Lista 15, Analiza Matematyczna I

1. Zbadaj wypukłość funkcji zadanej wzorem:
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

2. Udowodnić, że równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$ jedno, dwa lub trzy rozwiązania w zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Pokaż, że warunek wypukłości funkcji f na przedziale A jest równoważny temu, że dla $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in A$, $t_1, ..., t_n \geq 0$ takich, że $t_1 + ... + t_n = 1$ mamy:
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$
Uzasadnij, że dla funkcji wklęsłej mamy podobny warunek z przeciwną nierównością.

4. Korzystając z wklęsłości funkcji $\ln(x)$ oraz poprzedniego zadania udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną.

5. Niech $p > 0$, $x_1, ..., x_n > 0$ oraz
$$S_p = \left(\frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$
Pokaż, że dla $q > p > 0$ mamy $S_q \geq S_p$. Kiedy zachodzi równość?

6. Pokaż, że funkcja ciągła spełniająca dla dowolnych $x_1, x_2 \in (a, b)$ warunek:
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
jest wypukła.

7. Znajdź ekstrema i zbadaj wypukłość funkcji $f : (0, e^2) \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:
$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2},$$

8. Niech f będzie funkcją z poprzedniego zadania. Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że funkcja $(f(x))^n$ jest wypukła na przedziale $(0, e^2)$?

9. Funkcja $f : [a, b] \to [c, d]$ jest ściśle rosnąca, ciągła i wypukła. Wykaż, że funkcja odwrotna do f jest wklęsła.

10. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą, a $c \in (a, b)$ będzie takie, że $f(c) \geq f(x)$ dla $x \in [a, b]$. