Wzór dwumianowy Newtona $\quad x, y \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

---

d-d (ćwiczenie na indukcję)

Twierdzenie 27. *[Nierówność Bernoulliego] Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \geq -1$ zachodzi*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dodatkowo: równość zachodzi tylko wtedy gdy $x = 0$. lub $n = 1$.

- gdy $x > 0$, to $\quad (1+x)^n = \binom{n}{0} 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n > 1 + nx$
- dla dow $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \longrightarrow$ dowód $\longrightarrow$ zadanie z listy 1.

CIĄGI LICZBOWE

Definicja 1. *Ciągiem* a_n *nazywamy odwzorowanie liczb naturalnych w liczby rzeczywiste. Liczby* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *nazywamy wyrazami ciągu.*

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(n)$, $\underline{a_n}$, $\{a_n\}$, $\underline{(a_n)}$, $(a_n)_n$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Przykład 2. *Przykłady:*

$$a_n = n^2, \qquad b_n = [\sqrt{n}], \qquad c_n = (-1)^n + 2^{-n}, \qquad d_1 = 5,\ d_n = 2d_{n-1} + 3,\ n > 1.$$

Inny ciekawy przykład:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

a_n: $(1, 4, 9, 16, \dots)$

b_n: $(1, 1, 1, 2, 2, \dots)$

d_n: $(5, 13, 29, \dots)$

$[x] = \overset{\max}{\sup}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

$x \in \mathbb{R}$

$\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$

Definicja 3. *Poniżej podane są nazwy, których będziemy używać (zakładamy, że dana nierówność zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i pewnego $M \in \mathbb{R}$).*

$a_n \leq a_{n+1}$ - *ciąg niemalejący*
$a_n < a_{n+1}$ - *ciąg (ściśle) rosnący*
$a_n \geq a_{n+1}$ - *ciąg nierosnący*
$a_n > a_{n+1}$ - *ciąg (ściśle) malejący*
$a_n \leq M$ - *ciąg ograniczony z góry*
$a_n \geq M$ - *ciąg ograniczony z dołu*
$|a_n| \leq M$ - *ciąg ograniczony*

Ciąg spełniający którąś z pierwszych czterech własności nazywamy monotonicznym.

Przykład 4. *Ciąg a_n zadany rekurencyjnie przez:*

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$$

jest (ściśle) malejący oraz ograniczony.

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{5}{4}$

$a_3 = \frac{41}{40}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right)$

- a_n jest ogr. z dołu przez 1

I sposób: indukcja: $a_1 = 2 > 1$, zał. że $a_k > 1$. Cel: $a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) > 1$

$(a_k > 0) \Updownarrow \cdot 2a_k$

$a_k^2 + 1 > 2a_k$

$(a_k - 1)^2 > 0$

II sposób: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$

- $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} a_n^{-1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - a_n^2}{a_n}\right) < 0$ $\qquad a_{n+1} < a_n \qquad n = 1, 2, \ldots$

$\overset{-}{1 - a_n^2}$, $\overset{+}{a_n}$

$1 - a_n^2 = \frac{(1 - a_n)(1 + a_n)}{a_n}$, $(1-a_n) : -$, $(1+a_n) : +$, $a_n : +$

ZBIEŻNOŚĆ CIĄGÓW

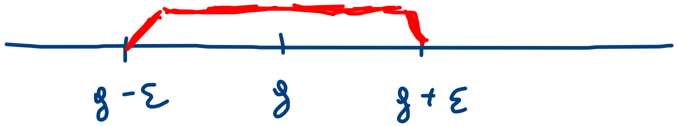
$2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ $\qquad \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$

