Lista 2, Analiza Matematyczna I

1. ȧ) Dla $\varepsilon = 10^{-1}$ znaleźć liczbę naturalną N taką, że

$$\left|\frac{n^2+n}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \quad n > N.$$

b̈) Wykonać to polecenie dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$.[1]

2. Dwa ciągi a_n i b_n są zbieżne do liczb a i b odpowiednio. Pokazać, że dla ustalonej dodatniej wartości ε istnieje liczba naturalna N spełniająca

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon, \qquad dla\ n > N.$$

3. Wyprowadzić z definicji zbieżności ciągu następujące równości

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

ḃ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0,$$

ċ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

d̈)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

4. a) Pokazać, że jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny, to ciąg a_n nie musi być zbieżny.
ḃ) Co jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny do zera?

5. Uzasadnić, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $|a_n - a|$ jest zbieżny do zera.

6̈. Pokazać, że jeśli nieujemny ciąg a_n jest zbieżny do liczby $a > 0$, to ciąg $\sqrt{a_n}$ jest zbieżny do liczby $\sqrt{a}$.

7. Obliczyć granice podanych ciągów, niekoniecznie z definicji.

a)
$$\frac{n^2-3n+6}{1-2n^3}$$

b)
$$\frac{n^4+2(-1)^n n^2}{\sin n - 2n^4}$$

c)
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

d)
$$\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3}$$

ė)
$$\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[3]{n^2}$$

f)
$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$$

g)
$$\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$$

h)
$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} \ (1<a<b)$$

i)
$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$$

j̇)
$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

k̇)
$$\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2]$$

l̈)
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$$

ṁ)
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

[1] *Uwaga:* Wartość liczby N nie musi być najmniejsza możliwa.

$\dot{8}$. Ciąg a_n spełnia $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Udowodnić zbieżność ciągu a_n i obliczyć granicę.[2]

$\ddot{9}$. Zbadać zbieżność ciągu a_n określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = 5\frac{3a_n + 1}{2a_n + 6},$$

gdzie $a_1 > 1$.[3]

$\dot{1}0$. Udowodnić, że jeśli ciąg a_n jest zbieżny do 0 to $(1 + a_n^2)^{1/3}$ jest zbieżny do 1.

11. Udowodnić następujące równości

$\dot{a}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0,$$

$\ddot{b}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \qquad a > 1, k \in \mathbb{N},$$

$\dot{c}$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0,$$

$\ddot{d}$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$\ddot{e}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

$\dot{1}2$. Znaleźć liczbę naturalną k jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2021}}{n^k - (n-1)^k} = \frac{1}{2022}$$

$\ddot{1}3$. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right).$$

---

[2] *Wskazówka:* (Wersja a) Pokazać przez indukcję, że $a_n < 2$ a następnie, że a_n jest ciągiem rosnącym. (Wersja b) Pokazać, że $|2 - a_{n+1}| \leq |2 - a_n|/2$.

[3] *Wskazówka:* Użyj twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym.