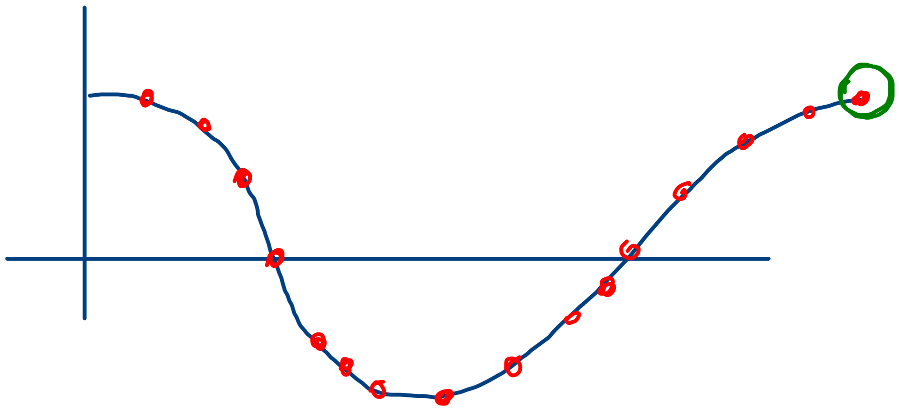
1. (a) Udowodnij, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)}{\sqrt[5]{n}}$$

jest zbieżny.[1]

(b) Zbadaj zbieżność bezwzględną szeregu z podpunktu (a).



(a) • $\frac{1}{\sqrt[5]{n}} \searrow 0$

• $\sup_{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}$

Dirichlet

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)\right|}{\sqrt[5]{n}}$ $\qquad n = 16k \qquad \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) = \cos(2\pi k) = 1$

$\geqslant$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{16k}} = c \cdot \sum \frac{1}{k^{1/5}} = \infty$

2. Dla jakich parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2+ax^3)-1}{bx^4} & x < 0 \\ e^2 & x = 0 \\ (1+x^{2022})^{\frac{c\sin x}{x^{2023}}} & x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła?

$$\frac{x^4 + 2ax^5 + x^6}{6x^4} = \frac{1 + 2ax + x^2}{6}$$

• ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{\cos(x^2+ax^3)-1}{(x^2+ax^3)^2}}_{\to -1/2} \cdot \underbrace{\frac{(x^2+ax^3)^2}{bx^4}}_{\to 1/b} = -\frac{1}{2b}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} e$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \xrightarrow[y \to \infty]{} e$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underbrace{(1+x^{2022})^{\frac{1}{x^{2022}}}}_{\to e}\right)^{c\frac{\sin x}{x}} = e^c$$

$$\frac{1}{y} = x \to 0^+$$

$$e^c = e^2 = -\frac{1}{2b}$$

$c = 2$ $\quad b = -\frac{1}{2e^2}$

a - dowolne

3. (a) Skonstruuj funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której miejscami zerowymi są liczby całkowite (i tylko one) taką, że równanie

$$f(x) = x$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań dodatnich.

