Analiza matematyczna ISIM I

Ryszard Szwarc*

Spis treści

*Wykład prowadzony w semestrze zimowym 2013/2014 na podstawie notatek Magdaleny Świczewskiej z 2005-2006, opracowany na podstawie notatek Mateusza Wasylkiewicza

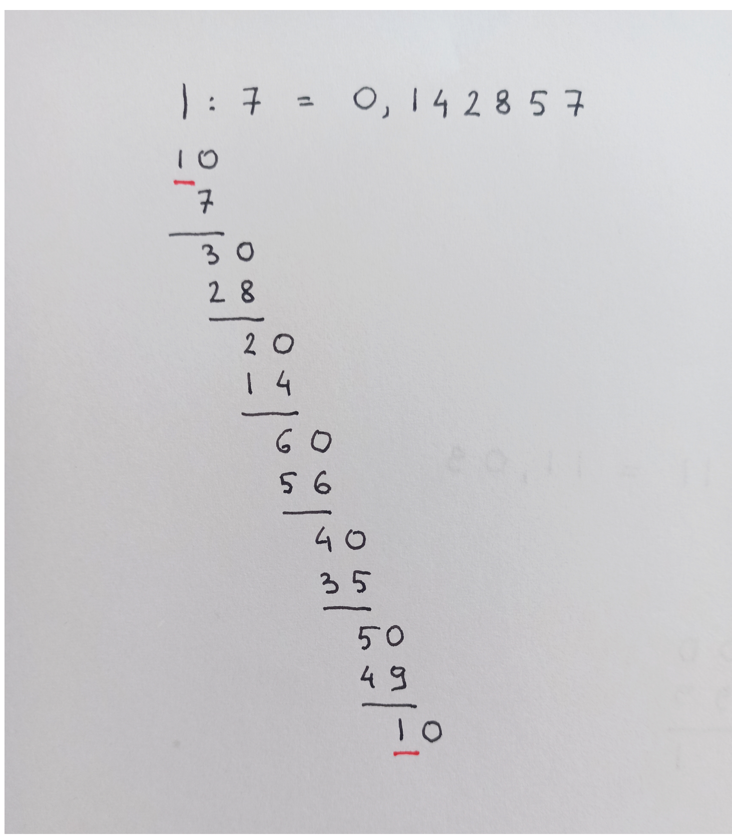
1 Liczby rzeczywiste

1.1 Liczby wymierne

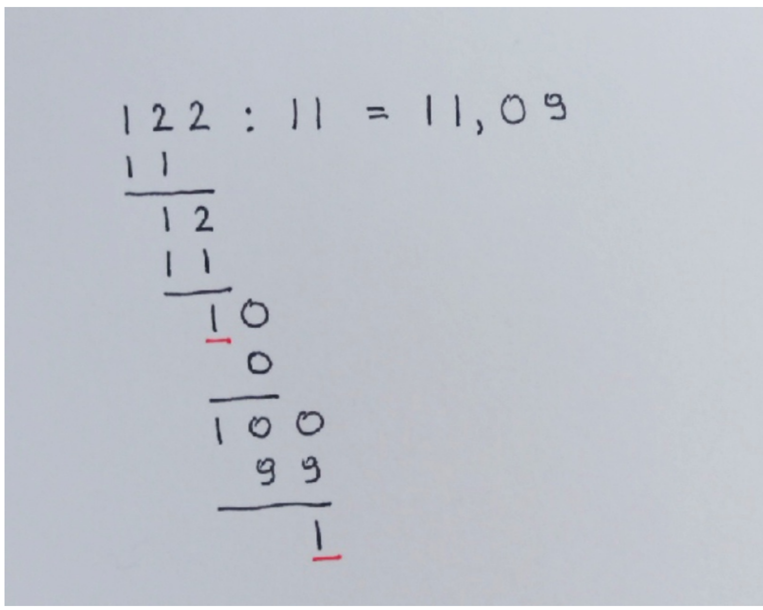
Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ mają postać $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $q \neq 0$. Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ można opisać poprzez rozwinięcia dziesiętne. Na przykład

$$0,125$$
$$0,232323\ldots = 0,(23)$$
$$0,123\ldots 89101112\ldots$$

Aby uzyskać rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej stosujemy *algorytm dzielenia z resztą*.



Zatem
$$\frac{1}{7} = 0,(142857).$$
Ogólnie każda dodatnia liczba wymierna $\frac{p}{q}$ ma okresowe lub skończone rozwinięcię w ułamek dziesiętny. Rzeczywiście, przy dzieleniu p przez q, w pewnym momencie zaczynamy dopisywać cyfrę 0 (gdy $0 < p < q$, to cyfrę 0 dopisujemy na każdym etapie algorytmu). Mamy q różnych reszt z dzielenia przez q. Zatem pewna reszta wystąpi dwukrotnie. Wtedy odpowiedni blok cyfr będzie się powtarzał.



Zatem
$$\frac{122}{11} = 11,(09).$$
Każda liczba o rozwinięciu okresowym jest wymierna. Na przykład
$$8,15(123) = 8,15 + 0,00(123) = 8,15 + \frac{1}{100} \cdot 0,(123).$$
Oznaczmy $x = 0,(123)$. Wtedy
$$1000x = 123,(123).$$
Zatem
$$1000x - x = 123.$$

Czyli

$$x = \frac{123}{999}.$$

Czy istnieją liczby niewymierne ?

Przykład. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Załóżmy (nie wprost), że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Wtedy

$$2q^2 = p^2.$$

Krotność czynnika 2 po prawej stronie jest liczbą parzystą, a po lewej nieparzystą, co prowadzi do sprzeczności. Skorzystaliśmy z faktu, że każda liczba naturalna ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze. Np.

$$12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Poza rozwinięciami w systemie dziesiętnym, używa się rozwinięć w innych systemach, np. dwójkowym.

1.2 Własności liczb rzeczywistych

Liczby rzeczywiste można dodawać i mnożyć. Reguły dotyczące tych działań powodują, że $\mathbb{R}$ tworzy ciało przemienne. Zbiór $\mathbb{R}$ jest *liniowo uporządkowany*, tzn. dla dwu liczb x i y mamy $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$. Porządek jest związany z działaniami:

- do dwu stron nierówności można dodać tę samą liczbę
- obie strony nierówności można pomnożyć przez liczbę dodatnią

Podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez liczbę g, jeśli $a \leqslant g$ dla dowolnej liczby $a \in A$. Tzn. zbiór A jest położony na lewo od liczby g na osi liczbowej.

Przykłady.

(a) $(-\infty, 1)$ jest ograniczony z góry przez 2 (również przez 1).

(b) $\mathbb{Q}$ nie jest ograniczony z góry.

(c) $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ jest ograniczony z góry przez 1.

Zbiór liczb rzeczywistych ma własność *ciągłości*: dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry istnieje najmniejsza liczba ograniczająca ten zbiór od góry. Tę liczbę oznaczamy symbolem $\sup A$ i nazywamy kresem górnym zbioru A.

Przykłady.

(a) $\sup(-\infty, 1) = 1$.

(b) $\sup \mathbb{Q} \cap (-1, 1) = 1$.

Liczba $a = \sup A$ ma dwie własności:
– a ogranicza A od góry,
– jeśli liczba b ogranicza A od góry, to $a \leqslant b$.

Kres dolny $\inf A$ definiuje się analogicznie.

Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ nie mają własności ciągłości, tzn. kres górny podzbioru liczb wymiernych nie musi być liczbą wymierną.

Przykład.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x < \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2}).$$

$$\sup A = \sqrt{2}.$$

1.3 Indukcja matematyczna

Niech $T(n)$ oznacza jakieś stwierdzenie o liczbie naturalnej n. Zasada indukcji mówi, że jeśli $T(n_0)$ jest prawdziwe (często $n_0 = 1$) oraz z prawdziwości stwierdzenia $T(n)$ wynika prawdziwość $T(n+1)$ dla wszystkich liczb $n \geqslant n_0$, to stwierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby $n \geqslant n_0$. Schemat uzasadnienie ma postać:

$$T(n_0) \implies T(n_0 + 1) \implies T(n_0 + 2) \implies \ldots$$

Można również podać uzasadnienie nie wprost. Załóżmy, że $T(n)$ nie jest spełnione dla pewnych liczb $n \geqslant n_0$. Niech n_1 będzie najmniejszą taką liczbą. Wtedy $n_1 \geqslant n_0 + 1$. Ponadto stwierdzenie $T(n_1 - 1)$ jest spełnione, bo $n_0 \leqslant$

$n_1-1 < n_1$. Zatem również $T(n_1)$ jest spełnione, co prowadzi do sprzeczności.

Zadanie Korzystając z drugiego uzasadnienia wykazać, że każda liczba naturalna ma „interesującą” własność.

Przykład. Niech $c(n,k)$ oznacza liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego (tzw. kombinacje). Pokażemy, że

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

gdzie $n \geqslant 1$. Stosujemy umowę $0! = 1$. Przy dowodzie zastosujemy indukcję względem n. Tzn. $T(n)$ oznacza, że wzór jest prawdziwy dla n i dowolnej liczby $0 \leqslant k \leqslant n$. Dla $n = 1$ mamy

$$c(1,0) = 1 = \frac{1!}{0!\,1!}, \quad c(1,1) = 1 = \frac{1!}{1!\,0!}.$$

Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla liczby n i dowolnej liczby k. Chcemy pokazać, że wzór jest spełniony dla $n+1$ i dowolnej liczby $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Mamy

$$c(n+1,0) = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}.$$

Niech $k \geqslant 1$. Zauważmy, że

$$c(n+1,k) = c(n,k) + c(n,k-1).$$

Rzeczywiście, w zbiorze $(n+1)$-elementowym wyróżniamy jeden element (np. w stadzie $n+1$ owiec jedna jest czarna, a pozostałe są białe). Aby wybrać k elementów możemy:

- wybrać k niewyróżnionych elementów na $c(n,k)$ sposobów
- wybrać $k-1$ niewyróżnionych elementów na $c(n,k-1)$, sposobów i dorzucić wyróżniony element.

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy zatem

$$c(n+1,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{n![n-k+1+k]}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Twierdzenie 1.1 (wzór dwumianowy Newtona)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

Dowód. Mamy

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ czynników}}.$$

Po wymnożeniu, bez redukcji wyrazów podobnych, otrzymamy 2^n składników postaci $x^{n-k}y^k$. Aby otrzymać składnik $x^{n-k}y^k$ spośród n nawiasów wybieramy k nawiasów, z których weźmiemy y. Z pozostałych $n-k$ nawiasów weźmiemy x. Takich wyborów mamy $c(n,k)$ czyli $\binom{n}{k}$. Zatem po zredukowaniu wyrazów podobnych współczynnik przy $x^{n-k}y^k$ wyniesie $\binom{n}{k}$. □

Twierdzenie 1.2 (nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną)**.** *Dla* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ *mamy*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Dowód. (Cauchy)
Równoważnie trzeba udowodnić, że

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n. \tag{1.1}$$

Pokażemy (1.1) dla $n = 2^k$ przez indukcję względem k. Dla $k = 1$ mamy

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Sprawdzamy nierówność dla $n = 2^{k+1}$ przy założeniu, że jest spełniona dla $n = 2^k$.

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_{2^{k+1}-1} x_{2^{k+1}} = (x_1 x_2)(x_3 x_4) \ldots (x_{2^{k+1}-1} x_{2^{k+1}})$$
$$\leqslant \Big(\underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{y_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{\frac{x_3 + x_4}{2}}_{y_2}\Big)^2 \ldots \Big(\underbrace{\frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}}_{y_{2^k}}\Big)^2$$
$$\leqslant \left(\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k \cdot 2} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2 \cdot 2^k}\right)^{2^k \cdot 2}.$$

Pozostaje udowodnić nierówność (1.1) dla dowolnej liczby naturalnej n niekoniecznie będącej potęgą liczby 2. Wybierzmy k tak, aby $n < 2^k$ (np. $n < 2^n$). Rozważamy nieujemne liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Oznaczmy

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Określmy

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^k} = A.$$

Wtedy z pierwszej części dowodu mamy

$$x_1 x_2 \ldots x_n \underbrace{x_{n+1} \ldots x_{2^{k+1}-1} x_{2^k}}_{2^k - n \text{ czynników}} \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2^k}}{2^k} \right)^{2^k}.$$

Zatem

$$A^{2^k - n} x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{nA + (2^k - n)A}{2^k} \right)^{2^k}. = A^{2^k}$$

Po podzieleniu obu stron przez $A^{2^k - n}$ otrzymamy (1.1). $\square$

Zadanie. Znaleźć bezpośredni dowód przez indukcję, tzn. z nierówności (1.1) wyprowadzić taką nierówność dla $n + 1$.

Uwaga 1.3. Zasadę indukcji można sformułować inaczej: jeśli stwierdzenie $T(n_0)$ jest prawdziwe oraz z prawdziwości $T(k)$ dla $n_0 \leqslant k \leqslant n$ wynika prawdziwość stwierdzenia $T(n+1)$, to stwierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla dowolnej liczby $n \geqslant n_0$. Schemat uzasadnienia jest podobny do schematu dla wcześniejszej definicji. Przy wyprowadzaniu prawdziwości $T(n+1)$ korzystamy z prawdziwości $T(k)$ dla wszystkich wcześniejszych liczb k, tzn. dla $n_0 \leqslant k \leqslant n$.

2 Ciągi liczbowe

Będziemy rozważali ciągi złożone z liczb rzeczywistych.

Definicja 2.1. *Ciągiem $\{a_n\}$ nazywamy odwzorowanie liczb naturalnych w liczby rzeczywiste. Liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazywamy wyrazami ciągu.*

Przykłady.

(a) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

(b) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$.

(c) $a_n = 5n + 3$, $b_n = 2^n + 1$.

(d) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

(e) $2, 3, 5, 7, 11, \dots$, - ciąg liczb pierwszych.

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *rosnącym* (*ściśle rosnącym*) jeśli

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1})$$

dla wszystkich n. Podobnie określamy ciągi malejące i ściśle malejące.

Przykład. Ciąg z przykładu (d) jest ściśle malejący. Rzeczywiście, pokażemy najpierw, że $a_n > 1$ dla wszystkich n. Mamy $a_1 = 2 > 1$. Dalej

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1 = \frac{a_n^2 + 1 - 2a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}.$$

Jeśli $a_n > 1$, to $a_{n+1} > 1$. Dalej

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) < 0,$$

bo $a_n > 1$.

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli dla pewnej liczby $M \geqslant 0$ spełniony jest warunek $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich n. Tzn. wyrazy ciągu leżą w przedziale $[-M, M]$.

Przykład. Ciąg z przykładu (d) jest ograniczony, bo

$$1 < a_n \leqslant a_1 = 2.$$

2.1 Zbieżność ciągów

Przykłady.

(a) Wyrazy ciągu $a_n = \dfrac{1}{n}$ zbliżają się do zera, gdy n rośnie.

(b) Dla $b_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n^2}$ wyrazy o numerach parzystych zbliżają się do 1, a te o numerach nieparzystych do -1.

Definicja 2.2 (intuicyjna). *Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby g jeśli wyrazy ciągu leżą coraz bliżej liczby g dla dużych wskaźników n. Tzn. jeśli chcemy, aby liczba a_n znalazła się odpowiednio blisko g, to wskaźnik n powinien być odpowiednio duży. Stosujemy zapis $\lim\limits_n a_n = g$.*

Definicja 2.3 (ścisła). *Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ (która określa, jak blisko granicy mają znajdować się wyrazy ciągu) istnieje liczba N (próg określający jak duży powinien być wskaźnik ciągu) taka, że dla $n > N$ mamy $|a_n - g| < \varepsilon$.*

Ostatni warunek oznacza, że dla $n > N$ wyrazy ciągu a_n leżą w przedziale $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, tzn. w przedziale tym leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$, tzn. poza skończoną ilością $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

Uwaga 2.4. ε jest dowolną liczbą dodatnią, np.: 0,001, η, $\dfrac{\varepsilon}{2}$, ε^2,

Przykłady.

(a) $a_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$. Mamy $|a_n - 1| = \dfrac{1}{n}$. Widać, że ciąg a_n jest zbieżny do 1 na podstawie intuicyjnej definicji. Przećwiczymy ścisłą definicję. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Wtedy dla $n > N$ otrzymamy $n \geqslant \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Zatem $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

(b) $a_n = (-1)^n$. Jeśli a_n dąży do g, to wyrazy o dużych numerach powinny leżeć blisko siebie. Ale $|a_{n+1} - a_n| = 2$.

Twierdzenie 2.5. *Zbieżny ciąg posiada tylko jedną granicę.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $\lim\limits_n a_n = g$, $\lim\limits_n a_n = g'$, oraz $g < g'$. Określmy $\varepsilon = (g' - g)/2$. Przedziały $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ oraz $(g' - \varepsilon, g' + \varepsilon)$ są wtedy rozłączne. Nie jest możliwe więc, aby prawie wszystkie wyrazy leżały zarówno w pierwszym jak i drugim przedziale. □

Twierdzenie 2.6. *Każdy ciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) i ograniczony jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że a_n jest rosnący oraz niech $g = \sup a_n$. Pokażemy, że liczba g jest granicą ciągu a_n. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Liczba $g-\varepsilon$ nie ogranicza ciągu a_n od góry. Tzn. $a_N > g - \varepsilon$ dla pewnego wskaźnika N. Wtedy dla $n > N$ mamy

$$g - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant g < g + \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 2.7. *Załóżmy, że* $\lim\limits_n a_n = g$ *oraz* $\lim\limits_n b_n = h$. *Wtedy ciągi po lewej stronie wzorów poniżej są zbieżne oraz:*

(a) $\lim\limits_n (a_n + b_n) = \lim\limits_n a_n + \lim\limits_n b_n$.

(b) $\lim\limits_n (a_n b_n) = \lim\limits_n a_n \cdot \lim\limits_n b_n$.

(c) $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_n a_n}{\lim\limits_n b_n}$, *o ile* $\lim\limits_n b_n \neq 0$.

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieją progi N_1 i N_2 takie, że dla $n > N_1$ mamy

$$\begin{aligned} |a_n - g| &< \frac{\varepsilon}{2}, \qquad && n > N_1, \\ |b_n - h| &< \frac{\varepsilon}{2}, \qquad && n > N_2. \end{aligned}$$

Wtedy dla $n > \max(N_1, N_2)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (g + h)| &= |(a_n - g) + (b_n - h)| \\ &\leqslant |a_n - g| + |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Skorzystamy z nierówności

$$\begin{aligned} |a_n b_n - gh| &= |(a_n - g)(b_n - h) + h(a_n - g) + g(b_n - h)| \\ &\leqslant |a_n - g|\,|b_n - h| + |h|\,|a_n - g| + |g|\,|b_n - h|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Niech $0 < \eta \leqslant 1$. Z założenia istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $|a_n - g| < \eta$ i $|b_n - h| < \eta$. Wtedy dla $n > N$ na podstawie (2.1) otrzymujemy

$$|a_n b_n - gh| < \eta^2 + |h|\,\eta + |g|\,\eta \leqslant (1 + |g| + |h|)\,\eta,$$

bo $\eta^2 \leqslant \eta$ dla $0 < \eta \leqslant 1$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ wybieramy liczbę η taką, że $0 < \eta \leqslant 1$ oraz

$$(1 + |g| + |h|)\eta \leqslant \varepsilon.$$

Np. można przyjąć

$$\eta = \frac{\varepsilon}{1 + |g| + |h| + \varepsilon}.$$

(c) Zaczniemy od wersji

$$\lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_n b_n}.$$

Oznaczmy $\varepsilon_1 = \dfrac{|h|}{2}$. Z założenia istnieje próg N_1 taki, że dla $n > N_1$ mamy

$$|b_n - h| < \frac{|h|}{2}.$$

Zatem

$$|h| - |b_n| \leqslant {}^{*}|b_n - h| \ < \frac{|h|}{2},$$

czyli

$$|b_n| > \frac{|h|}{2}, \quad n > N_1.$$

Dla $n > N_1$ otrzymujemy zatem

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \frac{|b_n - h|}{|h|\,|b_n|} < \frac{2|b_n - h|}{|h|^2}. \tag{2.2}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje próg N_2 taki, że dla $n > N_2$ mamy

$$|b_n - h| < \frac{h^2\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Niech $n > \max(N_1, N_2)$ †. Wtedy z (2.2) i (2.3) uzyskamy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon.$$

---

*Skorzystaliśmy z nierówności $|x - y| \geqslant |y| - |x|$.

†Można przyjąć $n > N_1 + N_2$.

Z (b) mamy wtedy

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_n a_n \cdot \lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}.$$

□

Wniosek 2.8. *Jeśli ciąg a_n jest zbieżny, to $\lim_n c\, a_n = c \lim_n a_n$.*[‡]

Wniosek 2.9. *Jeśli ciągi a_n i b_n są zbieżne, to*

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n.$$

Dowód.

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n [b_n + (-1)a_n] = \lim_n b_n + \lim_n (-1)a_n = \lim_n b_n - \lim_n a_n.$$

□

Twierdzenie 2.10. *Jeśli ciągi a_n i b_n są zbieżne, to*

(a) $|\lim_n a_n| = \lim_n |a_n|$.

(b) *Jeśli $a_n \geqslant 0$, to $\lim_n a_n \geqslant 0$.*

(c) *Jeśli $a_n \leqslant b_n$, to $\lim_n a_n \leqslant \lim_n b_n$.*

(d) ***(twierdzenie o trzech ciągach)** Jeśli $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ oraz $\lim_n a_n = \lim_n b_n$, to ciąg c_n jest zbieżny oraz $\lim_n c_n = \lim_n a_n$.*

Dowód. (a) Oznaczmy $\lim_n a_n = g$. Wtedy teza wynika natychmiast z nierówności

$$\Big||a_n| - |g|\Big| \leqslant |a_n - g|.$$

(b)

$$\lim_n a_n = \lim_n |a_n| = |\lim_n a_n| \geqslant 0.$$

[‡]Wystarczy przyjąć $b_n \equiv c$.

(c) Mamy $0 \leqslant b_n - a_n$. Zatem z (b) otrzymujemy

$$\lim_n b_n - \lim_n a_n = \lim_n (b_n - a_n) \geqslant 0.$$

(d) Z założenia mamy

$$0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n. \tag{2.4}$$

Dalej

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n = 0.$$

Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $0 \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. Wtedy z (2.4) uzyskujemy

$$0 \leqslant c_n - a_n < \varepsilon, \quad \text{dla } n > N.$$

Stąd $\lim_n (c_n - a_n) = 0$. Ciąg c_n jest zbieżny jako suma ciągów $c_n - a_n$ oraz a_n. Ponadto

$$\lim_n c_n = \lim_n a_n + \lim_n (c_n - a_n) = \lim_n a_n.$$

□

Definicja 2.11. *Dla ciągu $\{a_n\}$ i ściśle rosnącego ciagu liczb naturalnych m_n ciąg $\{a_{m_n}\}$ nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}$.*

Przykłady. a_{n^2}, $a_{n!}$, a_{p_n}, gdzie p_n jest n-tą liczba pierwszą.

Dla rosnącego ciągu m_n liczb naturalnych mamy $m_n \geqslant n$.

Twierdzenie 2.12. *Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej liczby co pełny ciąg.*

Dowód. Oznaczmy $g = \lim_n a_n$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ rozważamy przedział $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Z założenia prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n znajdują się w tym przedziale. Tym bardziej prawie wszystkie wyrazy podciągu a_{m_n} tam się znajdują. □

Uwaga 2.13. Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne: jeśli każdy podciąg ciągu a_n zawiera podciąg zbieżny do liczby g, to cały ciąg jest zbieżny do g.

Przykład. Niech

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad a_1 = 2. \tag{2.5}$$

Wiemy, że a_n jest zbieżny jako ciąg malejący i ograniczony z dołu, przez 1. Oznaczmy $g = \lim_n a_n$. Ciąg a_{n+1} jest podciągiem ciągu a_n, więc jego granica wynosi $g \geqslant 1$. Z równości (2.5) otrzymujemy

$$g = \frac{1}{2}\left(g + \frac{1}{g}\right).$$

Stąd po przekształceniu uzyskujemy $g^2 = 1$, czyli $g = 1$.

Zadanie. Dla liczby $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ określamy ciąg a_n rekurencyjnie

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \frac{1-\alpha}{a_n}, \quad n \geqslant 1, \quad a_1 = a > 0.$$

Zbadać zbieżność ciągu a_n.

Twierdzenie 2.14 (Bolzano, Weierstrass)**.** *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że wyrazy ciągu c_n znajdują się w przedziale $[a_1, b_1]$. Będziemy konstruować podciąg d_n ciągu c_n. Niech $d_1 := c_1$. Dzielimy przedział $[a_1, b_1]$ na dwie połowy punktem $(a_1 + b_1)/2$. Przynajmniej jeden z przedziałów $[a_1, (a_1+b_1)/2]$, $[(a_1+b_1)/2, b_1]$ zawiera nieskończenie wyrazów ciągu c_n. Oznaczmy ten przedział przez $[a_2, b_2]$. Niech m_2 oznacza najmniejszy wskaźnik, większy niż 1, dla którego $c_{m_2} =: d_2$ leży w $[a_2, b_2]$. Dalej przedział $[a_2, b_2]$ dzielimy na pół. Jeden z przedziałów $[a_2, (a_2+b_2)/2]$, $[(a_2+b_2)/2, b_2]$ zawiera nieskończenie wyrazów ciągu c_n. Końce tego przedziału oznaczmy przez a_3 i b_3. Podobnie jak wcześniej wybieramy najmniejszy wskaźnik $m_3 > m_2$, dla którego $c_{m_3} =: d_3$ leży w $[a_3, b_3]$. Postępując tak dalej otrzymamy nieskończony ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ oraz podciąg $d_n := c_{m_n}$ o własnościach

$$d_n \in [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad b_n - a_n = \tfrac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}).$$

Mamy

$$a_1 \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant b_1.$$

Ciąg a_n jest rosnący i ograniczony, natomiast ciąg b_n jest malejący i też ograniczony. Zatem ciągi te są zbieżne. Z równości

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$$

wynika $\lim_n (b_n - a_n) = 0$. Zatem $\lim_n b_n = \lim_n a_n$. Ponieważ $a_n \leqslant d_n \leqslant b_n$, to z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że ciąg d_n jest zbieżny. □

Czasami chcemy rozpoznać, czy dany ciąg jest zbieżny, ale nie potrafimy wskazać granicy. Wtedy możemy użyć warunku Cauchy'ego.

Definicja 2.15. *Mówimy, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego jeśli dla dużych wskaźników wyrazy ciągu leżą blisko siebie. Ściśle: dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje próg* N *taki, że dla* $m, n > N$ *mamy* $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Przykłady.

(a)
$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Załóżmy, że $n > m$. Wtedy:

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Chcemy, aby $1/m < \varepsilon$. Niech $N = [1/\varepsilon]$. Wtedy dla $n > m > N$ mamy $1/m < \varepsilon$, zatem
$$0 < a_n - a_m < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ciąg a_n jest zbieżny. Rzeczywiście ciąg a_n jest ściśle rosnący oraz z przeprowadzonego wyżej rozumowania (dla $m = 1$) wynika, że $a_n - a_1 < 1$ czyli $a_n < 2$. Można udowodnić, że
$$\lim_n a_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b)
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Obliczamy
$$b_{2n} - b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem warunek Cauchy'ego nie jest spełniony.

Twierdzenie 2.16. *Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. ($\Longrightarrow$) Niech $g = \lim_n a_n$. Wtedy

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) - (a_m - g)| \leqslant |a_n - g| + |a_m - g|.$$

Z założenia dla liczby $\varepsilon > 0$ istnieje próg N, dla którego $|a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $k > N$. Niech $n, m > N$. Wtedy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) Pokażemy, że ciąg a_n jest ograniczony. Dla $\varepsilon = 1$ istnieje próg N (liczba naturalna) taki, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > N$. Niech

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}.$$

Wtedy $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich n. Rzeczywiście:

(1) Dla $n = 1, 2, \ldots, N$ mamy $|a_n| \leqslant M$ w oczywisty sposób.

(2) Dla $n > N$ mamy $|a_n - a_{N+1}| < 1$ zatem

$$|a_n| = |(a_n - a_{N+1}) + a_{N+1}| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M.$$

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ciąg a_n posiada podciąg zbieżny. Niech $g = \lim_n a_{m_n}$. Pokażemy, że $\lim_n a_n = g$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Istnieje próg N_1 taki, że $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n, m > N_1$. Dalej istnieje próg N_2 taki, że dla $n > N_2$ mamy $|a_{m_n} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Określmy $N = \max(N_1, N_2)$. Wtedy dla $n > N$ otrzymujemy $m_n \geqslant n > N$, zatem

$$|a_n - g| = |(a_n - a_{m_n}) + (a_{m_n} - g)| \leqslant |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Uwaga 2.17. Przypuśćmy, że „żyjemy” w przedziale $(0, 1)$. Ciąg $1/n$ spełnia warunek Cauchy'ego, ale granica leży poza przedziałem $(0, 1)$.

Na prostej $\mathbb{R}$ wprowadzamy nową odległość

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

Wtedy ciąg $x_n = n$ spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny.

Definicja 2.18. *Mówimy, że ciąg a_n jest rozbieżny do nieskończoności (∞) jeśli dla dowolnej liczby M istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $a_n > M$, tzn. w przedziale (M, ∞) znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu.*

Przykłady.

(a) $\lim_n n = \infty$.

(b) $\lim_n \log n = \infty$..

Dowód. Niech $M > 0$. Chcemy, aby $\log n > M = \log e^M$, czyli $n > e^M$. Wystarczy, aby $n > [e^M]$. Wtedy $\log n > M$. $\square$

(c)
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$
Wiemy, że $b_{2n} - b_n > \frac{1}{2}$. Zatem
$$b_{2^n} = (b_{2^n} - b_{2^{n-1}}) + (b_{2^{n-1}} - b_{2^{n-2}}) + \ldots + (b_2 - b_1) + b_1 \geqslant \frac{n}{2} + 1.$$
Dla liczby naturalnej $k \geqslant 2$ mamy $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ dla pewnej wartości n. Wtedy $(n+1)\log 2 > \log k$ oraz
$$b_k \geqslant b_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \geqslant \frac{n+1}{2} > \frac{\log k}{2\log 2} = \frac{\log k}{\log 4}.$$

Twierdzenie 2.19. *Ciąg dodatni a_n spełnia $\lim_n a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_n \frac{1}{a_n} = 0$.*

Dowód. ($\Longrightarrow$) Niech $\varepsilon > 0$. Określmy $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Istnieje próg N, dla którego
$$a_n > M = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad n > N.$$
Wtedy
$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \qquad n > N.$$

($\Longleftarrow$) Rozważamy liczbę M. Jeśli $M \leqslant 0$, to $a_n > M$ dla wszystkich n. Jeśli $M > 0$, to przyjmujemy $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$. Istnieje próg N taki, że

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon = \frac{1}{M}, \qquad n > N.$$

Wtedy

$$a_n > M, \qquad n > N.$$

$\square$

Twierdzenie 2.20 (kryterium porównawcze)**.** *Jeśli* $a_n \leqslant b_n$ *oraz* $\lim_n a_n = \infty$, *to* $\lim_n b_n = \infty$.

Definicja 2.21. *Określamy* $\lim_n a_n = -\infty$ *jeśli* $\lim_n(-a_n) = \infty$.

Definicja 2.22. *Liczbę* α *nazywamy punktem skupienia ciągu* a_n *jeśli można znaleźć podciąg* a_{n_k} *zbieżny do* α.

Uwaga 2.23. Zbieżny ciąg posiada tylko jeden punkt skupienia - swoją granicę.

Przykłady.

(a) $a_n = (-1)^n$. Wtedy $a_{2n} = 1$ i $a_{2n+1} = -1$.

(b) $a_n = \sin n$. Zbiór punktów skupienia jest równy $[-1, 1]$.

(c) Rozważmy ciąg

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots .$$

Wtedy zbiór punktów skupienia jest równy $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Uwaga 2.24. Liczba α jest punktem skupienia ciągu a_n wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym przedziale $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n.

Zadanie. Czy zbiór liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$ może być zbiorem punktów skupienia jakiegoś ciągu ?

Twierdzenie 2.25. *Dla ograniczonego ciągu a_n istnieją najmniejszy i największy punkt skupienia nazywane granicą dolną i górną ciągu i oznaczane symbolami* $\liminf a_n$ *oraz* $\limsup a_n$.

Dla ciągu z przykładu (c) granica dolna wynosi 0, a górna 1.

Uwaga 2.26. Można udowodnić, że

$$\liminf a_n = \sup_n \inf_{m\geqslant n} a_m, \quad \limsup a_n = \inf_n \sup_{m\geqslant n} a_m.$$

Dowód. (*) Oznaczmy $b = \inf_n \sup_{m\geqslant n} a_m$. Pokażemy, że b jest punktem skupienia. Jeśli nie, to dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ przedział $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ zawiera tylko skończenie wiele wyrazów ciągu a_n. Na prawo od $b+\varepsilon$ może być tylko skończenie wiele wyrazów ciągu, bo w przeciwnym razie $\sup_{m\geqslant n} a_m \geqslant b+\varepsilon$ dla wszystkich n. Zatem prawie wszystkie wyrazy leżą poniżej $b-\varepsilon$, co prowadzi do sprzeczności.

Oznaczmy $b_n = \sup_{m\geqslant n} a_m$. Wtedy $a_n \leqslant b_n$. Ponadto ciąg b_n jest malejący, zatem

$$b_n \searrow \inf_n b_n = b.$$

Jeśli $a_{m_n} \to \alpha$, to z nierówności $a_{m_n} \leqslant b_{m_n}$ wynika, $\alpha \leqslant b$, czyli faktycznie liczba b jest największym punktem skupienia. $\square$

2.2 Liczba *e*

Rozważmy dwa ciągi

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Mamy $x_n < y_n$. Obliczamy

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.\end{aligned}$$

W ostatniej linii skorzystaliśmy z nierówności Bernoulli'ego $(1+x)^n > 1+nx$ dla $x > -1,\ x \neq 0$. Udowodniliśmy, że ciąg x_n jest ściśle rosnący. Dalej

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} > \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Zatem y_n jest ciągiem ściśle malejącym. Mamy więc

$$2 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < \ldots < y_2 < y_1 = 4.$$

Oba ciągi są więc zbieżne. Oznaczmy

$$e = \lim_n x_n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Wtedy

$$y_n = x_n \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e.$$

Znajdziemy teraz inną przydatną postać liczby e. Mamy

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Ustalmy liczbę naturalną m. Dla $n > m$ mamy

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Przechodzimy z n do nieskończoności i otrzymujemy

$$e \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Reasumując mamy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant e.$$

Zatem

$$e = \lim_n \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Twierdzenie 2.27. *Liczba e ma przedstawienie*

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta(n)}{n!n},$$

gdzie $0<\theta(n)<1$.

Dowód. Dla $m>n$ mamy

$$\begin{aligned}
c_m &:= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\frac{1}{m!}\\
&= c_n+\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot m}\right]\\
&< c_n+\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right]\\
&= c_n+\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1-\frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1-\frac{1}{n+2}} < c_n+\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

Zatem

$$c_n < c_m < c_n+\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}.$$

Przechodząc do granicy, gdy $m\to\infty$ otrzymujemy

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \;<\; e \;\leqslant\; 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Zatem

$$0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\leqslant\frac{1}{n!n}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}<\frac{1}{n!n}.$$

Stąd otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Uwaga 2.28. *Rozwinięcie dziesiętne liczby e ma postać*

$$e = 2,718281828\ldots\ .$$

Wniosek 2.29. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód. Symbolem $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby x. Gdyby $e = \frac{p}{q}$, dla liczb naturalnych p i q, to $\{q!e\} = 0$. Ale z poprzedniego twierdzenia mamy

$$\{n!e\} = \left\{\frac{\theta(n)}{n}\right\} = \frac{\theta(n)}{n} > 0.$$

□

Uwaga 2.30. Można udowodnić, że liczba e jest *przestępna*, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Liczby będące pierwiastkami takich wielomianów nazywamy liczbami *algebraicznymi.*

Wiemy, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zastosujmy logarytm przy podstawie e do nierówności. Otrzymamy po przekształceniach

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{2.6}$$

Rozważmy ciąg

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1).$$

Mamy

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0,$$

na podstawie drugiej nierówności w (2.6). Rozważmy inny ciąg

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Mamy

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0,$$

na podstawie pierwszej nierówności w (2.6). Dla $n > 1$ otrzymujemy

$$u_1 < u_n < v_n < v_1.$$

Zatem oba ciągi są zbieżne jako ciągi monotoniczne i ograniczone. Ponieważ $v_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$, to granice obu ciągów są równe. Oznaczmy symbolem c tę granicę. Wtedy

$$0 < 1 - \log 2 = u_1 < c < v_1 = 1.$$

Reasumując

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = c, \qquad 0 < c < 1. \tag{2.7}$$

Liczbę c nazywamy stałą Eulera. Rozwinięcie dziesiętne ma postać

$$c = 0,5772156649\ldots\ .$$

3 Szeregi liczbowe

Dla ciągu a_n określamy ciąg sum częściowych s_n wzorem

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

W szczególności $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Jeśli ciąg s_n jest zbieżny (do granicy s), to mówimy, że szereg jest zbieżny i zapisujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Przykłady.

(a) Rozważmy ciąg geometryczny $a_n = q^n$ dla $|q| < 1$. Wtedy

$$s_n = q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n]{} \frac{q}{1-q},$$

bo $q^n \xrightarrow[n]{} 0$, dla $|q| < 1$. * Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

*Wystarczy pokazać $|q|^n \to 0$, czyli rozważać $0 < q < 1$. Niech $1/q = 1 + a$, dla $a > 0$. Wtedy $1/q^n = (1+a)^n > 1 + na$. Czyli $0 < q^n < 1/(1+na)$.

(b) Rozważmy szereg harmoniczny o wyrazach $a_n = \frac{1}{n}$. Wiemy, że

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \log n.$$

Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (do nieskończoności).

Twierdzenie 3.1 (warunek Cauchy'ego dla szeregu)**.** *Szereg* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek, że dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje próg* N *taki, że dla* $n > m > N$ *mamy*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

Dowód. Dla $n > m$ mamy

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

To oznacza, że warunek w twierdzeniu jest identyczny z warunkiem Cauchy'ego dla ciągu s_n. □

Twierdzenie 3.2. *Jeśli szereg* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_n a_n = 0$.

Dowód. Mamy $a_n = s_n - s_{n-1}$. Oznaczmy $s = \lim_n s_n$. Wtedy

$$\lim_n a_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Uwaga 3.3. Warunek w tezie nie wystarcza do zbieżności szeregu. Na przykład szereg o wyrazach

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$$

nie jest zbieżny. Ile wynosi wyraz szeregu o numerze 2014 ? Które numery mają wyrazy szeregu o wartości 1/2014 ?

Twierdzenie 3.4. *Dla każdego szeregu zbieżnego ciąg sum częściowych jest ograniczony.*

Dowód. Ciąg s_n spełnia warunek Cauchy'ego więc jest ograniczony. □

Twierdzenie 3.5. *Załóżmy, że szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne. Wtedy zbieżne są szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *oraz*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

Teza wynika z Twierdzenia 2.7 zastosowanego do ciągów sum częściowych szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Definicja 3.6. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie 3.7. *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Dowód. Teza wynika z nierówności dla $n > m$

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n|.$$

Zatem warunek Cauchy'ego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pociąga ten warunek dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Uwaga 3.8. Zbieżny szereg nie musi być bezwzględnie zbieżny. Na przykład szereg o wyrazach

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

jest zbieżny do liczby 0, ale nie jest zbieżny bezwględnie.

Uwaga 3.9. Zbieżność ciągu a_n i szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie zależy od zachowania się skończonej liczby początkowych wyrazów. Tzn. jeśli $a_n = b_n$ dla $n > N$ to ciągi a_n i b_n są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne. To samo dotyczy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Twierdzenie 3.10 (Kryterium Dirichleta)**.** *Załóżmy, że ciąg* a_n *jest malejący oraz* $a_n \xrightarrow[n]{} 0$. *Załóżmy również, że sumy częściowe ciągu* b_n *są ograniczone (tzn. ciąg o wyrazach* $s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ *jest ograniczony). Wtedy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Sprawdzimy warunek Cauchy'ego. Z założenia $|s_n| \leqslant M$ dla pewnej stałej $M > 0$. Niech $n > m$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&|a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \ldots + a_n b_n| \\
&\quad = |a_{m+1}(s_{m+1} - s_m) + a_{m+2}(s_{m+2} - s_{m+1}) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1})| \\
&= |-a_{m+1}s_m + (a_{m+1} - a_{m+2})s_{m+1} + (a_{m+2} - a_{m+3})s_{m+2} + \ldots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n| \\
&\leqslant a_{m+1}|s_m| + (a_{m+1} - a_{m+2})|s_{m+1}| + (a_{m+2} - a_{m+3})|s_{m+2}| + \ldots + (a_{n-1} - a_n)|s_{n-1}| + a_n|s_n| \\
&\leqslant M\left[a_{m+1} + (a_{m+1} - a_{m+2}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + a_n\right] = 2Ma_{m+1}.
\end{aligned}$$

Dla $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna m_0 taka, że $a_{m_0} < \frac{\varepsilon}{2M}$. Wtedy dla $m \geqslant m_0$ mamy

$$|a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \ldots + a_n b_n| \leqslant 2Ma_{m+1} \leqslant 2Ma_{m_0} < \varepsilon.$$

□

Przykład. Rozważamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Dla $x = k\pi$ szereg jest zbieżny, bo każdy wyraz się zeruje. Załóżmy, że $x \neq 2k\pi$. Przyjmujemy $a_n = \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \sin nx$. Będziemy korzystać ze wzoru trygonometrycznego

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\tfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta+\alpha}{2},$$

czyli po przekształceniu

$$\cos(v - u) - \cos(u + v) = 2\sin u \sin v.$$

Badamy sumy częściowe ciągu b_n.

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \\
&\quad = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\tfrac{x}{2}\sin x + 2\sin\tfrac{x}{2}\sin 2x + \ldots + 2\sin\tfrac{x}{2}\sin nx\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\tfrac{x}{2} - \cos\tfrac{3x}{2}\right) + \left(\cos\tfrac{3x}{2} - \cos\tfrac{5x}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\tfrac{(2n-1)x}{2} - \cos\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\right] \\
&\qquad = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\tfrac{x}{2} - \cos\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy
$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Wniosek 3.11 (kryterium Leibniza o szeregu naprzemiennym)**.** *Jeśli ciąg a_n jest malejący oraz $a_n \xrightarrow[n]{} 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Przyjmujemy $b_n = (-1)^{n+1}$. Wtedy sumy częściowe ciągu b_n mają postać $s_{2n} = 0$ i $s_{2n+1} = 1$. Zatem szereg jest zbieżny. □

Przykład. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny z kryterium Leibniza. Ze wzoru (2.7) można wykazać, że szereg jest zbieżny do liczby $\log 2$.

Wniosek 3.12. *Jeśli a_n jest zbieżnym ciągiem monotonicznym a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Dowód. Możemy założyć, że ciąg a_n jest malejący. Oznaczmy $a = \lim_n a_n$. Wtedy $a_n - a \searrow_n 0$. Z twierdzenia Dirichleta szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ jest zbieżny. Ale
$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n,$$
zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny. □

Twierdzenie 3.13 (Kryterium porównawcze)**.** *Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ponadto*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Dla $n > m$ mamy
$$0 \leqslant a_{m+1} + a_{m+2} \ldots + a_n \leqslant b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n.$$

Warunek Cauchy'ego dla szeregu $\sum b_n$ pociąga ten warunek dla szeregu $\sum a_n$. Sumy częściowe szeregu $\sum a_n$ są niewiększe niż sumy częściowe dla szeregu $\sum b_n$. Zatem nierówność przenosi się na sumy szeregów.

Można podać inne uzasadnienie. Mamy

$$0 \leqslant s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_j =: B.$$

Ciąg sum częściowych s_n jest rosnący i ograniczony, zatem jest zbieżny. Ponadto

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_n s_n \leqslant B.$$

$\square$

Uwaga 3.14. Kryterium porównawcze stosujemy tylko dla szeregów o wyrazach nieujemnych, przynajmniej od pewnego miejsca n_0. Wtedy

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.$$

Uwaga 3.15. Jeśli $a_n \geqslant 0$, to ciąg $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ jest rosnący. Zatem ciąg s_n (i w związku z tym szereg $\sum a_n$) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ten ciąg jest ograniczony (od góry). Jeśli s_n nie jest ograniczony od góry, to s_n jest rozbieżny do ∞. Stosujemy wtedy zapis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Wniosek 3.16. *Jeśli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *oraz szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *też jest rozbieżny.*

Przykład. Badamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 8n}{2n^5 + n^2 + 4}$.

$$\frac{n^4 + 8n}{2n^5 + n^2 + 4} \geqslant \frac{n^4}{2n^5 + n^5 + 4n^5} = \frac{1}{7n}.$$

Wiemy, że $\sum \frac{1}{n} = \infty$, więc badany szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 3.17 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Załóżmy, że*

$$a = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(i) Jeśli $a < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(ii) Jeśli $a > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga 3.18. Kryterium nie rozstrzyga zbieżności, gdy $a = 1$. Dla szeregów $\sum \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n}$ mamy $a = 1$. Pierwszy z szeregów jest zbieżny a drugi rozbieżny.

Dowód. (i) $a < 1$. Niech $r = \frac{a+1}{2}$. Wtedy $a < r < 1$. Istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $\sqrt[n]{|a_n|} < r$. Zatem $|a_n| < r^n$ dla $n \geqslant N+1$. Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

(ii) $a > 1$. Dla $r = \frac{a+1}{2}$ istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $\sqrt[n]{|a_n|} > r > 1$. Tzn. $|a_n| > r^n$ dla $n > N$, czyli a_n jest rozbieżny do nieskończoności. Tym bardziej szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny. □

Twierdzenie 3.19 (Kryterium d'Alemberta)**.** *Załóżmy, że*

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = a.$$

(i) Jeśli $a < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(ii) Jeśli $a > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Zastosujemy oznaczenia z dowodu kryterium Cauchy'ego, tzn. $r = \frac{a+1}{2}$.

(i) Istnieje N takie, że dla $n > N$ mamy $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$. Wtedy

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|}|a_{N+1}| < r^{n-N-1}|a_{N+1}| = \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}}\, r^n. \quad (3.1)$$

Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

(ii). Istnieje N takie, że dla $n > N$ mamy $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > r > 1$. Z pierwszej równości we wzorze (3.1) otrzymujemy wtedy

$$|a_n| > \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n.$$

Zatem $|a_n| \xrightarrow[n]{} \infty$. □

Uwaga 3.20. Można udowodnić, że z istnienia granicy $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ wynika

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Wniosek 3.21. *Jeśli ciąg a_n spełnia założenia kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta, to dla $a < 1$ ciąg ten jest zbieżny do zera, a dla $a > 1$ wartości bezwzględne wyrazów dążą do nieskończoności.*

Przykłady.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Stosujemy kryterium d'Alemberta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0.$$

W związku z tym szereg jest zbieżny.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{3^n}$, dla $k \in \mathbb{N}$. Używamy kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{\frac{n^k}{3^n}} = \frac{1}{3}(\sqrt[n]{n})^k \xrightarrow[n]{} \frac{1}{3},$$

i otrzymujemy zbieżność szeregu.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Wygodniej będzie użyć kryterium d'Alemberta.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Zatem szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 3.22 (Cauchy'ego o zagęszczaniu)**.** *Załóżmy, że ciąg a_n jest malejący oraz $a_n \xrightarrow[n]{} 0$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg (zagęszczony) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Przykłady.

(a) Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, dla $\alpha > 0$. Szereg zagęszczony ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Szereg ten jest zbieżny tylko jeśli $2^{\alpha-1} > 1$, czyli dla $\alpha > 1$.

(b) Niech $a_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$, dla $n \geqslant 2$ oraz $\alpha > 0$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Zatem szereg jest zbieżny tylko dla $\alpha > 1$ na podstawie przykładu (a).

(c) Można pokazać, że szereg o wyrazach

$$a_n = \frac{1}{n \log n (\log \log n)^\alpha}, \quad n \geqslant 3,$$

jest zbieżny tylko dla $\alpha > 1$.

Dowód twierdzenia o zagęszczaniu. ($\Rightarrow$) Mamy

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^n}$$
$$\leqslant a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n})$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k =: s.$$

Zatem $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant 2s$. To oznacza, że sumy częściowe szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ są ograniczone od góry. Stąd szereg jest zbieżny, bo sumy częściowe tworzą ciąg rosnący.

($\Leftarrow$) Ponieważ $2^n \geqslant n+1$, to

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k$$
$$= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n-1})$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} \leqslant a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} =: \widetilde{s}.$$

Sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są ograniczone przez $\widetilde{s}$, zatem szereg ten jest zbieżny.

□

Dla zbieżnego szeregu $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ określamy ciąg n-tych ogonów wzorem $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Mamy

$$s_n + r_n = s, \quad r_n = s - s_n,$$

zatem

$$\lim_n r_n = \lim_n (s - s_n) = 0.$$

3.1 Łączność i przemienność w sumie nieskończonej

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg postaci

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) \\ + \ldots + (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \ldots + a_{n_{k+1}}) + \ldots \quad (3.2)$$

Rzeczywiście, sumy częściowe szeregu (3.2) mają postać

$$s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_k}, \ldots,$$

zatem ciąg s_{n_k} jest podciągiem ciągu s_n. Stąd s_{n_k} jest zbieżny do tej samej granicy co ciąg s_n, czyli suma szeregu z nawiasami jest taka sama jak suma oryginalnego szeregu.

Uwaga 3.23. Wynikanie odwrotne nie jest spełnione. Szereg (3.2) po otworzeniu nawiasów może być rozbieżny:

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots + (-1 + 1) + \ldots$$

Jeśli w każdym nawiasie szeregu wyrazy mają ten sam znak i szereg (3.2) jest zbieżny (do s), to szereg bez nawiasów też jest zbieżny do s. Rzeczywiście, zauważmy, że jeśli $n_k < n < n_{k+1}$, to suma s_n leży pomiędzy s_{n_k} i $s_{n_{k+1}}$. Dla dużych wskaźników k liczby s_{n_k} i $s_{n_{k+1}}$ leżą blisko liczby s. Wtedy wielkości s_n dla $n_k < n < n_{k+1}$ również leżą blisko s.

Przy dodawaniu skończonej liczby składników ich kolejność nie gra roli. Co to znaczy zmiana kolejności dodawania w sumie nieskończonej ?

Definicja 3.24. *Permutacją zbioru liczb naturalnych nazywamy ciąg $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ złożony z liczb naturalnych, w którym każda liczba naturalna występuje dokładnie raz.*

Przykład.

$$2, 1, 4, 3, \ldots, 2n, 2n-1, \ldots$$

Twierdzenie 3.25. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwględnie zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$ jest zbieżny dla dowolnej premutacji σ oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}.$$

Uwaga 3.26. Założenie bezwzględnej zbieżności jest istotne. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mamy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \ldots - < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)}_{>0} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)}_{>0} + \ldots > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.$$

Szereg w drugiej linii jest zbieżny. Istotnie

$$\begin{aligned} s_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4k(4k-3)} + \frac{1}{4k(4k-1)}\right). \end{aligned}$$

Ciąg s_{3n} jest rosnący, bo składniki występujące w ostatniej sumie są dodatnie. Mamy $4k-1 > 4k-3 \geqslant k$. Zatem

$$s_{3n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4k^2} + \frac{1}{4k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Czyli ciąg s_{3n} jest zbieżny. Oznaczmy $s = \lim_n s_{3n}$. Mamy

$$\begin{aligned} s_{3n+1} &= s_{3n} + \frac{1}{4n+1} \xrightarrow[n]{} s, \\ s_{3n+2} &= s_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \xrightarrow[n]{} s. \end{aligned}$$

Zatem $\lim_n s_n = s$.

Zadanie. Wykazać, że $s = \frac{3}{2} \log 2$.

Dowód. Oznaczmy $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Istnieje liczba naturalna N, dla której $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Rozważamy permutację $\{\sigma_n\}$. Istnieje liczba naturalna M taka, że wśród liczb $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_M$ występują wszystkie liczby $1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Niech $m > M$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma_k} - s = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma_k} - \sum_{k=1}^{N} a_k\right) - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k.$$

W nawiasie wyrazy z drugiej sumy się uproszczą i po odjęciu pozostaną tylko wyrazy o numerach większych od N. Zatem

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma_k} - s\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma_k} - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leqslant 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

□

Definicja 3.27. *Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, jeśli szereg ten jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwględnie, tzn.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Twierdzenie 3.28 (Riemann)**.** *Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, to poprzez zamianę kolejności wyrazów można uzyskać szereg zbieżny do z góry ustalonej liczby, rozbieżny do $-\infty$, $+\infty$ lub szereg rozbieżny.*

Dowód. Przedstawimy szkic dowodu. Dla liczby a określamy dodatnią i ujemną część tej liczby wzorami

$$a^+ = \begin{cases} a & a \geqslant 0, \\ 0 & a < 0 \end{cases}, \qquad a^- = \begin{cases} -a & a \leqslant 0, \\ 0 & a > 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że

$$a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-.$$

Z założenia szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-)$$

jest zbieżny, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = \infty.$$

Stąd wynika, że oba szeregi $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ są rozbieżne oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty. \tag{3.3}$$

Ponadto a_n^+ i a_n^- są zbieżne do zera, bo $|a_n|$ dąży do zera. Stąd wynika, że suma wyrazów nieujemnych szeregu jest rozbieżna do ∞ a suma wyrazów ujemnych do $-\infty$. Chcemy uzyskać z góry zadaną liczbę s jako sumę szeregu $\sum a_{\sigma_n}$. W tym celu wybieramy po kolei wyrazy nieujemne szeregu i dodajemy do momentu, gdy suma przekroczy s. Następnie dodajemy po kolei wyrazy ujemne do momentu, gdy suma znajdzie się poniżej s. Następnie dodajemy (nieużyte do tej pory) wyrazy nieujemne aż suma przekroczy s, i dodajemy wyrazy ujemne, aż suma znajdzie się poniżej s. Postępując tak dalej otrzymamy szereg zbieżny do s. Kolejne kroki są możliwe do wykonania dzięki (3.3). To, że otrzymany szereg jest zbieżny do s wynika z tego, że $|a_n|$ dąży do zera.

Jeśli chcemy uzyskać $\sum a_{\sigma_n} = \infty$ dodajemy wyrazy nieujemne do momentu, gdy suma przekroczy 1. Następnie dodajemy jeden wyraz ujemny. W następnym kroku dodajemy wyrazy nieujemne aż suma przekroczy 2 i dodajemy jeden wyraz ujemny. Postępując tak dalej uzyskamy szereg o żądanej własności. □

3.2 Mnożenie Cauchy'ego szeregów.

Rozważmy dwa wielomiany $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (zakładamy, że $a_n = b_n = 0$ dla dużych n). Mnożymy te wielomiany i grupujemy wyrazy z tą samą potęgą przy x:

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots) \\
&\qquad = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \\
&+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n + \ldots \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Podstawmy $x = 1$ aby otrzymać

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}. \tag{3.4}$$

Wzór (3.4) można uzasadnić w inny sposób. Chcemy pomnożyć $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Tworzymy tabelę mnożenia

	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	b_n	$\dots$
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2			a_0b_n	
a_1	a_1b_0	a_1b_1			a_1b_{n-1}		
a_2	a_2b_0						
$\vdots$			$\iddots$				
a_{n-1}		$a_{n-1}b_1$					
a_n	a_nb_0						
$\vdots$							

Następnie sumujemy wyrazy na przekątnych i wyniki dodajemy.

Twierdzenie 3.29. *Jeśli szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sa zbieżne, przy czym conajmniej jeden z nich bezwzględnie, to szereg o wyrazach* $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *jest zbieżny oraz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Uwaga 3.30. Założenie bezwględnej zbieżności jest istotne. Niech $a_0 = b_0 = 0$ oraz

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Wtedy

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{(n-k)k}}.$$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2 + b^2$ otrzymamy

$$\sqrt{(n-k)k} \leqslant \frac{(n-k)+k}{2} = \frac{n}{2}.$$

Zatem

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-k)k}} \geqslant \frac{2(n-1)}{n}.$$

To oznacza, że ciąg c_n nie jest zbieżny do 0, czyli szereg o wyrazach c_n nie może być zbieżny.

Dowód Twierdzenia 3.29. * Załóżmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\
&\vdots \\
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.
\end{aligned}$$

Sumując (pionowo) otrzymamy

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \ldots + a_n B_0, \\
A_n B_n &= a_0 B_n + a_1 B_n + a_2 B_n + \ldots + a_n B_n.
\end{aligned}$$

Zatem

$$C_n - A_n B_n = a_1(B_{n-1} - B_n) + a_2(B_{n-2} - B_n) + \ldots + a_n(B_0 - B_n).$$

Ciąg B_n spełnia warunek Cauchy'ego. To oznacza, że dla z góry zadanej liczby $\underline{\varepsilon > 0}$ istnieje próg N_1 taki, że dla $s, t > N_1$ spełniony jest warunek

$$|B_s - B_t| < \varepsilon.$$

Z kolei z bezwględnej zbieżności szeregu o wyrazach a_n wynika, że istnieje próg N_2 taki, że

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy $N = \max(N_1, N_2)$. Ciąg B_n jest ograniczony. Istnieje więc stała $M > 0$, dla której

$$|B_n| \leqslant M, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant M.$$

Niech $\underline{n > 2N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}|C_n - A_nB_n| \leqslant |a_1|\,|B_{n-1} - B_n| + \ldots + |a_N|\,|B_{n-N} - B_n| \\ + |a_{N+1}|\,|B_{n-N-1} - B_n| + \ldots + |a_n|\,|B_0 - B_n|.\end{aligned}$$

W pierwszej części sumy oba numery w różnicy $B_j - B_n$ są większe niż N, bo $n > 2N$. Zatem $|B_j - B_n| < \varepsilon$. W drugiej części stosujemy oszacowanie $|B_j - B_n| \leqslant 2M$. W rezultacie otrzymamy

$$\begin{aligned}\underline{|C_n - A_nB_n|} &\leqslant \varepsilon\,(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N|) + 2M\,(|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_n|) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + 2M \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \;\; \underline{< 3M\varepsilon}.\end{aligned}$$

Z podkreślonych elementów wynika, że ciąg $C_n - A_nB_n$ dąży do zera. Oznaczmy

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Mamy

$$C_n = (C_n - A_nB_n) + A_nB_n.$$

Zatem

$$\lim_n C_n = \lim_n A_nB_n = AB.$$

To oznacza, że szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i jego suma jest równa AB. □

Przykład. Pomnożymy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ przez siebie metodą Cauchy'ego, dla $|x| < 1$. Otrzymamy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n. \tag{3.5}$$

W szczególności dla $x = \frac{1}{2}$ uzyskamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

Zatem (por. zadanie 8 z listy 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 8 - 6 = 3.$$

Prawdziwy jest wzór

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}. \tag{3.6}$$

Podamy uzasadnienie indukcyjne względem m. Dla $m = 1$ wzór sprowadza się do (3.5). Przypuśćmy, że wzór spełniony jest dla liczby m. Wtedy

$$\frac{1}{(1-x)^{m+2}} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+1}{m+1} x^n.$$

W ostatniej równości wykorzystaliśmy wzór

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1},$$

który można wyprowadzić (zadanie) z

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Zadanie. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ korzystając z (3.6) dla $m = 1$ i $m = 2$.

4 Funkcje i granice

Jeśli każdej liczbie z pewnego podzbioru $E \subseteq \mathbb{R}$ przyporządkowana jest jakaś liczba rzeczywista, to mamy do czynienia z funkcją. Funkcja składa się z dziedziny E oraz przepisu, który mówi jakie liczby należy przyporządkować liczbom z E. Zwykle przepis podany jest wzorem $y = f(x)$.

Przykłady.

(a) $E = (0, 1)$, $f(x) = x$.

(b) $E = (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) $E = (-1, 1)$, $f(x) = \begin{cases} \sin x & -1 < x < 0, \\ 5 & x = 0, \\ x^2 & 0 < x < 1. \end{cases}$.

Będziemy badali zachowanie się wartości funkcji w pobliżu punktu. Do tego służy granica funkcji w punkcie.

Definicja 4.1 (intuicyjna)**.** *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona wokół punktu a (ale niekoniecznie w punkcie a). Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeśli wartości $f(x)$ leżą coraz bliżej liczby g dla argumentów x leżących coraz bliżej liczby a, ale $x \neq a$. Piszemy wtedy $\lim_{x \to a} f(x) = g$.*

Powyższa definicja wystarcza do obliczenia większości granic. Uściślenia tej definicji można wykonać na dwa sposoby.

Definicja 4.2 (Heine)**.** *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona wokół punktu a (ale niekoniecznie w punkcie a). Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeśli dla każdego ciągu x_n zbieżnego do a, ale $x_n \neq a$, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g.*

Uwaga 4.3. Wartość granicy w punkcie a (i fakt jej istnienia) nie zależy od wartości $f(a)$. Co więcej funkcja f może nie być określona w punkcie a. Granica zależy tylko od wartości funkcji w pobliżu punktu a, z wyłączeniem tego punktu.

Przykłady.

(a) $E = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Wtedy $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Rzeczywiście, niech $x_n \xrightarrow[n]{} 0$, $x_n \neq 0$. Wtedy $x_n^2 \xrightarrow[n]{} 0$.

(b) $E = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 5 & x = 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

(c) $E = (-1,0)\cup(0,1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$. Ile wynosi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x+1}} &= \frac{\sqrt{x+1}-1}{x\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}. \end{aligned}$$

Gdy $x_n \xrightarrow[n]{} 0$, to $f(x_n) \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2}$. Zatem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

(d) $E = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 2, \\ 3x^2 & x > 2. \end{cases}$$

Niech $x_{2n} = 2 - \dfrac{1}{n}$ oraz $x_{2n-1} = 2 + \dfrac{1}{n}$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x_{2n}) &= \left(2-\frac{1}{n}\right)^2 + 2 \xrightarrow[n]{} 6, \\ f(x_{2n-1}) &= 3\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n]{} 12. \end{aligned}$$

Zatem ciąg $f(x_n)$ nie jest zbieżny.

Definicja 4.4 (Cauchy)**.** *Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x-a| < \delta$, to $|f(x)-g| < \varepsilon$.*

Uwaga 4.5. Definicja Cauchy'ego odpowiada definicji intuicyjnej. Osoba wątpiąca, że $f(x)$ może znaleźć się blisko g, wyraża żądanie, aby odległość $f(x)$ i g była mniejsza niż ε, np. $\varepsilon = 0,0001$. Naszym zadaniem jest wskazanie liczby $\delta > 0$, która zagwarantuje, że jeśli odległość argumentu $x \neq a$ od a

jest mniejsza niż δ, to faktycznie odległość $f(x)$ od g będzie mniejsza niż ε. Po wykonaniu zadania osoba wątpiąca może zmniejszyć wartość ε np. do 0,00001. Wtedy my musimy znaleźć nową (zwykle znacznie mniejszą) wartość dla liczby δ, aby zaspokoić żądanie. Jeśli potrafimy to zrobić dla dowolnej wartości ε, to faktycznie granica funkcji w punkcie a jest równa liczbie g.

Przykład. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Chcemy obliczyć granicę w punkcie 1 z definicji Cauchy'ego. Mamy $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. Z definicji intuicyjnej widać, że granica w 1 wynosi $\frac{1}{2}$. Mamy

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|1-\sqrt{x}|}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{|x-1|}{2(\sqrt{x}+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}|x-1|.$$

Jeśli chcemy, aby

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < 0,01$$

wystarczy, aby $0 < |x-1| < 0,02$, tzn. możemy przyjąć $\delta = 0,02$ lub za δ przyjąć dowolną liczbę dodatnią mniejszą niż $0,02$, np. $\delta = 0,01$. Ogólnie dla liczby $\varepsilon > 0$ niech $\delta = 2\varepsilon$. Wtedy dla $0 < |x-1| < 2\varepsilon$ mamy

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x-1| < \varepsilon.$$

Można też przyjąć $\delta = \varepsilon$.

Uwaga 4.6. Zapis kwantyfikatorowy definicji Cauchy'ego ma postać

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ \{\, 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon \,\}.$$

Twierdzenie 4.7. *Definicje granicy według Cauchy'ego i Heinego są równoważne.*

Dowód. (C) $\implies$ (H).
Zakładamy, że $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ w sensie Cauchy'go. Niech $x_n \neq a$ oraz $x_n \underset{n}{\to} a$. Trzeba udowodnić, że $f(x_n) \underset{n}{\to} g$. W tym celu ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba $\delta > 0$, dla której

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Ponieważ $x_n \underset{n}{\to} a$, to istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $0 < |x_n - a| < \delta$. Wtedy z (4.1) otrzymujemy

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > N.$$

To oznacza, że $\lim\limits_n f(x_n) = g$.

(H) $\Longrightarrow$ (C). Załóżmy nie wprost, że liczba g nie jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a w sensie Cauchy'ego. To oznacza, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ można znaleźć argument x spełniający $0 < |x - a| < \delta$, ale $|f(x) - g| \geqslant \varepsilon$. Przyjmijmy $\delta_n = \frac{1}{n}$ i niech x_n oznacza argument odpowiadający liczbie δ_n. Otrzymujemy $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ oraz $|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon$. Wtedy $x_n \underset{n}{\to} a$, ale $f(x_n) \underset{n}{\not\to} g$. □

Uwaga 4.8. W zależności od sytuacji możemy używać definicji Heinego lub Cauchy'ego.

Co zrobić, gdy nie widać kandydata na wartość granicy funkcji ? Do tego służy warunek Cauchy'ego. Intuicyjnie oznacza on, że jeśli dwa argumenty x i x' leżą blisko liczby a, ale $x, x' \neq a$, to wartości $f(x)$ i $f(x')$ leżą blisko siebie. Ścisłe określenie znajduje się w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 4.9 (warunek Cauchy'ego)**.** *Funkcja $f(x)$ posiada granicę w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że*

$$0 < |x - a|, |x' - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Dowód. ($\Rightarrow$). Dowód tej implikacji jest jasny na podstawie intuicyjnych definicji granicy i warunku Cauchy'ego. Rzeczywiście jeśli dwa argumenty x, $x' \neq a$ leżą blisko a, to wartości $f(x)$ i $f(x')$ leżą blisko liczby g. Zatem te wartości leżą blisko siebie.

Ściśle, z założenia dla $\varepsilon > 0$ można znaleźć liczbę $\delta > 0$, dla której spełniona jest implikacja

$$0 < |t - a| < \delta \implies |f(t) - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $0 < |x - a| < \delta$ oraz $0 < |x' - a| < \delta$ mamy

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - g| + |f(x') - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$). Niech $x_n \underset{n}{\to} a$, ale $x_n \neq a$. Wtedy ciąg $f(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego dla ciągów. Rzeczywiście, dla liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ spełniająca (4.2). Ponieważ $x_n \underset{n}{\to} a$, to $0 < |x_n - a| < \delta$ dla dużych wartości n, np. dla $n > N$. Wtedy dla $n, m > N$ na podstawie (4.2) otrzymamy $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Zatem ciag $f(x_n)$ jest zbieżny. Oznaczmy $g = \lim_n f(x_n)$. Wtedy $\lim_{x \to a} f(x) = g$ w sensie Heinego. Rzeczywiście, niech $x_n' \underset{n}{\longrightarrow} a$ i $x_n' \neq a$. Z poprzedniego rozumowania wiemy, że ciąg $f(x_n')$ jest zbieżny, np. do liczby g'. Rozważmy nowy ciąg postaci

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$$

Ten ciąg dąży do a. Zatem odpowiadający ciąg wartości funkcji

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$$

jest zbieżny. To jest możliwe tylko dla $g = g'$. $\square$

Uwaga 4.10. Z dowodu wynika, że granica $\lim_{x \to a} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $x_n \neq a$, $x_n \underset{n}{\to} a$ ciąg $f(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego dla ciągów.

4.1 Ważna granica

Twierdzenie 4.11.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dowód. Dla kąta $0 < x < \frac{\pi}{2}$ rozważmy trójkąt prostokątny o kącie x i przyprostokątnej długości 1 przy tym kącie. Trójkąt ten zawiera w sobie wycinek koła o kącie x i promieniu 1, który z kolei zawiera trójkąt równoramienny o kącie wierzchołkowym x i ramionach długości 1. Porównując pola figur otrzymamy nierówność

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Zatem

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Z drugiej nierówności otrzymujemy

$$\sin x > x \cos x = x\left[1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right] > x\left[1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = x - \frac{x^3}{2}.$$

Uzyskujemy więc

$$x - \frac{x^3}{2} < \sin x < x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{4.3}$$

Zatem

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Z parzystości funkcji $\dfrac{\sin x}{x}$ otrzymujemy

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Z nierówności wynika, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

4.2 Granice jednostronne

Przykład. Z wysokości 20 m upuszczamy kamień. Chcemy znaleźć prędkość kamienia w chwili uderzenia w ziemię. Przed uderzeniem wysokość wynosi $h(t) = 20 - \frac{1}{2}gt^2$. Przyjmijmy $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Wtedy $h(t) = 20 - 5t^2$. Kamień spadnie po 2 sekundach. Średnia prędkość kamienia od momentu $t < 2$ do momentu uderzenia w ziemię wynosi

$$\frac{h(t) - h(2)}{t - 2} = \frac{20 - 5t^2}{t - 2} = -5\frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = -5(t+2).$$

Prędkość chwilowa w momencie uderzenia wynosi zatem

$$\lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \frac{h(t) - h(2)}{t - 2} = -20\,\mathrm{m/s}.$$

Definicja 4.12. *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym przedziale $a < x < a + \eta$ (na prawo od punktu a). Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma granicę prawostronną w punkcie a równą liczbie g, jeśli dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow[n]{} a$, $x_n > a$, mamy $f(x_n) \xrightarrow[n]{} g$. Równoważnie*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x\ \{\,a < x < a + \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon\,\}.$$

Stosujemy zapis $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = g$.

Podobnie określa się granicę lewostronną $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Twierdzenie 4.13. *Granica* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *i są sobie równe.*

Dowód. $(\Rightarrow)$

Niech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$. Przypuśćmy, że $x_n \underset{n}{\to} a$ oraz $x_n > a$. Wtedy $f(x_n) \underset{n}{\to} g$. Zatem $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = g$. Podobnie pokazujemy, że $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = g$.

$(\Leftarrow)$

Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = g$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ istnieją liczby $\delta_1, \delta_2 > 0$ spełniające warunek:

$$\begin{aligned} a - \delta_1 < x < a \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon, \\ a < x < a + \delta_2 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Przyjmijmy $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Wtedy jeśli $0 < |x - a| < \delta$ to albo

$$a - \delta_1 \leqslant a - \delta < x < a$$

albo

$$a < x < a + \delta \leqslant a + \delta_2.$$

W obu przypadkach uzyskujemy $|f(x) - g| < \varepsilon$. □

Przykład.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 & x < 1, \\ x - x^3 & x > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = 0, \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x - x^3) = 0. \end{aligned}$$

4.3 Granice niewłaściwe i granice w punktach niewłaściwych

Definicja 4.14. *Funkcja* $f(x)$ *ma granicę* ∞ *w punkcie* a *jeśli dla każdego ciągu* $x_n \xrightarrow[n]{} a$, $x_n \neq a$, *mamy* $f(x_n) \xrightarrow[n]{} \infty$. *Równoważnie, dla dowolnej liczby* M *istnieje liczba* $\delta > 0$, *dla której warunek* $0 < |x - a| < \delta$ *pociąga* $f(x) > M$.

Definicja 4.15. *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale (a,∞). Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w ∞ jeśli dla dowolnego ciągu $x_n \xrightarrow[n]{} \infty$ mamy $f(x_n) \xrightarrow[n]{} g$. Równoważnie*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \; \forall x \; \{ x > M \implies |f(x) - g| < \varepsilon \}.$$

Podobnie określa się granicę $-\infty$ i granicę w $-\infty$.

Twierdzenie 4.16.

(i) Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, to $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(ii) Jeśli $f(x) > 0$ w pewnym przedziale $(a-\eta, a+\eta)\setminus\{a\}$, oraz o $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, to $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Dowód. (i) Niech $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Rozważmy ciąg x_n zbieżny do a oraz $x_n \neq a$. Z założenia mamy $f(x_n) \xrightarrow[n]{} \infty$. Wtedy $\dfrac{1}{f(x_n)} \xrightarrow[n]{} 0$.

