Lista 1, Analiza Matematyczna I

1. Pokazać, że suma liczby niewymiernej i wymiernej jest liczbą niewymierną. Czy suma liczb niewymiernych musi być niewymierna?

$\dot{2}$. Udowodnić, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 6. Które liczby naturalne są kwadratami liczb wymiernych ?

3. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

$\ddot{4}$. Pokazać, że liczba $\sqrt{n}+\sqrt{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, jest wymierna tylko wtedy, gdy składniki są liczbami wymiernymi.

$\ddot{5}$. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna.

$\ddot{6}$. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

$\dot{7}$. Czy liczba $\log_2 3$ jest wymierna? A liczba $\log_{\sqrt{5}-2}(4\sqrt{5}+9)$?

$\dot{8}$. Znaleźć liczbę niewymierną pomiędzy $2/3$ i $3/4$. Ogólniej, wskazać liczbę niewymierną pomiędzy p/q i r/s, gdzie $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ oraz $ps < rq$.

$\dot{9}$. Wskazać liczbę wymierną pomiędzy $1/(2\sqrt{3})$ oraz $1/\sqrt{5}$ oraz liczbę niewymierną pomiędzy $2/\sqrt{5}$ i $3/\sqrt{10}$.

$\ddot{1}0$. Pokazać, że pomiędzy dwiema liczbami niewymiernymi znajduje się liczba wymierna oraz niewymierna.

$\dot{1}1$. Pokazać, że poniższe rozwinięcia dziesiętne odpowiadają liczbom niewymiernym.

$$0,101001000100001\ldots, \quad 0,123\ldots 8910111213\ldots 192021\ldots$$

$\dot{1}2$. Wyznaczyć (z uzasadnieniem) kres górny i dolny zbioru ułamków dziesiętnych postaci $0,88\ldots 8$. Czy zbiór ten posiada element największy?

13. Zbiory A i B są ograniczone. Niech $-A = \{-a \ : \ a \in A\}$ oraz $A \pm B = \{a \pm b \ : \ a \in A, b \in B\}$. Udowodnij, że:

a) $\sup(-A) = -\inf A$,

$\dot{\text{b}}$) $sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$,

$\ddot{\text{c}}$) $\sup A - \inf B = \sup(A - B)$.

14. Wyznaczyć (z uzasadnieniem) kres górny i dolny zbioru liczb postaci:

a) $$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{m},$$

$\dot{\text{b}}$) $$\frac{1}{3^m - 2^n},$$

$\dot{\text{c}}$) $$\frac{1}{5^m - 3^n},$$

$\ddot{\text{d}}$) $$\frac{(n+m)^2}{2^{nm}},$$

gdzie n i m są liczbami naturalnymi. Czy zbiory te posiadają element najmniejszy/największy?

15. Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ spełnia: z $T(n)$ wynika $T(n+2)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-3)$. Ponadto $T(1)$ jest prawdziwe. Pokazać prawdziwość $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n.

$\dot{1}6$. Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ ma następujące własności. Z $T(n)$ wynika $T(2n)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-5)$ dla $n \geq 6$. Ponadto $T(1)$ jest prawdziwe. Czy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n ?

17. Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ ma następujące własności. Z $T(n)$ wynika $T(2n)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-5)$ dla $n \geq 6$. Ponadto $T(1)$ i $T(5)$ są prawdziwe. Pokazać prawdziwość $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n.[1]

18. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić następujące równości:

a)
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b)
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

19. Udowodnić, że dla $n > 1$ zachodzi
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

20. Udowodnić nierówność Bernoulli'ego:
$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
gdzie $n \geq 2$ oraz $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ są niezerowymi liczbami tego samego znaku większymi od -1. Wywnioskować, że
$$(1+x)^n > 1 + nx$$
dla $x > -1$, $x \neq 0$.

21. Wykazać, że
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geq 2.$$[2]

22. Udowodnić mocniejszą nierówność
$$n! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 3.$$

23. Załóżmy, że $x + x^{-1}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $x^n + x^{-n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

24. Dla $n \in \mathbb{N}$ wykaż, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

25. Dowieść, że
$$|a \sin\alpha + b \cos\alpha| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Zbadać kiedy występuje równość.

26. Dla $a, b, c, d > 0$ udowodnić nierówność:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4.$$

27. Niech $a, b, c, d \geq 0$. Wykazać, że
$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leq a + b + c + d.$$

Uwaga 1: Większość zadań pochodzi z list prof. R. Szwarca.

Uwaga 2: Zadania zielone są za 0,5 pkt (bez kropki nad numerem zadania), zdania pomarańczowe za 1 pkt (jedna kropka), zadania czerwone za 2 pkt (dwie kropki).

---

[1] *Wskazówka:* Pokazać, że każdą liczbę naturalną n niepodzielną przez 5 można przedstawić w postaci $2^k - 5l$ dla pewnych liczb całkowitych $k \geq 1$ i $l \geq 0$.

[2] *Wskazówka.* Użyć nierówności $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 2$.