(b) Czy istnieje funkcja spełniająca założenia podpunktu (a), taka że granica

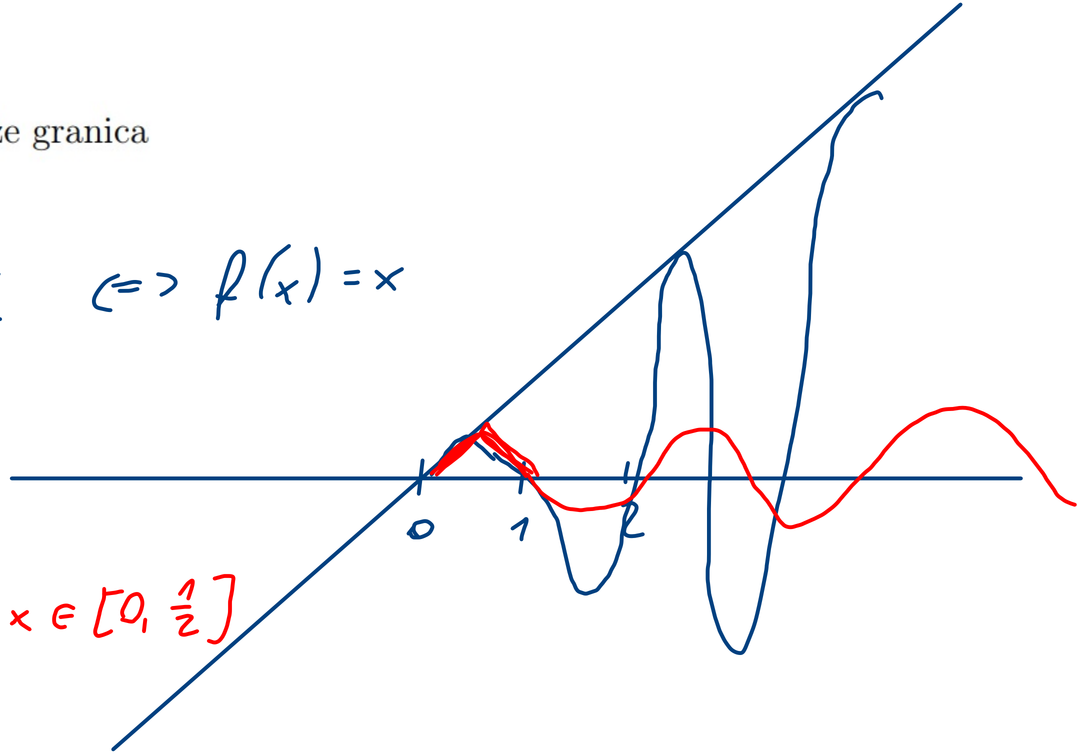
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

istnieje? Odpowiedź uzasadnij.

$\sin(\pi x) = 1 \iff f(x) = x$

$\pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

(a) $f(x) = x\sin(\pi x)$



(b) Tak

$f(x) = x \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$

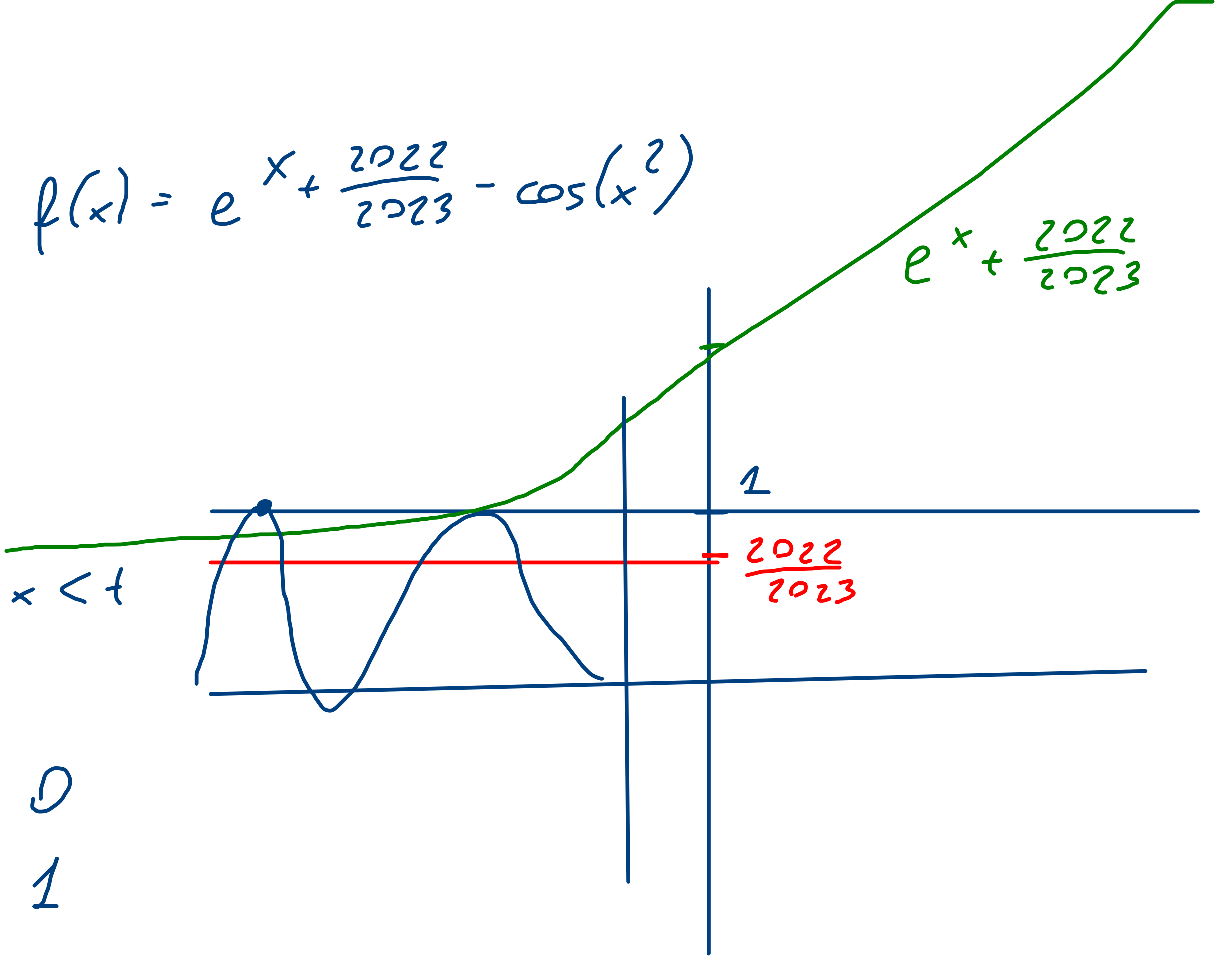
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{na } [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x & \text{na } [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & |x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. Udowodnij, że równanie

