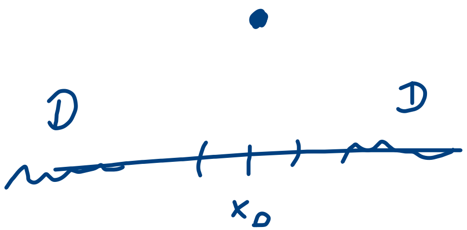
Uwaga 30. *Mając $f : D \to \mathbb{R}$ ciągłość w punkcie $x_0 \in D$ można zdefiniować za pomocą definicji Cauchy'ego*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

lub definicji Heinego. Są to definicje równoważne. Zauważmy, że gdy x_0 jest punktem izolowanym, tzn. $(x_0 - \kappa, x_0 + \kappa) \cap D = \{x_0\}$ dla pewnego $\kappa > 0$, powyższa definicja jest automatycznie spełniona. Równolegle nie ma ciągów zbieżnych do x_0 w zbiorze $D \setminus \{x_0\}$ więc możemy przyjąć, że definicja Heinego również jest spełniona.



Przykład 31. *Przykłady funkcji ciągłych:*

1.

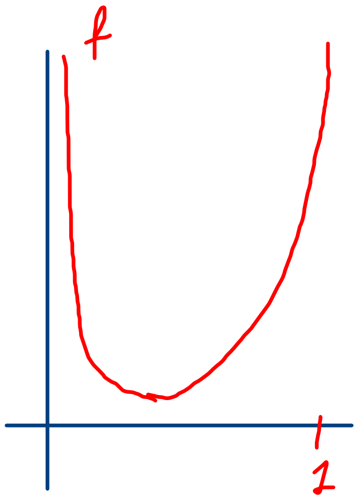
$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)}, \quad x \in (0,1),$$

2.

$$g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0,$$

3.

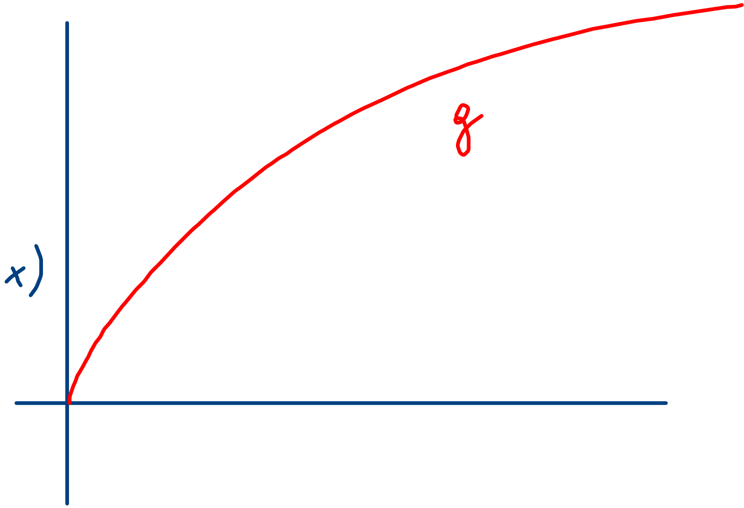
$$h(x) = \sqrt{x(1-x)}, x \in [0,1].$$



2. $|\sqrt{y} - \sqrt{y_0}| = \frac{|y-y_0|}{\sqrt{y}+\sqrt{y_0}} \leq \frac{|y-y_0|}{\sqrt{y_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{y_0}} = \varepsilon$ $\quad y_0 > 0 \quad |y-y_0| < \delta$

$y_0 = 0 \quad |\sqrt{y}| < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

$|y| < \delta$



3. Dla $x \in (0,1)$ to jest złożenie funkcji $x \mapsto x(1-x)$ i $x \mapsto \sqrt{x}$.

dla $x = 0$ $\quad x_n \to 0^+ \quad y_n = x_n(1-x_n) \to 0^+ \quad \sqrt{y_n} \to 0$ (z 2.)

