

Lista 8, Analiza Matematyczna I

1. Pokazać, że każde z poniższych równań ma rozwiązanie w podanym przedziale.
 $x^3 - x - 5 = 0, [0, 2]$ $x = \cos x, [0, \pi/2]$ $\sin x = 1 - x, [0, \pi/6]$
 $e^x = 2 + x^2, [0, 2]$ $\sqrt{x} + 1 = x^2, [1, 2]$
2. Pokazać, że wielomian $p(x) = x^3 - 3x + 1$ posiada trzy pierwiastki rzeczywiste.
3. Funkcja $f(x)$ jest ciągła na odcinku $[0, 1]$ i spełnia warunki $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$. Pokazać, że $f(x) = x$ dla pewnego punktu $x, 0 < x < 1$.
4. Pokazać, że równanie:
a) $3\operatorname{arctg} x = \ln x$,
b) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x+3}$,
ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich.
5. a) Wyznaczyć rozwiązanie równania $x^3 = 3$ z dokładnością do $1/16$.
b) Obliczyć $\sqrt{0,7}$ z dokładnością do $1/16$.
6. Na odcinku drogi długości 100 km, kontrolowanym na końcach przez policję, obowiązuje ograniczenie prędkości 90 km/h. Samochód przejechał ten odcinek w czasie 54 minut, przy czym na początku i na końcu jechał z przepisową prędkością. Kierowca otrzymał mandat od policjanta, który stwierdził, że w pewnym momencie nastąpiło przekroczenie prędkości o dokładnie 10 km/h. Czy policjant miał rację?
7. Pokazać, że wielomian stopnia nieparzystego zeruje się przynajmniej w jednym punkcie.
8. Pokazać, że dla wielomianu $w(x)$ stopnia parzystego istnieje liczba M , taka że $w(x) + M$ ma przynajmniej dwa miejsca zerowe.
9. Pokazać, że dla wielomianu $w(x)$ stopnia 3 istnieje liczba a taka, że wielomian $w(x) - ax$ ma 3 miejsca zerowe.
10. Pokazać, że jeśli f jest ciągła na (a, b) oraz $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, to istnieje $t \in (a, b)$ takie, że $f(t) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$.
11. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej uzasadnić, że funkcje $\arcsin x$, $\arccos x$ oraz $\operatorname{arctg} x$ są ciągłe na przedziałach $[-1, 1]$, $[-1, 1]$ i $(-\infty, \infty)$, odpowiednio.
12. Obliczyć granice
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi/2 - \arcsin x}}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{1-x}$