SZEREGI POTĘGOWE

PRZYPOMNIENIE

Definicja 19. Szeregiem potęgowym *nazywamy szereg postaci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Twierdzenie 26. *Jeśli* $R > 0$ *jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *to szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na* $(-R, R)$ *oraz rozbieżny dla* $|x| > R$.

$R = 0$

$\{0\}$

$R = \infty$

$(-\infty, \infty)$

Uwaga 28. *Z dowodu wynika też, że dla* $|x| > R$ *nie tylko szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest rozbieżny, ale nawet ciąg* $a_n x^n$ *jest nieograniczony.*

Twierdzenie 29.

- *Jeśli granica* $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ *istnieje, to*

$$R^{-1} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

- *Jeśli granica* $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *istnieje, to*

$$R^{-1} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

W obu przypadkach jeśli granica jest zerem, to $R = \infty$ *i dla granicy* $+\infty$ *mamy* $R = 0$.

Twierdzenie 30. *Dla* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *mamy*

$$R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(jeśli lim sup *jest zerem, to* $R = \infty$ *i odwrotnie).*

$R = 0$

$\alpha = \infty$

d-d (gdy $R \in (0, \infty)$)

$A = \{ |x| : \text{ciąg } a_n x^n \text{ jest ograniczony} \} \subseteq [0, \infty)$

<u>Pierwsza nierówność:</u>

dla $n : a_n \neq 0$

$$x \in A \Rightarrow \exists M \quad |a_n x^n| \le M \Rightarrow |x| \le \frac{M^{1/n}}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\alpha = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \exists n_k \quad \alpha = \lim_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \quad (\text{b.s.o. } a_{n_k} \neq 0)$$

$$|x| \le \frac{M^{1/n_k}}{|a_{n_k}|^{1/n_k}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R \le \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

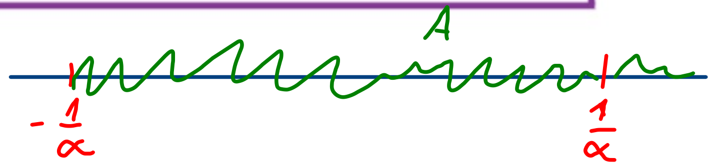
Twierdzenie 30. *Dla* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *mamy*

$$R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(jeśli lim sup *jest zerem, to* $R = \infty$ *i odwrotnie).*

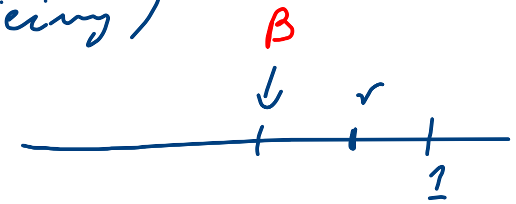
d-d (gdy $R \in (0, \infty)$)

$A = \{ |x| : \text{ciąg } a_n x^n \text{ jest ograniczony} \} \subseteq [0, \infty)$



Druga nierówność

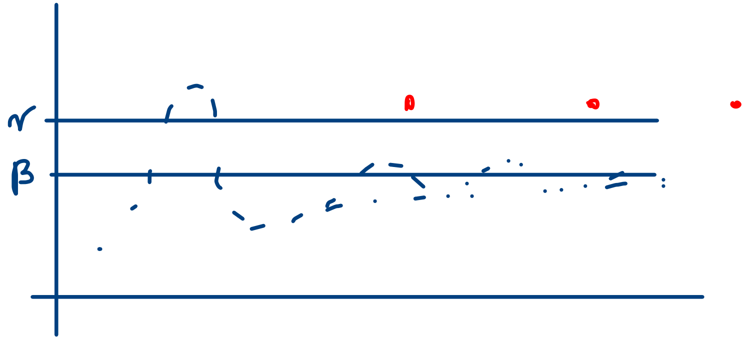
Zał. że $|x| < \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}$ (cel: $\sum a_n x^n$ zbieżny)



$\beta = \limsup_n |a_n x^n|^{1/n} < r < 1$

Zatem $\exists N \ \forall n \geq N \quad |a_n x^n|^{1/n} \leq r$

Dla prawie wszystkich n: $|a_n \cdot x^n| \leq r^n$



Więc $\sum a_n x^n$ zb. bezwzg. z kryt. porównawczego.

Czyli $R \geq \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

Przypadek $\alpha = 0$, $R = \infty$.

Wtedy z drugiej części dla dow. $x \in \mathbb{R}$ $\limsup_n |a_n \cdot x^n|^{1/n} = 0$

i dalej jak wcześniej z $r = \frac{1}{2}$ ...

