WYKŁAD 4

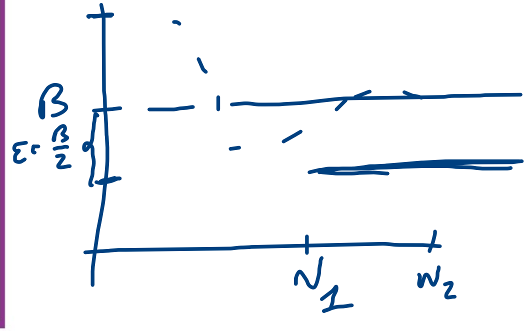
14.10.2022

Twierdzenie 12. *[Arytmetyka granic] Załóżmy, że a_n i b_n są ciągami zbieżnymi oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Wtedy ciągi po lewej stronie poniższych nierówności są zbieżne oraz zachodzi:*

(a) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B} \quad \textit{(pod warunkiem, że } B \neq 0).$$



d-d (c) dla ilorazu

Wystarczy pokazać, że $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$ dla $B \neq 0$.

[Wtedy $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \xrightarrow{(b)} A \cdot \frac{1}{B}$]

Bez straty ogólności przyjmiemy $B > 0$.

Z def. $b_n \to B$ dla $(\varepsilon = \frac{B}{2})$ mamy $\exists N_1$

$$\forall n \geq N_1 \quad |b_n - B| < \frac{B}{2} \Rightarrow b_n \overset{NT}{>} B - |b_n - B|$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \overset{(*)}{\vee}$$

$$b_n \in \left(B - \frac{B}{2}, B + \frac{B}{2}\right) \qquad B - \frac{B}{2} = \frac{B}{2}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z def. granicy $\exists N_2$ $\forall n \geq N_2$ $|b_n - B| \overset{(*)}{<} \frac{B^2 \varepsilon}{2}$. $N = \max(N_1, N_2)$

Dla $n > N$ mamy:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} = \frac{|b_n - B|}{b_n \cdot B} \overset{(*)}{\underset{(*)}{<}} \frac{\frac{B^2 \cdot \varepsilon}{2}}{\frac{B}{2} \cdot B} = \varepsilon$$

Czyli $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$

P-d

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^2+1}{3^n+n\cdot 2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{2\nwarrow}{1}+\overset{0\nwarrow}{\frac{n^2}{3^n}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{3^n}}}{\underset{\downarrow 1}{1}+\underset{\downarrow 0}{\frac{n\cdot 2^n}{3^n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{3^n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$$

$$\frac{n^2}{3^n}<100\frac{n^2}{n^3}=\frac{100}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=0$$

LEMAT:

$n^3<100\cdot 3^n$ dla $n\in\mathbb{N}$

Indukcja

$n=1,2,3$

$1<300$ $n=1$

$3n^?$ ✓ $n^?$ ✓

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

$$<100\cdot 3^n+7n^2\underset{(?)}{<}100\cdot 3^{n+1}$$

$$(?)\quad 100\cdot 3^n+7n^2<100\cdot 3^n\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow\quad 7n^2<100\cdot 2\cdot 3^n$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{7}{2}n^2\overset{n>3}{<}n^3\overset{z\ I}{<}100\cdot 3^n$$

Uwaga 13. *Jeśli $c \in \mathbb{R}$ oraz ciągi a_n i b_n są zbieżne, to:*

a) $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$

b) $\left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = \lim_{n\to\infty} |a_n|,$

c) *jeśli* $a_n \geq 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0,$

d) *jeśli* $a_n \leq b_n$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\qquad$ $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A|$

c) $\lim_{n} a_n = \lim_{n} |a_n| \overset{b)}{=} |\lim a_n| \geq 0$

d) $b_n - a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n} \big(\overset{b_n+(-a_n)}{\overset{\shortparallel}{b_n - a_n}}\big) \geq 0$ $\qquad$ $\lim_{n} b_n \geq \lim_{n} a_n$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{n} b_n + (-1) \cdot \lim_{n} a_n$$

Twierdzenie 14. *[Twierdzenie o trzech ciągach.] Jeśli dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g$, to c_n jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty} c_n = g$.*

d-d b.s.o. $a_n = 0$ $\left[a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow 0 \leq \underbrace{c_n - a_n}_{C_n} \leq \underbrace{b_n - a_n}_{B_n} \right]$

Zatem: $0 \leq c_n \leq b_n$ i $\lim_n b_n = 0$

Ust. $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $|b_n - 0| < \varepsilon \iff 0 \leq b_n < \varepsilon$

Więc dla $n > N$ $-\varepsilon < 0 < c_n \leq b_n < \varepsilon \Rightarrow |c_n - 0| < \varepsilon$

Czyli $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

dlaczego można przyjąć $a_n = 0$.

