Analiza B

Paweł Głowacki

Pojęcie[1] *liczby rzeczywistej* uważać będziemy za intuicyjnie oczywiste. Tym niemniej celowe wydaje się przypomnienie i ugruntowanie niektórych fundamentalnych własności liczb rzeczywistych.

W zbiorze liczb rzeczywistych, który będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{R}$, na szczególną uwagę zasługują *liczby wymierne*, czyli liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$. Będziemy używać oznaczeń $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{Q}$ odpowiednio na zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych.

Geometrycznie wyobrażamy sobie liczby rzeczywiste jako oś liczbową, której punktem początkowym jest 0. Dlatego $\boldsymbol{R}$ często nazywamy prostą rzeczywistą.

Z algebraicznego punktu widzenia $\boldsymbol{R}$ stanowi *ciało*, bo określone są w nim dwa działania

$$(x, y) \to x + y, \quad (x, y) \to x \cdot y,$$

zwane odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, o następujących własnościach. Dodawanie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest liczba 0. Ponadto, każdy element $x \in \boldsymbol{R}$ posiada element przeciwny. Mnożenie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest jedność. Różne od zera elementy $\boldsymbol{R}$ posiadają element odwrotny. Wreszcie mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Łatwo zauważyć, że wszystkie powyższe własności posiadają także liczby wymierne. Zatem i $\boldsymbol{Q}$ jest ciałem. Nie są natomiast ciałami ani $\boldsymbol{Z}$, ani $\boldsymbol{N}$.

Zbiór liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowany. Oznacza to, że istnieje w nim relacja porządku $\leqslant$, taka że dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$ jest $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$. Relacja ta jest zgodna z działaniami algebraicznymi w tym sensie, że zostaje zachowana, gdy do obu stron nierówności dodamy tę samą liczbę lub pomnożymy je przez tę samą liczbę dodatnią.

Zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym, czyli równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych. Ponadto jest gęstym podzbiorem $\boldsymbol{R}$. Rozumiemy przez to, że dla każdych rzeczywistych $x < y$, istnieje liczba wymierna w, taka że

$$x < w < y.$$

Innymi słowy, każdy otwarty przedział prostej rzeczywistej zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną. Oczywiście stąd natychmiast wynika, że jest ich w istocie w każdym przedziale nieskończenie wiele. Pozostawiamy to naszemu Czytelnikowi jako pierwsze – a więc ważne – ćwiczenie.

Ciało liczb rzeczywistych posiada istotną własność, której nie ma ciało liczb wymiernych.

Własność ciągłości. Niech będzie dany ograniczony od góry zbiór $E \subset \boldsymbol{R}$. Wśród liczb ograniczających E od góry jest zawsze liczba najmniejsza.

Nazywa się ją kresem górnym zbioru E, a wypowiedzianą własność – *własnością kresu* lub *aksjomatem ciągłości*. Będziemy o tym mówić bardziej szczegółowo już w pierwszym rozdziale. Wymienione własności liczb rzeczywistych mogą wydać się zrazu bardzo proste

[1]Serdecznie dziękuję pani Agnieszce Kazun za trud włożony w przepisanie i redakcję znacznej części niniejszego skryptu.

i oczywiste, ale takimi nie są. W trakcie wykładu uważny Czytelnik przekona się, że na nich wspiera się cały gmach analizy matematycznej.

1. Indukcja matematyczna, nierówności i kresy

Przystępujemy obecnie do właściwego wykładu. Dla dowolnej liczby $x \in \boldsymbol{R}$ określamy jej *moduł* (lub *wartość bezwzględną*) wzorem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0; \\ -x & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

lub równoważnie

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Funkcja wartości bezwzględnej spełnia warunek trójkąta

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad x, y \in \boldsymbol{R},$$

przy czym równość zachodzi, wtedy i tylko wtedy gdy $xy \geqslant 0$. Stąd natychmiast wynika nierówność

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|, \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Moduł liczby x można interpretować jako jej odległość od zera na osi liczbowej, zaś $|x-y|$ jako odległość x od y. Pamiętając, że środek odcinka $[x, y]$ to punkt $\frac{x+y}{2}$, możemy wyrazić większą z liczb x, y wzorem

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2},$$

a mniejszą

$$\min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą n taką, że $n \leqslant x$ i oznaczamy ją przez $[x]$. Innymi słowy,

$$[x] = \max\{n \in \boldsymbol{Z} \colon n \leqslant x\}.$$

Warto też zapamiętać, że $[x]$ to jedyna liczba całkowita n, taka że

$$n \leqslant x < n+1.$$

Dlatego jeśli $x \in [n, n+1)$ dla pewnego $n \in \boldsymbol{Z}$, to $[x] = n$; w szczególności, jeśli $x \in \boldsymbol{Z}$, to $[x] = x$. Zauważmy również, że każdą liczbę rzeczywistą x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = [x] + \mathbf{m}(x),$$

gdzie $\mathbf{m}(x) \in [0, 1)$. Liczbę $\mathbf{m}(x) = x - [x]$ nazywamy *mantysą* liczby x.

Obecnie omówimy zasadę indukcji matematycznej. Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia własności liczb naturalnych. Niech $T(n)$ orzeka pewną własność liczby naturalnej n. Zasada *indukcji matematycznej* mówi, że jeśli

$$\exists n_0 \in \boldsymbol{N} \quad T(n_0)$$

oraz

$$\forall n \geqslant n_0 \quad T(n) \Rightarrow T(n+1),$$

to prawdziwe jest twierdzenie

$$\forall n \geqslant n_0 \quad T(n).$$

Tak więc dowód indukcyjny przebiega w dwóch etapach. Pierwszy polega na sprawdzeniu warunku początkowego, drugi nazwiemy krokiem indukcyjnym. Zilustrujmy teraz zasadę indukcji matematycznej.

Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Czytelnik zapewne pamięta, że liczba $\binom{n}{k}$ to ilość sposobów wyboru k elementów ze zbioru n-elementowego.

1.1 (wzór dwumienny Newtona). *Dla dowolnych liczb $a, b \in \boldsymbol{R}$ oraz dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi równość*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $b \neq 0$. Dzieląc wzór Newtona obustronnie przez b^n i oznaczając $x = \frac{a}{b}$, otrzymujemy

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

i tego wzoru będziemy dowodzić.

Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 1$ nie nastręcza żadnych trudności. Aby wykonać krok indukcyjny, załóżmy, że wzór obowiązuje dla pewnego $n \geqslant 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

bo

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Tym samym zakończyliśmy dowód. □

Zauważmy mimochodem, że wzór ten pozwala łatwo uzasadnić następującą nierówność Bernoulliego:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad x \geqslant 0.$$

Rzeczywiście,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx,$$

gdyż dla $x \geqslant 0$ oczywiście $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 0$. Jak zobaczymy za chwilę, ta prosta nierówność ma daleko idące uogólnienia. A na razie zauważmy, że z nierówności Bernoulliego wynika, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$$

dla każdego naturalnego n. Zaraz też zobaczymy, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad n \in \boldsymbol{N}, \tag{1.3}$$

co wcale nie jest już takie oczywiste.

Niech q będzie ustaloną liczbą. Bez trudu przekonujemy się, że

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n) = 1 - q^{n+1}.$$

Jeśli ponadto $q \neq 1$, dzieląc obie strony przez $1-q$, otrzymujemy

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

czyli znany wzór na *sumę postępu geometrycznego*. Skorzystamy teraz z tego wzoru, jak również i rozwinięcia dwumiennego Newtona, aby wyprowadzić zapowiedziane już oszacowanie (1.3).

Rzeczywiście,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

a ponadto

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}\right)\\ &< 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}\right) < 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/3} = \frac{11}{4} < 3.\end{aligned}$$

Średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$ nazywamy wyrażenie

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n};$$

średnią geometryczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geqslant 0$ nazywamy wyrażenie

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n};$$

średnią harmoniczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$ nazywamy wyrażenie

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Następujący lemat wykorzystamy w dowodzie twierdzenia o porównaniu średnich.

1.4. Lemat. *Niech będą dane liczby* $0 < x < 1 < y$. *Wtedy*

$$x + y > 1 + xy.$$

Dowód. Po przeniesieniu wszystkich wyrazów w naszej nierówności na lewą stronę otrzymujemy wyrażenie dodatnie, gdyż

$$x + y - xy - 1 = (1-x)(y-1) > 0,$$

co kończy nasz dowód. $\square$

1.5. *Jeśli* $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$*, gdzie* $n \geqslant 2$*, i nie wszystkie z liczb* b_k *są równe* 1*, to*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n.$$

Dowód. Jeśli $n = 2$, to jedna z liczb b_1, b_2 jest mniejsza, a druga większa od 1, więc na mocy Lematu 1.4

$$b_1 + b_2 > 1 + b_1 b_2 = 2, \tag{1.6}$$

co oznacza sprawdzenie warunku początkowego. Przyjmijmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n \in \boldsymbol{N}$. Niech $b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} = 1$ i niech np. $b_n < 1 < b_{n+1}$. Wtedy, ponownie korzystając z Lematu i założenia indukcyjnego zastosowanego do n liczb

$$c_1 = b_1, c_2 = b_2, \ldots, c_{n-1} = b_{n-1}, c_n = b_n b_{n+1},$$

których iloczyn jest równy jedności, mamy

$$b_n + b_{n+1} > b_n b_{n+1} + 1 = c_n + 1$$

oraz

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1} > c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n + 1 \geqslant n + 1,$$

czego należało dowieść. □

1.7. Wniosek. *Jeśli* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$ *nie są wszystkie sobie równe, to średnia geometryczna tych liczb jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej:*

$$G = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

Dowód. Przynajmniej jedna z liczb $b_k = a_k / G$ jest różna od 1, a ponadto

$$b_1 b_2 \ldots b_n = 1.$$

Na mocy (1.5)

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n,$$

czyli

$$G < A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

a to już jest nasza teza. □

Sformułujemy teraz bardzo prostą zasadę, z której będziemy nieustannie korzystać w trakcie tego wykładu.

1.8 (zasada epsilona). *Niech* $a, b \in \boldsymbol{R}$*. Jeśli dla każdego* $\varepsilon > 0$ *zachodzi* $a < b + \varepsilon$*, to* $a \leqslant b$*.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $a > b$ i weźmy $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Na mocy naszych założeń powinno być $a < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a$, co jest niedorzecznością. Wobec tego musi być $a \leqslant b$. □

Symbol ε (grecka litera *epsilon*) będzie nam najczęściej służył do oznaczania bardzo małych liczb dodatnich.

1.9 (aksomat gęstości). *Każdy niepusty przedział otwarty* $I \subset \boldsymbol{R}$ *zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną.*

Aksjomat ten można też wyrazić tak: *Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba wymierna w, taka że $|a - w| < \varepsilon$.* Rzeczywiście, to nowe sformułowanie mówi, że w każdym przedziale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ znajduje się jakaś liczba wymierna. Zwróćmy uwagę, że nie mówi się tu wyraźnie, że $\varepsilon > 0$ jest mały, ale chwila zastanowienia wystarczy, aby stwierdzić, że jeśli warunek jest spełniony np. dla $0 < \varepsilon < 1$, to jest też spełniony i dla pozostałych. W gruncie rzeczy o jego prawdziwości decydują małe przedziały.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej wspomnianej na początku zasadzie kresu. Zacznijmy od starannej definicji.

Mówimy, że zbiór $E \subset \boldsymbol{R}$ jest ograniczony od góry, jeśli istnieje liczba $y \in \boldsymbol{R}$, taka że $x \leqslant y$ dla każdego $x \in E$. Taka liczba y nazywa się *górnym ograniczeniem* zbioru E. Jeśli y jest górnym ograniczeniem E, to oczywiście każda liczba z większa od y także jest górnym ograniczeniem tego zbioru. Zatem zbiór górnych ograniczeń E^+ jest albo pusty, albo nieskończony.

1.10 (aksjomat ciągłości). *Niech E będzie niepustym i ograniczonym od góry podzbiorem $\boldsymbol{R}$. W zbiorze E^+ liczb ograniczających E od góry istnieje element najmniejszy.*

Najmniejsze spośród górnych ograniczeń zbioru E nazywamy *kresem górnym* zbioru E i oznaczamy przez $\sup E$.

Zwróćmy uwagę, że liczba a, która jest kresem górnym zbioru E spełnia dwa warunki. Jest ona górnym ograniczeniem zbioru E i żadna liczba mniejsza od a takim ograniczeniem już nie jest. Można zapisać to formalnie tak:

$$\forall\, x \in E \quad x \leqslant a$$

oraz

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in E \quad x > a - \varepsilon.$$

Dla zbioru $F \subset \boldsymbol{R}$ niech

$$F^- = \{y \in \boldsymbol{R} : \forall x \in F \quad y \leqslant x\}.$$

Z aksomatu ciągłości wynika

1.11. Wniosek. *Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $F \subset \boldsymbol{R}$ ma największe dolne ograniczenie zwane kresem dolnym, które oznaczamy przez* $\inf F$.

Dowód. Jeśli F jest zbiorem niepustym i ograniczonym od dołu, to $E = -F$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym od góry. Nietrudno się przekonać, że $E^+ = -F^-$, co oznacza, że y jest ograniczeniem górnym E wtedy i tylko wtedy, gdy $-y$ jest ograniczeniem dolnym F. Jest też jasne, że jeśli a jest najmniejszym elementem E^+, to $-a$ jest największym elementem F^-. □

Dodajmy, że z definicji kresu i aksomatu ciągłości wynika, że dla każdego zbioru E ograniczonego od góry

$$E^+ = [a, \infty), \qquad a = \sup E,$$

i dla każdego zbioru F ograniczonego od dołu

$$F^- = (-\infty, b], \qquad b = \inf F.$$

Przyjmiemy też następującą konwencję. Jeśli zbiór E jest nieograniczony z góry, będziemy pisać $\sup E = \infty$ i mówić, że E ma *niewłaściwy kres górny.* Podobnie zbiór F nieograniczony z dołu ma *niewłaściwy kres dolny* $\inf F = -\infty$.

Powracamy do nierówności Bernoulliego.

1.12. Lemat. *Dla dowolnego* $n \in \boldsymbol{N}$ *i dowolnego* $1 \neq q > 0$

$$\frac{q^{n+1}-1}{n+1} > \frac{q^n-1}{n}.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $q > 1$. Wtedy proste przekształcenia z wykorzystaniem wzoru na sumę postępu geometrycznego pokazują, że nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$nq^{n+1} > 1 + q + q^2 \cdots + q^{n-1}, \qquad q > 1,$$

która jest oczywista. Jeśli natomiast $0 < q < 1$, to podobne rachunki prowadzą do nierówności

$$nq^{n+1} < 1 + q + q^2 \cdots + q^{n-1}, \qquad q < 1,$$

która jest też oczywista. □

1.13 (nierówność Bernoulliego). *Dla* $\alpha > 1$ *i dowolnego* $-1 < x \neq 0$ *zachodzi następująca nierówność*

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy najpierw dla wymiernych $\alpha = \frac{m}{n}$, gdzie $m > n$. Niech

$$q = (1+x)^{1/n}.$$

Z lematu wynika, że

$$\frac{q^m-1}{m} > \frac{q^n-1}{n},$$

a stąd

$$q^m > 1 + \frac{m}{n}q^n - \frac{m}{n},$$

co po podstawieniu daje naszą tezę.

Korzystając z zasady gęstości, uzupełnimy teraz dowód nierówności Bernoulliego w przypadku $\alpha > 1$ niewymiernych. Niech będzie dana liczba $0 < \varepsilon < \alpha - 1$. Niech $w \in \boldsymbol{Q}$ należy do przedziału $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, przy czym $(\alpha - w)x > 0$. Wtedy

$$(1+x)^\alpha > (1+x)^w > 1 + wx = 1 + \alpha x + (w - \alpha)x,$$

skąd

$$1 + \alpha x < (1+x)^\alpha + \varepsilon|x|$$

i na mocy zasady epsilona otrzymujemy

$$1 + \alpha x \leqslant (1+x)^\alpha,$$

co już niemal nas zadowala. Niemal, bo otrzymana nierówność jest słaba. Aby to poprawić, możemy postąpić tak. Niech $1 < w < \alpha$ będzie wymierne. Wtedy

$$(1+x)^\alpha = ((1+x)^w)^{\frac{\alpha}{w}} > (1+wx)^{\frac{\alpha}{w}} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{w} \cdot wx = 1 + \alpha x,$$

tym razem już z ostrą nierównością.

□

1.14. Wniosek. *Niech będzie dana liczba rzeczywista* $\alpha > 1$. *Wówczas dla dowolnego* $y > 0$ *zachodzi nierówność*

$$(1+y)^\alpha > 1 + y^\alpha.$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $\alpha y \geqslant y^\alpha$. Wtedy na mocy nierówności Bernoulliego

$$(1+y)^\alpha > 1 + \alpha y \geqslant 1 + y^\alpha,$$

tak jak chcieliśmy.

Jeśli natomiast $\alpha y \leqslant y^\alpha$, to $y^{\alpha-1} \geqslant \alpha$ i stosując ponownie nierówność Bernoulliego widzimy, że

$$\begin{aligned}(1+y)^\alpha &= y^\alpha(1+1/y)^\alpha > y^\alpha(1+\alpha/y)\\ &= y^\alpha + \alpha y^{\alpha-1} \geqslant \alpha^2 + y^\alpha > 1 + y^\alpha,\end{aligned}$$

więc i w tym wypadku wszystko się zgadza. □

Zadania

1. Udowodnij nierówności
$$1-a \leqslant \frac{1}{1+a} \leqslant 1-\frac{a}{1+a}, \qquad a>0.$$

2. Pokaż, że $x+y=\max\{x,y\}+\min\{x,y\}$.

3. Pokaż, że $|x|+|y|=\max\{|x+y|,|x-y|\}$.

4. Oblicz wartości wyrażeń: $[(1-\frac{1}{n})^n]$, $[n+n^{-1}]$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}$.

5. Wykaż, że jeśli $x\notin \boldsymbol{Z}$, to
$$[-x]=-[x]-1, \qquad \mathbf{m}(-x)=1-\mathbf{m}(x).$$

6. Niech $x,y\in\boldsymbol{R}$. Udowodnij nierówności
$$[x+y]\geqslant [x]+[y], \qquad \left[\frac{x}{2}\right]\leqslant \frac{[x]}{2}, \qquad [-x]\leqslant -[x].$$

7. Rozwiąż równanie $[2x]=3[x]$.

8. Pokaż, że $\mathbf{m}(x)=\mathbf{m}(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-y\in\boldsymbol{Z}$.

9. Pokaż, że $\mathbf{m}(nx)=\mathbf{m}(n\mathbf{m}(x))$.

10. Pokaż, że jeśli $\mathbf{m}(x)<\frac{1}{N}$, to $\mathbf{m}(Nx)=N\mathbf{m}(x)$.

11. Wiadomo, że $\mathbf{m}(x)>1-1/N$. Pokaż, że $N\mathbf{m}(x)-\mathbf{m}(Nx)=N-1$.

12. Niech $1\leqslant k<n$ będą naturalne. Udowodnij, że $k(n-k)\geqslant n-1$.

13. Udowodnij tożsamość Pascala
$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

14. Dane są liczby naturalne $m\leqslant n-2$. Pokaż, że
$$\Big(m+1\Big)^{n-m}<\frac{n!}{m!}.$$

15. Korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona, wykaż, że $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

16. Wykaż, że $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ oraz $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

17. Dane są liczby $a_0,a_1,\ldots,a_N$, takie że $a_0=1$ i $a_{n+1}=2a_n+1$ dla $0\leqslant n<N$. Pokaż przez indukcję, że $a_{n+1}=a_n+2^{n+1}$ i znajdź a_N.

18. Dla $a,b\in\boldsymbol{R}$ wyprowadź tożsamość
$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}.$$

19. Korzystając z gęstości liczb wymiernych wśród rzeczywistych, pokaż, że każdy przedział $\emptyset\neq(a,b)\subset\boldsymbol{R}$ zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych.

20. Wiedząc, że $a+b>2$, wykaż, że $a^2+b^2>2$.

21. Wykaż, że dla dowolnych $a,b,c,d>0$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geqslant 4.$$

22. Udowodnij przez indukcję nierówność
$$(1+x)^n\geqslant 1+nx+(n-1)x^2$$
dla $x>-1$ i $n\in\boldsymbol{N}$.

23. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$(1+x)^\beta < 1+\beta x, \qquad 0<\beta<1, \quad x>-1.$$

24. Pokaż, że

$$(1+x)^\beta < 1+x^\beta, \qquad x>0, \quad 0<\beta<1.$$

25. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$\Big(1-\frac{1}{na+1}\Big)^n < 1-\frac{1}{a+1}$$

dla $a>0$ i $n\in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$.

26. Pokaż, że

$$\big(1+\frac{1}{n}\big)^a < 1+\frac{a}{n}, \qquad 0<a<1.$$

27. Pokaż, że

$$\big(u+v\big)^a < u^a+v^a, \qquad u,v>0,\ 0<a<1.$$

28. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$\sqrt[n]{a}-1 \leqslant \frac{a-1}{n}, \qquad a>1.$$

29. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x)=\sum_{k=-n}^{n} x^k$ na półprostej $x>0$ i punkt, w którym funkcja przyjmuje tę wartość.

30. Wykaż, że dla $a,b,c>0$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant 6.$$

31. Znajdź największą wartość funkcji $f(x,y)=xy$ na elipsie $\frac{x^2}{2}+2y^2=1$ i punkty, w których funkcja przyjmuje tę wartość.

32. Wykaż, że średnia harmoniczna jest zawsze nie większa od średniej geometrycznej tych samych liczb, a równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_k są identyczne.

33. Udowodnij nierówność

$$\frac{a^6+b^9}{4}\geqslant 3a^2b^3-16$$

dla $a\in\boldsymbol{R}$ i $b\geqslant 0$.

34. Niech L będzie obwodem, a P polem trójkąta. Udowodnij nierówność $L^2>16P$ lub nawet $L^2>4\sqrt{27}P$.

35. Niech $a\in\boldsymbol{R}, b>0$. Uzasadnij nierówność

$$\frac{a}{b}\leqslant a^2+\frac{1}{4b^2}.$$

36. Niech $a,b,c\geqslant 0$. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{bcd}+\sqrt[3]{cda}+\sqrt[3]{dab}\leqslant a+b+c+d.$$

37. Niech $m,n\in\boldsymbol{N}$. Pokaż, że

$$m(n-m)\leqslant\frac{n^2}{4},$$

przy czym równość jest zrealizowana tylko wtedy, gdy n jest parzyste.

38. Dane są liczby $a, b \in \boldsymbol{R}$ i liczba dodatnia $A > 0$ spełniające warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad a < b + A\varepsilon.$$

Korzystając z zasady epsilona, pokaż, że $a \leqslant b$.

39. Dane są liczby $a, b \in \boldsymbol{R}$ i liczba dodatnia $A > 0$. Sprawdź, że

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad a < b + A\varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + A\varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant b.$$

40. Udowodnij, że każdy ograniczony od dołu zbiór liczb rzeczywistych E ma kres dolny, tzn. że w zbiorze E^- liczb ograniczających E od dołu istnieje element maksymalny.

41. Wykaż, że jeśli $x \leqslant y$ dla każdych $x \in A$, $y \in B$, to $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest wynikanie odwrotne?

42. Wykaż, że $\emptyset \neq A \subset B$ pociąga $\sup A \leqslant \sup B$ oraz $\inf B \leqslant \inf A$.

43. Udowodnij, że jeśli A, B są ograniczone, to

$$\sup(-A) = -\inf A, \qquad \sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

oraz

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

44. Pokaż, że w zbiorze liczb dodatnich nie ma elementu minimalnego.

45. Oblicz

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \qquad \sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \qquad \inf\left\{\frac{n-1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

46. Udowodnij, że jeśli A i B są zbiorami ograniczonymi, to

$$\sup A - \inf B = \sup(A - B),$$

gdzie

$$A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}.$$

47. Rozstrzygnij, która z liczb $a = 3^{\sqrt{2}}$ czy $b = 1 + 2^{\sqrt{2}}$ jest większa.

48. Rozstrzygnij, która z liczb $a = 4^{1/\sqrt{2}}$ czy $b = 1 + 3^{1/\sqrt{2}}$ jest większa.

49. Dla jakich $x > 0$ liczba

$$A(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

jest większa od 1?

50. Oblicz $\left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]$.

51. Pokaż, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{49}{18}, \qquad n \geqslant 3.$$

52. Wiedząc, że $a, b \geqslant 0$ oraz $a \leqslant b + \sqrt{a}$, pokaż, że $\sqrt{a} \leqslant 1 + \sqrt{b}$. W tym celu rozpatrz nierówność kwadratową $x^2 - x - b \leqslant 0$, gdzie $x = \sqrt{a}$.

2. Nieskończone ciągi liczbowe

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję

$$a\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}.$$

Wartości tej funkcji oznaczamy przez $a(n) = a_n$ i nazywamy *wyrazami ciągu*. Często ciąg oznaczamy przez $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub po prostu przez $\{a_n\}$.

Prostymi przykładami ciągów są:

$$a_n = n, \qquad b_n = n^2, \qquad c_n = [\sqrt{n}], \qquad d_n = \log(1+n).$$

Nie zawsze jednak można zadać ciąg jawnym wzorem.

2.1. Przykład. Ciekawym przykładem takiego ciągu jest ciąg $\{w_n\}$, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem liczb wymiernych dodatnich:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{2},\quad \frac{3}{1},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{1},\quad \frac{1}{5}\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{4}{2},\quad \frac{5}{1},\quad \ldots$$

Zasada tworzenia kolejnych wyrazów tego ciągu jest taka: Wypisujemy kolejno bloki B_k liczb postaci p/q o stałej sumie $p + q = k + 1$. Jak widać,

$$B_k = \Big\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k-1}, \ldots, \frac{k-1}{2}, k\Big\}.$$

Tak więc

$$B_1 = \Big\{1\Big\},\ B_2 = \Big\{\frac{1}{2}, 2\Big\},\ B_3 = \Big\{\frac{1}{3}, 1, 3\Big\},\ B_4 = \Big\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4\Big\},\ B_5 = \Big\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5\Big\},\ \ldots$$

Następnie ustawiamy bloki w kolejności ich numeracji i otrzymanym wyrazom nadajemy kolejne numery. Jest to tzw. przekątniowa metoda numeracji liczb wymiernych. Zwróćmy uwagę, że porządek występowania w ciągu kolejnych liczb wymiernych nie ma nic wspólnego z ich uporządkowaniem na prostej liczbowej. Widać też, że tak otrzymany ciąg nie jest różnowartościowy. Jest jednak surjektywny, bo dowolna liczba dodatnia postaci $w = p/q$ znajdzie się w bloku B_{p+q-1}.

Jeśli teraz zbudujemy nowe bloki

$$B'_k = B_k \setminus \bigcup_{j<k} B_j,$$

to utworzą one nowy ciąg $\{w'_n\}$:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{3}{1},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{1},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{5}{1},\quad \ldots,$$

który będzie wzajemnie jednoznacznym przekształceniem zbioru $\boldsymbol{N}$ na zbiór $\boldsymbol{Q} \cap (0, \infty)$.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ograniczonym od góry*, jeśli istnieje $M \in \boldsymbol{R}$, takie że

$$a_n \leqslant M, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a *ograniczonym od dołu*, jeśli istnieje $m \in \boldsymbol{R}$, takie że

$$m \leqslant a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się *ograniczony*, jeśli jest ograniczony od góry i od dołu, tzn. jeśli

$$|a_n| \leqslant K, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

dla pewnego $K \in \boldsymbol{R}$.

Dla przykładu popatrzmy na ciąg

$$e_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n.$$

Wiemy, że $2 \leqslant e_n < 3$, a zatem liczba 2 jest ograniczeniem (a nawet kresem) dolnym zbioru wyrazów ciągu $\{e_n\}$, a liczba 3 ograniczeniem górnym, ale nie kresem górnym. Jak zobaczymy wkrótce istnieją inne (znacznie mniejsze) ograniczenia tego zbioru.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się *rosnący*, jeśli

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a *malejący*, jeśli

$$a_{n+1} \leqslant a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Jeśli w powyższych definicjach słabe nierówności można zastąpić ostrymi, wtedy ciąg nazywa się odpowiednio *ściśle rosnący* lub *ściśle malejący.*

2.2. Przykład. Dobrze nam znanym przykładem ciągu ściśle rosnącego jest ciąg o wyrazie

$$a_n = \frac{q^n - 1}{n},$$

gdzie $q > 0$ i $q \neq 1$.

2.3. Przykład. Pokażemy, że ciąg $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest ściśle rosnący. Rzeczywiście, na mocy nierówności Bernoulliego

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} = \Big[\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\Big]^n \\ &> \Big[1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}\Big]^n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A oto najważniejsze pojęcie tego wykładu. Mówimy, że liczba g jest *granicą ciągu liczbowego* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jeśli w każdym przedziale otwartym zawierającym g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (tzn. wszystkie poza, być może, skończoną ilością).

Definicję tę możemy zapisać również tak:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

2.5. *Uwaga.* Jeśli w ciągu $\{a_n\}$ zmienimy, usuniemy lub dodamy skończoną ilość wyrazów, to nie będzie to miało żadnego wpływu ani na zbieżność ciągu ani na wartość granicy.

2.6. *Uwaga.* Jeśli $c > 0$ jest pewną stałą, to występujący w definicji warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \varepsilon$$

jest równoważny następującemu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < c \cdot \varepsilon.$$

Jest on także równoważny warunkowi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \sqrt{\varepsilon}$$

i innym podobnym. Z tego powodu mówi się czasem o „elastyczności epsilona”.

2.7. Przykład. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Istotnie, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ nierówność $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

2.8. Przykład. Pokażemy z definicji, że

$$b_n = \frac{3n+4}{15n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{5}.$$

Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Chcemy pokazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\left|b_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon.$$

Ponieważ

$$\left|\frac{3n+4}{15n-1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{21}{5(15n-1)}\right| = \frac{21}{5(15n-1)},$$

więc, jak łatwo obliczyć, $\left|b_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$ dla $n > \frac{21+5\varepsilon}{75\varepsilon}$.

2.9. Przykład. Pokażemy, że ciąg stały o wyrazach $a_n = c$ ma granicę równą c. Rzeczywiście, jeśli ustalimy dowolnie $\varepsilon > 0$, to nierówność

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

2.10. Przykład. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

gdyż $|a_n - 0| = \big||a_n| - 0\big|$.

Wprost z definicji wynika następujący wniosek.

2.11. Wniosek. *Jeżeli $a_n \to a$ i $b_n \to b$ oraz $a_n \leqslant b_n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to $a \leqslant b$.*

Nieco dalej idzie ważny lemat o trzech ciągach.

2.12. Lemat (o trzech ciągach). *Jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy $g \in \boldsymbol{R}$, a ciąg $\{x_n\}$ ma własność*

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

to $\{x_n\}$ jest również zbieżny do g.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim a_n = g$, więc istnieje $N_1 \in \boldsymbol{N}$, takie że jeśli $n \geqslant N_1$, to $|a_n - g| < \varepsilon$, czyli $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Podobnie dla ciągu $\{b_n\}$ istnieje $N_2 \in \boldsymbol{N}$, takie że $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$ dla $n \geqslant N_2$. Wtedy dla każdego $n \geqslant N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < g + \varepsilon,$$

czyli

$$|x_n - g| < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ również zbiega do g. □

2.13. *Uwaga.* Oczywiście w twierdzeniu tym wystarczy założyć, że nierówność

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

zachodzi dla prawie wszystkich $n \in \boldsymbol{N}$, gdyż (jak zauważyliśmy wcześniej) skończona ilość wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie i wartość jego granicy.

2.14. Wniosek. *Jeśli $a_n \to 0$ oraz $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to również $b_n \to 0$.*

2.15. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Weźmy dowolny ciąg zbieżny
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \boldsymbol{R}.$$
Wtedy istnieje liczba $N \in \boldsymbol{N}$, taka że jeśli $n \geqslant N$, to $|a_n - a| < 1$. Ponieważ
$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|,$$
więc
$$|a_n| < |a| + 1, \qquad n \geqslant N.$$
Zatem
$$|a_n| < \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|\}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$
czyli $\{a_n\}$ jest ograniczony. □

Zauważmy, że implikacja w drugą stronę oczywiście nie jest prawdziwa. Jako przykład rozważmy ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$. Jest on ograniczony, bo $|a_n| \leqslant 1$, ale nie jest zbieżny. Przypuśćmy bowiem, że $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$, dla pewnego $g \in \boldsymbol{R}$. Wtedy istniałaby taka liczba $N \in \boldsymbol{N}$, że $|a_n - g| < 1$ dla $n \geqslant N$. Dla takich n mielibyśmy więc
$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$$
i jednocześnie
$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - g + g - a_n| \leqslant |a_{n+1} - g| + |g - a_n| < 2,$$
co nie jest możliwe.

Mówimy, że ciąg jest *rozbieżny*, jeśli nie ma granicy liczbowej. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do nieskończoności* (*ma granicę niewłaściwą równą* ∞) i piszemy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$
jeśli dla każdej liczby dodatniej $K \in \boldsymbol{R}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe niż K; innymi słowy, jeśli istnieje $M > 0$, takie że
$$a_n > K \text{ dla } n > M.$$
Mówimy, że $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do* $-\infty$ (*ma granicę niewłaściwą równą* $-\infty$) i piszemy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$
jeśli dla każdej liczby dodatniej $K \in \boldsymbol{R}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze niż $-K$; innymi słowy, jeśli istnieje $M > 0$, takie że
$$a_n < -K \text{ dla } n > M.$$

2.16. Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = n^\alpha$, gdzie $\alpha > 0$, jest rozbieżny do ∞. Istotnie, dla dowolnej liczby $M > 0$, nierówność $a_n > M$ zachodzi dla wszystkich $n > M^{1/\alpha}$.

2.17. Przykład. Ustawiając metodą przekątniową wszystkie liczby wymierne w ciąg nieskończony, otrzymamy przykład ciągu, który nie jest ograniczony, zatem nie jest też zbieżny. Ciąg ten nie ma nawet granicy niewłaściwej.

2.18. *Niech będą dane dwa ciągi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *oraz dla prawie wszystkich* $n \in \boldsymbol{N}$ $a_n \geqslant b_n$, *to również* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.19. Przykład. Ponieważ $2^n \geqslant n$ dla wszystkich $n \in \boldsymbol{N}$, więc
$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

2.20. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczbowym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty.$$

Przykładami ciągów rozbieżnych do $-\infty$ są więc

$$\{-n\}_{n\in\boldsymbol{N}},\ \{-2^n\}_{n\in\boldsymbol{N}},\ \{-n\cdot 2^n\}_{n\in\boldsymbol{N}}.$$

2.21. *Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|$. □

2.22. Twierdzenie (arytmetyka granic). *Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami liczbowymi. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab.$$

Jeśli ponadto $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Z tego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ wynika, że istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ oraz } |b_n - b| < \varepsilon, \quad \text{gdy } n \geqslant N.$$

Zatem nierówność

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$

jest spełniona dla $n \geqslant N$, co dowodzi pierwszej własności.

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jako zbieżny jest ograniczony, więc $|a_n| \leqslant K$ dla pewnego $K > 0$ i wszystkich n. Zatem

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< K \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon = (K + |b|) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

co potwierdza drugą własność.

Na mocy (2.21) mamy

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b|,$$

a stąd istnieje N_1, takie że

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}, \qquad n \geqslant N_1.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wobec zbieżności ciągu $\{b_n\}$

$$|b_n - b| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N_2.$$

Stąd dla każdego $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

Tym samym dowód został zakończony. □

2.23. Wniosek. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *to dla każdego* $\alpha \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a.$$

Jeśli ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Przez indukcję łatwo wyprowadzamy następujący wniosek.

2.24. Wniosek. *Niech będą dane zbieżne ciągi* $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, *gdzie* $1 \leqslant k \leqslant N$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \prod_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}.$$

2.25. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}$, gdzie $q > 0$. Z nierówności Bernoulliego dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geqslant 1 + n(q-1) > (q-1) \cdot n.$$

(1) Załóżmy, że $q > 1$. Wtedy

$$q^n > (q-1) \cdot n$$

i wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

(2) Załóżmy, że $0 < q < 1$. Wtedy

$$\Big(\frac{1}{q}\Big)^n > \Big(\frac{1}{q} - 1\Big)n,$$

a więc

$$q^n < \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{n},$$

i wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

2.26. *Jeśli* $a > 0$, *to* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Dowód. Niech $a \geqslant 1$. Wtedy na mocy odwrotnej nierówności Bernoulliego

$$1 \leqslant a^{1/n} = (1 + (a-1))^{1/n} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n},$$

więc nasza teza wynika z lematu o trzech ciągach. Jeśli zaś $0 < a < 1$, to

$$a^{1/n} = \frac{1}{(1/a)^{1/n}},$$

gdzie $1/a > 1$, i teza wynika z pierwszej części dowodu. □

Czasem ze zbieżności pewnego ciągu, można wnioskować o zbieżności, a nawet o wartości granicy innego ciągu. Rozważmy trzy takie sytuacje.

2.27. *Dla ciągu zbieżnego ciąg kolejnych średnich arytmetycznych jego początkowych wyrazów jest zbieżny do tej samej granicy, tzn.*

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \qquad \Rightarrow \qquad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $|a_n - a| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla $n > N$ mamy

$$A_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(a_k - a),$$

więc

$$|A_n - a| \leqslant \frac{C_N}{n} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

dla $n > N$ i $n > C_N/\varepsilon$, gdzie $C_n = \sum_{k=1}^{N} |a_k - a|$. □

2.28. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wówczas*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \ \text{ implikuje } \ \sqrt[n]{a_n} \to a.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $|\frac{a_n}{a_{n-1}} - a| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla $n > N$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N,$$

więc

$$c_N(a-\varepsilon)^n < a_n < C_N(a+e)^n,$$

i stąd

$$\sqrt[n]{c_N}\,(a-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{C_N}\,(a+e),$$

gdzie

$$c_N = \frac{a_N}{(a-\varepsilon)^N}, \qquad C_N = \frac{a_N}{(a+\varepsilon)^N}.$$

Jeśli n jest tak duże by $\sqrt[n]{c_N} > 1 - \varepsilon$ i $\sqrt[n]{C_N} < 1 + \varepsilon$, to

$$(1-\varepsilon)(a+\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(a+\varepsilon),$$

skąd już natychmiast wynika nasza teza. □

2.29. Wniosek. *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a_n = n$, to $a_{n+1}/a_n = 1 + 1/n \to 1$ i teza wynika z (2.28). □

2.30. *Niech będzie dany ciąg $a_n \geqslant 0$, taki że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Jeśli $a < 1$, to $a_n \to 0$. Jeśli zaś $a > 1$, to $a_n \to \infty$.*

Dowód. Załóżmy, że $a < 1$. Niech $a < q < 1$. Wtedy $\sqrt[n]{a_n} < q$ dla dostatecznie dużych n, a więc

$$0 \leqslant a_n < q^n$$

i stąd $a_n \to 0$. Jeśli natomiast $a > 0$, niech $1 < q < a$. Wtedy $\sqrt[n]{a_n} > q$ dla dostatecznie dużych n i wobec tego

$$a_n > q^n,$$

skąd $a_n \to \infty$.

□

Niech będą dane dwa ciągi rozbieżne do nieskończoności. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *szybciej rozbieżny* niż ciąg $\{b_n\}$ i piszemy $a_n \gg b_n$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

2.31. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, oraz ciąg potęgowy $\{n^N\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie i $N \in \boldsymbol{N}$. Wiemy już, że obydwa ciągi są rozbieżne do ∞. Niech

$$a_n = \frac{n^N}{q^n}.$$

Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^N q^n}{n^N q^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N \cdot \frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1,$$

więc także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

a stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^N}{q^n} = 0.$$

Zatem $n^N \ll q^n$, gdy $q > 1$.

2.32. Przykład. Porównajmy teraz ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, z również rozbieżnym do ∞ ciągiem $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$. Niech

$$a_n = \frac{q^n}{n!}.$$

Jak łatwo widać,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q}{n} \to 0,$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0,$$

czyli $q^n \ll n!$.

Z aksjomatu ciągłości wynika następujące podstawowe dla teorii zbieżności ciągów twierdzenie.

