1. Zbadać zbieżność szeregów używając kryterium d'Alemberta, Cauchy'ego, twierdzenia o zagęszczaniu lub innych narzędzi.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2021^n}{n!}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

f) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2021^n}{(\log n)^n}$$

g) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{2021}}$$

ḣ) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{10}}$$

i̇) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^2}$$

j̈) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

k) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$$

l̇) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

m̈) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$$

n̈) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{gdzie} \qquad a_n = \begin{cases} n^{-1}, & \text{jeli } n = m^2 \\ n^{-2}, & \text{jeli } n \neq m^2 \end{cases}$$

ö) [1]

$$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \ldots.$$

2̇. Niech λ_n będą kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równania $\operatorname{tg} x = x$. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

3̈. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-2}$, gdzie $\lambda(n)$ oznacza ilość cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n.

4̈. Uogólnić twierdzenie Cauchy'ego o zagęszczaniu: jaka własność ciągu indeksów g_n gwarantuje, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1} - g_n) a_{g_n},$$

przy czym zakładamy, że ciąg a_n maleje do 0. Czy można przyjąć $g_n = n^2$?

5̇. Stosując mnożenie Cauchy'ego szeregów wykazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1.$$

[1] *Wskazówka:* $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$.

6. Stosując mnożenie Cauchy'ego szeregów dla $|q| < 1$ obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$.

7. Zbadać zbieżność szeregu $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$ dla $p, q > 0$.

8. Przestawić wyrazy zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.

9. Dowieść, że jeśli permutacja $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ma własność $|\sigma(n) - n| \leq M$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ i sumy obu szeregów są równe.

10. Dla jakich wartości $x, y \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^{[n/2]} y^{[(n+1)/2]}$ jest zbieżny. Znaleźć sumę tego szeregu.

11. Zbadać zbieżność szeregów[2]. W przykładach od a) do f) zbadać również zbieżność bezwzględną.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p > 0,$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad x \notin \mathbb{Z},$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3-2},$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in (0, 1),$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n}$$

f) [3]
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log_2(n+1)]}}{n}$$

g) [4]
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$$

[2] *Wskazówka:* Mogą się przydać kryteria Abela lub Dirichleta.
[3] *Wskazówka:* Zbadać $s_{2^{2n+1}-2} - s_{2^{2n}-2}$.
[4] *Wskazówka:* Skorzystać ze wzoru na iloczyn sinusów.