$a_n \leq c_n \leq b_n$ i $\lim_n a_n = \lim_n b_n = g$

Wtedy $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$ oraz

$\lim_n (b_n - a_n) = g - g = 0$. Z przypadku

szczególnego: $\lim_n (c_n - a_n) = 0 \iff \lim c_n = \overset{0}{\overset{\parallel}{\lim(c_n - a_n)}} + \underset{g}{\underset{\parallel}{\lim(a_n)}}$

Uwaga 15. *W założeniu poprzedniego twierdzenia można wymagać, by założenie* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *było spełnione jedynie dla wszystkich* $n > n_0$ *(przy pewnym* n_0*).*

Twierdzenie 16. *Jeśli ciąg* a_n *jest zbieżny do liczby* g, *to ciąg*

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

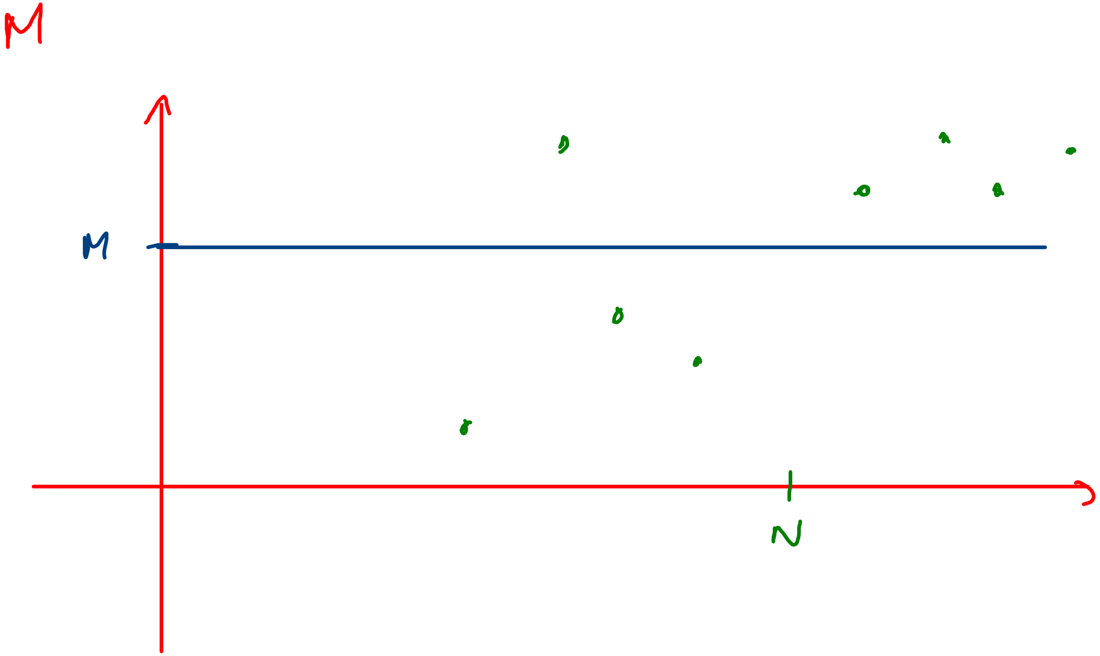
jest również zbieżny do g.

Zad. na ćwiczenia.

GRANICE NIEWŁAŚCIWE

Definicja 20. *[Granice niewłaściwe] Mówimy, że ciąg a_n jest rozbieżny do nieskończoności (∞), jeśli dla dowolnej liczby M istnieje N takie, że dla $n > N$ mamy $a_n > M$. Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analogicznie definiujemy rozbieżność do $-\infty$.*

$$\forall M \quad \exists N \quad \forall n > N \qquad a_n > M$$



Przykład 21.

a) $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, b) $\lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}^{b_n} = \infty.$

a) Weźmy $M>0$. Wtedy dla $N=e^M$ oraz $n>N$

$$\ln n > M$$

$$\Updownarrow$$

$$n = e^{\ln n} > e^M$$

b) $0<b_n<b_{n+1}$ Pokażemy, że (b_n) jest nieograniczony.

$$\underbrace{b_{2^k}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\ldots} \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}$$

$$= 1 + \underbrace{b_2-b_1} + \underbrace{b_4-b_2} + \underbrace{b_8-b_4} + \ldots + \underbrace{b_{2^k}-b_{2^{k-1}}}$$

$$\overset{(*)}{>} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \underbrace{1+(k-1)\cdot\frac{1}{2}}$$

$$(*)\quad b_{2^j} - b_{2^{j-1}} = \underbrace{\frac{1}{2^{j-1}+1} + \frac{1}{2^{j-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^j}}_{2^j-2^{j-1}=2^{j-1} \text{ składników}} > 2^{j-1}\cdot\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$$

Zatem b_n jest nieogr.