2.33. Twierdzenie. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Dowód. Niech $a = \sup_{n\in\boldsymbol{N}} a_n$. Pokażemy, że $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Rzeczywiście, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że $a_N > a - \varepsilon$. Wobec monotoniczności ciągu

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant a, \qquad n \geqslant N,$$

co kończy dowód. □

Wystarczy zastosować to twierdzenie do ciągu o wyrazach przeciwnych, by otrzymać

2.34. Wniosek. *Każdy malejący i ograniczony z dołu ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Jak pokazaliśmy wcześniej, ciąg o wyrazach

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest ściśle rosnący i ograniczony, więc, na mocy aksjomatu ciągłości, zbieżny. Wartość jego granicy nazywamy *liczbą e*.

2.35. Twierdzenie. *Zachodzi następująca równość:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Dowód. Oczywiście ciąg

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

jest ściśle rosnący i, jak wiemy, ograniczony przez 3, a więc zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $a \in \boldsymbol{R}$. Wiemy już także, że

$$e_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

więc na mocy Wniosku 2.11 jest $e \leqslant a$. Pozostaje dowieść nierówności przeciwnej. W tym celu ustalmy liczbę $m \in \boldsymbol{N}$. Wtedy dla dowolnego $n > m \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
e \geqslant e_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \qquad (2.36) \\
&> 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\
&\geqslant 2 + \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)^m \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

Przechodząc po prawej stronie do nieskończoności z n, otrzymujemy

$$e \geqslant 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = a_m,$$

a stąd, jeszcze raz korzystając z Wniosku 2.11, dostajemy $e \geqslant a$. □

2.37. Przykład. Następująca nierówność określa, jak dokładnie kolejne sumy częściowe a_n przybliżają liczbę e:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}, \qquad n \in \boldsymbol{N}. \qquad (2.38)$$

Aby ją uzasadnić, zauważmy, że dla dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\begin{aligned}
e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

o ile $m > n$. Oszacujmy wyrazy tego ciągu. Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{m!}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\Big(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots m}\Big)\\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\cdot\Big(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\Big)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1-\frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1-\frac{1}{n+2}} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\ &= \frac{1}{n\cdot n!}\cdot\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n\cdot n!}\cdot\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}.\end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona ostatniej słabej nierówności nie zależy od m, więc również

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!} < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

2.39 (ważne nierówności). *Dla każdej liczby naturalnej n jest*

$$\Big(n+1\Big)^n < e^n n! < \Big(n+1\Big)^{n+1}.$$

Dowód. Mamy[1]

$$e^n > 2\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^3\ldots\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{(n+1)^n}{n!},$$

skąd natychmiast wynika pierwsza nierówność. Podobnie

$$e^n < 2^2\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^3\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^4\ldots\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

a stąd druga nierówność. □

2.40. Wniosek. *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1/e.$$

2.41. Przykład. Pierwiastek z dowolnej liczby naturalnej jest albo liczbą naturalną albo niewymierną. Załóżmy bowiem, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q},$$

gdzie $p \in \boldsymbol{N}$, $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ oraz p i q są względnie pierwsze. Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy równość równoważną

$$n = \Big(\frac{p}{q}\Big)^2,$$

a stąd

$$nq^2 = p^2.$$

Gdyby liczba q miała jakiś dzielnik pierwszy, to musiałby on dzielić również prawą stronę, czyli liczbę p, a tak być nie może (bo p i q są względnie pierwsze), zatem q nie ma dzielników pierwszych, czyli $q = 1$, co oznacza, że $\sqrt{n} = p \in \boldsymbol{N}$.

[1]Ten pomysłowy dowód zawdzięczam prof. Tadeuszowi Pytlikowi.

2.42. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $e = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{N}$ są względnie pierwsze. Dla $n = q$ nierówność (2.38) przyjmuje wtedy postać

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Mnożąc obie strony przez $q!$, otrzymujemy

$$0 < p\,(q-1)! - q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Aby uzyskać sprzeczność, wystarczy zauważyć, że liczba

$$\alpha = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

jest naturalna. □

2.43 (Aproksymacja pierwiastka). *Niech będzie dana liczba* $c > 0$. *Niech* $0 < a < \sqrt{c}$. *Definiujemy ciąg*

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}.$$

Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem malejącym zbieżnym do* $\sqrt{c}$, *a ponadto*

$$x_n - \sqrt{c} < \frac{x_n^2 - c}{2a}$$

dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

Dowód. Zauważmy, że

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c},$$

więc $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{c}$ dla $n \geqslant 1$. Mamy też

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \leqslant \max\left\{x_n, \frac{c}{x_n}\right\} = x_n,$$

więc $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ jest malejący.

Jako ograniczony od dołu i malejący nasz ciąg ma granicę $x \geqslant \sqrt{c}$. Aby ją obliczyć, przejdźmy do granicy z $n \to \infty$ we wzorze definiującym ciąg, otrzymując

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right),$$

skąd

$$x = \frac{c}{x},$$

a ponieważ $x > 0$, więc

$$x = \sqrt{c}.$$

Oszacowanie błędu wynika stąd, że

$$0 < x_n - \sqrt{c} = \frac{x_n^2 - c}{x_n + \sqrt{c}} < \frac{x_n^2 - c}{2a}.$$

□

Obliczmy dla ilustracji przybliżenia $\sqrt{2}$, jakie można otrzymać tym sposobem. Przyjmując $a = 1$, widzimy, że

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.4167, \qquad x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.4142.$$

Zbadajmy jeszcze, jak błąd popełniamy przy tych przybliżeniach. Mamy

$$E_2 = x_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{288} \approx 0.0035$$

oraz

$$E_3 = x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{332928} \approx 0.000003.$$

2.44. Przykład. Rozważmy ciąg o wyrazach

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ciąg ten oczywiście nie jest monotoniczny. Mimo to wywnioskujemy jego zbieżność z aksjomatu ciągłości. W tym celu przyjrzyjmy się ciągom

$$b_n = a_{2n-1}$$

oraz

$$c_n = a_{2n}.$$

Zauważmy, że

$$b_{n+1} - b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$$

oraz

$$\begin{aligned} b_n = &\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) > 0, \end{aligned}$$

gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest dodatni. Zatem ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony od dołu, jest zbieżny (na mocy akjomatu ciągłości). Oznaczmy jego granicę przez $b \in \boldsymbol{R}$. Podobnie dla ciągu wyrazów parzystych ciągu $\{a_n\}$ mamy

$$c_{n+1} - c_n = a_{2n+2} - a_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

oraz

$$\begin{aligned} c_n = 1 &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots \\ &+ \left(-\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(-\frac{1}{2n}\right) < 1 \end{aligned}$$

(gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest ujemny), więc ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, jako rosnący i ograniczony z góry. Oznaczmy jego granicę przez $c \in \boldsymbol{R}$. Zauważmy ponadto, że

$$c_n - b_n = -\frac{1}{2n}$$

więc przechodząc do granicy z $n \to \infty$, dostajemy

$$b = c.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że ciągi $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy, zatem w każdym przedziale otwartym zawierającym $b = c$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o numerach parzystych i prawie wszystkie o numerach nieparzystych, czyli prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, co oznacza, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ jest zbieżny. Trochę później zobaczymy, że jego granica jest równa $\log 2$.

Kolejnym ważnym pojęciem niniejszego wykładu jest pojęcie punktu skupienia ciągu i ściśle związane z nim pojęcie podciągu. Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$. Niech ciąg $\{n_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ o wyrazach naturalnych będzie ściśle rosnący. Wtedy ciąg o wyrazach

$$b_k = a_{n_k}$$

nazywamy *podciągiem* ciągu $\{a_n\}$.

2.45. Twierdzenie. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Udowodnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.

2.46. Twierdzenie (Bolzano-Weierstrass). *Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na pół i wybierzmy tę połowę, gdzie jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Oznaczmy ten przedział przez $[a_1,b_1]$. Niech $[a_2,b_2]$ będzie tą połową przedziału $[a_1,b_1]$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$. Analogicznie konstruujemy zstępujący ciąg przedziałów, takich że

$$|a_n - b_n| = 2^{-n}|a-b|,$$

z których każdy zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Zauważmy, że wówczas ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez b, więc zbieżny do pewnego $\alpha \in \boldsymbol{R}$, a ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony z dołu przez a, jest zbieżny do pewnego $\beta \in \boldsymbol{R}$. Ponadto

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

więc

$$\alpha = \beta. \tag{2.47}$$

Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{x_n\}$ w następujący sposób: Niech $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$. Przypuśćmy, że wybraliśmy już

$$x_{n_1} \in [a_1,b_1]\,,\ x_{n_2} \in [a_2,b_2]\,,\ \ldots,\ x_{n_k} \in [a_k,b_k]$$

tak, że

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k.$$

Jako $x_{n_{k+1}}$ wybieramy taki wyraz z przedziału $[a_{k+1},b_{k+1}]$, aby $n_{k+1} > n_k$. Można to zrobić, bo w przedziale znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$.

Skoro

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \quad k \in \boldsymbol{N},$$

więc na mocy (2.47) i twierdzenia o trzech ciągach również

$$x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = \beta,$$

co kończy dowód. □

Mówimy, że liczba ξ jest *punktem skupienia ciągu* $\{x_n\}$ jeśli w każdym przedziale otwartym zawierającym ξ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$.

2.48. *Liczba ξ jest punktem skupienia ciągu $\{x_n\}$ wtedy tylko wtedy, gdy ciąg $\{x_n\}$ ma podciąg zbieżny do ξ.*

2.49. Przykład. Jeśli przez A oznaczymy zbiór punktów skupienia ciągu, to w przypadku ciągu stałego $x_n = c$ jest $A = \{c\}$; w przypadku ciągu $x_n = (-1)^n$ jest $A = \{-1, 1\}$; w przypadku ciągu zbieżnego do granicy a jest $A = \{a\}$.

2.50. Przykład. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$, a ξ dowolną liczbą z tego odcinka. Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ ciągu $\{x_n\}$ tak, aby

$$\forall k \in \boldsymbol{N} \qquad x_{n_k} \in \Big(\,\xi - \frac{1}{k}\,, \,\xi + \frac{1}{k}\,\Big).$$

Możemy oczywiście wybrać taki podciąg, gdyż między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych. Tak wybrany podciąg jest zbieżny do ξ, co oznacza, że zbiorem punktów skupienia ciągu $\{x_n\}$ jest cały odcinek $[0, 1]$.

2.51. Twierdzenie. *Jeżeli wszystkie podciągi zbieżne ciągu ograniczonego są zbieżne do tej samej granicy, to sam ciąg jest również zbieżny do tej granicy. Równoważnie, jeżeli ciąg ograniczony jest rozbieżny, to ma przynajmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic.*

Dowód. Niech $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ będzie ciągiem rozbieżnym. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg

$$x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha.$$

Z rozbieżności ciągu $\{x_n\}$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że poza przedziałem $(\,\alpha-\varepsilon\,,\,\alpha+\varepsilon\,)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$, które oczywiście nadal należą do przedziału $[a, b]$, więc spośród nich również możemy wybrać podciąg zbieżny, tzn.

$$x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \beta,$$

gdzie

$$|x_{m_k} - \alpha| \geqslant \varepsilon, \qquad k \in \boldsymbol{N},$$

a stąd $|\beta - \alpha| \geqslant \varepsilon$, więc $\alpha \neq \beta$. □

2.52. Wniosek. *Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego punktów skupienia jest jednoelementowy.*

Okazuje się, że można mówić o zbieżności w oderwaniu od pojęcia granicy. Służy temu pojęcie ciągu Cauchy'ego, które jak zobaczymy za chwilę, jest w istocie równoważne pojęciu ciągu zbieżnego. Mówimy, że ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ jest *ciągiem Cauchy'ego* (lub *ciągiem fundamentalnym*), jeśli

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |a_n - a_N| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że warunek Cauchy'ego można równoważnie wysłowić tak:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Jest jasne, że ten drugi warunek jest silniejszy od pierwszego. Czytelnik zechce sam sprawdzić, że są one w istocie równoważne.

2.53. Twierdzenie. *Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód. $(\Rightarrow)$ Weźmy ciąg zbieżny $\{a_n\}$. Niech $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności ciągu wynika, że istnieje takie $N \in \boldsymbol{N}$, że dla dowolnych $n \geqslant N$

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

więc

$$|a_n - a_N| < 2\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Weźmy ciąg Cauchy'ego $\{a_n\}$. Wtedy istnieje takie $N \in \boldsymbol{N}$, że dla każdego $n \geqslant N$

$$|a_n - a_N| < 1$$

czyli

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Ponieważ poza tym przedziałem jest tylko skończona liczba wyrazów, więc cały ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}_{k \in \boldsymbol{N}}$ ciągu $\{a_n\}$ zbieżny do pewnego $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Pokażemy, że cały ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do α. W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\{a_n\}$ jest fundamentalny, więc istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad m, n \geqslant N.$$

Natomiast ze zbieżności podciągu $\{a_{n_k}\}$ do liczby α wynika, że

$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon, \qquad k \geqslant K,$$

dla pewnego $K \in \boldsymbol{N}$. Ponieważ $\{n_k\}$ jest rosnący i rozbieżny do ∞, więc zwiększając ewentualnie K możemy przyjąć, że także

$$n_k \geqslant N, \qquad k \geqslant K.$$

Wtedy dla każdego $k \geqslant K$ i każdego $n \geqslant N$ mamy

$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon, \qquad |a_{n_k} - a_n| < \varepsilon,$$

a stąd

$$|a_n - \alpha| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < 2\varepsilon,$$

co oznacza, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

Dla ciągu $\{a_n\}$ zdefiniujmy nowy ciąg

$$a'_n = a_{n+1} - a_n,$$

który będziemy nazywać *ciągiem przyrostów* albo *pochodną* ciągu $\{a_n\}$.

2.54. Twierdzenie (Stolz). *Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Wtedy zachodzi następująca implikacja:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{b'_n} = g \in \boldsymbol{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 = b_1 = 0$ oraz $b_n > 0$ dla $n \geqslant 2$. Załóżmy też na razie, że $g = 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje takie $N_1 \in \boldsymbol{N}$, że

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |a'_n| \leqslant b'_n \varepsilon. \tag{2.55}$$

Skoro ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący, to ciąg $\{b'_n\}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie i

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| &= \left|\frac{1}{b_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}|a'_k| = \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{N_1}|a'_k| + \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a'_k| \\ &\leqslant \frac{C_{N_1}}{b_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n} b'_k \leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

dla wszystkich $n \geqslant N_2$, gdzie $\boldsymbol{N} \ni N_2 > N_1$ jest dobrane tak, aby

$$b_n \geqslant \frac{C_{N_1}}{\varepsilon}, \quad n \geqslant N_2,$$

a

$$C_{N_1} = \sum_{k=1}^{N_1} |a'_k|$$

jest stałą. Istnienie takiego N_2 wynika oczywiście z rozbieżności do ∞ ciągu $\{b_n\}$. Tym samym dowiedliśmy twierdzenia w przypadku, gdy $g = 0$.

Dla dowolnego $g \in \boldsymbol{R}$ niech

$$\alpha_n = a_n - b_n g.$$

Wtedy, jak łatwo zauważyć $\alpha'_n = a'_n - gb'_n$, więc ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają założenia twierdzenia z $g = 0$ i na mocy pierwszej części dowodu $\frac{\alpha_n}{b_n} \to 0$, skąd natychmiast

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_n + gb_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} g.$$

I tak dowód został zakończony. □

2.56. Przykład. Stosując twierdzenie Stolza, pokażemy że dla dowolnego $\alpha > 0$

$$x_n = \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}.$$

W tym celu przyjmijmy oznaczenia:

$$a_n = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$$

oraz

$$b_n = n^{\alpha+1}.$$

Ciąg $\{b_n\}$ jest oczywiście ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Zauważmy, że

$$\frac{a'_n}{b'_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}},$$

gdzie

$$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = (n+1)^{\alpha+1}\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^{\alpha+1}\Big) \leqslant (n+1)^\alpha(\alpha+1)$$

oraz

$$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{\alpha+1} - 1\Big) \geqslant n^\alpha(\alpha+1).$$

Szacując skorzystaliśmy dwukrotnie z nierówności Bernoulliego. Z otrzymanych nierówności wynika, że

$$\frac{1}{\alpha+1} \leqslant \frac{a'_n}{b'_n} \leqslant \frac{(1+1/n)^\alpha}{\alpha+1},$$

a stąd na mocy lematu o trzech ciągach

$$\frac{a'_n}{b'_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1},$$

co po zastosowaniu twierdzenia Stolza daje

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}.$$

2.57. Przykład. Rozważmy ciąg o wyrazach

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha},$$

gdzie $\alpha > 0$. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Istotnie, jeśli przyjmiemy oznaczenia

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

oraz

$$b_n = n^\alpha,$$

to oczywiście ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞ oraz

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a'_n}{b'_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{n+1})^\alpha} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

więc na mocy twierdzenia Stolza

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Szacując skorzystaliśmy z odwrotnej nierówności Bernoulliego

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leqslant 1 + \frac{\alpha}{n}$$

obowiązującej dla $0 < \alpha \leqslant 1$, bo też i do takich α można się tu ograniczyć.

Zadania

1. Ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Pokaż, że ciąg $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ jest też ściśle rosnący.

2. Niech ξ będzie liczbą niewymierną. Pokaż, że ciąg $a_n = \mathbf{m}(n\xi)$ jest różnowartościowy.

3. Znajdź blok B'_{10} w przekątniowej numeracji liczb wymiernych dodatnich, pamiętając o odrzuceniu wszystkich wyrazów występujących już wcześniej.

4. Znajdź wyraz w'_{17} w przekątniowym ciągu liczb wymiernych dodatnich.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

6. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. Uzasadnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2.$$

8. Popraw wynik poprzedniego zadania, tak by uzyskać nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{3}{4}.$$

9. Wykaż, że ciąg $e_n = (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$ jest malejący, natomiast ciąg $f_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ nie jest.

10. Korzystając z nierówności Bernoulli'ego, sprawdź, że ciąg $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący, a ciąg $v_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ – rosnący.

11. Niech $a \in \boldsymbol{R}$. Sprawdź, że warunki $\forall \varepsilon > 0 \quad a < \varepsilon$ oraz $\forall n \in \boldsymbol{N} \quad a < 1/n$ są równoważne. Korzystając z tego zmodyfikuj odpowiednio definicję granicy ciągu.

12. Dane są liczby $x, y > 0$ i liczba wymierna $0 < u < x + y$. Wykaż, że istnieją liczby wymierne $0 < v < x$ i $0 < w < y$, takie że $u = v + w$.

13. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{b-1}{(n-1)b+1} < b^{1/n} < 1 + \frac{b-1}{n}, \qquad 1 \neq b > 0, \quad n > 1.$$

14. Udowodnij nierówność $\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$. W tym celu podnieś obie strony do n-tej potęgi i skorzystaj ze wzoru Newtona.

15. Wprost z definicji wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{7n-3} = \frac{6}{7}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

16. Ponumeruj metodą przekątniową wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$. Otrzymany ciąg jest ograniczony, ale rozbieżny. Uzasadnij.

17. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ jest $(1 + \frac{1}{n})^{2n} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^k}{k!}$.

18. Udowodnij nierówności

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

19. Niech $< x < 1$ będzie liczbą rzeczywistą o zapisie dziesiętnym $0.c_1c_2c_3\ldots$, w którym nie występuje okres (9). Sprawdź, że $c_n = \left[10 \cdot \mathbf{m}(10^{n-1})\right]$. Kiedy ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny?

20. Niech $a_n > 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wykaż, że $a_n \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

21. Niech φ będzie dowolnym wielomianem. Wykaż, że $\frac{\varphi(n)}{2^n} \to 0$, gdy $n \to \infty$.

22. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, a $\{b_n\}$ zbieżny do 0. Pokaż, że $a_n b_n \to 0$.

23. Wiedząc, że $a_n \to a$, znajdź granice ciągów $b_n = a_{n+1} - a_n$, $c_n = a_n + 2a_{n+1}$, $d_n = |a_n|$, $e_n = a_n a_{n+1}$, $f_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$.

24. Wiemy, że $a_n \to a$. Czy ciąg $b_n = [a_n]$ ma granicę?

25. Wykaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \to 1, \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0.$$

Pierwszy ciąg jest rosnący, a drugi – malejący. Uzasadnij.

26. Dany jest ciąg $a_n \to a$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$. Wykaż, że $b_n \to b = a - a_1$. Czy nie przeczy to tezie, że pierwszy wyraz ciągu nie może mieć wpływu na wartość granicy?

27. Wykaż, że $\sqrt[n^2]{n} \to 1$.

28. Wykaż, że $0 < \left(\frac{3001}{3000}\right)^{3001} - e < 10^{-3}$.

29. Oblicz granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}, \qquad b_n = \sqrt[n^2]{2^n + 5^n}, \qquad c_n = (2^n + 5^n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

30. Zbadaj zbieżność i granicę ciągu $n^\alpha q^n$, gdzie $q > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

31. Uzasadnij nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n, \qquad n \geqslant 3.$$

32. Pokaż, że ciąg $a_n = n^{1/n}$ jest ściśle monotoniczny dla $n \geqslant 3$.

33. Udowodnij, że $\sqrt[n^2]{n!} \to 1$.

34. Wiedząc, że $0 < a < b$, oblicz granicę ciągu

$$x_n = \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}.$$

35. Pokaż, że ciągi $n^{1/n}$ i $n!^{1/n}$ są monotoniczne.

36. Niech $a > 1$ i niech $a_n = [a^n]$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

37. Znajdź liczbę wymierną w przedziale $(2\frac{7}{10}, e)$.

38. Który z podanych ciągów szybciej dąży do nieskończoności: a) $a_n = n!$, $b_n = n^n$; b) $a_n = 3^n$, $b_n = 2^n n^4$; c) $a_n = \frac{n!}{4^n}$, $b_n = 2^n$?

39. Niech $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_n^{-1})$. Znajdź granicę tego ciągu.

40. Niech $p_1 = \frac{1}{3}$ i $p_{n+1} = \frac{p_n + 9(1-p_n)}{10}$. Znajdź granicę tego ciągu.

41. Znajdź kresy zbiorów $A = \{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \boldsymbol{N}\}$, $C = \{\frac{m}{|m|+n} : m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\}$. W każdym przypadku wskaż ciąg elementów zbioru zbieżny do danego kresu.

42. Oblicz $\sup_{m\in\boldsymbol{N}} \inf_{n\in\boldsymbol{N}} \frac{m}{m+n}$ oraz $\inf_{n\in\boldsymbol{N}} \sup_{m\in\boldsymbol{N}} \frac{m}{m+n}$.

43. Wykaż, że $\min_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = [\frac{n}{2}]!(n - [\frac{n}{2}])!$ i $\max_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = n!$.

44. Udowodnij, że dla każdego $q > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^n}{[\frac{n}{2}]!} = 0.$$

45. Oblicz granice $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ i $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n!}})^{\sqrt{n!}}$.

46. Wiadomo, że $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n} = ab.$$

47. Znajdź przybliżenie $\sqrt{3}$, przyjmując $x_0 = 2$ i obliczając x_3. Oszacuj też błąd przybliżenia.

48. Znajdź przybliżenie $\sqrt{5}$, przyjmując $x_0 = 3$ i obliczając x_2. Oszacuj też błąd przybliżenia.

49. Niech $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$. Naśladując rozumowanie z wykładu, pokaż, że ten ciąg jest zbieżny.

50. Niech $c > 0$. Pokaż, że ciąg $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

51. Niech będzie dany zstępujący ciąg przedziałów domkniętych $I_{n+1} \subset I_n \subset \boldsymbol{R}$. Udowodnij, że przekrój $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ jest niepusty. Pokaż na przykładzie, że tak być nie musi dla przedziałów półotwartych, a tym bardziej otwartych.

52. Wykaż, że jeśli $p_n, q_n \in \boldsymbol{N}$ i $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = \xi$ jest liczbą niewymierną, to $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

53. Wykaż, że ciąg monotoniczny, który ma podciąg ograniczony, sam jest ograniczony.

54. Ile punktów skupienia może mieć ciąg monotoniczny?

55. Zbuduj ciąg, którego zbiorem punktów skupienia jest $E = \{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\}$. [W tym celu elementy zbioru $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \boldsymbol{N}\}$ ustaw w ciąg metodą tablicową.]

56. Ciąg $a_n > 0$ spełnia warunek rekurencyjny $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Wykaż, że a_n dąży do złotej liczby $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

57. Znajdź wszystkie punkty skupienia ciągu $u_n = \mathbf{m}(\frac{np}{q})$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{N}$ są względnie pierwsze.

58. Pokaż, że z każdego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$, taki że $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < 2^{-k}$ dla $k \in \boldsymbol{N}$.

59. Znajdź granicę ciągu $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$, gdzie $1/2 < u_1 < 1$.

60. Wiadomo, że $a_{n+1} - a_n \to a$. Pokaż, że $\frac{a_n}{n} \to a$.

61. Niech $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Wykaż, że wtedy $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$.

62. Udowodnij, że jeśli $0 < a_n \to a$, to $b_n = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \to a$. Jeśli natomiast $a_n \to \infty$, to $b_n \to \infty$.

63. Udowodnij, że granica ciągu $z_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}$ jest liczbą niewymierną.

64. Niech $a_n \to a$ i niech $\boldsymbol{N} \ni n_k \to \infty$. Udowodnij, że $b_k = a_{n_k} \to a$. Czy $\{b_k\}$ jest podciągiem $\{a_n\}$?

65. Znajdź zbiór A punktów skupienia ciągów

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = \frac{2(-1)^n n + 3}{n+1}, \quad c_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}, \quad d_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^n.$$

66. Dany jest ułamek nieskracalny $x = p/q \in (0,1)$. Znajdź wszystkie punkty skupienia ciągu $a_n = \mathbf{m}(nx)$.

67. Dany jest ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sup_{k\geqslant n} a_k$. Sprawdź, że ciąg $\{b_n\}$ jest malejący i ograniczony od dołu.

68. Pokaż, że jeśli $|u_{n+1} - u_n| < 2^{-n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to ciąg $\{u_n\}$ jest fundamentalny.

69. Nie korzystając z aksjomatu ciągłości, wykaż, że ograniczony ciąg monotoniczny jest fundamentalny.

70. Wiedząc, że ciąg $\{a_n\}$ jest postępem arytmetycznym o wyrazach dodatnich i różnicy $r > 0$, oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2},$$

71. Wiedząc, że ciąg $\{a_n\}$ jest postępem arytmetycznym o wyrazach dodatnich i różnicy $r > 0$, pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{2}{e}.$$

72. Wykaż, że ciąg

$$a_n = \frac{(1+1)^{n^2}}{e^n}$$

jest malejący, a więc zbieżny. (Jego granica wynosi $1/\sqrt{e}$, ale to udowodnimy później.)

3. Funkcje elementarne

Funkcjami elementarnymi będziemy nazywać funkcję tożsamościową $x \mapsto x$, funkcję wykładniczą, funkcje trygonometryczne oraz wszystkie funkcje, jakie można otrzymać z wyżej wymienionych drogą następujących operacji: ograniczania dziedziny, dodawania, mnożenia, dzielenia i odwracania funkcji, gdy jest to możliwe. Tak więc wśród funkcji elementarnych znajdą się także funkcja logarytmiczna, wielomiany, funkcje wymierne, kołowe, hiperboliczne i wiele innych.

W tym rozdziale podamy precyzyjne definicje tych funkcji i wypunktujemy ich najprostsze własności. Zacznijmy od podstawowych własności potęgi:

(a) $a^x > 0$,
(b) $a^{x+y} = a^x a^y$,
(c) Jeśli $a > 1$ i $x > 0$, to $a^x > 1$,
(d) $(a^x)^y = a^{xy}$

dla $a > 0$ oraz $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Dla ustalonego $a > 0$ funkcję

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto a^x \in (0, \infty)$$

nazywamy *funkcją wykładniczą o podstawie* a. Jeśli $a = e$, to funkcję

$$x \longmapsto e^x$$

nazywamy po prostu *funkcją wykładniczą*. Zauważmy, że z własności c) wynika, że funkcja wykładnicza o podstawie $a > 1$ jest ściśle rosnąca.

Jeśli z kolei ustalimy $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to funkcja

$$(0, \infty) \ni x \longmapsto x^\alpha \in (0, \infty)$$

nazywa się *funkcją potęgową* o wykładniku α. W przypadku, gdy $\alpha = n \in \boldsymbol{N}$, dziedziną funkcji potęgowej jest cała prosta $\boldsymbol{R}$.

3.1. Lemat. *Niech $a > 0$ i niech $A = \max\{a, 1/a\}$. Wtedy*

$$|a^x - 1| \leqslant A^{|x|} - 1, \qquad x \in \boldsymbol{R}. \tag{3.2}$$

Co więcej, jeśli $|x| \leqslant 1$, to

$$|a^x - 1| \leqslant (A - 1)|x|. \tag{3.3}$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a^x \geqslant 1$,

$$|a^x - 1| = a^x - 1 \leqslant A^{|x|} - 1,$$

a jeśli $a^x < 1$, to

$$|a^x - 1| = 1 - a^x = a^x(a^{-x} - 1) \leqslant a^{-x} - 1 \leqslant A^{|x|} - 1,$$

co dowodzi pierwszej nierówności. Druga wynika z pierwszej przez zastosowanie odwrotnej nierówności Bernoulliego:

$$|a^x - 1| \leqslant A^{|x|} - 1 = \Big(1 + (A - 1)\Big)^{|x|} - 1 \leqslant (A - 1)|x|,$$

bo $|x| \leqslant 1$. □

3.4. Twierdzenie. *Niech $a > 0$. Wtedy $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \mathbf{R}$ pociąga $a^{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^x$.*

Dowód. Dla dostatecznie dużych n, mamy $|x - x_n| \leqslant 1$. Wtedy

$$|a^{x_n} - a^x| = a^x |a^{x_n - x} - 1| \leqslant a^x (A-1)|x_n - x|,$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. $\square$

3.5. Twierdzenie. *Niech* $0 < a_n \to a > 0$. *Wtedy dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

$$a_n^x \xrightarrow{n\to\infty} a^x.$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $a = 1$ i $[x] = m$. Wtedy

$$b_n \leqslant a_n^x \leqslant B_n,$$

gdzie

$$b_n = \min\{a_n^m, a_n^{m+1}\}, \qquad B_n = \max\{a_n^m, a_n^{m+1}\}.$$

jak widać, $b_n \to 1$ i $B_n \to 1$, więc na mocy lematu o trzech ciągach $a_n \to 1$[1].

Niech teraz $A_n = \max\{a_n/a, a/a_n\}$. Skoro $a_n \to a$, mamy $A_n \to 1$. Ponadto

$$|a_n^x - a^x| = a^x |(a_n/a)^x - 1| \leqslant a^x (A_n^{|x|} - 1)|x|,$$

gdzie $A_n^{|x|} \to 1$, co daje naszą tezę. $\square$

3.6. *Jeśli* $1 < a_n \to \infty$, *to*

$$A_n = \big(1 + 1/a_n\big)^{a_n} \longrightarrow e, \qquad B_n = \big(1 - 1/a_n\big)^{-a_n} \longrightarrow e,$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $a_n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy wszystkie wyrazy ciągu $\{A_n\}$ są również wyrazami ciągu o wyrazach

$$e_n = \big(1 + 1/n\big)^n$$

z co najwyżej skończoną ilością powtórzeń, więc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Mamy bowiem

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leqslant A_n \leqslant \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

i na mocy pierwszej części dowodu skrajne ciągi są zbieżne do e.

Druga część tezy wynika z równości

$$B_n = \left(\frac{a_n}{a_n - 1}\right)^{a_n} = \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right)^{a_n}$$

i wcześniejszych rozważań. $\square$

3.7. Twierdzenie. *Dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{|x|<n\to\infty} \big(1 + x/n\big)^n = e^x. \tag{3.8}$$

Dowód. Jeśli $x = 0$, teza jest trywialna. Jeśli $x \neq 0$, to $a_n = \frac{n}{x} \to \pm\infty$ zależnie od znaku x. W obu przypadkach

$$\big(1 + x/n\big)^n = \left(\big(1 + 1/a_n\big)^{a_n}\right)^x \longrightarrow e^x$$

na mocy (3.6) i Twierdzenia 3.5. $\square$

[1]Ten sposób rozumowania podpowiedział mi p. Bartosz Kuśmierz.

Przyjrzyjmy się jeszcze ciągowi (3.8). Jeśli $x \neq 0$ i $n > |x|$, to z nierówności Bernoulliego wynika, że

$$\Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{n+1} = \bigg(\Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\bigg)^n > \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n,$$

a więc ciąg ten dla $n > |x|$ jest ściśle rosnący.

3.9. Wniosek. *Dla każdego* $x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Dla każdego $0 \neq x < 1$

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}.$$

Dowód. Jeśli $x \neq 0$, to dzięki nierówności Bernoulliego (dla wykładników naturalnych) i temu, że ciąg (3.8) jest rosnący, otrzymujemy

$$e^x > \Big(1 + \frac{x}{N}\Big)^N > 1 + x,$$

jeśli $N = [x] + 1$.

Stąd, jeśli dodatkowo $x < 1$,

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} < \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x},$$

co kończy dowód. □

3.10. Lemat. *Dla dowolnych naturalnych* $2 \leqslant k \leqslant n$

$$0 < 1 - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \leqslant \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Dowód. Niech

$$A_k = 1 - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big),$$

gdzie $2 \leqslant k \leqslant n$. Jak widać, $A_2 = \frac{1}{n}$ oraz

$$A_k \leqslant A_{k-1} + \frac{k-1}{n}, \qquad 2 < k \leqslant n,$$

skąd przez indukcję

$$A_k \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}.$$

□

3.11. Twierdzenie. *Dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $x \geqslant 0$. Zauważamy, że dla $n > m \geqslant 2$

$$\Big(1 - \frac{m}{n}\Big)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} < \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

skąd analogicznie jak w rozdziale 2 otrzymujemy żądaną równość.

Niech teraz x będzie dowolne. Oszacujmy różnicę

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\right|\leqslant\sum_{k=2}^{n}\Big(1-(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})\Big)\frac{|x|^k}{k!}.$$

Na mocy Lematu i pierwszej części dowodu dla $|x|\geqslant 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\right|\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}\leqslant\frac{|x|^2e^{|x|}}{2n},$$

skąd już łatwo wynika teza. □

3.12. Wniosek. *Dla każdego* $|x|\leqslant 1$ *i każdego* $n\in N$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+r_n(x),$$

gdzie

$$|r_1(x)|\leqslant(e-1)|x|,\qquad |r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)},\qquad n\geqslant 2.$$

Dowód. Jak łatwo zauważyć

$$r_n(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m}\frac{x^k}{k!}.$$

Jak wiemy, dla $n\geqslant 2$

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\sum_{k=n}^{m}\frac{|x|^k}{k!}\leqslant|x|^n\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k!}<\frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)},$$

bo $|x|\leqslant 1$. Oszacowanie dla $n=1$ widać bezpośrednio. Zatem po przejściu do nieskończoności z m, widać, że reszty r_n spełniają żądane nierówności. □

Warto dobrze zapamiętać najprostsze przypadki tej nierówności:

$$\begin{aligned}e^x&=1+r_1(x)=1+x+r_2(x)\\&=1+x+x^2/2+r_3(x),\qquad |x|\leqslant 1,\end{aligned}$$

gdzie

$$|r_1(x)|\leqslant(e-1)|x|,\qquad |r_2(x)|\leqslant|x|^2,\qquad |r_3(x)|\leqslant|x|^3/4.$$

Dla oznaczenia funkcji wykładniczej będziemy też używali symbolu

$$\exp x=e^x.$$

3.13. *Obrazem* $\boldsymbol{R}$ *przez funkcję wykładniczą jest cała półprosta dodatnia. Innymi słowy,*

$$\exp(\boldsymbol{R})=(0,\infty).$$

Dowód. Niech dla $y>0$

$$E=\{x\in\boldsymbol{R}:e^x<y\}.$$

Ponieważ $y<e^y$, więc także $e^{-1/y}<y$. Stąd $x=-1/y\in E$ oraz y jest górnym ograniczeniem E. Zbiór E jako niepusty i ograniczony z góry ma kres górny. Niech $a=\sup E$. Istnieje ciąg o wyrazach $x_n\in E$ zbieżny do a, więc

$$e^a=\lim_{n\to\infty}e^{x_n}\leqslant y.$$

Z drugiej strony $a + 1/n \notin E$, więc

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{a+1/n} \geqslant y,$$

co kończy dowód. $\square$

Stąd i z własności (3) potęgi wnioskujemy, że funkcja wykładnicza

$$\exp : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$$

jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $\boldsymbol{R}$ na półprostą $(0, \infty)$. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna

$$\log : (0, \infty) \to \boldsymbol{R},$$

którą nazywamy *funkcją logarytmiczną.*

3.14. *Funkcja logarytmiczna ma następujące własności:*

1. $\log$ *jest funkcją ściśle rosnącą,*

2. $\log 1 = 0, \qquad \log e = 1,$

3. $\log x \cdot y = \log x + \log y, \qquad x, y > 0,$

4. $a^x = e^{x \log a}, \qquad a > 0,\ x \in \boldsymbol{R},$

5. $\log a^x = x \log a, \qquad a > 0,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Dowód. Pierwsze trzy własności są natychmiastową konsekwencja tego, że *log* jest funkcją odwrotną do wykładniczej. Własność czwarta wynika stąd, że

$$e^{x \log a} = \left(e^{\log a}\right)^x = a^x.$$

Ostatnia własność wynika z poprzedniej przez zlogarytmowanie. $\square$

Poniższe nierówności mają podstawowe znaczenia dla badania funkcji logarytmicznej.

3.15. Wniosek. *Dla każdego* $0 \neq x > -1$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

Dowód. Logarytmując pierwszą z nierówności Wniosku 3.9 dla $0 \neq x > -1$, otrzymujemy drugą z nierówności dla logarytmu. Druga z nierówności Wniosku 3.9

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}, \qquad 0 \neq x < 1,$$

po podstawieniu $y = \frac{x}{1-x} > -1$, daje

$$e^{\frac{y}{1+y}} < 1 + y, \qquad y > -1,$$

a stąd przez zlogarytmowanie otrzymujemy pierwszą z naszych nierówności. $\square$

Dla $x = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

3.16. Wniosek. *Dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

3.17. Wniosek. *Dla każdego* $0 < \alpha \leqslant 1$ *i każdego* $x > 0$

$$\log(1+x) < \frac{1}{\alpha}\, x^{\alpha}.$$

Dowód. Mamy

$$\alpha \log(1+x) = \log(1+x)^\alpha < \log(1+x^\alpha) < x^\alpha,$$

skąd po podzieleniu przez α dostajemy żądaną nierówność. Skorzystaliśmy tu z nierówności $(1+x)^\alpha < 1+x^\alpha$. □

3.18. Lemat. *Ciąg*

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

jest zbieżny.

Dowód. Zwróćmy najpierw uwagę, że

$$\log(n+1) - \log n = \log(1+1/n) \longrightarrow 0,$$

więc wystarczy rozważać ciąg

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big). \end{aligned}$$

Z Wniosku 3.16 wynika, że ciąg $\{c_n\}$ jest rosnący, a ponadto

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big) < \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

więc jest również ograniczony. Jest zatem zbieżny, a przecież o to chodziło. □

Granicę ciągu $\{\gamma_n\}$ będziemy oznaczać przez γ i nazywać *stałą Eulera.* Zatem

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\right). \tag{3.19}$$

Dokładne oszacowanie stałej Eulera jest sprawą bardzo trudną. Wspomnijmy tu jedynie, że nie wiadomo nawet, czy jest ona liczbą wymierną, czy nie.

A oto interesujące zastosowanie ciągu Eulera.

3.20. *Jeżeli ciąg $a_n > 0$ spełnia warunek*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{a}{n+1}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

dla pewnego $a > 0$, to jest malejący i dąży do zera.

