LICZBY ZESPOLONE

Definicja 1. *Zbiorem liczb zespolonych nazywamy zbiór par* (a, b), *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$, *przy czym stosujemy zapis* $a + bi$. *Działania są zdefiniowane następująco:*

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.

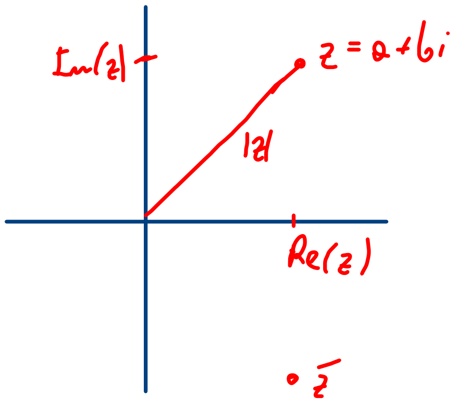
Definicja 2. *Dla* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *definiujemy:*

$\mathrm{Re}(z) = x$ – *część rzeczywista liczby* z

$\mathrm{Im}(z) = y$ – *część urojona liczby* z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *moduł liczby* z

$\overline{z} = x - iy$ – *liczba sprzężona do* z



Uwaga 3. *Działania na liczbach zespolonych mają podobne własności jak działania na liczbach rzeczywistych (łączności, przemienności, rozdzielności), ale nie ma tu już naturalnego porządku $\leq$. Dla każdego $z = x + iy \neq 0 = 0 + 0i$ mamy:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

czyli każdy element niezerowy ma odwrotność. Algebraicznie $\mathbb{C}$ nazywamy ciałem.

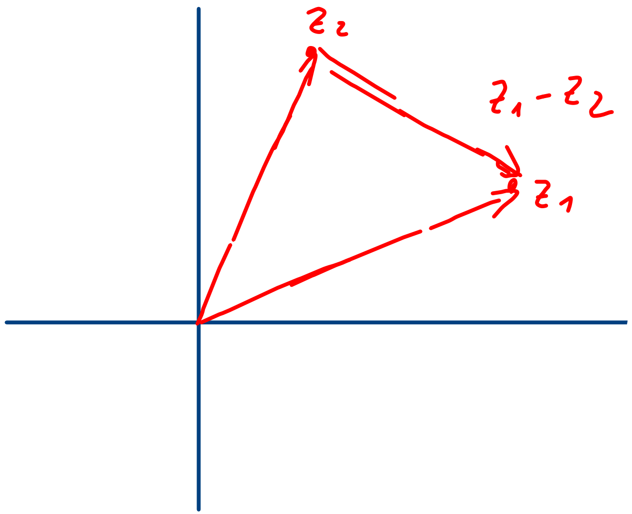
$0 = 0 + 0 \cdot i$

$1 = 1 + 0 \cdot i$

Lemat 4. *Dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$



CIĄGI LICZB ZESPOLONYCH

Definicja 5. *[Granica ciągu] Liczba $g \in \mathbb{C}$ jest granicą ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \qquad |z_n - g| < \varepsilon.$$

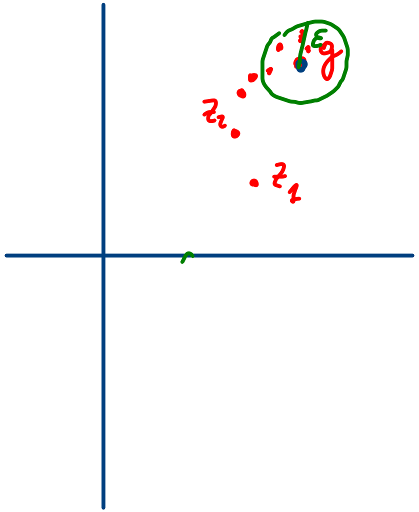
Piszemy wtedy $g = \lim_{n\to\infty} z_n$ lub $z_n \to g$ i mówimy, że ciąg z_n jest zbieżny.

$|z - w|$

$\uparrow$

odl. z od w

Uwaga 6. *Ciąg $z_n \in \mathbb{C}$ jest zbieżny do $g \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n - g| \to 0$.*



Uwaga 7. *Niech* $z_n = x_n + iy_n$, $g = a + bi$. *Wtedy:*

$$z_n \to g \iff x_n \to a \ \wedge \ y_n \to b.$$

d-d

$(\Rightarrow)$ $z_n \to g \iff |z_n - g| \to 0$

$$|z_n - g| = \sqrt{|x_n-a|^2 + |y_n-b|^2}$$

$|x_n - a| \leqslant |z_n - g| \to 0$

$|y_n - b| \leqslant |z_n - g| \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \to a, \ y_n \to b$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n \geqslant N_1 \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \ \forall n \geqslant N_2 \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

