Twierdzenie 17.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin x)' = \cos(x)$$

$$(\cos x)' = -\sin(x)$$

d) $$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad a > 0 \quad a \neq 1$$

e) $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad a, x > 0$$

d) $f(x) = a^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(a^{x+h} - a^x\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(a^x \cdot a^h - a^x\right) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{e^{h \cdot \ln a \to 0} - 1}{h \cdot \ln a} \ln a = \ln a \cdot a^x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e) $g(x) = \log_a x$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\log_a(x+h) - \log_a x\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h \cdot \ln a} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{h}{x} \to 0$$

$$= \frac{1}{x \ln a}$$

Twierdzenie 18. *[Arytmetyka pochodnych] Niech $c, d \in \mathbb{R}$ oraz f, g będą funkcjami, dla których pochodna w punkcie x istnieje. Wtedy*

1.

$$(c \cdot f + d \cdot g)'(x) = cf'(x) + dg'(x)$$

,

2.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

3.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (o\ ile\ g(x) \neq 0).$$

1. ćwiczenie

Pokażemy, że $(f \cdot g)'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$

2. $$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x)\left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

bo f ciągła w $x=a$ → $f(x) \xrightarrow{x \to a} f(a)$

$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow{x \to a} g'(a)$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \to a} f'(a)$

Twierdzenie 18. *[Arytmetyka pochodnych] Niech $c, d \in \mathbb{R}$ oraz f, g będą funkcjami, dla których pochodna w punkcie x istnieje. Wtedy*

1.

$$(c \cdot f + d \cdot g)'(x) = cf'(x) + dg'(x)$$

,

2.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

3.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (o\ ile\ g(x) \neq 0).$$

3. $$\frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} = \frac{\overset{-f(x)g(x)+f(x)g(x)}{f(y)g(x)} - f(x)g(y)}{g(y)g(x)(y-x)} = \frac{1}{\underbrace{g(y)g(x)}_{\xrightarrow{y\to x} g(x)}}\left[g(x)\cdot\underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{\downarrow\, f'(x)} + f(x)\underbrace{\frac{g(x)-g(y)}{y-x}}_{\downarrow\, g'(x)}\right]$$

$$\xrightarrow[y\to x]{} \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$g'(x), f'(x)$ istnieje, to f, g ciągłe w x

Wniosek 19.

a) $$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

b) $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \notin \{\pi/2 + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

c) $$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \qquad x \notin \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

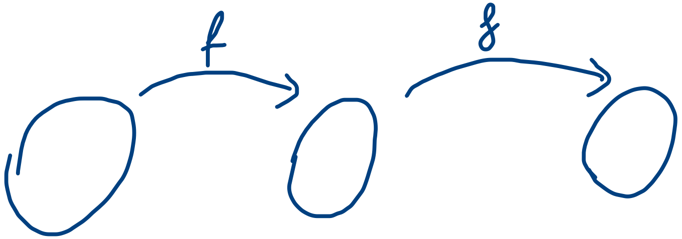
a) $$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1} = (x^{-n})' \qquad x \neq 0$$

b) $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

c) podobnie

Twierdzenie 20. *[Pochodna złożenia, reguła łańcucha] Załóżmy, że: f jest określona w otoczeniu punktu a, funkcja g jest określona na zbiorze otwartym zawierającym wartości f z tego otoczenia oraz g ma pochodną w punkcie $f(a)$. Wtedy złożenie $g \circ f$ ma pochodną w punkcie a zadaną wzorem:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$



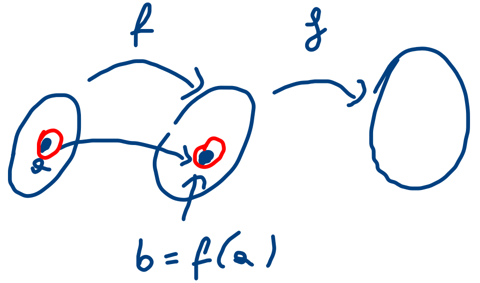
$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