Dowód. Mamy

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1,$$

więc

$$\log a_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \log\Big(1 - \frac{a}{n}\Big) + \log a_1 \leqslant -a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \log a_1 < -a \log(n+1) + \log a_1,$$

skąd

$$a_n \leqslant a_1 (n+1)^{-a}.$$

□

Przechodzimy teraz do definicji funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych. Funkcje

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

nazywamy odpowiednio *cosinusem* i *sinusem hiperbolicznym.* Wprost z definicji łatwo wynikają następujące własności tych funkcji. *Cosinus* hiperboliczny jest funkcją parzystą, a *sinus* nieparzystą. Ponadto zachodzi wzór

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

zwany *jedynką hiperboliczną.* Nietrudno też spostrzec, że sinh jako suma dwóch funkcji ściśle rosnących jest funkcją ściśle rosnącą. Stąd i z jedynki hiperbolicznej wnioskujemy, że cosh jest funkcją ściśle rosnącą na półprostej $[0, \infty)$. Wreszcie z Twierdzenia 3.7 wynika, iż

$$\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wbrew pozorom podanie ścisłej analitycznej definicji funkcji trygonometrycznych nie jest wcale proste. Jednym z możliwych rozwiązań jest skorzystanie z następującego twierdzenia.

3.21. Twierdzenie. *Istnieje dokładnie jedna para funkcji*

$$s : \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}, \qquad c : \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}$$

o następujących własnościach. Dla wszystkich $x, y \in \boldsymbol{R}$

1. $s(x)^2 + c(x)^2 = 1,$

2. $s(x + y) = s(x)c(y) + s(y)c(x),$

3. $c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y),$

4. $0 < xc(x) < s(x) < x$ *dla* $0 < x < 1.$

Są to oczywiście niektóre z dobrze znanych własności funkcji trygononometrycznych *cosinusa* i *sinusa.* Nasze twierdzenie mówi, że wyszczególnione wyżej własności są aksjomatyczne w tym sensie, że można z nich wywieść wszystko, co skądinąd wiemy o funkcjach trygonometrycznych, a także że są one wystarczające do jednoznacznego określenia tych funkcji. Nawiasem mówiąc, ta druga część twierdzenia (jednoznaczność) przysparza więcej kłopotu. Część pierwsza jest bardziej elementarna, choć nieco żmudna. W szczególności dowodzi się, że

3.22. Wniosek. *Funkcje s i c mają wspólny okres podstawowy T, który jest liczbą niewymierną. Tradycyjnie oznaczamy $\pi = T/2$. Liczby postaci $k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$ to wszystkie miejsca zerowe funkcji s.*

Tak więc definicja liczby π ukryta jest we własnościach funkcji trygonometrycznych.

Nie będziemy dowodzić tego twierdzenia, ani nawet systematycznie wyprowadzać pozostałych własności funkcji trygonometrycznych. Podkreślmy jednak wyraźnie, że np. ciągłość funkcji trygonometrycznych, jak i okresowość wraz z wszystkimi innymi ich cechami są na mocy Twierdzenia 3.21 konsekwencją własności (1) – (4).

3.23. Lemat. *Ciąg $b_n = \sin n$ nie jest zbieżny do zera.*

Dowód. Pokażemy, że jest rzeczą niemożliwą, aby prawie wszystkie wyrazy naszego ciągu leżały w przedziale $(-1/2, 1/2)$. Przypuśćmy nie wprost, że

$$|\sin n| < 1/2, \qquad n \geqslant N.$$

Wtedy dla takich n
$$\cos^2 n = 1 - \sin^2 n > \frac{3}{4},$$
więc
$$\sin^2 n = \frac{\sin^2 2n}{4\cos^2 n} < \frac{1}{4 \cdot 3}.$$
Powtarzając to rozumowanie, pokazujemy, że
$$\sin^2 n < \frac{1}{4 \cdot 3^p}$$
dla każdego $p \in \boldsymbol{N}$, co pociąga $\sin n = 0$ dla $n \geqslant N$. Wtedy jednak $N = k\pi$ dla pewnego k, czyli $\pi = N/k$. To już jest sprzeczność, bo przecież π jest liczbą niewymierną. $\square$

Zadania

1. Udowodnij, że potęga o dodatniej podstawie i wykładniku wymiernym ma własności a) – c) z wykładu.

2. Udowodnij, że funkcja wykładnicza o podstawie $a > 1$ jest ściśle rosnąca.

3. Niech $a > 0$. Pokaż, że dla wszystkich $x, y \in \boldsymbol{R}$ jest $(a^x)^y = a^{xy}$.

4. Wyprowadź własności 1) – 3) funkcji logarytmicznej podane na wykładzie.

5. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że funkcja $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ jest ściśle rosnąca dla $x \geqslant 1$.

6. Niech $0 < a_n \to a > 0$ i $\boldsymbol{R} \ni x_n \to x$. Pokaż, że $a_n^{x_n} \to a^x$.

7. Czy $a_n^n \to 0$, jeśli $a_n \to 0$?

8. Wykaż, że $\sqrt[n]{e}$ jest liczbą niewymierną dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

9. Przeprowadź dyskusję zbieżności ciągu $u_n = (1 + \frac{1}{n^p})^{n^q}$ w zależności od $p, q > 0$.

10. Udowodnij, że dla każdego $\alpha > 0$ jest $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$.

11. Wyjaśnij schemat

$$\log n << n^{\frac{1}{k}} << n^k << 2^n << n! << n^n.$$

12. Udowodnij nierówność

$$e^y < 1 + \frac{y}{1 - \frac{1}{2}y} \qquad 0 < y < 2.$$

13. Udowodnij nierówność

$$\frac{x}{1 + \frac{1}{2}x} < \log(1 + x), \qquad x > 1.$$

14. Udowodnij nierówność $e^x \geqslant ex$ dla $x > 0$. Pokaż też, że równość zachodzi jedynie dla $x = 1$.

15. Niech $1 \neq a > 0$. Pokaż, że $a^a > a$ oraz $a^{1/a} \leqslant e^{1/e}$.

16. Wyprowadź nierówność $\log(1 + x) > \frac{x}{1+\frac{1}{2}x}$ dla $x > 0$.

17. Pokaż, że $\log(1 + y) < \frac{1}{\alpha} y^\alpha$ dla $y > 0$ i $0 < \alpha \leqslant 1$.

18. Pokaż, że

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

19. Pokaż, że $2/3 < \log 2 < 2/e$. W tym celu skorzystaj m.in. z nierówności $e^x > ex$.

20. Pokaż, że $e^{e^n} >> e^n$ oraz $\log\log n << \log n$.

21. Wykaż, że $\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

22. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{a}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < 1 + \frac{a}{n}, \qquad a < 1,\ 0 \neq n \in \boldsymbol{Z}.$$

23. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{a}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < 1 + \frac{a}{n-a}, \qquad n > a > 1 \text{ lub } n < 0.$$

24. Wiedząc, że $a_n \to a$, oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n.$$

25. Udowodnij że funkcje $\sinh : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ i $\cosh : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ są ściśle rosnące i wyprowadź wzory na funkcje odwrotne:
$$\sinh^{-1} y = \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right), \qquad \cosh^{-1} y = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right).$$

26. Udowodnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ stała Eulera γ spełnia nierówności
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1) < \gamma < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n.$$

27. Niech $0 < b < 1$. Pokaż, że dla każdego $0 < a < b$
$$1+\frac{a}{n} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^b$$
dla dostatecznie dużych n.

28. Udowodnij, że dla każdego $p > 0$ ciąg
$$a_n = \frac{\log^p n}{n}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$
jest (począwszy od pewnego miejsca) ściśle malejący.

29. Niech $b > a > 0$. Uzasadnij nierówności
$$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}, \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b,$$
korzystając z nierówności już znanych.

30. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$
$$\log n \leqslant n(n^{1/n}-1) \leqslant n^{1/n}\log n,$$
a wobec tego
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^{1/n}-1)}{\log n} = 1.$$

31. Udowodnij, że
$$\log 4 = 1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(4k^2-1)}.$$

4. Granica i ciągłość funkcji

W niniejszym rozdziale wprowadzamy pojęcie granicy funkcji, definiujemy funkcje ciągłe i omawiamy ich podstawowe własności.

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a,b) lub na zbiorze $(a,b)\setminus\{x_0\}$, gdzie $x_0 \in (a,b)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę właściwą* równą g, jeśli dla każdego ciągu $x_0 \neq x_n \in (a,b)$ zbieżnego do x_0 zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Ta definicja pochodzi od Heinego.

4.1. Przykład. Tytułem przykładu, zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \tag{4.2}$$

gdyż jeśli $0 \neq x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to również $|x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, a skoro

$$|\sin x_n| \leqslant |x_n|,$$

to także

$$\sin x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wynika stąd natychmiast, że

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Rzeczywiście, jeśli $0 \neq x_n \to 0$, to od pewnego miejsca $|x_n| < \frac{\pi}{2}$ i wtedy

$$\cos x_n = (1-\sin^2 x_n)^{\frac{1}{2}} \to 1.$$

4.3. Przykład. Następny przykład ilustruje sytuację, gdy punkt x_0, w którym obliczamy granicę, nie leży w dziedzinie funkcji. Niech

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Obliczymy granicę tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego $0 \neq |x| < 1$ mamy

$$|\sin x| < |x| < \frac{|\sin x|}{\cos x},$$

a zatem

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Weźmy teraz dowolny ciąg $0 \neq x_n \to 0$. Ponieważ dla dużych n

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

oraz $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4.4. Przykład. Rozważmy jeszcze funkcję

$$f(x) = x\sin(1/x), \qquad x \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0,$$

gdyż dla dowolnego ciągu $0 \neq x_n \to 0$ mamy

$$|x_n \sin(1/x_n)| = |x_n|\cdot|\sin(1/x_n)| \leqslant |x_n| \to 0.$$

4.5. Przykład. Kolejny przykład to funkcja $f\colon \boldsymbol{R} \to [0,1)$ zadana wzorem
$$f(x) = \mathbf{m}(x).$$
Nie ma ona granicy w żadnym punkcie $x_0 = c \in \boldsymbol{Z}$, gdyż na przykład dla ciągów
$$x_n = c - \frac{1}{2n} \to c, \qquad y_n = c + \frac{1}{2n} \to c$$
otrzymujemy
$$f(x_n) = \mathbf{m}\Big(c - \frac{1}{2n}\Big) = 1 - \frac{1}{2n} \to 1,$$
$$f(y_n) = \mathbf{m}\Big(c + \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n} \to 0.$$
W podobny sposób pokażemy, że funkcja
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},$$
nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$. Rozważmy bowiem ciągi
$$x_n = \Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big)^{-1} \to 0, \qquad y_n = (2\pi n)^{-1} \to 0.$$
Otrzymujemy
$$f(x_n) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = 1,$$
oraz
$$f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0,$$
a zatem
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

4.6. Przykład. Sprawdzimy jeszcze, że dla $a > 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$
Mamy bowiem
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x\log a} - 1}{x} = \log a + \frac{r_2(x\log a)}{x},$$
gdzie dla $|x|$ dostatecznie bliskich zera $|r_2(x\log a)| \leqslant x^2\log^2 a$, co pokazuje, że drugi składnik sumy dąży do zera.

4.7. Przykład. Niech $0 < a \leqslant b$. Wtedy dla każdego $x \neq 0$
$$a \leqslant \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \leqslant b,$$
więc wyrażenie stojące w środku, oznaczmy je przez $S_x(a,b)$, można uważać za rodzaj średniej liczb a, b. I rzeczywiście,
$$S_{-1}(a,b) = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1}, \qquad S_1(a,b) = \frac{a+b}{2}$$
są odpowiednio średnią harmoniczną i arytmetyczną tych liczb. Pokażemy, że
$$\lim_{x\to 0} S_x(a,b) = \sqrt{ab}.$$
W tym celu zauważmy najpierw, że
$$S_x(a,b) = a\left(\frac{1 + c^x}{2}\right)^{1/x} = aF(x),$$

gdzie $c = b/a$. Mamy więc

$$F(x) = \exp\Big(\frac{1}{x}\log\frac{1+c^x}{2}\Big),$$

gdzie wykładnik spełnia nierówności

$$\frac{c^x-1}{x(c^x+1)} < \frac{1}{x}\log\frac{1+c^x}{2} < \frac{c^x-1}{2x}.$$

Na mocy poprzedniego przykładu obie skrajne funkcje dążą do $\frac{\log c}{2}$, więc

$$\lim_{x\to 0} F(x) = e^{\frac{\log c}{2}} = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

a stąd natychmiast wynika nasza teza.

Podamy teraz inną definicję granicy funkcji w punkcie, która, jak pokażemy za chwilę, okaże się równoważna. Definicję tę sformułował Cauchy.

Niech $x_0 \in (a,b)$ i $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ lub $f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \boldsymbol{R}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę właściwą* równą g, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in (a,b)\Big(\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \,\Big).$$

Mówiąc obrazowo, funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g, jeżeli wartości funkcji są dowolnie bliskie liczbie g, pod warunkiem, że argumenty są dostatecznie bliskie x_0.

4.8. *Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą $g \in \boldsymbol{R}$ w sensie Heinego dokładnie wtedy, gdy ma ją w sensie Cauchy'ego.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja f ma granicę g w sensie Cauchy'ego równą g. Weźmy dowolny ciąg $x_n \neq x_0$ elementów dziedziny D funkcji f zbieżny do punktu x_0. Chcemy pokazać, że

$$f(x_n) \to g.$$

Ustalmy w tym celu dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Na mocy definicji Cauchy'ego istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon,$$

natomiast ze zbieżności ciągu $\{x_n\}$ wynika, że istnieje taka liczba $N \in \boldsymbol{N}$, że

$$|x_n - x_0| < \delta$$

dla $n > N$. Wobec tego dla takich n

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon.$$

Przypuśćmy teraz, że funkcja nie ma granicy w sensie Cauchy'ego równej g. Wtedy istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta_n = \frac{1}{n}$ możemy znaleźć $x_0 \neq x_n \in D$, takie że

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad |f(x_n) - g| > \varepsilon.$$

Pierwsza nierówność mówi, że ciąg $\{x_n\}$ jest, zbieżny do x_0, a druga, że ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ nie jest zbieżny do g, co oznacza, że warunki granicy w sensie Heinego równej g też nie są spełnione. $\square$

4.9. Przykład. Zilustrujemy obie definicje na przykładzie granicy w punkcie $x_0 = 0$ funkcji
$$f(x) = \sin x^2.$$
Weźmy dowolny ciąg liczb niezerowych $\{x_n\}$ zbieżny do zera. Wtedy również
$$x_n^2 \to 0,$$
a stąd, na mocy równości (4.2),
$$\sin x_n^2 \to 0,$$
co oznacza, że
$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$
zgodnie z definicją Heinego.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ dla każdego x
$$|\sin x^2| < |x|^2,$$
więc jeżeli $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, to
$$|\sin x^2| < |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$
co oznacza, że
$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$
zgodnie z definicją Cauchy'ego.

4.10 (Arytmetyka granic). *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to także funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ mają w tym punkcie granice i*
$$\lim_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$
Ponadto, jeśli $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $1/g$ jest określona w bliskości punktu x_0 i
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie, przy którym warto pamiętać o analogicznej arytmetyce granic ciągów. Zauważmy jeszcze, że w dowolnym punkcie granica funkcji stałej określonej na całej prostej jest równa jej wartości. Stąd natychmiast otrzymujemy następujące wnioski.

4.11. Wniosek. *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to*
$$\lim_{x\to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},$$
o ile $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

4.12. Przykład. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$
Wynika to z faktu, że dla $x \neq 1$
$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$
gdzie każdy ze składników po prawej dąży do 1, gdy $x \to 1$.

4.13. Przykład. Poprzedni przykład można przy pewnym nakładzie pracy uogólnić. Niech $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ i niech $\beta \neq 0$. Wtedy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Rzeczywiście, na mocy własności funkcji wykładniczej

$$\frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{e^{\alpha\log x} - 1}{e^{\beta\log x} - 1} = \frac{\alpha\log x + r_2(\alpha\log x)}{\beta\log x + r_2(\beta\log x)},$$

gdzie $|r_2(y)| \leqslant y^2$ dla $|y| \leqslant 1$, więc

$$\frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{\alpha + \frac{r_2(\alpha\log x)}{\log x}}{\beta + \frac{r_2(\beta\log x)}{\log x}},$$

gdzie

$$\left|\frac{r_2(\gamma\log x)}{\log x}\right| \leqslant |\gamma||\log x|$$

dąży do zera, gdy x dąży do 1, dla $\gamma = \alpha$ i $\gamma = \beta$, co dowodzi naszej tezy.

4.14. Przykład. Granica w punkcie $x_0 = 0$ funkcji

$$f\colon \boldsymbol{R}\setminus\{0\} \ni x \longmapsto \frac{\cos x - 1}{x} \in \boldsymbol{R}$$

istnieje i wynosi zero. Mamy bowiem

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\sin(x/2)$$

i ponieważ pierwszy czynnik dąży do 1, a drugi do 0, to wobec (4.10) otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Zdefiniujmy teraz granice jednostronne funkcji. Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ i niech $x_0 \in (a,b]$. Mówimy, że f ma *granicę właściwą lewostronną* w punkcie x_0 równą α, jeśli dla każdego ciągu $x_n \in (a, x_0)$

$$f(x_n) \to \alpha$$

(wersja Heinego) lub równoważnie

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in (a, x_0)\Big(\,|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\,\Big).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \alpha.$$

Zauważmy, że to, czy funkcja jest określona w $[x_0, b)$, nie ma żadnego znaczenia. Tak więc granica lewostronna jest dobrze zdefiniowana dla $x_0 \in (a,b]$.

W analogiczny sposób definiujemy *granicę prawostronną* funkcji w punkcie $x_0 \in [a,b)$, którą oznaczamy przez $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

4.15. Przykład. Obliczmy obie granice jednostronne części ułamkowej w punkcie $x_0 = 0$. Ponieważ dla dowolnego ciągu liczb ujemnych $\{x_n\}$ zbieżnego do zera

$$x_n > -1,$$

dla n większych od pewnego N, więc dla takich n

$$\mathbf{m}(x_n) = x_n - [x_n] = x_n + 1,$$

skąd

$$\mathbf{m}(x_n) \to 1,$$

czyli

$$\lim_{x\to 0-} \mathbf{m}(x) = 1.$$

Podobnie, w dowolnym ciągu liczb dodatnich $\{x_n\}$ zbieżnym do zera, od pewnego miejsca wyrazy są mniejsze od 1, więc ich część całkowita wynosi 0. Oznacza to, że dla dostatecznie dużych n

$$\mathbf{m}(x_n) = x_n,$$

czyli

$$\lim_{x\to 0+} \mathbf{m}(x) = 0.$$

4.16. *Jeśli funkcja f ma w pewnym punkcie x_0 obie granice jednostronne oraz*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą α.

Dowód. Posłużymy się definicją Cauchy'ego. Niech będzie dany $\varepsilon > 0$. Z założenia wynika, że istnieją $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 >$, takie że

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \qquad |f(y) - \alpha| < \varepsilon,$$

o ile $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ i $x_0 < y < x_0 + \delta_2$. Niech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Z powyższego widać natychmiast, że jeśli $0 < |z - x_0| < \delta$, to $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. □

4.17. Przykład. Pokażemy, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < 0, \\ \sinh x & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases}$$

ma granicę w zerze. Istotnie, skoro dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do zera $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^0 = 1$, więc

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1,$$

a stąd

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sinh x = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0.$$

Ponadto

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sin x = \lim_{x\to 0} \sin x = 0,$$

a zatem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

4.18. Przykład. Sprawdzimy, że

$$\lim_{x\to 0+} x \log x = 0.$$

Rzeczywiście, niech $(0,1) \ni x_n \to 0$. Korzystając z nierówności

$$\log(1+z) < \frac{1}{\alpha}\, z^\alpha, \qquad z > 0, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

dla $\alpha = 1/2$, widzimy, że

$$|x_n \log x_n| = \bigl|x_n \log(1/x_n)\bigr| \leqslant 2x_n\sqrt{1/x_n} \leqslant 2\frac{x_n}{\sqrt{x_n}} = 2\sqrt{x_n},$$

skąd natychmiast wynika nasza teza.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $[a,b]$ jest *ciągła w punkcie* $x_0 \in [a,b]$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset [a,b]$

$$x_n \to x_0 \quad \text{implikuje} \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze D jest *ciągła w przedziale* $I \subseteq D$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

4.19. Przykład. W rozdziale 3 pokazaliśmy, że

$$x_n \to x \quad \text{implikuje} \quad \exp(x_n) \to \exp(x).$$

Oznacza to, że funkcja wykładnicza

$$\boldsymbol{R} \ni x \longmapsto \exp(x)$$

jest ciągła w każdym punkcie $x \in \boldsymbol{R}$.

Z (4.10) wynika natychmiast

4.20. *Jeżeli funkcje f, g są ciągłe w pewnym punkcie x_0 należącym do dziedzin obu funkcji, to funkcje $f+g$ oraz $f \cdot g$ także są ciągłe w tym punkcie.*

4.21. Przykład. Wielomian jest funkcją ciągłą na $\boldsymbol{R}$. Istotnie, każdy wielomian jest funkcją postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

wystarczy zatem sprawdzić, że dla dowolnych liczb $\alpha \in \boldsymbol{R}$ oraz $n \in \boldsymbol{N}$ funkcja

$$\boldsymbol{R} \ni x \longmapsto \alpha x^n$$

jest ciągła. Jeszcze raz korzystając z powyższego faktu, widzimy, że cała rzecz sprowadza się więc do ciągłości funkcji stałej i tożsamościowej $x \mapsto x$, a to jest oczywiste.

4.22. Przykład. Jak wiemy, funkcja logarytmiczna $\log : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ jest funkcją odwrotną do wykładniczej, która jest ciągła. To pozwala wnioskować o ciągłości funkcji *log*. Rzeczywiście, niech $x_n \to x$ wraz z $n \to \infty$, gdzie x , $x_n > 0$. Ciąg $y_n = \log x_n$ jest ograniczony. Wystarczy zatem, że pokażemy, iż dla każdego zbieżnego do y podciągu $\{y_{n_k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ jest $y = \log x$.

Istotnie, na mocy naszych założeń

$$x_{n_k} = e^{y_{n_k}},$$

gdzie ciąg po lewej jest zbieżny do x, a ten po prawej do e^y. Zatem $x = e^y$, czyli $y = \log x$.

W dowodzie Twierdzenia 4.39 poniżej jeszcze raz skorzystamy z tego rozumowania, aby uogólnić powyższy fakt. Tam też Czytelnik znajdzie więcej szczegółów.

4.23. Lemat. *Niech będą dane ciągłe funkcje $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$. Jeśli $f(w) = g(w)$ dla wymiernych $w \in [a,b]$, to $f = g$.*

Dowód. Niech $x \in [a,b]$. Niech $w_n \in [a,b]$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x. Wtedy
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = g(x),$$
więc $f = g$. □

4.24. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, tzn. jeśli $f\colon I \to J$, $g\colon J \to K$ oraz f jest ciągła w punkcie $x \in I$ a g w punkcie $y = f(x)$, to funkcja $g \circ f\colon I \to K$ jest ciągła w x.*

Dowód. Dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subseteq I$ zbieżnego do x, z ciągłości funkcji f w punkcie x wynika, że
$$f(x_n) \to f(x) = y,$$
a stąd wobec ciągłości funkcji g w punkcie y
$$g(f(x_n)) \to g(y) = g(f(x)).$$
Pokazaliśmy więc, że dla każdego ciągu $\{x_n\} \subseteq I$
$$x_n \to x \quad \text{implikuje} \quad g \circ f(x_n) \to g \circ f(x),$$
co zgodnie definicją Heinego oznacza ciągłość funkcji $g \circ f$ w punkcie x. □

4.25. Przykład. Na mocy powyższego faktu, funkcja
$$f\colon (0,\infty) \ni x \longmapsto x^x = \exp(x \log x)$$
jest ciągła jako złożenie ciągłej funkcji wykładniczej z funkcją
$$x \longmapsto x \log x,$$
która jest iloczynem dwu funkcji ciągłych; jest więc także ciągła. Ponadto, możemy położyć w zerze taką wartość, aby przedłużenie f_1 funkcji f było nadal funkcją ciągłą. Mianowicie, z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że
$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = 1,$$
a stąd
$$f_1(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
jest ciągła na $[0,\infty)$.

4.26. Przykład. Funkcje trygonometryczne są ciągłe na swoich dziedzinach. Oczywiście wystarczy sprawdzić ciągłość funkcji *sinus* i *cosinus*. Ustalmy zatem dowolnie punkt $x_0 \in \boldsymbol{R}$ i weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do niego. Wtedy
$$h_n = x_n - x_0 \to 0,$$
skąd (na mocy (4.10))
$$\begin{aligned} \sin x_n &= \sin(h_n + x_0) \\ &= \sin h_n \cdot \cos x_0 + \cos h_n \cdot \sin x_0 \to \sin x_0 \end{aligned}$$
i analogicznie
$$\begin{aligned} \cos x_n &= \cos(h_n + x_0) \\ &= \cos h_n \cdot \cos x_0 - \sin h_n \cdot \sin x_0 \to \cos x_0. \end{aligned}$$

4.27. Przykład. Ciekawym przykładem funkcji, która ma wiele punktów ciągłości, jak i nieciągłości, jest *funkcja Riemanna*.

4.28. Przykład. Niech f będzie funkcją określoną na całej prostej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \boldsymbol{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } (p,q) = 1. \end{cases}$$

Pokażemy, że f jest ciągła dokładnie w punktach niewymiernych. Istotnie, jeśli $x_n \to x \notin \boldsymbol{Q}$, to wartości $f(x_n)$ są równe 0, gdy x_n są niewymierne, i równe mianownikom x_n, gdy x_n są wymierne. Ponieważ wartość graniczna x jest niewymierna, mianowniki te dążą do nieskończoności, co pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x).$$

Jeśli natomiast $x \in \boldsymbol{Q}$, to $f(x) \neq 0$, i istnieje ciąg liczb niewymiernych, np. $x_n = x + \frac{e}{n}$ zbieżny do x. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x).$$

Pamiętamy, że kresy górny i dolny zostały zdefiniowane dla podzbiorów $E \subset \boldsymbol{R}$ ograniczonych odpowiednio z góry i z dołu. Wygodnie będzie rozszerzyć związaną z tym notację, tak aby objąć nią także zbiory nieograniczone. W związku z tym przyjmiemy następującą definicję:

Jeśli $\boldsymbol{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z góry, to będziemy mówić, że E ma *kres górny niewłaściwy* i pisać $\sup E = \infty$. Analogicznie, jeśli $\boldsymbol{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z dołu, to będziemy mówić, że E ma *kres dolny niewłaściwy* i pisać $\inf E = -\infty$. Definicja ta pozwoli nam na przykład na pisanie $\sup E < \infty$, co jest oczywiście równoważne powiedzeniu, że zbiór E jest ograniczony od góry. Podobnie fakt, że zbiór E jest ograniczony od dołu możemy wyrazić krótko, pisząc $\inf E > -\infty$.

Mówimy, że *funkcja* $f\colon \emptyset \neq D \to \boldsymbol{R}$ *jest ograniczona z góry* (z dołu), jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry (z dołu), tzn.

$$\sup f(D) = \sup_{x\in D} f(x) < \infty \qquad \big(\inf f(D) = \inf_{x\in D} f(x) > -\infty\big).$$

4.29. Twierdzenie. *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

Dowód. Przypuśćmy, że

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła i nieograniczona. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ taki, że

$$|f(x_n)| \to \infty. \tag{4.30}$$

Ponieważ $\{x_n\}$ ograniczony, więc na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ zbieżny do pewnego x_0. Skoro

$$a \leqslant x_{n_k} \leqslant b, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

to również $a \leqslant x_0 \leqslant b$, tzn. x_0 należy do dziedziny f, i wobec ciągłości f

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

co przeczy (4.30).

Pozostaje dowieść, że f przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Niech

$$\alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Z definicji kresu wynika, że istnieje ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$, taki że

$$f(x_n) \to \alpha.$$

Podobnie jak poprzednio wybieramy podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a, b]$. Wtedy

$$f(x_{n_k}) \to \alpha,$$

a z ciągłości funkcji f w punkcie x_0

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

skąd $\alpha = f(x_0)$.

Analogicznie pokazujemy, że istnieje $x_1 \in [a, b]$ takie, że

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

co kończy dowód. □

4.31. Twierdzenie (Darboux). *Jeśli $f\colon [a, b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła oraz*

$$f(a) < y < f(b),$$

to istnieje $c \in (a, b)$, takie że $f(c) = y$.

Dowód. Niech

$$E = \{x \in [a, b]\colon\ f(x) < y\}.$$

Skoro $a \in E$ i $b \notin E$, więc $\emptyset \neq E \subset [a, b)$. Jeśli przyjmiemy, że

$$c = \sup E,$$

to $a \leqslant c \leqslant b$ i istnieje ciąg $x_n \in E$, taki że

$$x_n \to c.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f(x_n) \to f(c),$$

a ponieważ

$$f(x_n) < y, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

więc

$$f(c) \leqslant y, \qquad c < b. \tag{4.32}$$

Wybierzmy z odcinka $[a, b]$ ciąg zbieżny do c od góry, np.

$$z_n = c + (b - c)/n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wtedy

$$f(z_n) \to f(c) \quad \text{oraz} \quad f(z_n) \geqslant y, \quad n \in \boldsymbol{N},$$

więc wobec (4.32)

$$f(c) \geqslant y,$$

co dowodzi tezy. □

4.33. *Remark.* Oczywiście twierdzenie Darboux pozostaje prawdziwe, gdy $f(b) < y < f(a)$. Niech bowiem $g = -f$ i $z = -y$. Wtedy $g(a) < z < g(b)$ i istnieje $a < c < b$, takie że $g(c) = z$, czyli $f(c) = y$.

4.34. Wniosek. *Obrazem odcinka domkniętego przez funkcję ciągłą jest odcinek domknięty. Dokładniej, jeśli*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła, to

$$f\big([a,b]\big) = \big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\ ,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\big].$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 4.29 funkcja f jest ograniczona i osiąga swoje kresy, czyli

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$$

oraz

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

dla pewnych $x_1, x_2 \in [a,b]$. Oczywiście

$$f\big([a,b]\big) \subseteq \big[f(x_1), f(x_2)\big]. \tag{4.35}$$

Na mocy twierdzenia Darboux dla każdego

$$y \in \Big(f(x_1)\ ,\ f(x_2)\Big)$$

istnieje $c \in (x_1, x_2)$, takie że $f(c) = y$, więc

$$\big[f(x_1)\ ,\ f(x_2)\big] \subseteq f\big([a,b]\big),$$

co wobec (4.35) daje tezę. □

4.36. Wniosek. *Jeśli*

$$f\colon\ (a,b) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła i różnowartościowa, to jest ściśle monotoniczna.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że f nie jest monotoniczna, tzn. istnieją

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b, \tag{4.37}$$

takie że

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) > f(x_3),$$

albo

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) < f(x_3).$$

Bez zmniejszania ogólności załóżmy, że zachodzi pierwsza z koniunkcji. Wtedy istnieje

$$y \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big),$$

skąd na mocy twierdzenia Darboux istnieją $c_1 \in (x_1, x_2)$, $c_2 \in (x_3, x_4)$, takie że

$$f(c_1) = y = f(c_2),$$

co wobec (4.37) oznacza, że $c_1 \neq c_2$ i tym samym jest sprzeczne z założeniem różnowartościowości funkcji f. □

I jeszcze jeden wniosek z twierdzenia Darboux.

4.38. Wniosek (o punkcie stałym). *Niech* $f : [a,b] \to [a,b]$ *będzie ciągła. Istnieje* $c \in [a,b]$, *takie że* $f(c) = c$.

Dowód. Rozważmy funkcję $g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ zadaną wzorem $g(x) = x - f(x)$. Chcemy pokazać, że g ma miejsce zerowe. Oczywiście, $g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$, więc albo któryś z punktów a, b jest miejscem zerowym, albo

$$g(a) < 0 < g(b)$$

i wtedy na mocy własności Darboux istnieje $c \in (a,b)$, takie że $g(c) = 0$, bo przecież g jest funkcją ciągłą. Ale skoro tak, to $f(c) = c$, a o to nam przecież chodziło. □

4.39. Twierdzenie. *Jeśli*

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

jest ciągłą bijekcją, to

$$f^{-1}\colon\ [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

jest również ciągła.

Dowód. Weźmy dowolny ciąg $\{y_n\} \subseteq [c,d]$ zbieżny do pewnego $y \in [c,d]$. Skoro

$$\{f^{-1}(y_n)\} \subseteq [\,a,b\,],$$

to na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wybrać podciąg zbieżny

$$f^{-1}(y_{n_k}) \to x.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f\big(\,f^{-1}(y_{n_k})\,\big) \to f(x),$$

a ponieważ

$$f\big(\,f^{-1}(y_{n_k})\,\big) = y_{n_k} \to y,$$

więc $y = f(x)$, czyli $x = f^{-1}(y)$.

Skoro, jak pokazaliśmy, dowolny podciąg zbieżny ciągu ograniczonego $\{f^{-1}(y_n)\}$ jest zbieżny do tej samej liczby $f^{-1}(y)$, to

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y),$$

co oznacza, że funkcja f^{-1} jest ciągła. □

Podaliśmy już w obu wersjach, Heinego i Cauchy'ego, precyzyjne definicje granicy liczbowej w punkcie oraz granic jednostronnych liczbowych w punkcie. W podobny sposób formułuje się definicję granicy liczbowej w $+\infty$ i w $-\infty$. I tak, dla funkcji f o dziedzinie $D \supseteq (-\infty, a)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, mamy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \\
\iff\quad & \forall\,\{x_n\} \subseteq D \quad \big(x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to \alpha\big) \\
\iff\quad & \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,K < a \quad \forall\,x < K |f(x) - \alpha| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Obok granic liczbowych (czyli właściwych) mamy jeszcze odpowiadające im granice niewłaściwe. I tak, mówimy, że funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ ma *granicę niewłaściwą* w punkcie x_0 równą $\pm\infty$, jeśli dla każdego ciągu $x_0 \not\in (a,b)$

$$x_n \to x_0 \quad \text{implikuje} \quad f(x_n) \to \pm\infty.$$

Są jeszcze granice właściwe i niewłaściwe w nieskończoności, gdzie zbieżność $x \to x_0$ zastępuje się zbieżnością $x \to \pm\infty$. Ponadto trzeba jeszcze wspomnieć granice jednostronne właściwe i niewłaściwe w nieskończoności. Czytelnik zechce sam sformułować odpowiednie definicje w wersji Heinego i Cauchy'ego. Dla przykładu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\
\iff\quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to -\infty\big) \\
\iff\quad & \forall\,K<0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \big(|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<K\big)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \\
\iff\quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty\big) \\
\iff\quad & \forall\,K<0 \quad \exists\,M>0\,\forall\,x>M \quad f(x)<K.
\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}$.

2. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to a}\frac{\log\frac{x}{a}}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$.

3. Oblicz granice $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, gdzie $n,m\in\boldsymbol{N}$.

4. Oblicz granicę $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$ dla $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$, $\beta\neq 0$.

5. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$, $\lim_{x\to 0+}\frac{[x]}{x}$.

6. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{|x|}}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}(\log\frac{1}{x})^{\log x}$.

7. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\log(1+x)}$.

8. Oblicz granice: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$, $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, $\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

9. Oblicz granice $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, gdzie $a>b$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

10. Oblicz granice $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\log|x|$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\lim_{x\to\pi/2-}\operatorname{tg}x$, $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$, $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}$.

11. Oblicz $\lim_{x\to-\infty}\log(e+1/x)$, $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$. $\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x$, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$.

12. Znajdź granice jednostronne funkcji $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$ w punkcie $x=0$.

13. Pokaż, że dla każdego niestałego wielomianu f jest $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$.

14. Udowodnij, że każdy wielomian φ stopnia 3 przyjmuje wartości różnych znaków. Korzystając z własności Darboux, wywnioskuj, że φ ma pierwiastek.

15. Podaj przykład wielomianu stopnia 4, który nie ma pierwiastka. A co powiesz o wielomianach stopnia 5?

16. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{\sin(\sin ax)} & \text{dla } x<0;\\ b & \text{dla } x=0;\\ x+c & \text{dla } x>0.\end{cases}$$

Dla jakich a,b,c funkcja ta jest ciągła w 0?

17. Pokaż, że $\log 2<\sqrt{3}-1$ oraz $\log 3<\sqrt{5}-1$.

18. Znajdź granice

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{7/2}-1}{x^{5/2}-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-x^\beta}{x^\gamma-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1-\alpha\log x}{(x-1)^2},$$

gdzie $\alpha,\beta,\gamma>0$. Pamiętaj, że $e^z=1+z+z^2/2+r_3(z)$, gdzie $|r_3(z)|\leqslant\frac{1}{4}|z|^3$ dla $|z|\leqslant 1$.

19. Oblicz

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\qquad x>0,$$

i rozstrzygnij, czy φ jest funkcją ciągłą. Narysuj jej wykres.

20. Pokaż, że funkcje $f(x)=\sin\Big(\mathbf{m}(x)\pi\Big)$ i $g(x)=[x]\sin\pi x$ są ciągłe.

21. Pokaż, że funkcje $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ i $G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ są ciągłe w każdym punkcie, w którym zarówno f, jak i g jest ciągła.

22. Pokaż, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma w przedziale $0 < x < 1$ przynajmniej jedno rozwiązanie.

23. Dana jest funkcja ciągła $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $f(x) = 0$ dla $x \in \boldsymbol{Q}$. Znajdź jej wartości dla argumentów niewymiernych.

24. Korzystając z twierdzenia Darboux pokaż, że równanie $x2^x = 1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

25. Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $b > 0$ i c są ustalone. Pokaż, że dla dostatecznie małych $|a| > 0$ równanie to ma dwa pierwiastki $x_1(a) < x_2(a)$. Znajdź $\lim_{a\to 0} x_1(a)$ i $\lim_{a\to 0} x_2(a)$.

26. Udowodnij, że funkcja $x \to x^{\frac{1}{1-x}}$ jest ściśle rosnąca na $(0, 1)$. W tym celu zauważ, że $x = 1 + (x - 1)$ i zastosuj nierówność Bernoulliego.

27. Pokaż, że funkcja $x \to x^x$ przyjmuje na odcinku $(0, 1]$ wartość minimalną dla $x = 1/e$. W tym celu zauważ, że funkcja $(1/x)^{1/x}$ na $[1, \infty)$ ma ten sam zbiór wartości i skorzystaj z nierówności $x^{1/x} \leqslant e^{1/e}$.

28. Znajdź wszystkie $x, y \in \boldsymbol{R}$ spełniające równanie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$.

29. Znajdź wszystkie punkty nieciągłości funkcji $x \to \mathbf{m}\Big((-1)^{[x]}x\Big)$ i naszkicuj jej wykres.

30. Udowodnij, że jedyną funkcją ciągłą $f : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ spełniającą warunki

$$f(x + y) = f(x)f(y), \qquad f(1) = e$$

jest funkcja $f(x) = e^x$.

31. Niech będą dane liczby dodatnie a i b. Niech $f(0) = \sqrt{ab}$ oraz

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}. \qquad x \neq 0,$$

Pokaż, że f jest funkcją ciągłą. Zinterpretuj wartości $f(-1), f(0), f(1)$.

32. Pokaż, że $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ dla $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

33. Pokaż, że $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

34. Udowodnij, że funkcja $F(x) = \mathbf{m}(x)^{\mathbf{m}(x)}$ jest ciągła.

35. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\Big(1 + \sin x\Big)}{\sin\Big(\log(1 + x)\Big)}.$$

36. Wykaż, że a) równanie

$$e^x = 3x$$

ma rozwiązanie $0 < x_1 < 1$ i rozwiązanie $1 < x_2 < 2$, b) równanie

$$e^x = 2x$$

nie ma rozwiązań na $\boldsymbol{R}$.

5. Szeregi liczbowe

Niech będzie dany nieskończony ciąg liczbowy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ciąg

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy ciągiem *sum częściowych* ciągu $\{a_k\}$. Jeżeli ciąg $\{A_n\}$ jest zbieżny, mówimy, że ciąg $\{a_k\}$ jest *sumowalny*, a granicę

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

nazywamy jego *sumą* i oznaczamy przez $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tak więc z definicji

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

o ile ciąg $\{a_k\}$ jest sumowalny.