Dla ust. ε i $N = \max(N_1, N_2)$ i $n \geqslant N$ mamy

$$|z_n - g| = \sqrt{|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

Definicja 8. *Ciąg $z_n \in \mathbb{C}$ spełnia warunek Cauchy'ego, gdy:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N \qquad |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Lemat 9. *Niech $z_n = x_n + iy_n$. Ciąg z_n spełnia warunek Cauchy'ego wtedy, i tylko wtedy, gdy oba ciągi: x_n i y_n spełniają warunek Cauchy'ego.*

d-d prawie jak przed chwilą ($g \rightsquigarrow z_m$, $a \rightsquigarrow x_m$, $b \rightsquigarrow y_m$)

Twierdzenie 10. *Ciąg $z_n \in \mathbb{C}$ jest zbieżny wtedy, i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

← zupełność $\mathbb{C}$

z_n zbieżny $\overset{U.7}{\iff}$ x_n, y_n zbieżne $\overset{\text{zup. } \mathbb{R}}{\iff}$ x_n, y_n Cauchy'ego $\overset{L.9}{\iff}$ z_n Cauchy'ego

---

Analiza Funkcjonalna: def. Przestrzeń liniowa unormowana jest Banacha, gdy jest zupełna.

Przykład 11.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+i}{1+in} = -i.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\left(\frac{2+2i}{3}\right)^n}{5+\left(\frac{12+12i}{17}\right)^n} = 53.$$

1° $$\frac{n+i}{1+in}\cdot\frac{1-in}{1-in} = \frac{n-in^2+i-i^2n}{1+n^2} = \underbrace{\frac{2n}{1+n^2}}_{\downarrow\, 0} + i\,\underbrace{\frac{1-n^2}{1+n^2}}_{\downarrow\, -1} \longrightarrow -i$$

2° $$\frac{n+i}{1+in} = \frac{1+\frac{i}{n}}{\frac{1}{n}+i} \longrightarrow \frac{1}{i} = -i$$

$\frac{i}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

3° $$\underbrace{\left|\frac{n+i}{1+in}+i\right|}_{\downarrow\, 0} = \left|\frac{n+i+i-n}{1+in}\right| = \left|\frac{2i}{1+in}\right| = \frac{|2i|}{|1+in|} = \frac{2}{\sqrt{1+n^2}} \longrightarrow 0$$

$\Leftrightarrow \frac{n+i}{1+in} \longrightarrow -i$

Przykład 11.

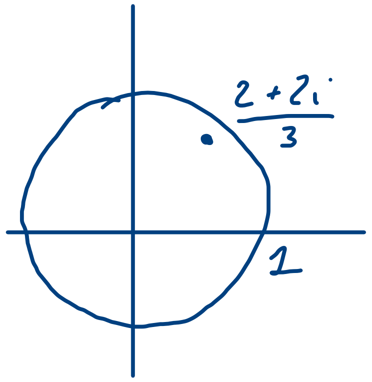
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+i}{1+in} = -i.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\left(\frac{2+2i}{3}\right)^n}{5+\left(\frac{12+12i}{17}\right)^n} = \cancel{53}.\ 1$$

$$z \to 0$$
$$\Updownarrow$$
$$|z| \to 0$$

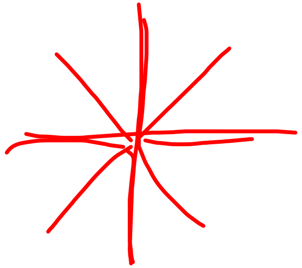
$$z_n = \left(\frac{2+2i}{3}\right)^n$$

$$\left|\left(\frac{2+2i}{3}\right)^n\right| = \left(\frac{2+2i}{3}\right)^n = \left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^n \to 0$$



$$|z_n| \to 0 \iff z_n \to 0$$

$$\left|\frac{12+12i}{17}\right| = \frac{\sqrt{12^2+12^2}}{17} = \frac{12\sqrt{2}}{17} < 1, \text{ bo } \underset{288}{12^2\cdot 2} < \underset{289}{17^2}$$



SZEREGI LICZB ZESPOLONYCH

Definicja 12. *[Zbieżność szeregu] Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny do* $s \in \mathbb{C}$*, jeśli ciąg* $s_n = z_1 + ... + z_n$ *zbiega do* s*. Piszemy* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ *i mówimy, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny do liczby* $s \in \mathbb{C}$.

Uwaga 13. *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Przykład 14. *Dla* $|z| < 1$ *mamy:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{N+1} \to 0}{1-z} \qquad z \neq 1$$

Twierdzenie 15. *[Warunek Cauchy'ego dla szeregu] Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n \geq N \qquad |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_m| < \varepsilon.$$

Definicja 16. *Mówimy, że szereg jest bezwzględnie zbieżny, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.*

Zał. że $\sum_n |z_n| < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall m > n \geq N \quad \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| < \varepsilon.$

Dla $\varepsilon > 0$, $m > n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| < \varepsilon$$

Zatem $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ speł. war. Cauchy'ego $\Rightarrow$ zbieżny.

$$\left| \sum_k z_k \right| \leq \sum_k |z_k|$$

Wniosek 18. *Skoro bezwzględna zbieżność pociąga zbieżność, to prawdziwe są kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta.*

Przykład 19.

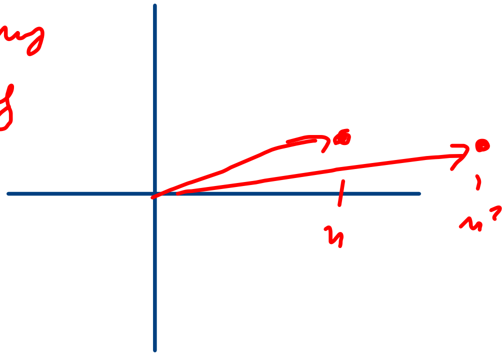
a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i} \text{ jest rozbieżny.}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+i} \text{ jest zbieżny.}$$

a) $$\frac{n+i}{n^2+i} = \frac{n+i}{n^2+i} \cdot \frac{n^2-i}{n^2-i} = \frac{n^3+in^2-in+1}{n^4+1} = \underbrace{\frac{n^3+1}{n^4+1}}_{\text{rozbieżny szereg}} + i\,\frac{n^2-n}{n^4+1}$$

b) $$\left|\frac{n+i}{n^3+i}\right| = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^6+1}} \leqslant \frac{\sqrt{2}\cdot n}{n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n^2}$$

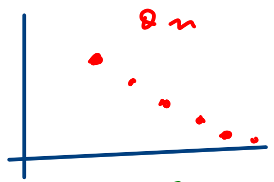
Zatem z kryt. por. $\sum_n \left|\frac{n+i}{n^3+i}\right| < \infty$, więc 0

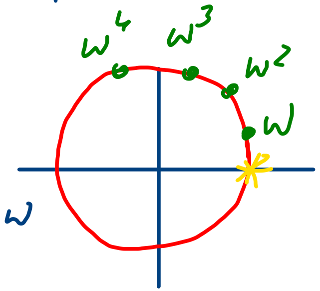


Twierdzenie 20. *Niech $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, $w \neq 1$, oraz a_n dąży monotonicznie do 0. Wtedy szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.





Z kryt. Dirichleta (dla liczb zesp.):

- $a_n \downarrow 0$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} w^k\right| = \left|\frac{w - w^{n+1}}{1-w}\right| \le \frac{|w| + |w^{n+1}|}{|1-w|} \le \frac{2}{|1-w|}$

ogr. sumy częściowe

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot w^n$ zbieżny

$$w^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$
$$= \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$\varphi = \arg w$

$$a_n \cdot w^n = \underbrace{\cos(n\varphi)\cdot a_n}_{\substack{\text{szereg zb. dla} \\ \varphi \neq 2k\pi}} + i\,\underbrace{\sin(n\varphi)\cdot a_n}_{\text{szereg zb. zawsze}}$$

Przykład 21. *Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}.$$

$\left|\frac{z}{2}\right| = \frac{1}{2}$

- szereg zb. dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- Rozważmy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ dla $|z| = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2 - z}$$

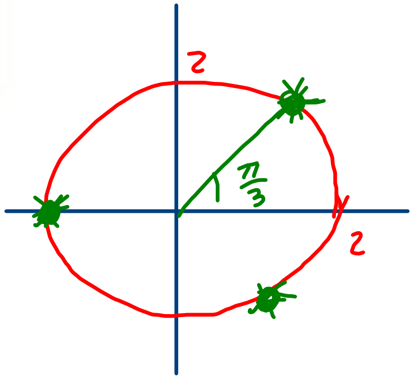
- Dla $z = \cos x + i \sin x$

$$\frac{2}{2 - \cos x - i\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2 - \cos x - i\sin x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(2 - \cos x + i\sin x)}{(2 - \cos x)^2 + \sin^2 x}\right) = \frac{4 - 2\cos x}{4 - 4\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}$$

Przykład 22. *Wyznacz obszar zbieżności szeregu potęgowego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}$$



Rozważmy $\sum_n \left| \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n} \right|$. Z kryt. Cauchy'ego

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n} \right|} = \frac{|z|^3}{8 \cdot \sqrt[n]{n}} \to \frac{|z|^3}{8}$$

$\Rightarrow$ dla $|z|^3 < 8 \iff |z| < 2$ szereg bezwzg. zb. $\Rightarrow$ zbieżny

$\Rightarrow$ dla $|z| > 2$ $\Rightarrow$ wyraz nie zbiega do zera $\Rightarrow$ rozbieżny

$\Rightarrow$ dla $|z| = 2$ $\quad z = 2 \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\quad z^{3n} = 8^n (\cos(3n\varphi) + i \sin(3n\varphi))$

$$-z = 2(\cos(\varphi+\pi) + i \sin(\varphi+\pi))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot (\cos(3n\varphi) + i \sin(3n\varphi)) = \sum \frac{\cos(3n(\varphi+\pi)) + i \sin(\ldots)}{n}$$

$\varphi + \pi = 2k\pi$ rozb.