Lista powtórkowa przed 3. kolokwium, Analiza Matematyczna I

1. Zbadaj granicę punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego f_n na zbiorze A.

(a)
$$f_n(x) = ne^{-nx}, \quad A = (0, \infty),$$

(b)
$$f_n(x) = x^n, \quad A = [-\frac{1}{2}, 1],$$

(c)
$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad A = [0, \infty),$$

(d)
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad A = [0, \infty),$$

(e)
$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad A = (0, \infty),$$

(f)
$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad A = (-\infty, \infty),$$

(g)
$$f_n(x) = \sqrt{x + n + 1} - \sqrt{x + n}, \quad A = (0, \infty),$$

(h)
$$f_n(x) = n\operatorname{tg}\frac{x}{n}, \quad A = [0, \pi/4],$$

(i)
$$f_n(x) = \frac{1}{n}[nx], \quad A = \mathbb{R},$$

(j)
$$f_n(x) = 2n\sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad A = \mathbb{R},$$

(k)
$$f_n(x) = \frac{2nx}{2 + nx^2}, \quad A = \mathbb{R},$$

(l)
$$f_n(x) = \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \quad A = [0, \infty),$$

(m)
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}, \quad A = [0, \infty),$$

(n)
$$f_n(x) = \frac{n^2 + 1}{n^8x^6}, \quad A = (0, \infty),$$

(o)
$$f_n(x) = x(1 - 2x)^n, \quad A = [0, 1/2],$$

(p)
$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{n^2 + x}, \quad A = [0, \infty),$$

(q)
$$f_n(x) = (1 + x)(1 - 3x)^n, \quad A = [0, 1/3],$$

(r)
$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{n} \cdot x}{n^3 + x^2}, \quad A = [0, \infty).$$

2. Ciąg funkcyjny f_n jest zbieżny jednostajnie do f na zbiorze A. Pokazać, że ciąg funkcyjny $|f_n|$ jest zbieżny jednostajnie do $|f|$ na A.

3. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$, i $x \in A$, gdzie $A = [1, \infty)$.
(a) Policzyć granicę punktową $f(x)$ ciągu f_n na A.
(b) Policzyć $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$.
(c) Uzasadnić zbieżność jednostajną f_n do f na A.

4. Zbadaj zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych na podanych zbiorach.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}x^4}, \quad \mathbb{R},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}, \quad \mathbb{R},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|}, \quad \mathbb{R},$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad \mathbb{R},$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad [0,1),$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{x+2^n}, \quad [0,M],$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx/3)}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad \mathbb{R}.$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^5+x^2}, \quad \mathbb{R}.$$

5. Wyznacz przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^3}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{2^n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3}$$

6. Zbadać ciągłość funkcji
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}.$$

7. Obliczyć promień zbieżności szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n^2}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^n x^{n^3}$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} x^n$$

8. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

9. Wykazać, że szereg funkcyjny
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$$

(a) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-2022, 2022]$,

(b) zadaje funkcję różniczkowalną na przedziale $[-2022, 2022]$.

10. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$$

na odcinku $[0, 2022]$.

11. Oblicz promień zbieżności R szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = f(x)$$

i wykaż, że jego suma $f(x)$ spełnia $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$ na $(-R, R)$.

12. Oblicz pochodną funkcji x^{x^x}.

13. Pokaż, że funkcja $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ jest odwracalna na całej prostej. Znajdź funkcje pochodne funkcji tgh i jej odwrotnej.

14. Oblicz

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$$

15. Niech $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$. Oblicz z definicji $f'(3)$.

16. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$$

17. Czy funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana przez: $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x > 0)$, $f(0) = 0$, jest różniczkowalna? Czy jest klasy $C^1[0, \infty)$?

18. Sprawdź różniczkowalność funkcji

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \\ x^3 + 2x & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + \sqrt{x} & \text{dla } x \geqslant 1 \\ \tan^2(\frac{x\pi}{3}) & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

19. Funkcja f jest zadana przez

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dla } x \leq 0 \\ b^x + 4 & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ funkcja ta jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$?

20. Niezerowa funkcja f spełnia warunek $f'(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Oblicz pochodną funkcji odwrotnej do f w punkcie 3.