5.1. *Uwaga.* Tradycyjna terminologia jest trochę inna. Za pomocą symbolu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

oznacza się nie tylko sumę ciągu $\{a_k\}$, gdy jest on sumowalny. Używa się go także w przypadku ciągów niesumowalnych dla zaznaczenia samej *intencji* badania sumowalności ciągu. I tak zamiast *ciąg* $\{a_k\}$ *jest sumowalny* bądź *niesumowalny* mówi się *szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny* bądź *rozbieżny*, a zamiast *suma nieskończonego ciągu* $\{a_k\}$ mówi się *suma szeregu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Podobnie sformułowanie *dany jest szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wyraża to samo, co *dany jest ciąg* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$*, a my będziemy starali się rozstrzygnąć, czy jest on sumowalny i ewentualnie obliczyć jego sumę.*

Terminologia ta może wydawać się nieprecyzyjna, ale jest tak wygodna i tak powszechnie stosowana, że warto przy niej pozostać. W chwilach pomieszania, które często zdarzają się adeptom analizy, można zawsze sięgnąć do ścisłych definicji podanych wyżej.

Badanie zbieżności szeregów jest w istocie badaniem zbieżności ciągów specjalnego typu. Czytelnik przypomina sobie, że tego typu ciągi występowały już wcześniej w naszych rozważaniach. Oto przykłady szeregów zbieżnych:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$, o ile $|q| < 1$,

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$,

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$,

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$,

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log(1 + \frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(1 + \frac{1}{k}) = \gamma$.

Wiemy również, że następujące szeregi są rozbieżne:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$,

2. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$ dla $|q| \geqslant 1$,

3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$,

Ten ostatni szereg jest rozbieżny, bo jego sumy częściowe $A_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ nie mają granicy.

Wiemy, że ciąg zbieżny jest ograniczony. Dla szeregu oznacza to:

5.2. *Ciąg sum częściowych szeregu zbieżnego jest ograniczony.*

Zwróćmy uwagę, że szereg (3) z wyżej wymienionych szeregów rozbieżnych ma ograniczone sumy częściowe.

5.3. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy ciąg* $\{A_n\}$ *jego sum częściowych jest ograniczony.*

Dowód. Rzeczywiście $a_k \geqslant 0$ pociąga $A_{n+1} \geqslant A_n$. Skoro ciąg sum częściowych jest rosnący, jego zbieżność jest równoważna ograniczoności. □

Jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ma wyrazy nieujemne, to w myśl powyższego faktu ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do wartości liczbowej lub rozbieżny do nieskończoności. Dlatego będziemy pisać

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

aby krótko wyrazić zbieżność takiego szeregu, lub

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty,$$

aby zaznaczyć jego rozbieżność. Notacji tej *nie wolno* stosować do szeregów o wyrazach niekoniecznie nieujemnych!

5.4. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dowód. Mamy

$$a_n = A_n - A_{n-1}, \qquad n \geqslant 2,$$

gdzie A_n oznacza n-tą sumę częściową, skąd natychmiast wynika teza. □

Nie należy jednak sądzić, że warunek $a_k \to 0$ jest wystarczający dla zbieżności szeregu. Świadczy o tym choćby szereg (1) z umieszczonej wyżej listy szeregów rozbieżnych.

Ostatni dowód nasuwa pewne ważne spostrzeżenie. Powiedzieliśmy wcześniej, że szeregi to ciągi specjalnego typu. Nie jest to całkiem ścisłe, bo sugeruje jakoby szeregi stanowiły pewną właściwą podklasę klasy wszystkich ciągów. Tymczasem nietrudno zauważyć, że *każdy* ciąg można przedstawić w postaci szeregu, kładąc

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a'_k,$$

gdzie $a'_k = a_{k+1} - a_k$ i $a_0 = 0$. Krótko mówiąc, każdy ciąg $\{a_{k+1}\}$ jest ciągiem sum częściowych ciągu „pochodnych” $\{a'_k\}$. Lepiej więc powiedzieć, że badanie szeregów to badanie ciągów jako ciągów sum częściowych. Różnica polega na tym, że tu założenia formułuje się w terminach ciągu $\{a'_k\}$, a nie samego ciągu $\{a_k\}$.

5.5. Przykład. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

jest rozbieżny, bo ciąg $\{\sin n\}$ nie dąży do zera.

5.6. *Jeżeli szereg* $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to zbieżny jest też każdy z szeregów*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

to sumy częściowe szeregu R_n są równe

$$R_n(m) = \sum_{k=n}^{m} a_k = A_m - A_{n-1},$$

więc $R_n(m) \to A - A_{n-1}$, gdy $m \to \infty$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} A - A_{n-1} = 0,$$

co było do okazania. □

5.7. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $N \in \boldsymbol{N}$, *takie że*

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| < \varepsilon$$

dla $n > m \geqslant N$.

Dowód. Jako że

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = A_n - A_m,$$

gdzie A_n jest n-tą sumą częściową szeregu, rozpoznajemy warunek Cauchy'ego, który jest równoważny zbieżności ciągu $\{A_n\}$, a więc zbieżności szeregu. □

5.8. Wniosek. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *jest zbieżny, to także szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, a ponadto*

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Dowód. Zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wynika z nierówności trójkąta:

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

oraz (5.7). Jeśli w ostatniej nierówności przyjmiemy $m = 0$, otrzymamy nierówność

$$|A_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

a po przejściu z n do nieskończoności drugą część tezy. □

Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest *bezwzględnie* (albo *absolutnie*) zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Wyżej pokazaliśmy więc, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Zwróćmy uwagę, że szereg (4) z wyżej umieszczonej listy szeregów zbieżnych nie jest bezwzględnie zbieżny. Taki szereg nazywamy *warunkowo* zbieżnym.

5.9. Przykład. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech będzie dany szereg o wyrazie ogólnym

$$a_k = \frac{3 + (-1)^k}{2^k}.$$

Jak widać

$$a_k \leqslant \frac{4}{2^k},$$

więc szereg jest zbieżny.

Wiemy, że zmiana skończonej ilości wyrazów w ciągu nie ma wpływu ani na jego zbieżność, ani na wartość granicy, o ile ta istnieje. Trochę inaczej wygląda sprawa z szeregami. Zmiana skończonej ilości wyrazów w szeregu oznacza dodanie pewnej stałej do wszystkich wyrazów ciągu sum częściowych począwszy od pewnego miejsca. Nie wpływa zatem na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy, gdy jest on zbieżny. W szczególności zbieżność szeregu

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

dla jakiegokolwiek $N \in \boldsymbol{N}$ pociąga zbieżność całego szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zajmijmy się teraz szeregami o wyrazach nieujemnych. Oto tak zwane *kryterium porównawcze* zbieżności szeregów.

5.10. *Niech będą dane dwa szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ o wyrazach nieujemnych, takich że $a_k \leqslant b_k$ dla dostatecznie dużych k. Wtedy zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pociąga zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pociąga rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Dowód. Rzeczywiście, istnieje wtedy $N \in \boldsymbol{N}$, takie że dla $n > N$ mamy

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k,$$

więc ograniczoność szeregu o wyrazach b_k pociąga ograniczoność szeregu o wyrazach a_k i odwrotnie – nieograniczoność szeregu po lewej pociąga nieograniczoność tego po prawej. To na mocy (5.3) dowodzi naszej tezy. □

5.11. Przykład. Zauważmy, że nierówność

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \qquad k > 1,$$

wraz ze zbieżnością szeregu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ dowodzi na mocy kryterium porównawczego, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0.$$

5.12. Przykład. Można jednak pokazać więcej. Mianowicie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \frac{1}{n},$$

a dokładniej

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1.$$

W tym celu wystarczy zauważyć, że dla każdego $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Sumując względem $2 \leqslant n \leqslant k \leqslant m$, dostajemy

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} < \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m},$$

skąd po przejściu granicznym względem m

$$1 < n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{n}{n-1},$$

a stąd już nasza teza na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

Porównując wyrazy danego szeregou z wyrazami szeregu geometrycznego, otrzymujemy kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

5.13. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *o wyrazach dodatnich. Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

to szereg jest rozbieżny.

Dowód. Niech będzie spełniony pierwszy warunek. Niech $0 < \varepsilon < 1 - q$. Wtedy dla dostatecznie dużych $n \geqslant N$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leqslant C(q+\varepsilon)^n,$$

gdzie $C = \frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N}$ i $q + \varepsilon < 1$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Niech teraz będzie spełniony drugi warunek. Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca rosnący, wiec nie może być zbieżny do zera. Zatem szereg jest rozbieżny. □

Niestety kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga nic w sytuacji, gdy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1.$$

Tak się dzieje w przypadku szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{5.14}$$

W obu przypadkach mamy
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$
a tymczasem pierwszy z tych szeregów jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

5.15. Przykład. Rozważmy szeregi
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 5^{-k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 3^{-k}.$$
Mamy
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1}5^{-k-1}}{\binom{2k}{k}5^{-k}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{k} \frac{4}{5}$$
oraz
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1}3^{-k-1}}{\binom{2k}{k}3^{-k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{n} \frac{4}{3},$$
więc pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny. Przykład ten dobrze ilustruje ten wygodny fakt, że w praktycznych zastosowaniach wyrażenie $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ często ma granicę.

Przechodzimy do kryterium Cauchy'ego.

5.16. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych. Jeżeli*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} < 1,$$
to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$
to szereg jest rozbieżny.

Dowód. Niech $0 < \varepsilon < 1 - q$. Pierwszy warunek oznacza, że dla dostatecznie dużych n
$$a_n \leqslant (q + \varepsilon)^n,$$
więc na mocy kryterium porównawczego szereg jest zbieżny.

Drugi warunek zaś implikuje $a_n \geqslant 1$ dla nieskończenie wielu n, więc ciąg $\{a_k\}$ nie dąży do zera, a to na mocy (5.4) oznacza, że szereg jest rozbieżny. □

Podobnie jak kryterium d'Alemberta, kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga nic w sytuacji, gdy
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$
Można na poparcie tej tezy przytoczyć te same przykłady (5.14).

5.17. Przykład. Szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
jest zbieżny, bo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} < 1.$$

I jeszcze jedno kryterium badania zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich (nieujemnych), zwane kryterium Cauchy'ego *przez zagęszczenie.*

5.18. *Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym liczb nieujemnych. Wówczas szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ jest zbieżny.*

Dowód. Rzeczywiście,

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n},$$

bo wyrazów a_k dla $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ jest 2^n i na mocy naszych założeń najmniejszym jest $a_{2^{n+1}-1} \geqslant a_{2^{n+1}}$, a największym a_{2^n}. Z udowodnionych nierówności wynika teza. □

Wiemy już, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

a co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty, \qquad \alpha \geqslant 2,$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

i co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty, \qquad \alpha \leqslant 1.$$

Metodą przez zagęszczenie sprawdzimy pozostałe przypadki $1 < \alpha < 2$, a przy okazji za jednym zamachem potwierdzimy wyżej wymienione.

5.19. Wniosek. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *jest zbieżny, wtedy tylko wtedy gdy* $\alpha > 1$.

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

a ostatni szereg, który jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$, jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $\alpha > 1$. □

Niech

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ile wynosi suma takiego szeregu? Odpowiedź nie jest łatwa. Rozstrzygniemy tu dwa przypadki $\alpha = 2$ i $\alpha = 4$.

5.20. *Mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dowód podamy w dalszej części skryptu.

5.21. Lemat. *Zachodzi równość*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2}{5}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^2=\frac{\pi^4}{90}.$$

Dowód. Dowodzimy tożsamości

$$\zeta(4)=\frac{2}{5}\zeta(2)^2.$$

Mamy

$$\zeta(2)^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}.$$

Zbadajmy więc sumy

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}=\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{j\neq k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}+\frac{1}{j^4}\Big)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{j\neq k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}+B_N,$$

gdzie

$$B_N=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^4}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{j^2k^2}=\frac{j^{-2}-k^{-2}}{k^2-j^2}.$$

Zatem

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{j\neq k=1}^{N}\frac{1}{k^2j^2}=2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2}\sum_{j\neq k=1}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^3}\sum_{j\neq k=1}^{N}\Big(\frac{1}{k-j}-\frac{1}{k+j}\Big).$$

Zwróćmy teraz uwagę, że

$$\sum_{j\neq k=1}^{N}\Big(\frac{1}{k-j}-\frac{1}{k+j}\Big)=\frac{3}{2j}-\sum_{k=N-j+1}^{N+j}\frac{1}{k},$$

więc ostatecznie

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}=\frac{5}{2}B_N-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^3}\sum_{k=N-j+1}^{N+j}\frac{1}{k}.$$

Jak widać,

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j^2k^2}\xrightarrow{N}\zeta(2)^2,\qquad B_N\xrightarrow{N}\zeta(4),$$

więc wystarczy sprawdzić, że drugi składnik po prawej stronie dąży do zera.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^3}\sum_{k=N-j+1}^{N+j}\frac{1}{k}&<\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^3}\cdot\frac{2j}{N-j+1}\\&=2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2}\cdot\frac{1}{N-j+1}<\frac{4}{N}\sum_{j=1}^{[N/2]}\frac{1}{j^2}+2\sum_{j=[N/2]+1}^{N}\frac{1}{j^2}.\end{aligned}$$

Jako że

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\infty,$$

prawa strona dąży do zera wraz z $N \to \infty$.

$\square$

Poniższe *kryterium Raabego* pozwala ono rozstrzygnąć niektóre przypadki, których nie rozstrzyga kryterium d'Alemberta.

5.22 (Raabe). *Niech będzie dany szereg o wyrazach $a_n > 0$. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Jeśli natomiast

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Dowód. Przypuśćmy, że spełniony jest pierwszy warunek. Niech $\varepsilon > 0$ będzie odpowiednio małe. Wtedy dla dostatecznie dużych n

$$(n+1)\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + \varepsilon$$

Mnożąc obie strony nierówności przez a_n i przenosząc odpowiednio wyrazy otrzymujemy

$$\varepsilon a_n \leqslant n a_n - (n+1)a_{n+1}. \tag{5.23}$$

Oznaczmy

$$b_n = n a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Nierówność (5.23) pokazuje, że ciąg $\{b_n\}$ jest malejący, a więc zbieżny, co pociąga

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1} < \infty.$$

Wracając do nierówności (5.23), widzimy, że

$$a_n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(b_n - b_{n+1}\Big), \qquad n \geqslant N,$$

a więc nasz szereg jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego.

Drugi warunek dla dużych n implikuje

$$a_{n+1} \geqslant \frac{n-1}{n} \cdot a_n \geqslant \cdots \geqslant \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{N-1}{N} \cdot a_N,$$

czyli

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_N}{Nn}.$$

Stosując raz jeszcze kryterium porównawcze, widzimy, że szereg jest rozbieżny. $\square$

5.24. Przykład. Zdefiniujmy *symbol Newtona* dla dowolnych $a \in \boldsymbol{R}$ oraz $k \in \boldsymbol{Z}^+$. Niech

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}, \qquad k \geqslant 1,$$

oraz

$$\binom{a}{0} = 1.$$

Nie nakładamy tu żadnych dodatkowych ograniczeń na a i k. Zauważmy jedank, że dla $a \in \boldsymbol{N}$ i $k > a$, mamy $\binom{a}{k} = 0$.

Rozważmy teraz szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{a}{k} \right|$$

i zbadajmy jego zbieżność za pomocą kryterium Raabego. Mamy

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{a+1}{k+1}, \qquad k > a,$$

skąd natychmiast wynika, że nasz szereg jest zbieżny dla $a \geqslant 0$ i rozbieżny dla $a < 0$.

Tyle na razie na temat szeregów o wyrazach nieujemnych. Przechodzimy do szeregów o wyrazach dowolnych. Jeżeli taki szereg jest zbieżny bezwzględnie, to w zasadzie jego badanie sprowadza się do badania szeregu wartości bezwzględnych, który ma wyrazy nieujemne. Jeśli jednak jest zbieżny tylko warunkowo, sprawa jest znacznie delikatniejsza.

5.25. Twierdzenie (Leibniz). *Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje monotonicznie do zera, to szereg*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny.

Dowód. Widzimy, że parzyste sumy częściowe

$$A_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geqslant 0$$

są ograniczone z dołu i tworzą ciąg malejący, bo

$$A_{2n+2} - A_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0,$$

natomiast sumy nieparzyste

$$A_{2n+1} = a_0 + (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant a_0$$

są ograniczone z góry i tworzą ciąg rosnący, bo

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0.$$

Tak więc oba podciągi $\{A_{2n}\}$ i $\{A_{2n+1}\}$ są zbieżne i wobec

$$A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$$

mają wspólną granicę. Stąd ciąg sum częściowych jest zbieżny. □

5.26. Przykład. Oprócz znanego nam już dobrze szeregu *anharmonicznego*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

dobrymi przykładami na twierdzenie Leibniza są szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Big(e - \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k\Big).$$

Rzeczywiście ciągi

$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad b_k = \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big), \qquad c_k = e - \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k$$

są monotonicznie zbieżne do zera.

5.27. Przykład. Wiemy już, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n}$$

jest bezwzględnie zbieżny dla $a \geqslant 0$. Pokażemy teraz, korzystając z kryterium Leibniza, że dla $-1 < a < 0$ szereg ten jest warunkowo zbieżny. Niech $b = 1 + a$. Wtedy

$$\binom{a}{n} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{b}{k}\Big).$$

Jeśli

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{b}{k}\Big),$$

to

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{b}{n+1},$$

a więc ciąg (a_n) jest monotoniczny i dąży do zera.

Niech będzie dany ciąg $\{a_k\}$. Przypomnijmy oznaczenie

$$a'_k = a_{k+1} - a_k.$$

5.28. Lemat. *Niech będą dane dwa ciągi nieskończone $\{a_k\}$ i $\{B_k\}$. Dla dowolnych $m \leqslant n$ naturalnych zachodzi następująca tożsamość Abela:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k B'_k = (a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m) - \sum_{k=m}^{n} a'_k B_{k+1}.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k B_k)' = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m,$$

a ponadto

$$(a_k B_k)' = a'_k B_{k+1} + a_k B'_k,$$

co daje tezę. □

5.29. Wniosek (nierówność Abela). *Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym o wyrazach nieujemnych, a $\{B_k\}$ ciągiem ograniczonym. Wtedy dla dowolnych $m \leqslant n$ naturalnych*

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k B'_k\Big| \leqslant 2a_m \sup_{k \geqslant m} |B_k|.$$

Następujące *kryterium Dirichleta*, które można uważać za uogólnienie podanego wyżej kryterium Leibniza, wykorzystuje nierówność Abela.

5.30. Twierdzenie. *Jeżeli $\{a_k\}$ jest ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera, a ciąg sum częściowych ciągu $\{b_k\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ jest zbieżny.*

Dowód. Możemy przyjąć, że ciąg $\{a_k\}$ jest malejący. Oznaczmy

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \qquad n \geqslant 1$$

i niech $|B_n| \leqslant B$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = |\sum_{k=0}^{n} a_k B'_k| \leqslant 2a_m \sup_{k \geqslant m} |B_k| \leqslant 2a_m B.$$

Jako że $a_m \to 0$, nasz szereg spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

□

Warto zatrzymać się na chwilę, aby lepiej zrozumieć kryterium Dirichleta. Przykład, który chcemy teraz zaprezentować, wymaga pewnych przygotowań.

Wiemy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ jest rozbieżny. Okazuje się jednak, że jego sumy częściowe są ograniczone.

5.31. *Dla każdego x nie będącego parzystą wielokrotnością π*

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Dowód. Z prostej trygonometrii wynika, że

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx = \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x\Big).$$

Stąd

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x\Big) = \sin n\frac{x}{2} \cdot \sin(n+1)\frac{x}{2}.$$

□

5.32. Przykład. A oto nasz przykład. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym do zera i niech $b_k = \sin k$. Z (5.31) wynika, że dla każdego n

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| \leqslant \Big|\frac{\sin\frac{n}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}|},$$

więc sumy częściowe ciągu $\{b_k\}$ są ograniczone. Na mocy twierdzenia Dirichleta szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k$$

jest więc zbieżny. W szczególności, szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$$

jest zbieżny.

Dość podobnym do kryterium Dirichleta jest *kryterium Abela.* Dobrze jest spojrzeć na to kryteriu w następującym kontekście. Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny *bezwzględnie*, a ciąg $\{a_k\}$ jest ograniczony, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty,$$

co nietrudno wywnioskować z kryterium porównawczego. Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można pomnożyć przez wyrazy ciągu ograniczonego, a otrzymany szereg będzie nadal zbieżny bezwzględnie.wyrazy zbieżnego bezwzględnie szeregu można pomnożyć przez wyrazy ciągu ograniczonego, a zbiezność zostanie zachowana. Tak oczywiście nie jest dla szeregów warunkowo zbieżnych. Aby się o tym przekonać, wystarczy wyrazy szeregu anharmonicznego pomnożyć przez ograniczony ciąg $(-1)^{k+1}$. Tym bardziej godne uwagi jest następujące twierdzenie Abela, które mówi, że można to zrobić, jeśli ciąg $\{a_k\}$ jest *monotoniczny.*

5.33. Twierdzenie. *Niech* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *będzie szeregiem zbieżnym, a* $\{a_k\}$ *ograniczonym ciągiem monotonicznym. Wtedy szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *jest zbieżny.*

Dowód. Niech $a = \lim_k a_k$ i niech $\alpha_k = a_k - a$. Mamy[1]

$$a_k b_k = (a_k - a)b_k + ab_k = \alpha_k b_k + ab_k.$$

Tak więc każdy wyraz naszego szeregu przedstawia się jako kombinacja liniowa wyrazów dwóch szeregów zbieżnych. Szereg o wyrazach b_k jest zbieżny z założenia natomiast szereg o wyrazach $\alpha_k b_k$ jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta, bo $\alpha_k \to 0$ monotonicznie, a sumy częściowe $\sum_{k=1}^{n} b_k$ są ograniczone, gdyż, jak już powiedzieliśmy, szereg ten jest zbieżny. □

5.34. Przykład. Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje do zera, a ciąg $\{b_k\}$ jest rosnący i ograniczony, to szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k b_k$$

jest zbieżny. Istotnie, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ jest zbieżny na mocy twierdzenia Leibniza, więc wolno go pomnożyć przez wyrazy ciągu rosnącego i ograniczonego bez utraty zbieżności.

Do końca rozdziału pozostaje jeszcze zagadnienie permutacji wyrazów w szeregu zbieżnym. Wiemy, że w szeregu można bezkarnie przestawić skończoną liczbę wyrazów, nie tracąc zbieżności, ani nie zmieniając jego sumy. Czy wolno jednak dokonać nieskończonej permutacji wyrazów?

Rozważania na ten temat poprzedzimy następującym spostrzeżeniem. Niech będzie dany szereg zbieżny o wyrazach a_n, wśród których jest nieskończenie wiele zarówno nieujemnych, jak i ujemnych. Oznaczmy prze x_k kolejne wyrazy nieujemne tego szeregu, a przez $-y_k$ kolejne wyrazy ujemne. Niech m_n będzie liczbą wyrazów nieujemnych o indeksach $\leqslant n$. Wtedy

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = X_{m_n} - Y_{n-m_n} = \sum_{k=1}^{n-m_n} x_k - \sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{5.35}$$

gdzie $m_n \to \infty$ i $n - m_n \to \infty$. Ponadto

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = X_{m_n} + Y_{n-m_n}.$$

Stąd wynika, że zbieżność bezwarunkowa szeregu jest równoważna

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k < \infty.$$

Natomiast jego zbieżność warunkowa pociąga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty.$$

---

[1] Za ten pomysł dziękuję panu Ł. Garncarkowi.

Oto przykład pokazujący, że permutacja wyrazów szeregu *warunkowo* zbieżnego może zmienić jego sumę.

Niech

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

będzie sumą częściową warunkowo zbieżnego szeregu anharmonicznego. Przez indukcję sprawdzamy, że

$$S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

będzie szeregiem, który jest permutacją szeregu anharmonicznego. Permutacja polega na tym, że po dwóch kolejnych wyrazach nieparzystych następuje jeden kolejny parzysty. Niech U_n będzie sumą częściową tego szeregu. Widać, że

$$U_{3n} = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} U_{3n} = \frac{3}{2}\log 2.$$

Zauważamy także, że

$$U_{3n+1} - U_{3n} \to 0, \qquad U_{3n+2} - U_{3n} \to 0,$$

więc szereg ten jest zbieżny, a jego suma wynosi $\frac{3}{2}\log 2$.

Permutacja wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego może także zniweczyć jego zbieżność.

Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych dobranym tak, aby $n_0 = 1$ oraz

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{2j+1} > 1.$$

Rozważmy następującą permutację wyrazów szeregu anharmonicznego: Najpierw następuje n_1 kolejnych wyrazów nieparzystych, po nich pierwszy wyraz parzysty; potem znów n_2 wyrazów nieparzystych, drugi parzysty itd. Niech S_n będzie sumą częściową tej permutacji szeregu anharmonicznego. Jak widać

$$S_{n_k+1} > \frac{k}{2},$$

więc nowy szereg jest rozbieżny.

Okazuje się, że przez odpowiednią permutację wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego można uzyskać „wszystko”– rozbieżność lub zbieżność do z góry wybranej sumy. Mówi o tym następujące twierdzenie, którego dowód poprzedzimy następującym lematem *o dwóch szeregach rozbieżnych.*

5.36. Lemat. *Niech będą dane dwa rozbieżne szeregi o sumach częściowych*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

i wyrazach nieujemnych. Dla każdego $a > 0$ istnieją wówczas ściśle rosnące ciągi indeksów $(p_j)_{j=0}^{\infty}$ i $(q_j)_{j=0}^{\infty}$, takie że dla każdego $j \in \boldsymbol{N}$

$$a < X_{p_j} - Y_{q_{j-1}} \leqslant a + x_{p_j}, \qquad \text{oraz} \qquad a - y_{q_j} \leqslant X_{p_j} - Y_{q_j} < a. \tag{5.37}$$

gdzie $Y_0 = 0$ i $q_0 = 0$.

Dowód. Niech $p_0 = q_0 = 0$. Przypuśćmy, że już zdefiniowaliśmy p_j i q_j. Definiujemy p_{j+1} jako najmniejszy indeks, taki że $X_{p_{j+1}} > Y_{q_j} + a$, a następnie q_{j+1} jako najmniejszy indeks, taki że $Y_{q_{j+1}} > X_{p_{j+1}} - a$. Nietrudno się przekonać, że nasze nierówności są spełnione. □

5.38. Twierdzenie (Riemann). *Niech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym. Dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$ istnieje permutacja wyrazów szeregu σ, taka że sumy częściowe*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

są zbieżne do a. Można też dobrać σ tak, by ciąg sum częściowych był rozbieżny do $\pm\infty$ lub też nie miał nawet granicy niewłaściwej.

Dowód. Aby nie komplikować niepotrzebnie dowodu, przyjmiemy, że $a > 0$. Przypadki $a \leqslant 0$ oraz $a = \pm\infty$ są bardzo podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi.

Niech x_j oznaczają kolejne wyrazy nieujemne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a y_j liczby przeciwne do jego kolejnych wyrazów ujemnych. Szereg jest zbieżny warunkowo, więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty, \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty.$$

W takim razie nasze szeregi sełniają założenia lematu. Niech więc (p_j) i (q_j) będą ciagami indeksów, takimi że sumy X_n i Y_n spełniają (5.37). Ponieważ nasz szereg jest zbieżny, $x_k \to 0$ i $y_k \to 0$, a więc także

$$\lim_{j\to\infty} (X_{p_j} - Y_{q_{j-1}}) = \lim_{j\to\infty} (X_{p_j} - Y_{q_j}) = a$$

na mocy lematu o trzech ciągach.

Pokażemy, że suma szeregu o wyrazach

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, -y_1, -y_2, \ldots, -y_{q_1}, x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \ldots, x_{p_2}, -y_{q_1+1}, -y_{q_1+2}, \ldots, -y_{q_2}, \ldots$$

wynosi dokładnie a. Zauważmy najpierw, że każda suma częściowa tego nowego szeregu, którego wyrazy otrzymaliśmy przez pewną permutację wyrazów szeregu wyjściowego, spełnia

$$X_{p_j} - Y_{q_j} \leqslant S_n < X_{p_{j+1}} - Y_{q_j},$$

jeśli $p_j + q_j < n \leqslant p_{j+1} + q_j$ lub

$$X_{p_j} - Y_{q_{j-1}} < S_n \leqslant X_{p_j} - Y_{q_j}.$$

jeśli $p_j + q_{j-1} < n \leqslant p_j + q_j$. W takim razie

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

na mocy lematu o trzech ciągach. □

Potraktujmy twierdzenie Riemanna jako przestrogę, że z szeregami warunkowo zbieżnymi należy się obchodzić bardzo ostrożnie!

Zupełnie inaczej ma się sprawa z szeregami bezwzględnie zbieżnymi.

5.39. Twierdzenie. *Niech* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. *Wówczas dla każdej permutacji*

$$\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$$

szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *jest również zbieżny i*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Dowód. Niech

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

i niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Niech

$$M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma^{-1}(k).$$

Wtedy

$$\{1, 2, \ldots, n\} \subset \sigma\Big(\{1, 2, \ldots M_n\}\Big).$$

Dla $\varepsilon > 0$ niech N będzie takie, by

$$|A - A_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Wtedy dla $m \geqslant M = M_N$

$$|S_m - A_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon,$$

więc

$$|S_m - A| \leqslant |S_m - A_N| + |A_N - A| \leqslant 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon,$$

co dowodzi naszej tezy. □

5.40. Wniosek. *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 5.39 mamy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

Dowód. Wystarczy zastosować Twierdzenie 5.39 do szeregu wartości bezwzględnych, by otrzymać żądaną zbieżność. □

I jeszcze jedno ważne spostrzeżenie.

5.41. *Niech będzie dany ciąg* (a_n). *Jeżeli dla każdego ciągu* $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Dowód. Niech $\varepsilon_n = 1$ dla $a_n \geqslant 0$ i $\varepsilon_n = 0$ dla $a_n < 0$. Wtedy, używając notacji (5.35), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = C_1 < \infty,$$

oraz
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n - 1)a_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = C_2 < \infty,$$
a stąd
$$\sum_{n=1}^{N}|a_n| = \sum_{k=1}^{m_n} x_k + \sum_{k=1}^{n-m_n} y_k \leqslant C_1 + C_2$$
dla każdego N, co oznacza, że szereg jest zbieżny bezwzględnie. $\square$

Zadania

1. Stosując kryterium porównawcze, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} 4^{-n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt[4]{n^5}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$$

2. Stosując kryterium d'Alemberta, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}.$$

3. Stosując kryterium Cauchy'ego, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arsh}^n \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

4. Niech będą dane dwa ciągi $a_n > 0$ i $b_n > 0$, takie że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Pokaż, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Pokaż tym sposobem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

5. Zbadaj zbieżność szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log(n+1)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log^2(n+1)}$.

6. Pokaż, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\epsilon} n}$ jest zbieżny dla każdego $\epsilon > 0$.

7. Dla jakich $x > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$ jest zbieżny?

8. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$.

9. Niech $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n^n$ jest zbieżny? A szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n$?

10. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

11. Niech $a \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$. Udowodnij, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie dla $a > 0$, zbieżny warunkowo dla $-1 < a \leqslant 0$ i rozbieżny dla $a \leqslant -1$.

12. Dana są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich, których wyrazy spełniają warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Udowodnij, ze zbieżność drugiego szeregu implikuje zbieżność pierwszego, a rozbieżność pierwszego – rozbieżność drugiego.

13. Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są dodatnie i spełniają warunek
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^{\alpha}, \qquad \alpha > 1.$$
Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

14. Niech $a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a ciąg $\{d_n\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ jest zbieżny.

15. Udowodnij, że dla $|q| < 1$ jest $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$.

16. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$.

17. Udowodnij, że
$$e(e^{1/e} - 1) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < e^{1/e}.$$

18. Udowodnij, że
$$\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < \frac{7}{5}, \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

19. Zbadaj zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n!}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\log(2^n)!}$.

20. Niech $a_0 = e$ i $a_{n+1} = \sin a_n$. Udowodnij, że a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny; b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ jest zbieżny.

21. W szeregu harmonicznym stawiamy znak minus przy wyrazach o numerach postaci $n = 2^k$, a pozostałe wyrazy pozostawiamy bez zmian. Wykaż, że tak otrzymany szereg jest rozbieżny.

22. Oblicz sumę szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$.

23. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne bezwzględnie. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sqrt{|a_n b_n|}$ jest zbieżny.

24. Udowodnij, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ zachodzi równość
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

25. Wiadomo, że $\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = c \neq 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

26. Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

27. Podaj przykład zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

28. Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem zbieżnym do a, szereg zaś $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ niech będzie bezwzględnie zbieżny. Niech $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Pokaż, że $\lim_{n \to \infty} c_n = a \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

29. Dane są dwa zbieżne szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ o dodatnich wyrazach. Niech $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \beta_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$. Pokaż, że jeśli $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, to również $\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = p$.

30. Pokaż, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o nieujemnych wyrazach jest rozbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny.

31. Ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_n \in \{-1, 1\}$ szereg $\sum_{n=1} s_n a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

32. Ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_n \in \{0, 1\}$ szereg $\sum_{n=1} s_n a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

33. Pokaż, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\log n} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\log n} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\log\log n}}{n} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\log\log n}}{n} = \infty.$$

34. Udowodnij nierówność $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$.

35. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$, gdzie $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$.

36. Pewien matematyk powiedział: *Nietaktem jest dowodzić zbieżności szeregu geometrycznego za pomocą kryterium d'Alemberta.* Co mógł mieć na myśli?

37. Inny matematyk z kolei uważał, że nietaktem jest dowodzić rozbieżności szeregu harmonicznego za pomocą kryterium Raabego. Co on miał na myśli?

38. Pokaż, że ciągi
$$A_n = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}, \qquad B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$$
są rosnące.

39. Znajdź granicę ciągu $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, gdy $-1 \neq a_1 \leqslant 0$.

40. Pokaż, że każdy ciąg o wahaniu ograniczonym jest ciągiem Cauchy'ego oraz że każdy ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg o wahaniu ograniczonym.

41. Wiadomo, że $a_n \nearrow a$. Pokaż, że wtedy
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots a_n^n} = a.$$

42. Udowodnij, że $1/4 < \gamma < 2(1 - \log 2)$.

43. Wiadomo, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ jest zbieżny. Pokaż, że również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sqrt[n]{\beta_n}}$ jest zbieżny. [Niech $\alpha_n = \beta_n^{1-1/n}$ i niech $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Pokaż, że wtedy $\sum_{\alpha_n^{1/n} > 1/2} \beta_n = \infty$.]

44. Niech $\boldsymbol{N}_0$ oznacza zbiór tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 0. Pokaż, że $\sum_{n\in \boldsymbol{N}_0} \frac{1}{n} < 29$.

45. Niech będzie dany ciąg o wyrazach $a_n > 0$. Udowodnij, że jeśli
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}, \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
to
$$a_n \leqslant \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$
Jeśli natomiast
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}, \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
to
$$a_n \geqslant \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$

46. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a ciąg $\{b_n\}$ ma wahanie ograniczone. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

47. Wykaż, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Korzystając z tego, pokaż, że podane ciągi są zbieżne do zera:
$$\frac{n!}{n^n}, \qquad \frac{2^n}{n!}, \qquad \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}, \qquad \frac{n^n}{(n!)^2}, \qquad \frac{(2n)!}{2^{n!}}.$$
Zrób jeszcze raz to samo, korzystając z bezpośrednich oszacowań na $n!$.

48. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{1/2}{n}\right|q^n, (q>0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}^2, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log\frac{n+1}{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

49. Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n\log^2 n}<\infty.$$

50. Udowodnij, że $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, a następnie pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n}=\infty$.

51. Pokaż, że dla każdego $a>0$ i każdego $n\in\boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność $e^a<(1+\frac{a}{n})^{n+a}$. W tym celu udowodnij, że ciąg po prawej jest malejący.

52. Niech będą dane dwa ciągi $a_n>0$ i $b_n>0$, takie że $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$. Pokaż, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Pokaż tym sposobem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

53. Dla $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{2k\pi : k\in\boldsymbol{Z}\}$ udowodnij wzór

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin n\frac{x}{2}\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

54. Udowodnij, że podane szeregi mają ograniczone sumy częściowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin(2n-1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2 n.$$

55. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2 n\log(1+\frac{1}{n}).$$

56. Dane są zbieżne ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ten drugi jest jeszcze monotoniczny. Korzystając z kryterium Abela, udowodnij, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n^2$$

są zbieżne.

57. Pokaż, że ciąg $g_n=\frac{\log n}{n}$ $(n\geqslant 3)$ dąży monotonicznie do zera.

58. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}<e^{1/e}$.

59. Pokaż, że ciąg $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ jest ściśle malejący.

60. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\log n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\log n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\gamma_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

61. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[n]{a}}{n}, \quad (a>0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arc\,tg} n}{n}.$$

62. Oblicz sumy nieskończone otrzymane w wyniku permutacji wyrazów szeregu anharmonicznego:

$$A = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots,$$
$$B = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

63. Nich $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ będzie permutacją liczb naturalnych. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)} = \infty$.

64. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}$.

65. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$, gdzie $|q| < 1$.

66. Dla jakich $q \in \boldsymbol{R}$ szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3-q} \log^q n}$$

jest zbieżny a) absolutnie, b) warunkowo?

67. Zbadaj, dla jakich $q \in \boldsymbol{R}$ szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})}$$

jest zbieżny.

68. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\pi}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!},$$

69. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

70. Przeprowadź dyskusję zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^p \log^q n$ w zależności od $p, q \in \boldsymbol{R}$.

71. Sprawdź, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e - 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} = e - 1.$$

72. Dany jest malejący ciąg $a_n > 0$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pokaż, że $na_n \to 0$.

73. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4}$.

74. Niech (p_n) będzie ściśle rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Pokaż, że dla każdego $\alpha > 1$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{p_1^\alpha p_2^\alpha \dots p_n^\alpha}{(p_1^\alpha - 1)(p_2^\alpha - 1)\dots(p_n^\alpha - 1)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

oraz

$$\log p_{n+1} \leqslant \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_n - 1)}.$$

75. Niech (p_n) będzie ściśle rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k - 1} \geqslant \log \log p_{n+1}.$$
Wywnioskuj stąd, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

76. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{1}{n}$.

77. Udowodnij wzór
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$
dla $x \neq m\pi$.

78. Udowodnij, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \sin \frac{1}{n}$$
jest zbieżny warunkowo.

79. Zauważ, że na mocy przekształcenia Abela (jak w dowodzie kryterium Dirichleta)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) B_{k+1},$$
gdzie $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$, oraz że szereg po prawej jest zbieżny bezwzględnie, a po lewej tylko warunkowo.

80. Niech $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, $b_k > 0$, i niech $a_k \to a$. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = a.$$

81. Pokaż, że jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ jest zbieżny, to $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \to 0$.

82. Niech (a_n) będzie ciągiem okresowym o okresie N i takim, że $\sum_{k=1}^{N+1} a_k = 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k$ jest zbieżny.

83. Dany jest malejący ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich. Pokaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to $na_n \to 0$.

84. Podaj przykład ciągu x_n, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ rozbieżny.

85. Podaj przykład ciągu x_n, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin x_n$ rozbieżny.

6. Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Przykładami takich szeregów, które już znamy, są m.in.:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, o ile $|x| < 1$;

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, o ile $|x| < 1$.

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla x z pewnego zbioru, to możemy określić funkcję
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$
Jej dziedzina jest zawsze niepusta, gdyż dla $x = 0$ powyższy szereg jest oczywiście zbieżny. Zajmiemy się teraz dokładniejszym badaniem dziedziny takich funkcji. Wielkość
$$r = \sup\{t \geqslant 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty\}$$
nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0} a_n x^n$. W przypadku, gdy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$ dla wszystkich $t > 0$, kładziemy $r = \infty$. Kolejne twierdzenie wyjaśnia, skąd taka nazwa.

6.1. *Niech liczba r będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeśli $|x| < r$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli zaś $|x| > r$, to szereg ten jest rozbieżny.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $|x| < r$, to istnieje $t > 0$, takie że
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty,$$
więc szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Niech teraz $|x| > r$. Przypuśćmy nie wprost, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny. Wtedy $a_n x^n \to 0$ i wobec tego istnieje stała $C > 0$, taka że $|a_n x^n| \leqslant C$. Jeśli $r < t < |x|$, to
$$|a_n| t^n = |a_n x^n| \cdot (t/|x|)^n \leqslant C(t/|x|)^n$$
i wobec $0 < t/|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n$ jest zbieżny, co przeczy definicji r.