(ii) Niech $x_n \xrightarrow[n]{} a$ oraz $x_n \neq a$. Wtedy $f(x_n) \xrightarrow[n]{} 0$. Dla odpowiednio dużych wskaźników n, np. dla $n > N$, mamy $x_n \in (a - \eta, a + \eta)$. Wtedy $f(x_n) > 0$. Zatem z Twierdzenia 2.19 otrzymujemy $\dfrac{1}{f(x_n)} \xrightarrow[n]{} \infty$. □

Uwaga 4.17. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w punktach niewłaściwych.

4.4 Działania na granicach

Twierdzenie 4.18. *Załóżmy, że $\lim_{x\to a} f(x) = A$ oraz $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Wtedy*

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

(iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, o ile $B \neq 0$.

Dowód. Teza wynika z odpowiedniego twierdzenia o ciągach. Rzeczywiście Niech $x_n \underset{n}{\to} a$ i $x_n \neq a$. Wtedy ciągi $f(x_n) \pm g(x_n)$, $f(x_n)g(x_n)$ oraz $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ dążą odpowiednio do $A \pm B$, AB i $\dfrac{A}{B}$. □

Uwaga 4.19. Twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w punktach niewłaściwych.

Twierdzenie 4.20 (reguła podstawienia)**.** *Jeśli*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{i} \quad \lim_{y\to b} g(y) = c,$$

oraz funkcja $f(x)$ nie przyjmuje wartości b w pobliżu punktu a, to

$$\lim_{x\to a}\; g(f(x)) \;=\; c.$$

Dowód. Niech $x_n \underset{n}{\to} a$, $x_n \neq a$. Wiemy, że $f(x) \neq b$ w pewnym przedziale $(a-\eta, a+\eta) \setminus \{a\}$. Wtedy x_n leży w tym przedziale dla dużych wartości n, np. dla $n > N$. Zatem $y_n := f(x_n) \neq b$ dla $n > N$ oraz $y_n = f(x_n) \underset{n}{\to} b$. Otrzymujemy więc $g(f(x_n)) = g(y_n) \underset{n}{\to} c$. □

Uwaga 4.21. Przy zastosowaniu reguły podstawienia posługujemy sie zapisem

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) \underset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Przykład.

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x + \frac{1}{x}}.$$

Przyjmujemy $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(y) = \sqrt{y}$. Wtedy $b = \frac{5}{2}$ oraz $c = \sqrt{\frac{5}{2}}$. W innym zapisie mamy

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x + \frac{1}{x}} \underset{y=x+\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to \frac{5}{2}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Trzeba się upewnić, że $x + \dfrac{1}{x} \neq \frac{5}{2}$, gdy $x \neq 2$ i x leży blisko 2. Równanie

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

ma dwa rozwiązania $x = 2$ i $x = \frac{1}{2}$. Dla $0 < |x-2| < 1$ mamy więc $x + \dfrac{1}{x} \neq \frac{5}{2}$.

4.5 Funkcje ciągłe

Definicja 4.22. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie a, jeśli $f(x)$ jest określona w pewnym przedziale wokół punktu a, włącznie z punktem a, oraz*

(1) istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Przy zastosowaniu definicji Cauchy'ego granicy funkcji, ciągłość w zapisie kwantyfikatorowym ma postać

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x\ \{\,|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,\}.$$

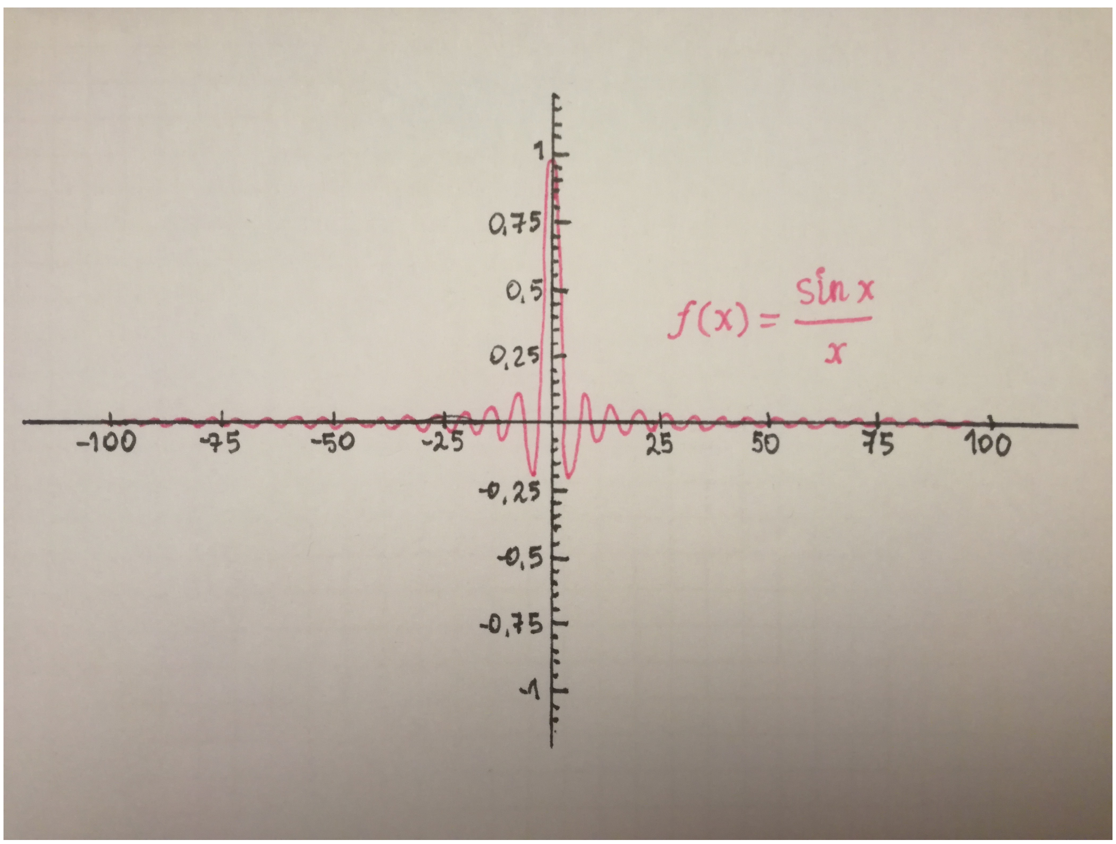
Można pominąć warunek $0 < |x-a|$, bo dla $x = a$ mamy $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Przykłady.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$



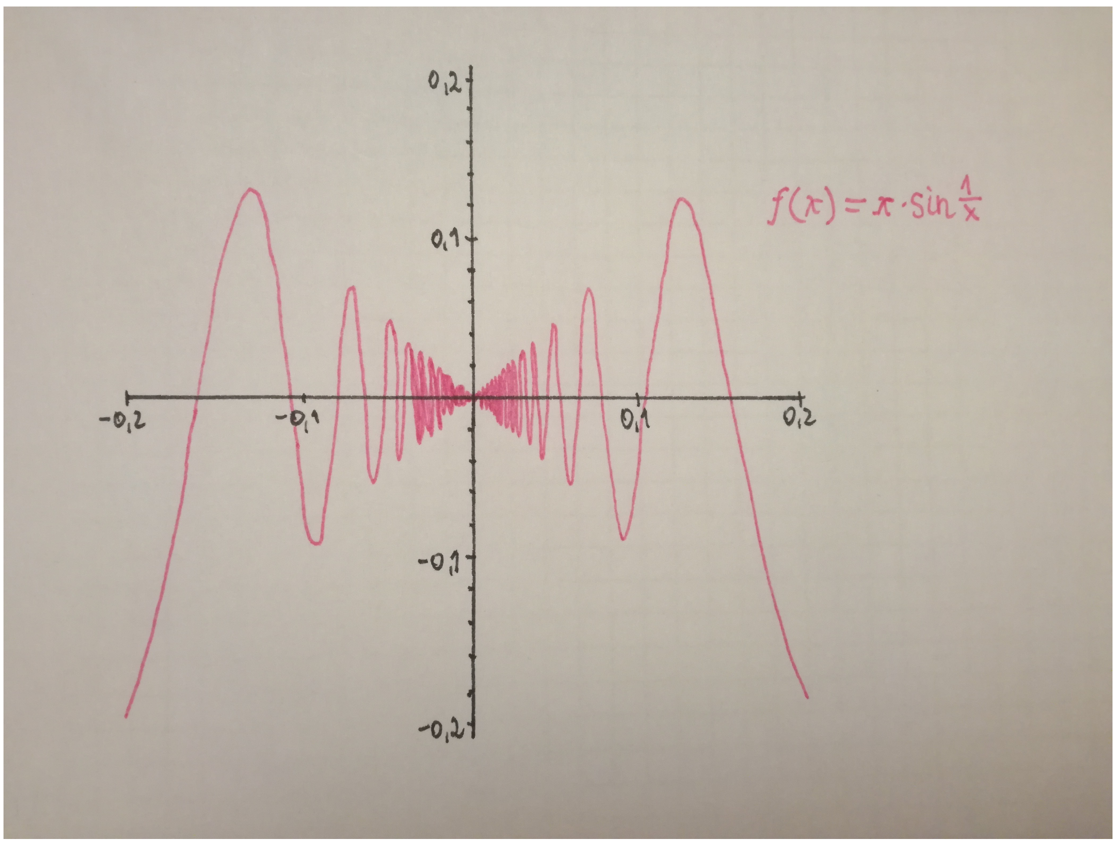
*

*rysunek wykonany przez Natalię Majewską z kursu Analizy I (2020)

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0), \quad \text{bo} \quad |x \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x|.$$



†

---

†rysunek wykonany przez Natalię Majewską z kursu Analizy I (2020)

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Granica w punkcie 0 nie istnieje (wykres dla $0 \leqslant x \leqslant 1/\pi$). Niech $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ oraz $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Wtedy $f(x_n) = 0$ oraz $f(x_n') = 1$.

Twierdzenie 4.23. *Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w punkcie a, to funkcje $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ i $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sa również ciągłe w a, przy czym w ostatnim przypadku zakładamy, że $g(a) \neq 0$.*

Dowód. Teza wynika z Twierdzenia 4.18. □

Uwaga 4.24. Jeśli $g(a) \neq 0$, to z ciągłości wynika, że $g(x) \neq 0$ dla x w pobliżu punktu a. Rzeczywiście, przyjmijmy $\varepsilon = \dfrac{|g(a)|}{2}$. Wtedy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $|x-a| < \delta$ mamy $|g(x) - g(a)| < \dfrac{|g(a)|}{2}$. Dalej

$$|g(a)| - |g(x)| \leqslant |g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|}{2}.$$

Zatem $|g(x)| > \dfrac{|g(a)|}{2}$.

Przykłady.

(a) Każdy wielomian jest funkcją ciągłą w każdym punkcie.

(b) Iloraz dwu wielomianów jest funkcją ciągłą poza miejscami zerowymi mianownika.

Twierdzenie 4.25. *Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie a, a funkcja $g(y)$ jest ciągła w punkcie $b = f(a)$, to funkcja złożona $g(f(x))$ jest ciągła w punkcie a.*

Dowód. Niech $x_n \xrightarrow[n]{} a$. Wtedy $y_n := f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a) = b$. Zatem $g(y_n) \xrightarrow[n]{} g(b)$. To oznacza, że $g(f(x_n)) \xrightarrow[n]{} g(f(a))$. □

Przykład.

$$h(x) = |x^3 - 3x - 10|.$$

Sprawdzamy ciągłość w punkcie 5. Niech

$$f(x) = x^3 - 3x - 10, \qquad g(y) = |y|.$$

Funkcja $g(y)$ jest ciągła w każdym punkcie, bo

$$\Big||y| - |b|\Big| \leqslant |y - b|.$$

Zatem funkcje $h(x) = g(f(x))$ jest ciągła w punkcie 5 (oraz w każdym innym punkcie).

Zadanie. Załóżmy, że $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ oraz $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ istnieje dla wszystkich punktów $0 < a < 1$. Określmy $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Czy funkcja $\widetilde{f}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(0, 1)$?

Definicja 4.26. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b), jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciagła w przedziale $[a, b]$, jeśli dodatkowo*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Przykłady.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x(1 - x)}$, $0 < x < 1$.

(b) $h(y) = \sqrt{y}$, $y \geqslant 0$.
Sprawdzenie: dla $y_0 > 0$ mamy

$$|\sqrt{y} - \sqrt{y_0}| = \frac{|y - y_0|}{\sqrt{y} + \sqrt{y_0}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{y_0}}|y - y_0|.$$

Dla $y_0 = 0$ i $\varepsilon > 0$ niech $0 \leqslant y < \varepsilon^2$. Wtedy $\sqrt{y} < \varepsilon$.

(c) $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Z twierdzenia o składaniu funkcja jest ciągła w przedziale $(0, 1)$, bo funkcje $x(1 - x)$ jest ciągła wszędzie a funkcja $g(y) = \sqrt{y}$ jest ciągła w punktach dodatnich. Sprawdzimy ciągłość w 0 i 1. Niech $x_n \underset{n}{\to} 0$, $x_n \geqslant 0$. Wtedy $x_n(1 - x_n) \underset{n}{\to} 0$ oraz $y_n = x_n(1 - x_n) \geqslant 0$. Zatem $\sqrt{x_n(1 - x_n)} = \sqrt{y_n} \underset{n}{\to} 0 = f(0)$.

Twierdzenie 4.27 (jednostajna ciągłość funkcji)**.** *Funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale* ***domkniętym*** *$[a,b]$ jest jednostajnie ciągła, tzn. dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla x, x' z $[a,b]$, jeśli $|x - x'| < \delta$, to $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Uwaga 4.28. Zapis kwantyfikatorowy ciągłości jednostajnej ma postać

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,x \in [a,b]\;\forall\,x' \in [a,b]\;\{\,|x-x'| < \delta \implies |f(x)-f(x')| < \varepsilon\,\}.$$

Dla porównania zapis kwantyfikatorowy ciągłości w każdym punkcie x przedziału $[a,b]$ ma postać

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\forall\,x \in [a,b]\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,x' \in [a,b]\;\{\,|x-x'| < \delta \implies |f(x)-f(x')| < \varepsilon\,\}.$$

Przy jednostajnej ciągłości liczba $\delta > 0$ jest uniwersalna dla wszystkich punktów $a \leqslant x \leqslant b$, gdy przy ciągłości punktowej ta liczba jest dobierana indywidualnie dla każdego punktu z $a \leqslant x \leqslant b$.

Intuicyjnie jednostajna ciągłość oznacza, że jeśli dwa argumenty funkcji leżą blisko siebie, to odpowiadające im wartości funkcji są również położone blisko siebie, niezależnie od położenia tych argumentów.

Dowód. (nie wprost). Załóżmy, że warunek jednostajnej ciągłości nie jest spełniony. Tzn., że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla dowolnego wyboru liczby $\delta > 0$ znajdą się punkty x, x' w przedziale $[a,b]$ takie, że $|x - x'| < \delta$ oraz $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$. W szczególności dla $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ istnieją punkty x_n, x_n' w przedziale $[a,b]$ spełniające

$$|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon. \tag{4.4}$$

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu x_n można wybrać zbieżny podciąg x_{n_k}. Oznaczmy $x = \lim_k x_{n_k}$. Z pierwszego warunku w (4.4) mamy

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x_{n_k}' < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $x = \lim_k x_{n_k}'$. Z ciągłości w punkcie x otrzymujemy $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k]{} f(x)$ i $f(x_{n_k}') \xrightarrow[k]{} f(x)$. To oznacza, że $f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}') \xrightarrow[k]{} 0$, co stoi w sprzeczności z drugim warunkiem w (4.4). $\square$

Przykłady.

(a) Domkniętość przedziału jest istotna. Rozważmy $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $(0,1]$. Dla $x_n = \frac{1}{2n}$ i $x'_n = \frac{1}{n}$ mamy $f(x_n) = 2n,\ f(x'_n) = n$. Zatem

$$x'_n - x_n \xrightarrow[n]{} 0, \quad f(x_n) - f(x'_n) \xrightarrow[n]{} \infty.$$

(b) Funkcja w poprzednim przykładzie była nieograniczona. Rozważmy $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ na przedziale $(0,1]$. Dla $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $x'_n = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}$ mamy

$$x'_n - x_n \xrightarrow[n]{} 0, \quad f(x'_n) - f(x_n) = 1.$$

(c) Jeśli nachylenie wykresu funkcji jest ograniczone, tzn.

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leqslant L, \qquad x_1 \neq x_2,$$

to funkcja jest jednostajnie ciągła. Istotnie mamy wtedy

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Np. $f(x) = x$ jest jednostajnie ciągła na całej prostej. Z kolei $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na całej prostej, bo dla $x_n = n + \frac{1}{n}, x'_n = n$ mamy $x_n - x'_n \xrightarrow[n]{} 0$ oraz $f(x_n) - f(x'_n) \geqslant 2$.

(d) Ograniczone nachylenie wykresu nie jest warunkiem koniecznym dla jednostajnej ciągłości. Np. funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}$ jest jednostajnie ciągła na całej prostej mimo, że nachylenie wykresu w pobliżu punktu 0 jest nieograniczone.

Twierdzenie 4.29 (Weierstrass)**.** *Funkcja ciągła $f(x)$ na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest ograniczona oraz osiąga swoje kresy górny M i dolny m. Tzn. istnieją punkty c i d w przedziale $[a,b]$ takie, że $f(c) = m$ i $f(d) = M$.*

Uwaga 4.30.

$$m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Dowód. Dla liczby $\varepsilon = 1$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - x'| < \delta$, to $|f(x) - f(x')| < 1$. Wybierzmy liczbę naturalną n tak, aby $\frac{b-a}{n} < \delta$. Np. niech $n = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części punktami $a_k = a + \frac{b-a}{n} k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Oznaczmy

$$C = \max\{|f(a_1)| + 1,\ |f(a_2)| + 1,\ \ldots,\ |f(a_n)| + 1\}.$$

Niech $a \leqslant x \leqslant b$. Wtedy $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$ dla pewnej liczby $k = 1, 2, \ldots, n$. Zatem

$$|x - a_k| \leqslant a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Wtedy

$$|f(x)| - |f(a_k)| \leqslant |f(x) - f(a_k)| < 1.$$

Otrzymujemy więc

$$|f(x)| < |f(a_k)| + 1 \leqslant C,$$

czyli funkcja f jest ograniczona.

Załóżmy, nie wprost, że $f(x) < M$ dla wszystkich $a \leqslant x \leqslant b$. Rozważmy funkcję $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Funkcja $g(x)$ jest dodatnia i ciągła na przedziale $[a, b]$. Z pierwszej części dowodu wynika, że g jest ograniczona z góry, tzn.

$$\frac{1}{M - f(x)} = g(x) \leqslant N,$$

dla pewnej stałej N. Po przekształceniu otrzymamy

$$M - f(x) \geqslant \frac{1}{N}, \quad \text{czyli } f(x) \leqslant M - \frac{1}{N}.$$

Dalej

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant M - \frac{1}{N},$$

co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 4.31 (własność Darboux)**.** *Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ przechodzi od wartości $f(a)$ do wartości $f(b)$ przez wszystkie wartości pośrednie, tzn.dla dowolnej liczby l leżącej pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ (pod warunkiem $f(a) \neq f(b)$) istnieje punkt c, $a < c < b$, dla którego $f(c) = l$.*

Dowód. Rozważymy przypadek $f(a) < f(b)$. Niech $f(a) < l < f(b)$. Chcemy udowodnić, że $f(x_0) = l$ dla pewnego punktu x_0 w $[a, b]$. Załóżmy, nie wprost, że $f(x) \neq l$ dla wszystkich x. Rozważymy funkcję

$$g(x) = \frac{1}{|f(x) - l|}.$$

Z twierdzenia Weierstrassa mamy

$$\frac{1}{|f(x) - l|} = g(x) \leqslant N,$$

dla pewnej stałej N. Zatem

$$|f(x) - l| \geqslant \frac{1}{N}, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{4.5}$$

Z jednostajnej ciągłości dla $\varepsilon = \frac{1}{N}$ można znaleźć liczbę δ, dla której

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{1}{N}.$$

Dzielimy przedział na n równych części punktami $a_k = a + \dfrac{b-a}{n}k$ tak, aby $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. Zatem $|f(a_k) - f(a_{k-1}| < \dfrac{1}{N}$. Mamy $f(a_0) < l < f(a_n)$. Niech k będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $l < f(a_k)$. Wtedy $f(a_{k-1}) < l < f(a_k)$. Ponieważ $|f(a_k) - f(a_{k-1}| < \dfrac{1}{N}$ to $|f(a_k) - l| < \dfrac{1}{N}$. Otrzymujemy sprzeczność z (4.5).

Intuicyjnie: w chwili a_k znajdujemy się w punkcie $f(a_k)$ osi y. Kolejne kroki (czyli przejścia między momentami czasu $x = a_{k-1}$ i $x = a_k$) są krótsze niż $\dfrac{1}{N}$. Przypuśćmy, że obszar pomiędzy $\left(l - \dfrac{1}{N}, l + \dfrac{1}{N}\right)$ oznacza rzekę. Przechodząc od $f(a_0) < l$ do $f(a_n) > l$ krokami krótszymi od $\dfrac{1}{N}$ musimy wejść do rzeki, co przeczy (4.5). □

Wniosek 4.32. *Funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy swoimi kresami dolnym i górnym.*

Dowód. Z twierdzenia Weierstrassa istnieją punkty c i d takie, że $f(c) = m$ i $f(d) = M$. Z własności Darboux zastosowanej do przedziału pomiędzy c i d funkcja przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy m i M. $\square$

Przykłady.

(a) Chcemy rozwiązać równanie

$$w(x) := x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0.$$

Mamy $w(0) = -3$ i $w(1) = 1$. Z własności Darboux $w(x_0) = 0$ dla pewnego punktu x_0 pomiędzy 0 i 1. Ponieważ $w\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, to można znaleźć rozwiązanie pomiędzy $\frac{1}{2}$ i 1.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcja ma własność Darboux na dowolnym przedziale $[-a, a]$ mimo, że nie jest ciągła w punkcie 0 (*wykres* dla $0 \leqslant x \leqslant 1/\pi$).

Twierdzenie 4.33. *Funkcja monotoniczna w przedziale* $[a, b]$ *jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność Darboux.*

Lemat 4.34. *Funkcja monotoniczna posiada granice jednostronne w każdym punkcie.*

Dowód. Pokażemy, że

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf_{x > c} f(x)$$

dla dowolnej funkcji rosnącej. Dla $x > c$ mamy $f(x) \geqslant f(c)$, zatem

$$\alpha := \inf_{x > c} f(x) \geqslant f(c).$$

Dla $\varepsilon > 0$ liczba $\alpha + \varepsilon$ nie ogranicza z dołu wartości funkcji $f(x)$ dla $x > c$. Zatem istnieje argument $x_0 > c$ spełniający $f(x_0) < \alpha + \varepsilon$. Wtedy dla $c < x < x_0$ mamy $\alpha \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) < \alpha + \varepsilon$. Zatem $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Czyli $\lim_{x \to c^+} f(x) = \alpha$. $\square$

Dowód twierdzenia. Rozważmy funkcję rosnącą $f(x)$ i punkt c wewnątrz $[a,b]$. Nieciągłość oznacza, że przynajmniej jedna z nierówności

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$$

jest ostra. W każdym przypadku funkcja nie miałaby wtedy własności Darboux.

Załóżmy, że $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie c, który jest końcem przedziału. Gdy c jest prawym końcem, to nieciągłość oznacza, że

$$\lim_{x\to c^-} f(x) < f(c).$$

Podobnie jak poprzednio funkcja nie ma własności Darboux. □

Definicja 4.35. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest różnowartościowa na podzbiorze $E \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla dwu argumentów $x_1 \neq x_2$ z E mamy $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Niech $F = \{f(x) : x \in E\}$ dla funkcji różnowartościowej. Wtedy dla wartości $y \in F$ istnieje jedyny element $x \in E$ taki, że $f(x) = y$. Możemy określić $g(y) = x$. Wtedy $g(f(x)) = x$ oraz $f(g(y)) = y$.

Twierdzenie 4.36. *Funkcja ciągła i różnowartościowa na przedziale*‡ *jest monotoniczna.*

Dowód. Załóżmy, że f nie jest monotoniczna. To oznacza, że można znaleźć trzy argumenty $x_1 < x_2 < x_3$ spełniające $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ albo $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Tzn. $f(x_2)$ nie leży pomiędzy $f(x_1)$ i $f(x_3)$. Rozważmy przypadek $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Oznaczmy $\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Z własności Darboux wartości z przedziału $[\alpha, f(x_2)]$ są przyjęte dwukrotnie przez funkcję f, raz w przedziale (x_1, x_2) i drugi raz w przedziale (x_2, x_3). □

Twierdzenie 4.37 (o funkcji odwrotnej)**.** *Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła i różnowartościowa na przedziale $[a,b]$, to funkcja odwrotna $g(y)$ jest ciągła na przedziale $[m,M]$, gdzie $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ oraz $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.*

Dowód. Wiemy, że $f(x)$ jest ściśle monotoniczna. Przyjmijmy, że $f(x)$ jest rosnąca. Wtedy funkcja odwrotna też jest rosnąca na przedziale $[m,M]$. Dla ciągłości wystarczy zatem pokazać własność Darboux. Niech $y_1 < y_2$ oraz

‡Przedział może mieć postać $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ lub (a,b)

$g(y_1) < c < g(y_2)$. Trzeba znaleźć argument y taki, że $g(y) = c$. Nakładamy na nierówność funkcję f i otrzymujemy

$$y_1 = f(g(y_1)) < \underbrace{f(c)}_{y} < f(g(y_2)) = y_2.$$

Dalej $g(y) = g(f(c)) = c$. $\square$

Przykład. Dla funkcji $f(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant M$, funkcją odwrotną jest $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $0 \leqslant y \leqslant M^n$. Ponieważ M jest dowolną dodatnią liczbą, to $g(y) = \sqrt[n]{y}$ jest ciągła na $[0, \infty)$.

4.6 Ścisłe wprowadzenie funkcji wykładniczej

Ustalmy liczbę $a > 1$. Dla liczb wymiernych $w \in \mathbb{Q}$ określamy

$$a^w = (a^p)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{jeśli } w = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}.$$

Wynik nie zależy od przedstawienia liczby w w tej postaci. Np. $(a^2)^{1/4} = a^{1/2}$. Funkcja $\mathbb{Q} \ni w \mapsto a^w$ ma własności:

(a) $a^{w_1+w_2} = a^{w_1}a^{w_2}$.

(b) $w_1 < w_2 \implies a^{w_1} < a^{w_2}$.

(c) $a^1 = a$.

Definicja 4.38. *Podzbiór $E \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy* ***gęstym****, jeśli dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb $a_n \in E$ zbieżny do x.*

Zbiór liczby wymiernych jest gęsty w $\mathbb{R}$. Rzeczywiście, dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $nx - 1 < [nx] \leqslant nx$. Zatem

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leqslant x.$$

To oznacza, że $\dfrac{[nx]}{n} \xrightarrow[n]{} x$.

Lemat 4.39. *Jeśli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na $\mathbb{R}$ oraz $g(a) = h(a)$ dla punktów a z gęstego podzbioru $E \subseteq \mathbb{R}$, to $g(x) \equiv h(x)$.*

Dowód. Dla $x \in \mathbb{R}$ bierzemy ciąg a_n punktów z E zbieżny do x. Wtedy

$$g(x) = \lim_n g(a_n) = \lim_n h(a_n) = h(x).$$

$\square$

Określamy

$$F(x) = \sup_{\substack{w \in \mathbb{Q} \\ w \leqslant x}} a^w.$$

Zauważmy, że dla $x \in \mathbb{Q}$ mamy $F(x) = a^x$. $F(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą. Istotnie, niech $x_1 < x_2$. Można znaleźć liczby wymierne w_1, w_2 takie, że $x_1 < w_1 < w_2 < x_2$. Wtedy

$$F(x_1) = \sup_{\substack{w \in \mathbb{Q} \\ w \leqslant x_1}} a^w \leqslant \sup_{\substack{w \in \mathbb{Q} \\ w \leqslant w_1}} a^w = a^{w_1} < a^{w_2} \leqslant F(x_2).$$

Zbadamy ciągłość funkcji $F(x)$. Z monotoniczności wiemy, że $F(x)$ posiada granice jednostronne w każdym punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \to x_0^-} F(x) \leqslant F(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} F(x).$$

Dla liczby x_0 istnieje ciąg liczb wymiernych w_n spełniający

$$w_n < x_0 < w_n + \tfrac{2}{n}.$$

Np. $w_n = \dfrac{[nx_0]}{n} - \dfrac{1}{n}$. Obliczamy

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_n F\left(w_n + \frac{2}{n}\right) = \lim_n a^{w_n + \frac{2}{n}} = \lim_n a^{w_n}\, a^{\frac{2}{n}}$$
$$= \lim_n a^{w_n}\, \lim_n (a^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_n a^{w_n} = \lim_{x \to x_0^-} F(x).$$

Lemat 4.40. $F(x + y) = F(x)F(y)$.

Dowód. Niech $w_n \xrightarrow[n]{} x$, $v_n \xrightarrow[n]{} y$, gdzie $w_n, v_n \in \mathbb{Q}$. Wtedy

$$F(x + y) = \lim_n F(w_n + v_n) = \lim_n a^{w_n + v_n} = \lim_n a^{w_n} a^{v_n}$$
$$= \lim_n a^{w_n} \lim_n a^{v_n} = \lim_n F(w_n) \lim_n F(v_n) = F(x)F(y).$$

$\square$

$F(x)$ nazywamy funkcją wykładniczą. Funkcja wykładnicza ma następujące własności (dla $a > 1$).

(1) $F(x + y) = F(x)F(y)$.

(2) $F(x) < F(y)$, dla $x < y$.

(3) $F(1) = a$.

(4) $F(x)$ jest ciągła.

Można udowodnić, że powyższe własności określają funkcję wykładniczą w sposób jednoznaczny. Np. z (1) i (3) wynika, że $F(2) = F(1)^2 = a^2$. Z kolei $F(1) = F(1)F(0)$, zatem $F(0) = 1$. Dalej $1 = F(0) = F(1)F(-1)$, czyli $F(-1) = a^{-1}$.

Przyjmujemy oznaczenie $F(x) = a^x$. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty^{\S}, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = 0.$$

Funkcję odwrotną, określoną na półprostej $(0, \infty)$ nazywamy logarytmem przy podstawie a i oznaczamy symbolem $\log_a x$.

5 Ciągi i szeregi funkcyjne

5.1 Ciągi funkcyjne

Definicja 5.1. *Niech f_n będzie ciągiem funkcji określonych na $A \subseteq \mathbb{R}$, np. $A = [a, b]$, $[a, \infty)$, (a, b). Mówimy, że ciąg f_n jest zbieżny punktowo do funkcji f, jeśli dla każdego punktu x ze zbioru A mamy $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$.*

Przykład.

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_n f_n(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1.$$

Tzn. funkcją graniczną jest $f(x) \equiv 1$.

§ Bo $a^n \xrightarrow[n]{} \infty$

W zapisie kwantyfikatorowym definicja przybiera postać

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\forall\,x \in A\;\exists\,N\;\forall\,n > N\;\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,\}.$$

Próg N zależy od punktu x i od ε.

Definicja 5.2. *Mówimy, że ciąg f_n jest zbieżny* ***jednostajnie*** *do funkcji f na zbiorze A, jeśli*

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,N\;\forall\,x \in A\;\forall\,n > N\;\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,\}.$$

Używamy zapisu $f_n \rightrightarrows f$.

Tym razem próg N nie zależy od x, jest uniwersalny dla wszystkich punktów ze zbioru A.

Co oznacza warunek

$$\forall\,x \in A\;\forall\,n > N\;\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,\}\;?$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$\forall\,x \in A\;\forall\,n > N\;\{f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon\}\,.$$

Tzn. od pewnego miejsca (dla $n > N$) wykresy funkcji $f_n(x)$ leżą w pasie o promieniu ε wokół wykresu funkcji $f(x)$.

Przykład. $f_n(x) = x^n,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$

$$\lim_n x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases} =: f(x).$$

Czy możliwa jest zbieżność jednostajna ? Niech $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$. W pasie o promieniu $\dfrac{1}{3}$ wokół wykresu funkcji f nie ma wykresu żadnej funkcji ciągłej.

Niech $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant a < 1$. Wtedy ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny do 0. Rzeczywiście, dla $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N, dla której $a^N < \varepsilon$. Możemy próg wyznaczyć jawnym wzorem, bo nierówność jest równoważna $N \log a < \log\varepsilon$, czyli $N > \dfrac{\log\varepsilon}{\log a}$. Wtedy dla $n > N$ i $0 \leqslant x \leqslant a$ mamy

$$0 \leqslant f_n(x) = x^n \leqslant a^n < a^N \leqslant \varepsilon.$$

W przykładzie funkcja graniczna nie była ciągła.

Przykład.

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0 & \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} = (1 - |1 - nx|)_+.$$

Mamy $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0 =: f(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Nie ma jednak zbieżności jednostajnej, bo $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. W pasie o promieniu $\dfrac{1}{2}$ wokół zera nie ma wykresu żadnej z funkcji f_n.

Twierdzenie 5.3. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$. Sprawdzamy ciągłość funkcji f w punkcie x_0. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje próg N, taki, że dla $n > N$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. W szczególności

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z ciągłości funkcji f_{N+1} istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatem dla $|x - x_0| < \delta$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &\leqslant |f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|+|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Wniosek 5.4. *Jeśli ciąg funkcji ciągłych f_n jest zbieżny punktowo do funkcji f, ale f nie jest ciągła, to ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie.*

Przykład. $f(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Granica punktowa nie jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 5.5. *Załóżmy, że istnieje ciąg liczb $a_n > 0$ taki, że $a_n \xrightarrow[n]{} 0$ oraz*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n, \quad x \in A.$$

Wtedy ciąg f_n jest zbieżny do funkcji f jednostajnie na zbiorze A.

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $a_n < \varepsilon$. Wtedy dla $n > N$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n < \varepsilon, \quad x \in A.$$

□

Przykłady.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $x \geqslant 0$. Mamy $f_n(0) = 0$. Dla $x > 0$ szacujemy

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}.$$

Stąd $f_n \rightrightarrows 0$.

(b) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Dla $0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ mamy

$$0 \leqslant f_n(x) = x^n(1-x) \leqslant x^n \leqslant (1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}})^n.$$

Z kolei dla $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x \leqslant 1$

$$0 \leqslant f_n(x) = x^n(1-x) \leqslant 1 - x \leqslant \tfrac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zatem dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ uzyskujemy

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant (1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}})^n + \tfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} 0,$$

bo

$$(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}})^{n*} = \left[(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}}.$$

Twierdzenie 5.6 (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej)**.** *Ciąg funkcji $f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, x \in A\ \forall\, n, m > N\ \{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}.$$

---

*Można też skorzystać z nierówności $0 \leqslant x < 1$

$$(1-x)^n = \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + n\frac{x}{1-x}} \leqslant \frac{1-x}{nx}$$

Uwaga 5.7. Intuicyjnie oznacza to, że jeśli n i m są duże, to wykresy funkcji f_n i f_m leżą blisko siebie.

Dowód. ($\Rightarrow$). Niech $f_n \rightrightarrows f$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ istnieje próg N taki, że dla $m, n > N$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich x z A. Wtedy dla $n, m > N$ mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$). Z założenia dla każdego punktu x z A ciąg liczbowy $f_n(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem $f_n(x)$ jest zbieżny. Oznaczmy $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$. Chcemy pokazać, że $f_n \underset{n}{\rightrightarrows} f$. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje próg N taki, że dla $n, m > N$ mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad x \in A.$$

Wtedy dla $n > N$ otrzymujemy

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 5.8 (Dini)**.** *Niech $f_n(x)$ będzie monotonicznym ciągiem funkcji ciagłych określonych na przedziale $[a, b]$, tzn. spełniony jest jeden z dwu warunków:*

(a) $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ *dla* $a \leqslant x \leqslant b$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ *dla* $a \leqslant x \leqslant b$, $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że f_n jest zbieżny punktowo do funkcji f ciągłej na $[a, b]$. Wtedy zbieżność f_n do f jest jednostajna.

Dowód. Załóżmy, że $f_n(x) \underset{n}{\nearrow} f(x)$. Oznaczmy $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Wtedy $g_n(x) \underset{n}{\searrow} 0$. Trzeba pokazać, że $g_n \underset{n}{\rightrightarrows} 0$. Załóżmy nie wprost, że $g_n \underset{n}{\not\rightrightarrows} 0$. To oznacza, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla dowolnego wyboru liczby naturalnej N istnieje liczba naturalna $n_N > N$ oraz punkt x_N w $[a, b]$ takie, że $g_{n_N}(x_N) \geqslant \varepsilon$. Wtedy

$$g_{N+1}(x_N) \geqslant g_{n_N}(x_N) \geqslant \varepsilon.$$

Na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wybrać podciąg zbieżny x_{N_k}. Oznaczmy $x_0 = \lim_k x_{N_k}$. Wtedy dla $m \leqslant N_k$ otrzymujemy

$$g_m(x_{N_k}) \geqslant g_{N_k+1}(x_{N_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Przechodzimy do granicy, gdy $k \to \infty$ aby uzyskać $g_m(x_0) = \lim_k g_m(x_{N_k}) \geqslant \varepsilon$. Ale $g_m(x_0) \xrightarrow[m]{} 0$, co daje sprzeczność. □

Przykład. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Mamy

$$f_n(x) = x^n(1-x) \geqslant x^{n+1}(1-x) = f_{n+1}(x)$$

zatem ciąg $f_n(x)$ jest malejący. Ponadto $f_n(1) = 0$ oraz $f_n(x) = x^n - x^{n+1} \underset{n}{\to} 0$ dla $0 \leqslant x < 1$. Z twierdzenia Dini'ego zbieżność jest jednostajna.

5.2 Szeregi funkcyjne

Definicja 5.9. *Mówimy, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest jednostajnie zbieżny dla* $x \in A$, *jeśli ciąg sum częściowych* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Przykład. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Mamy

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n]{} \frac{x}{1-x}.$$

Sprawdzamy zbieżność jednostajną

$$\left| s_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Zatem

$$s_n(x) \underset{n}{\rightrightarrows} \frac{x}{1-x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Twierdzenie 5.10 (warunek Cauchy'ego)**.** *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, x \in A\ \forall\, n > m > N\ \{|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x)| < \varepsilon\}.$$

Dowód.

$$s_n(x) - s_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x).$$

Zatem warunek sformułowany w twierdzeniu jest identyczny z warunkiem Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu $s_n(x)$. □

Twierdzenie 5.11 (kryterium Weierstrassa o majoryzacji)**.** *Jeśli szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz* $|f_n(x)| \leqslant a_n$ *dla* $x \in A$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie dla* $x \in A$.

Dowód. Sprawdzamy warunek Cauchy'ego. Dla $n > m$ mamy

$$\begin{aligned}|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x)| &\leqslant |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)| \\ &\leqslant a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n.\end{aligned}$$

Tezę uzyskujemy z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Twierdzenie 5.12. *Jeśli funkcje* $f_n(x)$ *są ciągłe na* A[†] *oraz szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest zbieżny jednostajnie na* A, *to suma szeregu* $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest funkcją ciągłą na* A.

Dowód. Funkcja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

jest ciągła jako suma skończonej ilości funkcji ciągłych. Ponadto $s_n(x) \underset{n}{\rightrightarrows} s(x)$. Zatem funkcja $s(x)$ też jest ciągła. □

[†]Zwykle A jest przedziałem

Przykład. Szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
jest zbieżny dla wszystkich wartości x, np. z kryterium d'Alemberta. Rozważmy $|x| \leqslant a$. Rzeczywiście dla $x \neq 0$

$$\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n}{\to} 0.$$

Dalej
$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leqslant \frac{a^n}{n!}.$$
Z kryterium Weierstrassa szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $[-a, a]$. Suma szeregu reprezentuje więc funkcję ciągłą na $\mathbb{R}$, bo a jest dowolną dodatnią liczbą. Oznaczmy

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wtedy $\exp(0) = 1$ oraz

$$\exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e.$$

Korzystając z mnożenia szeregów metodą Cauchy'ego otrzymamy

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $t > 0$ mamy

$$\exp(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} > 1.$$

Stąd
$$\exp(t)\exp(-t) = \exp(0) = 1,$$

czyli $\exp(-t) > 0$. To oznacza, że funkcja $\exp(x)$ jest dodatnia. Ponadto dla $y > x$ przyjmując $t = y - x > 0$ uzyskamy

$$\exp(y) = \exp(t + x) = \exp(t)\exp(x) > \exp(x),$$

co oznacza, że $\exp(x)$ jest funkcją rosnącą.

W oparciu o podrozdział 4.6, z własności funkcji $\exp(x)$ wynika, że $\exp(x) = e^x$. Udowodniliśmy więc, że

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Przykłady.

(a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Zatem $f(x)$ jest funkcją ciągłą o okresie 2π.

(b) $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Szereg jest zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ z kryterium Dirichleta. Można pokazać analizując dowód twierdzenia Dirichleta i pierwszy przykład po tym twierdzeniu, że zbieżność jest jednostajna dla $|x - 2k\pi| \geqslant \varepsilon > 0$[‡].

5.2.1 Szeregi potęgowe

Definicja 5.13. *Szeregi postaci* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *nazywamy potęgowymi*[§].

Przykład. Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest zbieżny tylko dla $|x| < 1$. Mówimy wtedy, że liczba 1 jest promieniem zbieżności tego szeregu.

Definicja 5.14. *Promieniem zbieżności szeregu* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *nazywamy kres górny wartości bezwględnych liczb* x, *dla których szereg jest zbieżny.*

[‡]Szereg nie jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[-\pi, \pi]$

[§]Przyjmujemy $x^0 = 1$

Przykłady.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Znajdziemy promień zbieżności z kryterium d'Alemberta.

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{(-1)^{n+1}x^n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} |x| \xrightarrow[n]{} |x|.$$

Dla $|x| < 1$ szereg jest bezwzględnie zbieżny, a dla $|x| > 1$ jest rozbieżny. Promień zbieżności wynosi zatem 1.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Promień zbieżności wynosi ∞.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Promień zbieżności wynosi 0. Rzeczywiście dla $x \neq 0$ mamy

$$\frac{(n+1)!\,|x^{n+1}|}{n!\,|x^n|} = (n+1)|x| \underset{n}{\to} \infty.$$

Twierdzenie 5.15. *Jeśli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to szereg jest zbieżny dla $|x| < R$ i rozbieżny dla $|x| > R$. Ponadto zbieżność jest jednostajna w każdym przedziale $[-r, r]$ dla $0 < r < R$.*

Dowód. Z określenia liczby R szereg jest rozbieżny dla $|x| > R$. Każda liczba $|x| < R$ leży w pewnym przedziale $[-r, r]$ dla $r < R$, (np. $r = |x|$). Z określenia promienia zbieżności istnieje liczba x_0 spełniająca $r < |x_0| < R$ oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ jest zbieżny. Wtedy $|a_n x_0^n| \xrightarrow[n]{} 0$. Zatem $|a_n x_0^n| \leqslant M$ dla pewnej dodatniej liczby M. Niech Niech $|x| \leqslant r$. Wtedy

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n.$$

Ale $\frac{r}{|x_0|} < 1$. Zatem z kryterium Weierstrassa uzyskujemy jednostajną i bezwzględną zbieżność w przedziale $[-r, r]$. $\square$

Uwaga 5.16. Z dowodu wynika, że

$$R = \sup\left\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny}\right\}$$
$$= \sup\{|x| : a_n x^n \text{ jest ograniczony}\} \quad (5.1)$$

Twierdzenie 5.17.

(i) $R = \dfrac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$, *o ile granica wyrażenia w mianowniku istnieje.*

(ii) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_n \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$, *o ile granica wyrażenia w mianowniku istnieje.*

W obu przypadkach dopuszczamy granicę równą 0 *lub* ∞. *Wtedy* $R = \infty$ *lub* $R = 0$, *odpowiednio.*

Przykłady.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^{10}}$. Mamy

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^{10}}} = 1.$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} x^{n^2}$. Wtedy $a_{2020} = 0$. Nie możemy zastosować poprzedniego twierdzenia, bo ciąg $\sqrt[n]{|a_n|}$ nie jest zbieżny. Stosujemy kryterium Cauchy'ego dla szeregów liczbowych

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}|x|^{n^2}} = \frac{1}{2}|x|^n \xrightarrow[n]{} \begin{cases} 0 & |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & |x| = 1, \\ \infty & |x| > 1. \end{cases}$$

Zatem $R = 1$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n!}}{n!}$. Z kryterium d'Alemberta

$$\left|\frac{x^{(n+1)!}}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{x^{n!}}\right| = \frac{1}{n+1}|x|^{n \cdot n!} \xrightarrow[n]{} \begin{cases} 0 & |x| \leqslant 1, \\ \infty & |x| > 1. \end{cases}$$

Otrzymujemy $R = 1$.

Uwaga 5.18. Można udowodnić, że

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Rzeczywiście, niech $A = \{|x| : \text{ ciąg } a_n x^n \text{ jest ograniczony}\}$. Dla $x \in A$ mamy $|a_n x^n| \leqslant M$ dla pewnej liczby $M > 0$. Zatem

$$|x| \leqslant \frac{M^{1/n}}{|a_n|^{1/n}}.$$

Niech α oznacza największy punkt skupienia ciągu $|a_n|^{1/n}$. Wtedy

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \xrightarrow[k]{} \alpha$$

dla pewnego podciągu liczba naturalnych n_k. Zatem

$$|x| \leqslant \frac{M^{1/n_k}}{|a_{n_k}|^{1/n_k}} \xrightarrow[k]{} \frac{1}{\alpha}.$$

Na podstawie (5.1) otrzymujemy

$$R \leqslant \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

Załóżmy, że

$$|x| < \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

Tzn.

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} < 1.$$

Wybierzmy liczbę r spełniającą

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} < r < 1.$$

Z określenia granicy górnej wszystkie wyrazy ciągu $|a_n x^n|^{1/n}$ (poza być może skończoną ilością leżą poniżej r, tzn.

$$|a_n x^n|^{1/n} \leqslant r, \qquad n \geqslant n_0$$

dla pewnego wskaźnika n_0. Równoważnie

$$|a_n x^n| \leqslant r^n, \qquad n \geqslant n_0.$$

Z kryterium porównawczego szereg $\sum a_n x^n$ jest wtedy zbieżny bezwzględnie. To oznacza, że $R \geqslant |x|$. Zatem

$$R \geqslant \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

Twierdzenie 5.19. *Suma szeregu* $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest funkcją ciągłą w przedziale* $(-R, R)$.

Dowód. $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ jest funkcją ciągłą. Wiemy, że $s_n(x) \underset{n}{\rightrightarrows} s(x)$ dla $-r \leqslant x \leqslant r$ dla dowolnej liczby $0 < r < R$. Stąd otrzymujemy tezę. □

Przykłady. Szereg potęgowy może mieć różne zachowanie na brzegu przedziału zbieżności.

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest zbieżny tylko dla $|x| < 1$.
2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ jest zbieżny dla $|x| \leqslant 1$.
3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ jest zbieżny dla $-1 < x \leqslant 1$. Można pokazać, że suma szeregu wynosi $\log(1 + x)$.

Twierdzenie 5.20 (Abel)**.** *Jeśli szereg* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny dla* $x = a$, *to funkcja* $f(x)$ *jest lewostronnie ciągła w punkcie* $x = a$, *jeśli* $a > 0$ *i prawostronnie ciągła, jeśli* $a < 0$.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $a = 1$. Chcemy udowodnić, że

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Oznaczmy $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ i $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wtedy (przyjmując $s_{-1} = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\underline{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} &= \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+1} = \underline{(1-x) \sum_{k=0}^{n} s_k x^k + s_n x^{n+1}}.\end{aligned}$$

Dla $0 < x < 1$ przechodzimy do granicy w podkreślonych wyrażeniach. Ponieważ ciąg s_n jest ograniczony, to $s_n x^{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$. Zatem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Dalej

$$\begin{aligned}f(x) - f(1) &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n.\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$|f(x) - f(1)| \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - s| \, x^n + (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n - s| \, x^n.$$

Dla $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla $n > N$ mamy $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ciąg s_n jest ograniczony więc $|s_n| \leqslant M$ dla pewnej liczby $M > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}|f(x) - f(1)| &\leqslant 2M(1-x) \sum_{n=0}^{N} x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &\leqslant 2M(N+1)(1-x) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Jeśli $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4M(N+1)}$, to $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$. $\square$

6 Pochodne

Przez punkt P i $Q \neq P$ okręgu przeprowadzamy sieczną. Gdy punkt Q zbliża się do punktu P, to przyjmujemy, że graniczne położenie siecznych określa położenie stycznej do okręgu w punkcie P. Będziemy zajmować się stycznymi do wykresów funkcji $y = f(x)$. Chcemy znaleźć styczną do wykresu w punkcie $(a, f(a))$. Wybierzmy inny punkt wykresu $(x, f(x))$. Nachylenie (współczynnik kierunkowy) siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$ wynosi
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Zatem nachylenie stycznej wyraża się wzorem
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Wyrażenie pod granicą nazywamy ilorazem różnicowym.

Przykład. Dla $f(x) = x^2$ i $a = 1$ oraz $x \neq 1$ mamy
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$
Zbliżamy się z x do 1. Nachylenie stycznej do wykresu w punkcie $(1, 1)$ powinno być równe granicznemu nachyleniu siecznych, czyli
$$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$
Równanie stycznej ma postać $y - 1 = 2(x - 1)$. Po przekształceniu otrzymamy $y = 2x - 1$.

Ogólnie obliczamy granicę
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \text{o ile istnieje.}$$
Wtedy równanie stycznej ma postać
$$y - f(a) = m(x - a).$$

Obiekt porusza się po linii pionowej i jego wysokość w chwili t wynosi $h(t)$. Chcemy obliczyć prędkość w chwili $t = a$. Wybieramy moment czasu t

blisko a, ale $t \neq a$ (np. $t > a$). Średnia prędkość w przedziale czasu od a do t wynosi

$$\frac{h(t) - h(a)}{t - a}.$$

Prędkość chwilowa określona jest wzorem

$$\lim_{t \to a} \frac{h(t) - h(a)}{t - a}.$$

Przykład. $f(t) = t^3 + 3t$. Chcemy obliczyć prędkość obiektu w chwili $t = 1$.

$$\frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \frac{t^3 + 3t - 4}{t - 1} = t^2 + t + 4.$$

Zatem

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = 6.$$

Definicja 6.1. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w pewnym przedziale wokół punktu a ma pochodną w tym punkcie, jeśli istnieje granica*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Uwaga 6.2. Liczba $f'(a)$ określa chwilowe tempo zmiany wartości funkcji w punkcie a.

Jeśli $f'(a)$ istnieje, to równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(a, f(a))$ ma postać

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Przykład. Chcemy znaleźć równanie stycznej do wykresu $y = \sqrt{x}$ w punkcie $(2, \sqrt{2})$. Mamy

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \underset{x \to 2}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Równanie stycznej to

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 2).$$

Definicja 6.3. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $[a, a+\delta)$ (lub $(a-\delta, a]$) oraz istnieje granica*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\text{lub } f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right),$$

to mówimy, że istnieje pochodna prawostronna (lub lewostronna) w punkcie a.

Przykład. Zrzucamy kamień z wysokości 20m. Jaka jest prędkość kamienia w chwili uderzenia w ziemię ? Mamy

$$h(t) = \begin{cases} 20 - 5t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0 & t > 2. \end{cases}$$

Trzeba obliczyć $h'_-(2)$.

$$h'_-(2) = \lim_{t \to 2^-} \frac{h(t) - h(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2^-} \frac{20 - 5t^2}{t - 2} = \lim_{t \to 2^-} \frac{-5\cancel{(t-2)}(t+2)}{\cancel{t-2}} - 20.$$

Oczywiście $h'_+(2) = 0$.

Przykład. Czy funkcja $f(x) = |x|$ ma pochodną w punkcie $x = 0$? Obliczamy

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Zatem granica $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nie istnieje.

Twierdzenie 6.4. *Jeśli funkcja $f(x)$ ma pochodną w punkcie a, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód.

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\searrow f'(a)} \; \underbrace{(x - a)}_{\searrow 0} \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

□

Przykład. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0, \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie 0. Zatem nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Twierdzenie 6.5. *Załóżmy, że $f'(a)$ i $g'(a)$ istnieją. Wtedy*

(i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, *o ile* $g(a) \neq 0$.

Dowód.
(i)

$$\frac{f(x) + g(x) - [f(a) + g(a)]}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) + g'(a).$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &\quad = \frac{[f(x) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] + [f(x) - f(a)]g(a) + f(a)[g(x) - g(a)]}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\,(x - a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &\qquad \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\frac{[f(x) - f(a)]g(a) - f(a)[g(x) - g(a)]}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

Przykłady.

(a) $f(x) \equiv c$. $f'(a) = 0$.

(b) $f_n(x) = x^n$, $n \geqslant 1$.

$$f_n'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$
$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1}}_{n \text{ składników}} = na^{n-1}.$$

(c) $g_n(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{f_n(x)}$, $x \neq 0$.

$$g_n'(x) = \left(\frac{1}{f_n(x)}\right)' = \frac{-f_n'(x)}{f_n(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Uwaga 6.6. Przykłady (b) i (c) dają $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Czasami stosuje się inny zapis dla pochodnej. Przyjmując $h = x-a$ mamy

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ile wynosi $\lim\limits_n n^2 \left[f(2 + \frac{1}{n^2}) - f(2)\right]$ przy założeniu, że $f'(2)$ istnieje ? To wyrażenie jest równe

$$\lim_n \frac{f(2 + \frac{1}{n^2}) - f(2)}{\frac{1}{n^2}} = f'(2).$$

Przykłady.

(a)
$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x$$

Ostatnia granica była obliczona na podstawie zadania 9 z listy 6. Można tę granicę obliczyć inaczej korzystając ze wzoru

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

Rzeczywiście
$$\frac{e^x-1}{x}-1=\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots.$$
Załóżmy, że $|x|\leqslant 1$. Wtedy
$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|\leqslant |x|\left(\frac{1}{2!}+\frac{|x|}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots\right)$$
$$\leqslant |x|\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\right)=(e-2)|x|\leqslant |x|.$$

(b) $(\sin x)'=\cos x$. Rzeczywiście
$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\sin x\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{\to 0\ ?}+\cos x\frac{\sin h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}\cos x.$$
$$\frac{\cos h-1}{h}=\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=-\frac{\sin^2 h}{h^2}\frac{h}{\cos h+1}\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Uwaga 6.7. Niech $f(x)=g(x+b)$. Wtedy $f'(x)=g'(x+b)$. Istotnie
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g((x+b)+h)-g(x+b)}{h}=g'(x+b).$$

(f) $(\cos x)'=-\sin x$, bo $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ zatem
$$(\cos x)'=\sin'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

(g) $$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}\\ 1+\operatorname{tg}^2 x\end{cases}\qquad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

(h) $x>0$, $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$. Uzasadnienie:
$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}$$

Ostatnia granica wg zadania 1 z listy 6 wynosi 1. Ale możemy ją też obliczyć na podstawie przykładu (a). Niech $u = \log(1 + t)$. Wtedy $u \to 0$, gdy $t \to 0$. Rzeczywiście dla $t > 0$ mamy

$$e^t > 1 + t, \quad \text{zatem} \quad t > \log(1 + t) > 0.$$

Z kolei dla $-1 < t < 0$ otrzymujemy

$$|\log(1 + t)| = -\log(1 + t) = \log \frac{1}{1 + t} = \log \left(1 + \frac{-t}{1 + t}\right) < \frac{-t}{1 + t}.$$

Zatem dla $-\dfrac{1}{2} \leqslant t < 0$ mamy

$$|\log(1 + t)| \leqslant -2t = 2|t|.$$

Reasumując

$$|\log(1 + t)| \leqslant 2|t|, \text{dla } |t| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{e^u - 1} = 1.$$

Twierdzenie 6.8 (reguła łańcucha)**.** *Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x = a$, natomiast funkcja $g(y)$ jest różniczkowalna w punkcie $b = f(a)$, to funkcja złożona $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jest różniczkowalna w punkcie $x = a$ oraz*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a). \tag{6.1}$$

Dowód. Nieścisłe, ale obrazowe uzasadnienie jest następujące.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a)))}{f(x) - f(a)} \, \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

przy założeniu $f(x) \neq f(a)$. Przyjmując oznaczenie $y = f(x)$ otrzymamy

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \, \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dla $x \to a$ mamy $y = f(x) \to f(a) = b$. Zatem pierwszy ułamek dąży do $g'(b)$, a drugi do $f'(a)$.

Przejdziemy do ścisłego dowodu. Z założenia mamy

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + u(x), \quad u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

Podobnie

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b} = g'(b) + v(y), \quad v(y) \xrightarrow[y\to b]{} 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= (x-a)\,[f'(a)+u(x)], \\ g(y)-g(b) &= (y-b)\ [g'(b)+v(y)]. \end{aligned}$$

W drugiej równości podstawmy $y = f(x)$ i $b = f(a)$. Otrzymamy

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) = [f(x)-f(a)][g'(b)+v(y)]& \\ = (x-a)\,[f'(a)+u(x)][g'(b)+v(y)]&. \end{aligned}$$

Czyli

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = [f'(a)+u(x)][g'(b)+v(y)].$$

Gdy $x \to a$, to $u(x) \to 0$. Ponadto $y = f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) = b$. Zatem $v(y) \to 0$. Ostatecznie w granicy otrzymujemy $f'(a)g'(b)$. $\square$

Uwaga 6.9. Wzór (6.1) można też zapisać w postaci

$$(g\circ f)'(x) = g'(y)f'(x), \quad \text{gdzie } y = f(x).$$

Przykłady.

(a) Obliczyć $(\log\sin x)'$.

$$\begin{array}{ll} y = f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x \\ g(y) = \log y & g'(y) = \dfrac{1}{y} \end{array}$$

Zatem

$$(\log\sin x)' = \frac{1}{y}\cos x = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

(b) $h(x) = \cos(x^5)$. $h'(x) = -\sin(x^5)\,5x^4$.

6.1 Zapis Leibniza

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Iloraz $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ reprezentuje stosunek zmiany wartości y do zmiany wartości x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Prawa strona jest oznaczeniem pochodnej w zapisie Leibniza.

Zobaczmy jak wygląda reguła łańcucha w tym zapisie. Wprowadzamy oznaczenia $u = f(x)$, $y = g(u)$. Wtedy

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \qquad \frac{dy}{du} = g'(u) \underset{u=f(x)}{=} g'(f(x)).$$

Dalej

$$y = g(f(x)), \qquad \frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x).$$

Wzór (6.1) przyjmuje postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}, \qquad u = f(x).$$

Przykłady.

(a) $y = \sin^8 x$. Niech $u = \sin x$, $y = u^8$. Wtedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = 8u^7 \cos x = 8 \sin^7 x \cos x.$$

(b) $y = \log(\cos(x^2 + 1))$. Niech $u = x^2 + 1$, $v = \cos u$, $y = \log v$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\,\frac{dv}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{v}(-\sin u)\,2x = -\frac{2x\sin(x^2+1)}{\cos(x^2+1)}.$$

Definicja 6.10. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) jeśli $f'(x)$ istnieje w każdym punkcie x z (a, b). Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $[a, b]$, jeśli dodatkowo istnieją $f'_+(a)$ oraz $f'_-(b)$.*

Przykłady.

(a)
$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Dla $x \neq 0$ pochodna istnieje i wynosi

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} + x\,\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Sprawdzimy istnienie pochodnej w 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}.$$

Otrzymane wyrażenie nie ma granicy, gdy $x \to 0$.

(b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Dla $x \neq 0$ mamy

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Dalej

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Zatem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja $f'(x)$ nie ma granicy w punkcie 0.

Twierdzenie 6.11. *Załóżmy, funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[c, d]$ i $g(y)$ jest funkcją odwrotną do funkcji f. Jeśli dla $c < a < d$ pochodna $f'(a)$ istnieje oraz $f'(a) \neq 0$, to funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $b = f(a)$ oraz*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Uwaga 6.12. Przy oznaczeniach $g = f^{-1}$, $a = f^{-1}(b)$ mamy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Uwaga 6.13. Jeśli $f(x) = y$, to

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dowód. Z Twierdzenia 4.37 funkcja $g(y)$ jest ciągła. Chcemy zbadać

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

gdy $y \to b$. Oznaczmy $x = g(y)$. Zatem $y = f(x)$. Ponadto z $f(a) = b$ mamy $g(b) = a$. Otrzymujemy więc

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Gdy $y \to b$, to z ciągłości funkcji g w punkcie b wynika, że $g(y) \to g(b)$, czyli $x \to a$. Zatem

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Przykład. $y = f(x) = x^n$, $x > 0$. Wtedy $x = g(y) = y^{1/n}$. Zatem

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Znajdziemy postać wzoru na pochodną funkcji odwrotnej w zapisie Leibniza. Dla $y = f(x)$ i $x = g(y)$ mamy

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad \frac{dx}{dy} = g'(y).$$

Zatem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Przykłady.

(a) $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$. Wtedy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

W szczególności

$$(\operatorname{arctg} t)'\Big|_{t=1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Rzeczywiście, niech $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Wtedy $x = \arcsin y$, $-1 < y < 1$. Zatem

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

W szczególności $(\arcsin x)'\Big|_{x=0} = 1$.

Jeśli α jest kątem nachylenia stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(a, f(a))$, to $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$. Przy zamianie x i y rolami kąt $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ określa nachylenie wykresu $x = g(y)$ (czyli tego samego wykresu) w punkcie $(g(b), b) = (a, f(a))$. Zatem

$$g'(b) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(a)}.$$

6.2 Maxima i minima

Definicja 6.14. *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w otoczeniu punktu a i w pewnym przedziale $(a-\delta, a+\delta)$ mamy $f(x) \leqslant f(a)$. Mówimy wtedy, że f posiada lokalne maksimum w punkcie a. Jeśli nierówność jest ostra dla $x \neq a$ z przedziału $(a-\delta, a+\delta)$, to mamy do czynienia ze ścisłym lokalnym maksimum. Podobnie określa się lokalne minimum i ścisłe lokalne minimum.*

Twierdzenie 6.15. *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna i posiada lokalne ekstremum w punkcie a. Wtedy $f'(a) = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że w a występuje lokalne minimum. Wtedy dla $a < x < a+\delta$ mamy

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

Zatem

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

Dla $a-\delta < x < a$ mamy

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0,$$

czyli

$$f'(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Stąd $f'(a) = 0$. □

Definicja 6.16. *Punktami krytycznym funkcji nazywamy punkty, w których pochodna nie istnieje lub istnieje i wtedy jest równa 0 (punkty stacjonarne).*

6.3 Metoda znajdowania wartości największej i najmniejszej funkcji ciągłej na przedziale $[a, b]$

Z twierdzenia Weierstrassa wiemy, że istnieją punkty c i d w przedziale $[a, b]$ takie, że

$$f(c) = \min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) =: m, \qquad f(d) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) =: M.$$

Zajmiemy się położeniem punktu c. Mamy następujące możliwości.

1. $c = a$ lub $c = b$, tzn. c jest jednym z końców przedziału.

2. $a < c < b$.

   2(a) Pochodna w c nie istnieje.

   2(b) Pochodna w c istnieje i $f'(c) = 0$, bo c jest w szczególności minimum lokalnym.

Reasumując, wartości m i M są przyjęte na końcach przedziału lub w jakichś punktach krytycznych. Aby wyznaczyć m i M wykonujemy następujące czynności.

(a) Znajdujemy wszystkie punkty krytyczne funkcji.

(b) Obliczamy wartości funkcji w punktach krytycznych i na końcach przedziału.

(c) Największa z otrzymanych wartości jest równa M, a najmniejsza to m.

Przykład. $f(x) = x^{2/3} - x = (x^2)^{1/3} - x$, $[-1, 1]$. Obliczamy

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(x^2)^{-2/3}\, 2x - 1, \qquad x \neq 0.$$

Sprawdzamy istnienie pochodnej w 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^{2/3} - x}{x} = x^{-1/3} - 1 \quad \begin{matrix} \xrightarrow[x\to 0^-]{} & -\infty \\ \xrightarrow[x\to 0^+]{} & \infty \end{matrix} .$$

Zatem 0 jest punktem krytycznym. Rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$. Czyli

$$\frac{2}{3}(x^2)^{-2/3}\, x - 1 = 0.$$

Stąd $x = \frac{8}{27}$. Mamy

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(0) = 0,\ f(\tfrac{8}{27}) = \tfrac{4}{27}.$$

Zatem $m = 0$ i $M = 2$.

Uwaga 6.17. W przykładzie można pominąć sprawdzanie różniczkowalności w punkcie 0, przyjmując, że ten punkt jest potencjalnie krytyczny, więc obejmuje go punkt (b) procedury.

Twierdzenie 6.18 (Rolle)**.** *Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to $f'(c) = 0$, w pewnym punkcie $a < c < b$.*

Dowód. Jeśli f jest stała, tzn. $f(x) \equiv f(a)$, to $f'(x) \equiv 0$. Jeśli f nie jest stała, to $m < M$. Zatem wartość m lub M jest przyjęta w pewnym punkcie wewnętrznym c. Ale wtedy $f'(c) = 0$. $\square$

Twierdzenie 6.19 (Cauchy)**.** *Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w $[a, b]$ i różniczkowalne w (a, b), przy czym $g'(x) \neq 0$, dla $a < x < b$. Wtedy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

dla pewnego punktu c, $a < c < b$.

Dowód. Mamy $g(a) \neq g(b)$, bo gdyby $g(a) = g(b)$, to z twierdzenia Rolle'a mielibyśmy $g'(c) = 0$ dla pewnego punktu $a < c < b$. Określmy funkcję

$$h(x) = f(a) - f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Wtedy $h(a) = h(b)$. Z twierdzenia Rolle'a otrzymujemy $h'(c) = 0$ dla pewnego $a < c < b$. Tzn.

$$0 = -f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Po przekształceniu otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 6.20 (Lagrange, o wartości średniej)**.** *Jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b), to dla pewnego punktu $a < c < b$ mamy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie Cauchy'ego dla $g(x) = x$. □

Uwaga 6.21. Wyrażenie $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ jest współczynnikiem nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b)$ wykresu funkcji $y = f(x)$. Z kolei $f'(c)$ jest współczynnikiem nachylenia stycznej do wykresu w punkcie $(c, f(c))$. Twierdzenie Lagrange'a mówi zatem, że w pewnym punkcie pośrednim styczna do wykresu jest równoległa do siecznej.

Wniosek 6.22. *Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $a < x < b$, to funkcja $f(x)$ jest stała.*

Dowód. Niech $a < x, y < b$. Możemy przyjąć $x < y$. Wtedy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) = 0,$$

dla pewnego punktu $x < z < y$. Zatem $f(x) = f(y)$. □

Wniosek 6.23. *Jeśli $f'(x) = g'(x)$ dla $a < x < b$, to $f(x) = g(x) + c$ dla pewnej stałej c.*

Dowód. Dla $h(x) = f(x) - g(x)$ mamy $h'(x) = 0$, zatem $h(x) \equiv c$. □

Twierdzenie 6.24. *Jeśli $f'(x) \geqslant 0$ dla $a < x < b$, to $f(x)$ jest funkcją rosnącą. Jeśli $f'(x) > 0$ dla $a < x < b$, to $f(x)$ jest ściśle rosnąca.*

Uwaga 6.25. Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla przeciwnej nierówności.

Dowód. Niech $a < x < y < b$. Wtedy z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) \geqslant 0$$

dla pewnego punktu $x < z < y$. Zatem $f(y) \geqslant f(x)$. W przypadku $f'(z) > 0$ otrzymujemy $f(y) > f(x)$. □

Uwaga 6.26. *Jeśli $f(x)$ jest ściśle rosnąca, to nie znaczy, że $f'(x) > 0$ dla każdego punktu x. Np. $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, ale $f'(0) = 0$.*

Przykład. Udowodnić, że

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x, \quad \text{dla } x > -1,\ x \neq 0,\ \alpha > 1. \tag{6.2}$$

Określamy

$$f(x) = (1 + x)^\alpha - \alpha x - 1.$$

Pomocniczo obliczamy

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x}\,\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0.$$

Zatem

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha[(1 + x)^{\alpha-1} - 1].$$

Stąd $f'(x) > 0$ dla $x > 0$ oraz $f'(x) < 0$ dla $-1 < x < 0$. To oznacza, że funkcja $f(x)$ ściśle rośnie na półprostej $[0, \infty)$ i ściśle maleje na $(-1, 0]$. Wnioskujemy, że $f(x) > f(0)$ dla $x > -1$, $x \neq 0$. Czyli $(1+x)^\alpha - \alpha x - 1 > 0$ dla $x > -1$, $x \neq 0$.

6.4 Wyższe pochodne

Definicja 6.27. *Jeśli $f'(x)$ jest różniczkowalna w punkcie a, to jej pochodną oznaczamy symbolem*

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

i nazywamy drugą pochodną w punkcie a.

W zapisie Leibniza dla funkcji $y = f(x)$ drugą pochodną oznaczamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Przykłady.

(a) $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x.$

(b) $f(x) = x^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-1/2},\ f''(x) = -\frac{1}{4}\, x^{-3/2}.$

Podobnie określamy następne pochodne. Czyli n-ta pochodna funkcji jest pochodną $(n-1)$-tej pochodnej. Używamy symbolu $f^{(n)}$.

Przykłady.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x \\ f'''(x) = -\cos x & f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(2014)}(x) = -\sin x. \end{array}$$

Przyśpieszenie

Drugą pochodną położenia obiektu (poruszającego się po linii prostej) względem czasu nazywamy przyśpieszeniem, czyli chwilowym tempem zmiany prędkości. Średnie przyśpieszenie od chwili t_0 do chwili t wynosi

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

Wtedy

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0} = f''(t_0),$$

gdzie $f(t)$ oznacza położenie obiektu na prostej.

6.5 Różniczkowanie niejawne

Funkcje w dotychczasowych przykładach były podane jawnym wzorem $y = f(x)$, np. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$, $y = \operatorname{tg} x$. Załóżmy, że y jest związane z x poprzez równanie, np.

$$x^3 + y^3 = 2xy, \tag{6.3}$$

przy czym y jest funkcją zmiennej x. Załóżmy, że y jest różniczkowalna. Chcemy obliczyć y'. Różniczkujemy tożsamość (6.3), czyli nakładamy d/dx pamiętając, że $y = y(x)$. Otrzymamy

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 2y + 2x\frac{dy}{dx},$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}, \quad 3y^2 \neq 2x.$$

Przykład. Załóżmy, że y jest różniczkowalną funkcją zmiennej x spełniającą równanie

$$x^3 = y^4 + x^2 \sin y + 1,$$

oraz $y = 0$ dla $x = 1$. Chcemy obliczyć $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$. Nakładamy pochodną d/dx na tożsamość (obie strony tożsamości są funkcjami zmiennej x).

$$3x^2 = 4y^3\frac{dy}{dx} + 2x \sin y + x^2 \cos y \,\frac{dy}{dx}. \tag{6.4}$$

Dalej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2x \sin y}{4y^3 + x^2 \cos y}.$$

Zatem $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3$. Różniczkując tożsamość (6.4) można obliczyć $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

Uwaga 6.28. Oznaczenie Leibniza na wyższe pochodne funkcji $y = f(x)$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Przykład. Znaleźć styczną do wykresu funkcji y zadanej równaniem

$$x^2 + y^2 = 1$$

w punkcie $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Obliczamy

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Zatem
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Stąd $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=-1/2 \\ y=\sqrt{3}/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Styczna ma zatem równanie

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

6.6 Related rates czyli dwa tempa zmiany powiązane ze sobą

Pompujemy balon w kształcie sfery. Wtedy objętość V i promień r są funkcjami czasu t związanymi ze sobą równaniem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Różniczkując równanie względem t otrzymamy

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \, \frac{dr}{dt}. \tag{6.5}$$

Balon jest pompowany w tempie $10\,\mathrm{cm}^3/s$. Jakie jest tempo zmiany promienia w momencie, gdy $r = 10\,\mathrm{cm}$? Niech t_0 oznacza moment czasu, gdy $r = 10$. Do wzoru (6.5) podstawiamy $t = t_0$. Wtedy

$$10 = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = 4\pi 10^2 \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Zatem
$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{40\pi}\ (\mathrm{cm/s}).$$

Przykłady.

1. Woda jest nalewana do stożkowego kubka w tempie tempie $20\,\mathrm{cm}^3/s$. Kubek ma wysokość 15 cm i promień na brzegu równy 5 cm. Jaka jest szybkość podnoszenia się poziomu wody, gdy poziom ten osiąga 10 cm?

