

Lista powtórkowa przed 1. kolokwium, Analiza Matematyczna I

1. Dowieść, że następujące liczby są niewymierne:

(a) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

(b) $\log_2 5$

(c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$

2. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

3. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

4. Znajdź kresy zbiorów i rozstrzygnij, czy te kresy należą do zbioru

(a)

$$\left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

(b)

$$\left\{ \frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

(c)

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

(d)

$$\left\{ \frac{31^n}{n!} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

5. Udowodnić, że dla dodatniej liczby naturalnej n

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

(b)

$$\frac{2}{\sqrt[3]{1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \geq \sqrt[3]{n^2}$$

(c)

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}$$

(d)

$$10n < 2^n + 25$$

6. Przy odpowiednich założeniach na n, k (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

(b)

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(d)

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

7. Udowodnij

(a)

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$$

(b)

$$a^2 + \frac{4}{a^4} \geq 3$$

(c)

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n < (n+1)^n$$

8. Oblicz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)

$$\frac{5n^4 + n^2 - 6}{3n^4 + 7}$$

(b)

$$\frac{n}{1 + \sqrt{n}}$$

(c)

$$\frac{1}{(2 + (-1)^n)^n}$$

(d)

$$\frac{\sqrt{3^n + n^2}}{\sqrt{3^n + 2^n + 1}}$$

(e)

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}$$

(f)

$$\frac{n!}{n^{22}}$$

(g)

$$\frac{2^{n^2}}{n!}$$

(h)

$$\sqrt{n^2 + 5n} - n$$

(i)

$$n \left(\sqrt{n^2 + 7} - n \right)$$

(j)

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$

9. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3 + k}{n^4 + (-1)^k \cdot k^2}.$$

10. Z definicji oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n + 1}.$$

11. Pokaż, że następujący ciąg jest zbieżny

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3}\right).$$

12. Oblicz granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}$$

13. Oblicz granicę ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanego przez

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

14. Zbadaj zbieżność szeregów

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47}$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$$

(g)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n + 3^n}}$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n}$$