LICZBY WYMIERNE

Definicja 1. *Liczbą wymierną nazywamy liczbę postaci* $\frac{p}{q}$*, gdzie* p *i* q *są liczbami całkowitymi przy czym* $q \neq 0$*. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy przez* $\mathbb{Q}$.

Uwaga 2. *Dwie liczby wymierne* $\frac{p}{q}$ *oraz* $\frac{r}{s}$ *są równe dokładnie wtedy, gdy* $ps = rq$.

Uwaga 3. *Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne.*

Przykład 4. *Liczba* $\frac{1}{7}$ *ma zapis dziesiętny postaci:* $0,(142857)$.

$$
\begin{array}{l}
\quad 0,142857\ldots \\
\hline
\;1,0 \qquad : 7 \\
-\;\;7 \\
\hline
\quad 30 \\
-\;28 \\
\hline
\quad\; 20 \\
-\;14 \\
\hline
\quad\;\; 60 \\
-\;\;56 \\
\hline
\quad\;\;\; 40 \\
-\;\;\;35 \\
\hline
\quad\;\;\;\; 50 \\
-\;\;\;\;49 \\
\hline
\quad\;\;\;\;\; 1
\end{array}
$$

wtorek $12^{00}-13^{00}$
piątek $12^{00}-13^{00}$
Marcin Preisner
p. 706, IM
Konsultacje

Uwaga 5. *Każda liczba o rozwinięciu dziesiętnym skończonym lub okresowym jest wymierna.*

$$a_k \ldots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_m = \frac{a_k \ldots a_m}{10^m} \in \mathbb{Q}$$

Przykład 6. *Liczba* $12,3(45)$ *jest równa* $\frac{12222}{990} = \frac{679}{55}$.

$$x = 12,3(45)$$

$$100 \cdot x = 1234,5(45)$$

$$\longrightarrow 99x = 1222,2$$

$$x = \frac{12222}{10 \cdot 99} \in \mathbb{Q}$$

Przykład 7. *Nie istnieje liczba wymierna q spełniająca $q^2 = 2$, czyli $\sqrt{2}$ jest niewymierny.*

$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Zał. nie wprost, że $\exists q \in \mathbb{Q}$ (istnieje) t. że $q^2 = 2$.

Zał. że $q = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}$ $(b \neq 0)$

bez straty ogólności

(tzn. gdyby $\exists c, d \in \mathbb{Z}$ $(d \neq 0)$ t. że $\left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2$, to $\frac{c^2}{d^2} = 2$ i $\left(\frac{-c}{d}\right)^2 = 2$ i $\left(\frac{-c}{-d}\right)^2 = 2$ i $\left(\frac{c}{-d}\right)^2 = 2$)

B.s.o. (bez straty ogólności)

$NWD(a, b) = 1$

(gdyby $\left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2$, to $\left(\frac{\frac{c}{NWD(c,d)}}{\frac{d}{NWD(c,d)}}\right)^2 = 2$

$a = \frac{c}{NWD(c,d)}$ $b = \frac{d}{NWD(c,d)}$

$NWD(a, b) = 1$)

$\frac{a^2}{b^2} = 2$ $a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 2 | a$ $a = 2a'$ $\Rightarrow 4(a')^2 = 2b^2$

$2(a')^2 = b^2$

$2 | b$

$\frac{a^2}{b^2} = 2$

$a^2 = 2b^2$

Sprzeczność z jednoznaczności rozkładu

$2 \to$ parzyście wiele razy po lewej

$2 \to$ nieparzyście —— " —— prawej

LICZBY RZECZYWISTE

Twierdzenie 8. *Istnieje zbiór $\mathbb{R}$ zawierający liczby wymierne, który ma następujące własności:*

1. *jest nim określone dodawanie i mnożenie,*
2. *$\mathbb{R}$ jest ciałem w sensie algebraicznym,*
3. *na $\mathbb{R}$ mamy określony porządek liniowy,*
4. *porządek jest zgodny z działaniami,*
5. *(własność ciągłości) dla każdego podzbioru $\mathbb{R}$ ograniczonego z góry istnieje najmniejsza liczba ograniczająca ten zbiór od góry.*