Uwaga 21. *Mamy*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Twierdzenie 20. *[Pochodna złożenia, reguła łańcucha] Załóżmy, że: f jest określona w otoczeniu punktu a, funkcja g jest określona na zbiorze otwartym zawierającym wartości f z tego otoczenia oraz g ma pochodną w punkcie $f(a)$. Wtedy złożenie $g \circ f$ ma pochodną w punkcie a zadaną wzorem:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$



d-d

Z def. $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + r_1(x)$ $\qquad r_1(x) \xrightarrow[x\to a]{(3)} 0$

(1) $f(x)-f(a) = (x-a)\left(f'(a)+r_1(x)\right)$

Podobnie $\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} = g'(b) + r_2(y)$ $\qquad r_2(y) \xrightarrow[y\to b]{(4)} 0$

(2) $g(y)-g(b) = (y-b)\left(g'(b)+r_2(y)\right)$

$$\underbrace{g(f(x)) - g(\underset{b}{\underset{\parallel}{f(a)}})} \overset{(2)}{=} \left(f(x)-f(a)\right)\cdot\left(g'(f(a)) + r_2(f(x))\right) \overset{(1)}{=}$$

$$= \underbrace{(x-a)\left(f'(a)+r_1(x)\right)\cdot\left(g'(f(a)) + r_2(f(x))\right)}$$

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \left(f'(a)+\underset{\underset{0}{\downarrow x\to a \ (3)}}{r_1(x)}\right)\cdot\left(g'(f(a)) + \underbrace{r_2(\underset{\underset{b}{\downarrow x\to a}}{f(x)})}_{(4)\ \to 0}\right)$$

$x \to a$

bo f ciągła w $x=a$

$\xrightarrow{x\to a} g'(f(a))\cdot f'(a)$

f jest ciągłe w $x=a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

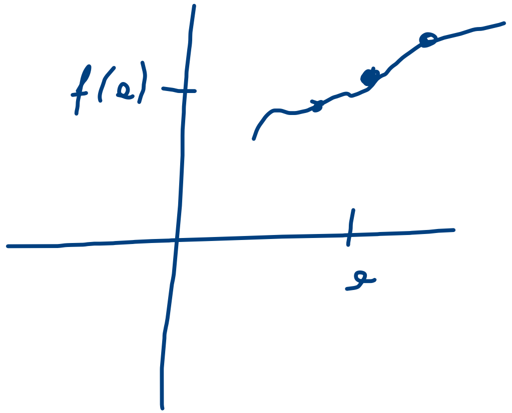
$$r(x) = f(x) - f(a)$$

$$r(a) = 0$$

$$\lim_{x\to a} r(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + r(x)$$

gdzie $r(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$



Uwaga 22. *Pochodną złożenia można także zapisać*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x), \quad y = f(x).$$

$$x \xrightarrow{f} y$$

Wniosek 23.

a) $$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

b) $$(\ln(\sin x))' = \operatorname{ctg}(x)$$

a) $$(x^a)' = (e^{a \cdot \ln x})' = (g(f(x)))' = \left[\begin{matrix} g(y) = e^y \\ f(x) = a \ln x \end{matrix}\right] = \underset{\substack{\| \\ e^{f(x)}}}{g'(f(x))} \cdot \underset{\substack{\| \\ a \cdot \frac{1}{x}}}{f'(x)} = a \cdot x^{a-1}$$

$$x^a = e^{a \ln x}$$

b) $$(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\cos x) = \operatorname{ctg}(x)$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right)' =$$

$(e^x)' = e^x$

$\underline{f(x) > 0}$

$$= e^{g(x)\cdot \ln f(x)} \cdot \left(g(x)\cdot \ln f(x)\right)'$$

$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)\right)$$

$y = f(x)$

Uwaga 24. *Czasami stosuje się zapis Leibniza:*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