$\square$

A oto sposób na znajdowanie wartości promienia zbieżności.

6.2. *Niech będzie dany szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o promieniu zbieżności równym* r. *Jeśli ciąg* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *ma granicę* ϱ *właściwą lub nie, to*

$$r = \begin{cases} 0, & \varrho = \infty, \\ 1/\varrho, & 0 < \varrho < \infty, \\ \infty, & \varrho = 0. \end{cases}$$

Dowód. Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego. Niech najpierw $0 < \varrho < \infty$. Otóż, skoro

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|t^n} = t \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = t \cdot \varrho,$$

więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$$

dla $0 < t < 1/\varrho$ i

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n = \infty$$

dla $t > 1/\varrho$. Dlatego $r = 1/\varrho$.

Gdy $\varrho = 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, skąd $r = \infty$. W przypadku $\rho = \infty$ szereg jest zbieżny tylko dla $t = 0$, więc $r = 0$. □

A oto kilka przykładów:

6.3. Przykład. a) Dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

otrzymujemy promień zbieżności $r = 1$. Sprawdźmy jeszcze, co dzieje się dla $|x| = 1$. Otóż mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty, \qquad x = 1,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty, \qquad x = -1.$$

Oznacza to, że szereg ten jest zbieżny dla $x \in (-1, 1]$ i rozbieżny poza tym, przy czym wewnątrz przedziału zbieżność jest bezwzględna, a w $x = 1$ warunkowa.

b) Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Skoro

$$1/r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2} x^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \qquad , x = 1,$$

więc szereg ten jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla $x \in [-1, 1]$ i rozbieżny poza tym.

c) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mamy oczywiście $r = 1$ oraz rozbieżność dla $|x| = 1$.

d) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

otrzymujemy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

skąd $r = \infty$, co oznacza, że szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie) dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}$.

e) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$$

mamy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

więc promień zbieżności wynosi $r = 0$, czyli szereg ten jest zbieżny tylko dla $x \in \{0\}$.

f) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

mamy

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

czyli

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

więc granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nie istnieje

Łatwo jednak zauważyć, że nasz szereg jest zawsze szeregiem geometrycznym o ilorazie x^2, a więc zbieżnym dokładnie dla $|x| < 1$. Stąd $r = 1$.

6.4. Twierdzenie. *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności* r*, to funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest ciągła w przedziale $(-r, r)$*.*

Dowód. Niech $x, y \in (-r, r)$. Istnieje taka liczba R, że $|x|, |y| < R < r$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||y|^n. \\
&\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Drugi składnik powyższej sumy jest podwojoną resztą szeregu zbieżnego, więc

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n < \varepsilon,$$

dla dostatecznie dużych N. Dla każdego N

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

jest oczywiście wielomianem, a więc funkcją ciągłą. Wobec tego

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon,$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x. Ostatecznie

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon,$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x przy dostatecznie dużym N, co dowodzi ciągłości funkcji f w przedziale $(-r, r)$. □

A oto twierdzenie o ciągłości szeregu potęgowego na brzegu przedziału.

6.6. Twierdzenie. *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r > 0$. Załóżmy, że szereg ten jest zbieżny dla $x = r$. Niech*

$$f\colon (-r, r] \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Wtedy

$$f(r) = \lim_{x \to r-} f(x).$$

Dowód. Weźmy $x \in (0, r)$. Mamy

$$|f(r) - f(x)| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| + \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \Big| + \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \Big| \tag{6.7}$$

Pierwsze dwa składniki można oszacować jak wyżej. Rzeczywiście drugi przedstawia resztę szeregu z założenia zbieżnego, a pierwszy różnicę wartości wielomianu. Istota sprawy leży w sposobie oszacowania ostatniego składnika. Mamy

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r} \right)^n,$$

gdzie $a_n r^n$ jest wyrazem szeregu (znów z założenia) zbieżnego, a $(\frac{x}{r})^n$ wyrazem ciągu monotonicznie zbieżnego do zera. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_n| \leqslant \beta_N \left(\frac{x}{r}\right)^{N+1} \leqslant \beta_N,$$

gdzie

$$\beta_N = \sup_{m>N} |\sum_{n=N}^{m} a_n r^n| \to 0,$$

gdy $N \to \infty$. To pokazuje, że i trzeci wyraz można uznać za mały przy dostatecznie dużych N. □

6.8. Przykład. Rozważmy wielomian stopnia nie większego niż N

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} h^k \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{N} h^k \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(x)\, h^k, \end{aligned} \tag{6.9}$$

gdzie

$$\alpha_k(x) = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Aby rozwinąć w podobny sposób funkcję zadaną szeregiem potęgowym, musimy najpierw rozważyć zagadnienie sumowania szeregów iterowanych.

Niech będzie dany ciąg $\{\alpha_{n,k}\}_{n,k=0}^{\infty}$ liczb rzeczywistych. Przez zbieżność *szeregu iterowanego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \tag{6.10}$$

będziemy rozumieć zbieżność szeregów

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}.$$

W takim razie suma szeregu iterowanego wyraża się granicą iterowaną

$$A = \lim_{N\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} a_{n,k}.$$

Jeśli $\alpha_{n,k} \geqslant 0$, to nietrudno zauważyć, że zbieżność szeregu (6.10) jest równoważna istnieniu stałej $C > 0$, takiej że

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} \alpha_{n,k} \leqslant C \tag{6.11}$$

dla każdych $N, K \in \boldsymbol{N}$. Dlatego też fakt zbieżności szeregu iterowanego o wyrazach nieujemnych będziemy oznaczać krótko przez

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty.$$

W przeciwnym wypadku będziemy pisać

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} = \infty.$$

Warunek (6.11) pociąga równoważność

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty$$

dla $\alpha_{n,k} \geqslant 0$.

6.12. *Niech $\alpha_{n,k} \in \boldsymbol{R}$. Jeśli*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}| < \infty,$$

to oba szeregi iterowane

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}$$

są zbieżne.

Dowód. Wystarczy dwukrotnie skorzystać z tego, że zbieżność absolutna pociąga zbieżność i z powyższych uwag o zmianie porządku sumowania dla szeregów o wyrazach nieujemnych. □

6.13. Przykład. Niech będzie $0 < q < 1$ i niech

$$a_{n,k} = (-1)^{k+1}q^{[k/2]+1}(1-q^{[k/2]+1})^{n-1}.$$

Zauważmy, że $|a_{n,k}| \to 0$, gdy $k \to \infty$ oraz $a_{k+1} = -a_k$ dla k parzystych, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1} = 1.$$

Z drugiej jednak strony

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k} = (-1)^{k+1}q^{[k/2]+1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^{[k/2]+1})^n = (-1)^{k+1},$$

a więc suma iterowana $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$ nie istnieje.

6.14. Lemat. *Jeśli*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}| < \infty.$$

to oba szeregi iterowane o wyrazie ogólnym $\alpha_{n,k}$ są zbieżne do tej samej sumy.

Dowód. Zbieżność obu szeregów wynika z wcześniejszych uwag. Niech

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=A,\qquad \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=B.$$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon>0$

$$\Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}-\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}\Big|=\Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=K+1}^{\infty}\alpha_{n,k}-\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_{n,k}\Big|$$
$$\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}|<2\varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $N,K\in\boldsymbol{N}$, co oznacza, że $A=B$. □

Powracamy do szeegów potęgowych.

6.15. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg potęgowy* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *o dodatnim promieniu zbieżności* r*. Wtedy dla każdego ustalonego* $|x_0|<r$ *i dla* $|h|<r-|x_0|$ *funkcja* f *rozwija się w szereg potęgowy (wokół punktu* x_0*) według wzoru*

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,h^k, \tag{6.16}$$

gdzie

$$\alpha_k(x_0)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0+h)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_0^{n-k}h^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Skoro

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_n||x_0|^{n-k}|h|^k=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x_0|+|h|\big)^n<\infty,$$

bo $|x_0|+|h|<r$, więc szereg iterowany jest bezwzględnie zbieżny. Możemy zatem zamienić kolejność sumowania, otrzymując

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}h^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n\,x_0^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,h^k.\end{aligned}\tag{6.18}$$

co kończy dowód. □

Wzór (6.16) przedstawia funkcję f w postaci *rozwinięcia w szereg potęgowy* wokół punktu x_0. Zauważmy, że inną postacią tego samego wzoru jest

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,(t-x_0)^k,\qquad |t-x_0|<r-|x_0|.$$

Do szeregów potęgowych powrócimy, gdy mowa będzie o różniczkowaniu i zbieżności szeregów funkcyjnych.

Zadania

1. Sprawdź, że dla $|x| < 1$
$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

2. Funkcję $(1-x)^{-1}$ rozwiń w szereg potęgowy w punktach $a = 1/2$ i $b = 2$.

3. Przedstaw funkcje $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{2x}$ i $h(x) = \frac{e^x-1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $h(0) = 1$ w postaci szeregów potęgowych.

4. Przedstaw w postaci szeregu potęgowego funkcje $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ i $x \mapsto \frac{1+x}{(1-x)^2}$ dla $|x| < 1$.

5. Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\log^4 n x^n.$$

6. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności r. Wykaż, że promień zbieżności każdego z szeregów
$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+3}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^4 a_n x^n$$
także wynosi r. Przy założeniu $0 < r < \infty$ określ promień zbieżności szeregów
$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}n^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 x^n.$$

7. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności $0 < r < \infty$. Wykaż, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{4n}$ wynosi $r^{1/4}$.

8. Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ spełniają oszacowanie $|a_n| \leqslant Cn^4$. Pokaż, że dla każdego $|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

9. Oblicz promień zbieżności szeregów
$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\binom{2n}{n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n x^n}{(1+1/n)^{n^2}},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)^n\frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1+1/n)^{(-1)^n n^2}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1+1/n)^n x^{n^2}.$$

10. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ dla $\alpha > 0$.

11. Funkcja f zadana jest szeregiem potęgowym $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n \geqslant 0$, o promieniu zbieżności $r = 1$. Wiadomo, że f jest ograniczona na $[0, 1)$. Pokaż, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, a następnie, nie korzystając z twierdzenia Abela, że
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

12. Oblicz promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\, x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \log\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}\, x^{2n}.$$

13. Dany szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnego x_0. Pokaż, że jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego $|x| < |x_0|$.

14. Oblicz sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ dla $|x| < 1$.

15. Wiadomo, że $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$. Pokaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_{nm}.$$

7. Różniczkowanie

Niech będzie dana funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Mówimy, że f *jest różniczkowalna* w x_0 (ma w x_0 pochodną), jeśli iloraz różnicowy

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ma w punkcie x_0 granicę. Oznaczamy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0*. Zatem z definicji

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Równoważnie, oznaczając $h = x - x_0$, mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Czasem też oznacza się pochodną inaczej:

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Pierwsze oznaczenie pochodzi od Lagrange'a, a drugie od Leibniza.

Wiemy już, że

$$\frac{d}{dx}a^x\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \log a$$

dla $a > 0$ i $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz

$$\frac{d}{dx}x^\alpha\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

dla $x_0 > 0$ i $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Zatem zarówno funkcja wykładnicza o dowolnej podstawie, jak i funkcja potęgowa, są różniczkowalne w każdym punkcie swojej dziedziny. W szczególności

$$(e^x)' = e^x, \qquad (x)' = 1$$

dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Łatwo również zauważyć, że funkcja stała jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest zawsze równa 0.

7.1. Przykład. Obliczmy pochodną funkcji logarytmicznej w punkcie $x_0 > 0$. Mamy

$$\frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x_0})}{h/x_0} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Jako że

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1,$$

widzimy, że

$$(\log)'(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

Z definicji pochodnej natychmiast wynika, że

7.2. *Funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, wtedy i tylko wtedy gdy*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \qquad x \in (a, b),$$

gdzie $\varphi : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest pewną funkcją ciągłą w x_0. Jeśli tak jest, to $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Tę równoważność można ująć subtelniej.

7.3. *Funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna w x_0, wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczba m i funkcja ω określona w otoczeniu 0, takie że*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + \omega(h), \tag{7.4}$$

gdzie $\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$. *Jeśli tak jest, to*

$$m = f'(x_0).$$

Dowód. Warunek (7.3) można zapisać jako

$$f(x+h) - f(x_0) = \varphi(x+h)h = \varphi(x_0)h + (\varphi(x+h) - \varphi(x_0))\, h,$$

dla dostatecznie małych h i położyć $m = \varphi(x_0)$, $\omega(h) = (\varphi(x+h) - \varphi(x_0))\, h$. Teraz już widać, że teza wynika z (7.3). □

Zauważmy, że warunek (7.4) można wyrazić tak:

$$f(x) = g(x) + \omega(x - x_0),$$

gdzie $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$ jest funkcją liniową. Zatem (7.4) mówi, że f posiada *aproksymację liniową*, gdyż różnica

$$f(x) - g(x) = \omega(x - x_0)$$

dąży do 0 szybciej niż czynnik liniowy, gdy $x \to x_0$.

Będziemy mówili, że prosta ukośna

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

jest *styczna* do wykresu funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0, jeśli odległość punktu $P_x = (x, f(x))$ leżącego na wykresie funkcji od prostej jest mała w porównaniu z jego odległością od punktu $P_{x_0} = (x_0, f(x_0))$, gdy x dąży do x_0, czyli jeśli

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_x P'_x}{P_x P_{x_0}} = 0,$$

gdzie P'_x jest rzutem prostopadłym P_x na prostą. Mamy

$$P_x P'_x = \frac{|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

oraz

$$P_x P_{x_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}.$$

Zatem prosta $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ jest styczna do wykresu funkcji f, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}} = 0. \tag{7.5}$$

7.6. *Prosta $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w x_0 i $f'(x_0) = m$.*

Dowód. Dzieląc licznik i mianownik w (7.5) przez $x - x_0$, widzimy, że styczność jest równoważna warunkowi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^2}} = 0. \tag{7.7}$$

Przypuśćmy, że dla pewnego ciągu $x_n \to x_0$

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^2 \to \infty.$$

Wtedy

$$\frac{\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-m\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)^2}}=\frac{\left|1-\frac{m}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}\right|}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)^2}+1}}\to 1,$$

więc nie ma mowy o styczności. Widać stąd, że warunkiem równoważnym (7.64) jest

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|=0,$$

a to jest nasza teza. □

7.8. *Jeżeli funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest różniczkowalna w x_0, to jest też ciągła w tym punkcie.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z istnienia aproksymacji liniowej (7.4). □

7.9. Przykład. Niech $f(x)=|x|$ i niech $x_0=0$. Iloraz różnicowy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}$$

nie ma granicy, gdy $x\to 0$, więc f nie jest różniczkowalna w tym punkcie. Wykres tej funkcji ma w punkcie $(0,0)$ „ostrze” i nie ma stycznej.

Mówimy, że funkcja $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ ma w punkcie $x_0\in(a,b)$ maksimum lokalne, jeśli istnieje $h>0$, takie że $(x_0-h,x_0+h)\subset(a,b)$ i

$$f(x)\leqslant f(x_o),\qquad x\in(x_0-h,x_0+h).$$

Czytelnik łatwo domyśli się, jak definiujemy ścisłe maksimum lokalne, oraz minimum i ścisłe minimum lokalne. Maksimum i minimum lokalne należy odróżniać od największej i najmniejszej wartości funkcji na jej całej dziedzinie.

7.10. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli f ma ekstremum lokalne w x_0, to $f'(x_0)=0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że f ma w x_0 maksimum lokalne. Wtedy dla dostatecznie małych $h\neq 0$

$$f(x_0-h)\leqslant f(x_0),$$

skąd widać, że lewostronne ilorazy różnicowe będą nieujemne, a prawostronne niedodatnie. Zatem

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

W przypadku minimum lokalnego rozumujemy analogicznie. □

7.11 (Arytmetyka pochodnych). *Niech f,g będą funkcjami określonymi w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli obie są różniczkowalne w x_0 , to także funkcje $f+g$ i $f\cdot g$ są różniczkowalne w tym punkcie i*

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),\qquad (f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Jeżeli ponadto $g(x_0)\neq 0$, to funkcja f/g, która jest dobrze określona w pewnym (być może mniejszym) otoczeniu x_0, jest różniczkowalna w x_0 i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Dowód. Mamy

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

skąd po przejściu do granicy otrzymujemy pierwszą część tezy. Mamy też

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)\\ &+ f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot,\end{aligned}$$

co pociąga drugą część tezy, czyli *wzór Leibniza.*

Trzecią część dotyczącą ilorazu udowodnimy korzystając z drugiej. Mamy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0),$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

a to wynika natychmiast z tożsamości

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)\right) = \frac{1}{h}\cdot\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)},$$

ciągłości g w x_0 i przejścia granicznego. □

7.12. Przykład. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$$

będzie wielomianem. Z powyższych twierdzeń łatwo wynika, że

$$f'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}.$$

7.13. Przykład. Rozważmy funkcję zadaną szeregiem potęgowym

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x\in(-r,r),$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu. Jak pamiętamy, dla każdego ustalonego $x\in(-r,r)$ i $|h| < r-|x|$,

$$f(x+h)-f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)h^n,$$

gdzie

$$\alpha_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k x^{k-n}.$$

Zatem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)h^{n-1}$$

i w konsekwencji

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha_1(x),$$

czyli

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Okazuje się zatem, że funkcja zadana szeregiem potęgowym jest różniczkowalna w każdym punkcie otwartego przedziału zbieżności, a jej pochodna wyraża się także szeregiem potęgowym, który, jak łatwo spostrzec, ma ten sam promień zbieżności r. Ponadto jest on zbudowany z pochodnych wyrazów szeregu. Warto zapamiętać regułę, że szereg potęgowy różniczkujemy *wyraz po wyrazie.*

O różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 można mówić tylko wtedy, gdy jest ona określona w pewnym otoczeniu (czyli przedziale otwartym) zawierającym ten punkt. Dlatego sformułowanie f *jest różniczkowalna w* x_0 będzie odtąd oznaczać, że f jest określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w x_0.

7.14. Twierdzenie. *Niech g będzie funkcją różniczkowalną w x_0, a f różniczkowalną w $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja $F = f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 i $F'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Dowód. Na mocy[1] (7.3) istnieje funkcja φ ciągła w x_0 i funkcja ψ ciągła w y_0, taka że

$$g(x) - g(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \qquad f(y) - f(y_0) = \psi(y)(y - y_0),$$

a ponadto

$$\varphi(x_0) = g'(x_0), \qquad \psi(y_)) = f'(y_0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = \\ &= \psi(g(x))(g(x) - g(x_0)) = (\psi \circ g)(x)\varphi(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

gdzie funkcja $\chi(x) = (\varphi \circ g)(x)\varphi(x)$ jest ciągła w x_0. Zatem znowu na mocy (7.3), $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0, a jej pochodna jest równa

$$(f \circ g)'(x_0) = \chi(x_0) = \psi(g(x_0))\varphi(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

□

7.15. Przykład. Niech $F(x) = x^x$ dla $x > 0$. Mamy

$$F(x) = e^{x \log x} = f(g(x)),$$

gdzie $g(x) = x \log x$ i $f(y) = e^y$. Stąd

$$(x^x)' = f'(x \log x)(x \log x)' = e^{x \log x}(\log x + 1) = x^x(\log x + 1).$$

7.16. Twierdzenie. *Niech funkcja $f : (a, b) \to (c, d)$ będzie wzajemnie jednoznaczna i ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ niezerową pochodną, a funkcja odwrotna $g : (c, d) \to (a, b)$ niech będzie ciągła w $y_0 = f(x_0)$. Wtedy g jest różniczkowalna w y_0 i $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{lub} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

[1] Na ten prosty dowód zwrócił moją uwagę pan Remigiusz Suwalski.

Dowód. Mamy

$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

co dowodzi naszej tezy, pod warunkiem, że $y\to y_0$ pociąga $x\to x_0$. To jednak wynika z założonej ciągłości g w tym punkcie. □

Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x\in(a,b)$, to mówimy, że jest *różniczkowalna w przedziale* (a,b). W ten sposób pojawia się nowa funkcja

$$(a,b)\ni x\mapsto f'(x)\in\boldsymbol{R},$$

zwana *funkcją pochodną*.

7.17. Twierdzenie. *Funkcja pochodna na odcinku otwartym I ma własność Darboux.*

Dowód. Niech

$$f'(a)<A<f'(b)$$

dla pewnych $a<b$ z odcinka I. Należy pokazać, że istnieje punkt $a<c<b$, taki że $f'(c)=A$.

Przypuśćmy na razie, że $A=0$. Skoro $f'(a)<0$ i $f'(b)>0$, to dla pewnych $a<a_1<b_1<b$ jest

$$f(a_1)<f(a),\qquad f(b_1)<f(b),$$

a więc w żadnym z punktów a,b funkcja ciągła f nie przyjmuje swojej najmniejszej wartości na odcinku $[a,b]$. Istnieje więc $c\in(a,b)$, w którym ta najmniejsza wartość jest przyjęta i tam też $f'(c)=0$.

Jeśli teraz A jest dowolne, stosujemy powyższe rozumowanie do funkcji

$$g(x)=f(x)-Ax,$$

która spełnia

$$g'(a)<0<g'(b).$$

Mamy więc $g'(c)=0$ dla pewnego $a<c<b$, a stąd $f'(c)=A$. □

7.18. Twierdzenie (Rolle). *Niech $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$, gdzie $a<b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a,b). Jeżeli ponadto $f(a)=f(b)$, to istnieje $c\in(a,b)$, takie że $f'(c)=0$.*

Dowód. Funkcja f jako ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje największą i największą wartość. Jeśli obie są przyjęte na końcach przedziału, to wobec $f(a)=f(b)$ funkcja jest stała i nasza teza jest oczywista. W przeciwnym wypadku f ma ekstremum lokalne (i globalne) w $c\in(a,b)$ i w tym punkcie musi być $f'(c)=0$. □

7.19. Twierdzenie (Lagrange). *Niech $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$, gdzie $a<b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a,b). Wtedy istnieje $c\in(a,b)$, takie że*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),\qquad x\in[a,b].$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $F=f-g$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc $F'(c)=0$ dla pewnego $c\in(a,b)$, a stąd

$$f'(c)=g'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Z twierdzenia Lagrange'a łatwo otrzymać następujące trzy wnioski.

7.20. Wniosek. *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest funkcją stałą.*

7.21. Wniosek. *Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest rosnąca (malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna w tym przedziale jest nieujemna (niedodatnia).*

7.22. Wniosek. *Jeżeli funkcja f określona w przedziale (a, b) ma dodatnią (ujemną) pochodną w tym przedziale, to jest ściśle rosnąca (malejąca).*

Mówimy, że funkcja $g : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ *zmienia znak* z ujemnego na dodatni w punkcie $c \in (a, b)$, jeśli istnieje $h > 0$, takie że $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ oraz

$$g(x) \begin{cases} < 0, & c - h < x < c, \\ = 0, & x = c, \\ > 0, & c < x < x + h. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy zmianę znaku z dodatniego na ujemny.
A oto kolejny wniosek z twierdzenia Lagrange'a.

7.23. Wniosek. *Niech f będzie różniczkowalna w (a, b). Jeśli pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to f ma w x_0 ścisłe minimum (maksimum) lokalne.*

Dowód. Przypuśćmy, że pochodna zmienia znak w x_0 z ujemnego na dodatni. Wtedy dla x dostatecznie bliskich x_0

$$f(x) - f(x_0) = f'(c(x))(x - x_0) > 0,$$

gdzie $c(x)$ leży w odcinku otwartym $\Big(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}\Big)$, więc x_0 jest punktem ścisłego minimum. Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny. □

Niech będzie dana funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$. Funkcję różniczkowalną $F : (a, b) \to \boldsymbol{R}$, taką że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a, b)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f. Oczywiście, jeśli F jest pierwotną f, to i $F_c(x) = F(x) + c$ jest pierwotną f, więc funkcja pierwotna (o ile istnieje) nie jest wyznaczona jednoznacznie. Tym niemniej, dwie różne funkcje pierwotne na odcinku mogą się różnić tylko o stałą. Rzeczywiście, jeśli

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \qquad x \in (a, b),$$

to $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, więc na mocy Wniosku 7.20, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała.

7.24. Lemat. *Funkcja f zadana szeregiem potęgowym*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in (-r, r),$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu, ma zawsze funkcję pierwotną. Wyraża się ona szeregiem potęgowym

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

o tym samym promieniu zbieżności.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że promień zbieżności nowego szeregu jest także równy r, a potem różniczkując wyraz po wyrazie przekonujemy się, że $F' = f$. □

Nie każda jednak funkcja ma pierwotną. Wystarczy przypomnieć sobie, że funkcja pochodna ma zawsze własność Darboux (por. Twierdzenie 7.17). Zatem funkcja nie mająca tej własności, a w szczególności funkcja mająca nieciągłości pierwszego rodzaju, nie może mieć pierwotnej. Później zobaczymy jednak, że każda funkcja *ciągła* ma pierwotną.

7.25. Przykład. Korzystając z lematu rozwiniemy funkcję logarytmiczną w szereg potęgowy. Niech

$$g(x) = \log(1+x), \qquad |x| < 1.$$

Funkcja pochodna rozwija się w szereg geometryczny

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

o promieniu zbieżności $r = 1$, więc

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

dla $|x| < 1$, bo $g(0) = 0$.

7.26. Przykład. Pamiętamy, że

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Postaramy się teraz wzmocnić te oszacowania, zmniejszając nieco prawą stronę, a zwiększając lewą. Dla $0 < x < 1$ mamy

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

więc

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} > 2x + \frac{2x^3}{3}$$

oraz

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &< 2x + \frac{2}{3}x^3 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}.\end{aligned}$$

Podstawiając $x = \frac{1}{2n+1}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12(n+\frac{1}{2})^2}\right) < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12n(n+1)}\right). \tag{7.27}$$

W tym miejscu pozwolimy sobie na dygresję i pokażemy, jak można wykorzystać tak subtelne nierówności.

7.28. Twierdzenie (wzór Stirlinga). *Istnieje stała $A > 0$, taka że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$*

$$A < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < A e^{1/12n}.$$

Dowód. Niech $s_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Mamy

$$\log \frac{s_n}{s_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 > 0,$$

więc ciąg $\{s_n\}$ jest ściśle malejący. Jako ciąg liczb dodatnich ma granicę $A \geqslant 0$. Tę samą granicę ma ciąg $t_n = s_n e^{-\frac{1}{12n}}$, który z kolei jest ściśle rosnący, bo

$$\log \frac{t_n}{t_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) < 0,$$

co pokazuje, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$s_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < s_n.$$

$\square$

Stała A w rzeczywistości jest równa $A = \sqrt{2\pi}$, ale to ustalimy dopiero w rozdziale 9.

Powracamy do głównego toku wykładu. Twierdzenie Lagrange'a pozwala na następujące ważne uogólnienie.

7.29. Twierdzenie (Cauchy). *Niech $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, gdzie $a < b$, będą funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi w (a,b). Niech ponadto $g'(x) \neq 0$, $a < x < b$. Wtedy istnieje $c \in (a,b)$, takie że*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $g' > 0$ na $[a,b]$. Niech $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$. Wtedy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\circ g^{-1}(\beta) - f\circ g^{-1}(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

więc na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = (f\circ g^{-1})'(\gamma) = \frac{f'(g^{-1}(\gamma))}{g'(g^{-1}(\gamma))}$$

dla pewnego $\alpha < \gamma < \beta$. Kładąc $c = g^{-1}(\gamma)$, otrzymujemy tezę. $\square$

7.30. *Uwaga.* Często wygodnie jest punkt pośredni czy to w twierdzeniu Lagrange'a, czy Cauchy'ego, zapisywać w postaci

$$c = a + \theta(b-a),$$

gdzie $\theta \in (0,1)$. Zauważmy też, że oba wzory obowiązują także dla $b < a$.

7.31. Przykład. Niech $f(x) = \sin x$. Stosując twierdzenie Lagrange'a z $a = 0$, $b = x$, otrzymujemy

$$\sin x = x\cos\theta x, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

dla pewnego $0 < \theta < 1$. Natomiast stosując twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$ na tym samym przedziale, mamy

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\cos\vartheta x}{2\vartheta x},$$

skąd

$$\sin x = \frac{x\cos\vartheta x}{2\vartheta}$$

dla pewnego $0 < \vartheta < 1$.

Jako wniosek z twierdzenia Cauchy'ego można otrzymać tak bardzo lubiane reguły de l'Hospitala.

7.32. Wniosek (Pierwsza reguła de l'Hospitala). *Niech będą dane funkcje różniczkowalne*

$$f, g : (a, b) \to \boldsymbol{R},$$

gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$. *Załóżmy, że* $g'(x) \neq 0$ *dla* $a < x < b$. *Wtedy warunki*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$$

pociągają

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Dowód. Rozszerzamy nasze funkcje w sposób ciągły na przedział $(a, b]$, kładąc $f(b) = g(b) = 0$. Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$ na mocy twierdzenia Cauchy'ego istnieje $\xi \in (x, b)$, takie że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Gdy $x \to b-$, to także $\xi \to b-$, skąd natychmiast wynika teza. □

7.33. *Uwaga.* Warunek

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$$

nazywa się krótko *symbolem* $\frac{0}{0}$ lub *nieoznaczonością typu* $\frac{0}{0}$.

7.34. Wniosek (Druga reguła de l'Hospitala). *Niech będą dane funkcje różniczkowalne*

$$f, g : (a, b) \to \boldsymbol{R},$$

gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$. *Załóżmy, że* $g'(x) \neq 0$ *dla* $a < x < b$. *Wtedy warunki*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$$

pociągają

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $g'(x) > 0$, a więc, że g jest ściśle rosnąca. Niech $x_n \to b$ i $a < x_n < x_{n+1} < b$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ istnieje $x_n < \xi_n < x_{n+1}$, takie że

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \beta,$$

skąd na mocy twierdzenia Stolza

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \beta,$$

co wobec dowolności ciągu $x_n \to b-$ oznacza, że

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

□

7.35. *Uwaga.* Warunek

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$$

nazywa się krótko *symbolem* $\frac{\infty}{\infty}$ lub *nieoznaczonością typu* $\frac{\infty}{\infty}$.

7.36. *Uwaga.* Czytelnik nie powinien mieć wątpliwości, że analogiczne reguły dotyczą też granic prawostronnych w punkcie a przy odpowiednio zmodyfikowanych założeniach. Reguły de l'Hospitala pozostają w mocy także, gdy $b = \infty$ $(a = -\infty)$ lub $\beta = \pm\infty$, co pozostawiamy do sprawdzenia dociekliwemu Czytelnikowi.

7.37. Przykład. Rozważmy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Jest to granica typu $\frac{0}{0}$, gdzie obie funkcje

$$f(x)=\sin x - x, \quad g(x)=x^2,$$

są różniczkowalne na $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$. Badamy granicę ilorazu pochodnych

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\frac{1}{2}(\cos x)'\Big|_{x=0}=0$$

i, stosując pierwszą regułę de l'Hospitala, wnosimy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}=0.$$

7.38. Przykład. Mamy także

$$\frac{(\log x)'}{(x^a)'}=\frac{x^{-1}}{ax^{a-1}}=\frac{x^{-a}}{a}\to 0, \qquad x\to\infty,$$

dla każdego $a>0$, skąd na mocy drugiej reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0, \qquad a>0.$$

7.39. Przykład. Niech $f(x)=x^2\sin 1/x$ i $g(x)=\log(1+x)$. Wtedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\log(1+x)}=0,$$

natomiast

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=2x(1+x)\sin 1/x-(1+x)\cos 1/x$$

nie ma granicy, gdy $x\to 0$. Tak więc nieistnienie granicy ilorazu pochodnych nie świadczy o nieistnieniu granicy ilorazu funkcji.

Niech $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Może się okazać, że funkcja pochodna f' jest różniczkowalna w jakimś punkcie $x_0\in(a,b)$. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *dwukrotnie różniczkowalna* w x_0, a pochodną $(f')'(x_0)$ nazywamy *drugą pochodną* f w x_0 i oznaczamy przez $f''(x_0)$. Piszemy także

$$f''(x_0)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)\Big|_{x=x_0}.$$

7.40. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy istnieje funkcja Ω określona w otoczeniu 0, taka że*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+\Omega(h), \tag{7.41}$$

gdzie

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Omega(h)}{h^2}=0.$$

Dowód. Mamy
$$\frac{\Omega(h)}{h^2} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2}{h^2},$$
skąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego
$$\lim_{h\to 0}\frac{\Omega(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)}{2\theta h} - \frac{1}{2}f''(x_0) = 0.$$
□

7.42. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli istnieją liczby a, b, c, takie że*
$$f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + \Omega(h),$$
gdzie $\lim_{h\to 0}\frac{\Omega(h)}{h^2} = 0$, *to*
$$a = f(x_0), \qquad b = f'(x_0), \qquad c = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Dowód. Przechodząc z h do granicy w zerze, widzimy, że $a = f(x_0)$. Podstawiając tę wartość do wzoru i dzieląc przez h, dostajemy
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = b + ch + \frac{\Omega(h)}{h},$$
skąd po przejściu z h do zera mamy $b = f'(x_0)$. Aby obliczyć c, napiszmy
$$c = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} + \frac{\Omega(h)}{h^2}.$$
Stąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego
$$\begin{aligned} c &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)}{2\theta h} = \frac{1}{2}f''(x_0). \end{aligned}$$
□

7.43. Przykład. Niech
$$f(x) = (\sin x + x)^2 = \sin^2 x + 2x\sin x + x^2.$$
Jako że
$$\sin x = x + r_3(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{r_3(x)}{x^2} = 0,$$
mamy
$$f(x) = 4x^2 + 4xr_3(x) = 4x^2 + R_3(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^2} = 0.$$
Dlatego
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 8.$$

7.44. Przykład. Okazuje się, że istnieją jednak funkcje różniczkowalne spełniające warunek (7.42), lecz nie mające w x_0 drugiej pochodnej. Przykładem takiej funkcji jest
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Rzeczywiście, $|\varphi(x)| \leqslant |x|^3$ oraz
$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ale iloraz różnicowy

$$\frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = 3x \cos \frac{1}{x^2} + x^{-1} \sin \frac{1}{x^2}$$

nie ma granicy przy $x \to 0$.

7.45. Wniosek. *Jeżeli f jest funkcją określoną w otoczeniu punktu a i dwukrotnie różniczkowalną w a, to warunki*

$$f'(a) = 0, \qquad f''(a) \neq 0$$

pociągają istnienie w a ścisłego ekstremum lokalnego. Jeśli $f'(a) > 0$, jest to minimum. Jeśli zaś $f'(a) < 0$ – maksimum.

Dowód. Rzeczywiście, na mocy (7.40)

$$f(a+h) - f(a) = \left(\frac{1}{2} f''(a) + \frac{\Omega(h)}{h^2} \right) h^2$$

dla małych h, gdzie znak wyrażenia po prawej zależy tylko od $f''(a)$, gdyż

$$\frac{\Omega(h)}{h^2} \to 0, \qquad h \to 0.$$

□

Pochodne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie. Aby można było mówić o *pochodnej rzędu* $n+1$ w punkcie x_0, funkcja f musi być n-krotnie różniczkowalna w *pewnym otoczeniu* x_0. Jeśli funkcja pochodna rzędu n, którą oznaczamy przez $f^{(n)}$, jest różniczkowalna w x_0, to jej pochodną nazywamy pochodną rzędu $n+1$ funkcji f w x_0. Zatem

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0).$$

Pochodną rzędu n nazywamy też krótko n-tą pochodną. Piszemy także

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)\big|_{x=x_0}.$$

7.46. Przykład. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu. Wiemy, że szereg potęgowy jest różniczkowalny w otwartym przedziale zbieżności i jego pochodna wyraża się szeregiem potęgowym o tym samym promieniu zbieżności. Stąd natychmiast wynika, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów. Wiemy też, że dla każdego $a \in (-r, r)$

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a) h^n, \qquad |h| < r - |a|,$$

gdzie

$$\alpha_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k h^{k-n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Zatem

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n, \qquad |h| < r - |a|.$$

Co więcej, dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r_{N+1}(h),$$

gdzie

$$|r_{N+1}(h)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n \right| \leqslant C_{N+1}|h|^{N+1}, \qquad |h| \leqslant r/2.$$

Czytelnik powinien skojarzyć ten przykład z poznanymi już wcześniej rozwinięciami funkcji wykładniczej.

Przechodzimy do twierdzenia Taylora.

7.47. Twierdzenie (Wzór Taylora). *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w pewnym otoczeniu $a \in \boldsymbol{R}$. Wtedy dla dostatecznie małych h*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + r_{n+1}(h),$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n+1}(h)}{h^n} = 0. \tag{7.48}$$

Dowód. Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Warunek początkowy dla $n = 0$ to po prostu definicja pochodnej.

Zauważmy następnie, że

$$r'_{n+1}(h) = f'(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Zatem pochodna r'_{n+1} jest resztą stopnia n funkcji pochodnej f'. Jeśli zatem założymy indukcyjnie, że wzór (7.48) jest spełniony dla pewnego $n - 1 \geqslant 1$ w przypadku funkcji pochodnej, to stosując pierwszą regułę de l'Hospitala, otrzymamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n+1}(f,h)}{h^n} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{r_n(f',h)}{h^{n-1}} = 0$$

a o to właśnie nam chodziło. □

Resztę r_n we wzorze Taylora można zapisać precyzyjniej.

7.49. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$r_n(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n.$$

dla pewnego $\theta \in (0,1)$.

Dowód. Przypomnijmy, że

$$r_n(h) = r_n(f,h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Znowu zastosujemy indukcję. Warunek początkowy

$$r_1(h) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$$

to po prostu twierdzenie Lagrange'a.

Załóżmy następnie podobnie jak w dowodzie twierdzenia Taylora, że wzór na resztę obowiązuje w przypadku reszty $r_{n-1}(f',h)$. Wtedy na mocy twierdzenia Cauchy'ego

$$\frac{r_n(h)}{h^n} = \frac{r'_n(\theta h)}{n(\theta h)^{n-1}} = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a+\theta_2 h)}{n!},$$

skąd natychmiast wynika żądana równość. □

7.50. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$\lim_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

7.51. *Uwaga.* Przypuśćmy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w otoczniu punktu a o promieniu $\delta > 0$. Wzór Taylora można zapisać wtedy w nieco innej postaci. Mianowicie, dla $x \in (a-\delta, a+\delta)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(a,x),$$

gdzie oczywiście $R_n(a,x)=r_n(a,x-a)$ i

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n}=0.$$

7.52. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$r_n(h)=\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(a+\vartheta h)}{(n-1)!}h^n.$$

dla pewnego $\vartheta \in (0,1)$ *i* $n \geqslant 1$. *Innymi słowy,*

$$R_n(a,x)=\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n.$$

Dowód. Dla x, y leżących dostatecznie blisko a zdefiniujmy pomocniczą funkcję

$$g(y)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k,$$

gdzie x traktujemy jako ustalony parametr. Zauważmy, że

$$g(a)=R_n(a,x), \qquad g(x)=0. \tag{7.53}$$

Mamy

$$\begin{aligned}g'(y)&=-f'(y)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k-\frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}\right)\\&=-\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1},\end{aligned}$$

więc, uwzględniając (7.53), na mocy twierdzenia Lagrange'a wnosimy, że istnieje $0<\theta<1$, taka że

$$\begin{aligned}R_n(a,x)&=g(a)-g(x)=g'(x+\theta(a-x))(a-x)\\&=\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)}{(n-1)!}(x-a)^n,\end{aligned}$$

gdzie dokonaliśmy podstawienia $\theta = 1-\vartheta$. Oczywiście $0<\vartheta<1$. □

Przy ustalonym a wielomian

$$\varphi_n(h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k,$$

nazywamy *wielomianem Taylora*, a resztę $r_{n+1}(h)$ – *resztą Peano* rozwinięcia funkcji f. Jak widzieliśmy, reszta r_n może być zapisana za pomocą n-tej pochodnej f w *postaci Lagrange'a* (Wniosek 7.49) lub *postaci Cauchy'ego* (Wniosek 7.52).

