Lista powtórkowa przed egzaminem, Analiza Matematyczna I

1. Wyznaczyć granice

(a)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} tg\,(3x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right),$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right),$$

(c)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{tg2x},$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}(tgx)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln^2 x$$

(f)
$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}},$$

(g)
$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\text{arctg}\,x)\ln x.$$

(h)
$$\lim_{x\to 0}(\ln(e+x^3))^{\frac{1}{x^3}}$$

2. Wyznacz asymptoty funkcji $f(x)=x\ln(e+3x^{-2})$.

3. Funkcje f, g są trzykrotnie różniczkowalne w otoczeniu zera oraz spełniają warunki: $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=g'(0)=1$. Niech $h(x)=g(f(x))-f(g(x))$. Obliczyć $h^{(3)}(0)$.

4. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

5. Rozwiń w szereg Taylora w punkcie $x=0$ funkcje

(a)
$$x^3\cos(x^2)$$

(b)
$$\ln(1+x^4)$$

(c)
$$f(x)=\frac{2\cos x-2}{x^2}\qquad (f(0)=0)$$

6. Oszacuj błąd przybliżenia
$$e^x\simeq 1+x+x^2/2+...+x^n/(n!)\quad (x\in[0,1])$$
$$\sqrt{1+x}\simeq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\quad (x\in[0,1])$$

7. Rozwiń w szereg funkcję $f(x)=x\sqrt{x}$ w otoczeniu punktu $x=1$.

8. Dana jest funkcja
$$f(x)=x\sin(2x^2).$$

(a) Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora (Maclaurina) wokół punktu $x=0$ funkcji $f(x)$.
(b) Dla jakich x-ów szereg jest zbieżny?
(c) Wyznaczyć $f^{(2022)}(0)$ oraz $f^{(2023)}(0)$.

9. Dana jest funkcja
$$f(x)=xe^{5x^5}.$$

(a) Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora (Maclaurina) wokół punktu $x=0$ funkcji $f(x)$.
(b) Dla jakich x szereg jest zbieżny?
(c) Wyznaczyć $f^{(2021)}(0)$ oraz $f^{(2022)}(0)$.

10. Wykazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cos(2^n x)$$

(a) jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$,
(b) zadaje funkcję różniczkowalną na $\mathbb{R}$.

11. Wykazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$$

(a) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-2022, 2022]$,
(b) zadaje funkcję różniczkowalną na przedziale $[-2022, 2022]$.

12. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć szereg Taylora funkcji $f(x)$.

13. Dany jest szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{3^n}$. Znaleźć promień zbieżności oraz wyznaczyć $f^{(81)}(0)$.

14. Czy funkcja $x \ln x$ określona na $(0, \infty)$ jest wypukła?