Lista 13, Analiza Matematyczna I

1. Obliczyć granice

a) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$$

b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$$

c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\log x}$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x)}{\log x}$$

e) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$$

f) $$\lim_{x\to 1} \frac{4^x-3^x-1}{x^3-1}$$

ġ) $$\lim_{x\to\pi/2} (\pi^2-4x^2)\operatorname{tg} x$$

ḣ) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$$

i̇) $$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$$

j̇) $$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)$$

k̇) $$\lim_{x\to 0^+} \left(\log\frac{1}{x}\right)^x$$

ï) $$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)$$

2. Obliczyć granice

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

c) $$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x - x^{-1})$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}},\ (\varepsilon>0)$$

ė) $$\lim_{x\to 0}(x^{-2}-\operatorname{ctg}^2 x)$$

ḟ) $$\lim_{x\to 0} x^{-100}e^{-1/x}$$

ġ) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2006}}{\log^{1003}(x^2+1)}$$

ḧ) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

3. Obliczyć granice ciągów.

a) $$\lim_n n(5^{1/n}-3^{1/n})$$

ḃ) $$\lim_n \frac{e^{1/n^2}-1}{e^{1/n}-1}$$

ċ) $$\lim_n n^{1-\sqrt{2}}[(n+1)^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{2}}]$$

ḋ) $$\lim_n \frac{\log_4 n}{\sqrt{n}}$$

4̇. Niech
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{x^2-\pi^2/4} & x\neq\pm\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{\pi} & x=\pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
Pokazać, że funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w punktach $-\pi/2$ i $\pi/2$.

5. Pokazać, że:

ȧ) $$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}=0.$$

ḃ) $$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x=1.$$

6̇. Sprawdzić efekt zastosowania reguły de l'Hospitala do granicy
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$