$$e^x + \frac{2022}{2023} = \cos(x^2)$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych.

$$f(x) = e^x + \frac{2022}{2023} - \cos(x^2)$$



$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x + \frac{2022}{2023}\right) = \frac{2022}{2023} < 1$$

$\exists\, t<0 \quad e^x + \frac{2022}{2023} < 1$ dla $x<t$

jeśli $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{N}$

$x_k = -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \qquad \cos(x_k^2) = 0$

$y_k = -\sqrt{2k\pi} \qquad \cos(y_k^2) = 1$

$x_k \to -\infty \qquad y_k \to -\infty \qquad x_k, y_k < -t$

to $f(x_k) > 0$

$f(y_k) < 0$

$\exists\, \lambda_k \in (x_k, y_k) \qquad f(\lambda_k) = 0$

różne

przedziały rozłączne

5. Zbadaj, czy funkcja

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

$\underline{x, y \in \mathbb{R}}$

$2|x| \leq x^2+1$

$$\underline{|f(x) - f(y)|} = \left| \frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1} \right| = \frac{|xy^2 + x - x^2y - y|}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\leq \frac{|x-y| + |xy||x-y|}{(x^2+1)(y^2+1)} \underset{|x-y|<\delta}{<} \delta \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|xy|}{(x^2+1)(y^2+1)}}_{\leq 1/4} \Big)$$

$$\leq \frac{5}{4}\delta = \underline{\varepsilon}$$

dla $\underline{\delta = \frac{4}{5}\varepsilon}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \ldots \leq \frac{5}{4}|x-y|$$

6. Wielomian

$$W(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

ma wszystkie współczynniki dodatnie. Udowodnij, że istnieje $c \in \mathbb{R}$, takie że wielomian $\underbrace{W(x) + cx^3}_{P(x)}$ ma 5 pierwiastków rzeczywistych.