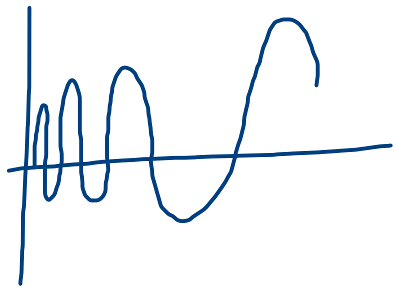
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

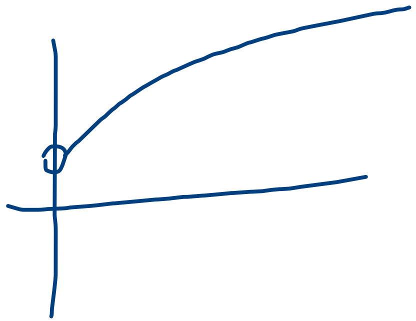
W tym zapisie reguła łańcucha dla funkcji $z(f(x)) = z(y)$ *ma postać:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad y = f(x).$$

Definicja 25.

- *Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna na (a,b) jeśli pochodna istnieje w każdym punkcie przedziału.*
- *Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna na $[a,b]$ jeśli pochodna istnieje w każdym punkcie wnętrza i istnieją pochodne jednostronne w końcach ($f'(a^+)$ i $f'(b^-)$).*
- *Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w sposób ciągły na (a,b) jeśli pochodna istnieje w każdym punkcie przedziału i zadaje funkcję ciągłą. Zbiór takich funkcji oznaczamy $C^1(a,b)$.*
- *Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w sposób ciągły na $[a,b]$ jeśli pochodna istnieje w każdym punkcie wnętrza, istnieją pochodne jednostronne w końcach ($f'(a^+)$ i $f'(b^-)$) oraz pochodna rozważona na $[a,b]$ jest funkcją ciągłą. Zbiór takich funkcji oznaczamy $C^1[a,b]$.*





Przykład 26. *Funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \textit{dla } x \neq 0 \\ 0 & \textit{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$*, ale pochodna nie istnieje dla* $x = 0$.

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\left|x \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{|x|}$$

- f - ciągła → ciągła poza $x = 0$

  → ciągła w $x = 0$, bo $\lim_{x \to 0} \overset{0}{x} \cdot \overset{\text{ogr.}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$

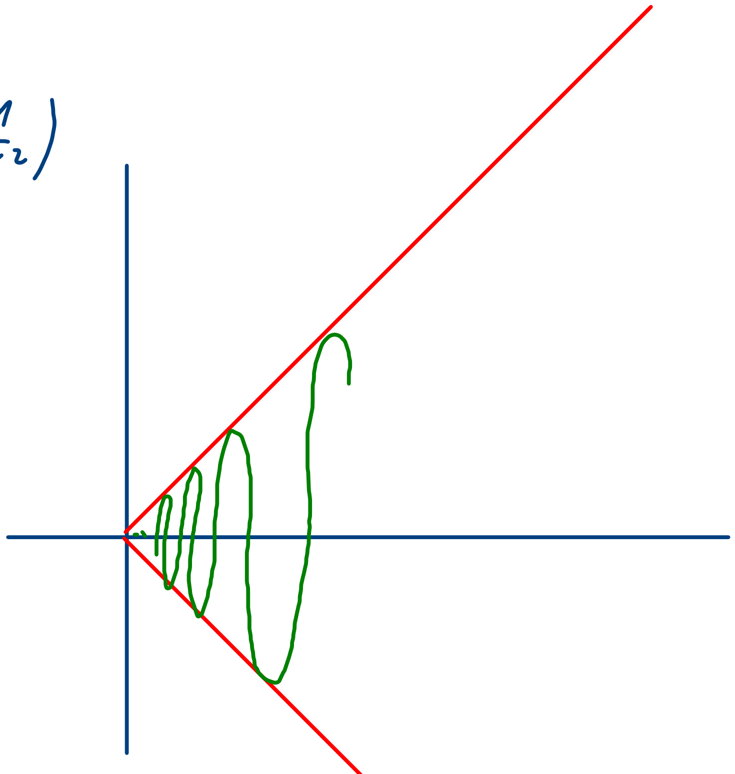
- $f'(x)$ istnieje dla $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

- $f'(0)$? → nie istnieje

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

granica przy $x \to 0$ nie istnieje



Przykład 27. *Funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$ *(więc i ciągła), ale pochodna nie jest ciągła w* $x = 0$.