Niech V oznacza objętość nalanej wody w chwili t, natomiast h i r oznaczają poziom wody i promień górnej warstwy wody, odpowiednio, w chwili t. Mamy

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Z twierdzenia Talesa

$$\frac{r}{h} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

czyli

$$r = \frac{1}{3}h.$$

Zatem

$$V = \frac{\pi}{27}h^3.$$

Różniczkujemy obie strony względem czasu t.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27}\,3h^2\,\frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{9}\,h^2\,\frac{dh}{dt}.$$

Niech t_0 oznacza moment czasu, gdy $h = 10\,\mathrm{cm}$. Wtedy

$$20 = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{\pi}{9}\,10^2\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{9}{5\pi}(\mathrm{cm/s}).$$

2. Na odcinku drogi z ograniczeniem $60\,\mathrm{km/h}$ policja ustawiła radar $5\,\mathrm{m}$ od drogi (za krzaczkami). Samochód jedzie z prędkością $90\,\mathrm{km/h}$. Jaki będzie odczyt na radarze, gdy samochód znajdzie się $20\,\mathrm{m}$ od miejsca na drodze, w pobliżu którego ustawiono radar ? Niech y oznacza odległość pojazdu od radaru a x odległość pojazdu od odpowiadającego miejsca na drodze. Wtedy $y^2 = x^2 + 5^2$. Chcemy znaleźć $\dfrac{dy}{dt}$ w momencie, gdy $x = 20\,\mathrm{m}$. Różniczkujemy równanie względem t. Otrzymamy

$$2y\,\frac{dy}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt}.$$

Zatem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}\,\frac{dx}{dt}.$$

Wiemy, że $\frac{dx}{dt} = -90$. Niech t_0 oznacza moment czasu, gdy $x = 20$. Wtedy

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = -90\frac{20}{\sqrt{400+25}} \approx -87,3.$$

Jaki jest pomiar na radarze, gdy $x = 4$? Oznaczmy przez t_1 ten moment czasu.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1} = -90\frac{4}{\sqrt{41}} \approx -56,22.$$

6.7 Aproksymacja za pomocą stycznej

Rozważamy funkcję $f(x) = x^{1/3}$. Chcemy obliczyć $\sqrt[3]{1,1}$. Ogólnie załóżmy, że $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie a, czyli

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a).$$

To oznacza, że

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \approx f'(a),$$

gdy x leży blisko a. Otrzymujemy

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Prawa strona reprezentuje równanie stycznej do wykresu w punkcie a. Oznaczmy $h = x - a$. Wtedy

$$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a). \tag{6.6}$$

Aby obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{1,1}$ przyjmujemy $a = 1$ i $h = 0,1$. Mamy $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, zatem $f'(1) = \frac{1}{3}$. Z (6.6) otrzymujemy

$$\sqrt[3]{1,1} \approx 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 1,033\ldots.$$

Dla porównania dokładna wartość wynosi

$$\sqrt[3]{1,1} = 1,0322\ldots.$$

6.8 Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie 6.29 (reguła de l'Hospitala)**.** *Załóżmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w $[a, b)$ oraz różniczkowalne w (a, b). Ponadto $f(a) = g(a) = 0$ oraz $g'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$. Wtedy*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

Uwaga 6.30. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granicy lewostronnej i dwustronnej.

Dowód. Niech $x > a$. Wtedy z Twierdzenia 6.19 otrzymujemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

dla pewnego ξ, $a < \xi < x$. Gdy $x \to a^+$, to $\xi \to a^+$. Zatem

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Uwaga 6.31. Teza jest prawdziwa również dla granicy niewłaściwej.

Przykłady.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \overset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Lepszym wyjściem jest użycie wzorów trygonometrycznych

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\pi \cos \pi x}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\pi\sqrt{x^2 - 1}\cos \pi x}{x} = 0.$$

Można też obliczyć granicę bezpośrednio

$$\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{\sin \pi(x - 1)}{\pi(x - 1)} \cdot \frac{\pi\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} (-1) \cdot \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

(c)
$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{\sin x}}{\log\dfrac{x}{\pi}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}\,\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=-\infty.$$

Wniosek 6.32. *Załóżmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w przedziale (a,∞), $g'(x)\neq 0$ dla $x>a$, oraz $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. Wtedy*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$
o ile druga granica istnieje.

Dowód. Możemy przyjąć, że $a\geqslant 1$. Określmy funkcje
$$F(y)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{y}\right) & 0<y<\dfrac{1}{a},\\ 0 & y=0,\end{cases}\qquad G(y)=\begin{cases} g\left(\dfrac{1}{y}\right) & 0<y<\dfrac{1}{a},\\ 0 & y=0.\end{cases}$$
Wtedy F i G są różniczkowalne w przedziale $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ i ciągłe w punkcie 0. Rzeczywiście
$$\lim_{y\to 0^+}F(y)=\lim_{y\to 0^+}f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$
Dalej
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}\overset{\text{(H)}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{-\frac{1}{y^2}\,f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}\,g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
□

Przykład.
$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$
Można też granicę obliczyć bezpośrednio stosując podstawienie
$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x.$$

Twierdzenie 6.33 (reguła de l'Hospitala dla $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w (a,b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$. Załóżmy, że*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty.$$

Wtedy

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

Uwaga 6.34. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granic lewostronnych, obustronnych i granic w $\pm\infty$.

Uwaga 6.35. Przekształcenie

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)^{-1}}{f(x)^{-1}}$$

i użycie Twierdzenia 6.29 nie będzie skuteczne, bo

$$\frac{\left(g(x)^{-1}\right)'}{\left(f(x)^{-1}\right)'} = \frac{g'(x)}{f'(x)} \frac{(f(x))^2}{(g(x))^2}.$$

Dowód. Idea dowodu polega na tym, że dla x blisko a wyrażenia $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ oraz $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ zachowują się podobnie. Niech $a < x < x_0$. Wtedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)+f(x_0)}{g(x)-g(x_0)+g(x_0)}$$
$$= \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} + \dfrac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{1+\dfrac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}} = \frac{\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \dfrac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{1+\dfrac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}$$

dla pewnego punktu ξ położonego pomiędzy x i x_0. Oznaczmy $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wtedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L + \dfrac{f(x_0)-Lg(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{1+\dfrac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}.$$

Ustalmy liczbę $0 < \eta < 1/2$. Wybierzmy x_0 tak, aby

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \eta, \quad \text{dla } a < t < x_0.$$

Wtedy

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \eta,$$

bo $a < x < \xi < x_0$. Ponieważ $g(x) \to \infty$ dla $x \to a^+$, to możemy teraz znaleźć $a < x_1 \leqslant x_0$ tak, aby

$$\frac{|f(x_0) - Lg(x_0)| + |g(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|} < \eta, \quad \text{dla } a < x < x_1.$$

Niech $a < x < x_1$. Otrzymamy

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \frac{\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| + \dfrac{|f(x_0) - Lg(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|}}{1 - \dfrac{|g(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|}} < \frac{2\eta}{1-\eta} < 4\eta.$$

$\square$

Przykłady.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 0$. Można też uzasadnić inaczej: dla $x > 0$ mamy

$$0 < \frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{x^k}{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{(k+1)!}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\log x} \underset{y=x\log x}{=} \lim\limits_{y\to 0^-} e^y = 1.$

6.8.1 Nadużycia reguły de l'Hospitala

Wiemy, że
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Jeśli użyjemy reguły de l'Hospitala, to otrzymamy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Zastosowanie reguły de l'Hospitala wymaga znajomości pochodnej funkcji $\sin x$. Ale wyjściowa granica, która obliczamy jest z definicji równa pochodnej funkcji $\sin x$ w punkcie 0. Więc użycie reguły wymaga i tak informacji o granicy, którą właśnie obliczamy.

Ogólnie, gdy obliczamy granicę postaci
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x},$$
to jeśli granica istnieje, jest równa $f'(0)$. Użycie reguły de l'Hospitala prowadzi do granicy
$$\lim_{x\to 0} f'(x),$$
która wymaga znajomości pochodnej $f'(x)$. Czyli do obliczania granicy używamy narzędzi, które wymagają wiedzy, ile ta granica wynosi. Takie rozumowanie traktuje się jako nadużycie.

Poza tym może się zdarzyć, że $f'(0)$ istnieje, ale ostatnia granica nie istnieje. Na przykład
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Wtedy
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$
Ale dla $x \neq 0$ mamy
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$
więc granica $f'(x)$ w punkcie 0 nie istnieje.

Przykłady.

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(e^x)'\Big|_{x=0}=e^x\Big|_{x=0}=1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=(\cos x)'\Big|_{x=0}=-\sin x\Big|_{x=0}=0.$$

6.9 Pochodna ciągu i szeregu funkcyjnego

Twierdzenie 6.36. *Funkcje $f_n(x)$ są ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły w przedziale $[a,b]$. Załóżmy, że ciągi $f_n(x)$ i $f_n'(x)$ są jednostajnie zbieżne do $f(x)$ i $g(x)$, odpowiednio. Wtedy $f'(x)=g(x)$ (na końcach przedziału $f'_+(a)=g(a)$ i $f'_-(b)=g(b)$). Tzn.*

$$(\lim_n f_n(x))'=\lim_n f_n'(x).$$

Czyli pochodna granicy ciągu funkcji jest granicą pochodnych tych funkcji.

Dowód. Niech $a\leqslant x_0\leqslant b$. Chcemy pokazać, że $f'(x_0)=g(x_0)$. Z założenia dla $\varepsilon>0$ istnieje próg N taki, że dla $n>N$ mamy $|f_n'(t)-g(t)|<\varepsilon/3$, dla $a\leqslant t\leqslant b$. Wiemy, że funkcja $g(x)$ jest ciągła, jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji $f_n'(x)$. Zatem istnieje liczba $\delta>0$ taka, że dla $|\xi-x_0|<\delta$ mamy $|g(\xi)-g(x_0)|<\varepsilon/3$. Niech $0<|x-x_0|<\delta$. Wtedy dla $n>N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|&=|f_n'(\xi)-g(x_0)|\\&\leqslant|f_n'(\xi)-g(\xi)|+|g(\xi)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2}{3}\varepsilon,\end{aligned}$$

dla pewnego punktu ξ leżącego pomiędzy x i x_0. Zatem dla $0<|x-x_0|<\delta$ mamy

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|=\lim_n\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

To oznacza, że

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x_0),$$

czyli $f'(x_0)=g(x_0)$. □

Uwaga 6.37. W dowodzie wykorzystana była jedynie zbieżność punktowa ciągu f_n.

Uwaga 6.38. Wystarczy założyć, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny w jednym punkcie c przedziału $[a, b]$. Rzeczywiście, z tego warunku wynika jednostajna zbieżność ciągu $f_n(x)$. Sprawdzimy jednostajny warunek Cauchy'ego dla ciągu funkcji $f_n(x)$.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leqslant |\underbrace{[f_n(x) - f_m(x)]}_{h(x)} - \underbrace{[f_n(c) - f_m(c)]}_{h(c)}| + |f_n(c) - f_m(c)| \\
&= |\underbrace{f'_n(\xi) - f'_m(\xi)}_{h'(\xi)}|\,|x - c| + |f_n(c) - f_m(c)| \\
&\leqslant (b-a)|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| + |f_n(c) - f_m(c)|.
\end{aligned}$$

Uwaga 6.39. Nie trzeba zakładać, że funkcje $f'_n(x)$ są ciągłe. Wystarczy, aby funkcja $g(x)$ była ciągła.

Wniosek 6.40. *Załóżmy, że funkcje f_n są ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły w przedziale $[a, b]$. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny przynajmniej w jednym punkcie, natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną oraz*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \tag{6.7}$$

tzn. pochodna sumy szeregu funkcyjnego jest szeregiem pochodnych jego składników.

Dowód. Niech $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Wtedy

$$s'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(x).$$

Ciąg funkcyjny $s_n(x)$ spełnia założenia poprzedniego twierdzenia, w z uwzględnioną Uwagą 6.38. Zatem $\left(\lim_n s_n(x)\right)' = \lim_n s'_n(x)$, co jest równoznaczne z

(6.7), bo
$$\lim_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \lim_n s_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),$$
czyli
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$
□

Przykład. $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Przyjmujemy $f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$. Wtedy $f_n'(x) = -\frac{2xe^{-nx^2}}{n^2}$, co daje $|f_n'(x)| \leqslant \frac{2}{n^2}$. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jest jednostajnie zbieżny z kryterium Weierstrassa o majoryzacji. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ też jest jednostajnie zbieżny, bo
$$0 \leqslant \frac{e^{-nx^2}}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$
Czyli $s'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

Twierdzenie 6.41. *Załóżmy, że liczba $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(-R, R)$ oraz $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

Uwaga 6.42. Szereg potęgowy dla funkcji $f'(x)$ ma większe wartości bezwzględne współczynników, więc promień zbieżności nie może być mniejszy od R. Jednak promienie zbieżności obu szeregów są takie same. Istotnie, niech R' oznacza promień zbieżności dla $x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ $x \neq 0$.

(a) Jeśli istnieje granica $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$, to
$$\frac{1}{R'} = \lim_n \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

(b) Jeśli istnieje granica $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, to

$$\frac{1}{R'} = \lim_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Ogólnie mamy

$$\frac{1}{R'} = \limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Dowód. Szereg pochodnych $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ jest zbieżny w przedziale $(-R, R)$. Wiemy, że zbieżność jest jednostajna w każdym przedziale $[-R+\delta, R-\delta]$, dla $\delta > 0$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest też jednostajnie zbieżny w tym przedziale (wystarczy, że jest zbieżny w jednym punkcie $x = 0$). Z Wniosku 6.40 otrzymujemy tezę, czyli

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

□

Wniosek 6.43. *Funkcja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dla* $-R < x < R$, *gdzie* R *jest promieniem zbieżności, jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz*

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Dowód. Stosujemy wielokrotnie Twierdzenie 6.41 korzystając z faktu, że promień zbieżności nie zmienia się przy różniczkowaniu. □

Przykłady.

(a) Rozważmy funkcję $f(x) = \log(1 + x)$, $|x| < 1$. Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Promień zbieżności tego szeregu wynosi 1. Z Twierdzenia 6.41 mamy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = (\log(1+x))'.$$

Zatem

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + C, \quad |x| < 1,$$

dla pewnej stałej C. Podstawiając $x = 0$ uzyskamy $C = 0$. Zatem

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \text{dla } -1 < x < 1. \tag{6.8}$$

Z kryterium Leibniza szereg po prawej stronie jest zbieżny również dla $x = 1$. Zatem z Twierdzenia 5.20 otrzymujemy

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad |x| < 1.$$

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Szereg ten jest zbieżny dla $|x| < 1$. Wiemy, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = (\operatorname{arctg} x)',$$

czyli

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C, \qquad |x| < 1.$$

Podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $C = 0$. Zatem

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad |x| < 1. \tag{6.9}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy podstawić $x = 1$ i uzyskać

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

6.10 Wzory Taylora i MacLaurina

Twierdzenie 6.44 (Wzór Taylora)**.** *Niech $f(x)$ będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale wokół punktu a. Wtedy dla liczb b z tego przedziału mamy*

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n,$$

gdzie R_n ma jedną z dwu postaci:

(1) $R_n=\dfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(b-a))$*, dla pewnej liczby* $0<\theta<1$ *(**reszta w postaci Lagrange'a**),*

(2) $R_n=\dfrac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(a+\theta'(b-a))$*, dla pewnej liczby* $0<\theta'<1$ *(**reszta w postaci Cauchy'ego**).*

Uwagi

1. Oznaczmy $b-a=h$. Wtedy

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n,$$

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(a+\theta' h).$$

2. Reszta R_n oraz θ i θ' zależą od a, b i n.

Dowód. Oznaczmy

$$g(x)=f(b)-f(x)-\frac{(b-x)}{1!}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\ldots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

Wtedy

$$g'(x)=-\cancel{f'(x)}+\cancel{f'(x)}-\cancel{\frac{(b-x)}{1!}f''(x)}+\cancel{\frac{(b-x)}{1!}f''(x)}-\cancel{\frac{(b-x)^2}{2!}}f'''(x)$$
$$+\ldots+\cancel{\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}}(x)-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x). \quad (6.10)$$

Mamy $g(a) = R_n$ oraz $g(b) = 0$. Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(a + \theta'(b - a)),$$

dla pewnej liczby $0 < \theta' < 1$. Zatem $R_n = -(b - a)g'(a + \theta'(b - a))$. Podstawiamy $x = a + \theta'(b - a)$ do wzoru (6.10). Wtedy

$$b - x = b - a - \theta'(b - a) = (1 - \theta')(b - a)$$

oraz

$$R_n = \frac{(b - a)^n}{(n - 1)!}(1 - \theta')^{n-1} f^{(n)}(a + \theta'(b - a)).$$

Rozważmy funkcję $u(x) = (b - x)^n$. Mamy $u(a) = (b - a)^n$ oraz $u(b) = 0$. Z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy

$$\frac{g(b) - g(a)}{u(b) - u(a)} = \frac{g'(a + \theta(b - a))}{u'(a + \theta(b - a))},$$

dla pewnej liczby $0 < \theta < 1$. dalej

$$R_n = (b - a)^n \frac{g'(a + \theta(b - a))}{u'(a + \theta(b - a))}.$$

Mamy $u'(x) = -n(b - x)^{n-1}$. Z (6.10) wynika, że

$$\frac{g'(x)}{u'(x)} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Ostatecznie

$$R_n = \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(b - a)).$$

$\square$

Uwaga 6.45. Przy dowodzie wzoru na resztę w postaci Lagrange'a skorzystaliśmy z twierdzenia Cauchy'ego, natomiast przy postaci Cauchy'ego skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange'a.

We wzorze Taylora przyjmijmy $b = x$ i $a = 0$. Wtedy otrzymujemy `wzór McLaurina`

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n, \tag{6.11}$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1} f^{(n)}(\theta' x).$$

Uwagi.

1. Jeśli $f(x)$ jest wielomianem, to $R_n = 0$, gdy n przekroczy stopień wielomianu.

2. Z warunku $R_n \xrightarrow[n]{} 0$ wynika

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Jeśli $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$ dla stałej niezależnej od n, to $R_n \xrightarrow[n]{} 0$, bo $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n]{} 0$ (np. z kryterium d'Alemberta). Można dopuścić też słabszy warunek $|f^{(n)}(t)| \leqslant M^n$.

3. Reszta R_n nie musi dążyć do zera nawet, gdy szereg jest zbieżny. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Można udowodnić, że f jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy w punkcie 0 oraz $f^{(n)}(0) = 0$. Rzeczywiście, w tym celu udowodnimy przez indukcję, że dla $n \geqslant 0$ mamy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(x^{-1}\right) e^{-x^{-2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

gdzie $p_n(t)$ jest wielomianem. Dla $n = 0$ mamy

$$f^{(0)}(x) = f(x),$$

czyli $p_0(t) = 1$. Załóżmy, że równość (6.12) jest spełniona dla liczby $n \geqslant 0$. Wtedy dla $x \neq 0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' &= \frac{d}{dx}\left[p_n\left(x^{-1}\right) e^{-x^{-2}}\right] \\ &= -x^{-2} p_n'(x^{-1}) e^{-x^{-2}} + 2x^{-3} p_n(x^{-1}) e^{-x^{-2}} \\ &= x^{-2}\left[2x^{-1} p_n(x^{-1}) - p_n'(x^{-1})\right] e^{-x^{-2}} = p_{n+1}(x^{-1}) e^{-x^{-2}}, \end{aligned}$$

dla

$$p_{n+1}(t) = t^2[2tp_n(t) - p_n'(t)].^* \tag{6.13}$$

Pozostaje sprawdzić, że $f^{(n+1)}(0) = 0$. W tym celu rozważamy iloraz różnicowy funkcji $f^{(n)}(x)$ w punkcie 0.

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = x^{-1}p_n(x^{-1})e^{-x^{-2}}, \quad x \neq 0.$$

Podstawmy $t = x^{-1}$. Gdy $x \to 0$, to $|t| \to \infty$. Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{tp_n(t)}{e^{t^2}}.$$

Mamy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tp_n(t)}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{tp_n(t)}{e^t} \frac{1}{e^{t^2-t}} = 0$$

oraz

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{tp_n(t)}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-tp_n(-t)}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-tp_n(-t)}{e^t} \frac{1}{e^{t^2-t}} = 0.$$

np. na podstawie reguły de l'Hospitala. Ostatecznie $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Ze wzoru (6.11) otrzymujemy $f(x) = e^{-x^{-2}} = R_n$ dla $x \neq 0$, czyli reszta nie dąży do zera.

4. Przypuśćmy, że szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma dodatni promień zbieżności. Prawa strona jest wtedy automatycznie szeregiem McLaurina funkcji $f(x)$, tzn. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Rzeczywiście, na podstawie Wniosku 6.43 mamy $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

Przykład. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$. Mamy

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Zatem

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} =: \binom{\alpha}{n}.$$

---

*Można wykazać, że $\deg p_n = 3n$ oraz $p_{2n}(t) = v_n(t^2)$, $p_{2n+1}(t) = tw_n(t^2)$, gdzie v_n i w_n są wielomianami.

Ze wzoru McLaurina otrzymujemy, przy konwencji $\binom{\alpha}{0} = 1$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n.$$

Pokażemy, że $R_n \xrightarrow[n]{} 0$ dla $|x| < 1$. Skorzystamy z postaci Cauchy'ego reszty.

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \\ &= \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n} \\ &= n\binom{\alpha}{n} x^n (1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Wyrażenie $n\binom{\alpha}{n}x^n$ dąży do 0 dla $|x| < 1$, np. z kryterium d'Alemberta. Wystarczy udowodnić, że wielkość $(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n}$ jest ograniczona. Dla $|x| < 1$ i $0 < \theta < 1$ mamy $1 - \theta \leqslant 1 + \theta x$. Zatem

$$(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n} \leqslant (1+\theta x)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n} = (1+\theta x)^{\alpha-1}.$$

Zależność od n jest jeszcze ukryta w θ. Dalej

$$(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqslant \begin{cases} 2^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1, \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \alpha < 1, \end{cases}$$

przy czym dla $\alpha < 1$ skorzystaliśmy z nierówności $1 + \theta x \geqslant 1 - |x|$. Reasumując otrzymaliśmy `uogólniony wzór dwumianowy Newtona`.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1. \tag{6.14}$$

Przyjmijmy $\alpha = -\frac{1}{2}$. W miejsce x podstawmy $-x^2$ dla $|x| < 1$. Wtedy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}.$$

Dalej

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! 2^n n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n},$$

bo $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. Ostatecznie uzyskaliśmy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Ale $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $|x| < 1$. Zatem

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad |x| < 1. \tag{6.15}$$

Dla $x = \frac{1}{2}$, po pomnożeniu przez 2 obu stron (6.15), otrzymamy

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{16^n}.$$

Podstawiając dla odmiany $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i mnożąc (6.15) przez $\sqrt{2}$ uzyskamy

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{8^n}.$$

Zauważmy, że dla $0 < x < 1$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 > \arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy $x \to 1^-$ otrzymamy

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Ponieważ liczba N jest dowolna, to

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}. \end{aligned}$$

Przechodzimy do granicy $x \to 1^-$, aby uzyskać

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}. \tag{6.16}$$

Uwaga. Zbieżność szeregu po prawej stronie (6.16) można też uzyskać ze wzoru Stirlinga podającego przybliżoną wartość wielkości $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Twierdzenie 6.46 (Reszta Peano)**.** *Jeśli funkcja $f(x)$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a, to*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(h),$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0,$$

tzn. wielkość $R_n(h)$ jest mała w stosunku do h^n dla małych wartości $|h|$.

Dowód. Zastosujemy wielokrotnie regułę de'Hospitala korzystając z

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{h^n}{n!}\right) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{R_n(h)}{h^n} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)}{h^n}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-\frac{h}{1!}f''(a)-\frac{h^2}{2!}f'''(a)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)}{nh^{n-1}}\\
&= \ldots = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)\,h}{n!h}\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{h}-f^{(n)}(a)\right]=0.
\end{aligned}$$

Ostatnia granica wynosi zero bezpośrednio z określenia pochodnej w punkcie a. □

Definicja 6.47. *Punkt x_0 nazywamy* ***punktem przegięcia*** *funkcji f, jeżeli dla wszystkich punktów $x \neq x_0$ w pobliżu x_0 mamy $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0)$, lub dla wszystkich takich punktów mamy $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'(x_0)$.*

Uwaga. Geometrycznie oznacza to, że części wykresu funkcji dla $x < x_0$ i dla $x > x_0$ leżą po przeciwnych stronach stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Rzeczywiście, niech $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
f(x) &> f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{dla } x > x_0,\\
f(x) &< f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{dla } x < x_0.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 6.48. *Funkcja $f(x)$ jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale wokół punktu a oraz $f^{(n)}$ jest ciągła w a. Załóżmy, że*

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0,\ n\geqslant 2.$$

Jeśli n jest liczbą parzystą, to funkcja posiada ścisłe ekstremum lokalne w punkcie a. W przeciwnym wypadku a jest punktem przegięcia funkcji f.

Dowód. Rozważymy przypadek $f^{(n)}(a) > 0$. Z ciągłości możemy przyjąć, że $f^{(n)}(t) > 0$ dla argumentów t blisko a. Niech x leży blisko a. Wtedy ze wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a otrzymujemy

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n,$$

dla pewnego punktu ξ pomiędzy a i x. Jeśli n jest liczbą parzystą, to drugi składnik po prawej stronie wzoru jest dodatni. Zatem $f(x) > f(a)$ dla $x \neq a$ w pobliżu a. To oznacza, że w a występuje ścisłe lokalne minimum. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^{n-1} > 0 = f'(a),$$

dla x blisko a. Wtedy a jest punktem przegięcia. □

Uwagi.

1. W punkcie przegięcia nie może występować ekstremum lokalne.
2. Jeśli $f''(a) > 0$, to w a jest ścisłe minimum, a dla $f''(a) < 0$, ścisłe maksimum.

Przykłady.

(a) Chcemy znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = x^4 + 4x$. Obliczamy $f'(x) = 4(x^3 + 1)$. Zatem $f'(-1) = 0$. Dalej $f''(-1) = 12$. Zatem w punkcie -1 występuje ścisłe lokalne minimum.

(b) $f(x) = x^3 + x^4$. Mamy $f'(x) = 3x^2 + 4x^3 = x^2(3 + 4x)$. Pochodna zeruje się w 0 i w $-\frac{3}{4}$. Dalej $f''(x) = 6x + 12x^2 = 6x(1 + 2x)$. Zatem $f''(-\frac{3}{4}) > 0$. Mamy $f''(0) = 0$. Ale $f'''(0) > 0$. W rezultacie w punkcie $-\frac{3}{4}$ występuje ścisłe lokalne minimum, a w punkcie 0 przegięcie wykresu.

Definicja 6.49. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale (a, b) jest* ***wypukła w dół****, jeśli dla dowolnych punktów $a < x_1 < x_2 < b$ oraz liczb $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ mamy*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) < \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{6.17}$$

Podobnie, $f(x)$ jest ***wypukła w górę*** *jeśli*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) > \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{6.18}$$

Uwaga 6.50.

1. Wypukłość w dół oznacza, że fragment wykresu pomiędzy punktami $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży pod sieczną przechodzącą przez te punkty. Rzeczywiście, jeśli $u(x)$ jest funkcją liniową oraz $u(x_1) = f(x_1)$, $u(x_2) = f(x_2)$, to $u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$.

2. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale (a, b), to z warunku
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad a < x_1 < x_2 < b$$
wynika wypukłość w dół. Bez warunku ciągłości teza nie jest prawdziwa.

Twierdzenie 6.51. *Jeśli $f''(x) > 0$ dla $a < x < b$, to funkcja $f(x)$ jest wypukła w dół. Natomiast jeśli $f''(x) < 0$ dla $a < x < b$, to funkcja $f(x)$ jest wypukła w górę.*

Dowód. Udowodnimy pierwszą część twierdzenia. Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz α, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2) \\
&\qquad = \alpha[f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)] - \beta[f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)] \\
&\qquad = \alpha\beta(x_2 - x_1) f'(\xi_1) - \alpha\beta(x_2 - x_1) f'(\xi_2) \\
&\qquad = \alpha\beta(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] = \alpha\beta(x_1 - x_2)(\xi_2 - \xi_1) f''(\eta),
\end{aligned}$$

gdzie $x_1 < \xi_1 < \alpha x_1 + \beta x_2 < \xi_2 < x_2$ oraz $\xi_1 < \eta < \xi_2$. Zatem
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2) < 0$$
dla $\alpha, \beta > 0$ i $\alpha + \beta = 1$. □

Uwagi.

1. Twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe, ale w tezie otrzymamy słabą nierówność dla f''. Istotnie załóżmy, że f jest wypukła w dół. Dla $x_1 < x_2$ i $\alpha, \beta > 0$, z nierówności (6.17) otrzymujemy
$$\alpha[f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)] < \beta[f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)].$$
Zatem
$$\frac{f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)}{\beta(x_2 - x_1)} < \frac{f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)}{\alpha(x_2 - x_1)}.$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\frac{f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)}{(\alpha x_1 + \beta x_2) - x_1} < \frac{f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)}{x_2 - (\alpha x_1 + \beta x_2)}.$$

Gdy $\alpha \to 0^+$, to $\beta \to 1^-$ oraz $\alpha x_1 + \beta x_2 \to x_2$. Otrzymujemy więc

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2).$$

Podobnie, z $\beta \to 0^+$ wynika

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Zatem $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, czyli f' jest funkcją rosnącą. Tzn. $f'' \geqslant 0$.

2. Załóżmy, że f jest wypukła w dół. Wtedy funkcja f' jest ściśle rosnąca. Istotnie, gdyby $f'(x_1) = f'(x_2)$ dla pewnych $x_1 < x_2$, to funkcja f' byłaby stała w przedziale $[x_1, x_2]$. To by oznaczało, że f jest funkcją liniową w tym przedziale.

7 Iloczyny nieskończone

Dla liczb $a_n > -1$ rozważamy ciąg iloczynów

$$P_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k).$$

Mówimy, że iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

jest zbieżny, jeśli ciąg P_n (iloczynów częściowych) jest zbieżny do liczby dodatniej P. Piszemy wtedy

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = P.$$

W przeciwnym wypadku, tzn. gdy ciąg P_n nie ma granicy lub jest zbieżny do zera, mówimy, że iloczyn nieskończony jest rozbieżny.

Przykład. Rozważmy iloczyn $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Mamy

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\xrightarrow{n}\frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Przykład. Iloczyny częściowe dla $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. mają postać

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=\frac{1}{n}\xrightarrow{n}0.$$

Zatem iloczyn $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ jest rozbieżny (do zera).

Twierdzenie 7.1. *Jeśli iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny, to* $a_n\xrightarrow{n}0$.

Dowód. Niech $0<P=\lim_n P_n$. Wtedy

$$1+a_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}\xrightarrow{n}1.$$

Stąd $a_n\xrightarrow{n}0$. $\square$

Definicja 7.2. *Mówimy, że iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny bezwzględnie, jeśli iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ *jest zbieżny.*

Lemat 7.3.

$$|\log(1+x)|\leqslant 2|x|\leqslant 4\log(1+|x|),\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

Dowód. Dla $0\leqslant t<1$ mamy

$$1+t\leqslant e^t\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n-1}}=1+\frac{t}{1-\frac{t}{2}}<1+2t. \tag{7.1}$$

Stąd

$$\log(1+t) < t < \log(1+2t), \quad 0 < t < 1. \tag{7.2}$$

Podstawiając $t = \dfrac{|x|}{2}$ i mnożąc przez 4 otrzymamy drugą nierówność. Z kolei dla $t = x$ uzyskamy pierwszą nierówność dla nieujemnych wartości x (nawet bez czynnika 2). Pozostaje udowodnić pierwszą nierówność dla $x = -y$, $0 \leqslant y < \dfrac{1}{2}$. Otrzymujemy

$$|\log(1+x)| = \log\frac{1}{1-y} = \log\left(1+\frac{y}{1-y}\right) \leqslant \log(1+2y) < 2y = 2|x|,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z (7.2) poprzez podstawienie $t = 2y$. □

Twierdzenie 7.4. *Iloczyn bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Dowód. Oznaczmy $\widetilde{P}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)$. Z Twierdzenia 6.1 wynika, że $|a_n| \xrightarrow{n} 0$. Zatem $|a_k| \leqslant \frac{1}{2}$ dla $k \geqslant k_0$. Wtedy dla $n > m \geqslant k_0$ mamy

$$\begin{aligned} |\log P_n - \log P_m| &= |\log[(1+a_{m+1})(1+a_{m+2})\dots(1+a_n)]| \\ &\leqslant |\log(1+a_{m+1})| + |\log(1+a_{m+2})| + \ldots + |\log(1+a_n)| \\ &\leqslant 4[\log(1+|a_{m+1}|) + \log(1+|a_{m+2}|) + \ldots + \log(1+|a_n|)] \\ &= 4[\log\widetilde{P}_n - \log\widetilde{P}_m], \end{aligned}$$

gdzie druga nierówność wynika z Lematu 6.3. Z założenia ciąg $\log\widetilde{P}_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem ciąg $\log P_n$ też spełnia warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny. Oznaczmy $g = \lim\log P_n$. Wtedy

$$P_n = e^{\log P_n} \xrightarrow{n} e^g > 0.$$

□

Twierdzenie 7.5. *Dla* $a_n \geqslant 0$ *iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dowód. Załóżmy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny. Wtedy

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k).$$

Stąd wynika zbieżność szeregu.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wtedy dla pewnego wskaźnika n_0 mamy

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k < \frac{1}{2}.$$

Z nierówności Bernoulli'ego (zadanie 3, lista 1) otrzymujemy

$$(1-a_{n_0+1})(1-a_{n_0+2})\ldots(1-a_n) \geqslant 1 - a_{n_0+1} - a_{n_0+2} - \ldots - a_n > \frac{1}{2}.$$

Zatem dla $n > n_0$ mamy

$$Q_n := \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = \prod_{k=1}^{n_0}(1-a_k) \prod_{k=n_0+1}^{n}(1-a_k) \geqslant \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n_0}(1-a_k).$$

Ciąg Q_n jest malejący i ograniczony od dołu przez liczbę dodatnią. Zatem iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ jest zbieżny. Zauważmy, że $P_nQ_n \leqslant 1$, czyli $P_n \leqslant Q_n^{-1}$. Rosnący ciąg P_n jest więc ograniczony od góry, skąd wynika jego zbieżność. □

Wniosek 7.6. *Dla* $0 \leqslant a_n < 1$ *iloczyn iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dowód. Implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Twierdzeń 7.4 i 7.5 zastosowanych do ciągu $-a_n$. Załóżmy, że iloczyn jest zbieżny. Wtedy zbieżny jest też iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{a_n}{1-a_n}\right).$$

Z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1-a_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

Następne twierdzenie przypomina kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, ale potrzebne jest dodatkowe założenie.

Wniosek 7.7. *Załóżmy, że* $1 > a_n \searrow 0$. *Iloczyn*

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1 + (-1)^n a_n]$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Dowód. Ponieważ $a_n \to 0$, wystarczy badać zbieżność ciągu poniżej

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}[1 + (-1)^k a_k] &= \prod_{k=1}^{n}(1 - a_{2k-1})(1 + a_{2k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n}[1 - (a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k-1}a_{2k})]\end{aligned}$$

Z Wniosku 7.6 zbieżność iloczynu

$$\prod_{k=1}^{\infty}[1 + (-1)^k a_k]$$

jest równoważna zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k-1}a_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty}[(a_{2k-1} - a_{2k})(1 + a_{2k}) + a_{2k}^2].$$

Zbieżność ostatniego szeregu jest równoważna zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2.$$

Z monotoniczności ciągu a_n ostatni warunek jest równoważny zbieżności szeregu $\sum a_k^2$. □

7.1 Liczby pierwsze

Wiadomo, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony. Pokażemy, że liczb pierwszych jest na tyle dużo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$, jest rozbieżny, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą, Rozważmy iloczyn $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$. Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymamy

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots\right).$$

Po wymnożeniu sum dostaniemy sumę odwrotności wszystkich liczb naturalnych mających w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$. W szczególności w sumie pojawią się odwrotności wszystkich liczb od 1 do n, bo $p_n > n$. To oznacza, że

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Stąd iloczyn

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$$

jest rozbieżny do nieskończoności, więc iloczyn

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

jest rozbieżny do zera. Z Wniosku 7.6 otrzymujemy rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$.