Czasem można otrzymać rozwinięcie funkcji w sumę częściową szeregu potęgowego, nie wiedząc dokładnie, jak wyglądają jej pochodne. Kolejne twierdzenie umożliwia sprawdzenie, czy dane rozwinięcie jest rzeczywiście rozwinięciem Taylora.

7.54. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale otwartym I. Jeśli dla pewnego $x_0 \in I$ i dostatecznie małych h*

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \rho_{n+1}(h),$$

gdzie

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho_{n+1}(h)}{h^n}=0,$$

to

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Zatem $\rho_{n+1}(h)=r_{n+1}(h)$ jest resztą Peano.

Dowód. Twierdzenie to udowodniliśmy już w przypadku $1\leqslant n\leqslant 2$. Załóżmy więc jego prawdziwość dla pewnego n. Wtedy

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n+1} c_k h^k + \rho_{n+2}(h)=\sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \rho_{n+1}(h),$$

gdzie $\rho_{n+1}(h)=c_{n+1}h^{n+1}+\rho_{n+2}(h)$ spełnia warunek rzędu malenia. Zatem na mocy założenia indukcyjnego $\rho_{n+1}=r_{n+1}$ jest resztą Peano i mamy

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy teraz zauważyć, że

$$c_{n+1}=\frac{r_{n+1}}{h^{n+1}}-\frac{\rho_{n+2}(h)}{h^{n+1}}\to\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

gdy $h\to 0$.

□

Rozwinięcie Taylora wokół $x_0=0$ nazywa się także rozwinięciem *Maclaurina.*

7.55. Przykład. Rozwińmy funkcję *sinus* we wzór Maclaurina. Jako że

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\sin x\Big|_{x=0}=0,$$
$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\sin x\Big|_{x=0}=(-1)^n\cos x\Big|_{x=0}=(-1)^n$$

dla $n\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$, rozwinięcie przyjmuje postać

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+r_{2n+1}(x),$$

gdzie

$$r_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta_n x}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

dla pewnego $\theta_n\in(0,1)$, a więc

$$|r_{2n+1}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

To pokazuje, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$
$$\lim_{n\to\infty} r_{2n+1}(x) = 0,$$
czyli
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Przypomnijmy, że
$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Podobieństwo tych rozwinięć tłumaczy częściowo podobieństwo nazw obu tych na pierwszy rzut oka bardzo niepodobnych funkcji.

7.56. Przykład. Niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Rozwińmy funkcję $f(x) = x^\alpha$ we wzór Taylora wokół punktu $x_0 = 1$. Mamy
$$\frac{d^k x^\alpha}{dx^k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}.$$
Zatem
$$\frac{1}{k!}\frac{d^k x^\alpha}{dx^k}\bigg|_{x=1} = \binom{\alpha}{k}$$
i wzór Taylora przyjmuje postać
$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} h^k + r_n(h), \qquad |h| < 1,$$
gdzie
$$r_n(h) = n(1-\vartheta_n)^{n-1}\binom{\alpha}{n}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n} h^n$$
jest resztą w postaci Cauchy'ego dla odpowiedniego $0 < \vartheta_n < 1$. Prawa strona wzoru Taylora, jeśli pominąć resztę, przedstawia sumę częściową szeregu potęgowego Taylora
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} h^k,$$
którego promień zbieżności jest równy 1, a więc zbieżnego dla $|h| < 1$. Udowodnimy, że w istocie
$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} h^k, \qquad |h| < 1.$$
W tym celu należy wykazać, że dla każdego ustalonego $h \in (-1, 1)$
$$\lim_{n\to\infty} r_n(h) = 0.$$

Jeśli $0 < h < 1$, to
$$|r_n(h)| \leqslant n\left|\binom{\alpha}{n}\right|1+\vartheta h)^{\alpha-n} h^n \leqslant \left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n$$
dla $n > \alpha$. Jeśli zaś $-1 < h < 0$, to
$$\begin{aligned}|r_n(h)| &= n(1-\vartheta_n)^{n-1}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n \\ &= n\left(\frac{1-\vartheta_n}{1+\vartheta_n h}\right)^{n-1}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-1}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n \leqslant n(1-|h|)^{-1}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że dla $-1 < h < 1$

$$|r_n(h)| \leqslant n\left|\binom{\alpha}{n}\right|(1-|h|)^{-1}|h|^n,$$

a ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}h^n$$

jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r = 1$, więc $r_n(h) \to 0$.

7.57. Przykład. Zastosujmy wzór z poprzedniego przykładu w przypadku $\alpha = \frac{1}{2}$. Mamy

$$\sqrt{1+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} h^k, \qquad |h| < 1,$$

gdzie

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1}\frac{4^{-k}}{2k-1}\binom{2k}{k}, \qquad k \geqslant 1.$$

Biorąc $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $h = -x^2$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^{2k},$$

gdzie

$$(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} = 4^{-k}\binom{2k}{k}.$$

Wobec tego

$$(\arcsin x)' = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k}x^{2k},$$

a stąd

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

dla $|x| < 1$. W szczególności pamiętając, że $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mamy

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{2k+1}\binom{2k}{k}.$$

I jeszcze jeden przykład.

7.58. Przykład. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Nie ma wątpliwości, że nasza funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna poza zerem. Aby zbadać jej różniczkowalność w punkcie $x = 0$, sprawdźmy najpierw przez indukcję, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ i każdego $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}, \tag{7.59}$$

gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Rzeczywiście, dla $n = 0$, $p_0(x) = 1$. Natomiast

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{p_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}p_n(x)}{x^{6n}} - \frac{p_n}{x^{3n}} \cdot \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2} \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = x^3 p_n'(x) + (3nx^2 + 2)p_n(x).$$

Ze wzoru (7.59) i nierówności

$$e^{-1/x^2} \leqslant N! x^{2N}$$

prawdziwej dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ wynika, że

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, a stąd przez indukcję, że f ma wszystkie pochodne w zerze i

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wobec tego rozwinięcie Taylora funkcji f wokół zera przyjmuje dla dowolnego n postać

$$f(h) = r_n(h).$$

Widać też, że funkcja f nie rozwija się w szereg Taylora, bo to oznaczałoby, że jest funkcją zerową, a tak oczywiście nie jest.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ jest *wypukła*, jeśli dla każdych $x, y \in I$ i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{7.60}$$

Aby lepiej zrozumieć tę definicję, zauważmy, że sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ jest wykresem funkcji liniowej

$$g_{x,y}(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x) = \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right) f(x) + \frac{t-x}{y-x} f(y),$$

a każdy punkt $t \in (x, y)$ można zapisać jako

$$t = \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right)x + \frac{t-x}{y-x}y = (1-\lambda_t)x + \lambda_t y.$$

Wstawiając tę właśnie wartość $\lambda = \lambda_t$ do (7.60), widzimy, że wypukłość f jest równoważna warunkowi

$$f(t) \leqslant g_{x,y}(t), \qquad t \in (x, y), \quad x, y \in I.$$

Zatem funkcja f jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x, y \in I$ wykres funkcji na odcinku $[x, y]$ leży nie wyżej niż sieczna wykresu w punktach o odciętych x, y.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ jest *ściśle wypukła*, jeśli dla każdych $x \neq y$ z przedziału I i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{7.61}$$

7.62. *Uwaga.* Jeśli $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, to warunek

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x,y \in I,$$

pociąga wypukłość. Rzeczywiście, gdyby dla pewnego $c = (1-\lambda)x + \lambda y$ zachodziła nierówność $f(c) > g_{x,y}(c)$, to ze względu na ciągłość f mielibyśmy $f(z) > g_{x,y}(z)$ dla z z pewnego odcinka wokół c. Niech teraz

$$a = \inf\{z < c : f(z) > g_{x,y}(z)\}, \qquad b = \sup\{z > c : f(z) > g_{x,y}(z)\}.$$

Wtedy $x \leqslant a < c < b \leqslant y$ i $g_{x,y}(a) = f(a)$, $g_{x,y}(b) = f(b)$, więc $g_{x,y} = g_{a,b}$. Mamy zatem

$$f(z) > g_{a,b}(z), \qquad a < z < b,$$

co dla $z = \frac{a+b}{2}$ daje sprzeczność z założeniem.

7.63. Twierdzenie. *Funkcja $I \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x, c, y \in I$*

$$x < c < y \implies \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant \frac{f(y)-f(c)}{y-c}. \tag{7.64}$$

Dowód. Niech

$$c = (1-\lambda)x + \lambda y, \qquad \lambda = \frac{c-x}{y-x}.$$

Warunek wypukłości

$$f(c) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

przekształcamy, korzystając z $f(c) = (1-\lambda)f(c) + \lambda f(c)$ do równoważnej postaci

$$(1-\lambda)(f(c)-f(x)) \leqslant \lambda(f(y)-f(c)),$$

skąd po podstawieniu wartości λ łatwo dostajemy warunek (7.64). □

7.65. Wniosek. *Funkcja f jest ściśle wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek* (7.64) *z ostrą nierównością.*

7.66. Wniosek. *Jeśli $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest (ściśle) wypukła, to dla każdego $c \in I$ funkcja*

$$f_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \qquad x \in I \setminus \{c\},$$

jest (ściśle) rosnąca.

Dowód. Niech f bedzie wypukła. Jeśli $x < c < y$, to $f_c(x) \leqslant f_c(y$ na mocy warunku (7.64). Niech więc teraz $x < y < c$. Mamy

$$y = (1-\lambda)x + \lambda c, \qquad \lambda = \frac{y-x}{c-x},$$

i na mocy warunku wypukłości

$$f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(c) \leqslant (1-\lambda)(f(x)-f(c)) + f(c),$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy tezę. Jeśli $c < x < y$, rozumujemy podobnie. W przypadku ścisłej wypukłości należy tylko pamiętać, że wszystkie nierówności są ostre. □

7.67. Wniosek. *Funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest (ściśle) wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy f' jest (ściśle) rosnąca.*

Dowód. Jeśli f' jest (ściśle) rosnąca, (ścisła) wypukłość f wynika z oczywistego zastosowania twierdzenia o wartości średniej. Odwrotna implikacja wynika z (7.64) oraz Wniosku 7.66. □

7.68. Wniosek. *Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy f'' jest nieujemna.*

7.69. Wniosek. *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i f'' jest dodatnia, to f jest ściśle wypukła.*

Mówimy, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest *(ściśle) wklęsła*, jeżeli funkcja $-f$ jest (ściśle) wypukła.

Niech $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ będzie ciągła. Jeśli punkt $c \in (a, b)$ ma tę własnosc, że dla pewnego dostatecznie małego $\epsilon > 0$ funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale $(c - \epsilon, c)$ i ściśle wklęsła na przedziale $(c, c + \epsilon)$ lub też na odwrót, to punkt c nazywa się *punktem przegięcia* funkcji f.

7.70. *Uwaga.* Z definicji wynika natychmiast, że jeśli druga pochodna dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f zmienia znak w punkcie c, to jest on punktem przegięcia.

7.71. *Niech $n \geqslant 2$. Niech będzie dana funkcja f różniczkowalna n razy w otoczeniu punktu c. Załóżmy, że*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1}(c) = 0$$

oraz

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Jeżeli n jest parzyste, to punkt c jest punktem ścisłego ekstremum lokalnego, a jeśli nieparzyste – punktem przegięcia.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że n jest parzyste i rozwińmy we wzór Taylora pochodną f' wokół punktu c. Mamy

$$f'(c + h) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} h^{n-1} + r_n(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} + \frac{r_n(h)}{h^{n-1}} \right) h^{n-1},$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_n(h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Widać więc, że wobec nieparzystości $n - 1$ pochodna f' zmienia znak w punkcie c, co dowodzi, że c jest punktem ścisłego ekstremum.

Jeśli natomiast n jest nieparzyste, to rozwijamy drugą pochodną we wzór Taylora wokół c i widzimy, że

$$f''(c + h) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} h^{n-2} + r_{n-1}(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-1}(h)}{h^{n-2}} \right) h^{n-2},$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n-1}(h)}{h^{n-2}} = 0.$$

więc teraz wobec nieparzystości $n - 2$ druga pochodna zmienia znak w c. Zatem c jest punktem przegięcia. $\square$

Zadania

1. Wyprowadź wzory $(\sin)' = \cos$, $(\cos)' = -\sin$.

2. Wykaż, że funkcje $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ i $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ są wzajemnie jednoznaczne.

3. Pokaż, że $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

4. Zróżniczkuj funkcje:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 1}, \quad \sqrt{2x - x^2}, \quad \frac{x}{\sqrt{1 + x^3}}, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \log \sin x, \quad \log \operatorname{tg} x,$$

$$\arcsin(1 - x), \quad \log \sinh x, \quad \cosh(\sinh x), \quad e^{e^{x^2}}, \quad \operatorname{tg}^4 x, \quad \exp(\exp(\exp x)).$$

5. Znajdź pochodne funkcji $\arccos : (-1, 1) \to (0, 2\pi)$ i $\arctan : \boldsymbol{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

6. Udowodnij, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}.$$

7. Udowodnij, że jeśli funkcja ciągła ma maksima lokalne w punktach $a < b$, to ma też minimum lokalne w pewnym punkcie $a < c < b$.

8. Sprawdź wzory $(\sinh)' = \cosh$, $(\cosh)' = \sinh$ przez zróżniczkowanie odpowiednich szeregów.

9. Czy istnieje funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $f'(x) = \mathbf{m}(x)$ dla $x \in \boldsymbol{R}$?

10. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^2 n}{n}$ jest warunkowo zbieżny.

11. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $\varphi(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$ i punkty, w których funkcja ta jest różniczkowalna.

12. Dla jakich $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $\psi(x) = \cos \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $\psi(0) = a$ ma własność Darboux?

13. Znajdź styczną do wykresu funkcji $y = |x|^{3/2}$ w punkcie $x = 0$.

14. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = \mathbf{m}(x)^{\mathbf{m}(x)}$.

15. Dana jest nieznikająca funkcja ciągła f na $[a, b]$, która jest ponadto różniczkowalna w (a, b). Pokaż, że istnieje $a < \xi < b$, takie że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) f(b) f'(\xi)}{f(\xi)^2}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $1/f$.

16. Dana jest dodatnia funkcja ciągła f na $[a, b]$, która jest ponadto różniczkowalna w (a, b). Pokaż, że istnieje $a < \xi < b$, takie że

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left\{\frac{f'(\xi)(b - a)}{f(\xi)}\right\}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $\log f$.

17. Dana jest funkcja f różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu a. Nawet gdy f' nie jest ciągła w a (podaj taki przykład), istnieje ciąg $0 \neq h_n \to 0$, taki że $f'(a + h_n) \to f'(a)$.

18. Wiedząc, że $f, g \in C([a, b]$ są różniczkowalne w (a, b) i nigdzie nie znikają, pokaż, że istnieje $c \in (a, b)$, takie że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c) g(c)^2}{g'(c) f(c)^2}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $1/f$ i $1/g$.

19. Wiedząc, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a, oblicz granicę

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}.$$

20. Wiedząc, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(f(a+\frac{1}{n}) - f(a)\Big).$$

21. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\sin^4 \frac{n}{n+1} - \sin^4 1\Big).$$

22. Udowodnij, że funkcja pochodna funkcji nieparzystej (parzystej) jest parzysta (nieparzysta), a funkcja pochodna funkcji okresowej jest okresowa z tym samym okresem.

23. Dana jest rosnąca funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$. Pokaż, że f jest ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór tych punktów x, w których $f'(x) > 0$, jest gęsty w (a,b).

24. Czy funkcja Heaviside'a

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

jest funkcją pochodną? W których punktach jest różniczkowalna? W których jest ciągła?

25. Wykaż, że funkcje

$$x \mapsto x|x|, \qquad x \mapsto |x|^3, \qquad x \mapsto \sigma(x)\sin^2 x \qquad x \mapsto |x|\sin^2 x$$
$$x \mapsto \mathbf{m}(x)\sin^2 \pi x \qquad x \mapsto (\sin x + |\sin x|)^2 \qquad x \mapsto |\sin x|^{3/2}$$

są wszędzie różniczkowalne i oblicz ich pochodne.

26. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a i $f(a) > 0$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\Big)^n.$$

27. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} x^{x^{\sin x}}$.

28. Dla jakich wartości $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $x \mapsto ax - \sin x$ jest rosnąca na $\boldsymbol{R}$?

29. Wykaż przez różniczkowanie, że funkcja $f(x) = x\log(1+\frac{a}{x})$ jest ściśle rosnąca na $(0,\infty)$.

30. Wykaż, że funkcja $g(x) = \log_x(x+1)$ jest ściśle malejąca na $(1,\infty)$. Wywnioskuj stąd, że $\log_2 3 > \log_4 5$.

31. Pokaż, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4}+x) - \operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4}-x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)} = \frac{32}{\pi^2+16},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi^2}{4} - \arccos x \cdot \arccos 2x}{\arcsin x} = \frac{3\pi}{2}.$$

32. Sprawdź, że $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ dla $0 < x < e$.

33. Udowodnij, że $e^x < (1+x)^{1+x}$ dla $x > 0$.

34. Udowodnij, że $(\frac{x+1}{2})^{x+1} \leqslant x^x$ dla $x > 0$.

35. Znajdź lokalne ekstrema funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto x^x$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^n e^{-x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^4(1-x)^3$.

36. Dane są parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Znajdź minima lokalne i najmniejszą wartość funkcji a) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-k)^2$, b) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

37. Znajdź największą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ na $\boldsymbol{R}$.

38. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $\boldsymbol{R} \ni x \to \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

39. Znajdź lokalne ekstrema funkcji: $(0,\infty) \ni x \mapsto x^{1/x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto |x|e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x + |\sin 2x|$.

40. Niech $\alpha > 1$. Udowodnij nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\alpha} < \frac{x^a+y^a}{2}$ dla $x, y > 0$, $x \neq y$.

41. Udowodnij, że funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ o ograniczonej pochodnej spełnia warunek Lipschitza.

42. Udowodnij, że funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[c,d] \subset (a,b)$.

43. Funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna. Ponadto $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b) \backslash \{c\}$. Udowodnij, że f jest ściśle rosnąca w (a,b).

44. Dla jakich wartości $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $x \mapsto ax - \sin x$ jest ściśle rosnąca na $\boldsymbol{R}$?

45. Funkcję $x \to \cos x$ przedstaw w postaci szeregu potęgowego.

46. Rozwiń funkcje *sinus* i *cosinus* w szeregi potęgowe wokół punktu $x = \frac{\pi}{2}$.

47. Znajdź styczne do funkcji $0 \neq x \mapsto \log|x|$ w punktach o odciętych $x = 1$ i $x = -1$.

48. Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$. Udowodnij, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$ i oblicz wszystkie jej pochodne w 0.

49. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $0 < x \mapsto \sqrt{x}$ wokół punktu $x = 2$.

50. Wiadomo, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $a \in \boldsymbol{R}$. Oblicz

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

51. Funkcję $x \to \log(1+x^3)$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x = 0$.

52. Funkcję $x \sin x - \cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x = 0$.

53. Rozwiń w szereg Taylora funkcje $f(x) = \sin x + \sinh x$ i $g(x) = \cos x + \cosh x$.

54. Dana jest różniczkowalna funkcja $f : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, taka że $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Pokaż, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. [W tym celu zauważ, że $f(x) = \frac{f(x)e^x}{e^x}$ i zastosuj regułę de l'Hospitala.]

55. Znajdź największą wartość funkcji $x \to \sin^{2m} x \cos^{2n} x$ na $\boldsymbol{R}$.

56. Udowodnij nierówność Bernoulliego, stosując rachunek różniczkowy.

57. Znajdź minima lokalne funkcji $h(x) = \sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$.

58. Różniczkując k-krotnie tożsamość $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, wyprowadź rozwinięcie

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k.$$

59. Udowodnij nierówność

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \qquad x > 0.$$

60. Funkcja f jest ciągła w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna poza x_0. Pokaż, że jeśli istnieje granica $f'(x)$, gdy $x \to x_0$, to f jest różniczkowalna w x_0 w sposób ciągły.

61. Wyprowadź *wzór Halphena*: $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n x^{-n-1} e^{1/x}$.

62. Funkcję $f(x) = \sin(\sin x)$ rozwiń we zór Taylora wokół $x = \pi$ z resztą R_5 w postaci Peano.

63. Oblicz n-tą pochodną funkcji $\frac{\log x}{x}$, $e^x \cos x$. Rozwiń te funkcje we wzór Taylora w dowolnym punkcie x z dziedziny. Reszty zapisz w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

64. Funkcje $f(x) = \log(1 + x^3)$ i $g(x) = x \sin x + \cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora do wyrazów kwadratowych dookoła dowolnego x z dziedziny, resztę R_2 zapisując w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

65. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^n) - \sin^n x}{x^{n+2}}.$$

66. Udowodnij, że jeśli $a, c > 0$, to

$$\inf_{x\in \boldsymbol{R}} \Big(\max\{|ax + b|, |cx + d|\} \Big) = \frac{|ad - bc|}{a + c}.$$

67. Niech $f : (a, b) \to (c, d)$ będzie bijekcją. Pokaż, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ i $f'(x_0) \neq 0$, to f^{-1} jest dwukrotnie różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3}.$$

68. Dane są funkcje f i g różniczkowalne n razy w punkcie a. Udowodnij, że

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

69. Oblicz $(x^2 e^x)^{(2003)}$ i $(x^{2002} e^{1/x})^{(2003)}$.

70. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{\beta}(1 + x)^\beta - x - \frac{\beta-1}{2} x^2$ jest ściśle rosnąca (malejąca) dla $x > -1$, jeśli $\beta > 2$ $(1 < \beta < 2)$.

71. Rozwiń podane funkcje we wzór Maclaurina z resztą R_n w postaci Peano:

$$\frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} \quad (n = 5), \qquad e^{2x - x^2} \quad (n = 6), \qquad \sqrt[3]{\sin x^3} \quad (n = 13), \qquad \log \frac{\sin x}{x} \quad (n = 6).$$

72. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^\infty \binom{1/2}{k} = \sqrt{2}$, $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{1/2}{k} = 0$, $\sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

73. Oszacuj błąd bezwzględny przybliżeń:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{2}),$$
$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{10}), \qquad \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

74. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x}\right),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$$

75. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje $\sin x \cos x$, $\sin^2 x$, $\cosh^2 x$.

76. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje arshx i $\arccos x$.

77. Pokaż, że $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-1/2}{k} = \frac{\pi}{2}$.

78. Niech $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij przez indukcję *nierówność Jensena*

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

dla $x_j \in (a, b)$ i $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_j \geqslant 0$.

79. Wykaż, że funkcja $\sin : [\pi, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, a funkcja $(0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ jest wklęsła.

80. Udowodnij ponownie nierówność $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $p, q > 0$, korzystając z tego, że *logarytm* jest funkcją ściśle wklęsłą.

81. Udowodnij nierówność

$$\sqrt[n]{|\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n|} \leqslant \sin\{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots a_n)\}$$

dla $a_j \geqslant 0$.

82. Znajdź przedziały ścisłej wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^\alpha \log x$ w zależności od $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

83. Udowodnij nierówność $x \log x + y \log y \geqslant (x + y) \log \frac{x+y}{2}$, $x > 0$, $y > 0$.

84. Wykaż, że funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x - y)$ dla $x, y \in (a, b)$ i podaj interpretację geometryczną tego warunku.

85. Wykaż, że funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest ściśle wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x < y < z$ z odcinka (a, b)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0.$$

86. Funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest ściśle wypukła i nie jest monotoniczna. Udowodnij, że $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$, a następnie pokaż, że f przyjmuje wartość minimalną. Rozważ funkcje e^x, e^{-x} i $\cosh x$.

87. Niech $f : I \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Czy a) $|f|$, b) $\sqrt{|f|}$, c) f^2, d) $e^{|f|}$, e) $\log(1 + |f|)$, f) $\frac{1}{|f|}$ jest funkcją wypukłą?

88. Znajdź punkty przegięcia funkcji: $y = 3x^2 - x^3$, $y = x + \sin x$, $y = e^{-x^2}$, $y = \log(1 + x^2)$, $y = \sqrt{1 + x^2}$, $y = x^x$.

89. Pokaż, że wykres funkcji $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ma trzy punkty przegięcia leżące na tej samej prostej.

90. Funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest jednocześnie wklęsła i wypukła. Udowodnij, że f jest funkcją afiniczną, tj. $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \boldsymbol{R}$.

91. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Pokaż, że f ma wszędzie granice jednostronne.

92. Wykaż, że funkcja wypukła ma granice jednostronne (właściwe lub nie) na końcach swojej dziedziny I.

93. Funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest rosnąca (wypukła), ale nie ściśle rosnąca (wypukła). Pokaż, że na pewnym odcinku $[c, d] \subset (a, b)$ jest stała (liniowa).

94. Pokaż, że funkcja $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ jest odwracalna na całej prostej. Znajdź funkcje pochodne funkcji tgh i jej odwrotnej.

95. Znajdź punkty przegięcia funkcji a) $f(x) = [x] + \sin \pi x$, b) $g(x) = [x] \sin \pi x$.

96. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Pokaż, że istnieje $c \in [a, b]$, takie że f jest malejąca na $[a, c]$ i rosnąca na $[c, b]$. W szczególności, gdy $c = a$, f jest malejąca, a gdy $c = b$ – rosnąca na całej swej dziedzinie.

97. Pokaż, że funkcja wypukła (wklęsła) na odcinku domkniętym osiąga swoją największą (najmniejszą) wartość na jednym z końców przedziału.

98. Niech $f : I \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Dla $a, b \in I$ niech $g = g_{a,b}$ oznacza funkcj afiniczną, taką że $g(a) = f(a)$ i $g(b) = f(b)$. Pokaż, że jeśli $x \in I \setminus (a, b)$, to $g(x) \leqslant f(x)$. Zinterpretuj tę własność geometrycznie.

99. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie wypukła. Niech $c \in (a, b)$. Definiujemy dwie nowe funkcje: $G = g_{a,b}$ i $g = \min\{g_{a,c}, g_{c,b}\}$. Korzystając z poprzedniego zadania, wykaż, że $g \leqslant f \leqslant G$. Wywnioskuj stąd, że f jest ograniczona.

8. Jednostajność

Mówimy, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą $C > 0$, jeśli

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|, \qquad x, y \in I.$$

8.1. Przykład. a) Taką funkcją jest np. $\sin : \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$. Rzeczywiście,

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

więc

$$|\sin x - \sin y| \leqslant 2\Big|\sin \frac{x-y}{2}\Big| \leqslant |x - y|.$$

Stała Lipschitza wynosi $C = 1$.

b) Niech teraz $f : [1, \infty) \to \boldsymbol{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = 1/x$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| = \Big|\frac{y-x}{xy}\Big| \leqslant |x - y|,$$

więc f jest także lipschitzowska ze stałą $C = 1$.

8.2. Twierdzenie. *Funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła w każdym punkcie.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $I \ni x_n \to x_0 \in I$, to

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant C|x_n - x_0| \to 0,$$

więc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Niech będzie dana funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$. Warunek Lipschitza można wyrazić też tak: Istnieje stała $C > 0$, taka że dla wszelkich $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| \leqslant C.$$

Innymi słowy, funkcja lipschitzowska, to funkcja o ograniczonych *ilorazach różnicowych*, a optymalną stałą Lipschitza jest

$$C = \sup_{x \neq y} \Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big|.$$

8.3 (Kryterium). *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ ma ograniczoną pochodną, to spełnia warunek Lipschitza.*

Są i nieróżniczkowalne funkcje, które spełniają warunek Lipschitza.

8.4. Twierdzenie. *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, to spałnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[c, d] \subset (a, b)$. W szczególności, f jest ciągła na całym przedziale (a, b).*

Dowód. Rzeczywiście, niech $a < c_1 < c$ i $d < d_1 < b$. Skoro f jest wypukła, jej ilorazy różnicowe są rosnące, a zatem

$$\frac{f(c_1) - f(c)}{c_1 - c} \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(d_1) - f(d)}{d_1 - d}$$

dla każdych $x, y \in [c, d]$. Widzimy więc, że f ma ograniczone ilorazy różnicowe. □

Przypomnijmy sobie, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in I$, czyli

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I \quad \Big(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$

Mówimy, że $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest *jednostajnie ciągła*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I \quad \Big(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$

Cóż oznacza to przestawienie kwantyfikatorów? Po pierwsze, jak widać, warunek jednostajnej ciągłości jest silniejszy od warunku ciągłości. Zauważmy też, że istotna jest zamiana $\forall x \exists \delta$ na $\exists \delta \forall x$, która mówi, że teraz δ jest niezależna od x, a więc wspólna dla wszystkich $x \in I$. Prześledźmy to na przykładzie.

8.5. Przykład. Funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,1),$$

jest przykładem funkcji ciągłej, ale nie jednostajnie ciągłej. Rzeczywiście, kładąc $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$, mamy

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{i} \quad f(x_n) - f(y_n) = -1,$$

a więc $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1 = \varepsilon$, choć $x_n - y_n \to 0$. Jak widać, dla każdej $\delta > 0$ i dostatecznie dużych $n \in \boldsymbol{N}$, mamy

$$|x_n - y_n| < \delta \text{ i } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1,$$

co przeczy warunkowi jednostajnej ciągłości.

Zatem

8.6. *Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła, ale istnieją funkcje ciągłe, które nie są jednostajnie ciągłe.*

Przytoczony przykład sugeruje nową wersję definicji, tym razem w duchu Heinego.

8.7. *Funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ciągła, jeśli dla dowolnych ciągów $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset I$, takich że $x_n - y_n \to 0$, jest*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

8.8. *Uwaga.* Każda funkcja lipschitzowska $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ciągła, co wynika wprost z oszacowania

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant C|x_n - y_n|, \qquad x_n, y_n \in I.$$

8.9. *Jeśli $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ ma ograniczoną pochodną, to jest jednostajnie ciągła.*

8.10. Twierdzenie. *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że funkcja ciągła $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje wtedy $\varepsilon > 0$ i istnieją ciągi o wyrazach $x_n, y_n \in [a,b]$, takie że

$$x_n - y_n \to 0, \quad \text{ale} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu $\{y_n\}$ możemy wybrać podciąg $\{y_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a,b]$. Oczywiście wtedy także $x_{n_k} \to x_0$, więc wobec ciągłości funkcji f

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \qquad f(y_{n_k}) \to f(x_0),$$

a to przeczy naszemu założeniu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon > 0$. $\square$

Przechodzimy do kwestii zbieżności ciągów funkcyjnych. Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ o wspólnej dziedzinie D. Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny punktowo* do funkcji $f : D \to \boldsymbol{R}$, jeśli dla każdego $x \in D$

$$f_n(x) \to f(x).$$

W definicji tej nie ma nic nowego. Przypomnijmy chociażby doskonale nam znany wzór

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

który oznacza zbieżność punktową ciągu funkcji

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

do funkcji $f(x) = e^x$.

8.11. Przykład. Niech

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad x > 0.$$

Jak łatwo zauważyć, ciąg ten jest zbieżny punktowo do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Dla funkcji $f : D \to \boldsymbol{R}$ niech

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

A oto zapowiedziana definicja *jednostajnej zbieżności*. Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ jest *zbieżny jednostajnie* do $f : D \to \boldsymbol{R}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N \in \boldsymbol{N}} \ \forall_{n \geqslant N} \ \|f_n - f\| < \varepsilon,$$

co zapisujemy za pomocą podwójnej strzałki:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in D.$$

8.12. *Uwaga.* Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ jest *zbieżny jednostajnie* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N \in \boldsymbol{N}} \ \forall_{n,m \geqslant N} \ \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

8.13. *Uwaga.* Jeśli $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na D, to dla każdego $x \in D$ jest $f_n(x) \to f(x)$. Zatem zbieżność jednostajna oznacza coś więcej niż zbieżność punktowa.

8.14 (Kryterium). *Ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{x_n\} \subset D$, taki że ciąg $\{f_n(x_n)\}$ nie jest zbieżny do* 0.

8.15. Przykład. Niech $f_n(x) = x^n$ dla $0 \leqslant x < 1$. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

dla każdego x z osobna, ale

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$$

dla każdego n. Zatem ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie, do funkcji zerowej. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, to

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

8.16. Przykład. Niech teraz

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dobieramy N tak, by $(1-\varepsilon)^N < \varepsilon$. Wystarczy więc wziąć

$$N > \frac{\log \varepsilon}{\log(1-\varepsilon)}.$$

Wtedy

$$f_n(x) = x^n(1-x) < (1-\varepsilon)^n < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon),$$

oraz

$$f_n(x) = x^n(1-x) < (1-x) < \varepsilon, \qquad 1-\varepsilon < x \leqslant 1,$$

skąd $\|f_n\| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Zatem $f_n \rightrightarrows 0$.

8.17. Przykład. Niech

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Ten ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji zerowej, ale dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|f_n\| = \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |f_n(x)| = 1,$$

więc nie ma mowy o zbieżności jednostajnej.

Rozważmy jednak ciąg zadany tym samym wzorem na mniejszej dziedzinie

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad |x| \geqslant 1.$$

Tutaj

$$\|g_n\| = \sup_{|x|\geqslant 1} \frac{1}{1+nx^2} = \frac{1}{1+n},$$

więc $g_n \rightrightarrows 0$.

8.18. Twierdzenie. *Granica f jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji f_n na I jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in I$, w którym wszystkie funkcje f_n są ciągłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że wszystkie funkcje f_n są ciągłe w x_0 i $f_n \rightrightarrows f$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że $\|f_N - f\| < \varepsilon$. Funkcja f_N jest ciągła w x_0, więc istnieje $\delta > 0$, taka że $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ dla $|x - x_0| < \delta$. Zatem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &< \|f - f_N\| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli tylko $|x - x_0| < \delta$. □

Oznaczmy zbiór wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $I \subset \boldsymbol{R}$ przez $C(I)$.

8.19. Wniosek. *Jeśli $f_n \in C([a,b])$ i $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, to $f \in C([a,b]$.*

8.20. Twierdzenie (Dini). *Jeśli monotoniczny ciąg funkcji ciągłych f_n na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej f, to jest zbieżny jednostajnie.*

Dowód. Przechodząc do ciągu $g_n = |f - f_n|$, redukujemy zagadnienie do sytuacji, gdy g_n są ciągłe, nieujemne i dążą monotonicznie do funkcji zerowej.

Przypuśćmy, że ten ciąg nie jest jednostajnie zbieżny. Wtedy istnieją $\varepsilon > 0$ i ciąg $[a,b] \ni x_k \to x_0$, taki że $g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon$ dla odpowiedniego podciągu funkcji. Ustalmy dowolne m. Wtedy

$$g_m(x_0) = \lim_{k\to\infty} g_m(x_k) \geqslant g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon,$$

dla $n_k \geqslant m$, co stoi w sprzeczności ze zbieżnością punktową $g_m(x_0) \to 0$. □

Często dzieje się tak, że zbieżność jednostajna zachodzi nie na całej dziedzinie określoności funkcji będących wyrazami ciągu lub szeregu, ale na każdym przedziale domkniętym zawartym w tej dziedzinie. Wtedy mówimy, że ciąg czy też szereg jest zbieżny *niemal jednostajnie.*

8.21. Przykład. Rozważmy ciąg $x_n \to x_0$ i zdefiniujmy ciąg funkcji

$$f_n(t) = t^{x_n}, \qquad t > 0.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $1 \leqslant t \leqslant b$ zachodzi następująca nierówność

$$|f_n(t) - f_0(t)| \leqslant eb^b \log b|x - x_0|,$$

skąd wnosimy, że $f_n \rightrightarrows f_0$ na $[a, b]$. Ze względu na dowolność a i b oznacza to niemal jednostajną bieżność na $[1, \infty)$.

Podobnie dla $0 < a \leqslant t \leqslant 1$ mamy

$$|f_n(t) - f_0(t)| \leqslant e|\log a||x - x_0|,$$

skąd wnosimy, że $f_n \to f$ niemal jednostajnie na $(0, 1]$.

Podsumowując widzimy, że nasz ciąg jest niemal jednostajnie zbieżny do f_0 na $(0, \infty)$.

8.22. *Niech będzie dany ciąg funkcji ciągłych f_n na przedziale I. Jeśli f_n jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f, to f jest ciągła.*

Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest *różniczkowalna w sposób ciągły*, jeśli f jest różniczkowalna i f' jest ciągła na (a, b).

8.23. Twierdzenie. *Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ różniczkowalnych w sposób ciągły. Jeśli $f_n \to f$ i $f'_n \rightrightarrows g$, to f jest funkcją rózniczkowalną i $f' = g$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja g jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. Niech $x \in (a, b)$. Niech $\varepsilon > 0$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, mamy

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x)\right| &= |f'_n(x + \theta h) - g(x)| \\ &\leqslant |f'_n(x + \theta h) - g(x + \theta h)| + |g(x + \theta h) - g(x)| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n i dostatecznie małych $|h|$, co wynika z jednostajnej zbieżności ciągu (f'_n) i ciągłości funkcji g. Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| < 2\varepsilon$$

dla dostatecznie małych $|h|$, co dowodzi naszej tezy. □

Niech $f_n : D \to \boldsymbol{R}$. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest *jednostajnie zbieżny* na D, jeśli ciąg funkcyjny jego sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie na D.

8.24. Wniosek. *Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ różniczkowalnych w sposób ciągły. Jeśli szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny punktowo, a szereg $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jednostajnie, to funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.*

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty}$ ma *zbieżną liczbową majorantę*, jeżeli istnieje szereg liczbowy o nieujemnych wyrazach, taki że

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

8.25 (Weierstrass). *Niech $f_n : D \to \boldsymbol{R}$. Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ma zbieżną liczbową majorantę, to jest zbieżny bezwględnie jednostajnie.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|.$$

Dla $m > n$ mamy

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon,$$

dla n dostatecznie dużych i wszystkich x, co wynika ze zbieżności majoranty. □

8.26. *Szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie w swoim otwartym przedziale zbieżności.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $x \in [-\rho, \rho] \subset (-r, r)$, gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu, to

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n|\rho^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < \infty,$$

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = |a_n|\rho^n$ jest zbieżną liczbową majorantą. □

8.27. *Uwaga.* Zauważmy, że wyrazy szeregu potęgowego są wielomianami, a więc funkcjami ciągłymi. Otrzymujemy więc nowy dowód ciągłości funkcji zadanej szeregiem potęgowym wewnątrz przedziału jego zbieżności.

Znane nam kryteria Dirichleta i Abela dotyczące zbieżności szeregów maja swoje jednostajne odpowiedniki.

8.28. Twierdzenie (jednostajne kryterium Dirichleta). *Jeżeli $f_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest monotonicznym ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie do zera, a ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego $g_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ograniczony, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Ciąg (f_k) jako zbieżny jednostajnie jest jednostajnie ograniczony. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że jest malejący i $f_k \geqslant 0$. Oznaczmy

$$G_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_k, \qquad n \geqslant 1$$

i niech $\|G_k\| \leqslant C$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x)| = |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) G_k(x)'| \leqslant 2C\|f_m\|.$$

Jako że $\|f_m\| \to 0$, nasz wyjściowy szereg spełnia jednostajne kryterium Cauchy'ego, a więc jest jednostajnie zbieżny. □

Czytelnik na pewno się zorientował, że

$$G_k(x)' = G_{k+1}(x) - G_k(x)$$

i nie ma nic wspólnego z pochodną funkcji G_k, która wcale nie musi być różniczkowalna, ani nawet ciągła.

8.29. Przykład. Niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem funkcyjnym jednostajnie malejącym do zera i niech $g_k(x) = \sin kx$. Załóżmy, że oba ciągi są określone na przedziale $[\delta, 2\pi - \delta]$, gdzie $0 < \delta < \pi$. Dla każdego n

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\Big| \leqslant \Big|\frac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\Big| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

więc sumy częściowe ciągu $\{g_k\}$ są jednostajnie ograniczone. Na mocy twierdzenia Dirichleta szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin kx$$

jest więc jednostajnie zbieżny. W szczególności, szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

jest jednostajnie zbieżny dla $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$.