- f ciągła
  - $\to$ $x \neq 0$ jasne
  - $\to$ $x = 0$ jak wcześniej
- $f'(x)$ istnieje dla $x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

f ciągła, f' istnieje na $\mathbb{R}$, ale $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nie istnieje

czyli f' nieciągła w $x = 0$

Twierdzenie 28. *[Pochodna funkcji odwrotnej] Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła i odwracalna w przedziale $[c,d]$, a $g(y)$ jest jej funkcją odwrotną. Niech $a \in (c,d)$ oraz $f(a) = b$. Jeśli pochodna $f'(a)$ istnieje i $f'(a) \neq 0$, to $g(y)$ jest różniczkowalna w punkcie b oraz*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

$g = f^{-1}$

$f(a) = b$

$a = g(b)$

$f : [c,d] \to [u,v]$ ciągła i odwracalna (ściśle monotoniczna)

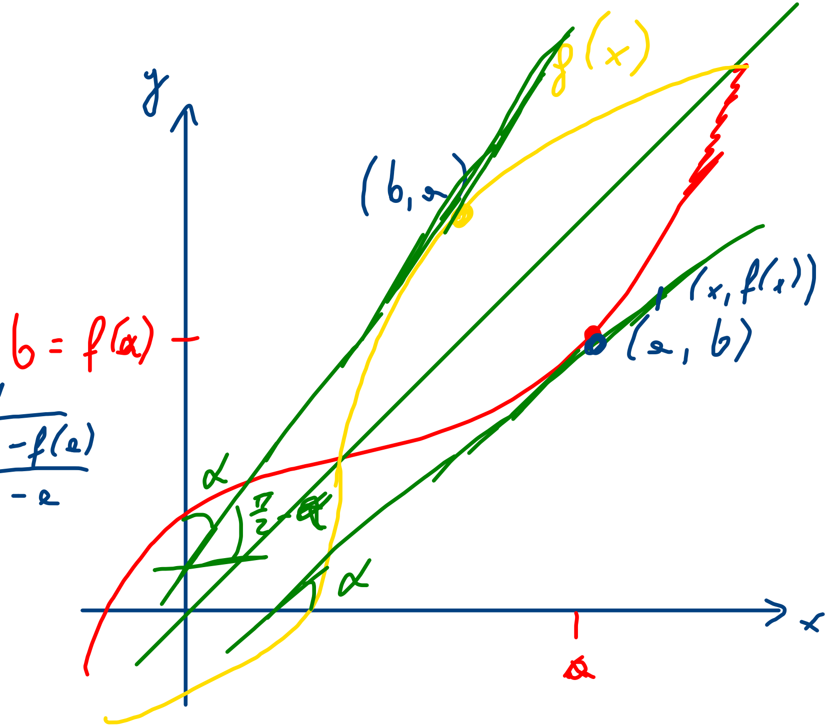
$f(a) = b$

$a \in (c,d) \qquad b \in (u,v)$

$f(x) = y \iff x = g(y)$

$x \in [a,b] \quad y \in [u,v]$

$$\lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \left[\begin{array}{ll} y = f(x) & x = g(y) \\ y \to b \iff x \to a & \\ y \neq b \iff x \neq a & \end{array}\right] = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \overset{x\neq a}{=} \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}$$