Przypadek $\alpha = \infty$, $R = 0$

Gdyby $\exists x \neq 0$ t. że $a_n x^n$ jest ograniczony, t.zn.

$$|a_n x^n| \leq M \quad \Rightarrow \quad |a_n|^{1/n} |x| \leq M^{1/n} \qquad |a_{n_k}|^{1/n_k} \longrightarrow \infty$$

$$\underbrace{|a_{n_k}|^{1/n_k}}_{\downarrow\ \infty} \cdot \underbrace{|x|}_{\neq 0} \leq \underbrace{M^{1/n_k}}_{\downarrow\ 1}$$

sprzeczność!

Przykład 31. *Promień zbieżności każdego z szeregów:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{10}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n!}}{n!},$$

wynosi 1.

metoda 1: kryt. Cauchy'ego:

$$\left|\frac{x^{n^2}}{2^n}\right|^{1/n} = \frac{|x|^n}{2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1/2 & |x|=1 \\ \infty & |x|>1 \end{cases} \qquad [-1,1]$$

Tw. 30

metoda 2: $R^{-1} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \; \left(= \frac{1}{2^k}\right) & \text{gdy } n=k^2 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^9}{8} + \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{25}}{32} + \dots\right)$$

$$= \frac{x}{2} + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{x^4}{4} + 0\cdot x^5 + \dots$$

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n |a_{n^2}|^{1/n^2} = \limsup_n \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n^2} = \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} = 1.$$

Uwaga: $\lim_n |a_n|^{1/n}$ nie istnieje.

Uwaga 33. *W punktach $x = R$ i $x = -R$ może być różnie - szereg może być: w obu zbieżny, w obu rozbieżny, lub zbieżny w jednym z nich.*

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ zbieżny $\Leftrightarrow$ $x \in (-1,1)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ zbieżny $\Leftrightarrow$ $x \in [-1,1]$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ zbieżny $\Leftrightarrow$ $x \in (-1,1]$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$$

Potem pokażemy, że $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ dla $x \in (-1,1)$

tw. 34

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Twierdzenie 34. *[Twierdzenie Abela] Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = R$, to funkcja $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła lewostronnie w $x = R$ (tzn. ciągła na $(-r, R]$). Podobnie jest w lewym końcu przedziału.*

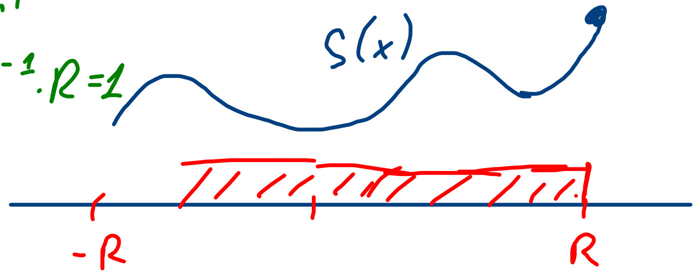
$0 < R < \infty$

d-d

B.S.O. załóżmy, że $R = 1$

$R^{-1} = \limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n|}$

$\limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n| \cdot R^n} = R^{-1} \cdot R = 1$



Zał. że mamy tw. dla $R = 1$.

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu $R > 0$.

$b_n = a_n R^n \longrightarrow \sum b_n y^n$ ma prom. zb. $= 1$

$$\lim_{x \to R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \lim_{x \to R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \right) = \lim_{y \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \right) \overset{\text{zał.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = s(R)$$

Twierdzenie 34. *[Twierdzenie Abela] Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = R$, to funkcja $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła lewostronnie w $x = R$ (tzn. ciągła na $(-r, R]$). Podobnie jest w lewym końcu przedziału.*

$0 < R < \infty$

Zał. że $R = 1$ i badamy $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zbieżne i zał.

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $s_{-1} = 0$ bo $s_{-1} = 0$ cel $\lim_{x\to 1^-} s(x) = s(1)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{n} s_k x^k - x \underbrace{\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} s_{k-1} x^{k-1}}_{\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k}$$

$$= (1-x)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k + \underbrace{s_n x^n}_{\to 0}$$

Dla $0<x<1$ niech $n \to \infty$.

$$s(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

Dla $x \in (0,1)$

$$s(x) - s(1) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - s \cdot \underbrace{(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{1} = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. $\exists N\ \forall n \geq N\ |s_n - s| < \varepsilon/2$. Ponieważ s_n jest ogr., to $\exists M$ $\forall n \geq 1\ |s_n| \leq M$. Dla $x \in (0,1)$,

$$|s(x) - s(1)| \leq (1-x) \left| \sum_{k=0}^{N} (s_k - s) x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} (s_k - s) x^k \right|$$

$$\leq (1-x) \sum_{k=0}^{N} (|s_k| + |s|) \cdot x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \overset{\varepsilon/2}{\overset{\vee}{|s_k - s|}} \cdot x^k \cdot (1-x)$$

$$\leq (1-x)\ 2 \cdot M \cdot (N+1) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{(1-x) \sum_{k=\cancel{0}\,N+1}^{\infty} x^n}_{=1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla $(1-x) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot M \cdot (N+1)} = \delta$

