Lista 7, Analiza Matematyczna I

1. Funkcja f jest zadana przez
$$f(x) = \begin{cases} x - ax^2 + x^3 & \text{dla } x < 2 \\ a + b & \text{dla } x = 2 \\ \sin(\pi x/3) + be^x & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$
Dla jakich wartości a i b funkcja ta jest ciągła?

2. Korzystając z trygonometrii oraz z $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ udowodnić, że funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są ciągłe w każdym punkcie.

3. Zbadać ciągłość podanych funkcji

   a)
$$f(x) = \{x\} + \frac{1}{2}\{2x\} + \frac{1}{4}\{4x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   b)
$$g(x) = 1/[1/x], \quad x \in (0,1], \ g(0) = 0,$$
   c)
$$u(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx}, \quad x \geq 0,$$
   d)
$$v(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\cos(2^k \pi x)\right)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Podać przykłady funkcji określonych na $\mathbb{R}$ takich, że:
   a) $|f|$ jest ciągła w każdym punkcie oraz f jest nieciągła w każdym punkcie,
   b) f jest nieciągła w punktach $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,$
   c) f jest nieciągła dokładnie w punktach $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots,$
   d) f jest ciągła i dla każdej liczby $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0 + n)$, ale nie istnieje granica $f(x)$ gdy $x \to \infty$.

5. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcje $\max(f(x), g(x))$ oraz $\min(f(x), g(x))$ są ciągłe.[1]

6. Pokazać, że każda funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ jest różnicą dwu nieujemnych funkcji ciągłych.

7. Znaleźć przykład funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ takiej, że $f(x) \geq 0$ oraz
$$f^{-1}(\{0\}) = \{0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots\}.$$

8. Udowodnić, że funkcja f ciągła w zerze spełniająca warunek $f(x+y) = f(x) + f(y),\ x, y \in \mathbb{R}$ jest postaci $f(x) = cx$.

9. Pokazać, że funkcja monotoniczna na przedziale ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.

10. Czy funkcja jednostajnie ciągła na przedziale $[a,b]$ jest ciągła na tym przedziale?

11. Pokazać, że funkcja jednostajnie ciągła na ograniczonym przedziale (a,b) jest ograniczona.

12. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła na ograniczonym przedziale (a,b) posiada granice jednostronne w końcach przedziału.[2]

---

[1] *Wskazówka:* $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

[2] *Wskazówka:* Pokazać, że $f(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego istnienia granicy jednostronnej w punktach a i b.

13. a) Pokazać, że suma funkcji jednostajnie ciągłych na jest jednostajnie ciągła,

ḃ) Czy iloczyn funkcji jednostajnie ciągłych na $\mathbb{R}$ jest zawsze jednostajnie ciągły?

c̈) Czy iloczyn funkcji jednostajnie ciągłych na (a, b) jest zawsze jednostajnie ciągły?

1̈4. Funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na $(a, b]$ oraz na $[b, c)$. Udowodnić, że $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na (a, c).

15. Pokazać, że funkcja spełniająca warunek $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^p, \quad x, y \in \mathbb{R},\ p > 0$, jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

1̈6. Załóżmy, że f spełnia warunek z zadania 15 dla pewnego $p > 1$. Co można powiedzieć o funkcji $f(x)$?