Zaniepokojony Czytelnik mógłby jednak zapytać, czy sumy $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ nie są przypadkiem jednostajnie ograniczone dla wszystkich $x \in [0, 2\pi]$. Nasze ograniczenie do przedziału $[\delta, 2\pi - \delta]$ może przecież być rezultatem niedostatecznie dobrego szacowania. Tak jednak nie jest. Aby się o tym przekonać, podstawmy do naszej sumy wartości ciągu $x_n = \pi/n$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x_n) = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin \pi/2n} \geqslant \frac{\sin \pi/3}{\sin \pi/2n} \geqslant n/\pi$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant \pi/2} \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \infty.$$

Widać tu bardzo wyraźnie, że jednostajna ograniczoność jest ograniczonością ze względu na dwie zmienne n oraz x.

8.30. Twierdzenie (jednostajne kryterium Abela). *Jeżeli $f_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ograniczonym monotonicznym ciągiem funkcyjnym, a ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego $g_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie zbieżny, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Jak wyżej możemy przyjąć, że ciąg (f_k) jest malejący, $f_k \geqslant 0$ i $\|f_k\| \leqslant C$. Oznaczmy

$$G_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_k, \qquad G = \sum_{k=1}^{\infty} g_k, \qquad H_n = G_n - G.$$

Jak widać, $H_n \rightrightarrows 0$ i $G_k' = H_k'$. Niech $\varepsilon > 0$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x)| = |\sum_{k=m}^{n} f_k(x) H_k(x)'| \leqslant 2C \sup_{k\geqslant m} \|H_k\| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych m, bo $H_k \rightrightarrows 0$. Nasz wyjściowy szereg spełnia zatem jednostajne kryterium Cauchy'ego, więc jest jednostajnie zbieżny.

□

Wiemy, że funkcja różniczkowalna w danym punkcie jest też w tym punkcie ciągła. Łatwo podać przykład funkcji ciągłej, ale nieróżniczkowalnej w izolowanych punktach. Taką funkcją jest np.

$$u(x) = \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{Z}).$$

Jest to funkcja ciągła (kawałkami liniowa) na całej prostej, ale nieróżniczkowalna w punktach $x_n = \frac{n}{2}$. Okazuje się, że istnieją funkcje ciągłe, które nie mają *nigdzie* pochodnej.

8.31 (van der Waerden). *Niech*

$$u_k(x) = 4^{-k} u(4^k x)$$

dla $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Funkcja zadana szeregiem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}, \tag{8.32}$$

jest ciągła. Nie jest jednak różniczkowalna w żadnym punkcie.

To, że funkcja f zdefiniowana szeregiem (8.32) jest ciągła wynika z istnienia zbieżnej majoranty liczbowej. Trudniej jest pokazać, że f nie jest nigdzie różniczkowalna i nie będziemy tego tu robić. Pierwszy przykład funkcji ciągłej i nigdzie nie różniczkowalnej pochodzi od Weierstrassa i jest dość skomplikowany. Przykład van der Waerdena korzysta z tego samego pomysłu, ale jest znacznie prostszy technicznie. Na cześć autora pomysłu skonstruowaną wyżej funkcję nazywa się czasem *piłą Weierstrassa.*

Obecnie rozważymy zagadnienie jednostajnego przybliżania funkcji ciągłej wielomianami. Widzieliśmy już cześniej, że każdą funkcję zdaną szeregiem potęgowym można jednostajnie aproksymować ciągiem wielominów będących sumami częściowymi szeregu na każdym domkniętym odcinku zawartym w otwartym przedziale zbieżności. Okazuje się, że można udowodnić znacznie więcej.

Niech będzie dana funkcja $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}$. Aby udowodnić następne twierdzenie wprowadza się rodzinę wielomianów ściśle związanych z funkcją f:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k},$$

które nazywamy *wielomianami Bernsteina.*

8.33. Przykład. Proste rachunki pokazują, że w przypadku, gdy $f = 1$, mamy

$$B_n(x) = 1, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Gdy $f(x) = x$, otrzymujemy

$$B_n(x) = x, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wreszcie dla funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$ wielomianami Bernsteina są

$$B_n(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

8.34. Twierdzenie (Weierstrass). *Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym* $[0,1]$ *jest jednostajną granicą ciągu wielomianów.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest jednostajnie ciągła, więc dla pewnej $\delta > 0$

$$\Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| < \varepsilon,$$

o ile $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Dla pozostałych k

$$\Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \leqslant 2\|f\| \leqslant \frac{2\|f\|(x - \frac{k}{n})^2}{\delta^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \Big| \sum_{k=0}^{n} \Big[f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big] x^k (1-x)^{n-k} \Big| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\varepsilon + \frac{2\|f\|(x - \frac{k}{n})^2}{\delta^2} \Big) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \Big(x - \frac{k}{n} \Big)^2 x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Ale

$$\sum_{k=0}^{n}(x-\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k} = x^2-2x^2+\frac{n-1}{n}x^2+\frac{1}{n}x$$
$$= \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

co dowodzi naszego twierdzenia. □

8.35. *Uwaga.* Twierdzenie Weierstrassa łatwo uogólnia się na dowolny przedział $[a,b]$. Istotnie, jeśli $f \in C([a,b])$, to

$$\varphi(t) = f(a+t(b-a)), \qquad f(x) = \varphi\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big),$$

jest funkcją ciągłą na $[0,1]$. Niech B_n będzie ciągiem wielomianów Bernsteina funkcji φ. Wtedy

$$\beta_n(x) = B_n\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) \rightrightarrows f(x).$$

Uważny Czytelnik zauważył być może, że szereg twierdzeń niniejszego rozdziału ma charakter kryterium pozwalającego dokonać zamiany kolejności pewnych przejść granicznych. Na zakończenie rozdziału postaramy się wyjaśnić, dlaczego w tych twierdzeniach decydującą rolę odgrywa zbieżność jednostajna.

8.36. Twierdzenie (zmiana kolejności przejść granicznych). *Niech dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ istnieje granica*

$$\lim_{m\to\infty} a(m,n) = A(n)$$

i dla każdego $m \in \boldsymbol{N}$ granica

$$\lim_{n\to\infty} a(m,n) = B(m).$$

Jeśli przynajmniej jedna z tych granic jest jednostajna względem niezwiązanego indeksu, to istnieją obie granice iterowane i są sobie równe:

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{m\to\infty} B(m).$$

Dowód. Przypuśćmy, że $a(m,n) \rightrightarrows B(m)$, gdy $n \to \infty$. Niech $\lim_{m\to\infty} B(m) = B$. Wtedy dla $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że

$$|a(m,n) - B(m)| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant N, m \in \boldsymbol{N},$$

co po przejściu do granicy względem m daje

$$|A(n) - B| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Zatem ciąg $\lim_{n\to\infty} A(n) = B$, a oto właśnie nam chodziło. □

8.37. Wniosek. *Niech będzie dany ciąg podwójny $\alpha_{m,n}$. Jeżeli szeregi $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m,n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n}$ są zbieżne i przynajmniej jeden z nich jest zbieżny jednostajnie względem niezwiązanego indeksu, to*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m,n}.$$

8.38. Wniosek. *Niech będzie dana funkcja $f : (a,b)\times(c,d) \to \boldsymbol{R}$ i niech $(x_0,y_0) \in [a,b]\times[c,d]$. Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ i $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ i przynajmniej jedna z nich jest jednostajna względem niezwiązanej zmiennej, to istnieją obie granice iterowane i są sobie równe:*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Dowód. Zgodnie z definicją Heine'go nasze założenia oznaczają, że dla każdego ciągu $x_n \to x_0$ i każdego ciągu $y_m \to y_0$ istnieją granice

$$\lim_{m\to\infty} f(x_n, y_m) = \varphi(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_m) = \psi(y_m)$$

i jedna z tych granic jest jednostajna względem niezwiązanego indeksu. Zatem na mocy twierdzenia o zmianie kolejności przejść granicznych

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{m\to\infty} \psi(y_m).$$

co wobec dowolności ciągów pociąga tezę. □

8.39. Przykład. Niech będzie dany szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności. Ustalmy $x_0 \in (-r, r)$. Niech $|x_0| < \rho < r$. Jak wiemy, szereg f jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[-\rho, \rho]$, więc

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,$$

co daje jeszcze jedno uzasadnienie ciągłości szeregu potęgowego wewnątrz przedziału zbieżności.

Zadania

1. Pokaż, że funkcje

$$[1,\infty) \ni x \to \log x, \qquad [a,b] \ni x \to |x|^\alpha, \qquad [1,\infty) \ni x \to (1+1/x)^x,$$

gdzie $\alpha \geqslant 1$, są lipschitzowskie.

2. Pokaż, że dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja wykładnicza $(-\infty, a] \ni x \mapsto e^x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $C = e^a$.

3. Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ bedzie wypukła. Udowodnij, że na każdym przedziale $[c,d] \subset (a,b)$ funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Wywnioskuj stąd, że a) funkcja wypukła na przedziale otwartym jest ciągła, b) funkcja wypukła na przedziale domkniętym może mieć nieciągłości tylko na końcach przedziału. Podaj stosowny przykład.

4. Udowodnij, że jeśli $f : \boldsymbol{R} \to [0,\infty)$ jest parzystą funkcją podaddytywną, to

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x-y), \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

5. Pokaż, że funkcja $x \to |x|^\alpha$, gdzie $0 < \alpha \leqslant 1$, jest lipschitzowska na przedziale $[1,\infty)$.

6. Rozważmy funkcję $f(x) = x^\alpha$ dla $\alpha > 1$. Pokaż, że jest ona lipschitzowska na przedziale $[0,1]$.

7. Sprawdź, że funkcja $x \to x^x$ na przedziale $(0,1)$ jest podaddytywna.

8. Oznaczmy przez $\mathrm{d}(x)$ odległość liczby $x \in \boldsymbol{R}$ od najbliższej liczby całkowitej. Pokaż, że $\mathrm{d}(x) = \min\{\mathbf{m}(x), \mathbf{m}(-x)\}$ oraz że $x \to \mathrm{d}(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $C = 1$.

9. Przypomnij dowód równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heinego i zaadaptuj go do przypadku jednostajnej ciągłości.

10. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n + x^n)}{n}, \qquad x > 0.$$

11. Dana jest ciągła funkcjia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Pokaż, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_n \to 0$ ciąg funkcyjny $f_n(x) = f(x_n + x)$ jest zbieżny jednostajnie do f.

12. Pokaż bezpośrednio, nie korzystając z twierdzenia Weierstrassa, że funkcję $x \to \sqrt{x}$ można aproksymować jednostajnie wielomianami na odcinku $[1/2, 3/2]$. W tym celu rozwiń tę funkcję w szereg Taylora wokół 1.

13. Niech $f : (a-\epsilon, b+\epsilon)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły. Udowodnij, że ciąg ilorazów różnicowych $f_n(x) = n\Big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big)$ jest zbieżny jednostajnie do f'.

14. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągów funkcjyjnych a) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ na $[0,1]$, b) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ na $(0,1]$.

15. Udowodnij, że funkcje a) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ na $\boldsymbol{R}$, b) $g(x) = e^{-x}$ na $[0,\infty)$, c) $h(x) = x^x \sin x$ na $[0,1]$ są jednostajnie ciągłe.

16. Udowodnij, że funkcja f ciągła na $\boldsymbol{R}$ i mająca granice liczbowe w $\pm\infty$ jest jednostajnie ciągła.

17. Niech $u_n \rightrightarrows u$ na I i niech $v \in C(I)$ będzie ograniczona. Pokaż, że $vu_n \rightrightarrows vu$.

18. Określ obszar zbieżności bezwzględnej i warunkowej szeregów: $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{x^n}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$, $\sum_{n=1}^\infty ne^{-nx}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{1-x^n}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n(1-x)^n$.

19. Pokaż, że jeśli *szereg Dirichleta* $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^x}$ jest zbieżny dla pewnego $x = x_0$, to jest zbieżny jednostajnie dla $x \geqslant x_0$.

20. Określ obszar zbieżności *szeregów Newtona*: $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{x}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\binom{x}{n}$.

21. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$. Pokaż, że f_n dąży jednostajnie do f na $[a,b]$.

22. Posługując się kryterium Weierstarassa, udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2} \quad (x \in \boldsymbol{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n} \quad (-2 < x < \infty),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (x \in \boldsymbol{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

23. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}$ jest ciągła i ma ciągła pochodną w $\boldsymbol{R}$.

24. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^x}$ w obszarze $x > 2$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną.

25. Uzasadnij jednostajną zbieżność podanych szeregów przy pomocy kryteriów Abela i Dirichleta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n+x}}, \qquad 0 < \delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}, \qquad x \geqslant 0.$$

Dlaczego pierwsze dwa szeregi nie są zbieżne jednostajnie na całym przedziale $[0, 2\pi]$? Podstaw $x_n = 1/n$.

26. Niech $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Pokaż, że ciągi funkcyjne $\{f_n\}$ i $\{f_n'\}$ są zbieżne punktowo, ale nieprawdą jest, że

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

27. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-\eta, \eta]$, gdzie $0 < \eta < 1$, ale nie w $(-1, 1)$.

28. Określ obszar zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{4^n x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\log^n(x+2),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+x^n}{1+3^n x^n}.$$

29. Udowodnij, że podane niżej szeregi są jednostajnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+x^2} \quad (x \in \boldsymbol{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+nx)}{nx^n} \quad (x \geqslant 2),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n|x-n|} \quad (x \in \boldsymbol{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2|x|} \quad (x \in \boldsymbol{R}).$$

30. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(1+kx)}{kx^k}$ ma pochodne wszystkich rzędów.

31. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1 + \frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

32. Pokaż, że $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin nx \cdot \sin n^2 x\right| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

33. Udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne na $\boldsymbol{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^4}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin n^2 x}{n+x^2}.$$

34. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie na $[1, \infty)$.

35. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ definiuje funkcję ciągłą na $\boldsymbol{R}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \log^n(1+x)$ funkcję ciągłą na $(\frac{1}{e}-1, e-1)$.

9. Całkowanie

Zacznijmy[1]od podstawowego dla teorii całki pojęcia podziału. *Podziałem odcinka* $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ nazywamy każdy skończony zbiór $P \subset [a,b]$ zawierający oba końce odcinka. Niech

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

będą punktami podziału P. Odcinki

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

będziemy nazywali *odcinkami podziału* P. Jeśli $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest funkcją ograniczoną, a P podziałem $[a,b]$, to liczby

$$\boldsymbol{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k|, \qquad \boldsymbol{L}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k|,$$

gdzie $|I_k|$ oznacza długość k-tego odcinka podziału P, nazywamy odpowiednio *górną* i *dolną sumą całkową* funkcji f.

9.1. Lemat. *Jeśli $P \subset Q$ są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\boldsymbol{L}(f,P) \leqslant \boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P).$$

Dowód. Nierówność środkowa jest oczywista, a nierówności skrajnych dowodzi się podobnie. Dowiedziemy, że $\boldsymbol{U}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P)$. Przez łatwą indukcję dowód sprowadza się do przypadku, gdy Q zawiera tylko o jeden punkt więcej niż P. Niech więc $P = \{x_j\}_{j=0}^{n}$, $Q = P \cup \{c\}$ i $x_{k-1} < c < x_k$ dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j \neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geqslant \sum_{j \neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},c]} f(x)(c - x_{k-1}) + \sup_{[c,x_k]} f(x)(x_k - c) \\
&= \boldsymbol{U}(f,Q),
\end{aligned}$$

co było do okazania. □

9.2. Wniosek. *Jeśli P i Q są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P).$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{L}(f,Q \cup P) \leqslant \boldsymbol{U}(f,Q \cup P) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P)$$

na mocy lematu. □

Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$. Skoro każda całkowa suma dolna danej funkcji ograniczonej jest nie większa od każdej sumy górnej, zbiór wszystkich dolnych sum całkowych jest ograniczony od góry, a zbiór wszystkich sum górnych ograniczony od dołu.

Liczby

$$\int^{\star} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} \boldsymbol{U}(f,P), \qquad \int_{\star} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} \boldsymbol{L}(f,P)$$

[1]Dziękuję Panu Tomaszowi Stachowiakowi za uważne przeczytanie tego rozdziału i cenne uwagi.

nazywamy odpowiednio *górną* i *dolną całką Darboux* funkcji f. Oczywiście

$$\int_\star f \leqslant \int^\star f.$$

9.3. Lemat. *Jeśli f, g są ograniczonymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda > 0$, to*

$$\int^\star f+g \leqslant \int^\star f + \int^\star g, \qquad \int_\star f+g \geqslant \int_\star f + \int_\star g,$$
$$\int^\star \lambda f = \lambda \int^\star f, \qquad \int_\star \lambda f = \lambda \int_\star f, \qquad \int^\star -f = -\int_\star f.$$

Ograniczoną funkcję $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ nazywamy *całkowalną* w sensie Riemanna, jeśli jej całki Darboux są równe. Ich wspólną wartość nazywamy wtedy *całką Riemanna* z funkcji f i piszemy

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_\star f = \int^\star f.$$

Rodzinę funkcji całkowalnych na odcinku $[a,b]$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{R}([a,b])$.

Zauważmy, że

$$\boldsymbol{U}(f,P) - \boldsymbol{L}(f,P) = \sum_k \sup_{x,y\in I_k} (f(x)-f(y))|I_k| = \Omega(f,P),$$

gdzie I_k są odcinkami wyznaczonymi przez podział P.

Z definicji całkowalności funkcji wynika łatwo

9.4. *Funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział P odcinka $[a,b]$, taki że*

$$\Omega(f,P) < \varepsilon.$$

Z Lematu 9.3 łatwo wynika

9.5. Lemat. *Jeśli f, g są całkowalnymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda \in \boldsymbol{R}$, to*

$$\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g.$$

9.6. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Dowód. Rzeczywiście, dla każdego podziału P

$$\Omega(|f|,P) \leqslant \Omega(f,P),$$

co wynika z nierówności trójkąta. Zatem całkowalność f pociąga całkowalność $|f|$. $\square$

9.7. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ i $f \leqslant g$, to $\int f \leqslant \int g$. W szczególności, jeśli $f \geqslant 0$, to $\int f \geqslant 0$.*

9.8. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Dowód. Mamy $f \leqslant |f|$ i $-f \leqslant |f|$, więc $\int f \leqslant \int |f|$ oraz $-\int f \leqslant \int |f|$. Stąd

$$\left| \int f \right| \leqslant \int |f|.$$

$\square$

9.9. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $f \in \mathcal{R}([c,d])$ dla każdego $[c,d] \subset [a,b]$. Z drugiej strony, jeśli $f \in \mathcal{R}([a,c])$ i $f \in \mathcal{R}([c,b])$, to $f \in \mathcal{R}([a,b]$.*

Dowód. Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Niech

$$P' = (P \cap [c,d]) \cup \{c,d\}.$$

Zbiór P' jest podziałem $[c,d]$ i łatwo zauważyć, że

$$\Omega_{[c,d]}(f,P') \leqslant \Omega_{[a,b]}(f,P),$$

skąd natychmiast wynika pierwsza część tezy.

Jeśli natomiast P_1 i P_2 są odpowiednio podziałami $[a,c]$ i $[c,b]$, to $P = P_1 \cup P_2$ jest podziałem $[a,b]$ i

$$\Omega_{[a,b]}(f,P) \leqslant \Omega_{[a,c]}(f,P_1) + \Omega_{[c,b]}(f,P_2).$$

Stąd już wynika druga część tezy. □

9.10. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $a \leqslant c \leqslant b$, to*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli P_1 i P_2 są odpowiednio podziałami $[a,c]$ i $[c,b]$, to

$$\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{U}}}(f, P_1 \cup P_2) = \overset{c}{\underset{a}{\boldsymbol{U}}}(f,P_1) + \overset{b}{\underset{c}{\boldsymbol{U}}}(f,P_2).$$

□

Średnicą podziału $P = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazywamy liczbę

$$\delta(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - x_{j-1}|.$$

9.11. Twierdzenie. *Jeśli $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła, więc istnieje $\delta > 0$, taka że

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad |x - y| < \delta.$$

Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$ o średnicy mniejszej niż δ. Niech $\{I_j\}_{j=0}^{n-1}$ będą odcinkami podziału. Wtedy

$$\begin{aligned} \Omega(f,P) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j}(f(x) - f(y))|I_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=0}^{n-1} |I_j| = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi naszej tezy. □

9.12. Przykład. Rozpatrzmy bardzo prosty lecz ważny przykład. Niech $f(x) = 1$ na odcinku $[a,b]$. Wtedy dla każdego podziału P

$$\boldsymbol{L}(f,P) = \boldsymbol{U}(f,P) = b - a,$$

więc f jest całkowalna i $\int_a^b f = b - a$.

Dla ograniczonej funkcji $f : I \to \boldsymbol{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

9.13. Lemat. *Dla podziałów $P \subset Q$ odcinka $[a,b]$ i ograniczonej funkcji f na tym przedziale zachodzi nierówność*

$$\boldsymbol{U}(f,P) \leqslant \boldsymbol{U}(f,Q) + 2\|f\| \cdot |Q \setminus P| \cdot \delta(P),$$

gdzie $|Q|$ oznacza liczbę elementów Q.

Dowód. Lematu dowodzi się łatwo przez indukcję ze względu na liczebność zbioru $Q \setminus P$. □

9.14. Twierdzenie. *Niech $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Jeśli $\{P_n\}$ jest ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$, takim że $\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$, to*

$$\boldsymbol{U}(f,P_n) \to \int_{[a,b]} f, \qquad \boldsymbol{L}(f,P_n) \to \int_{[a,b]} f.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje podział Q odcinka $[a,b]$, taki że

$$\boldsymbol{U}(f,Q) < \int_{[a,b]} f + \varepsilon.$$

Niech N będzie tak duże, aby dla $n \geqslant N$ było

$$\delta(P_n) < \frac{\varepsilon}{2\|f\||Q|}.$$

Na mocy Lematu 9.13

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(f,P_n) &\leqslant \boldsymbol{U}(f,P_n \cup Q) + 2\|f\||Q|\delta(P_n)\\ &< \int_{[a,b]} f + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi pierwszej równości granicznej. Z niej wynika już druga. Rzeczywiście,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{L}(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} -\boldsymbol{U}(-f,P_n) = -\int_{[a,b]} (-f) = \int_{[a,b]} f,$$

co kończy dowód. □

Niech będzie dana funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ i podział $P = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ tego odcinka. Niech

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k), \qquad c_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Wtedy sumę

$$S(f,P,\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{k} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

nazywamy *sumą riemannowską* funkcji f wyznaczoną przez podział P i ciąg punktów pośrednich $\mathbf{c}$.

9.15. Wniosek. *Niech $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Jeśli P_n jest ciągiem podziałów o średnicach zbieżnych do zera, to sumy riemannowskie $S(f,P_n,\mathbf{c_n})$ dążą do całki z funkcji f.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że dla każdego n

$$\boldsymbol{L}(f,P_n) \leqslant S(f,P_n,\mathbf{c_n}) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P_n),$$

więc wystarczy zastosować poprzedni lemat i twierdzenie o trzech ciągach. □

9.16. Przykład. Scałkujmy funkcję *cosinus* na odcinku $[0, a]$. Funkcja ta jako ciągła jest całkowalna, więc można to zrobić za pomocą sum riemannowskich. Niech

$$P_n = \left\{ \frac{ka}{n} \right\}_{k=0}^{n}.$$

Wybierając $c_k = \frac{(k-1)a}{n}$ i kładąc $\mathbf{c_n} = (c_k)_k$, mamy

$$\begin{aligned} S_n = S(\cos, P_n, \mathbf{c_n}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \cos(k-1) \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{(n-1)a}{2n}}{\sin \frac{a}{2n}}, \end{aligned}$$

skąd, jak łatwo widać,

$$\int_0^a \cos x \, dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a.$$

9.17. Przykład. Obliczmy całkę $\int_0^a x^p dx$ dla $p > 0$. Funkcja jest ciągła, więc całkowalna. Jak wyżej, posłużymy się sumami Riemanna. Niech P_n i $\mathbf{c_n}$ będą jak w poprzednim przykładzie. Wtedy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \left(\frac{k}{n} a \right)^p = \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = a^{p+1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}.$$

Pamiętamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

więc

$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}.$$

Dla $a > b$ oznaczmy

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych $a, b, c \in \boldsymbol{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nie tylko funkcje ciągłe są całkowalne.

9.18. *Każda funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna.*

Dowód. Niech f będzie monotoniczna i niestała. Wtedy $f(a) \neq f(b)$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech P będzie podziałem odcinka $[a, b]$ o średnicy

$$\delta(P) = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}.$$

Mamy wówczas

$$\Omega(f, P) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) \leqslant \delta(P)|f(b) - f(a)| = \varepsilon,$$

co pociąga naszą tezę. □

9.19. Przykład. Niech f będzie funkcją na $[0,1]$ zdefiniowaną tak:

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a. Funkcja f jest nieciągła w nieskończonej ilości punktów, ale jest monotoniczna, więc całkowalna.

O innych nieciągłych funkcjach całkowalnych mówi kolejne twierdzenie.

9.20. Twierdzenie. *Jeśli ograniczona funkcja f na przedziale domkniętym ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że jedynymi punktami nieciągłości f są końce przedziału. Dla zadanego $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ niech P będzie podziałem odcinka $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, takim że

$$\Omega_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}(f, P) < \varepsilon.$$

Taki podział istnieje, bo funkcja f jest ciągła na $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Niech $Q = P \cup \{a, b\}$ będzie podziałem $[a,b]$. Jak łatwo zauważyć,

$$\Omega(f, Q) < 4\|f\|\varepsilon + \varepsilon = (4\|f\| + 1)\varepsilon,$$

co dowodzi całkowalności f.

Jeśli teraz $c_1, c_2 < \cdots < c_k$ są punktami nieciągłości f, to na mocy pierwszej części dowodu funkcja jest całkowalna na każdym z odcinków $[a, c_1]$, $[c_{j-1}, c_j]$, $[c_k, b]$ dla $2 \leqslant j \leqslant k$. Zatem jest całkowalna na

$$[a,b] = [a, c_1] \cup \bigcup_{j=2}^{k} [c_{j-1}, c_j] \cup [c_k, b].$$

□

Przechodzimy do badania całki jako funkcji górnej granicy całkowania.

9.21. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest lipschitzowska.

Dowód. Niech x, y będą punktami odcinka $[a,b]$. Wtedy

$$F(x) - F(y) = \int_c^x f(t)dt - \int_c^y f(t)dt = \int_y^x f(t)dt,$$

więc

$$|F(x) - F(y)| \leqslant |\int_y^x |f(t)|dt| \leqslant M|x - y|,$$

gdzie $M = \|f\|$. □

9.22. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w każdym punkcie x_0 ciągłości f. Ponadto

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest ciągła w x_0, więc istnieje $\delta > 0$, taka że $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, o ile $|x - x_0| < \delta$. Mamy zatem

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\,dt,$$

a wobec

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \varepsilon\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} dt\right| = \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$, co kończy dowód. □

Z poprzednich dwóch lematów wynika natychmiast *podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.*

9.23. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Zatem F jest pierwotną f w (a,b).

Można udowodnić trochę więcej.

9.24. Wniosek. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje funkcja różniczkowalna $G : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $G'(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$.*

Dowód. Funkcję f można rozszerzyć do funkcji g ciągłej na całej prostej, kładąc

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & x < a, \\ f(x), & x \in [a,b], \\ f(b), & x > b. \end{cases}$$

Niech

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Na mocy twierdzenia funkcja G jest różniczkowalna na całej prostej i $G'(x) = g(x)$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. W szczególności

$$G'(x) = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

□

9.25. Wniosek. *Jeśli $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ oraz $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$, to*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Dowód. Niech

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

Wtedy $(F - F_0)' = 0$ na (a,b), więc $F - F_0 = c$ na (a,b), a przez ciągłość także na końcach przedziału. Stąd

$$\int_a^b f(t)dt = F_0(b) - F_0(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a),$$

tak jak chcieliśmy. □

9.26. Przykład. a) Mamy $(\sin x)' = \cos x$, więc

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a.$$

b) Mamy $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$, więc

$$\int_a^b x^p dx = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}), \qquad a, b > 0,\ \ p \neq -1.$$

c) Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności. Wiemy, że

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad |x| < r,$$

jest pierwotną f. Wobec tego dla $[a, b] \subset (-r, r)$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

czyli

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

9.27. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, to $fg \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dowód. Ponieważ

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) \leqslant \|g\||f(x) - f(y)| + \|f\||g(x) - g(y)|,$$

więc dla każdego podziału P

$$\Omega(fg, P) \leqslant \|g\|\Omega(f, P) + \|f\|\Omega(g, P),$$

co pozwala wnioskować, że iloczyn fg jest całkowalny, pod warunkiem że obie funkcje f i g są całkowalne. □

9.28. Twierdzenie (całkowanie przez części)**.** *Jeśli $f, g : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ są różniczkowalne w sposób ciągły, to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

gdzie

$$\varphi(x)\big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Dowód. Wiemy, że

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad x \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

więc całkując obie strony i korzystając z podstawowego twierdzenia, otrzymujemy

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

skąd już natychmiast wynika wzór na całkowanie przez części. □

9.29. Przykład. Mamy

$$\int_a^x \log t dt = \int_a^x t' \log t dt = t \log t\Big|_a^x - \int_a^x dt = t(\log t - 1)\Big|_a^x.$$

Zauważmy też, że rzeczywiście funkcja $x \to x(\log x - 1)$ jest pierwotną funkcji logarytmicznej,

9.30. Przykład. Niech $m, n \in \boldsymbol{Z}$ i niech $m \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= n \cos nx \sin mx\Big|_0^{2\pi} + \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &= (\frac{n}{m})^2 \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = (\frac{n}{m})^2 I_{n,m}, \end{aligned}$$

więc $(1 - (\frac{n}{m})^2) I_{n,m} = 0$, skąd

$$I_{n,m} = \begin{cases} 0, & |n| \neq |m|, \\ \pm\pi, & |n| = |m|. \end{cases} \tag{9.31}$$

9.32. Przykład. Niech

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Oczywiście, $J_1 = \operatorname{arc\,tg} 1$. Wyprowadzimy teraz wzór rekurencyjny na J_n. Mamy

$$J_{n+1} = J_n - \int_0^1 x \cdot \frac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

więc, całkując przez części,

$$\int_0^1 x \cdot \frac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n} + \frac{J_n}{2n},$$

otrzymujemy

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n}.$$

W dalszych rozważaniach dużą rolę odegra ciąg o wyrazach

$$w_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}.$$

9.33. Lemat. *Niech* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. *Wtedy*

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2w_n}, \qquad I_{2n+1} = \frac{w_n}{2n+1}. \tag{9.34}$$

Dowód. Oba wzory wynikają łatwo z zależności rekurencyjnej

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \tag{9.35}$$

która bierze się z całkowania przez części:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x (\cos x)' \, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x \, dx = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ze względu na to, że $\sin 0 = \cos \pi/2 = 0$, przyrosty wartości funkcji we wzorze na całkowanie przez części znikają. □

Z zależności (9.35) wypływa następujący wniosek.

9.36. Wniosek. *Niech* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Dowód. Rzeczywiście, jak łatwo widzieć

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1},$$

skąd

$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{2n}{2n+1},$$

co pozwala wyprowadzić naszą tezę za pomocą lematu o trzech ciągach. □

9.37. Wniosek (wzór Wallisa). *Jest*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n \binom{2n}{n}^{-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

Dowód. Na mocy Lematu 9.33

$$\frac{\pi}{2(2n+1)} = I_{2n} I_{2n+1} = I_{2n}^2 \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} 2(2n+1) I_{2n}^2 = \frac{1}{\pi}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$2(2n+1) I_{2n}^2 = \frac{(n+1/2)\pi^2}{w_n^2}.$$

□

I jeszcze jedna retrospekcja.

9.38. Twierdzenie (wzór Stirlinga). *Dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt{2\pi} < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12n}}.$$

Dowód. Pamiętamy, że

$$A < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < A e^{\frac{1}{12n}},$$

gdzie

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad s_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Pozostaje wykazać, że $A = \sqrt{2\pi}$. W tym celu zauważmy, że

$$\frac{s_n^2}{s_{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+1/2}}{(2n)! n^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\, w_n}{n^{1/2}},$$

więc na mocy wzoru Wallisa

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{s_{2n}} = \sqrt{2\pi},$$

co było do okazania. □

I jeszcze jedno zastosowanie całkowania przez części – reszta Taylora w postaci całkowej.

9.39. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną n razy w sposób ciągły w otoczeniu punktu $a \in \boldsymbol{R}$. Wówczas dla dostatecznie małych h jej reszta Taylora wyraża się wzorem*

$$R_n(h) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt.$$

Dowód. Niech $S_n(h)$ oznacza prawą stronę wzoru. Gdy $n = 1$

$$S_1(h) = \int_0^h f'(a+t)dt = f(a+h) - f(a) = R_1(h).$$

Przypuśćmy przez indukcję, że $S_n(h) = R_n(h)$. Wtedy, całkując przez części, widzimy, że

$$\begin{aligned} S_{n+1}(h) &= \frac{1}{n!}(h-t)^n f^{(n)}(a+t)\Big|_0^h + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt \\ &= -\frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(a) + R_n(h) = R_{n+1}(h), \end{aligned}$$

czego należało dowieść. □

9.40. Przykład. Przypuśćmy, że $f \in C^1([a,b])$ nigdzie nie znika. Wtedy, jak łatwo sprawdzić,

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

a wobec tego

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log\frac{f(b)}{f(a)}.$$

Funkcję f'/f nazywa się często *pochodną logarytmiczną* funkcji f.

A teraz wzór na *całkowanie przez podstawienie.*

9.41. Twierdzenie. *Niech $u : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły. Jeśli $f \in C(u([a,b]))$, to*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(y))u'(y)dy.$$

Dowód. Niech $u([a,b]) = [c,d]$ i niech $F : (c-\varepsilon, d+\varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, taką, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in [c,d]$. Wtedy

$$\frac{d}{dy}F(u(y)) = F'(u(y))u'(y) = f(u(y))u'(y)$$

dla $y \in [a,b]$, więc

$$\int_a^b f(u(y)u'(y)dy = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx,$$

co należało pokazać. □

9.42. *Uwaga.* Jeśli dodatkowo u' nigdzie nie znika, funkcja u ma odwrotną v i wzór można zapisać w nieco innej postaci:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} f(v^{-1}(y))(v^{-1})'(y)\,dy.$$

Tak więc w konkretnych sytuacjach możemy dokonywać podstawienia $x = u(y)$ lub $y = v(x)$, przy czym w drugim przypadku musimy pamiętać, że $v'(x)$ nie może znikać na przedziale całkowania.

9.43. Przykład. Aby obliczyć całkę

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}},$$

dokonujemy podstawienia $x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, które daje

$$I = \int_1^2 \frac{2y\,dy}{(1+y^2)^2 y} = 2\int_1^2 \frac{dy}{(1+y^2)^2}.$$

Ostatnią całkę już umiemy obliczyć.

9.44. Przykład. Rozważmy całkę

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^2+2bx+c}},$$

przy założeniu, że odcinek $[\alpha,\beta]$ leży w obszarze, gdzie $x^2+2bx+c > 0$. Rozważmy najpierw przypadek $c = b^2$. Wtedy $x^2+2bx+c = (x+b)^2$, więc

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{|x+b|} = \log\frac{\beta+b}{\alpha+b}, \qquad \alpha+b>0,$$

oraz

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{|x+b|} = \log\frac{\alpha+b}{\beta+b}, \qquad \beta+b<0.$$

Jeśli $c \neq b^2$, stosujemy podstawienie

$$v = v(x) = \sqrt{x^2+2bx+c} + x,$$

skąd

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b+v}{v-x}.$$

Aby upewnić się, że pochodna v' nie znika, rozwiązujemy równanie

$$v(x) = -b, \qquad x \in [\alpha,\beta].$$

Po prostych przekształceniach dostajemy wykluczoną mozliwość $c = b^2$. Zatem $v' \neq 0$ na $[\alpha,\beta]$ i całkowanie przez podstawienie daje

$$I = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} \frac{1}{v-x}\cdot\frac{v-x}{b+v}\,dv = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} \frac{dv}{b+v} = \int_{\sqrt{\alpha^2+2b\alpha+c}+\alpha}^{\sqrt{\beta^2+2b\beta+c}+\beta} \frac{dv}{b+v}$$
$$= \log\frac{\sqrt{\beta^2+2b\beta+c}+\beta+b}{\sqrt{\alpha^2+2b\alpha+c}+\alpha+b}.$$

Zauważmy, że jeśli $\alpha+b>0$, otrzymujemy poprawny wynik, nawet jeśli $c = b^2$. Podstawienie to nazywa się *podstawieniem Eulera.*

I jeszcze jedno charakterystyczne podstawienie

9.45. Przykład. Aby obliczyć całkę

$$I = \int_a^{\pi-a} \frac{dx}{\sin x}, \qquad 0 < a < \pi/2,$$

skorzystamy z podstawienia $t = \mathrm{tg}(x/2)$, które daje

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx,$$

a więc

$$I = \int_{\mathrm{tg}(a/2)}^{\mathrm{tg}(\pi/2-a/2)} \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_{\mathrm{tg}(a/2)}^{\mathrm{tg}(\pi/2-a/2)} \frac{dt}{t} = \log \frac{\mathrm{tg}(\pi/2-a/2)}{\mathrm{tg}(a/2)}.$$

Można uniknąć podstawienia, jeśli się zauważy, że

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}(1+\mathrm{tg}^2(x/2))}{\mathrm{tg}(x/2)} = \frac{(\mathrm{tg}(x/2))'}{\mathrm{tg}(x/2)}$$

jest pochodną logarytmiczną.

Przechodzimy do twierdzeń o *wartości średniej* dla całek.

9.46. Lemat. *Jeśli $f \in C([a,b]$ jest nieujemna i*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

to $f(x) = 0$ dla $x \in [a,b]$.

9.47. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje $c \in (a,b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dowód. Niech $F \in C([a,b])$ będzie pierwotną f na przedziale (a,b). Wtedy na mocy twierdzenia podstawowego i twierdzenia Lagrange'a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$$

dla pewnego $c \in (a,b)$. □

9.48. Twierdzenie. *Niech $f, g \in C([a,b])$ i niech $g \geqslant 0$. Wtedy istnieje $c \in (a,b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A = \int_a^b g(x)\,dx = 1$. Funkcja f spełnia nierówności $m \leqslant f \leqslant M$, gdzie m i M są odpowiednio jej najmniejszą i największą wartością w $[a,b]$. Stąd $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ dla $x \in [a,b]$ i

$$m \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M.$$

Funkcja f jest ciągła, a jej, więc istnieje $c \in [a,b]$, takie że

$$f(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

co już jest niemal naszą tezą. Pozostaje jeszcze wykazać, że c można wybrać z wnętrza odcinka. Jeśli $f(c) = m$, to

$$\int_a^b (f(x)-m)g(x)\,dx = 0,$$

więc $f(x) = f(c)$, tam gdzie $g(x) > 0$. Istnieje więc wiele punktów wewnętrznych odcinka $[a,b]$, którymi mozna zastąpić c. Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy $f(c) = M$. Jeśli zaś żaden z tych warunków nie jest spełniony, to $m < f(c) < M$. Niech $m = f(d_1)$ i $M = f(d_2)$. Na mocy własności Darboux istnieje punkt

$$c_1 \in I(d_1, d_2) \subset (a,b),$$

taki że $f(c_1) = f(c)$, gdzie $I(d_1, d_2)$ oznacza odcinek otwarty o końcach d_1, d_2. □

Zwróćmy uwagę, że pierwsze twierdzenie o wartości średniej jest szczególnym przypadkiem drugiego, wtedy gdy $g(x) = 1$ dla $x \in [a, b]$.

I jeszcze trzecie twierdzenie o wartości średniej.

9.49. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a, b])$, a $g : (a - \varepsilon, b + e) \to \boldsymbol{R}$ jest rosnąca i różniczkowalna w sposób ciągły, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Dowód. Niech $F : (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ będzie pierwotną f na przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

a skoro $g' \geqslant 0$, możemy zastosować drugie twierdzenie o wartości średniej, by znaleźć $c \in (a, b)$, takie że

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\int_a^b g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\Big(g(b) - g(a)\Big) \\ &= g(a)\Big(F(c) - F(a)\Big) + g(b)\Big(F(b) - F(c)\Big)\end{aligned}$$

i po skorzystaniu z równości

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx, \qquad F(b) - F(c) = \int_c^b f(x)dx$$

otrzymać tezę. □

9.50. *Uwaga.* Założenie różniczkowalności funkcji g jest nieistotne. Można je obejść rozważając odpowiednio dobrane riemannowskie sumy całkowe i stosując przekształcenie Abela zamiast całkowania przez części. Ambitny Czytelnik zapewne zechce spróbować tej ciekawej metody.