Definicja 32. *Niech D będzie podzbiorem $\mathbb{R}$. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze D, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D \quad (|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)\,.$$

Uwaga 33. *Jeśli f jest jednostajnie ciągła na pewnym zbiorze D, to jest ciągła w każdym punkcie zbioru D.*

Uwaga 34. *W jednostajnej ciągłości wielkość δ dobieramy uniwersalną na podstawie tylko wartości ε. W definicji ciągłości w punkcie wielkość δ może zależeć zarówno od ε jak i od punktu, w którym badamy ciągłość.*

Twierdzenie 35. *Funkcja ciągła zdefiniowana na odcinku domkniętym $[a, b]$ jest jednostajnie ciągła.*

d-d

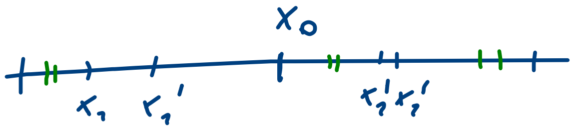
Nie wprost. Wtedy $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x' \in [a, b] \quad |x - x'| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{n} \to x_n, x_n' \quad |x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \ \wedge \ |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon.$

$$\underset{\displaystyle x_{n_k}}{\overset{[a,b]}{\ni}}$$

z tw. Weierstrassa $\exists n_k \quad x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_0 \in [a, b]$

z domkniętości



$$x_{n_k}' = \underbrace{x_{n_k}' - x_{n_k}}_{\to 0} + \underbrace{x_{n_k}}_{\downarrow\, x_0} \xrightarrow[k]{} x_0$$

$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_0)$ z ciągłości

$f(x_{n_k}') \xrightarrow{k} f(x_0)$ —"—

$$\underset{\displaystyle \varepsilon}{\overset{}{}} |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \xrightarrow[k]{} |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

$\geq$

ε

Sprzeczność!

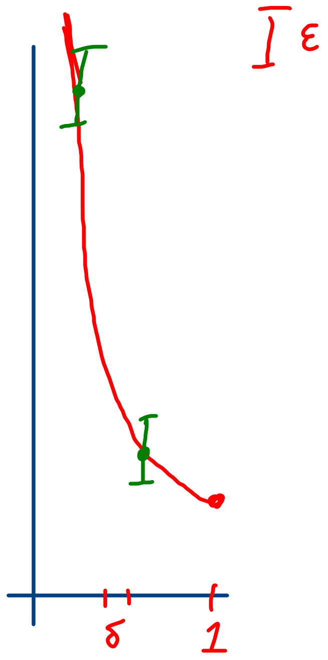
Uwaga 36. *Powyższe twierdzenie nie zachodzi na prostej, półprostej, ani na odcinku otwartym.*

Przykład 37. **1.** *Funkcja $f(x) = x^{-1}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1]$.*

2. *Funkcja $g(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $[0,\infty)$.*

3. *Funkcja $h(x) = \sin(1/x)$ nie jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0,1]$.*

4. *Funkcja $k(x) = \sqrt{|x|}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$ (uwaga lekko na wyrost: ale jej pochodna nie jest ograniczona i nachylenie koło zera jest dowolnie duże).*



1. Weźmy $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_n' = \frac{2}{n}$ $\quad |x_n - x_n'| = \frac{1}{n} \to 0$

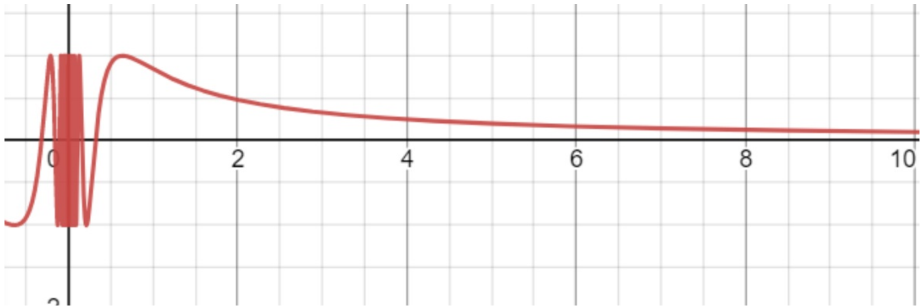
$$|f(x_n) - f(x_n')| = |n - \tfrac{n}{2}| = \frac{n}{2} \to \infty$$

$$\geq 1$$

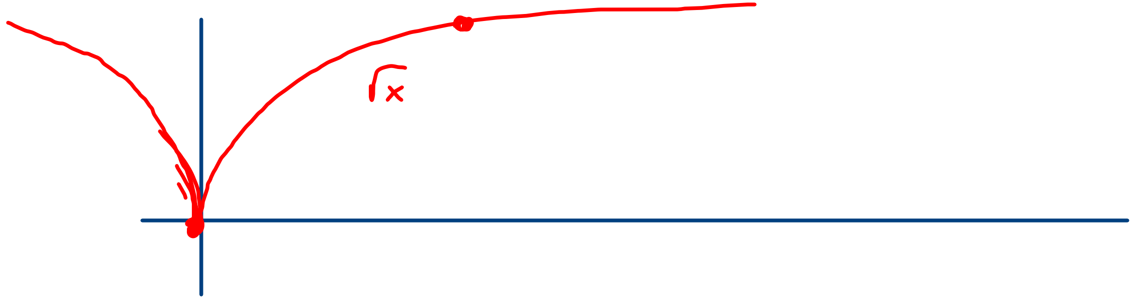
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D \quad (|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

3. $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $\quad x_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

$|x_n - x_n'| \to 0$ $\quad |f(x_n) - f(x_n')| = 1$



4.