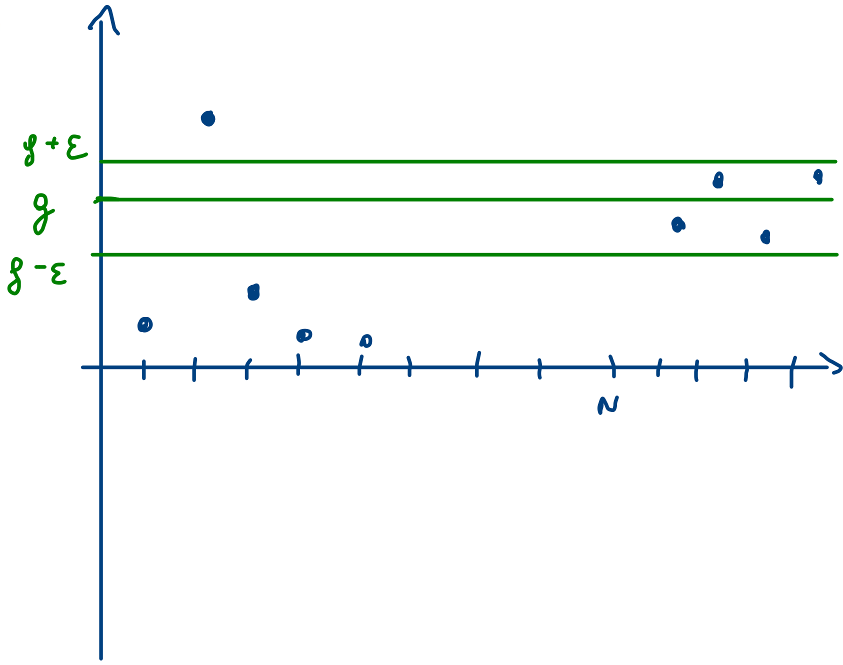
Definicja 5. *[Ciąg zbieżny, granica ciągu] Liczba g jest granicą ciągu a_n jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N, taka że dla $n > N$ mamy $|a_n - g| < \varepsilon$.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \cancel{\in} \mathbb{N} \qquad \forall n > N \qquad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy $g = \lim_{n\to\infty} a_n$ i mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny.

$|a_n - g| < \varepsilon \iff$





Uwaga 6.

- *Jeśli w ciągu a_n zmienimy, usuniemy lub dodamy skończoną* liczbę *~~ilość~~ wyrazów, to nie będzie to miało żadnego wpływu ani na zbieżność ciągu ani na wartość granicy.*
- *Gdybyśmy zamienili nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ z definicji 5 na inną typu:*

$$|a_n - g| \leq \varepsilon, \qquad |a_n - g| < \varepsilon/3, \qquad |a_n - g| < \sqrt{\varepsilon},$$

to dostaniemy definicję równoważną.

Definicja 7. *Mówimy, że pewna własność (np. monotoniczność, dodatniość, itp.) zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jeśli istnieje n_0, takie że dana własność zachodzi dla $n \geq n_0$.*

Przykład 8.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1},\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ - *nie istnieje.*

a) Weźmy $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że $g = 2$ jest granicą.

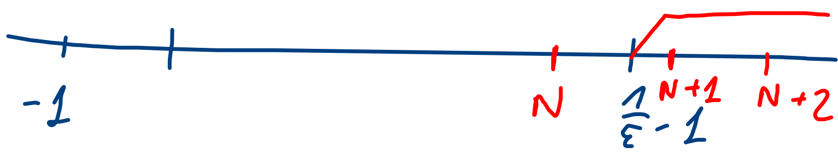
Niech $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 2$. Wtedy dla $n > N$ zachodzi:

$$|a_n - g| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\underbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n$$

Więc $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 2$



Przykład 8.

~~a)~~ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+1},$ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ - *nie istnieje.*

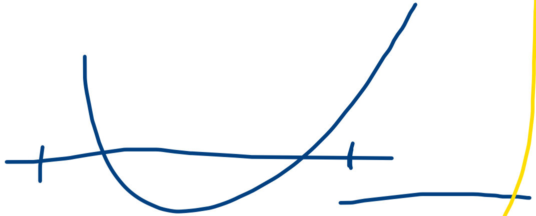
b) $a_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+1}$ $\quad g = \frac{1}{2}$

Ust. $\varepsilon > 0$. Weźmy $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ i dla $n > N$ mamy:

$$\left| \frac{n^2+n+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2+2n+2-2n^2-1}{4n^2+2} \right| = \frac{2n+1}{4n^2+2} \overset{(*)}{\leq} < \varepsilon$$

$$2n+1 < \varepsilon \cdot 4n^2 + 2\varepsilon$$

$$0 < 4\varepsilon n^2 - 2n + 2\varepsilon - 1$$



$$(*) \quad \frac{2n+2n}{4n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

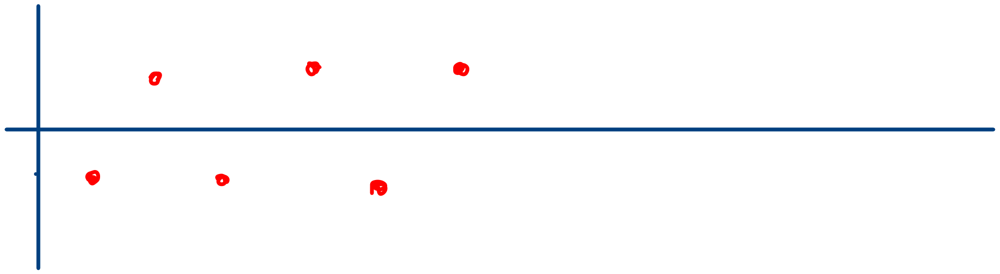
Przykład 8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+1}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ - } \textit{nie istnieje.}$$

c) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i zał. że g jest granicą.

tzn. w przedziale $\left(g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2}\right)$ są prawie wszystkie wyrazy ciągu.