Dla liczby $\alpha > 1$ rozważmy iloczyn $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}$. Otrzymujemy

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_k^{\alpha}}+\frac{1}{p_k^{2\alpha}}+\dots\right).$$

Po wymnożeniu sum dostaniemy sumę potęg rzędu α odwrotności wszystkich liczb naturalnych mających w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$. W szczególności

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}.$$

To oznacza, że iloczyn $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)^{-1}$ jest zbieżny. Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tożsamość Eulera

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha>1.$$

8 Ułamki łańcuchowe

Wykonamy dzielenie z resztą liczb 75 i 23.

$$\frac{75}{23}=3+\frac{6}{23}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{6}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}.$$

Będziemy stosować zapis

$$\frac{75}{23}=3+\frac{1\,|}{|\,3}+\frac{1\,|}{|\,1}+\frac{1\,|}{|\,5}.$$

Ogólnie, niech n_0 i n_1 będą liczbami naturalnymi bez wspólnych dzielników. Wykonujemy dzielenie z resztą.

$$n_0=q_1n_1+n_2, \qquad \text{gdzie } 0<n_2<n_1.$$

Wtedy

$$\frac{n_0}{n_1}=q_1+\frac{n_2}{n_1}=q_1+\cfrac{1}{\cfrac{n_1}{n_2}}.$$

Liczby n_1 i n_2 nie mają wspólnych dzielników. Tę sama czynność wykonujemy dla liczb n_1 i n_2.

$$\frac{n_0}{n_1}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{n_3}{n_2}}, \qquad 0<n_3<n_2.$$

Powtarzamy tę czynność dopóki $n_k=1$. Wtedy $q_k=\dfrac{n_{k-1}}{n_k}$ oraz

$$\frac{n_0}{n_1}=q_1+\frac{1\,|}{|\,q_2}+\frac{1\,|}{|\,q_3}+\ldots+\frac{1\,|}{|\,q_k}. \tag{8.1}$$

Wyrażenie postaci (8.1) nazywamy skończonym ***ułamkiem łańcuchowym***. Z rozumowania wynika, że każda liczba wymierna ma przedstawienie w postaci skończonego ułamka łańcuchowego.

Przykład.

$$1+\sqrt{2} = 2 + (\sqrt{2}-1) = 2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$
$$= 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

To oznacza, że w pewnym sensie liczba $1+\sqrt{2}$ ma nieskończone przedstawienie w postaci

$$1+\sqrt{2} = 2 + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{1\,|}{|\,2} + \dots.$$

Ogólnie rozważmy dodatnią liczbę niewymierną x_0. Wtedy

$$x_0 = a_0 + r_0, \quad \text{gdzie } a_0 = [x_0],\ r_0 = \{x_0\}.$$

Wtedy $0 < r_0 < 1$, czyli $x_1 := \dfrac{1}{r_0} > 1$ oraz

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Podobne czynności wykonujemy dla liczby x_1. Wtedy

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad a_1 = [x_1],\ x_2 > 1.$$

Otrzymujemy

$$x_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}.$$

Postępując tak dalej otrzymamy

$$x_0 = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \frac{1\,|}{|\,x_n}, \tag{8.2}$$

gdzie

$$x_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{x_k}, \quad x_k > 1.$$

W pewnym sensie otrzymujemy równość

$$x_0 = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_n} + \ldots . \tag{8.3}$$

Naszym celem jest nadanie sensu wyrażeniu po prawej stronie wzoru, gdzie a_0 jest nieujemną liczbą całkowitą, a liczby a_n są naturalne dla $n \geqslant 1$. Rozważmy wyrażenia

$$R_n = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \frac{1\,|}{|\,a_n}.$$

Liczby R_k są wymierne. Nazywamy je reduktami ułamka łańcuchowego (8.3). Pokażemy, że $R_k \xrightarrow{k} x_0$, co pozwoli uzasadnić wzór (8.3).

Przechodzimy do analizy wielkości R_n. Wyrażenia R_n są funkcjami wymiernymi zależnymi od liczb $a_0, a_1, \ldots a_n$. R_n są dobrze określone również, gdy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi. natomiast a_0 jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

Określmy rekurencyjnie dwa ciągi liczb P_n i Q_n zależnych od ciągu liczb $\{a_n\}_{k=0}^{\infty}$ wzorami

$$\begin{aligned} P_0 &= a_0, & Q_0 &= 1, \\ P_1 &= a_0 a_1 + 1, & Q_1 &= a_1, \\ P_n &= a_n P_{n-1} + P_{n-2}, & Q_n &= a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{aligned}$$

Lemat 8.1. $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

Dowód. Wzór jest spełniony dla $n = 0$ i dla $n = 1$, bo

$$R_0 = \frac{a_0}{1}, \qquad R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Wzór jest prawdziwy również dla $n = 2$:

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_2 P_1 + P_0}{a_2 Q_1 + Q_0} = \frac{(a_0 a_1 + 1)a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}$$
$$= a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = R_2.$$

Załóżmy, że wzór jest spełniony dla liczby $n \geqslant 2$ i dowolnego wyboru liczb a_k. Wtedy

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_n P_{n-1} + P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Przy zamianie liczby a_n na $\widetilde{a}_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ otrzymamy nowy ciąg reduktów $\widetilde{R}_k$ przy czym $\widetilde{R}_k = R_k$ dla $k \leqslant n-1$ oraz $\widetilde{R}_n = R_{n+1}$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy wtedy

$$R_{n+1} = \widetilde{R}_n = \frac{\widetilde{P}_n}{\widetilde{Q}_n} = \frac{\widetilde{a}_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\widetilde{a}_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) P_{n-1} + P_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$
$$= \frac{[a_n P_{n-1} + P_{n-2}]a_{n+1} + P_{n-1}}{[a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}]a_{n+1} + Q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} P_n + P_{n-1}}{a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

□

Lemat 8.2.

$$\begin{aligned}\Delta_n &:= \begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{vmatrix} = (-1)^n, \quad k \geqslant 1, \\ R_{n-1} - R_n &= \frac{(-1)^n}{Q_{n-1} Q_n}.\end{aligned}$$

Dowód. Mamy

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 \\ Q_0 & Q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_0 a_1 + 1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = -1.$$

Dalej dla $n \geqslant 2$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{n-1} & a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{n-1} & a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix} = -\Delta_{n-1}.$$

Stąd $\Delta_n = (-1)^{n-1}\Delta_1 = (-1)^n$. Dalej

$$R_{n-1} - R_n = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\Delta_n}{Q_{n-1}Q_n}.$$

$\square$

Uwaga 8.3. Z określenia ciągów P_n i Q_n, dla naturalnych wartości liczb a_n liczby P_n i Q_n są naturalne. Z lematu 8.2 wynika, że liczby P_n i Q_n nie mają wspólnego dzielnika, czyli ułamek $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ jest nieskracalny.

Twierdzenie 8.4. *Dla dodatniej liczby niewymiernej x_0 ciąg reduktów R_n jest zbieżny do x_0. Co więcej ciąg R_{2n} jest rosnący, ciąg R_{2n+1} jest malejący oraz*

$$|R_{n+1} - x_0| < |R_n - x_0|.$$

Dowód. Z (8.2) otrzymujemy

$$x_0 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|x_{n+1}}.$$

Niech $\widetilde{R}_{n+1}$ oznacza redukt rzędu $n+1$, gdzie liczba a_{n+1} została zastąpiona liczbą x_{n+1}. Wtedy

$$x_0 = \frac{\widetilde{P}_{n+1}}{\widetilde{Q}_{n+1}} = \frac{x_{n+1}P_n + P_{n-1}}{x_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x_0 - R_n &= \frac{x_{n+1}P_n + P_{n-1}}{x_{n+1}Q_n + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \\ &= \frac{\Delta_n}{(x_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n} = \frac{(-1)^n}{(x_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ponieważ $a_{n+1} = [x_{n+1}]$, to $x_{n+1} < a_{n+1} + 1$. Otrzymujemy więc

$$|R_n - x_0| = \frac{1}{(x_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n} > \frac{1}{[(a_{n+1}+1)Q_n + Q_{n-1}]Q_n} = \frac{1}{(Q_n + Q_{n+1})Q_n}. \quad (8.5)$$

Z ostatniej równości w (8.4) zastosowanej do $n+1$ i z faktu, że $x_{n+2} > 1$ dostajemy

$$|R_{n+1} - x_0| = \frac{1}{(x_{n+2}Q_{n+1} + Q_n)Q_{n+1}} < \frac{1}{(Q_n + Q_{n+1})Q_n}. \quad (8.6)$$

Zestawiając (8.5) i (8.6) (oraz z (8.6) dla $n := n-1$) otrzymujemy

$$|R_{n+1} - x_0| < |R_n - x_0| < \frac{1}{(Q_{n-1} + Q_n)Q_{n-1}}. \quad (8.7)$$

Z określenia ciągu Q_n wynika, że $Q_n \geqslant Q_{n-1} + Q_{n-2} \geqslant Q_{n-1} + 1$ dla $n \geqslant 2$. Zatem $Q_n \geqslant n$. To oznacza, że $R_n \xrightarrow{n} x_0$. Z (8.4) wynika, że ciąg R_{2n} jest rosnący a ciąg R_{2n+1} malejący. □

Uwaga 8.5. Z Twierdzenia 8.4 wnioskujemy, że liczba x_0 leży pomiędzy R_n i R_{n-1}. Zatem z lematu 8.2 wynika, że

$$|x_0 - R_{n-1}| < |R_{n-1} - R_n| = \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Zatem

$$|x_0 - R_n| < \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}. \quad (8.8)$$

Przykład. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nazywana jest ***złotą***. Pojawia się przy złotym podziale odcinka oraz występuje we wzorze na wyrazy ciągu Fibonacci'ego. Mamy

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Zatem

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \dots .$$

Przeanalizujemy zagadnienie odwrotne. Niech a_0 będzie nieujemną liczbą całkowitą i $a_n,\ n \geqslant 1$ ciągiem liczb naturalnych. Używając metod użytych w dowodzie ostatniego twierdzenia możemy wywnioskować, że liczby R_k określone wzorem

$$R_k = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{k-1}} + \frac{1\,|}{|\,a_k}$$

spełniają

$$|R_m - R_n| < \frac{1}{n(n+1)}, \qquad m > n,$$

ponieważ liczba R_m leży pomiędzy R_n i R_{n+1} *. To oznacza, że ciąg R_n jest zbieżny, bo spełnia warunek Cauchy'ego. Oznaczmy

$$x_0 = \lim_k R_k.$$

Chcemy pokazać, że liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ powstają z rozwinięcia liczby x_0 w ułamek łańcuchowy.

Z argumentacji użytej wyżej wynika, że dla dowolnej liczby n ciągi

$$R_k^{(n)} = a_n + \frac{1\,|}{|\,a_{n+1}} + \frac{1\,|}{|\,a_{n+2}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{n+k-1}} + \frac{1\,|}{|\,a_{n+k}}$$

są zbieżne. Oznaczmy

$$x_n = \lim_k R_k^{(n)}.$$

Ze związku

$$R_k^{(n)} = a_n + \frac{1}{R_{k-1}^{(n+1)}}$$

wynika

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad n \geqslant 0. \tag{8.9}$$

Stąd $x_{n+1} > 0$, czyli $x_n > a_n \geqslant 1$ dla $n \geqslant 1$. Z (8.9) otrzymujemy zatem $a_n = [x_n]$, czyli liczby a_n pochodzą z rozwinięcia liczby x_0 w ułamek łańcuchowy.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że rozwinięcie liczby dodatniej x_0 w ułamek łańcuchowy jest jednoznaczne. W szczególności nieskończone ułamki łańcuchowe reprezentują liczby niewymierne.

---

*Można zastosować rozumowanie z dowodu Twierdzenia 8.4 dla $x_0 := R_m$ i zauważyć, że redukty rzędu $n < m$ dla x_0 są równe R_n.

Twierdzenie 8.6 (prawo najlepszego przybliżenia)**.** *Załóżmy, że dla dodatniej liczby niewymiernej x_0 i liczb naturalnych r i s mamy*

$$\left|x_0 - \frac{r}{s}\right| < |x_0 - R_n|.$$

Wtedy $s > Q_n$. Czyli spośród liczb wymiernych o mianownikach nie przekraczających Q_n redukt $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ stanowi najlepsze przybliżenie liczby x_0.

Dowód. Z Twierdzenia 8.4 mamy

$$\left|x_0 - \frac{r}{s}\right| < |x_0 - R_n| < |x_0 - R_{n-1}|.$$

Z pierwszej części tezy Twierdzenia 8.4 wynika zatem, że liczba $\frac{r}{s}$ leży pomiędzy liczbami R_{n-1} i R_n. Otrzymujemy więc

$$0 < \left|\frac{r}{s} - R_{n-1}\right| < |R_n - R_{n-1}| = \frac{|\Delta_n|}{Q_{n-1}Q_n} = \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Tzn.

$$0 < \frac{|rQ_{n-1} - sP_{n-1}|}{Q_{n-1}s} < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Stąd wynika, że $s > Q_n$. □

8.1 Okresowe ułamki łańcuchowe

Przypuśćmy, że rozwinięcie w ułamek łańcuchowy liczby x

$$x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_n} + \ldots$$

jest okresowe, tzn.

$$b_{n+k} = b_n, \quad \text{dla } n \geqslant n_0.$$

Rozważmy część ułamka

$$y = b_{n_0} + \frac{1|}{|b_{n_0+1}} + \ldots + \frac{1|}{|b_{n_0+k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|b_{n_0+k}} + \ldots .$$

Wprowadźmy oznaczenia $a_n = b_{n_0+n}$. Wtedy $a_{n+k} = a_n$ oraz

$$y = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{k-1}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_k} + \ldots .$$

Z okresowości otrzymujemy więc

$$y = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{k-1}} + \frac{1\,|}{|\,y}.$$

Niech $\widetilde{R}_k$ oznacza k-ty redukt, gdzie liczba a_k została zastąpiona przez y. Wtedy

$$y = \widetilde{R}_k = \frac{\widetilde{P}_k}{\widetilde{Q}_k} = \frac{yP_{k-1} + P_{k-2}}{yQ_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Liczba y jest dodatnim pierwiastkiem trójmianu kwadratowego

$$Q_{k-1}y^2 + (Q_{k-2} - P_{k-1})y - P_{k-2} = 0,$$

z naturalnymi współczynnikami. Wyróżnik trójmianu jest równy

$$\begin{aligned} w &= (Q_{k-2} - P_{k-1})^2 + 4Q_{k-1}P_{k-2} \\ &= (Q_{k-2} + P_{k-1})^2 + 4\Delta_{k-1} = (Q_{k-2} + P_{k-1})^2 - 4(-1)^k. \end{aligned}$$

Zatem

$$y = \frac{P_{k-1} - Q_{k-2}}{2Q_{k-1}} + \frac{1}{2Q_{k-1}}\sqrt{w}.$$

Liczby x i y są związane wzorem

$$x = b_0 + \frac{1\,|}{|\,b_1} + \frac{1\,|}{|\,b_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,b_{n_0-1}} + \frac{1\,|}{|\,y}.$$

W związku z tym

$$x = u + v\sqrt{w},$$

dla pewnych wymiernych liczb u i v. To oznacza, że liczba x jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego

$$x^2 - 2ux + (u^2 - v^2w) = 0.$$

Stąd x jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

Implikacja odwrotna też jest prawdziwa. Poniższy dowód pochodzi od Lagrange'a. Załóżmy, że liczba dodatnia x jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego, tzn.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dla pewnych liczb całkowitych a, b i c, przy czym $a, c \neq 0$. Rozważmy macierz

$$M = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

i wektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\langle Mv, v\rangle = av_1^2 + bv_1v_2 + cv_2^2.$$

Dla wektora $u = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ otrzymujemy

$$\langle Mu, u\rangle = ax^2 + bx + c = 0.$$

Wyznacznik macierzy M jest równy $ac - \frac{1}{4}b^2$. Niech a_k oznaczają liczby z rozwinięcia $x_0 := x$ w ułamek łańcuchowy. Ze wzoru (8.2) otrzymujemy

$$x = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \frac{1\,|}{|\,x_n} = \frac{x_nP_{n-1} + P_{n-2}}{x_nQ_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Podstawiamy to wyrażenie do trójmianu kwadratowego i po przemnożeniu przez $(x_nQ_{n-1} + Q_{n-2})^2$

$$\begin{aligned} a(x_nP_{n-1} + P_{n-2})^2 + b(x_nP_{n-1} + P_{n-2})(x_nQ_{n-1} + Q_{n-2}) \\ + c(x_nQ_{n-1} + Q_{n-2})^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Rozważmy macierz

$$U = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{bmatrix}$$

Dla wektora $v = \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ mamy

$$Uv = \begin{pmatrix} x_nP_{n-1} + P_{n-2} \\ x_nQ_{n-1} + Q_{n-2} \end{pmatrix},$$

zatem równanie (8.10) ma postać

$$\langle MUv, Uv\rangle = 0.$$

Zatem

$$\langle U^t MUv, v\rangle = 0.$$

Niech

$$U^t MU = \begin{pmatrix} A_n & B_n/2 \\ B_n/2 & C_n \end{pmatrix}.$$

Wiemy, że x_n jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego

$$A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_n &= aP_{n-1}^2 + bP_{n-1}Q_{n-1} + cQ_{n-1}^2, \\ B_n &= 2aP_{n-2}P_{n-1} + b[P_{n-1}Q_{n-2} + P_{n-2}Q_{n-1}] + 2cQ_{n-2}Q_{n-1}, \\ C_n &= aP_{n-2}^2 + bP_{n-2}Q_{n-2} + cQ_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Liczby A_n, B_n i C_n są całkowite oraz $A_n = C_{n+1}$. Dalej

$$A_n C_n - \frac{1}{4}B_n^2 = \det(U^t MU) = \det M = ac - \frac{1}{4}b^2.$$

Z (8.8)[†] wynika, że

$$|xQ_{n-1} - P_{n-1}| < \frac{1}{Q_n} < \frac{1}{Q_{n-1}}.$$

Zatem

$$P_{n-1} = xQ_{n-1} + \frac{\delta}{Q_{n-1}},$$

dla pewnej liczby δ spełniającej $|\delta| < 1$. Zatem

$$\begin{aligned} A_n &= a\left(xQ_{n-1} + \frac{\delta}{Q_{n-1}}\right)^2 + b\left(xQ_{n-1} + \frac{\delta}{Q_{n-1}}\right)Q_{n-1} + cQ_{n-1}^2 \\ &= (ax^2 + bx + c)Q_{n-1}^2 + (2ax + b)\delta + \frac{a\delta^2}{Q_{n-1}^2} = (2ax + b)\delta + \frac{a\delta^2}{Q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

[†] $|x - R_{n-1}| < \dfrac{1}{Q_n Q_{n-1}}$

Dalej

$$|A_n| = \left|(2ax+b)\delta + \frac{a\delta^2}{Q_{n-1}^2}\right| \leqslant |2ax+b| + |a|.$$

To oznacza, że jest tylko skończenie wiele możliwości na wartość A_n. Ponadto

$$|C_n| = |A_{n-1}|, \qquad |B_n| = \sqrt{b^2 - 4ac + 4A_nC_n},$$

więc jest tylko skończenie wiele możliwych trójek (A_n, B_n, C_n). W związku z tym jakaś trójka (A, B, C) wystąpi trzykrotnie w ciągu (A_n, B_n, C_n). Wtedy jeden z pierwiastków trójmianu kwadratowego

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

pojawi się dwukrotnie w ciągu x_n[‡]. Zatem dla pewnych liczb naturalnych n_0 i k otrzymamy $x_{n_0} = x_{n_0+k}$, czyli

$$x_{n_0} = a_{n_0} + \frac{1\,|}{|\,a_{n_0+1}} + \frac{1\,|}{|\,a_{n_0+2}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_{n_0+k-1}} + \frac{1\,|}{|\,x_{n_0}}$$

Wtedy $a_n = a_{n+k}$ dla $n \geqslant n_0$, czyli ułamek łańcuchowy liczby x_{n_0}, jak również liczby x jest okresowy.

9 Całka Riemanna

9.1 Sumy dolne i górne

Definicja 9.1. *Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ nazywamy skończoną rodzinę punktów $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Przyjmujemy oznaczenie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.*

Dla ograniczonej funkcji $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ określamy liczby m_i oraz M_i wzorami

$$m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x).$$

Definiujemy sumy dolne i górne[*] wzorami

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \quad U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

[‡]Jeśli (A, B, C) wystąpi dla n_1, n_2 i n_3, to liczby x_{n_1}, x_{n_2} i x_{n_3} nie mogą być różne.

[*]Te pojęcia pochodzą od Jeana Darboux

Uwaga. Jeśli $f \geqslant 0$, to liczba $L(\mathcal{P}, f)$ przybliża od dołu pole obszaru pod wykresem funkcji, natomiast liczba $U(\mathcal{P}, f)$ przybliża to pole od góry.

Przypuśćmy, że $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Wtedy

$$L(\mathcal{P}, f) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m(b-a),$$
$$U(\mathcal{P}, f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a).$$

Określamy całki dolną i górną wzorami

$$\underline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f), \qquad \overline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f).$$

Definicja 9.2. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, jeśli całka dolna jest równa całce górnej. Wtedy wspólną wartość oznaczamy symbolem $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.*

Uwaga. Pokażemy wkrótce, że funkcja ciągłe są całkowalne. Istnieją jednak funkcje niecałkowalne.

Przykłady.

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dla przedziału $[0, 1]$ mamy $L(\mathcal{P}, f) = 0$ oraz $U(\mathcal{P}, f) = 1$, bo w każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ znajdują się liczby wymierne i niewymierne. Zatem

$$\underline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx = 0, \qquad \overline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx = 1.$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Dla $\mathcal{P}_n = \{0, 1, 1 + \frac{1}{n}, 2\}$ mamy

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}_n, f) &= 1 + 1 \cdot \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n}, \\ U(\mathcal{P}_n, f) &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3. \end{aligned}$$

Zatem

$$\underline{\int_0^2} f(x)\,dx \geqslant 3, \qquad \overline{\int_0^2} f(x)\,dx \leqslant 3.$$

Pokażemy wkrótce, że

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

zatem

$$\underline{\int_0^2} f(x)\,dx = \overline{\int_0^2} f(x)\,dx = 3.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rozważamy przedział $[0, 1]$. Mamy $L(\mathcal{P}, f) = 0$. Ustalmy liczbę naturalną $N \geqslant 2$. Określimy specjalny podział $\mathcal{P}$. Każdy ułamek nieskracalny postaci $\frac{p}{q}$, dla $q < N$ otaczamy przedziałem o promieniu $\frac{1}{2N^3}$. Takich ułamków jest mniej niż N^2. Przedziałami podziału są wtedy $\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{2N^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2N^3}\right]$, gdzie $q < N$, oraz przedziały pomiędzy nimi. Liczby wymierne znajdujące się w przedziałach z drugiej grupy mają mianowniki niemniejsze niż N. Przedziały postaci $\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{2N^3} \frac{p}{q} + \frac{1}{2N^3}\right]$ są rozłączne. Rzeczywiście, rozważmy dwie różne liczby $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$, dla $q, q' < N$. Wtedy

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| = \frac{|pq' - p'q|}{qq'} \geqslant \frac{1}{qq'} \geqslant \frac{1}{N^2} > \frac{1}{N^3}.$$

Gdyby przedziały odpowiadające $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$ zachodziły na siebie, to

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2N^3} = \frac{1}{N^3}.$$

Niech A składa się z numerów i odpowiadającym przedziałom $\left[\frac{p}{q}-\frac{1}{2N^3}, \frac{p}{q}+\frac{1}{2N^3}\right]$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P},f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \sum_{i\in A} M_i\Delta x_i + \sum_{i\notin A} M_i\Delta x_i \\ &\leqslant \sum_{i\in A}\Delta x_i + \sum_{i\notin A}\frac{1}{N}\Delta x_i \leqslant N^2\cdot\frac{1}{N^3}+\frac{1}{N}=\frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Ponieważ N jest dowolną liczbą naturalną, to $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$.

Definicja 9.3. *Podział $\mathcal{P}'$ przedziału $[a,b]$ nazywamy rozdrobnieniem podziału $\mathcal{P}$, jeśli $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}'$. Dla podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ podział $\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ nazywamy wspólnym rozdrobnieniem $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.*

Twierdzenie 9.4. *Jeśli $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}'$, to $L(\mathcal{P},f)\leqslant L(\mathcal{P}',f)$ oraz $U(\mathcal{P},f)\geqslant U(\mathcal{P}',f)$, tzn. przy rozdrobnieniu sumy dolne się zwiększają a sumy górne zmniejszają.*

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $\mathcal{P}'=\mathcal{P}\cup\{x'\}$. Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{x_0,x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,x_n\}, \\ \mathcal{P}' &= \{x_0,x_1,\ldots,x_{i-1},x',x_i,\ldots,x_n\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\omega_1=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x'} f(x), \quad \omega_2=\inf_{x'\leqslant x\leqslant x_i} f(x).$$

Wtedy $\omega_1,\omega_2\geqslant m_i$ zatem

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}',f)-L(\mathcal{P},f) &= \omega_1(x'-x_{i-1})+\omega_2(x_i-x')-m_i\Delta x_i \\ &\geqslant m_i(x'-x_{i-1})+m_i(x_i-x')-m_i\Delta x_i=0. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy, że $U(\mathcal{P}',f)\leqslant U(\mathcal{P},f)$. □

Wniosek 9.5.

(i) Dla dwu podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ mamy $L(\mathcal{P}_1,f)\leqslant U(\mathcal{P}_2,f)$.

(ii) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Dowód. Mamy
$$L(\mathcal{P}_1, f) \leqslant L(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, f) \leqslant U(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, f) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f).$$
Biorąc kres górny względem $\mathcal{P}_1$ otrzymamy
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant U(\mathcal{P}_2, f).$$
Teraz bierzemy kres dolny względem $\mathcal{P}_2$ i otrzymujemy część (ii) wniosku. □

Twierdzenie 9.6. *Ograniczona funkcja $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć podział $\mathcal{P}$, dla którego*
$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon. \tag{9.1}$$
Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje $\mathcal{P}$ spełniający (9.1). Wtedy
$$L(\mathcal{P}, f) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant U(\mathcal{P}, f) < L(\mathcal{P}, f) + \varepsilon.$$
Czyli
$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx < \varepsilon.$$
Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, to
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$
($\Rightarrow$) Załóżmy, że
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx.$$
Dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją podziały $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ spełniające
$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f(x)\, dx &< L(\mathcal{P}_1, f) \leqslant L(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \\ &\leqslant U(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f) < \int_a^b f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Zatem
$$U(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, f) - L(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, f) < \varepsilon.$$
□

Uwaga 9.7. Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz
$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon,$$
to z nierówności
$$L(\mathcal{P}, f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P}, f)$$
wynika
$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant U(\mathcal{P}, f) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon.$$
Tzn. $L(\mathcal{P}, f)$ i $U(\mathcal{P}, f)$ przybliżają wartość całki $\int_a^b f(x)\,dx$ z dokładnością do ε od dołu i od góry, odpowiednio.

Przykłady.

(a) Rozważamy $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$. Niech
$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$
Wtedy
$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2, \\ U(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2. \end{aligned}$$
Zatem
$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n},$$
co oznacza, że funkcja x^2 jest całkowalna. Ile wynosi całka $\int_0^1 x^2\,dx$?

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ 2x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[0,1]$ mamy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \Delta x_i, \\ L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i & \\ \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1} + x_i}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}. & \end{aligned}$$

Czyli f nie jest całkowalna.

Wniosek 9.8. *Każda funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest całkowalna. Ponadto dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że dla każdego podziału $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, jeśli*

$$d(\mathcal{P}) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i < \delta,$$

to dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ mamy

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i - \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości można znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że jeśli $|x - x'| < \delta$, to $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem spełniającym $d(\mathcal{P}) < \delta$. Wtedy

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \tag{9.2}$$

Stąd otrzymujemy całkowalność funkcji f. Ponadto

$$L(\mathcal{P},f) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P},f),$$

oraz

$$L(\mathcal{P},f) \leqslant \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \leqslant U(\mathcal{P},f),$$

bo $m_i \leqslant f(t_i) \leqslant M_i$. Z nierówności (9.2) liczby $\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$ oraz $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ leżą w przedziale o długości mniejszej niż ε. □

Liczbę $d(\mathcal{P})$ nazywamy **średnicą** podziału $\mathcal{P}$. Wyrażenie

$$S(\mathcal{P},f) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

nosi nazwę **sumy całkowej**. Mamy następujące typy sum całkowych:

(a) $t_i = x_{i-1}$ - lewy koniec,

(b) $t_i = x_i$ - prawy koniec,

(c) $t_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ - środek przedziału,

(d) indywidualnie dobierane punkty t_i.

Wniosek 9.9. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$. Rozważmy ciąg podziałów $\mathcal{P}_n$ takich, że $d(\mathcal{P}_n) \xrightarrow[n]{} 0$ (np. $\mathcal{P}_n$ jest podziałem na n równych części). Wtedy*

$$S(\mathcal{P}_n,f) \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z poprzedniego wniosku istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\left| S(\mathcal{P},f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

dla $d(\mathcal{P}) < \delta$. Z założenia istnieje próg N taki, że jeśli $n > N$, to $d(\mathcal{P}_n) < \delta$. Wtedy dla $n > N$ mamy

$$\left| S(\mathcal{P}_n, f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

□

Przykłady.

1. Rozważmy $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. Dla podziału $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ przedziału $[0, 1]$ niech

   $$t_i = \sqrt{\frac{x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2}{3}}.$$

   Wtedy $x_{i-1} < t_i < x_i$. Dalej

   $$S(\mathcal{P}, x^2) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n (x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)\Delta x_i = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n (x_i^3 - x_{i-1}^3) = \frac{1}{3}.$$

   Stąd $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$, bo możemy przyjąć $d(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{n}$, biorąc podział na n równych części.

   Znając wartość całki możemy obliczyć granicę wyrażenia $\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^n k^2$. Mamy

   $$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \underset{n}{\longrightarrow} \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

   bo wyrażenie w środku jest sumą całkową typu prawy koniec dla funkcji $f(x) = x^2$ i dla podziału przedziału $[0, 1]$ na n równych części.

2. $$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Pokażemy, że funkcja f jest całkowalna. Rozważymy podział

   $$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{n^3 - n^2}{n^3}\right\}.$$

Niech $x, y \geqslant \frac{1}{n}$ oraz $|x-y| \leqslant \frac{1}{n^3}$. Wtedy

$$\left|\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{y}\right| = \frac{\left|\sin\frac{1}{\xi}\right|}{\xi^2}|x-y| \leqslant \frac{1}{\frac{1}{n^2}}\,\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n},$$

bo $\xi \geqslant \frac{1}{n}$. Zatem największa rozpiętość wartości funkcji na przedziałach podziału $\mathcal{P}$, które mają długość $\frac{1}{n^3}$, nie przekracza $\frac{1}{n}$. Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) &= (M_0 - m_0)\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n^3-n^2}(M_i - m_i)\frac{1}{n^3} \\ &\leqslant \frac{2}{n} + \frac{n^3 - n^2}{n}\,\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Zadanie. Znaleźć funkcję $f : [0,1] \xrightarrow[\text{na}]{1-1} [0,1]$, której wykres jest gęstym podzbiorem w $[0,1] \times [0,1]$.

Zapis $f \in \mathcal{R}$ oznacza, że f jest całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 9.10.

(i) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}$, to $f \pm g, cf \in \mathcal{R}$ oraz

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iii) Jeśli $f \in \mathcal{R}[a,b]$ oraz $a < c < b$, to $f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(iv) Jeśli $f \in \mathcal{R}$ oraz $|f(x)| \leqslant M$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Dowód. Dla liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć podziały $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$, dla których

$$U(\mathcal{P}_1, f) - L(\mathcal{P}_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(\mathcal{P}_2, g) - L(\mathcal{P}_2, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla podziału $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ mamy

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(\mathcal{P}, g) - L(\mathcal{P}, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

W rezultacie

$$[U(\mathcal{P}, f) + U(\mathcal{P}, g)] - [L(\mathcal{P}, f) + L(\mathcal{P}, g)] < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Dalej

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f+g) &= \sum_{i=1}^n M_i(f+g)\Delta x_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n M_i(g)\Delta x_i = U(\mathcal{P}, f) + U(\mathcal{P}, g). \end{aligned}$$

Podobnie

$$L(\mathcal{P}, f+g) \geqslant L(\mathcal{P}, f) + L(\mathcal{P}, g).$$

Reasumując otrzymujemy

$$L(\mathcal{P}, f) + L(\mathcal{P}, g) \leqslant L(\mathcal{P}, f+g) \leqslant U(\mathcal{P}, f+g) \leqslant U(\mathcal{P}, f) + U(\mathcal{P}, g). \tag{9.4}$$

W świetle (9.3) otrzymujemy

$$U(\mathcal{P}, f+g) - L(\mathcal{P}, f+g) < \varepsilon.$$

Stąd $f + g$ jest całkowalna. Wartość całki $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$ leży pomiędzy liczbami $L(\mathcal{P}, f+g)$ i $U(\mathcal{P}, f+g)$. Z (9.4) wartość ta leży w przedziale pomiędzy liczbami $L(\mathcal{P}, f) + L(\mathcal{P}, g)$ i $U(\mathcal{P}, f) + U(\mathcal{P}, g)$. Ale wielkość

$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$ też leży w tym przedziale. Z (9.3) długość tego przedziału jest mniejsza niż ε. To oznacza, że

$$\left| \int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Stąd otrzymujemy

$$\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Dla liczby $c \geqslant 0$ i podziału $\mathcal{P}$ mamy

$$m_i(cf) = cm_i(f), \qquad M_i(cf) = cM_i(f).$$

Zatem

$$L(\mathcal{P}, cf) = c\,L(\mathcal{P}, f), \quad U(\mathcal{P}, cf) = c\,U(\mathcal{P}, f).$$

Dalej

$$\begin{aligned} \underline{\int\limits_{a}^{b}} cf(x)\,dx &= \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, cf) = \sup_{\mathcal{P}} cL(\mathcal{P}, f) = c \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f) = c \underline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx, \\ \overline{\int\limits_a^{b}} cf(x)\,dx &= \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, cf) = \inf_{\mathcal{P}} cU(\mathcal{P}, f) = c \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f) = c \overline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

Stąd

$$\int\limits_a^b c\,f(x)\,dx = c \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dla $c < 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_i(cf) &= \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} cf(x) = c \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = c\,M_i(f), \\ M_i(cf) &= \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} cf(x) = c \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = c\,m_i(f). \end{aligned}$$

Stąd

$$L(\mathcal{P}, cf) = c\,U(\mathcal{P}, f), \qquad U(\mathcal{P}, cf) = c\,L(\mathcal{P}, f).$$

Dalej

$$\int_{\underline{a}}^{b} cf(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, cf) = \sup_{\mathcal{P}} c\,U(\mathcal{P}, f) = c\,\inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f) = c\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\int_{b}^{\overline{b}} cf(x)\,dx = c\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Zatem f jest całkowalna oraz

$$\int_{b}^{a} cf(x)\,dx = c\int_{b}^{a} f(x)\,dx.$$

Dalej

$$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} [-g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

Część (ii) twierdzenia jest oczywista, bo

$$m_i(f) \leqslant m_i(g)$$

dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ i dowolnego odcinka podziału. Zatem

$$L(\mathcal{P}, f) \leqslant L(\mathcal{P}, g)$$

oraz

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,dx = \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

Przechodzimy do dowodu (iii). Dla liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć podział $\mathcal{P}_0$ przedziału $[a, b]$ spełniający $U(\mathcal{P}_0, f) - L(\mathcal{P}_0, f) < \varepsilon$. Wtedy dla podziału $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \{c\}$ mamy

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon. \tag{9.5}$$

Podział $\mathcal{P}$ możemy zapisać jako sumą podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ przedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$, odpowiednio. Ponadto

$$U_{[a,b]}(\mathcal{P}, f) = U_{[a,c]}(\mathcal{P}_1, f) + U_{[c,b]}(\mathcal{P}_2, f), \tag{9.6}$$
$$L_{[a,b]}(\mathcal{P}, f) = L_{[a,c]}(\mathcal{P}_1, f) + L_{[c,b]}(\mathcal{P}_2, f). \tag{9.7}$$

Na podstawie (9.5) otrzymujemy więc

$$U_{[a,c]}(\mathcal{P}_1, f) - L_{[a,c]}(\mathcal{P}_1, f) < \varepsilon,$$
$$U_{[c,b]}(\mathcal{P}_2, f) - L_{[c,b]}(\mathcal{P}_2, f) < \varepsilon.$$

Stąd funkcja f jest całkowalna w przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Wartość $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ leży pomiędzy liczbami $L_{[a,b]}(\mathcal{P}, f)$ i $U_{[a,b]}(\mathcal{P}, f)$. Na podstawie (9.6) i (9.7) wartość $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ też leży pomiędzy tymi liczbami. Wtedy z (9.5) otrzymujemy

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_c^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Załóżmy, że $|f(x)| \leqslant M$. Wtedy $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Zatem

$$-M(b-a) = \int\limits_a^b (-M)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx = M(b-a).$$

□

Uwaga 9.11.