Uwaga 38. *Jeśli nachylenie wykresu jest ograniczone, tzn.*

$$\text{(L)} \qquad \exists L \quad \forall x, x' \in D \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|,$$

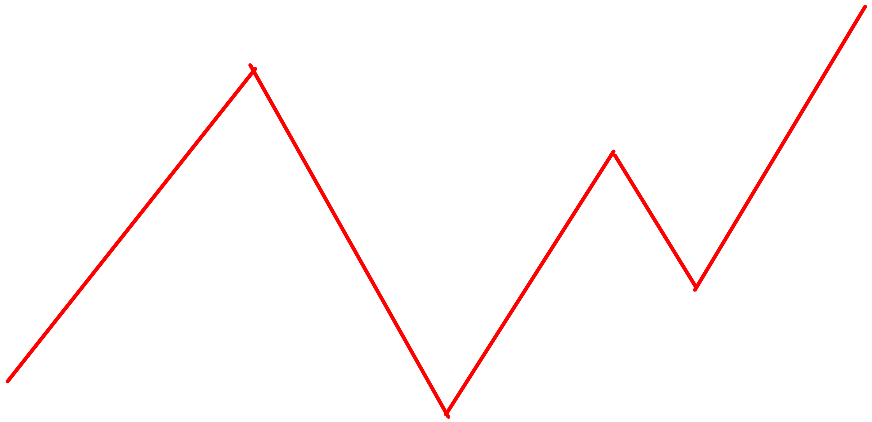
to funkcja jest jednostajnie ciągła na D.

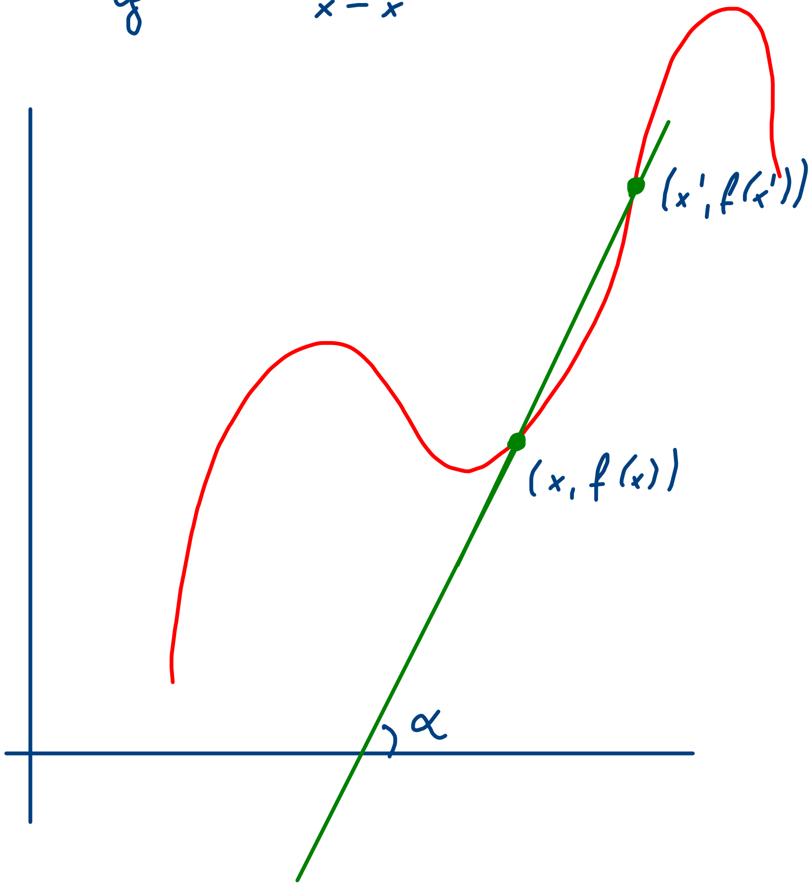
d-d

Nied $\varepsilon > 0$ i $|x - x'| < \delta$

$$|f(x) - f(x')| \leq L \cdot \delta := \varepsilon$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$





Uwaga 39.

