Definicja 2. *[Heinego granicy funkcji] Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona wokół punktu a (ale niekoniecznie w punkcie a). Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeśli dla każdego ciągu x_n zbieżnego do a, ale $x_n \neq a$, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g. Piszemy wtedy*

$$\lim_{x \to a} f(x) = g.$$

$f(x_n) \to g$

$x_n \to a$

Definicja 6. *[Cauchy'ego granicy funkcji] Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x-a| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \qquad |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 8. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy są równoważne.*

Twierdzenie 8. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy są równoważne.*

Dowód:

- $C \Rightarrow H$

Załóżmy, że $\lim_{x \to a} f(x) = g$ w sensie Cauchy'ego.

Weźmy dowolny ciąg $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Chcemy pokazać, że $f(x_n) \to g$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ t. że jeśli $0 < |x - a| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Wiemy, że istnieje N t. że $0 < |x_n - a| < \delta$ dla $n > N$.

W takim razie $|f(x_n) - g| < \varepsilon$ dla $n > N$

• $H \Rightarrow C$ $\qquad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon)$

Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ w sensie Heinego i że g nie jest granicą f w a w sensie Cauchy'ego.

$$\boxed{\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_x (0<|x-a|<\delta \text{ i } |f(x)-g| \geq \varepsilon)}$$

Weźmy ten ε. Niech $\delta_n = \frac{1}{n}$ i weźmy x_n odpowiadającego δ_n.

$0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$ i $|f(x_n)-g| \geq \varepsilon$

Ale ciąg $x_n \to a$, czyli $f(x_n) \to g$ i to jest sprzeczność z

Twierdzenie 10. *Funkcja f ma granicę w punkcie a wtedy i tylko wtedy gdy spełnony jest warunek*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Dowód:

• $\Rightarrow$ Załóżmy, że $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że istnieje δ t.że jeśli $0 < |x-a| < \delta_m$, to $|f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. W takim razie jeśli $x_1, x_2 \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - g - f(x_2) + g| \leq \underbrace{|f(x_1) - g|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_2) - g|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Twierdzenie 10. *Funkcja f ma granicę w punkcie a wtedy i tylko wtedy gdy spełnony jest warunek*

$0<|x_1-a|<\delta$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad *$$

• $\Leftarrow$ Weźmy $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Chcemy pokazać, że $f(x_n)$ spełnia warunek C. dla ciągów. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje δ spełniająca $*$. Ponieważ $x_n \to a$, więc dla $n > \underline{N}$ $0<|x_n - a|<\delta$, czyli $*$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ dla $n, m > \underline{N}$. $0<|x_m-a|<\delta$. To znaczy, że $f(x_n)$ spełnia w. C., więc ma granicę g.

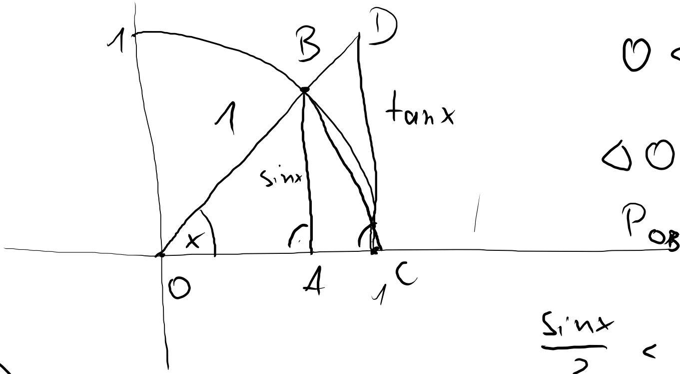
Weźmy $x_n' \to a$. $f(x_n')$ spełnia w. C. i ma granicę g'.

Robimy ciąg $\underset{y_1}{x_1}, \underset{y_2}{x_1'}, \underset{y_3}{x_2}, \underset{y_4}{x_2'}, \ldots$ Ten ciąg zbiega do a, czyli $f(y_n)$ spełnia w. C., więc ma granicę g''

$f(x_n)$ i $f(x_n')$ są podciągami $f(y_n)$, więc mają granicę $g'' = g' = g$.

Twierdzenie 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



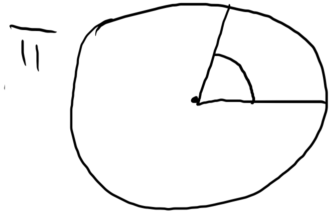
$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\triangle OBC \subseteq \sphericalangle OBC \subseteq \triangle OCD$

$P_{OBC} \le P_{OBC} \le P_{OCD}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$



$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

$$\sin x \overset{*}{<} x \overset{*}{<} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$* \quad \sin x > x\cos x = x\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right) \overset{*}{\geq} x\left(1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = x - \frac{x^3}{2}$$

$$x - \frac{x^3}{2} < \sin x < x$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1$

$\frac{\pi}{2} > x > 0$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$\sin(-x) = -\sin x$

$|x| < \frac{\pi}{2}$

$x \neq 0$