(a) $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$, bo dla $\mathcal{P} = \{a, b\}$ mamy

$$L(\mathcal{P}, c) = c(b-a) = U(\mathcal{P}, c).$$

(b) Przyjmujemy, że $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ oraz dla $b < a$ określamy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Wtedy wzór w Twierdzeniu 9.10(iii) jest prawdziwy niezależnie od konfiguracji liczb a, b i c.

Twierdzenie 9.12. *Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Niech $h(y)$ będzie funkcją ciągłą na $[m,M]$. Wtedy funkcja złożona $h(f(x))$ jest całkowalna na $[a,b]$.*

Dowód. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|y_1 - y_2| < \delta$, to $|h(y_1) - h(y_2)| < \varepsilon$. Z całkowalności funkcji f można znaleźć podział $\mathcal{P}$ taki, że

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta\varepsilon.$$

Jeśli liczba $M_i - m_i$ jest duża, to liczba Δx_i musi być mała. Niech

$$A = \{i \,:\, M_i - m_i < \delta\}, \qquad B = \{i \,:\, M_i - m_i \geqslant \delta\}.$$

Dla $i \in A$ maksymalna rozpiętość wartości funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ jest mniejsza od δ. Zatem maksymalna rozpiętość wartości funkcji $h(f(x))$ na tym przedziale jest mniejsza od ε. Oznaczmy

$$M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} h(f(x)), \quad m_i^* = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} h(f(x)), \quad K = \max_{m \leqslant y \leqslant M} |h(y)|.$$

Maksymalna rozpiętość wartości funkcji $h(y)$ nie przekracza zatem $2K$. To samo dotyczy więc rozpiętości wartości funkcji $h(f(x))$ na każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ dla $i \in B$, tzn.

$$0 \leqslant M_i^* - m_i^* \leqslant 2K, \quad i \in B.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, h \circ f) - L(\mathcal{P}, h \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\ &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2K \sum_{i \in B} \Delta x_i \\ &\leqslant \varepsilon(b-a) + \frac{2K}{\delta} \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \varepsilon(b-a) + \frac{2K}{\delta} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\leqslant \varepsilon(b-a) + \frac{2K}{\delta}\delta\varepsilon = \varepsilon(b-a+2K). \end{aligned}$$

□

Wniosek 9.13. *Jeśli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to również funkcje $|f|$, f^2 oraz fg są całkowalne. Ponadto*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dowód. Dla funkcji $|f|$ i f^2 stosujemy poprzednie twierdzenie z $h(y) = |y|$ i $h(y) = y^2$. Dalej

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

Stąd fg jest całkowalna. Mamy $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Całkując nierówność otrzymamy

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Uwaga 9.14. Metody szacowania wartości całek.

1. Obliczenie wartości całki.

2. $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$, jeśli $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

3. Znaleźć funkcje $g(x)$ i $h(x)$ takie, że $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. Wtedy

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b h(x)\,dx.$$

3. $L(\mathcal{P}, f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P}, f)$.

Przykład. Stosując metodę 2 otrzymamy

$$2 \leqslant \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqslant 2\sqrt{17}.$$

Lepszy wynik uzyskamy rozdzielając całkę

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Wtedy

$$1+\sqrt{2} \leqslant \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqslant \sqrt{2}+\sqrt{17}.$$

9.2 Całka jako granica sum całkowych

Mówimy, że sumy całkowe

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{n=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i, \;\; x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i,$$

gdzie $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jest podziałem przedziału $[a, b]$ są zbieżne do liczby A, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że z warunku $d(\mathcal{P}) < \delta$ wynika

$$S(\mathcal{P}, f) - A| < \varepsilon.$$

To oznacza, że dla drobnych podziałów $\mathcal{P}$ sumy $S(\mathcal{P}, f)$ leżą blisko liczby A, niezależnie od wyboru punktów pośrednich t_i. Stosujemy wtedy zapis

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}, f) = A.$$

Z Wniosku 9.9 wynika, że dla funkcji $f(x)$ ciągłej na $[a, b]$ mamy

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}, f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 9.15.

(a) Jeśli istnieje granica $\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}, f)$, *to funkcja* f *jest całkowalna na* $[a, b]$ *oraz*

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}, f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) Jeśli funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$, to sumy całkowe są zbieżne.

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $d(\mathcal{P}) < \delta$, to

$$|S(\mathcal{P}, f) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Równoważnie

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nierówność jest spełniona dla dowolnego wyboru punktów t_i, $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$. Zatem

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i} f(t_i)\,\Delta x_i \\ &= \inf_{t_1, t_2, \ldots, t_n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \inf_{t_1, t_2, \ldots, t_n} S(\mathcal{P}, f) \geqslant A - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$U(\mathcal{P}, f) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reasumując, otrzymaliśmy

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(\mathcal{P}, f) \leqslant U(\mathcal{P}, f) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) \leqslant \varepsilon.,$$

czyli funkcja f jest całkowalna. Wiemy, że

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(\mathcal{P}, f) \leqslant\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P}, f) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - A \right| \leqslant \varepsilon.$$

Ponieważ liczba $\varepsilon > 0$ jest dowolna, to

$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

(b) Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia całkowalności istnieje podział $\mathcal{P}^*$, dla którego

$$U(\mathcal{P}^*, f) - L(\mathcal{P}^*, f) < \varepsilon.$$

Funkcja f jest ograniczona. Oznaczmy

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Niech N oznacza liczbę przedziałów podziału $\mathcal{P}^*$. Przyjmijmy $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4MN}$. Niech $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem spełniającym $d(\mathcal{P}) < \delta$. Pokażemy, że $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$. Część przedziałów podziału $\mathcal{P}$ zawiera wewnątrz punkty podziału $\mathcal{P}^*$. Niech $i \in B$ jeśli (x_{i-1}, x_i) zawiera punkty podziału $\mathcal{P}^*$ oraz $i \in A$ w przeciwnym wypadku. Zbiór B ma co najwyżej $N-1$ elementów. Mamy

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i \in A} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Dalej

$$\sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i \in B} 2M\delta \leqslant 2M\delta N = \frac{\varepsilon}{2},$$

bo

$$M_i - m_i \leqslant |M_i| + |m_i| \leqslant 2M.$$

Jeśli $i \in A$, to przedział $[x_{i-1}, x_i]$ jest zawarty w jakims przedziale $[x_{j-1}^*, x_j^*]$, bo (x_{i-1}, x_i) nie zawiera punktów z $\mathcal{P}^*$. Niech A_j oznacza zbiór tych liczb i, dla których $[x_{i-1}, x_i] \subset [x_{j-1}^*, x_j^*]$. Wtedy

$$M_i - m_i \leqslant M_j^* - m_j^*, \text{ gdzie } M_j^* = \sup_{x_{j-1}^* \leqslant t \leqslant x_j^*} f(t), \ m_j^* = \inf_{x_{j-1}^* \leqslant t \leqslant x_j^*} f(t).$$

Suma długości wszystkich przedziałów podziału $\mathcal{P}$ zawartych w $[x_{j-1}^*, x_j^*]$ nie przekracza Δx_j^*. Zatem

$$\sum_{i \in A} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \in A_j} (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \in A_j} (M_j^* - m_j^*)\Delta x_i$$
$$= \sum_{j=1}^{N} (M_j^* - m_j^*) \sum_{i \in A_j} \Delta x_i \leqslant \sum_{j=1}^{N} (M_j^* - m_j^*)\Delta x_i^* = U(\mathcal{P}^*, f) - L(\mathcal{P}^*, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reasumując dla $d(\mathcal{P}) < \delta$ zachodzi nierówność

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f(< \varepsilon.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &\leqslant S(\mathcal{P}, f) \leqslant U(\mathcal{P}, f), \\ L(\mathcal{P}, f) &\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P}, f), \end{aligned}$$

to

$$\left| S(\mathcal{P}, f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

co oznacza, że

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}, f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

9.3 Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego

Twierdzenie 9.16. *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$, to funkcja $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ jest ciągła na $[a, b]$. Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0, to $F(x)$ jest różniczkowalna w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$ dla $a < x_0 < b$ i $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$.*

Dowód. Załóżmy, że $|f(x)| \leqslant M$, czyli $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Dla $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$ mamy

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leqslant M(x_2 - x_1)$$

Jeśli f jest ciągła w $a \leqslant x_0 < b$, to dla liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że dla $x_0 < t < x_0 + \delta$ mamy $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Załóżmy, że

$0 < x - x_0 < \delta$. Wtedy

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt\right] - f(x_0)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right| = \frac{1}{x-x_0}\left|\int\limits_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]\,dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt$$

Ponieważ $x_0 \leqslant t \leqslant x$, to $x_0 \leqslant t < x_0 + \delta$. Wtedy $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkcja podcałkowa jest więc mniejsza niż ε. Stąd

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

To oznacza, że
$$F'_+(x_0) = f(x_0).$$

Dla pochodnej lewostronnej przeprowadzamy podobne rozumowanie przyjmując $a < x_0 \leqslant b$. Wtedy dla $x_0 - \delta < x < x_0$ mamy

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{F(x_0)-F(x)}{x_0-x} - f(x_0)\right|$$
$$= \frac{1}{x_0-x}\left|\int\limits_x^{x_0} [f(t)-f(x_0)]\,dt\right| < \varepsilon.$$

Czyli $F'_-(x_0) = f(x_0)$. □

Wniosek 9.17. *Dla funkcji $f(x)$ ciągłej na przedziale $[a,b]$ istnieje funkcja $F(x)$ taka, że $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$. Funkcję $F(x)$ nazywamy* ***funkcją pierwotną*** *do funkcji $f(x)$.*

Twierdzenie 9.18 (Zasadnicze twierdzenie rric)**.** *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $F(x)$ jest funkcją pierwotną do $f(x)$, to*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Dowód. Dla liczby $\varepsilon > 0$ bierzemy podział $\mathcal{P}$ taki, że

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oznaczają punkty podziału $\mathcal{P}$. Wtedy z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i =: S(\mathcal{P}, f), \end{aligned}$$

dla pewnych punktów $x_{i-1} < t_i < x_i$. Mamy

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &\leqslant S(\mathcal{P}, f) = F(b) - F(a) \leqslant U(\mathcal{P}, f), \\ L(\mathcal{P}, f) &\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(\mathcal{P}, f). \end{aligned}$$

Zatem

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| S(\mathcal{P}, f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

□

Uwaga 9.19. Wzór w twierdzeniu jest prawdziwy również dla $a \geqslant b$, bo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$$

Przykłady.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

Twierdzenie 9.18 może być użyte do obliczania różnego rodzaju granic.

Przykłady.

(a) Chcemy obliczyć

$$\lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}\right).$$

Wyrażenie pod granicą możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{2n-1}{n}\right).$$

Przyjmijmy, że $x_i = \dfrac{2i}{n}$ oraz $t_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Mamy $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$. Zatem wyrażenie pod granicą ma postać sumy całkowej dla całki $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 x\,dx = 1$. Stąd granica wynosi 1. Można zauważyć, że wyrażenie pod granicą jest równe 1, niezależnie od wartości n.

(b) Mamy do obliczenia

$$\begin{aligned}
&\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) \\
&= \lim_n \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2^2}{n^2}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n^2}{n^2}}}\right) = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&\qquad = \log(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 = \log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.20 (Całkowanie przez podstawienie)**.** *Przypuśćmy, że funkcja $f(u)$ jest ciągła, a funkcja $\varphi(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $[a,b]$ oraz zbiór wartości $\varphi([a,b])$ jest zawarty w obszarze określoności funkcji f. Wtedy*

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du. \tag{9.8}$$

Dowód. Symbolem F oznaczymy funkcję pierwotną do f. Wtedy

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Z Twierdzenia 9.18 otrzymujemy zatem

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

□

Uwaga 9.21. Patrząc mechanicznie na wzór (9.8) widzimy, że nastąpiła zamiana $u = \varphi(x)$ i $du = \varphi'(x)\,dx$, oraz końce przedziału całkowania zostały odpowiednio zmodyfikowane.

Przykłady.

(a) Dla całki $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx$ stosujemy podstawienie $u = \sin x =: \varphi(x)$, $f(u) = u^2$. Wtedy $du = \cos x\,dx$. W wyniku otrzymujemy $\int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}$.

(b) Wzór (9.8) może być zastosowany w przeciwną stronę. Tzn. punktem wyjścia jest całka

$$\int_c^d f(u)\,du.$$

Stosujemy podstawienie $u = \varphi(x)$. Aby zastosować wzór z twierdzenia trzeba znaleźć punkty a i b spełniające

$$\varphi(a) = c,\ \ \varphi(b) = d.$$

Wtedy

$$\int_c^d f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Rozważmy całkę

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Zastosujemy podstawienie $u = \sinh x$. Wtedy $du = \cosh x\,dx$. Trzeba znaleźć granice całkowania a i b odpowiadające liczbom 0 i 1. W tym celu rozwiązujemy równania $\sinh a = 0$ i $\sinh b = 1$. Otrzymujemy $a = 0$. Drugie równanie przekształcamy do postaci

$$\frac{1}{2}e^{2b} - e^b - \frac{1}{2} = 0.$$

Jedynym dodatnim pierwiastkiem trójmianu kwadratowego jest $1+\sqrt{2}$. Zatem $e^b = 1 + \sqrt{2}$, czyli $b = \log(1 + \sqrt{2})$. Otrzymujemy więc

$$\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int\limits_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}\, dx = \int\limits_0^{\log(1+\sqrt{2})} dx = \log(1+\sqrt{2}),$$

bo $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$.

Twierdzenie 9.22 (Całkowanie przez części)**.** *Załóżmy, że funkcje u i v są ciągłe natomiast u' i v' są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale* $[a, b]$*. Wtedy*

$$\int\limits_a^b u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

Dowód. Mamy $(uv)' = u'v + uv'$. Z Twierdzenia 9.18 otrzymujemy więc

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = \int\limits_a^b u'(x)v(x)\, dx + \int\limits_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

□

Uwaga 9.23. Wzór z Twierdzenia 9.22 można zapisać w postaci

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)\, dx, \tag{9.9}$$

gdzie $F(x)$ oznacza funkcję pierwotną do funkcji $f(x)$.

Przykład. Przyjmując $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = x$ otrzymamy

$$\int\limits_0^\pi x \sin x\, dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\, dx = \pi.$$

Gdybyśmy zamienili rolami funkcje, tzn. $f(x) = x$ i $g(x) = \sin x$, to

$$\int\limits_0^\pi x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi x^2 \cos x \, dx,$$

tzn. otrzymana funkcja do scałkowania byłaby bardziej złożona.

Uwaga 9.24. Często łatwiej znaleźć funkcję pierwotną zamiast stosować całkowanie przez części. W przykładzie $(-x \cos x + \sin x)' = x \sin x$. Główną częścią funkcji pierwotnej jest składnik $-x \cos x$. Po obliczeniu pochodnej pojawia się dodatkowy składnik $-\cos x$. Stąd w funkcji pierwotnej występuje korekta o $\sin x$. Podobnie przy obliczaniu całki $\int\limits_0^1 x^2 e^x \, dx$ możemy łatwo znaleźć funkcję pierwotną metodą korekt. Otrzymamy

$$(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x.$$

Zatem

$$\int\limits_0^1 x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Wzór na całkowanie przez części można stosować wielokrotnie.

Wniosek 9.25. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła natomiast funkcja g jest n-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $[a, b]$. Niech f_k oznacza funkcję pierwotną rzędu k dla funkcji f, tzn. $f_0 = u$ oraz $f_k' = f_{k-1}$ dla $k \geqslant 1$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_{k+1}(x) g^{(k)}(x) \Big|_a^b + (-1)^n \int\limits_a^b f_n(x) g^{(n)}(x) \, dx.$$

Dowód. Dla $n = 1$ wzór sprowadza się do (9.9). Załóżmy, że wzór jest spełniony dla liczby n. Pokażemy, że jest prawdziwy dla liczby $n+1$. Rzeczywiście stosując całkowanie przez części otrzymamy

$$(-1)^n \int\limits_a^b f_n(x) g^{(n)}(x) \, dx = (-1)^n f_{n+1}(x) g^{(n)}(x) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int\limits_a^b f_{n+1}(x) g^{(n+1)}(x) \, dx.$$

□

Uwaga. † Jeśli $g(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n, to

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_{k+1}(x)g^{(k)}(x)\Big|_a^b.$$

Ten wzór można zastosować do szybkiego obliczenia niektórych całek. Np.

$$\int_0^1 e^x x^5\,dx = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^x (x^5)^{(k)}\Big|_0^1$$
$$= (1-5+20-60+120)e - 120(e-1) = 120 - 44e = 0,3955...$$

Twierdzenie 9.26 (Reszta we wzorze Taylora w postaci całkowej)**.** *Jeśli funkcja $h(x)$ jest $n+1$-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu a, to dla punktów b z tego otoczenia mamy*

$$h(b) = h(a) + \frac{(b-a)}{1!}h'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}h''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}h^{(n)}(a) + R_{n+1},$$

gdzie

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n h^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Dowód. Mamy

$$h(b) - h(a) = \int\limits_a^b 1\cdot h'(x)\,dx.$$

Zastosujemy Wniosek 9.25 do całki przyjmując $f(x) := 1$ oraz $g(x) := h'(x)$.

$$(-1)^k f_k(x) = \frac{1}{k!}(b-x)^k, \quad k \geqslant 1.$$

Zatem

$$\int\limits_a^b h'(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}(b-x)^{k+1}h^{(k+1)}(x)\Big|_a^b + \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n h^{(n+1)}(x)\,dx$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(b-x)^k h^{(k)}(x)\Big|_a^b + \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n h^{(n+1)}(x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(b-a)^k h^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n h^{(n+1)}(x)\,dx.$$

□

† Wniosek 9.25 i Uwagę zawdzięczam Konradowi Izdebskiemu z kursu Analizy II (2020)

Twierdzenie 9.27 (Twierdzenie o wartości średniej)**.** *Funkcje f i g są całkowalne na $[a,b]$, przy czym $g(x) \geqslant 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx$$

dla liczby λ leżącej pomiędzy kresami dolnym m i górnym M funkcji f.

Dowód. Mamy $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Całkując otrzymamy

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Jeśli $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, to również $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. W przypadku $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ otrzymujemy

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

□

Przykład.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \lambda\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\lambda$$

dla pewnej liczby $m \leqslant \lambda \leqslant M$.

Wniosek 9.28. *Jeśli funkcja f jest ciągła a funkcja $g(x)$ nieujemna i całkowalna, to*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

dla pewnego punktu $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia mamy $m \leqslant \lambda \leqslant M$. Z własności Darboux można znaleźć ξ taki, że $f(\xi) = \lambda$. □

Przykład. Jeśli f jest ciągła, to

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = 2f(\xi).$$

Twierdzenie 9.29 (Drugie twierdzenie o wartości średniej)**.** *Jeśli $f(x)$ jest nieujemną funkcją malejącą a $g(x)$ funkcją całkowalną na $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx \tag{9.10}$$

dla pewnego punktu ξ z przedziału $[a,b]$.

Dowód. Niech

$$M_g = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)|.$$

Rozważmy podział P przedziału $[a,b]$ na n równych części. Wtedy

$$U(P,f) - L(P,f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) - f(x_i)] = \frac{(b-a)[f(a)-f(b)]}{n}.$$

Stąd wynika w szczególności całkowalność funkcji f. Wybierzmy n tak duże, aby

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\varepsilon}{M_g}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})]\,g(x)\,dx =: A + B.\end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned}|B| &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_{i-1}) - f(x)]\,|g(x)|\,dx \leqslant M_g \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i \\ &\leqslant M_g[U(P,f) - L(P,f)] < \varepsilon.\end{aligned}$$

Dalej stosując oznaczenie

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

uzyskujemy [‡]

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]G(x_i) + f(b)G(b).$$

Niech
$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} G(x), \quad m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} G(x).$$

Wtedy
$$A \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + f(b)\right] M = Mf(a).$$

Podobnie otrzymujemy
$$A \geqslant mf(a).$$

Reasumując dostajemy nierówności

$$mf(a) - \varepsilon < \int_a^b f(x)g(x)\,dx < Mf(a) + \varepsilon.$$

Stąd
$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a).$$

Ponieważ funkcja $G(x)$ jest ciągła, to z własności Darboux otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx$$

dla pewnego punktu $a \leqslant \xi \leqslant b$. □

Uwaga 9.30. Jeśli $f(x)$ jest nieujemna i rosnąca, to

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx.$$

[‡] $G(x_0) = G(a) = 0$

Rzeczywiście stosując podstawienie $\varphi(x) = a + b - x$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(a+b-x)\,g(a+b-x)\,dx \\ &= f(b)\int_a^{\eta} g(a+b-x)\,dx = f(b)\int_{a+b-\eta}^{b} g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Przykład. Dla $0 < a < b$ mamy

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^{\xi} \sin x\,dx = \frac{\cos a - \cos\xi}{a}.$$

Zatem

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

Uwaga 9.31. Dowód drugiego twierdzenia o wartości średniej znacznie się upraszcza przy założeniu, że funkcja $g(x)$ jest ciągła a funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły. Rzeczywiście, określmy

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx \\ &= f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = f(b)G(b) + \int_a^b [-f'(x)]G(x)\,dx\end{aligned}$$

Niech

$$m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} G(x), \qquad M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} G(x).$$

Wtedy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant mf(b) - m\int_a^b f'(x)\,dx = mf(b) - m[f(b) - f(a)] = mf(a).$$

Podobnie wyprowadzamy nierówność

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a).$$

Zatem

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx$$

dla pewnego punktu $a \leqslant \xi \leqslant b$, bo funkcja $G(x)$ jest ciągła.

9.4 Wzory Wallisa i Stirlinga

Dla dwu ciągów liczb dodatnich a_n i b_n zapis $a_n \approx b_n$ oznacza, że $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n]{} 1$. We wzorze

$$\binom{2n}{0} + \ldots + \binom{2n}{n} + \ldots + \binom{2n}{2n} = 4^n$$

liczba $\binom{2n}{n}$ jest największa. Wzór Wallisa podaje informację jaki jest stosunek tej liczby do sumy wszystkich symboli, czyli do 4^n.

Twierdzenie 9.32 (Wzór Wallisa)**.**

$$\lim_n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Tzn. $\displaystyle\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$

Dowód. Oznaczmy $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Mamy $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ oraz $I_1 = 1$. Dalej dla

$n \geqslant 2$ mamy

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} (-\cos x)'(\sin x)^{n-1}\,dx \\
&= -\cos x\,(\sin x)^{n-1}\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,(\sin x)^{n-2}\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} [1-\sin^2 x]\,(\sin x)^{n-2}\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{9.11}$$

Poprzez iterację (9.11) otrzymujemy

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2} I_0 = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}, \tag{9.12}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3} I_1 = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}. \tag{9.13}$$

Ciąg I_n jest malejący, czyli $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$. Zatem na podstawie (9.11) dostajemy

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1.$$

Wnioskujemy, że $I_{2n+1}/I_{2n} \xrightarrow[n]{} 1$. Stąd korzystając z (9.12) i (9.13) mamy

$$1 \xleftarrow[n]{} \sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}} = \sqrt{\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{2}{\pi}} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{\pi n}}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}.$$

□

Twierdzenie 9.33 (Wzór Stirlinga)**.**

$$\lim_n \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

tzn. $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Dowód. Udowodnimy następującą nierówność, z której wynika teza twierdzenia.

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! \leqslant n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\; e^{\frac{1}{4n}}. \tag{9.14}$$

Oznaczmy

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Wtedy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)e}\,\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Dalej

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Rozważmy fragment wykresu funkcji $y = 1/x$ od punktu $x_1 = n$ do punktu $x_2 = n+1$. Wykres jest wypukły w dół. Zatem pole trapezu pod sieczną przechodzącą przez punkty $(x_1, 1/x_1)$ i $(x_2, 1/x_2)$ jest większe niż pole pod wykresem funkcji. Z kolei to ostatnie pole jest większe niż pole trapezu pod styczną do wykresu w punkcie $(x_3, 1/x_3)$ dla $x_3 = (x_1+x_2)/2 = n+\frac{1}{2}$. Pole pod wykresem wynosi

$$\int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n+1) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Zatem

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)}.$$

Pomnóżmy nierówność przez $n+\frac{1}{2}$ i odejmijmy 1. Wtedy

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4n(n+1)}.$$

To oznacza, że

$$0 < \log\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

czyli

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

Stąd ciąg a_n jest malejący. Niech $\alpha = \lim\limits_n a_n$. Mamy

$$\begin{aligned} 1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}} \\ &< e^{\frac14\left(\frac1n - \frac{1}{n+1}\right)} \cdot e^{\frac14\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)} \cdot \ldots \cdot e^{\frac14\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)} = e^{\frac14\left(\frac1n - \frac{1}{n+k}\right)}. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność pociąga

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4n}}.$$

Przechodzimy do granicy, gdy $k \to \infty$. Otrzymujemy

$$1 < \frac{a_n}{\alpha} \leqslant e^{\frac{1}{4n}}. \tag{9.15}$$

To oznacza, że $\alpha > 0$. Obliczymy teraz wartość liczby α. Mamy

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \, \frac{(2n)^{2n+\frac12}}{(2n)!e^{2n}\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} \sqrt{\pi}.$$

Ale

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} \xrightarrow[n]{} \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Stąd $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Z (9.15) uzyskujemy

$$1 < \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} \leqslant e^{\frac{1}{4n}},$$

co jest równoznaczne z (9.14). □

9.5 Całkowanie ciągu funkcyjnego

Twierdzenie 9.34. *Ciąg funkcji f_n całkowalnych na przedziale $[a, b]$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f. Wtedy funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Uwaga 9.35. Twierdzenie mówi, że

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx,$$

tzn. można wejść z granicą pod znak całki, przy zbieżności jednostajnej.

Dowód. Dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć próg N taki, że dla $n \geqslant N$ oraz $a \leqslant x \leqslant b$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{9.16}$$

W szczególności

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f_N(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy

$$m_i(f) \geqslant m_i(f_N) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad M_i(f) \leqslant M_i(f_N) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Po przemnożeniu przez Δx_i i zsumowaniu otrzymamy

$$L(P, f_N) - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant L(P, f) \leqslant U(P, f) \leqslant U(P, f_N) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Funkcja f_N jest całkowalna, więc dla pewnego podziału P mamy

$$U(P, f_N) - L(P, f_N) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z dwu ostatnich nierówności otrzymujemy

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon,$$

co dowodzi całkowalności funkcji f.

Dla $n \geqslant N$ mamy

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ostatnia nierówność wynika z (9.16) i Twierdzenia 9.10 (iv). □

Przykłady.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Można pokazać, że $f_n(x) \rightrightarrows 0$, Zatem $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n]{} 0$.

(b) $f_n(x) = x^n$. Mamy

$$f_n(x) \xrightarrow[n]{} \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Zatem $f_n(x)$ nie jest zbieżny jednostajnie, ale $\int\limits_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$.

(c) $f_n(x) = n^3x^n(1-x)$. Mamy $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$, dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ale

$$\int\limits_0^1 n^3x^n(1-x)\,dx = n^3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n]{} \infty.$$

9.6 Całka nieoznaczona

Definicja 9.36. *Przypuśćmy, że funkcje $f(x)$ i $F(x)$ są określone na ustalonym przedziale i spełniają $F'(x) = f(x)$. Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną do funkcji $f(x)$ lub całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ i zapisujemy*

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Uwaga 9.37. To nie jest równość funkcji. Zapis oznacza, że $F'(x) = f(x)$ dla x z określonego przedziału.

Jeśli $G(x)$ jest inną funkcją pierwotną do $f(x)$, to $G(x) = F(x) + C$ dla pewnej stałej C. Rzeczywiście,

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Zatem funkcja $G(x) - F(x)$ jest stała na przedziale. Stwierdzenie nie jest prawdziwe dla dwu przedziałów. Na przykład niech $x \in (0,1) \cup (2,3)$. Niech $F(x) = x^2$ oraz

$$G(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 < x < 1, \\ x^2 - 1 & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Wtedy $G'(x) = F'(x) = 2x$.

Przykład.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \log x & x > 0, \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} = \log|x|.$$

Zapis stosowany w wielu podręcznikach

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

jest mylący, bo sugeruje, że na obu półprostych dodatniej i ujemnej musimy wziąć tę samą stałą.

Twierdzenie 9.38.

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)]\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \\ \int cf(x)\,dx &= c\int f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dowód. Jeśli $F(x)$ i $G(x)$ są funkcjami pierwotnymi do f i g, to

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Czyli

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Podobnie ze wzoru

$$(cF(x))' = cF'(x) = cf(x)$$

wynika, że

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) = c\int f(x)\,dx.$$

□

Twierdzenie 9.39 (Całkowanie przez podstawienie)**.** *Załóżmy, że funkcja $\varphi(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły natomiast funkcja $f(u)$ jest ciągła na zbiorze wartości funkcji φ. Wtedy*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)),$$

gdzie $F(u) = \int f(u)\,du$.

Dowód.
$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$
□

Uwaga. Tezę możemy zapisać w postaci
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(u), \quad \text{gdzie } u = \varphi(x).$$
Inaczej
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad \text{gdzie } u = \varphi(x).$$

Stosowanie twierdzenia

1. Chcemy obliczyć $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Obliczamy $\int f(u)\,du$ i po wykonaniu obliczeń podstawiamy $u = \varphi(x)$. Formalnie wyrażenie $\varphi'(x)\,dx$ zamieniło się na du, tzn. $du = \varphi'(x)\,dx$. To jest zgodne z zapisem Leibniza, bo $\varphi'(x) = \dfrac{du}{dx}$.
2. Chcemy obliczyć $\int f(u)\,du$. Podstawiamy $u = \varphi(x)$. Obliczamy $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Następnie pozbywamy się zmiennej x przez podstawienie $u = \varphi(x)$. Ponownie $du = \varphi'(x)\,dx$.

Przykłady.

(a)
$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int 2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$
Stosujemy podstawienie $u = \varphi(x) = \sqrt{x}$, $f(u) = 2ue^{-u}$. Zatem $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$. Otrzymujemy więc
$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int 2ue^{-u}\,du = -2ue^{-u} - 2e^{-u} = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}.$$

(b)
$$\int \sin\sqrt{u}\,du \underset{\substack{u=x^2\\x>0}}{=} \int \sin x \;\, 2x\,dx = -2x\cos x + 2\sin x$$
$$= -2\sqrt{u}\sin\sqrt{u} + 2\sin\sqrt{u}.$$

Twierdzenie 9.40 (Całkowanie przez części)**.**

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Dowód. Mamy $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Zatem

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

□

Przykłady.

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = \int (-e^{-x})'x\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$

(b) $\displaystyle\int \log x\,dx = \int x'\log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x.$

(c) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x = e^x\sin x - \left[e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx\right].$

Zatem

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x).$$

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \sin x\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$

9.7 Całkowanie funkcji wymiernych

Będziemy się zajmowali obliczeniem $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są wielomianami. Jeśli $\deg p \geqslant \deg q$, to wykonujemy dzielenie z resztą

$$p(x) = w(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg q.$$

Wtedy

$$\frac{p(x)}{q(x)} = w(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Przykłady.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$. Zatem

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|.$$

(b)

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx$$
$$= \log|x-3| - \log|x-2| = \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|.$$

Ogólnie przy całkowaniu $r(x)/q(x)$ rozkładamy mianownik na czynniki postaci $(x-\alpha)^n$ oraz $[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m$. Wtedy wyrażenie $r(x)/q(x)$ rozkłada się na sumę wyrażeń postaci

$$\frac{c_1}{x-\alpha} + \frac{c_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{c_n}{(x-\alpha)^n},$$
$$\frac{d_1x+e_1}{(x-\beta)^2+\gamma^2} + \frac{d_2x+e_2}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^2} + \ldots + \frac{d_mx+e_m}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}.$$

Każdy składnik nazywamy ułamkiem prostym.

Przykłady.

1.
$$\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Wiemy, że

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \tag{9.17}$$

Chcemy znaleźć stałe A, B i C.

`Sposób I.`

Mnożymy obie strony równości przez $x+1$

$$\frac{1}{x^2-x+1} = A + \frac{(Bx+C)(x+1)}{x^2-x+1}$$

i podstawiamy $x=-1$. Otrzymujemy $A = \dfrac{1}{3}$. Dalej

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{3(x+1)} = \frac{-x^2+x+2}{3(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$= -\frac{(x+1)(x-2)}{3(x+1)(x^2-x+1)} = -\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}. \tag{9.18}$$

`Sposób II.`
Mnożymy równość (9.17) przez $(x+1)(x^2-x+1)$ i otrzymujemy

$$1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C.$$

Następnie rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} A+B &= 0, \\ B+C-A &= 0, \\ A+C &= 1. \end{aligned}$$

Na podstawie (9.18) obliczamy

$$\int \frac{dx}{3(x+1)} = \frac{1}{3}\,\log|x+1|.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^2-x+1} &= \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}, \\ \frac{1}{x^2-x+1} &= \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy wynik

$$\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\,\log|x+1| - \frac{1}{6}\,\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
Mamy

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}. \tag{9.19}$$

Jak najszybciej znaleźć stałe A, B, C i D ? Oznaczmy $f(x) = 1/(x^2+1)$. Mnożymy równość przez $(x-1)^2$ i otrzymujemy

$$f(x) = A(x-1) + B + \frac{Cx+D}{x^2+1}(x-1)^2.$$

Wtedy

$$B = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Przekształcamy równość do postaci

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} - \frac{f(1)}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po pomnożeniu przez $x-1$ otrzymujemy

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = A + (x-1)\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Czyli

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\bigg|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

Na podstawie (9.19) obliczamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}\\
&\quad= \frac{2-(x^2+1)+(x-1)(x^2+1)}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1-x^2+(x-1)(x^2+1)}{2(x-1)^2(x^2+1)}\\
&\quad= \frac{(x-1)(x^2+1-1-x)}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x(x-1)^2}{2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x}{2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\,\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\log(x^2+1).$$

Ogólnie, rozważamy składnik postaci $\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}$, gdzie $f(x)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną w punkcie a. Ze wzoru Taylora mamy

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(\xi),$$

dla pewnego punktu ξ pomiędzy a i x. Wtedy

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k} = \frac{f(a)}{(x-a)^k} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!(x-a)} + R_k(x),$$

oraz

$$\lim_{x\to a} R_k(x) = \lim_{\xi\to a} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

co oznacza, że w mianowniku funkcji $R_k(x)$ nie występuje czynnik $x-a$.

Każdy składnik postaci $c_k/(x-\alpha)^k$ całkujemy według wzorów

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}, \qquad k \geqslant 2,$$
$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log|x-\alpha|.$$

Składniki postaci

$$\frac{d_k x + e_k}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}$$

przez podstawienie afiniczne $x = \beta + \gamma u$ sprowadzamy do wyrażeń postaci

$$\frac{\widetilde{d}_k u + \widetilde{e}_k}{(u^2+1)^k}.$$

Dalej

$$\frac{\widetilde{d}_k u + \widetilde{e}_k}{(u^2+1)^k} = \widetilde{d}_k \frac{u}{(u^2+1)^k} + \widetilde{e}_k \frac{1}{(u^2+1)^k}.$$

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^k}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log(u^2+1) & k=1, \\ -\dfrac{1}{2(k-1)}\dfrac{1}{(u^2+1)^{k-1}} & k \geqslant 2. \end{cases}$$

Oznaczy $I_k = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Wtedy $I_1 = \operatorname{arctg} u$ oraz

$$\begin{aligned} I_k = \int u' \frac{1}{(u^2+1)^k}\,du &= \frac{u}{(u^2+1)^k} + k\int \frac{2u^2}{(u^2+1)^{k+1}}\,du \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^k} + 2k\int \frac{[(u^2+1)-1]}{(u^2+1)^{k+1}}\,du \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\,\frac{u}{(u^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}\,I_k, \quad k \geqslant 1.$$

9.8 Podstawienie wykładnicze i trygonometryczne

Przykłady.

