Lista 10, Analiza Matematyczna I

1. Obliczyć pochodne podanych funkcji tam, gdzie to jest możliwe.

a)
$$\cos(\log(\sin x))$$

b)
$$\frac{1}{x\sqrt{5-2x}}$$

c)
$$\operatorname{tg}^5(\operatorname{ctg}^2 x)$$

d)
$$e^x(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2})$$

e)
$$\arcsin(\sin x)$$

f)
$$\log_x e$$

g)
$$\log\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$\dot{\text{h}}$)
$$x^{1/x}$$

$\dot{\text{i}}$)
$$(\cos x)^{\sin x}$$

2. Obliczyć granice korzystając z pochodnych odpowiednich funkcji.

a)
$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\cos(2n^{-3})-1\right)$$

b)
$$\lim_{x\to\infty}\log x\cdot\left(e^{-1/log^3 x}-1\right)$$

$\dot{\text{c}}$)
$$\lim_{n\to\infty}\left[2^n\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2^n}\right)-9\cdot 2^{n-4}\right]$$

$\ddot{3}$. Udowodnić, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b)$, różniczkowalną na (a,b) oraz $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=c$, to $f(x)$ ma prawostronną pochodną w punkcie a równą c.

$\ddot{4}$. Czy funkcja

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0.\end{cases}$$

ma pochodną w zerze? Czy istnieje granica $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$?

5. Sprawdzić różniczkowalność funkcji poniżej w punktach w których nie jest ona jasna.[1]

a)
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

b)
$$f(x)=\begin{cases}2^x+3x^2 & \text{dla } x<2\\ \log_{\sqrt{2}}x+7x & \text{dla } x\geq 2\end{cases}.$$

c)
$$f(x)=\begin{cases}x^3+x^2-\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} & \text{dla } x\leq 1\\ x^5+x & \text{dla } x>1;\end{cases}$$

$\dot{\text{d}}$)
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}\cos\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla x=0}\end{cases}$$

$\dot{\text{e}}$)
$$f(x)=\begin{cases}x^4+x^2 & \text{dla } x<1\\ \log x^3+\dfrac{3^x}{\log 3} & \text{dla } x\geq 1\end{cases}$$

$\dot{\text{f}}$)
$$f(x)=\begin{cases}x^2\log|x| & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0.\end{cases}$$

[1] *Wskazówka:* Może być pomocne skorzystanie z zadania 4.

6. Obliczyć pochodne funkcji, korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

a) $\log x$ ḃ) $\arcsin x$ ċ) $\arccos x$ ḋ) $\operatorname{arctg} x$

7̇. Obliczyć pochodną logarytmiczną $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{d}{dx}\log|\,f(x)\,|$ funkcji:

$$f(x) = (x-a_1)^{b_1}(x-a_2)^{b_2}\dots(x-a_n)^{b_n}.$$

Obliczyć $f'(0)$ dla $f(x) = x(x-1)\dots(x-n)$.

8̈. Obliczyć pochodne funkcji i ich funkcji odwrotnych:[2]

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x > 0.$$

9̇. Policzyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+\sqrt{x^2+1})}{\log(x+\sqrt{x^2-1})}$$

i0. Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna, posiada funkcję odwrotną $x = g(y)$ i spełnia równanie

$$x^3 = y^4 + x^2 \sin y + 1.$$

Zakładając, że $f(1) = 0$ znaleźć $f'(1)$ oraz pochodną funkcji odwrotnej w punkcie 0. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ i funkcji odwrotnej $g(y)$ w punktach $(1,0)$ i $(0,1)$ odpowiednio.

11. Funkcja $g(y)$ jest różniczkowalna w punkcie $y = 2$ oraz $g'(2) = 3$. Obliczyć pochodną funkcji $h(x) = g(x^2+1)$ w punkcie $x = 1$. [3]

i2. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 3$ oraz $f(3) = 1$, $f'(3) = 2$. Obliczyć pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{f(x)^2 + 4x}$ w punkcie 3.

13. Funkcja $f(x)$ jest ciągła i odwracalna oraz $f(\pi) = e^2$, $f'(\pi) = e$. Ile wynosi pochodna funkcji odwrotnej w punkcie e^2?

i4. Funkcja $f(x)$ spełnia $f(2-x) = f(x)$ oraz jest różniczkowalna w punkcie $x = 1$. Wykazać, że $f'(1) = 0$.

i5. Funkcja $f(x)$ jest ciągła, odwracalna oraz $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$. Niech $g(y)$ oznacza funkcję odwrotną do $f(x)$. Ile wynosi pochodna funkcji $h(t) = g(3t^2+1)$ w punkcie $t = 1$? Ile wynosi $h(1)$?

i6. Funkcja $f(x)$ jest ciągła odwracalna oraz $f(2) = 1$, $f'(2) = -1$. Funkcja $g(y)$ jest funkcją odwrotną do $f(x)$. Obliczyć pochodną funkcji

$$h(t) = \frac{f(e^{t-1} + t^2)}{[g(t^3 + t - 1) + \log t]^2}$$

w punkcie $t = 1$.

---

[2] *Wskazówka:* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

[3] *Uwaga:* Funkcja $g(y)$ może być nieróżniczkowalna dla $y \neq 2$.