Czyli

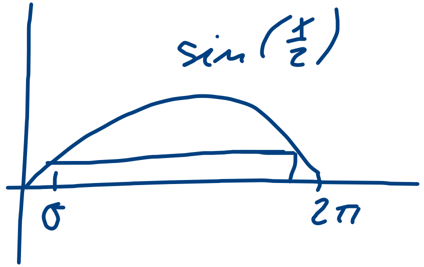
$$\lim_{x \to 1^-} s(x) = s(1)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\,x) = \csc\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{n\,x}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\,x\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x) = \csc\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{n\,x}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}(n+1)\,x\right)$$

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$



dla $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ $\quad \delta \in (0, \pi)$

$$\sup_n |S_n(x)| \leq C$$

$$\sup_n |C_n(x)| \leq C$$

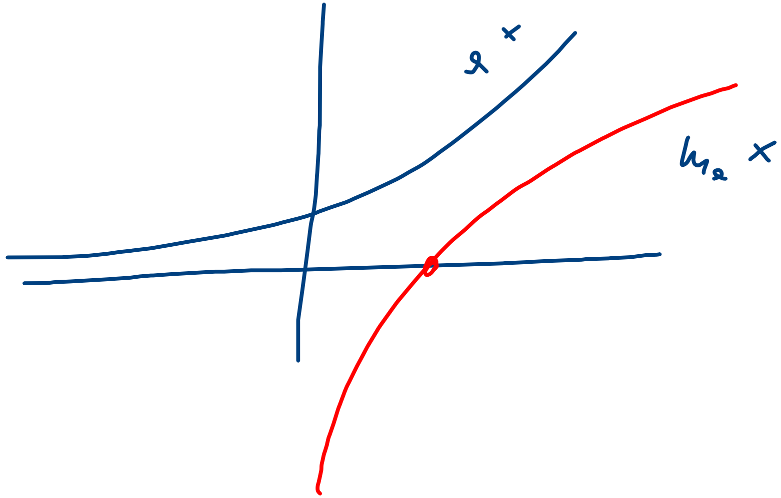
$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq c$

dla $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$

$\delta > 0$

$S_n(0) = 0 \qquad C_n(0) = n+1$

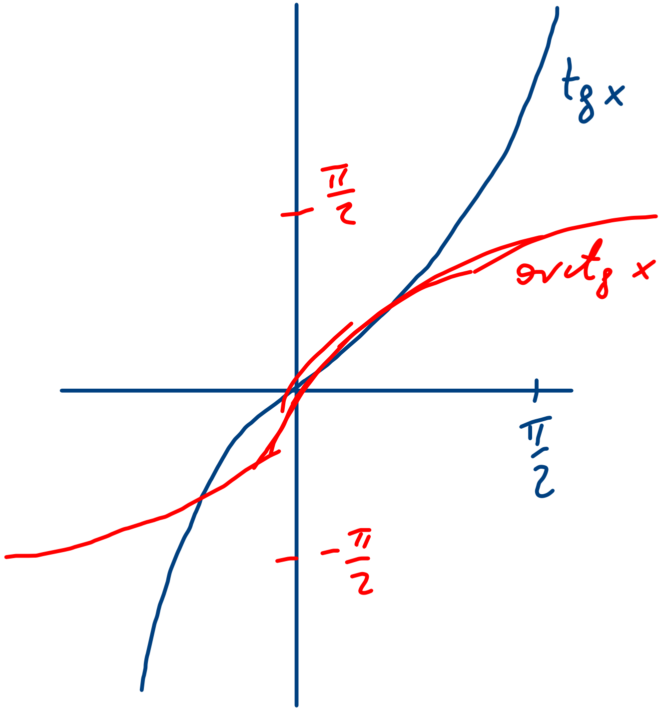
- $a^x \qquad a>1 \qquad a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$
- $\log_a x \qquad \log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$