Definicja 9. *Podzbiór A liczb rzeczywistych nazywamy ograniczonym z góry, gdy istnieje $x \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich $a \in A$ mamy $a \leq x$. Mówimy wtedy, że x ogranicza zbiór A od góry. Analogicznie definiujemy zbiory ograniczone z dołu. Jeśli zbiór jest ograniczony zarówno z góry jak i z dołu, to mówimy że jest ograniczony.*

1, 2

$x, y \in \mathbb{R}$

$x + y \in \mathbb{R}$

$x \cdot y \in \mathbb{R}$

$\exists\, 0 \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 + x = x + 0 = x$

$\exists\, 1 \in \mathbb{R} \ \forall x \ \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ x + y = 0 \ \ (y = -x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ x \cdot y = 1$

$x + y = y + x$

$(x + y) + z = x + (y + z)$

$x \cdot y = y \cdot x$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\mathbb{R}$ jest ciałem algebraicznym.

3

- $\forall x, y \quad x \leq y$ lub $y \leq x$
- $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq x$

4

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

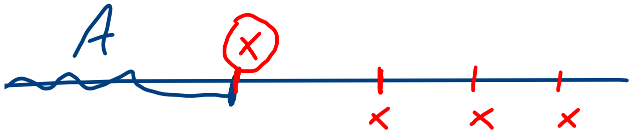
$a \leq b$ i $d \geq 0 \Rightarrow a \cdot d \leq b \cdot d$

Twierdzenie 8. *Istnieje zbiór $\mathbb{R}$ zawierający liczby wymierne, który ma następujące własności:*

1. *jest nim określone dodawanie i mnożenie,*
2. *$\mathbb{R}$ jest ciałem w sensie algebraicznym,*
3. *na $\mathbb{R}$ mamy określony porządek liniowy,*
4. *porządek jest zgodny z działaniami,*
5. *(własność ciągłości) dla każdego podzbioru $\mathbb{R}$ ograniczonego z góry istnieje najmniejsza liczba ograniczająca ten zbiór od góry.*

Definicja 9. *Podzbiór A liczb rzeczywistych nazywamy ograniczonym z góry, gdy istnieje $x \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich $a \in A$ mamy $a \leq x$. Mówimy wtedy, że x ogranicza zbiór A od góry. Analogicznie definiujemy zbiory ograniczone z dołu. Jeśli zbiór jest ograniczony zarówno z góry jak i z dołu, to mówimy że jest ograniczony.*

Uwaga 10. *Istnieje kilka sposobów skonstruowania liczb rzeczywistych: rozwinięcia dziesiętne (ciągi nieskończone), przekroje Dedekinda (rodziny podzbiorów $\mathbb{Q}$), ciągi Cauchy'ego (klasy abstrakcji ciągów z $\mathbb{Q}$).*



$a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots$ $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ $k = n, n-1, \ldots$

$a_n \neq 0$

$a_{-m} \neq 9$

Każde rozw. dziesiętne daje inną liczbę rzeczywistą poza:

$a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-m}(9) = a_n \ldots a_0, \ldots (a_{-m}+1)$

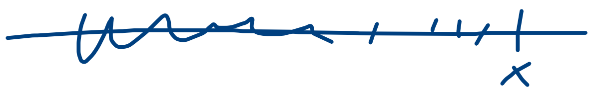
$0,7(9) = 0,8$

Definicja 11. *Niech A będzie ograniczonym z góry podzbiorem $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje liczba $b = \sup A$, która ma następujące własności:*

- *b ogranicza zbiór A od góry,*
- *jeśli c ogranicza zbiór A od góry, to $b \leq c$.*

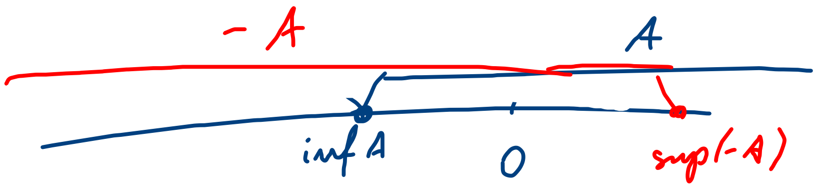
Analogicznie definiujemy $\inf A$ jako największą liczbę ograniczającą A od dołu (dla zbiorów ograniczonych z dołu).

