Lista 4, Analiza Matematyczna I

1. Obliczyć sumy szeregów:

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

ċ)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

ḋ)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

ë)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2. Zbadać zbieżność szeregów:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

b)
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-5n+1}$$

ċ)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

ḟ) [1]
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

ġ)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^6+n}-n^3)$$

ḣ)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{3^n}$$

3̇. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są rozbieżne. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$?

4̈. Wykazać, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz $a_n \le c_n \le b_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ też jest zbieżny.

5̇. Pokazać z kryterium porównawczego, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

6̈. Dla $a_n \ge 0$ pokazać, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

[1] *Wskazówka:* $1/(n\sqrt{n}) \le 2/\sqrt{n-1} - 2/\sqrt{n}$.

7. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich i malejących jest zbieżny, to $na_n \to 0$.[2]

8. Czy przy warunkach z poprzedniego zadania warunek $na_n \to 0$ wystarcza do zbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

9. a) Na prostym odcinku torów dwa pociągi, jadące każdy z prędkością 30 km na godzinę, zbliżają się do siebie. Gdy odległość pomiędzy pociągami wynosi 1 km, pszczoła zaczyna latać tam i z powrotem pomiędzy pociągami z prędkością 60 km na godzinę. Wyrazić odległość jaką przeleci pszczoła zanim pociągi się zderzą za pomocą nieskończonego szeregu i obliczyć sumę tego szeregu.

b) Znaleźć elementarne rozwiązanie zagadnienia bez użycia szeregów.[3]

10. Wykazać, że ciąg $(1 + 1/n)^{n+1}$ jest malejący.

11. Oprocentowanie depozytu w banku wynosi p procent w skali rocznej, $p > 0$. Bank nalicza odsetki w równych odstępach czasu n razy w roku. Niech $x = 0,01p$. Pokazać, że efektywne oprocentowanie w skali roku wynosi $100[(1 + x/n)^n - 1]$ procent i wywnioskować, że ciąg $(1 + x/n)^n$ jest rosnący. Pokazać, że ciąg $(1 - x/n)^n$, dla $n \geq x$, jest rosnący przez podanie odpowiedniej interpretacji.

12. Mrówka idzie z prędkością 30 cm na minutę wzdłuż jednorodnej gumowej taśmy. Na początku taśma ma długość 1 m i pod koniec każdej minuty jest rozciągana o dodatkowy metr. Mrówka zaczyna marsz w jednym końcu taśmy. Czy kiedykolwiek dotrze do drugiego końca ? Jeśli tak, to po jakim czasie ?[4]

13. Posługując się warunkiem Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n(n+1)}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos{(n+1)x}}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

d)
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$$

---

[2] *Wskazówka:* Wykazać, że $s_n - s_{[n/2]} \xrightarrow{n} 0$.

[3] *Wskazówka:* Jak długo pszczoła będzie latała? Krąży anegdota, że podobną zagadkę ktoś powiedział słynnemu matematykowi John'owi von Neumannowi (1903-1957), który podał odpowiedź błyskawicznie. Gdy rozmówca zasugerował, że von Neumann musiał rozwiązać to prostym sposobem, von Neumann odpowiedział, że w rzeczywistości otrzymał rozwiązanie poprzez zsumowanie szeregu.

[4] *Wskazówka:* Niech a_n oznacza stosunek odległości mrówki od początku taśmy do aktualnej długości taśmy. Wyrazić a_{n+1} poprzez a_n.