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x} = a_1 > 0$$

$$\frac{P(x)}{x} > 0 \text{ na } (-\delta, \delta)$$

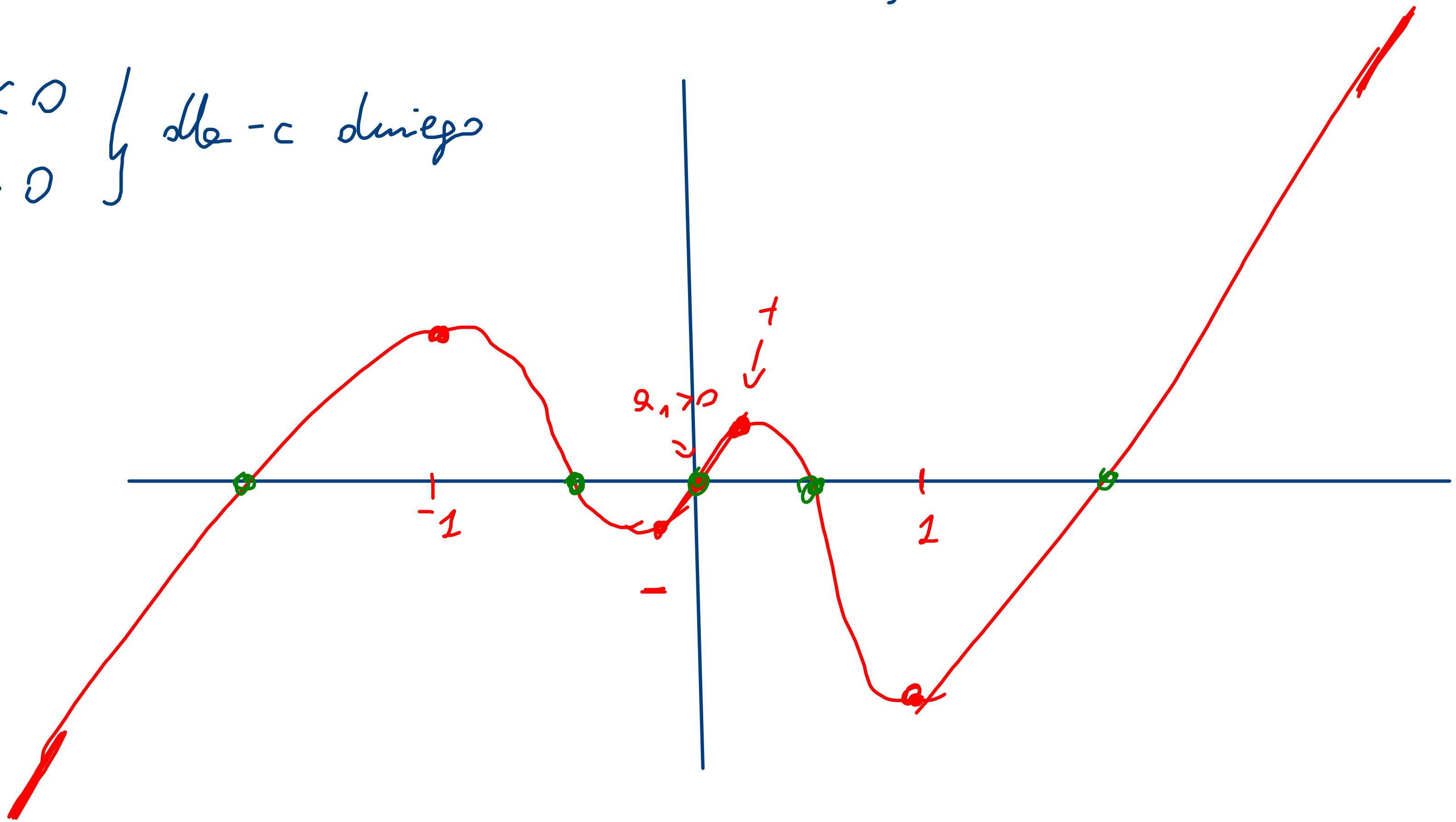
$\downarrow$

$P(x) > 0 \quad x \in (0, \delta)$

$P(x) < 0 \quad x \in (-\delta, 0)$

$$P(x) = a_5x^5 + \dots + a_1x$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = W(1) + c < 0 \\ P(-1) = W(-1) - c > 0 \end{array}\right\} \text{dla } -c \text{ dużego}$$



6. Funkcja ciągła $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ma granicę w nieskończoności i jest ograniczona. Udowodnij, że

$$g(x) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

jest jednostajnie ciągła na $(0, \infty)$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ (bo $\frac{x}{x+1} \to 0$ i $f(x)$ ogr.)

$\tilde{f}$ – ciągła

$\lim_{x \to \infty} g(x) = 1 \cdot g = g$

$\varepsilon > 0$ to $\exists N \; \forall x > N \; |f(x) - g| < \varepsilon/2$

$\forall x, y \geq N \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| < \varepsilon$

Z jednost. ciągłości na $[0, 1+N]$ funkcji $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dla $0 \leq x, y \leq N+1$ i $|x-y| < \delta$

Jeśli $\delta < 1$, to mamy wszystkie pary.