Twierdzenie 23. *Jeśli* $a_n > 0$*, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

dowód ($\Rightarrow$) Zał. że $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z def. $a_n \to \infty$ istnieje N $\forall n > N$ $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Wtedy dla $n > N$:

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < a_n$$

Więc $\frac{1}{a_n} \to 0$

($\Leftarrow$) ćwiczenie

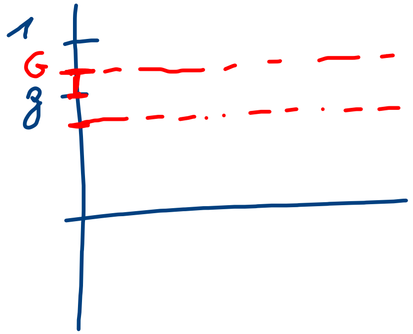
Twierdzenie 23. *Załóżmy, że* (a_n) *jest ciągiem o wyrazach dodatnich.*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{a_{n+1}}{\cancel{a_n+1}}}{a_n} = g \in [0,1)$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a_n+1}}{a_n} = g \in (1,\infty]$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \in [0,1)$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \in (1,\infty]$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.



d-d Zał. że $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \in [0,1)$ $\varepsilon_0 = \frac{1-g}{2}$. Wtedy

$$\exists N \ \forall n \geq N \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g\right| < \frac{1-g}{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g + g\right| \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g\right| + g < \frac{1-g}{2} + g = \underset{\substack{\| \\ 0<G<1}}{\frac{1+g}{2}}$$

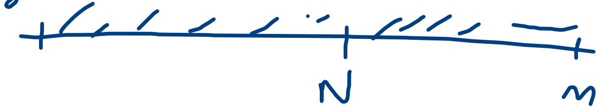
Wtedy dla $n > N$

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} =$$

$$= \underbrace{a_1 \prod_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_{k-1}}}_{A} \cdot \prod_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} < A \cdot G^{n-N}$$

Czyli $0 < a_n < \underbrace{A \cdot G^{-N}}_{\text{ust.}} \cdot \underbrace{G^n}_{\to 0}$

Z tw. o 3 ciągach $a_n \to 0$.



Co jeśli $g = 1$?

$a_n = n$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

$a_n = 1$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

Twierdzenie 23. *Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem o wyrazach dodatnich.*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = g \in [0,1)$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = g \in (1,\infty]$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

③ *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \in [0,1)$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Jeśli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \in (1,\infty]$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

SZKIC

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \qquad \exists N \qquad \forall n > N \qquad \sqrt[n]{a_n} \in \left(g - \frac{1-g}{2},\ \underbrace{g + \frac{(1-g)}{2}}_{G = \frac{1+g}{2}}\right)$$

$$\sqrt[n]{a_n} < G$$

$$\underline{0 < a_n < G^n}$$

Twierdzenie 24. *Ważne granice:*

a) $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \qquad q \in (0,1),$$

b) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \qquad q > 1,$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0,$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \qquad q > 1, k \in \mathbb{N},$$

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \qquad q > 0,$$

b) $$q^n = (q-1+1)^n$$
$$\vee$$
$$\cancel{1} + n(q-1) \to \infty$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n}$$

$$a_n = \frac{n^k}{q^n}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{q}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \downarrow \frac{1}{q} \in (0,1) \qquad \frac{n+1}{n} \downarrow 1$$

Z tw. 23.1 $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$$

- $\forall n > N \quad n^k < \varepsilon q^n$
- $\forall n \geq 1 \quad n^k < C \cdot q^n$

Wniosek: $\forall_{\varepsilon} \; \forall k \in \mathbb{N}, \; \forall q > 1 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0$

Twierdzenie 25. *Twierdzenie 12 o arytmetyce granic w szczególnych przypadkach zachodzi dla granic niewłaściwych, np.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \qquad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty,\ \lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0^+ \qquad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = -\infty.$$

Przez 0^+ *powyżej rozumiemy, że granicą jest zero i wyrazy są dodatnie. Arytmetyka granic nie daje odpowiedzi w następujących sytuacjach:*

$$\infty + (-\infty), \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Twierdzenie 26. *[Twierdzenie o dwóch ciągach / kryterium porównawcze] Jeśli dla wszystkich* n *zachodzi* $a_n \leq b_n$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, to również* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

$$\infty \Leftarrow n + \sqrt{n}\sin(n) = n\left(1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right) \underset{\overset{\uparrow}{n\geq 4}}{>} n\cdot\frac{1}{2} \Longrightarrow \infty$$