 : n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w $[0, 1]$.

104. Niech x_n oznacza pierwszą od lewej cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby 2^n . Czy liczba $0, x_1x_2x_3\dots$ jest wymierna?

105. Dla $0 < x < \pi$ znaleźć granicę²

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

106. Czy zero jest punktem skupienia ciągu $\sin n$?

107. Czy zero jest punktem skupienia ciągu $\sqrt{n} \sin n$?

108. Ciąg a_n ma własność $a_n < (a_{n-1} + a_{n+1})/2$ dla $n \geq 2$. Pokazać, że zachodzi jedna z trzech możliwości:

(a) a_n jest zbieżny,

(b) $a_n \rightarrow +\infty$,

(c) $a_n \rightarrow -\infty$.

109. Ciąg x_n spełnia warunek $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$. Pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf_n \frac{x_n}{n}.$$

110. Znaleźć granicę iloczynów

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdot \dots \cdot \frac{2^{2^n} + 1}{2^{2^n}}.$$

111. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!).$$

112. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ oraz $a_n \nearrow \infty$, to

$$\sum \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \infty.$$

113. Ciąg $a_n > 0$ jest malejący oraz

$$\sum a_n = \infty.$$

¹Symbol $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

²Uwaga: Można korzystać z faktu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n)/a_n = 1$ dla $a_n \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$

Pokazać, że

$$\sum \min \left(a_n, \frac{1}{n} \right) = \infty.^3$$

³*Uwaga:* Porównaj z podobnym zadaniem z listy 4.