POCHODNA FUNKCJI

Definicja 1. **Wnętrzem** *zbioru A nazywamy zbiór* punktów *$a \in A$, takich że istnieje przedział (b, c), taki że*

$$a \in (b, c) \subseteq A.$$

Wnętrze zbioru oznaczamy $\mathrm{int}(A)$. *Oczywiście* $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.

Definicja 2. *Każdy przedział otwarty zawierający punkt a nazywamy* **otoczeniem** *punktu a.*

Przykład 3.

$$\mathrm{int}((a, b)) = (a, b), \quad \mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{int}([a, b]) = (a, b), \qquad \mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Definicja 4. *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy* **otwartym**, *jeśli*

$$\mathrm{int}(A) = A,$$

tzn. gdy wraz z każdym punktem zawiera pewne otoczenie tego punktu.

Ciekawostka

$\mathbb{Q} = \{ q_n : n \in \mathbb{N} \}$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n} \right) \subseteq \mathbb{R}$$

A - otwarty

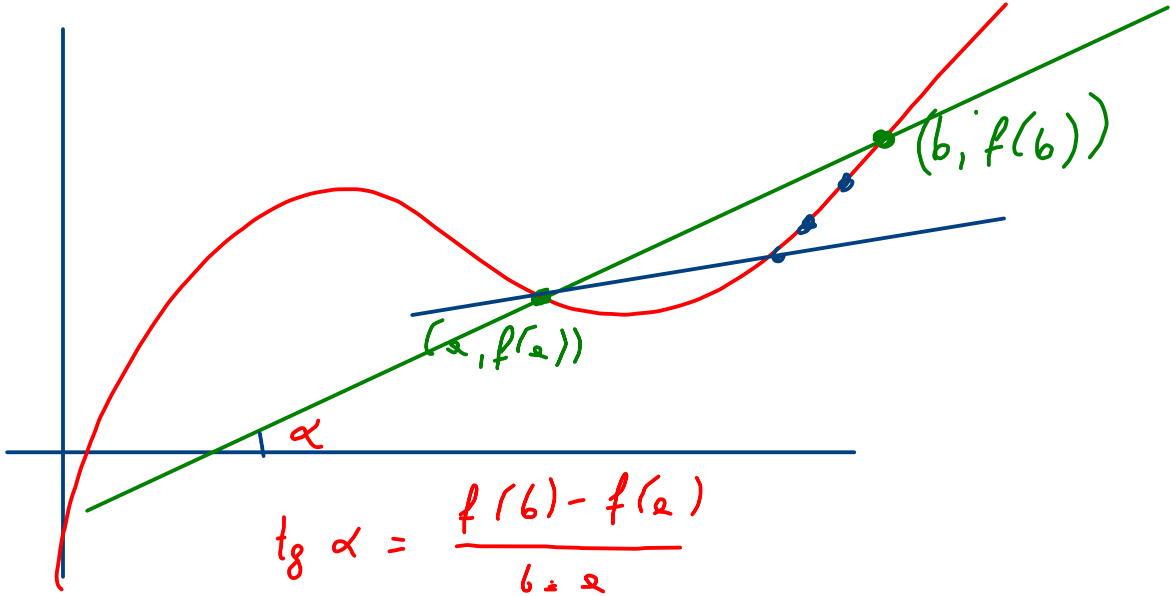
$\mathbb{Q} \subseteq A$

suma dł. przedziałów $= 2$

Uwaga 5. *Pochodne będziemy badać w punktach należących do wnętrza dziedziny. Wyjątkiem będą pochodne jednostronne na końcach przedziałów domkniętych.*

Definicja 6. *Niech dana będzie funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Sieczną nazywamy prostą przechodzącą przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ $(x \neq y)$. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

