Lista 14, Analiza Matematyczna I

1. Sprawdzić zbieżność szeregów i zbadać różniczkowalność sumy na podanym zbiorze.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, \quad \mathbb{R},$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2x)}{2^n}, \quad \mathbb{R},$$

ċ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(nx^2+1)}{n^2}, \quad \mathbb{R},$$

d̈)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad (0,\pi),$$

ë)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(n^2x^2\right)\right), \quad (0,\infty).$$

2̇. Niech $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$. Znajdź wielomian Q, taki że $P(x) = Q(x+1)$.

3̇. Niech f będzie funkcją klasy C^{N+1}[1] w pewnym otoczeniu zera. Uzasadnić, że jeśli na pewnym otoczeniu zera zachodzi [2]

(1)
$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k + O(x^{N+1}),$$

to $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$ dla $k = 0, 1, ..., N$.

4. Zapisz poniższe funkcje w postaci (1) do podanego rzędu N.

ȧ)
$$e^{2x-x^2}, \quad N = 5,$$

ḃ)
$$\sqrt[3]{1-2x-x^3}, \quad N = 2,$$

ċ)
$$\log(\cos x), \quad N = 5,$$

ḋ)
$$\sin(\sin x), \quad N = 3.$$

5. Obliczyć granicę korzystając ze wzoru Taylora i notacji $o(x)$ lub $O(x)$.

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2\sin x - \cos x}{x^2}$$

ċ)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{\sin(x^2) - x^2}$$

ḋ)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - \sin x - 1}$$

ė)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \sin(2x) + x}{e^{x^2} - \cos(x^2) + x^2}$$

f̈)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\sin x + 2\cos x - 2)(e^x - 1)}{(\sin(x) - x)(e^{x^2} - 1)}$$

6̇. Dla $a > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ znaleźć rozwinięcie (1) funkcji $f(x) = \log(x+a)$.

7. Korzystając z rozwinięcia Taylora i oszacowania reszty obliczyć wielkości z podaną dokładnością.

ȧ)
$$e, \quad 10^{-9},$$

ḃ)
$$\sin 1, \quad 10^{-8},$$

ċ)
$$\sqrt{99}, \quad 10^{-4},$$

ḋ)
$$\ln\frac{4}{3}, \quad 10^{-5}.$$

[1] *Uwaga:* Funkcja jest klasy C^m gdy istnieje pochodna m-ta i jest ona ciągła.

[2] *Uwaga:* Zapis $g(x) = O(h(x))$ (w $x = 0$) oznacza, że na pewnym otoczeniu zera mamy $|g(x)| \le C|h(x)|$.

8. Dla poniższych funkcji napisać wzór Taylora rzędu N oraz pokazać, że reszta zbiega do zera dla $x \in \mathbb{R}$ (chyba że podano inaczej).

a) e^x,

b) $\sin x$,

c) $\cos x$,

ḋ) $\sinh x$,

ė) $\cosh x$,

ḟ) $\ln(1+x), \quad x \in (-1/2, 1/2)$.

9. Znaleźć szereg Maclaurin'a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dla podanych funkcji.

a) $\sin(2x)$,

ḃ) $\log(3x+1)$,

ċ) $x \log(1+x^2)$,

ḋ) $\sin^2 x$,

ë) $\operatorname{arctg}(x^3)$,

f̈) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1̇0. Znaleźć szereg Taylora dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3} & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} & x = 0 \end{cases}.$$

1̇1. Niech $f(x) = x^3 \sin^2(x^2)$. Wyznaczyć $f^{(1003)}(0)$.

1̈2. Funkcja f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna i $f^{(n+1)}$ jest funkcją ciągłą. Niech

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h) \quad (0 < \theta(h) < 1)$$

przy czym $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Pokazać, że $\theta(h) \to \frac{1}{n+1}$, gdy $h \to 0$.

1̈3. Załóżmy, że $f(x) = 1 + kx + g(x)$ oraz $\lim_{x\to 0}(g(x)/x) = 0$. Pokazać, że

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{1/x} = e^k.$$

1̈4. Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$ oraz $f(0) = f(1) = 0$, $|\, f''(x) \,| \leq A$ dla $x \in (0,1)$. Pokazać, że $|\, f'(x) \,| \leq A/2$ dla $0 \leq x \leq 1$.

1̈5. Niech $f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na półprostej dodatniej i $M_n = \sup_x |f^{(n)}(x)|$ dla $n = 0,\ 1,\ 2$. Udowodnić nierówność $M_1^2 \leq 4M_0M_2$. Pokazać na przykładzie, że stała 4 jest optymalna.