Dlaczego inf istnieje?



Jeśli A jest ogr. od dołu, to $-A = \{-a : a \in A\}$ jest ogr. od góry.

$\sup(-A) = -\inf A$



Lemat 12. *Dla ograniczonego od góry zbioru A liczba b jest równa $\sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- *b ogranicza zbiór A od góry,* $(\forall a \in A \quad a \le b)$
- *dla dowolnego dodatniego ε istnieje a należące do A, takie że: $a > b - \varepsilon$*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a > b - \varepsilon.$$

$\Leftrightarrow$

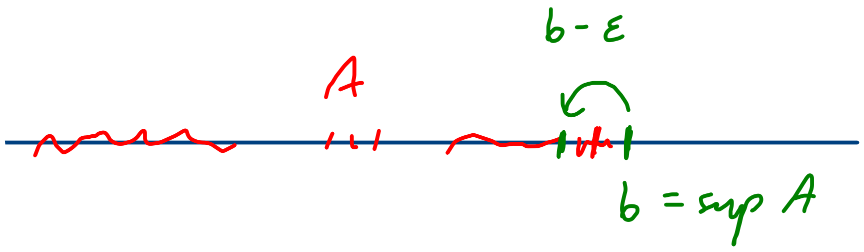
$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$(\Rightarrow)$ $b = \sup A$ (zał.) $\quad$ (•) $\to$ oczywiste

(••) Nie wprost. zał. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall a \in A \quad a \le b - \varepsilon$

Czyli $b - \varepsilon$ jest ogr. górnym A i $b - \varepsilon < b$. ↯

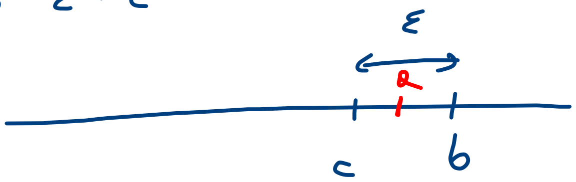


$(\Leftarrow)$ • b jest ogr. górnym

jeśli $c < b$ byłoby ogr. górnym (nie wprost), to $\varepsilon = b - c$

$b - \varepsilon = c$

•• $\Rightarrow$ $\exists a \in A \quad a > b - \varepsilon = c$ ↯



Definicja 13. *Mówimy, że zbiór A ma element największy, jeśli* $\sup A \in A$. *Analogicznie definiujemy element najmniejszy.*

Przykład 14.

$$A = (-\pi, \pi], \quad \inf A = -\pi, \quad \sup A = \pi,$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > 0\}, \quad \inf B = 0, \quad \sup B \textit{ nie istnieje.}$$

Zbiór A ma element największy, ale nie ma elementu najmniejszego.

Uwaga 15. *Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z góry, to mówimy, że ma supremum niewłaściwe ∞ i piszemy* $\sup A = \infty$.

Twierdzenie 16. *[Gęstość $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$] Dla $a, b \in \mathbb{R}$, takich że $a < b$ istnieją $x \in \mathbb{Q}$ oraz $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ należące do przedziału (a, b), tzn. $a < x, y < b$.*

Dowód na ćwiczeniach

Uwaga 17. *Liczby wymierne nie mają własności ciągłości, np. zbiór* $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ *nie posiada najmniejszego ograniczenia górnego w zbiorze* $\mathbb{Q}$.

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

$\sup A = \sqrt{2}$

zbiór ogr. górnych A

$(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$

$\exists_{x \in \mathbb{Q}}\ x \in (\sqrt{2}, q)$

$\{x \in \dots : \underbrace{w(x)}\}$

$\{f(a) : a \in A\}$