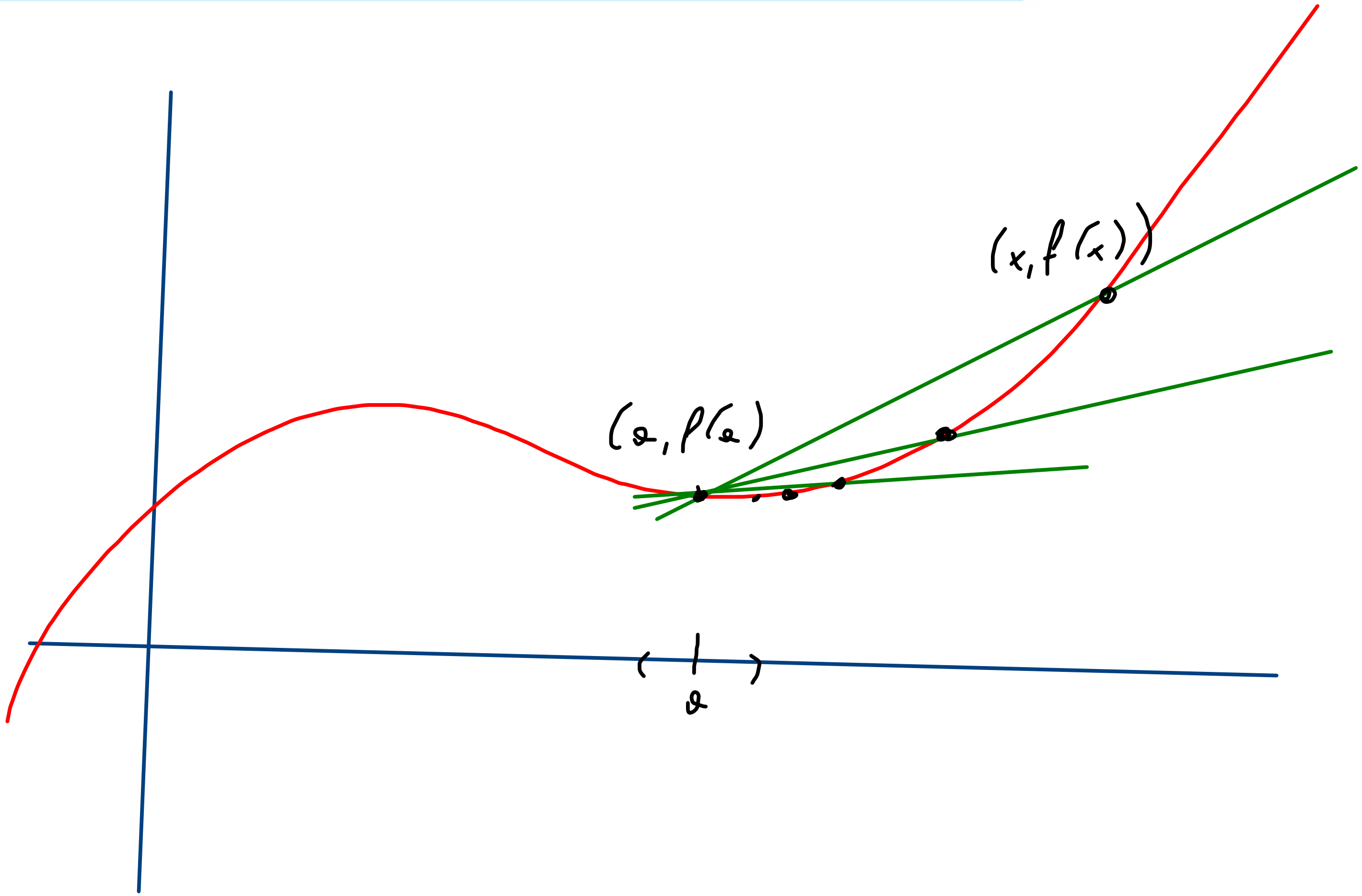


$$tg\, \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Definicja 7. *Niech a będzie punktem z wnętrza dziedziny funkcji f. Jeśli granica*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

istnieje, to mówimy, że funkcja f ma pochodną w punkcie a.