$1 \notin \left(g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2}\right) \vee -1 \notin \left(g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2}\right).$



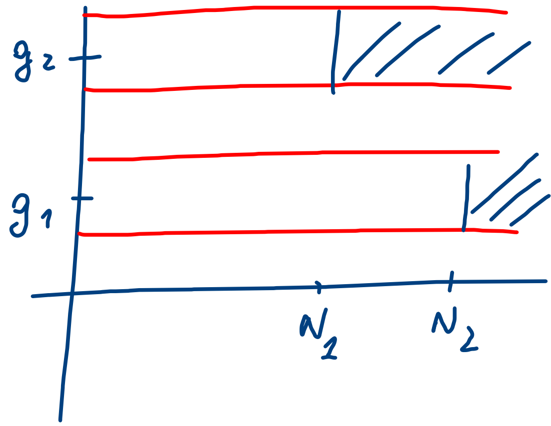
Twierdzenie 9. *Ciąg zbieżny posiada tylko jedną granicę.*

nie wprost.

Załóżmy, że g_1 i g_2 są granicami ciągu (a_n). Zał. nie wprost, że $g_1 < g_2$

Niech $\varepsilon = \frac{g_2 - g_1}{3}$. Wtedy $\exists N_1 \; \forall n \geq N_1 \; |a_n - g_1| < \varepsilon$

$\exists N_2 \; \forall n \geq N_2 \; |a_n - g_2| < \varepsilon$



Wtedy $N = \max(N_1, N_2)$

$a_N \in (g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon)$

$a_N \in (g_2 - \varepsilon, g_2 + \varepsilon)$

przedziały rozłączne, bo

$$g_1 + \varepsilon < g_2 - \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$2\varepsilon < g_2 - g_1$$
$$\varepsilon < \frac{g_2 - g_1}{2}$$

Sprzeczność.

Twierdzenie 10. *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*

d-d

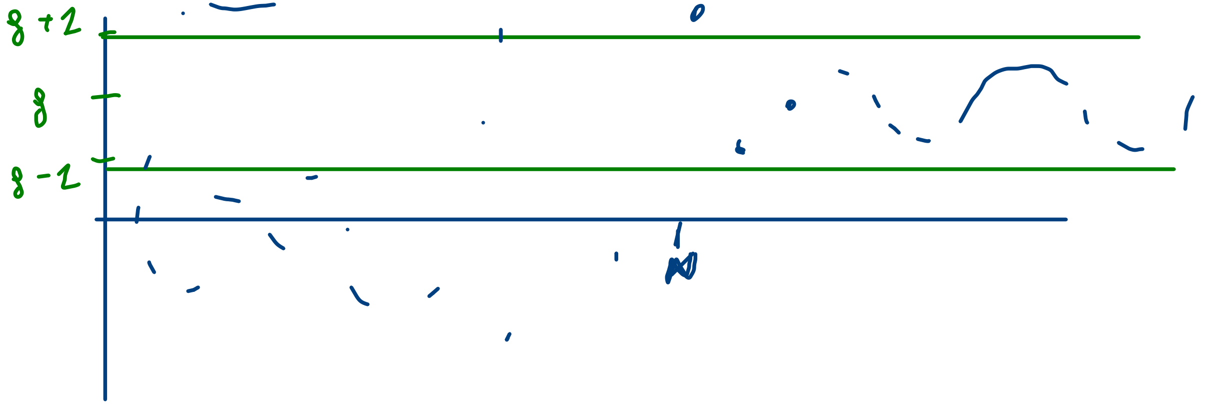
Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ $\quad (a_n \to g)$.

Dla $\varepsilon = 1$ istnieje N, że dla $n > N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon = 1$.

Pokażemy, że $M = \max(|g|+1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|)$ jest ograniczeniem ciągu a_n $(|a_n| \le M)$

Dla $k \in \{1, \dots, N\}$: $|a_k| \le M$

Dla $k > N$ $\quad |a_k| = |a_k - g + g| \le |a_k - g| + |g| \le 1 + |g| \le M$.