21. Dla $x \in \mathbb{R}$ udowodnić nierówności

$$-e^{-1/2} \leq 2x \cdot e^{-2x^2} \leq e^{-1/2}.$$

22. Dla $x > 0$ udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3}.$$

23. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji na podanych zbiorach

(a)

$$f(x) = x^3 - 2x + 5, \quad [-\tfrac{3}{2}, 2]$$

(b)

$$f(x) = x^3 + 3|x| + 2, \quad [-1, 1]$$

(c)

$$f(x) = x^2 - 2x - 6\ln(x+1), \quad [0, 10]$$

(d)

$$f(x) = xe^{-x^2}, \quad A = [-10, 10]$$

24. Znajdź wymiary prostokąta bez jednego boku, który ma długość trzech boków równą 60 cm oraz największą możliwą powierzchnię (po domknięciu).

25. Rysujemy prostokąt pod wykresem sinusoidy na odcinku $[0, \pi]$ i nad osią OX. Znajdź największe możliwe pole takiego prostokąta.

26. Ratownik znajduje się na plaży ($y > 0$) w punkcie $(0, 4)$, a topielec — w morzu ($y < 0$) w punkcie $(2 + 4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Ratownik na plaży porusza się z prędkością $\sqrt{3}$, a w morzu z prędkością 1. Ile minimalnie czasu potrzebuje ratownik na dotarcie do topielca?

27. Samochód wyścigowy jedzie po elipsie

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

Gdy przejeżdża przez punkt $A = (5, 1)$ (jadąc w praw i w dół) jego prędkość wynosi $50\sqrt{61}$. Znajdź składową poziomą prędkości w momencie przejeżdżania przez punkt A.[1]

28. Boki trójkąta równobocznego zmniejszają się w tempie 3 *cm* na sekundę. W jakim tempie zmniejsza się pole, gdy bok trójkąta ma długość 5 *cm*?

29. Drabina długości 10 m jest oparta górnym końcem o ścianę, a dolnym o podłogę. Z powodu śliskości podłogi drabina zaczyna się zsuwać i w pewnym momencie, gdy górny koniec znajduje się na wysokości 6m, prędkość odsuwania się dolnego końca od ściany wynosi 2m na sekundę. Z jaka prędkością górny koniec zsuwa się po ścianie w tym momencie? Zakładamy, ze kat pomiędzy ściana i podłoga jest równy 90^o.

30. Lampa jest umieszczona na chodniku (na poziomie 0) 30m od ściany. Mężczyzna wzrostu 2m idzie od lampy w kierunku ściany z prędkością 2m na sekundę. W jakim tempie zmienia się cień mężczyzny na ścianie, gdy mężczyzna ten znajduje się 10m od ściany?

31. Obliczyć $\frac{dy}{dx}$ w punkcie $x = 0$ przyjmując, że y jest funkcją zmiennej x spełniającą $y(0) = \pi/2$ oraz

$$\sin(2x) = 2\cos(y).$$

---

[1] *Uwaga:* Można przyjąć, że jednostkami są km oraz $\frac{km}{h}$.
Wskazówka: Dla ruchu opisanego przez $(x(t), y(t))$ prędkość to $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

32. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie π^2 oraz $f(\pi^2) = 1$ i $f'(\pi^2) = 2020$. Funkcja g jest funkcją odwrotną do f określoną w pewnym otoczeniu punktu 1. Ponadto, funkcja h w pewnym otoczeniu punktu 0 jest zadana wzorem:

$$h(x) = g(e^x + \sin(x)).$$

Wyznacz $h'(0)$.

33. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna i odwracalna oraz $f(0) = f'(0) = \pi/4$. Niech $g(y)$ oznacza funkcje odwrotna do $f(x)$. Obliczyć pochodną funkcji $h(t) = g(\operatorname{arctg} t)$ w punkcie $t = 1$.

34. Załóżmy, że wielomian W spełnia $W(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Pokaż, że

$$u(x) = W(x) + W'(x) + W''(x) + \cdots \geqslant 0.$$[2]

35. Wyznacz granice:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$$

(c)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x - 2\cos(x) + 3}{x^2}.$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 6x^2) - 6x^2 + 18x^4}{x^6}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2x + 2x^2}{\cos(2x) - 1 + 2x^2 + x^3}$$

(g)
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right).$$

(h)
$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x.$$

[2] *Wskazówka:* W jakim punkcie funkcja u ma ekstremum globalne?