- *Warunek (L) jest nazywany warunkiem Lipschitza.*
- *Warunek (L) nie jest konieczny do jednostajnej ciągłości (np. $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$.)*
- *Uwaga na przyszłość: jeśli pochodna funkcji jest ograniczona, to warunek (L) jest spełniony a za L można przyjąć supremum wartości pochodnej.*
- *Pewnym uogólnieniem warunku (L) jest warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0$, który zakłada że*

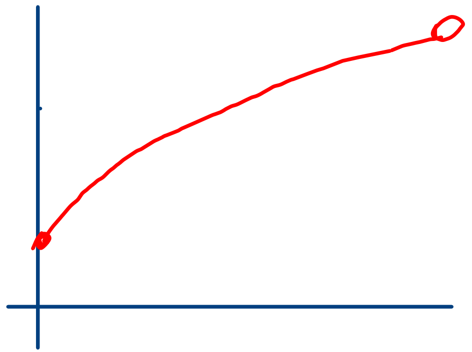
$$\text{(L)} \qquad \exists L \quad \forall x, x' \in D \quad |f(x) - f(x')| \le L|x - x'|^{\alpha}.$$

C

C

Twierdzenie 40. *[Twierdzenie Weierstrassa] Funkcja ciągła f określona na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest ograniczona i osiąga swoje kresy, tzn. istnieją $c,d\in[a,b]$, takie że*

$$f(c)=\inf_{x\in[a,b]} f(x),\qquad f(d)=\sup_{x\in[a,b]} f(x).$$



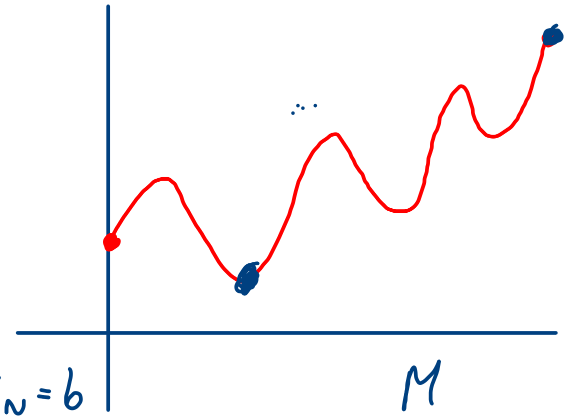
d-d $\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}\quad$ ciągła

① f jest ograniczona

Skoro f ciągła na $[a,b]$ to jest jednost. ciągła.

$\varepsilon=1\quad \exists\,\delta>0\quad \forall\, x,x'\in[a,b]\quad |x-x'|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<1$

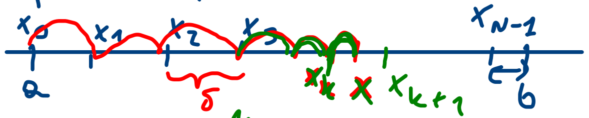
Niech $\left[\frac{b-a}{\delta}\right]+1=N \qquad a=x_0,\ x_1=x_0+\delta,\ x_2=x_0+2\delta,\ \dots,\ x_{N-1}=x_0+(N-1)\delta,\ x_N=b$



Dla $\quad x\in[x_0,x_1]\quad |f(x)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\le|f(x_0)|+1$

⋮

$\underbrace{x\in[x_k,x_{k+1}]}_{k=0,\dots,N}\quad |f(x)|\le|f(x_0)|+\sum_{j=1}^{k}|f(x_j)-f(x_{j-1})|+|f(x)-f(x_k)|\le|f(x_0)|+k+1\le |f(x_0)|+N+1 = M$



$x=\cancel{x}-x_k+\sum_{1}^{k}(x_j-x_{j-1})+x_0$

Twierdzenie 40. *[Twierdzenie Weierstrassa] Funkcja ciągła f określona na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest ograniczona i osiąga swoje kresy, tzn. istnieją $c, d \in [a,b]$, takie że*

$$f(c) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(d) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

② B.S.O. pokażemy, że osiąga supremum $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\{f(x) : x\in[a,b]\}$