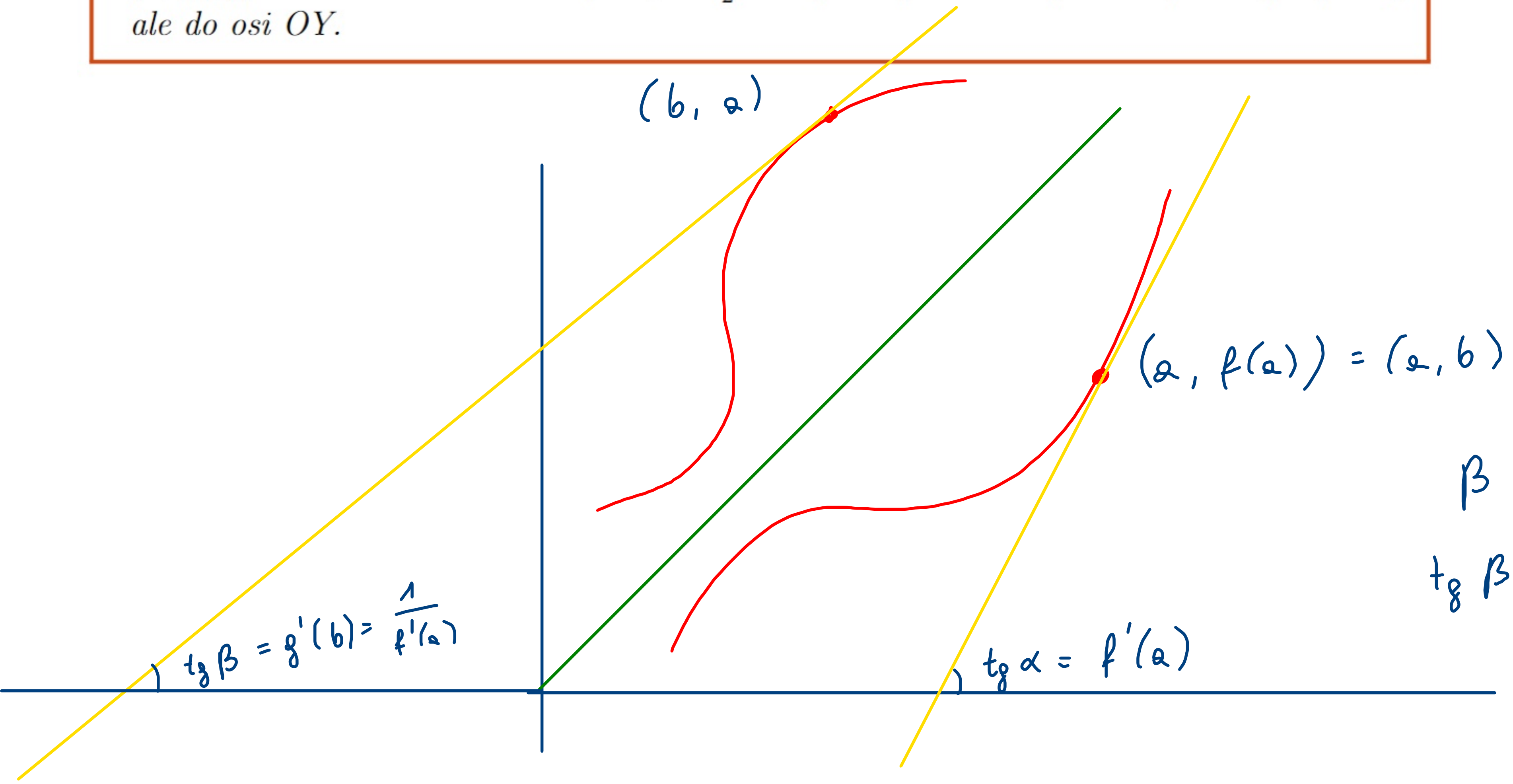
Uwaga 29. *Oznaczając* $g = f^{-1}$, $a = f^{-1}(b)$ *możemy napisać:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Albo inaczej: jeśli $y = f(x)$, *to*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Uwaga 31. *Uwaga: jeśli α jest kątem nachylenia stycznej do wykresu w punkcie $(x, f(y))$ w stosunku do osi OX, to $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ jest kątem nachylenia tej samej stycznej ale do osi OY.*



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$