Lista 11, Analiza Matematyczna I

1. Znaleźć wartości największą i najmniejszą funkcji w podanych przedziałach.

a)

$$\frac{x+1}{x^2+1},\ [-1, \frac{1}{2}]$$

b)

$$\sin|x| + \cos x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}x,\ [-\pi/2, \pi/2]$$

2. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $a \leq x \leq b$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej pokazać, że $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$, czyli $f(a) - M(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania oszacować od góry liczby: $\sqrt{101}$[1], $28^{2/3}$ i $33^{1/5}$.

4. Niech $g(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$. Pokazać, że dla pewnej liczby $c \in (-1, 1)$ zachodzi $4c^3 - 60c^2 - 50c - 1 = 0$. [2]

5. Załóżmy, że $f(x) = xg(x)$ oraz funkcja $g(x)$ jest ciągła w zerze. Pokazać, że $f'(0)$ istnieje.

6. Pokazać, że jeśli $f'(0)$ istnieje oraz $f(0) = 0$, to istnieje funkcja g ciągła w zerze taka, że $f(x) = xg(x)$.

7. Funkcja $g(x)$ jest ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b). Pokazać, że jeśli $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$, to funkcja $g(x)$ jest albo ściśle rosnąca albo ściśle malejąca.

8. Pokazać, że pochodna dowolnej funkcji różniczkowalnej ma własność Darboux, tzn. jeśli $f'(a) < \alpha < f'(b)$, to dla pewnego punktu c leżącego pomiędzy punktami a i b zachodzi $f'(c) = \alpha$. [3]

9. Wielomian $W(x)$ stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Pokazać, że $W'(x)$ ma $n-1$ pierwiastków rzeczywistych.

10. Wielomian $W(x)$ stopnia n ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami). Pokazać, że $W'(x)$ ma $n-1$ pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami).

11. Pokazać, że jeśli liczby rzeczywiste $c_0, c_1, \ldots, c_n$ spełniają zależność

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0,$$

to wielomian $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek pomiędzy 0 i 1.

12. Załóżmy, że funkcja $f'(x)$ przyjmuje wartość m co najwyżej n razy. Pokazać, że każda prosta o nachyleniu m przecina wykres funkcji $y = f(x)$ co najwyżej $n+1$ razy.

13. Liczba a jest punktem stałym funkcji f jeśli $f(a) = a$. Pokazać, że jeśli $f'(x) < 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f może mieć co najwyżej jeden punkt stały. Pokazać, że funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{2}x$ ma tylko jeden punkt stały $x = 0$.

---

[1] *Wskazówka:* Niech $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$ oraz $b = 101$.

[2] *Wskazówka:* Pokazać wcześniej, że funkcja $g(x)$ ma przynajmniej dwa miejsca zerowe w przedziale $(-1, 1)$.

[3] *Wskazówka:* Rozważyć funkcję $g(x) = f(x) - \alpha x$ i Skorzystać z poprzedniego zadania.

14. Udowodnić tożsamości: [4]

ȧ)

$$2\mathrm{arctg}\, x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi\, \mathrm{sgn}\, x, \quad |\, x \,| \geq 1,$$

ḃ)

$$\mathrm{arctg}\, \frac{1+x}{1-x} - \mathrm{arctg}\, x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}, \quad x \neq 1,$$

ċ)

$$2\mathrm{arctg}\, (x + \sqrt{x^2+1}) - \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

15. Znaleźć punkt na wykresie funkcji $y = x^{1/2}$ położony najbliżej punktu $(4, 0)$.

i6. Pojemnik w kształcie cylindra jest wypełniony wodą do wysokości H. W miejscu położonym h m poniżej poziomu wody znajduje się mały otwór. Według prawa Torricelliego prędkość (pozioma) wody przepływającej przez otwór wynosi $\sqrt{2gh}$. Strumień wody spada w pewnej odległości R od dolnej krawędzi cylindra. Wyznaczyć wartość h dla której R jest maksymalne. Następnie obliczyć maksymalną wartość R.

i7. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi x, jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y = e^{-x}$.

- Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ pole R jest mniejsze niż ε, jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.
- Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

i8. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y = e^{-x}$.

- Pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.
- Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.

---

[4] *Wskazówka:* Obliczyć pochodną lewej strony równości.