Lista powtórkowa przed 2. kolokwium, Analiza Matematyczna I

1. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{(n+1)^n},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{3n^2-2},$$

(b) [1]
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt[3]{n}} \right),$$

(c)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{2021}}{n\sqrt{n}},$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$$

(e)
$$\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{1}{n \ln\, n \ln(\ln\, n) \ln(\ln(\ln^2 n))},$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(4n)}{n^2},$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right),$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n^n}{2^{n^2}},$$

(i)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{2021}}{(1+n\ln n)^{2022}},$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+2021},$$

(k)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(5n)}{\ln n} \left(\frac{e^{2n}+2e^n+3}{e^{2n}} \right).$$

2. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3nx)\arctan n}{\sqrt{n}}$$
jest zbieżny?

3. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1 \leq x < 2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2 \leq x \end{cases}$$
jest ciągła?

4. Funkcja f jest zadana przez
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\mathrm{tg}(ax)-\sin(ax)} & \text{dla } x < 0 \\ 2022 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\log_b(x^2+1)}{x^2} & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$
Dla jakich wartości $a, b > 0$ funkcja ta jest ciągła w 0?

[1] Wskazówka: Co wiadomo o sumach częściowych $\sum_{n=1}^{N} \sin(3n)$?

5. Funkcja f jest zadana przez

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a^x-1}{x} & \text{dla } x<0\\ 3 & \text{dla } x=0\\ \frac{1-\cos(bx)}{x^2} & \text{dla } x>0\end{cases}.$$

Dla jakich wartości $a,b>0$ funkcja ta jest ciągła na $\mathbb{R}$?

6. Niech f będzie funkcją określoną na pewnym otoczeniu punktu 0 i $g\in\mathbb{R}$. Czy warunki

(W) Dla każdego ciągu $x_n\to 2, x_n\neq 2,$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2-x_n-2)=g.$

(G) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=g$

są równoważne?

7. Załóżmy, że dla każdego $x\neq 0$ funkcja $f(x)$ ma własność $f(x/\sqrt{n})\to 0$ gdy $n\to\infty$. Czy funkcja f ma granicę zero w punkcie zero?

8. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}.$$

9. Wyznacz granice:

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{\operatorname{tg}^2(4x)},$$

(b)
$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\operatorname{tg}^2(4x)},$$

(c)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{x-2},$$

(d)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^2+18}-3}{\sqrt{x+1}-2},$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{(e^x-1)^2},$$

(f)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{e^x-e},$$

(g)
$$\lim_{x\to 0^+}(1-\sin x)^{1/x},$$

(h)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[2021]{x}}{\ln^{2022} x}.$$

10. Niech $[x]$ i $\{x\}$ oznaczają odpowiednie: część całkowitą i ułamkową liczby $x\in\mathbb{R}$. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadana jest przez

$$f(x)=[3x]+\{x+1/3\}.$$

W których punktach $f(x)$ jest ciągła, a w których nieciągła?

11. Znajdź funkcję odwrotną do $\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$.

12. Skonstruuj funkcję nieciągłą we wszystkich punktach postaci $n+1/n$ dla $n\in\mathbb{N}$.

13. Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\qquad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(a) $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$
(b) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$

14. Czy warunek

$$\forall \delta \in (0,1) \quad \exists \kappa > 0 \quad \forall x, y \in D \quad \left(|x-y| < \kappa^2 \implies f(x) - f(y) < -(\ln \delta)^{-1}\right)$$

jest równoważny jednostajnej ciągłości funkcji f na zbiorze D?

15. Czy funkcja e^x jest jednostajnie ciągła na przedziałach $(-\infty, 0]$, $[-1, 1]$, $[0, \infty)$?

16. Czy funkcje:

(a)
$$g(x) = \sin(\sqrt{x})$$

(b)
$$h(x) = \sin(x^2)$$

są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$?

17. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^{-1/2}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0, 1]$.

18. Funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma asymptotę ukośną $y = x + 3$ w $+\infty$, tzn.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+3)) = 0.$$

Udowodnić, że f jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$.

19. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

20. Udowodnić, że wielomian

$$W(x) = x^6 - 2022x^4 - 2021x^3 + 1$$

ma przynajmniej cztery pierwiastki rzeczywiste.

21. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos\left(x^3\right)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

22. Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ spełnia:

$$f(2^n) = \frac{4^n + 3 \cdot 2^n + 1}{2^n + 2}$$

oraz

$$f(3^n) = \frac{27^n + 1}{9^n + 1}.$$

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele $x \in \mathbb{R}$, takich że $f(x) = x$.