(a) $\int \sqrt{1-e^x}\,dx$. Podstawiamy $u = e^x$, $du = e^x\,dx$ czyli $dx = \dfrac{du}{u}$, aby otrzymać

$$\int \sqrt{1-e^x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-u}}{u}\,du.$$

Następnie podstawiamy $v = \sqrt{1-u}$. Wtedy $0 \leqslant v < 1$ oraz $u = 1 - v^2$, czyli $du = -2v\,dv$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-u}}{u}\,du &= \int \frac{v}{1-v^2}(-2v)\,dv = \int \frac{2v^2}{v^2-1}\,dv = 2\int \left(1 + \frac{1}{v^2-1}\right)dv \\
&= 2v + \int \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)dv = 2v + \log(1-v) - \log(1+v) \\
&= 2\sqrt{1-e^x} + \log(1-\sqrt{1-e^x}) - \log(1+\sqrt{1-e^x}) \\
&= 2\sqrt{1-e^x} + \log\frac{e^x}{1+\sqrt{1-e^x}} - \log(1+\sqrt{1-e^x}) \\
&= 2\sqrt{1-e^x} + x - 2\log(1+\sqrt{1-e^x}).
\end{aligned}$$

(b) Przypomnimy podstawowe wzory dotyczące funkcji hiperbolicznych.

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1, \\
&\sinh 2t = 2\sinh t \cosh t, \\
&\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1 = 2\sinh^2 t + 1.
\end{aligned}$$

W całce $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ wykonujemy podstawienie $x = \sinh t$. Wtedy $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$ oraz $dx = \cosh t\,dt$. Zatem

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \cosh^2 t\,dt &= \frac{1}{2}\int [\cosh 2t + 1]\,dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sinh 2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sinh t \cosh t
\end{aligned}$$

Z równości
$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
otrzymujemy $e^t = x + \sqrt{x^2+1}$, i w konsekwencji $t = \log(x + \sqrt{x^2+1})$. Zatem
$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}.$$

(c) Przy całce $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$, $x > 1$, wykonujemy podstawienie $x = \cosh t$, $t > 0$. Wtedy $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ oraz $dx = \sinh t\, dt$. Dalej
$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2-1}, \quad t = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Zatem
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\, dx &= \int \sinh^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int [\cosh 2t - 1]\, dt \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sinh 2t = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sinh t\cosh t \\ &= -\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

(c) W całce $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ wykonujemy podstawienie $x = \sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. Wtedy $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\, dt$ oraz
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int [\cos 2t + 1]\, dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x.\end{aligned}$$

Rozważamy wyrażenie postaci $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, gdzie $R(x,y)$ jest funkcją wymierną dwu zmiennych. Poprzez podstawienie afiniczne $x = \alpha t + \beta$ sprowadzamy wyrażenie do jednej z trzech postaci i wykonujemy podane w tabeli podstawienia.

$R(t, \sqrt{t^2+1})$	$a > 0,\ \Delta < 0$	$t = \sinh u$
$R(t, \sqrt{t^2-1})$	$a > 0,\ \Delta > 0$	$t = \cosh u$
$R(t, \sqrt{1-t^2})$	$a < 0,\ \Delta > 0$	$t = \sin u$

Otrzymamy w wyniku wyrażenie postaci $R(\cosh u, \sinh u)$ lub $R(\cos u, \sin u)$. Jeśli nie potrafimy bezpośrednio wskazać funkcji pierwotnej na tym etapie wykonujemy podstawienia $v = e^u$ lub $v = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, odpowiednio. Przy podstawieniu $v = e^u$ mamy

$$\cosh u = \frac{1}{2}(v + v^{-1}), \quad \sinh u = \frac{1}{2}(v - v^{-1}), \quad du = \frac{dv}{v}.$$

Przy podstawieniu $v = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\cos u = \cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2} = \cos^2 \frac{u}{2} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}\right] = \cos^2 \frac{u}{2}\ (1 - v^2),\\
&\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} = 2\cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} = 2\cos^2 \frac{u}{2}\ v,\\
&dv = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}\right) du.
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{2}}$$

otrzymamy

$$\cos u = \frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \quad \sin u = \frac{2v}{1 + v^2}, \quad du = \frac{2}{1 + v^2}\, dv.$$

Przy obu podstawieniach otrzymujemy funkcję wymierną zmiennej v.

Przykład. Nie zawsze warto sprowadzać obliczenie do całki z funkcji wymiernej. Czasami lepiej zastosować wzory trygonometryczne, aby szybciej osiągnąć cel. Przy zastosowaniu podstawienia $v = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ do całki $\int \cos^2 u\, du$ otrzymamy

$$\int \cos^2 u\, du = \int \left(\frac{1 - v^2}{1 + v^2}\right)^2 \frac{2}{1 + v^2}\, dv.$$

Przy zastosowaniu wzorów trygonometrycznych otrzymamy

$$\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2u)\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin u \cos u.$$

Uwaga 9.41. Można uniknąć podstawienia trygonometrycznego. Np. w całce $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ dla $x > 0$ możemy zastosować podstawienie $x = 1/u$. Wtedy $dx = -du/u^2$. Zatem

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = -\int \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}\, \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^3}\, du.$$

9.9 Zastosowanie całek oznaczonych do obliczania wielkości fizycznych

Pole obszaru na płaszczyźnie

Jeśli $y = f(x)$ jest nieujemną funkcją ciągłą na $[a, b]$, to pole S obszaru pod wykresem funkcji i nad osią x wynosi

$$S_f = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Pole obszaru pomiędzy wykresami dwu funkcji ciągłych $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ wynosi zatem

$$S = S_g - S_f = \int\limits_a^b g(x)\, dx - \int\limits_a^b f(x)\, dx. = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Warunek nieujemności funkcji $f(x)$ i $g(x)$ nie jest konieczny.

Przykłady.

1. Znaleźć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = x^5$.

   Wykresy przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, więc chodzi o obszar pomiędzy wykresami dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Otrzymujemy

   $$S = \int\limits_0^1 (x^2 - x^5)\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. Obliczyć pole koła o promieniu r.

   Chodzi o obszar położony pomiędzy wykresami funkcji $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ oraz $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Wtedy

   $$S_r = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

   Zastosujemy podstawienie $x = r \cos t$ i otrzymamy

   $$S = 2r^2 \int_0^\pi \sin^2 t\, dt = r^2 \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \pi r^2.$$

Pole wycinka koła o promieniu r i kącie θ jest proporcjonalne do kąta θ, zatem jego pole wynosi

$$S_{r,\theta} = \frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

Rozważmy fragment wycinka koła o promieniu r kącie θ powstałe przez usunięcie wycinka o promieniu $0 < r_0 < r$. Pole wynosi

$$S_{r,\theta,r_0} = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}\theta r_0^2 = \frac{r_0\theta + r\theta}{2}(r - r_0). \tag{9.20}$$

(9.20) przypomina wzór na pole trapezu.

Środek masy obszaru

Zakładamy, że obszar mieści się pomiędzy wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, przy czym $f(x) \leqslant g(x)$. Przyjmujemy, że masa jest proporcjonalna do powierzchni. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części punktami x_i, gdzie $i = 0, 1, \ldots, n$. Temu odpowiada podział obszaru na n wąskich pionowych fragmentów związanych z przedziałami $[x_{i-1}, x_i]$. Masa fragmentu wynosi w przybliżeniu

$$m_i = [g(x_i) - f(x_i)]\Delta x_i.$$

Środek masy tego fragmentu znajduje się w przybliżeniu w punkcie

$$X_i := \left(x_i, \tfrac{1}{2}[f(x_i) + g(x_i)]\right).$$

Środek masy całego obszaru jest równy w przybliżeniu środkowi masy układu punktów (X_i, m_i) dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Środek masy tego układu znajduje się w punkcie [§]

$$X \approx \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(x_i)+g(x_i)]m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \right).$$

Dalej

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} [g(x_i)-f(x_i)]\Delta x_i \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b [g(x)-f(x)]\,dx,\\
\sum_{i=1}^{n} x_i m_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i[g(x_i)-f(x_i)]\Delta x_i \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b x[g(x)-f(x)]\,dx,\\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)+g(x_i)]m_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [g(x_i)^2-f(x_i)^2]\Delta x_i \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2}\int\limits_a^b [g(x)^2-f(x)^2]\,dx.
\end{aligned}$$

Zatem

$$X = \left(\frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx}, \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g(x)^2-f(x)^2]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx} \right).$$

Przeanalizujemy błąd występujący w obliczeniach. Dla funkcji h oraz liczby $\delta > 0$ określamy oscylację na przedziale $[a, b]$ wzorem

$$\operatorname{osc}(h, \delta) = \sup\{|h(x) - h(x')| \,:\, a \leqslant x, x' \leqslant b,\ |x - x'| < \delta\}.$$

Podobnie dla dwu funkcji h_1 i h_2 oraz liczby $\delta > 0$ określamy oscylację poprzez

$$\operatorname{osc}(h_1, h_2, \delta) = \sup\{|h_1(x)h_2(y) - h_1(x')h_2(y')| \,:\, a \leqslant x, x', y, y' \leqslant b,\ |x - x'| < \delta,\ |y - y'| < \delta\}.$$

[§] Ogólnie, gdy w punktach $X_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, umieszczono masy m_i, to środek masy $X = (x, y)$ tego układu spełnia

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{XX_i} = 0.$$

Stąd

$$x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad \text{gdzie} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Przy obliczaniu pojedynczego składnika błąd nie przekracza

$$\frac{b-a}{n}\operatorname{osc}\left(h_1, h_2, \frac{b-a}{n}\right),$$

gdzie w roli funkcji h_1 występuje funkcja $g-f$ a w roli h_2 funkcje x oraz $f+g$. Po zsumowaniu błąd nie przekracza wielkości

$$(b-a)\operatorname{osc}\left(h_1, h_2, \frac{b-a}{n}\right).$$

Mamy

$$h_1(x)h_2(y) - h_1(x')h_2(y') = [h_1(x) - h_1(x')]h_2(y) + h_1(x')[h_2(y) - h_2(y')].$$

Zatem

$$\operatorname{osc}\left(h_1, h_2, \frac{b-a}{n}\right) \leqslant M_2 \operatorname{osc}\left(h_1, \frac{b-a}{n}\right) + M_1 \operatorname{osc}\left(h_2, \frac{b-a}{n}\right),$$

gdzie

$$M_i = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |h_i(x)|, \quad i = 1, 2.$$

Reasumując całkowity błąd nie przekracza

$$(b-a)\left[M_2 \operatorname{osc}\left(h_1, \frac{b-a}{n}\right) + M_1 \operatorname{osc}\left(h_2, \frac{b-a}{n}\right)\right] \xrightarrow[n]{} 0.$$

Długość krzywej

Krzywa na płaszczyźnie zadana jest poprzez parametryzację $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Zakładamy, że funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są różniczkowalne w sposób ciągły. Chcemy obliczyć długość krzywej. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części punktami t_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Fragment krzywej pomiędzy kolejnymi punktami $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ i $(x(t_i), y(t_i))$ przybliżamy odcinkiem dla każdej wartości $i = 1, 2, \ldots, n$. Otrzymamy łamaną o długości

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(c_i)\Delta t_i, \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(d_i)\Delta t_i, \end{aligned}$$

dla pewnych punktów c_i i d_i pomiędzy t_{i-1} i t_i. Zatem

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2}\,\Delta t_i.$$

Określmy wielkość

$$\widetilde{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(c_i)^2}\,\Delta t_i \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Dalej

$$|\widetilde{L}_n - L_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2} - \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(c_i)^2} \right| \Delta t_i.$$

Skorzystamy z nierówności trójkąta

$$\left| \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right| \leqslant \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |\widetilde{L}_n - L_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y'(d_i) - y'(c_i)|\,\Delta t_i \leqslant n\,\frac{b-a}{n}\,\mathrm{osc}\left(y', \frac{b-a}{n}\right) \\ = (b-a)\,\mathrm{osc}\left(y', \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n]{} 0, \end{aligned}$$

bo funkcja y' jest jednostajnie ciągła. Reasumując otrzymaliśmy

$$L_n \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Przyjmujemy więc, że długość krzywej wynosi

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Przykład. Okrąg o promieniu r możemy sparametryzować przez $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Wtedy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = 2\pi r.$$

Długość łuku okręgu o promieniu r i kącie θ jest proporcjonalna do θ zatem

$$L_\theta = \frac{\theta}{2\pi} 2\pi r = \theta r.$$

Uwaga 9.42. Porównując ze wzorem na pole fragmentu wycinka koła o kącie θ złożonego z punktów oddalonych od środka koła o więcej niż r_0 a mniej niż r widzimy, że pole jest równe połowie iloczynu $r - r_0$ (wysokości) i średniej arytmetycznej długości łuków okręgów o promieniach r_0 i r (podstaw wycinka). To przypomina wzór na pole trapezu. Można tę zależność wykazać bezpośrednio (zadanie).

Wracamy do sytuacji ogólnej. Niech $s(t)$ oznacza długość krzywej, gdy czas zmienia się od a do t. Wtedy

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,du.$$

Zatem

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

W zapisie Leibniza wzór ma postać

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Używa się też zapisu

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły na $[a, b]$. Chcemy obliczyć długość wykresu. Stosujemy parametryzację $x = t$, $y = f(t)$. Wtedy

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Przykład. $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wtedy

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Uwaga 9.43. Funkcja podcałkowa nie jest określona dla $x = \pm 1$, więc obliczenie nie jest do końca ścisłe. W celu uściślenia obliczeń można ograniczyć się do $-1+\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta$ dla $\delta > 0$. W wyniku dostaniemy

$$\arcsin(1-\delta) - \arcsin(-1+\delta).$$

Przy $\delta \to 0^+$ otrzymamy π. Całkę z funkcji, która nie jest określona w niektórych punktach przedziału całkowania, nazywamy całką niewłaściwą. Teorią takich całek zajmiemy się w innej części kursu.

Długość krzywej we współrzędnych biegunowych

Dla punktu $X(x, y)$ określamy współrzędne biegunowe (r, θ), gdzie r jest odległością punktu od początku układu, natomiast θ jest kątem pomiędzy dodatnią półosią x i półprostą OX. Zatem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ponadto $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$.

Załóżmy, że krzywa jest zadana przez związek pomiędzy r i θ wzorem $r = f(\theta)$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Wtedy

$$x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2.$$

Zatem

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta.$$

Przykłady.

(a) $r = \sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Można sprawdzić, że krzywa opisuje okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, \frac{1}{2})$. Mamy

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = \pi.$$

(b) $r = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$. Krzywa opisuje dwa obroty spirali. Mamy

$$\begin{aligned} L = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta &= \frac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\Big|_0^{4\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{1}{2}\log(4\pi + \sqrt{1+16\pi^2}). \end{aligned}$$

Środek masy krzywej

Rozważamy krzywą $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Zakładamy, że masa jest proporcjonalna do długości krzywej. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części. Masa fragmentu krzywej odpowiadającego przedziałowi $[t_{i-1}, t_i]$ wynosi

$$m_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{x'(u_i)^2 + y'(u_i)^2}\Delta t_i,$$

dla pewnego punktu u_i pomiędzy t_{i-1} i t_i. Całą masę tego fragmentu umieszczamy w punkcie $(x(u_i), y(u_i))$. Otrzymamy układ n punktów z masami m_i. Środek masy otrzymanego układu znajduje się w punkcie

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x(u_i)}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i y(u_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} \right).$$

Dalej

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(u_i)^2 + y'(u_i)^2}\Delta t_i = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i x(u_i) = \sum_{i=1}^n x(u_i)\sqrt{x'(u_i)^2 + y'(u_i)^2}\Delta t_i \xrightarrow[n]{} \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Podobnie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y(u_i) \xrightarrow[n]{} \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Środek masy znajduje się więc w punkcie

$$\left(\frac{\int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}{\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}, \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}{\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt} \right).$$

Mamy $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Przyjmijmy oznaczenie $ds = s'(t)\, dt$. Środek masy ma wtedy współrzędne

$$\left(\frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds}, \frac{\int_a^b y\, ds}{\int_a^b ds} \right).$$

Przykład. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wykres opisuje górny półokrąg o promieniu 1. Obliczamy drugą współrzędną środka masy. Funkcja jest różniczkowalna w sposób ciągły na $(-1, 1)$. Mamy

$$\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} dx = 2(1 - \delta) \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} 2.$$

Współrzędna ta wynosi zatem $\dfrac{2}{\pi}$.

Pole powierzchni figur obrotowych

Chcemy obliczyć pole powierzchni bocznej S figury otrzymanej przez obrót krzywej $x = x(t)$, $y = y(t) \geqslant 0$, $a \leqslant t \leqslant b$ wokół osi x. Dzielimy przedział czasu na n równych części punktami t_i. Rozważamy fragment krzywej odpowiadający przedziałowi $[t_{i-1}, t_i]$. Ten fragment zastępujemy odcinkiem łączącym punkty $(x(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ i $(x(t_i), y(t_i))$. Obracając odcinek wokół osi x otrzymamy fragment powierzchni stożka ściętego o promieniach $y(t_{i-1})$ oraz $y(t_i)$. Po rozcięciu i rozwinięciu otrzymamy fragment wycinka koła (por.

Uwaga 9.42). Pole powierzchni fragmentu jest równe

$$S_i = \frac{2\pi y(t_{i-1}) + 2\pi y(t_i)}{2}\sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$
$$\approx 2\pi y(t_i)\sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}\Delta t_i.$$

Zatem

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}\Delta t_i.$$

Przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$ otrzymamy

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Uwaga 9.44. Druga współrzędna środka masy krzywej wynosi

$$y_0 = \frac{1}{L}\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

gdzie L jest długością krzywej. Zatem

$$S = 2\pi y_0\, L.$$

Tzn. pole powierzchni obrotowej jest równe iloczynowi długości obracanej krzywej i drogi jaką przebywa środek masy tej krzywej przy obrocie (`reguła Guldina`).

Jeśli krzywa jest fragmentem wykresu funkcji $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, to pole powierzchni obrotowej wyraża się wzorem

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Przykłady.

(a) Jakie jest pole powierzchni bocznej stożka ściętego o długości tworzącej l i promieniach podstaw r i R ? Powierzchnię otrzymujemy przez obrót odcinka o długości l, którego końce znajdują się na wysokościach r i R nad osią x. Druga współrzędna środka masy wynosi $(r + R)/2$. Zatem

$$S = 2\pi \frac{r + R}{2}\, l = \pi(r + R)l.$$

(b) Jakie jest pole powierzchni torusa, czyli figury powstałej przez obrót okręgu o środku w (a,b) i promieniu $r \leqslant b$? Środek masy znajduje się w (a,b). Zatem
$$S = 2\pi b\, 2\pi r = 4\pi^2 br.$$

(c) Rozważamy górny półokrąg $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Chcemy obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót fragmentu wykresu $-1 < a \leqslant x \leqslant b < 1$. Mamy
$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\pi(b-a).$$
Pole powierzchni zależy tylko od długości przedziału $[a,b]$.

Objętość bryły obrotowej przy obrocie wokół osi x

Rozważamy wykres funkcji ciągłej i nieujemnej $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Chcemy obliczyć objętość V bryły otrzymanej przez obrót obszaru pomiędzy wykresem funkcji i osią x, przy obrocie wokół osi x. Dzielimy przedział $[a,b]$ na n równych części punktami x_i. Symbolem V_i oznaczamy objętość fragmentu bryły odpowiadającej przedziałowi $[x_{i-1}, x_i]$. Niech m_i i M_i oznaczają minimum i maksimum funkcji na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$. Fragment bryły zawiera w sobie walec o wysokości Δx_i i promieniu m_i a sam jest zawarty w walcu o wysokości Δx_i i promieniu M_i. Zatem
$$\pi m_i^2 \Delta x_i \leqslant V_i \leqslant \pi M_i^2 \Delta x_i.$$
Z własności Darboux dla funkcji $f(x)^2$ mamy $V_i = \pi f(t_i)^2 \Delta x_i$, dla pewnej wartości $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$. Całkowita objętość wynosi więc
$$V = \pi \sum_{i=1}^n f(t_i)^2 \Delta x_i \underset{n}{\longrightarrow} \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Rozważamy obszar A pomiędzy wykresami dwu funkcji $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ oraz $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi x wynosi
$$V = \pi \int_a^b \left[g(x)^2 - f(x)^2\right]\,dx.$$

Uwaga 9.45. Druga współrzędna środka masy obszaru A jest równa

$$y_0 = \frac{1}{2S} \int\limits_a^b \left[g(x)^2 - f(x)^2 \right] dx,$$

gdzie S jest polem obracanego obszaru. Zatem

$$V = 2\pi y_0 S.$$

To oznacza, że objętość jest równa iloczynowi powierzchni obracanego obszaru i drogi jaką przebywa środek masy obszaru przy obrocie (`reguła Guldina`).

Przykład. Rozważmy obszar ograniczony przez $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, dla $0 < r < R$ oraz $-r \leqslant a < b \leqslant r$ i $a \leqslant x \leqslant b$. Objętość bryły obrotowej jest równa

$$V = \pi \int\limits_a^b \left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \right] dx = \pi(R^2 - r^2)(b - a).$$

Objętość zależy tylko od długości przedziału $[a, b]$.

Objętość bryły obrotowej przy obrocie wokół osi y

Rozważamy ponownie wykres funkcji ciągłej i nieujemnej $y = f(x)$, $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$. Chcemy obliczyć objętość V bryły otrzymanej przez obrót obszaru pomiędzy wykresem funkcji i osią x, tym razem przy obrocie wokół osi y. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części punktami x_i i symbolem V_i oznaczamy objętość fragmentu bryły odpowiadającej przedziałowi $[x_{i-1}, x_i]$. Ten fragment w przybliżeniu ma kształt walca o wysokości $f(x_i)$ i promieniu podstawy x_i, w którym wydrążono walec o wysokości $f(x_i)$ i promieniu podstawy x_{i-1}. Zatem

$$V_i \approx \pi x_i^2 f(x_i) - \pi x_{i-1}^2 f(x_i) = \pi(x_{i-1} + x_i) f(x_i) \Delta x_i \approx 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i.$$

Po zsumowaniu otrzymamy

$$2\pi \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \Delta x_i \xrightarrow[n]{} 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx.$$

Całkowita objętość jest równa

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Rozważmy teraz obszar pomiędzy wykresami funkcji $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ oraz $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Objętość bryły przy obrocie wokół osi y wynosi

$$V = 2\pi \int_a^b x[g(x) - f(x)]\, dx.$$

Ale pierwsza współrzędna środka masy obracanego obszaru wyraża się wzorem

$$x_0 = \frac{1}{S} \int_a^b x[g(x) - f(x)]\, dx,$$

gdzie S jest polem obracanego obszaru. Zatem

$$V = 2\pi x_0 S.$$

To oznacza, że reguła Guldina jest spełniona przy obrocie wokół osi y.

Uwaga 9.46. Warunek nieujemności funkcji $f(x)$ i $g(x)$ jest nieistotny.

Przykłady.

1. $y = 1 - (x-2)^2$, $1 \leqslant x \leqslant 3$. Wtedy

$$V = 2\pi \int_1^3 x[1 - (x-2)^2]\, dx.$$

2. Obracamy wokół osi y obszar zawarty pomiędzy wykresami $y = 1 - x^2$ oraz $y = 3x - 3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wtedy

$$V = 2\pi \int_0^1 x[1 - x^2 - 3x + 3]\, dx.$$

Praca

Przypuśćmy, że przy przesuwaniu obiektu wzdłuż linii prostej od punktu a do punktu b wywieramy stałą siłę c. Wtedy wykonana praca jest równa $c(b-a)$. W przypadku, gdy siła nie jest stała i wynosi $f(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części. Praca potrzebna do przesunięcia obiektu od x_{i-1} do x_i wynosi w przybliżeniu $f(x_i)\Delta x_i$. Całkowita praca jest równa w przybliżeniu

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \xrightarrow[n]{} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Przyjmujemy więc

$$W = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład. Pchamy cieknącą taczkę przez 100 m (tzn. od $x = 0$ do $x = 100$). Z powodu wycieku siła wywierana na taczkę wynosi

$$f(x) = 60\left(1 - \frac{x^2}{20000}\right) \text{ (N)}.$$

Zatem

$$W = \int\limits_0^{100} 60\left(1 - \frac{x^2}{20000}\right) dx \text{ (J)}.$$

W 1676 Robert Hooke sformułował prawo mechaniki: siła wywierana przez sprężynę rozciągniętą o x jednostek poza naturalną długość sprężyny jest proporcjonalna do x (dla małych wartości x). Tzn. $g(x) = -kx$, gdzie k jest stałym współczynnikiem. Zatem praca potrzebna do rozciągnięcia sprężyny od a do b jednostek poza naturalną długość wynosi

$$W = \int\limits_a^b kx\,dx.$$

Przykład. Praca potrzebna do rozciągnięcia sprężyny o 10 cm wynosi 10 J. Ile wynosi praca potrzebna do rozciągnięcia o dodatkowe 20 cm ? Mamy

$$W_{10} = \int\limits_0^{0,1} kx\,dx = 10.$$

Czyli $k = 2000$. Dalej

$$W_{10,30} = \int_{0,1}^{0,3} 2000x\,dx = 2000 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 80 \text{ (J)}.$$

Praca potrzebna do wypompowania pojemnika

Chcemy wypompować wodę z pojemnika przez odpływ znajdujący się na pewnej wysokości. Jeśli mamy podnieść warstwę wody o objętości V (m^3) o l metrów w górę, to wykonana praca będzie równa

$$W = 9,8 \cdot 1000 \cdot V \cdot l.$$

Zakładamy, że woda mieści się pomiędzy poziomami $x = a$ i $x = b$. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części. Objętość warstwy wody pomiędzy poziomami x_{i-1} i x_i wynosi w przybliżeniu $A(x_i)\Delta x_i$, gdzie $A(x)$ oznacza pole powierzchni przekroju pojemnika na poziomie x. Praca potrzebna do podniesienia warstwy wynosi $W_i \approx 9800\,A(x_i)\Delta x_i(l - x_i)$. Całkowita praca wynosi w przybliżeniu

$$W \approx 9800 \sum_{i=1}^{n} (l - x_i)A(x_i)\Delta x_i.$$

Zatem

$$W = 9800 \int_a^b (l - x)A(x)\,dx.$$

Przykład. Pojemnik w kształcie dolnej półkuli o promieniu 10 m jest wypełniony wodą. Chcemy wypompować wodę przez odpływ znajdujący się 1 m nad poziomem wody. Umieszczamy skalę tak, że woda mieści się pomiędzy poziomami -10 i 0. Przekrój pojemnika na wysokości x jest kołem o promieniu $r(x) = \sqrt{100 - x^2}$. Zatem $A(x) = \pi(100 - x^2)$. Otrzymujemy więc

$$W = 9800 \int_{-10}^{0} (1 - x)\pi(100 - x^2)\,dx.$$

Objętości brył w $\mathbb{R}^3$

Przypuśćmy, że bryła mieści się pomiedzy płaszczyznami pionowymi $x = a$ i $x = b$. Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły płaszczyzną pionową w punkcie x. Aby obliczyć objętość bryły dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części. Objętość fragmentu bryły pomiędzy płaszczyznami $x = x_{i-1}$ i $x = x_i$ wynosi w przybliżeniu $V_i \approx A(x_i)\Delta x_i$. Zatem całkowita objętość jest równa

$$V = \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i.$$

Stąd

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Uwaga 9.47. Ze wzoru wynika, że dwie bryły mające te same pola przekrojów na każdym poziomie mają równe objętości.

Przykład. Jaka jest objętość piramidy o wysokości 4 m i podstawie 3 m na 3 m ? Umieszczamy oś x pionowo strzałką w dół. Zakładamy, że podstawa piramidy znajduje się na poziomie 4, natomiast wierzchołek na poziomie 0. Przekrój piramidy płaszczyzną prostopadłą do osi x na poziomie x jest kwadratem o boku $a = \frac{3}{4}x$. Zatem $A(x) = \frac{9}{16}x^2$ oraz

$$V = \frac{9}{16}\int_0^4 x^2\,dx = 12.$$

9.10 Przybliżone obliczanie całek

Przy obliczaniu całek oznaczonych nie zawsze możliwe jest dokładne podanie wartości liczbowej.

Przykłady.

(a) Chcemy obliczyć długość wykresu funkcji $y = \frac{1}{3}x^3$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wtedy

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx.$$

(b) Rozważmy elipsę o półosiach 1 i 2. Możemy użyć parametryzacji $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Wtedy długość elipsy wynosi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\, dt.$$

Metoda trapezów

Mamy do obliczenia $\int_a^b f(x)\, dx$, gdzie $f(x) \geqslant 0$. Dzielimy przedział na n równych części. Kolejne punkty wykresu $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$ łączymy odcinkiem. Otrzymujemy łamaną, która przybliża wykres funkcji. Pole pod tą łamaną przybliża pole pod wykresem funkcji, czyli liczbę $\int_a^b f(x)\, dx$. Zatem

$$\int_a^b f(x)\, dx$$
$$\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \frac{b-a}{n},$$

czyli

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Przykład. $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \log 2$. Zastosujemy metodę trapezów dla $n = 4$. Wtedy

$$\log 2 \approx \frac{1}{8}\left[1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right] = 0{,}697023\ldots$$

Wiadomo, że $\log 2 = 0{,}693147\ldots$, więc dokładność obliczenia jest równa około 0,4 procenta. Błąd w metodzie trapezów wynosi

$$E_n^T(f) = \left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \right|.$$

Można udowodnić, że

$$E_n^T(f) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|.$$

Dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, mamy $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. Zatem

$$E_4^T\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{12\cdot 16}\, 2 = \frac{1}{96}.$$

Metoda Simpsona

Thomas Simpson (1710-61) był angielskim matematykiem, który w 1743 opracował metodę przybliżonego obliczania całek. Dzielimy przedział $[a, b]$ na parzystą liczbę $n = 2k$ części o długości $h = \dfrac{b-a}{n}$. Trzy kolejne punkty wykresu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ łączymy parabolą $p(x)$. Mamy zatem

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} - f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}.$$

Całkę $\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ zastępujemy przez

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Ostatnia równość wynika ze wzorów

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)\,dx = \frac{2h^3}{3},$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)\,dx = -\frac{4h^3}{3}.$$

Uzasadnimy jeden z nich. Podstawiając $u = x - x_1$ otrzymamy

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)\,dx = \int\limits_{-h}^{h} u(u-h)\,du = \int\limits_{-h}^{h} u^2\,du = 2\int\limits_{0}^{h} u^2\,du = \frac{2}{3}h^3.$$

To samo wykonujemy dla wszystkich pozostałych przedziałów postaci $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, $\ldots$, $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Tzn.

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})],$$

gdzie p_i oznacza wielomian kwadratowy dla przedziału $[x_{2i-2}, x_{2i}]$. Reasumując otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Przykład. Zastosujemy metodę Simpsona dla całki $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ przy $n = 4$. Wtedy

$$\log 2 \approx \frac{1}{12}\left[1 + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right] = 0,693253\ldots$$

Wiemy, że $\log 2 = 0,693147\ldots$, więc dokładność obliczenia jest ponad dziesięciokrotnie lepsza niż przy metodzie trapezów, przy tej samej ilości włożonej pracy.

Uwaga 9.48. Można udowodnić, że błąd w metodzie Simpsona spełnia

$$E_n^S(f) \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(4)}(x)|.$$

10 Twierdzenie Weierstrassa i wielomiany Bernsteina

Twierdzenie 10.1 (Weierstrass)**.** *Dla dowolnej funkcji ciągłej $f(x)$ na przedziale $[0,1]$ można znaleźć ciąg wielomianów $p_n(x)$ spełniający $p_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[0,1]$. To oznacza, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ w pasie o promieniu ε wokół wykresu funkcji $f(x)$ znajduje się wykres jakiegoś wielomianu.*

Uwaga. Teza twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnego przedziału $[a, b]$. Rzeczywiście, dla $f \in C[a, b]$ określamy $\widetilde{f}(x) = f((b-a)x + a)$. Wtedy $\widetilde{f} \in C[0, 1]$. Jeśli $\widetilde{p}_n \rightrightarrows \widetilde{f}$, to $p_n \rightrightarrows f$, gdzie $p_n(x) = \widetilde{p}_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$.

Dowód (wg S. Bernsteina (1880-1968)). Dla funkcji ciągłej $f(x)$ i liczby n określamy wielomiany Bernsteina wzorem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

$B_n(f)$ ma stopień niewiększy niż n. Współczynnik przy x^n jest równy

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

więc stopień wielomianu $B_n(f)$ może być niższy niż n, jeśli powyższa suma zeruje się.

Mamy

$$B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Dalej

$$\begin{aligned} B_n(x)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &\underset{l=k-1}{=} x \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{(n-1)-l} = x B_{n-1}(1)(x) = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(x^2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l}{n-1}\binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{n-1-l} + \frac{x}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} x^l(1-x)^{n-1-l} \\ &= \frac{n-1}{n} x B_{n-1}(x)(x) + \frac{x}{n} B_{n-1}(1)(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x = x^2 + \frac{x-x^2}{n}. \end{aligned}$$

Rozważamy funkcję ciągłą $f(x)$ na $[0,1]$. Ustalamy liczbę $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości można znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$|t-s| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ustalmy punkt x w przedziale $[0,1]$. Liczby naturalne $N_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ podzielimy na dwa podzbiory

$$\begin{aligned} A &= \{k \in N_n \,:\, \left|\tfrac{k}{n} - x\right| < \delta\}, \\ B &= N_n \setminus A. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} &|B_n(f)(x) - f(x)| \\ &\qquad = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right]\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \underbrace{\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\substack{\shortparallel \\ S_A}} + \underbrace{\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\substack{\shortparallel \\ S_B}}. \end{aligned}$$

Dalej

$$S_A < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Wtedy

$$\begin{aligned} S_B &\leqslant 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &\qquad\qquad = \frac{2M}{\delta^2}[x^2 B_n(1)(x) - 2xB_n(x)(x) + B_n(x^2)(x)] \\ &\qquad\qquad = \frac{2M}{\delta^2}\left[x^2 - 2x^2 + x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right] = \frac{2M}{\delta^2 n}(x - x^2) \leqslant \frac{M}{2\delta^2 n}. \end{aligned}$$

Dla $n > \dfrac{M}{\delta^2\varepsilon}$ mamy $S_B < \varepsilon/2$. Zatem $|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla odpowiednio dużych wartości n. □

Uwaga 10.2. Z dowodu wynika, że wielkość wskaźnika n zależy tylko od parametrów ε, $\delta > 0$ i M.

Uwaga 10.3. Dla funkcji f i liczby x wielkość $B_n(f)(x)$ jest średnią ważoną liczb $f\left(\frac{k}{n}\right)$, dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, ze współczynnikami $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Suma współczynników jest równa 1. Sprawdzimy, który współczynnik jest największy dla $0 < x < 1$. W tym celu rozwiązujemy nierówność

$$\binom{n}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)} \leqslant \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\frac{1-x}{n-k+1} \leqslant \frac{x}{k}.$$

Dalsze przekształcenia dają warunek równoważny

$$\frac{k}{n+1} \leqslant x.$$

Zatem największy współczynnik odpowiada wartości k_0, dla której

$$\frac{k_0}{n+1} \leqslant x < \frac{k_0+1}{n+1}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{k_0}{n+1} < \frac{k_0}{n} \leqslant \frac{k_0+1}{n+1}.$$

Zatem

$$\left| \frac{k_0}{n} - x \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Przykłady.

1. Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie wynosi p, gdzie $0 < p < 1$. Wykonujemy próbę n razy (niezależnie). Przy n próbach wygrana wynosi $f\left(\frac{k}{n}\right)$, gdzie k jest liczbą sukcesów, a f jest ustaloną funkcją ciągłą

na $[0,1]$. Np. jeśli $f\left(\frac{1}{5}\right) = 10$, to przy 12 sukcesach w 60 próbach, wypłata wynosi 10. Wartość oczekiwana wygranej przy n próbach wyraża się wzorem

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} = B_n(f)(p) \xrightarrow[n]{} f(p),$$

bo prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach wynosi

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \,^*$$

2. Rzucamy kostką do gry. Sukcesem jest wypadnięcie szóstki. Funkcja wypłaty $f(x)$ spełnia

$$f(1) = 10^6, \qquad f\left(\frac{1}{6}\right) = -0,01.$$

Czy gra jest opłacalna przy dużej liczbie rzutów ?

*Najpierw wybieramy k pozycji spośród n pozycji, gdzie ma wystąpić sukces. Możemy dokonać wyboru na $\binom{n}{k}$ sposobów. Dalej prawdopoodobieństwo sukcesów na wybranych k pozycjach i porażki na pozostałych $n-k$ pozycjach wynosi $p^k(1-p)^{n-k}$.