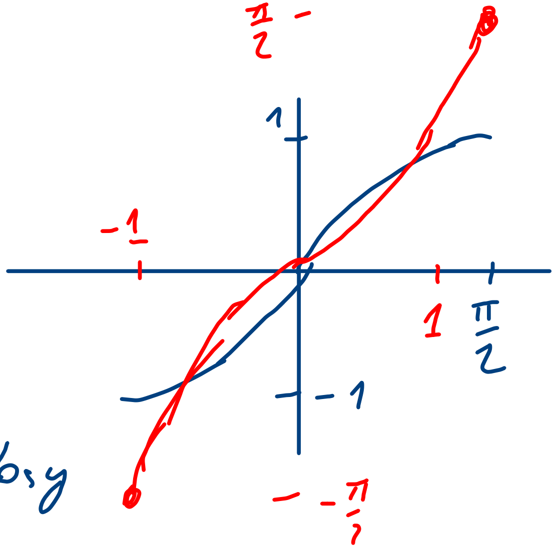
$\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ rosnąca i ciągła

$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — " —

$$\mathrm{tg}\, x = y \iff x = \mathrm{arctg}\, y \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \; y \in \mathbb{R}$$

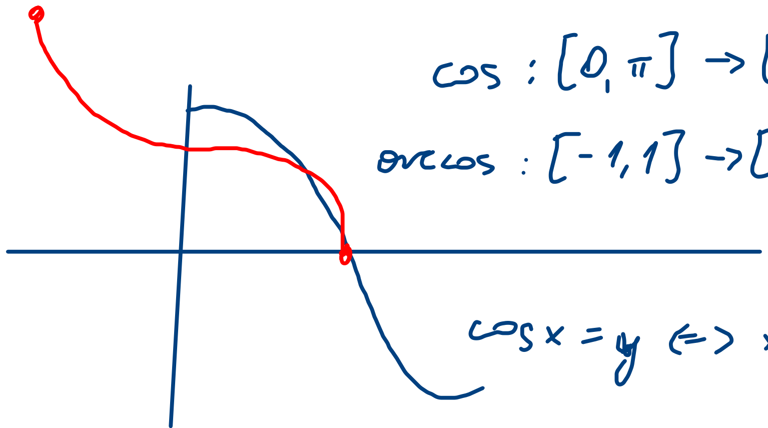


$\sin x \qquad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$



$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$



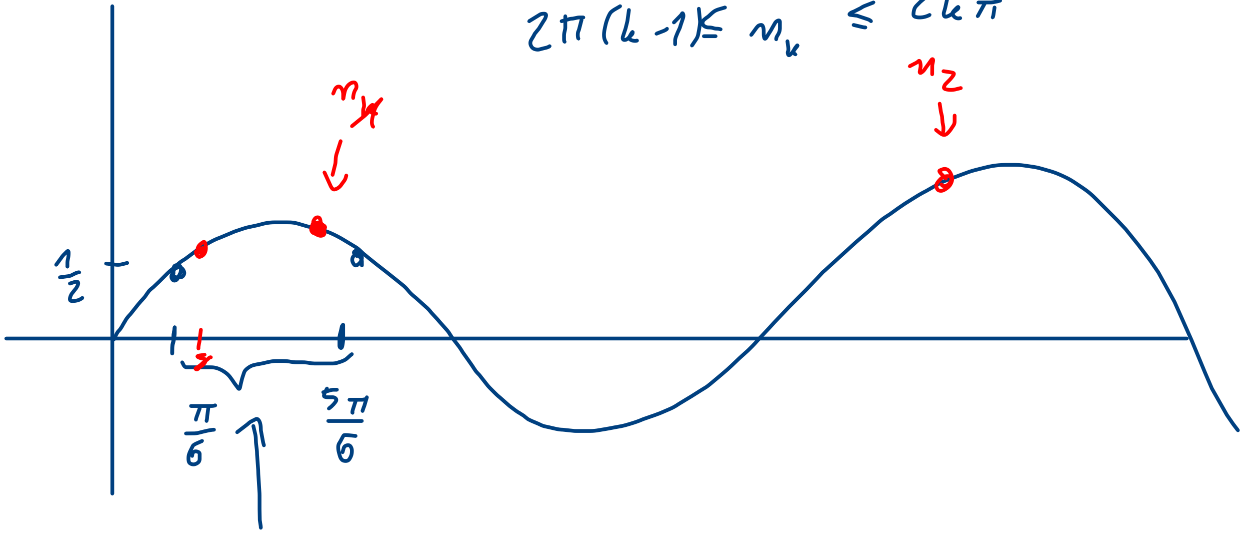
$\cos x = y \iff x = \arccos y$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n_k}{n_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2k\pi} = \infty$$

$n_k \in (2k\pi - 2\pi,\ 2k\pi - \pi)$

$\sin n_k > \frac{1}{2}$

$2\pi(k-1) \leq n_k \leq 2k\pi$



$\frac{4\pi}{6} > 1$