Zał. nie wprost, że nie osiąga M, tzn

$\forall x\in[a,b] \quad f(x) < M$

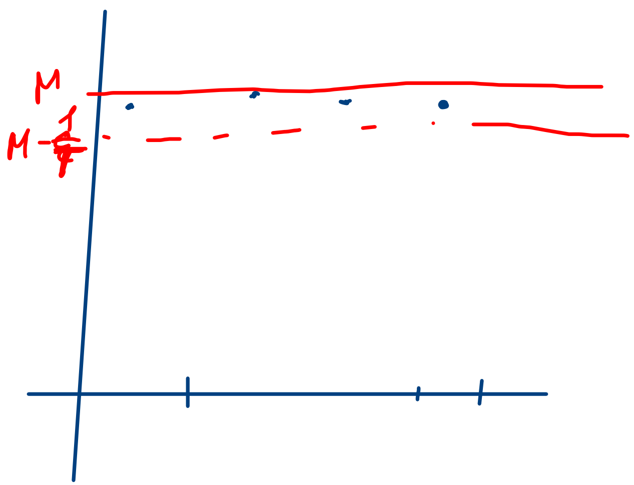
Zatem $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\underbrace{M - f(x)}_{>0}}$ jest ciągła

Z części ① $\quad g(x) \leq T \qquad \dfrac{1}{M - f(x)} \leq T \qquad \dfrac{1}{T} \leq M - f(x)$

$f(x) \leq \underbrace{M - \frac{1}{T}}_{\wedge \atop M}$ dla $x\in[a,b]$ sprzeczność

$M \leftarrow$ to jest sup.

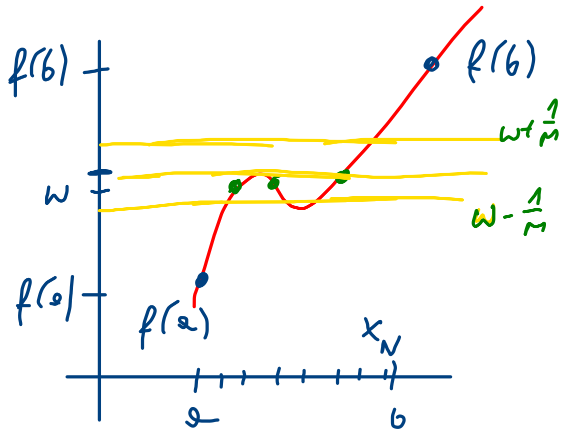
$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq M - \frac{1}{T}$



Twierdzenie 41. *[Własność Darboux] Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ przechodzi od wartości $f(a)$ do wartości $f(b)$ przez wszystkie wartości pośrednie, tzn. dla dowolnej liczby w leżącej pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$, istnieje punkt $c \in (a,b)$, dla którego $f(c) = w$.*

d-d

B.S.O. $f(a) < f(b)$ i niech $w \in (f(a), f(b))$



Zał. nie wprost, że $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \neq w$

Rozważmy $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{|f(x) - w|}$ ciągła

Jest więc $g(x) \leq M$ dla $x \in [a,b]$

$\frac{1}{|f(x)-w|} \leq M$ $|f(x) - w| \geq \frac{1}{M}$

Z jednostajnej ciągłości dla $\varepsilon = \frac{1}{M}$ mamy $\delta > 0$ $\forall x, x'$ $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{1}{M}$

$x_0 = a$, $x_1 = a + \delta$, $x_2 = a + 2\delta$, ..., ..., $x_N = a + N\delta$ $|x_N - b| \leq \delta$

$k_0 = \max\{k : f(x_j) < w - \frac{1}{M}$ dla $j = 0, 1, \dots, k\}$

$\neq \emptyset$ bo $f(a) < w$

$\neq N$ bo $f(b) > w + \frac{1}{M}$

$f(x_{k_0}) < w - \frac{1}{M}$

$f(x_{k_0+1}) > w + \frac{1}{M}$

ale $|x_{k_0} - x_{k_0+1}| = \delta$

więc

$\frac{2}{M} \leq |f(x_{k_0}) - f(x_{k_0+1})| < \frac{1}{M}$

sprzeczność

Wniosek 42. *Funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy swoimi kresami dolnym i górnym.*

d-d $\quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(d) \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$

i z tw. Darboux f przyjmuje wszystkie wartości z przedz. $[f(c), f(d)]$

Przykład 43. *Równanie*

$$w(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0$$

ma rozwiązanie w przedziale $(1/2, 1)$.

$w(0) = -3 < 0 \quad w(1) = 1 > 0 \quad w(\frac{1}{2}) < 0 \quad 0 \in (w(\frac{1}{2}), w(1))$

$\overset{\text{tw.D.}}{\Longrightarrow} \exists c \in (\frac{1}{2}, 1) \quad w(c) = 0$

Przykład 44. *Funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ma własność Darboux na dowolnym przedziale, ale nie jest ciągła.