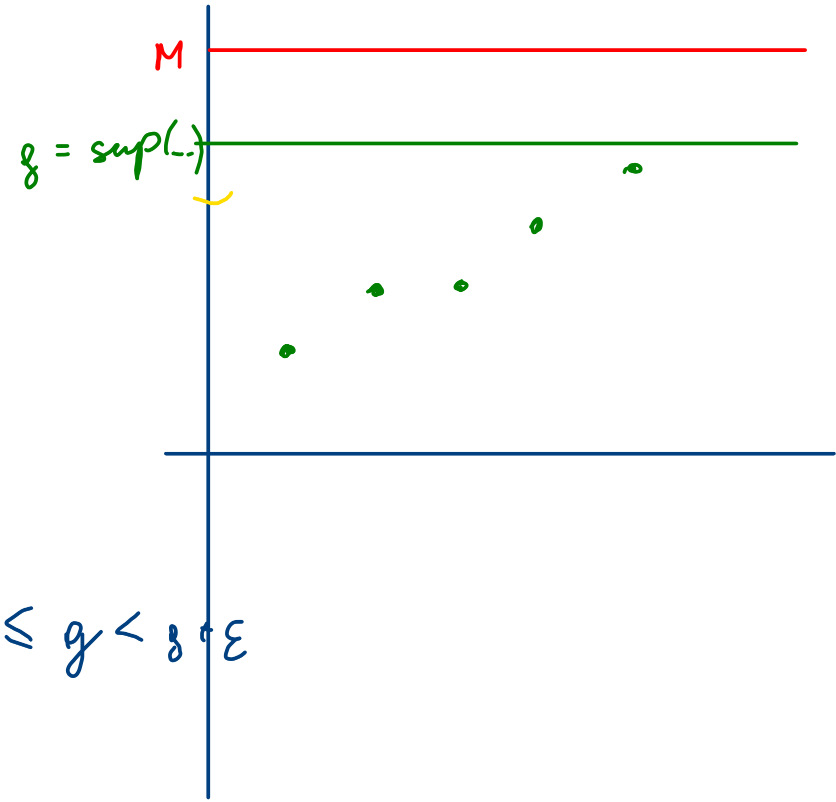
Twierdzenie 11. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

d-d

Zał. że a_n jest niemalejący $(a_n \leq a_{n+1})$

$g := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\uparrow$ ogr. z założenia



Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Niech $\varepsilon > 0$.

Z def. sup istnieje a_N t. że $a_N > g - \varepsilon$.

Wtedy dla $n \geq N$ $\quad g - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq \ldots \leq a_n \leq g < g + \varepsilon$

czyli $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq N$.

Twierdzenie 12. *[Arytmetyka granic] Załóżmy, że a_n i b_n są ciągami zbieżnymi oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Wtedy ciągi po lewej stronie poniższych nierówności są zbieżne oraz zachodzi:*

a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B,$$

b) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B} \quad \text{(pod warunkiem, że } B \neq 0\text{).}$$

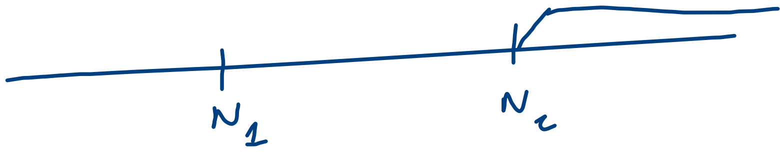
$a_n \to A$

$b_n \to B$

d-d a) Niech $\varepsilon > 0$. Z def. zbieżności:

$$\exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < \varepsilon/2$$

$$\exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - B| < \varepsilon/2$$



Dla $n \geq N = \max(N_1, N_2)$:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Czyli $c_n = a_n + b_n$ jest zbieżny do $A + B$.

$|ab| = |a| \cdot |b|$

Twierdzenie 12. *[Arytmetyka granic] Załóżmy, że a_n i b_n są ciągami zbieżnymi oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Wtedy ciągi po lewej stronie poniższych nierówności są zbieżne oraz zachodzi:*

a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B,$$

b) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B} \quad \text{(pod warunkiem, że } B \neq 0\text{).}$$

b) Tw. 10 $\Rightarrow$ $\exists M \ \forall n \ |a_n| < M$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z def. zb. $a_n \to A$ i $b_n \to B$:

$$\exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$$

$$\exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

Wtedy dla $n \geq N = \max(N_1, N_2)$

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \leq |a_n|\,|b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |B| \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

czyli $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$