Przykład 8. *Dla* $f(x) = x^3$ *mamy* $f'(1) = 3$. *Ogólniej,* $f'(a) = 3a^2$.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$

Uwaga 9. *Pochodna obrazuje chwilową prędkość funkcji. Jeśli* f *byłoby przebytą drogą, a* x *- czasem, to współczynnik kierunkowy siecznej na przedziale od* a *do* x *byłby średnią prędkością przebytą w tym czasie. Jeśli* $x \to 0$, *to liczymy granicę średnich prędkości, jeśli przedział czasu jest coraz krótszy.*

Definicja 10. *Niech* $a \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(f))$ *i* $f'(a)$ *istnieje. Styczną do wykresu w punkcie* $(a, f(a))$ *nazywamy prostą opisaną równaniem:*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Dom(f)
↑
dziedzina

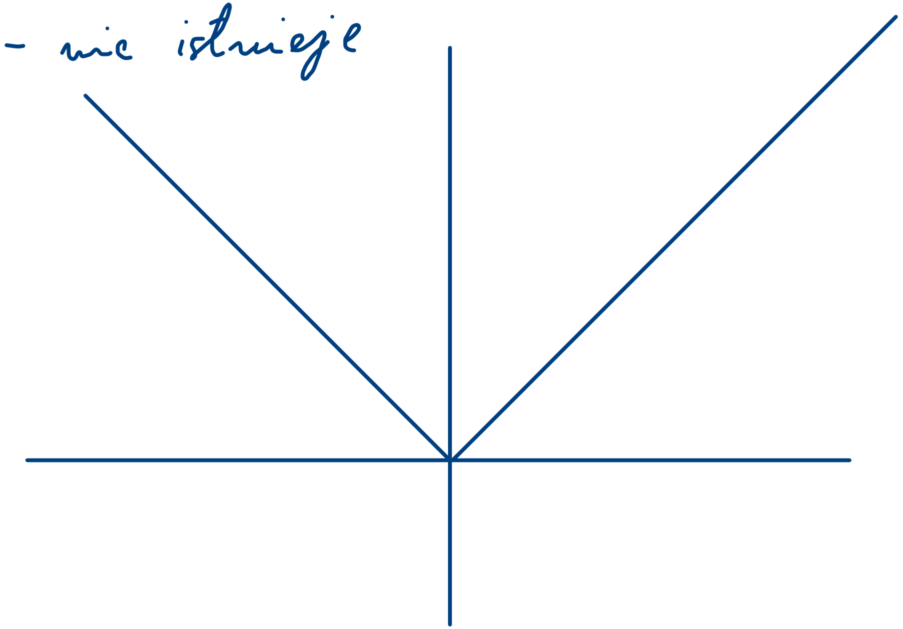
Uwaga 11. *Czasem wygodniej jest liczyć granicę* $x \to a$ *podstawiając* $h = x - a$*. Mamy wtedy* $h \to 0$ *i pochodna wyraża się wzorem*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Przykład 12. *Funkcja $|x|$ nie ma pochodnej w zerze.*

$f(x) = |x|$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x) \text{ - nie istnieje}$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \text{—''—} = 1$$

Twierdzenie 13. *Jeśli funkcja ma pochodną w punkcie a, to jest ciągła w tym punkcie.*

d-d

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \operatorname{int}(D)$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{istnieje}$$

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\downarrow\, f'(a)} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \text{czyli} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

Wniosek 14. *Funkcja $[x]$ nie ma pochodnej w punktach całkowitych.*

Definicja 15. *Załóżmy, że funkcja f jest zdefiniowana na przedziale $[a, a+\delta)$ dla pewnego $\delta > 0$. Pochodną prawostronną w punkcie a nazywamy granicę:*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pod warunkiem, że ta granica istnieje. Podobnie definiujemy pochodną lewostronną.

Wniosek 16. *Jeśli funkcja ma pochodną we wnętrzu przedziału $[a, b]$ i istnieją pochodne $f'(a^+)$, $f'(b^-)$, to funkcja jest ciągła na $[a, b]$.*

d-d

jak w tw. 13.

Twierdzenie 17.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$(\sin x)' = \cos(x)$$
$$(\cos x)' = -\sin(x)$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad a > 0$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad a, x > 0$$

1°

$f(x) = x^n$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^n} + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - \cancel{a^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n \cdot a^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2} a^{n-2} h}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0} \right) = n a^{n-1}$$

Twierdzenie 17.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin x)' = \cos(x)$$

$$(\cos x)' = -\sin(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad a > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad a, x > 0$$

$f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x)$$

x

$\sin\left(\frac{h}{2}\right)$