Do tej pory całkowaliśmy funkcje ograniczone na skończonych przedziałach. Gdy odrzuci się chociaż jedno z tych założeń, sprawy się znacznie komplikują. Mamy wtedy do czynienia z *całkami niewłaściwymi.*

Niech będzie dana funkcja $f : [a, \infty) \to \boldsymbol{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, b]$ i istnieje granica

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* (pierwszego rodzaju) funkcji f na $[a, \infty)$ i oznaczamy

$$I = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx.$$

Niech będzie dana funkcja $f : [a, b) \to \boldsymbol{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, t]$, gdzie $a < t < b$, i istnieje granica

$$I = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx,$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* (drugiego rodzaju) funkcji f na $[a, b]$ i oznaczamy

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx$$

dla funkcji f całkowalnej na każdym przedziale $[t, b]$ dla $a < t < b$.

9.51. Przykład. Oto przykłady całek niewłaściwych pierwszego rodzaju.

a) Rozważmy całkę

$$\int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a} \xrightarrow{a} 1.$$

Możemy więc napisać

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Ta całka jest zbieżna.

b) Mamy też

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \log b \xrightarrow{a} \infty,$$

więc

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$

i całka jest rozbieżna.

c) Całka

$$\int_0^\infty \sin x\, dx$$

jest rozbieżna, bo wyrażenie

$$\int_0^a \sin x\, dx = 1 - \cos a$$

nie ma granicy, gdy $a \to \infty$.

d) Mamy

$$\int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\operatorname{arc\,tg} a} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-n+1}\, dx = \int_0^{\operatorname{arc\,tg} a} \cos^{2n-2}\, dx,$$

więc

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} y\, dy = \frac{\pi}{2w_{n-1}}.$$

e) Ze względu na rychłe zastosowanie (patrz (9.55) poniżej) zauważmy, że

$$\int_0^1 (1-z^2)^n dz = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{w_n}{2n+1}.$$

9.52. *Całka*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

dla $\alpha > 1$ i jest rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1$.

Dowód. Przypadek $\alpha = 1$ rozstrzygnęliśmy już wyżej. Dla $\alpha \neq 1$

$$\int_1^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{u^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. □

Rozważmy teraz przykład całki niewłaściwej drugiego rodzaju.

9.53. Przykład. Mamy

$$\int_\varepsilon^1 \log x \, dx = x(\log x - 1)\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon(1 - \log \varepsilon),$$

więc

$$\int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(1 + \varepsilon(1 - \log \varepsilon)\Big) = -1.$$

Możemy także zamienić tę całkę drugiego rodzaju na całkę pierwszego rodzaju przez podstawienie $x = 1/y$:

$$\int_\varepsilon^1 \log x \, dx = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\log y \, dy}{y^2}.$$

Stąd

$$\int_0^1 \log x \, dx = -\int_1^\infty \frac{\log y \, dy}{y^2}.$$

Innym ważnym przykładem jest

$$\int_0^1 x^a \, dx = \int_1^\infty y^{-a-2} \, dy.$$

9.54. *Całka*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

dla $\alpha < 1$ i jest rozbieżna dla $\alpha \geqslant 1$.

A oto całki niewłaściwe, które warto zapamiętać. Pierwsza z nich to *całka Poissona*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9.55}$$

Dowód. Mamy

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

więc całka jest zbieżna. Aby ją obliczyć, zauważmy, że

$$I(n) = \int_0^n e^{-x^2} \, dx = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-ny^2} \, dy$$

oraz na mocy powyższych oszacowań

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1 - z^2)^n \, dz \leqslant I(n) \leqslant \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Wstawiając znane wartości całek widzimy, że

$$\frac{w_n \sqrt{n}}{2n+1} \leqslant I(n) \leqslant \frac{\pi \sqrt{n}}{2 w_{n-1}}.$$

Ze wzoru Wallisa wynika, że oba skrajne ciągi dążą do $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, skąd nasza teza. □

A oto całka zwana *całką Hilberta*:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.56}$$

Dowód. Korzystając z trzeciego twierdzenia o wartości średniej, widzimy, że

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| &= \Big| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{a} \Big| \int_a^c \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| + \frac{1}{b} \Big| \int_c^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| \leqslant 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big), \end{aligned}$$

gdzie $0 < a < c < b$. Stąd wynika, że nasza całka jest zbieżna. Jej wartość obliczymy w następnym rozdziale. □

Jest jeszcze *całka Eulera*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0,$$

która definiuje funkcję zwaną *gammą Eulera*. Ta całka jest sumą dwóch całek niewłaściwych $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$, gdzie

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Całki te są zbieżne, co wynika z oszacowań

$$t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{x-1}, \qquad 0 < t \leqslant 1, \tag{9.57}$$

oraz

$$t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{x-1} \frac{([x+1]+1)!}{t^{[x+1]+1}} \leqslant C(x) t^{-2}, \qquad t \geqslant 1. \tag{9.58}$$

9.59. *Funkcja Γ ma następującą własność*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0, \tag{9.60}$$

Dowód. Rzeczywiście, całkując przez części, dostajemy

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) = \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{1/\delta} t^x e^{-t} dt &= \lim_{\delta\to 0} \Big(x t^x e^{-t} \Big|_\delta^{1/\delta} + x \int_\delta^{1/\delta} t^{x-1} e^{-t} dt \Big) \\ &= x \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{1/\delta} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

□

9.61. Wniosek. *Dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Dowód. Istotnie,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

skąd przez indukcję korzystającą z (9.60) wynika teza. □

Zauważmy jeszcze, że

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9.62. Twierdzenie. *Niech będzie dana nieujemna funkcja $F \in \mathcal{R}(a,\infty)$. Załóżmy, że ciąg funkcji $f_n \in \mathcal{R}(a,\infty)$ jest wspólnie ograniczony przez funkcję F, tzn.*

$$|f_n(x)| \leqslant F(x), \qquad a \leqslant x < \infty,$$

i jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f. Wówczas $f \in \mathcal{R}([a,\infty))$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale $[a,b]$ jako jednostajna granica funkcji całkowalnych i $|f(x)| \leqslant F(x)$, więc ma całkę zbieżną.

Niech $\varepsilon > 0$ i niech $b > a$ będzie tak duże, by

$$\int_b^\infty F(x)\,dx < \varepsilon.$$

Wtedy

$$\Big|\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\infty f_n(x)\,dx\Big| \leqslant \Big|\int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)\,dx\Big| + 2\varepsilon$$

oraz dzięki jednostajnej zbieżności na przedziałach domkniętych

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

co dowodzi naszej tezy. □

9.63. Wniosek. *Funkcja Γ Eulera jest ciągła na $(0,\infty)$.*

Dowód. Udowodnimy ciągłość funkcji Γ_2. W przypadku Γ_1 postępuje się analogicznie.

Niech $x_0 > 0$ i niech $x_n \to x_0$. Wprowadźmy funkcje

$$f_n(t) = t^{x_n - 1}e^{-t}.$$

Wiemy, że $f_n \implies f_0$ na każdym przedziale $[1,b]$. Z drugiej strony

$$f_n(t) \leqslant t^c e^{-t},$$

gdzie $c = \sup\{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$. Jako że funkcja $F(t) = t^c e^{-t}$ ma zbieżną całkę, wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty f_0(t)\,dt = \Gamma_2(x_0),$$

co dowodzi ciągłości Γ_2. □

Kończymy ten rozdział prostym, ale bardzo ważnym kryterium całkowym zbieżności szeregów, które można wykorzystywać także jako kryterium zbieżności całek. Ustala ono równoważność pomiędzy zbieżnością pewnych szeregów i pewnych całek niewłaściwych.

9.64. Kryterium (całkowe). Niech będzie dana dodatnia funkcja malejąca f na $[1,\infty)$. Wówczas

$$\int_1^\infty f(x)dx < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty,$$

a dokładniej

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^N f(n), \qquad N \in \boldsymbol{N}.$$

Zwróćmy uwagę, że kryterium to rzuca światło na podobieństwo pomiędzy zagadnieniem zbieżności szeregów liczbowych i podobnym zagadnieniem dla całek niewłaściwych.

9.65. Wniosek. *Niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty.$$

Zadania

1. Dla funkcji f i g niech $f \vee g = \max\{f, g\}$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Pokaż, że

$$f + g = f \vee g + f \wedge g.$$

Udowodnij też, że jeśli f i g są ograniczone na przedziale domkniętym, to

$$\int_{\star} f + \int_{\star} g \leqslant \int_{\star} f \vee g + \int_{\star} f \wedge g.$$

2. Funkcja f jest całkowalna na odcinku I. Pokaż, że także funkcje $\sin f$ i $\sqrt{|f|}$ są całkowalne.

3. Pokaż, że wartości podanych niżej ciągów są równe sumom całkowym odpowiednio dobranych funkcji i w ten sposób oblicz granice tych ciągów:

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \qquad b_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}, \qquad c_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}, \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

4. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Udowodnij, że jeśli f jest całkowalna na odcinkach $[a, c]$ i $[c, b]$, gdzie $a < c < b$, to f jest całkowalna na $[a, b]$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnij, że funkcja ograniczona mająca tylko skończenie wiele punktów nieciągłości jest całkowalna.

6. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją ograniczoną, której punkty nieciągłości tworzą ciąg zbieżny. Pokaż, że funkcja f jest całkowalna.

7. Oblicz $\int_0^a [x] dx$, $\int --1^1 \sigma(x) x^4 dx$.

8. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ jest całkowalna na odcinku $[-1, 1]$.

9. Wiedząc, że funkcja $f : [-1.1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna, udowodnij całkowalność funkcji $g(x) = f(|x|)$ i pokaż, że $\int_{-1}^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

10. Funkcja $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i nieujemna. Udowodnij, że $\int_a^b f(x) dx = 0$ pociąga $f = 0$.

11. Niech $f \in C([a, b])$. Udowodnij, że $\int_I f = 0$ dla każdego odcinka domkniętego $I \subset [a, b]$ pociąga $f = 0$.

12. Wykaż, że jeśli funkcja $g : [a, b] \to [0, 1]$ jest całkowalna, a $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ lipschitzowska, to $f \circ g$ jest całkowalna.

13. Sprawdź, że każda funkcja wypukła na odcinku domkniętym jest całkowalna.

14. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi.$$

15. Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$. Niech f będzie funkcją Riemanna. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = 0$.

16. Udowodnij, że funkcja Riemanna $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna i oblicz jej całkę.

17. Czy każdą funkcję ciągłą na odcinku domkniętym można przedłużyć do funkcji ciągłej na całej prostej?

18. Oblicz pochodne funkcji $F(x) = \int_0^x \sin tx \, dt$, $G(x) = \int_0^x e^{tx} dt$.

19. Wiedząc, że funkcja $g : [0, \infty)$ jest rosnąca, wykaż że funkcja $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ jest wypukła, a funkcja $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ jest rosnąca.

20. Oblicz całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}, \int \frac{x^2dx}{1-x^2}, \int \operatorname{tg}^2 x dx, \int \operatorname{tgh}^2 x dx, \int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx, \int \sqrt[3]{1-3x}\, dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \int \frac{dx}{2+3x^2}, \int \frac{dx}{2-3x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

21. Znajdź całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2dx}{x^4+1}, \int \frac{x^3dx}{x^4+1}, \int \frac{dx}{x^4+1}, \int \frac{x+1}{x^4+1}\, dx.$$

[Aby obliczyć pierwszą całkę, skorzystaj z podstawienia $y = x - 1/x$.]

22. Całkując przez części znajdź

$$\int x^n \log x\, dx, \int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx, \int \sqrt{x}\log^2 x\, dx, \int \operatorname{arc\,tan} x\, dx, \int \operatorname{arc\,sin} x\, dx,$$
$$\int x \operatorname{arc\,tan} x, dx, \int \log(x+\sqrt{1+x^2})dx, \int \sin x \log(\operatorname{tg} x)dx, \int x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx.$$

23. Scałkuj funkcje wymierne:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\, dx, \int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \int \frac{x^{10}\, dx}{x^2+x-2}, \int \frac{dx}{x^3-1},$$
$$\int \frac{dx}{x^4-1}, \int \frac{x^4\, dx}{x^4+5x^2+4}, \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \int \frac{x^n}{1+x^{n+1}}.$$

24. Scałkuj funkcje trygonometryczne:

$$\int \cos^5 x\, dx, \int \sin^6 x\, dx, \int \sin^2 x \cos^4 x\, dx, \int \sin^4 x \cos^5 x\, dx, \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \int \sin 5x \cos x\, dx, \int \frac{dx}{\sin x - 1}, \int \frac{dx}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$$

25. Oblicz $\int_{-1}^1 \sinh nx \cdot \sinh mx\, dx$ dla $n, m \in \boldsymbol{N}$ i udowodnij, że funkcje a) $\{\cos kx\}_{k=0}^n$, b) $\{\sinh kx\}_{k=0}^n$, c) $\{\cosh kx\}_{k=0}^n$ d) $\{e^{kx}\}_{k=0}^n$ tworzą układ liniowo niezależny dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

26. Oblicz a) $\int_0^n [x] \sin \pi x\, dx$, b) $\int_0^m \mathbf{m}(x) \sin \pi x\, dx$.

27. Pokaż, że ciąg $u_n = \binom{n-1/2}{n} = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ jest malejący i dąży do zera. [Skorzystaj ze wzoru Wallisa.]

28. Korzystając ze wzoru Wallisa, zbadaj zbieżność szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}x^n$ na końcach przedziału zbieżności.

29. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^a \sin nx\, dx = 0$ dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$.

30. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

31. Korzystając ze wzoru Stirlinga udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot\left(\frac{e}{2n}\right)^n=\sqrt{2}.$$

32. W pole pod hiperbolą $y=1/x$ na odcinku $[n,n+1]$ wpisz dwa trapezy wyznaczone przez proste $x=n$, $x=n+1/2$ i $x=n+1$ oraz styczne do hiperboli w punktach $x=n+1/4$, $x=n+3/4$ i prostą $y=0$, a następnie porównując sumę ich pól z polem pod hiperbolą, udowodnij nierówność

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1/2}+\frac{1}{n+3/4}\right)>\frac{1}{n+1/2}.$$

33. Sprawdź, że $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-1/2}{n}^{7/3}<\infty$.

34. Niech $a>|b|$. Pokaż, że $(a+b)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}a^{\alpha-n}b^n$ dla każdego $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

35. Oblicz całkę

$$\int_0^1 x^n\log^n x\,dx,\qquad n\geqslant 0.$$

36. Oblicz na dwa sposoby całkę nieoznaczoną $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ stosując podstawienie a) Eulera, b) hiperboliczne. Porównaj otrzymane wyniki.

37. Oblicz całki

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}},\qquad\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}},\qquad\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx,$$

38. Niech $f\in C([0,\pi])$. Pokaż, że istnieje przedział $[a,b]\subset[0,\pi]$, taki że $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

39. Zapisz w postaci całkowej resztę R_n rozwinięcia Maclaurina funkcji wykładniczej.

40. Korzystając z postaci całkowej reszty Taylora funkcji $f\in C^m(a)$, wyprowadź znany wzór

$$\frac{d}{dx}R_m(f)(x)=R_{m-1}(f')(x),\qquad m\geqslant 2.$$

41. Pokaż, że resztę R_n rozwinięcia Taylora funkcji f n-krotnie różniczkowalnej w otoczeniu punktu a można zapisać w postaci

$$R_n(h)=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\xi f^{(n)}(a+s)ds$$

dla pewnego $\xi=\xi(h)\in(0,h)$. [Zastosuj trzecie twierdzenie o wartości średniej.]

42. Stosując podstawienie $\frac{1}{z}=1+x^n$, pokaż, że $\int_0^a\frac{dx}{1+x^n}=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{1+a^n}}^1 z^3(1-z)^{\frac{1}{n}-1}dz$.

43. Oblicz długość łuku a) paraboli $y=x^2$ pomiędzy punktami o odciętych 0 i 1, b) krzywej łańcuchowej $y=\cosh x$ pomiędzy punktami o rzędnych 1 i 2.

44. Oblicz pole i obwód figury $F=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2:0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant e^x\}$.

45. Zbuduj przykład ciągu funkcji ciągłych f_n na odcinku $[0,1]$ zbieżnego punktowo do zera, dla którego ciąg całek $\int_0^1 f_n$ nie dąży do zera. [W tym celu zmodyfikuj przykład podany na wykładzie.]

46. Oblicz z definicji całki niewłaściwe:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx,\quad\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2},\quad\int_0^1\frac{1+x}{\sqrt{x}},\quad\int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

47. Wykaż, że podane całki są rozbieżne:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\infty \sin x\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{e^x}{x^{100}} dx, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{\log^4 x}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x}.$$

48. Oblicz całki

$$\int_0^1 \log x dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x} dx, \quad \int_0^1 x \log x dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x} \sin x\, dx.$$

49. Uzasadnij zbieżność całek

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}, \quad \int_0^1 \frac{x dx}{e^x - 1}, \quad \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^4} dx.$$

50. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1+\frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

51. Pokaż, że $\left|\sum_{k=1}^n \sin nx \cdot \sin n^2 x\right| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

52. Udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne na $\boldsymbol{R}$:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^4}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}. \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx \sin n^2 x}{n+x^2}.$$

53. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie na $[1,\infty)$.

54. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ definiuje funkcję ciągłą na $\boldsymbol{R}$, a szereg $\sum_{n=1}^\infty \log^n(1+x)$ funkcję ciągłą na $(\frac{1}{e}-1, e-1)$.

55. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \int_0^{x/\sqrt{n}} \log(1+u^2)\, du$ definiuje funkcję różniczkowalną na $(0,\infty)$.

56. Niech $f \in C^1(\boldsymbol{R})$ spełnia $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-1}$ i $|f'(x)| \leqslant (1+|x|)^{-2}$ dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}$ i pewnej stałej $C > 0$. Całkując przez części, udowodnij, że

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t)\, dt = f(0).$$

O SZEREGACH FOURIERA

1. Wielomiany i szeregi trygonometryczne.

Funkcję postaci

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*. Jak widać, wielomian trygonometryczny jest funkcją okresową o podstawowym okresie 2π i ma nieskończenie wiele pochodnych, które są także wielomianami trygonometrycznymi.

Bardzo ważnym ważnym przykładem jest funkcja

$$D_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

zwana *jądrem Dirichleta*. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_m(x)\,dx = 1.$$

Współczynniki wielomianu trygonometrycznego można „wyłuskać” przez całkowanie.

1.1. *Jeśli*

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

to

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Przypuśćmy, że $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ jest funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną w sensie Riemanna na odcinkach domkniętych. Klasę takich funkcji będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. Dotychczasowe rozważania nasuwają myśl o przedstawieniu funkcji okresowych jako *szeregów trygonometrycznych*, to znaczy szeregów postaci

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx. \tag{1.2}$$

Widzimy, że sumy częściowe szeregu trygonometrycznego są wielomianami trygonometrycznymi. Tak zbudowany szereg trygonometryczny nazywa się *szeregiem Fouriera* funkcji f. Aby to zaznaczyć, piszemy

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}, \qquad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f będziemy zazwyczaj oznaczać przez

$$S_N(f,x) = \sum_{|k|\leqslant N} \widehat{f}(k)e^{inx}.$$

1.3. *Jak łatwo widać,*

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

1.4. *Jeśli*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

to szereg trygonometryczny

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

jest zbieżny jednostajnie. Ponadto, dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\widehat{S}(n) = c_n.$$

Dowód. Jednostajna zbieżność szeregu $S(x)$ wynika z kryterium Weierstrassa. Mamy bowiem

$$|c_n e^{inx}| \leqslant |c_n|.$$

Stąd też wzory na współczynniki otrzymujemy całkując jednostajnie zbieżny szereg $S(x)e^{-inx}$ wyraz po wyrazie. □

1.5. Przykład. Niech

$$u(x) = \mathbf{m}\Big(\frac{x}{2\pi}\Big), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Mamy

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2}$$

oraz dla $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}e^{-inx}\,dx = -\frac{xe^{-inx}}{4\pi^2 in}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2 n}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{i}{2\pi n},$$

więc

$$u \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}e^{inx} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\pi n}$$

jest szeregiem Fouriera naszej funkcji. Szereg ten, jak wiemy, jest zbieżny w każdym punkcie. Ale czy do funkcji u? Zwróćmy też uwagę, że współczynniki tego szeregu nie spełniają warunku bezwzględnej zbieżności, który postulowaliśmy w (1.4).

1.6. Przykład. Niech v będzie rozszerzeniem do funkcji okresowej funkcji $x \to |x|$ z odcinka $[-\pi,\pi)$. W odróżnieniu od funkcji u funkcja v jest ciągła. Mamy

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

i dla $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

skąd łatwo otrzymujemy

$$v \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2}.$$

Ten szereg Fouriera jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie. Ale czy do funkcji v?

Wróćmy do ogólnej teorii i zapytajmy: Czy szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny do funkcji f przynajmniej w niektórych punktach? A może wszędzie? Jeśli tak, to czy tylko punktowo, czy jednostajnie?

Niestety nasz świat nie jest idealny. Zdarza się, że szereg funkcji Fouriera funkcji ciągłej nie tylko nie jest zbieżny do funkcji, od której pochodzi, ale jest wręcz rozbieżny w bardzo wielu punktach. Dlatego będziemy się starali ustalić kryteria, która zapewią zbieżność w ustalonym punkcie, a także zbieżność punktową wszędzie; czasem nawet jednostajną. Chcemy oczywiście także wiedzieć, czy szereg Fouriera jest zbieżny do funkcji, od której pochodzi.

1.7. *Jeśli funkcja $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ ma zerowy szereg Fouriera, to jest funkcją zerową.*

Dowód. Niech $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i niech jej wspólczynniki Fouriera będą wszystkie zerowe. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje jednak punkt $a \in [-\pi, \pi)$, taki że $f(a) \neq 0$. Nietrudno zredukować zagadnienie do sytuacji, gdy $a = 0$ i $f(x) \geqslant A > 0$ dla $|x| < \delta$, gdzie $0 < \delta < \pi/2$. Niech

$$T_\delta(x) = 1 + \cos x - \cos\delta, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

T_δ jest wielomianem trygonometrycznym, takim że

$$|T_\delta(x)| \leqslant 1,\ \ \delta \leqslant |x| \leqslant \pi,\ \text{ oraz } T_\delta(x) \geqslant M > 0,\ \ |x| \leqslant \delta/2.$$

Jak wiemy, dla każdego N potęga T_δ^N jest też wielomianem trygonometrycznym, więc wobec założenia o znikaniu wspólczynników Fouriera mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_\delta(x)^N\, dx = 0, \qquad N \in \boldsymbol{N},$$

a więc

$$-\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} f(x) T_\delta(x)^N\, dx = \int_{|x|\leqslant\delta} f(x) T_\delta(x)^N\, dx.$$

Pokażemy, że ostatnia równość prowadzi do sprzeczności. Rzeczywiście, lewa strona szacuje od góry się przez

$$|L_N| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx,$$

a więc jest ograniczona niezależnie od N, natomiast prawa spełnia oszacowanie od dołu

$$P_N \geqslant \int_{|x|\leqslant\delta/2} f(x) T_\delta(x)^N\, dx \geqslant M^N A\delta$$

a więc dąży wraz z N do nieskończoności. □

2. Jądro Dirichleta.

Naszą teorię zaczniemy od wyrażenia sum częściowych szeregu Fouriera w zamkniętej formie, w której łatwiej będzie je badać.

2.1. Lemat. *Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i niech $S_m(x) = S_m(f,x)$ będzie sumą częściową szeregu Fouriera f. Wtedy*

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t)\,dt.$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} S_m(x) = \sum_{n=-m}^{m} \widehat{f}(n) e^{inx} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\sum_{n=-m}^{m} e^{i(x-t)}\Big)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t)\,dt. \end{aligned}$$

□

Czytelnik nie powienien się zdziwić, gdy powiemy, że w całej teorii kluczową rolę odgrywać będzie całka Dirichleta

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_m(t)\,dt.$$

2.2. Lemat (Riemann-Lebesgue). *Niech $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x) e^{inx}\,dx = 0.$$

Dokładniej, dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$

$$\left|\int_a^b f(x) e^{inx}\,dx\right| \leqslant \sup_{\delta(P)\leqslant 2\pi/|n|} \Omega(f,P) + \|f\|_\infty \frac{2\pi}{|n|}.$$

Dowód. Nietrudno zagadnienie sprowadzić do przypadku, gdy $a = 0$. Dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$ zdefiniujmy podział odcinka $[0,b]$ w następujący sposób. Niech

$$x_k^n = \frac{2k\pi}{|n|}, \qquad 0 \leqslant N-1,$$

gdzie N jest wybrane tak, by $\frac{2(N-1)\pi}{|n|} < b \leqslant \frac{2N\pi}{|n|}$. Ponadto niech $x_N = b$. Nasz podział, to $P_n = \{x_k\}_{k=0}^{N}$. Jego odcinkami są $I_k^n = [x_k^n, x_{k+1}^n]$, a średnica wynosi $\delta(P_n) = \frac{2\pi}{|n|}$. Wtedy

$$\int_0^b f(x) e^{inx}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} f(x) e^{inx}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_k^n,$$

gdzie

$$S_k^n = \int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} \Big(f(x) - f(x_k^n)\Big) e^{inx}\,dx, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-2,$$

co wynika z faktu, że

$$\int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} e^{inx}\,dx = 0,$$

oraz

$$S^n_{N-1} = \int_{x^n_{N-1}}^b \Big(f(x) - f(x^n_{N-1})\Big) e^{inx}\,dx + f(x^n_{N-1}) \int_{x^n_{N-1}}^b e^{inx}\,dx.$$

Zatem, dla każdego $0 \leqslant k \leqslant N-2$

$$|S^n_k| \leqslant \sup_{x,y\in I^n_k} (f(x) - f(y))|I^n_k|$$

oraz

$$|S^n_{N-1}| \leqslant \sup_{x,y\in I^n_{N-1}} (f(x) - f(y))|I^n_{N-1}| + \|f\|_\infty |I^n_{N-1}|.$$

Ostatecznie,

$$\left|\int_0^b f(x)e^{inx}\,dx\right| \leqslant \Omega(f, P_n) + \|f\|_\infty \frac{2\pi}{|n|},$$

gdzie $\delta(P_n) = \frac{2\pi}{|n|}$, skąd natychmiast wynika nasza teza. □

2.3. Wniosek. *Współczynniki Fouriera funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ znikają w nieskończoności.*

Lemat Riemanna-Lebesgue'a pozwala dostrzec ważny związek między całką Dirichleta i całką Hilberta.

2.4. Wniosek. *Dla każdych $0 \leqslant a < b < \pi$*

$$\int_a^b D_n(t)\,dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $A_n = (n + \frac{1}{2})\,a$, $B_n = (n + \frac{1}{2})\,b$ i $\varepsilon_n \to 0$. W szczególności,

$$\left|\int_a^b D_n(t)\,dt\right| \leqslant C$$

niezależnie ani od $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, ani od $n \in \boldsymbol{N}$.

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\int_a^b D_n(t)\,dt &= 2\int_{a/2}^{b/2} D_n(2t)\,dt \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt + \int_{a/2}^{b/2} f(t)\sin(2n+1)t\,dt,\end{aligned}$$

gdzie

$$f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t\sin t} = -\frac{r_3(t)}{t\sin t}, \qquad |r_3(t)| \leqslant c|t|^3,$$

jest funkcją całkowalną. Po zamianie zmiennej

$$\int_a^b D_n(t)\,dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $\varepsilon_n \to 0$ na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

2.5. Przykład. Zauważmy mimochodem, że dla $a = 0$, $bn = \pi$ mamy

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,dt = 2\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

więc

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Obliczyliśmy wartość całki Hilberta.

Oto najważniejsza własność jądra Dirichleta.

2.6. Wniosek. *Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy = 0,$$

przy ustalonym x.

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy &= \int_{\delta<|y-x|\leqslant\pi} f(x-y)\frac{\sin(2n+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\,dy \\ &= 2\int_{\delta/2<|y|\leqslant\pi/2} f(x-2y)g(y)\sin(2n+1)y\,dy,\end{aligned}$$

gdzie

$$g(y) = \frac{1}{\sin y}.$$

Dla ustalonego x teza wynika z lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

3. Kryteria zbieżności

3.1. Twierdzenie (kryterium podstawowe). *Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. Szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny w punkcie x do wartości $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, takie że dla dostatecznie dużych n*

$$\Big|\int_{|t|\leqslant\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)D_n(t)\,dt\Big| < \varepsilon.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)D_n(t) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)D_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Jak widać z Wniosku 2.6, druga całka dąży do zera, więc wszystko zależy od zachowania się pierwszego składnika, a to jest właśnie nasza teza. □

3.2. Wniosek. *Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ spełnia warunek*

$$|f(x) - f(a)| \leqslant C|x - a|,$$

to jej szereg Fouriera w punkcie a jest zbieżny do $f(a)$.

3.3. Wniosek. *Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest różniczkowalna w punkcie a, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej w tym punkcie.*

3.4. Przykład. Funkcja u jest różniczkowalna poza punktami postaci $2k\pi$. Dlatego

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

choć tu zbieżność nie jest jednostajna. W szczególności, podstawiając $x = 1$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

3.5. Wniosek (zasada lokalizacji). *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i $f(x) = g(x)$ w otoczeniu punktu $a \in \boldsymbol{R}$, to*

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f, a) - S_m(g, a) = 0.$$

Dowód. Istotnie,

$$S_m(f, a) - S_m(g, a) = S_m(h, a),$$

gdzie $h = f - g$ znika w otoczeniu a. Zatem h jest różniczkowalna w a, $h'(a) = 0$ i na mocy Wniosku 3.3

$$\lim_{m\to\infty} S_m(h, a) = 0.$$

$\square$

Zasada lokalizacji mówi, że zbieżność szeregu Fouriera w danym punkcie a i jego suma nie zależą od tego, jak funkcja się zachowuje z dala od tego punktu. Dlatego, badając zbieżność szeregu Fouriera danej funkcji w ustalonym punkcie, możemy ją zawsze zmodyfikować poza (nawet bardzo małym) otoczeniem tego punktu, jeśli to tylko upraszcza zadanie.

3.6. Twierdzenie (trzecie o wartości średniej). *Niech $f \in \mathcal{R}([a, b])$ i niech $g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie monotoniczna. Wtedy istnieje $a \leqslant c \leqslant b$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Zauważmy, że bez straty ogólności możemy przyjąć, że g jest malejąca, a ponadto $g(a) = 1$ i $g(b) = 0$. To redukuje nasze zadanie do znalezienia $c \in [a, b]$, takiego że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Niech $P = \{x_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$. Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + E(f, g, P),$$

gdzie

$$E(f,g,P)=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)(g(x)-g(x_k)\,dx.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$|E(f,g,P)|\leqslant \|f\|_\infty \Omega(g,P)\leqslant \|f\|_\infty \delta(P). \tag{3.7}$$

Niech

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Przez przekształcenie Abela

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)(F(x_{k+1}-F(x_k))\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(g(x_k)-g(x_{k+1}))F(x_{k+1}),\end{aligned}$$

gdzie ostatnia suma spełnia ograniczenia

$$m\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}(g(x_k-g(x_{k+1}))F(x_{k+1})\leqslant M.$$

Tutaj $m=\inf F(x)$, $M=\sup F(x)$. Zatem

$$m+E(f,g,P)\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M+E(f,g,P),$$

co wobec dowolności P oraz (3.7) daje

$$m\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M.$$

Funkcja F jest ciągła, więc istnieje $c\in[a,b]$, takie że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(c),$$

a to już jest nasza teza. □

3.8. Twierdzenie (kryterium Jordana). *Niech $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$. Niech dla pewnego $a\in\boldsymbol{R}$ funkcja f będzie monotoniczna na przedziałach $(a-h,a)$ oraz $(a,a+h)$ dla pewnego $h>0$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,a)=\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}S_n(f,a)-\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(a+y)D_n(y)\,dy-\frac12 f(a-0)\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(a+y)D_n(y)\,dy-\frac12 f(a+-0)\\ &=A_n+B_n.\end{aligned}$$

Pokażemy, że
$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(a+y)D_n(y)\,dy - \frac{1}{2}f(a-0) \to 0.$$
Dowód, że $B_n \to 0$ jest analogiczny. Zmieńmy najpierw wartość f w punkcie a, kładąc $f(a) = f(a-0)$, co w niczym nie zmienia współczynników Fouriera funkcji f. Wtedy
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\int_{-h}^{0} f(a+y)D_n(y)\,dy,$$
więc na mocy trzeciego twierdzenia o wartości średniej
$$\lim_{n\to\infty} A_n = (f(a-h) - f(a))\int_{-h}^{c_n} D_n(y)\,dy = 0,$$
bo całki
$$\int_{-h}^{c_n} D_n(y)\,dy$$
są wspólnie ograniczone. □

4. Aproksymacja jednostajna

4.1. Lemat. *Dla każdej funkcji $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\delta > 0$*
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy = 0,$$
jednostajnie względem x.

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy istnieje liczba dodatnia c, ciąg $x_k \in [0, 2\pi]$ oraz ciąg indeksów $n_k \to \infty$, taki że
$$\left|\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_k-y)D_{n_k}(y)\,dy\right| \geqslant c.$$
Możemy dodatkowo założyć, że $x_k \to x_0$. Niech
$$A_k = \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_k-y)D_{n_k}(y)\,dy, \qquad B_k = \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_0-y)D_{n_k}(y)\,dy$$
Wtedy
$$|A_k - B_k| \leqslant \frac{1}{\sin\delta/2}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} |f(x_n-y) - f(x_0-y)|\,dy \to 0,$$
co daje sprzeczność, bo $|A_k| \geqslant c$, natomiast $B_k \to 0$. □

4.2. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ spełnia warunek Lipschitza, to szereg Fouriera f jest zbieżny do f jednostajnie.*

4.3. Wniosek. *Jeśli $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest kawałkami liniowa, to szereg Fouriera f jest zbieżny do f jednostajnie.*

4.4. Twierdzenie (Weierstrass). *Dla każdej funkcji $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian trygonometryczny T, taki że*
$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Skoro $f : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i $f(0) = f(2\pi)$, istnieje funkcja g kawałkami liniowa, taka że $g(0) = g(2\pi)$ oraz

$$|f(x) - g(x) < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Wynika to łatwo z jednostajnej ciągłości f. Rozszerzmy g do funkcji okresowej. Jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej jednostajnie, więc dla pewnego n

$$|g(x) - S_n(g, x)| < \varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Ostatecznie

$$|f(x) - S_n(g, x)| < 2\varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

gdzie $T(x) = S_n(g, x)$ jest żądanym wielomianem trygonometrycznym. □

5. Aproksymacja kwadratowa

5.1. *Jeśli* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *i* $\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0$, *to*

$$\int_a^b \Big|f(x) + g(x)\Big|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx + \int_a^b g|(x)|^2\,dx.$$

5.2. Wniosek (aproksymacja kwadratowa). *Niech* $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. *Jeśli* T_N *jest wielomianem trygonometrycznym stopnia* N, *a* S_N *sumą częściową szeregu Fouriera funkcji* f, *to*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - T_N(x)\Big|^2 dx,$$

Dowód. Przez bezpośrednie całkowanie sprawdzamy, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - S_N(x)\Big) T_N(x)\,dx = 0, \tag{5.3}$$

więc na mocy (5.1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - T_N(x)\Big|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \Big|S_N(x) - T_N(x)\Big|^2 dx,$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. □

Istnieje wiele różnych sposobów mierzenia, jak bardzo różnią się od siebie dwie funkcje. Na przykład

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

nazywa się *odległością jednostajną*. Jest też *odległość całkowa*

$$\|f - g\|_1 = \frac{1}{b - a} \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Jeszcze inną odległością jest

$$\|f - g\|_2 = \Big(\frac{1}{b - a} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

zwana *średnią odległością kwadratową*. Wniosek 5.2 można więc sformułować i tak:

5.4. Wniosek. *Spośród wszystkich wielomianów trygonometrycznych stopnia* N *suma częściowa szeregu Fouriera* $S_N(f, x)$ *najlepiej przybliża funkcję* $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ *w sensie średniej kwadratowej.*

5.5. Wniosek (tożsamość Parsevala). *Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ zachodzi równość*

$$\frac{1}{2\pi}\int f(x)^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ niech φ będzie funkcją kawałkami liniową, taką że

$$\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Niech teraz T będzie wielomianem trygonometrycznym stopnia N, takim że $\|\varphi - T\|_\infty < \varepsilon$. Zatem

$$\|f-T\|_2 \leqslant \|f-T\|_1 \leqslant \|f-\varphi\|_1 + \|\varphi - T\|_1 \leqslant \varepsilon + \|\varphi - T\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Niech

$$S_N(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

będzie sumą częściową szeregu Fouriera. Bezpośrednim rachunkiem przekonujemy się, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)S_N(x)\,dx = \sum_{|n|\leqslant N} |\widehat{f}(n)|^2$$

i podobnie jak w (5.3)

$$\int_0^{2\pi} S_N(x)\Big(f(x) - S_N(x)\Big)\,dx = 0.$$

Zatem na mocy (5.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{|n|\leqslant N} |\widehat{f}(n)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2\,dx,$$

co pokazuje, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx,$$

a z drugiej strony na mocy najlepszej aproksymacji kwadratowej

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{|n|\leqslant N} |\widehat{f}(n)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f(x) - T(x)\Big|^2\,dx \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 + 4\varepsilon^2.$$

Wobec dowolności ε, to kończy dowód. □

5.6. *Uwaga.* Z naszego dowodu widać, że chociaż szereg współczynników Fouriera nie zawsze jest bezwzględnie sumowalny, to jednak zawsze jest *sumowalny z kwadratem.*

5.7. Przykład. Wróćmy do funkcji $u(x) = \mathbf{m}\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)$, dla której

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)^2\,dx = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

Wstawiając obliczone wcześniej wartości współczynników Fouriera do równania Parsevala, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{3},$$

a stąd raz jeszcze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Zadania

1. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$ funkcja $F_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ jest wielomianem trygonometrycznym.

2. Dane są dwie funkcje $A, B \in C_{2\pi}$ o jednostajnie zbieżnych szeregach Fouriera. Pokaż, że

$$A(x)B(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{A}(k)\widehat{B}(n-k).$$

Uzasadnij zbieżność powyższych szeregów.

3. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Sprawdź, że współczynniki $a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)$ dla $n \in \boldsymbol{Z}_+$ oraz $b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$ dla $n \in \boldsymbol{N}$ wyrażają się wzorami

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

4. Znajdź szereg Fouriera funkcji a) $f_1(x) = \operatorname{sgn}(x)$, b) $f_2(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, gdzie $-\pi < a < b < \pi$, c) $f_3(x) = x(2\pi - x)$ określonych w przedziale $(-\pi, \pi]$ i przedłużonych okresowo na $\boldsymbol{R}$. Przeprowadź dyskusję zbieżności tych szeregów.

5. Rozwiń w szereg Fouriera funkcje $\sin^4 x$ i $|\sin x|$ i $\cos^m x$ dla $m \in \boldsymbol{N}$.

6. Załóżmy, że znamy wspólczynniki Fouriera $\widehat{f}(n)$ funkcji $f \in C_{2\pi}$. Znajdź wspólczynniki Fouriera funkcji pierwotnej F, takiej że $F(0) = 0$. Wykaż, że szereg Fouriera pierwotnej jest absolutnie zbieżny.

7. Niech $f \in C^1_{2\pi}$. Pokaż, że $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ dla każdego n.

8. Funkcję f definiujemy przez $f(x) = \sin x/2$ na odcinku $(-\pi, \pi]$ i przedłużamy do funkcji okresowej na $\boldsymbol{R}$. Znajdź jej szereg Fouriera i pokaż, że w każdym punkcie jest on zbieżny do f.

9. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Pokaż, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

10. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = e^x$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Oblicz jej współczynniki Fouriera, a następnie za pomocą tożsamości Parsevala wyprowadź wzór

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \sinh(2\pi)}{2\sinh^2 \pi}.$$

11. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2)}$.

12. Udowodnij, żę Lemat 4.1 pozostaje w mocy, gdy $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$.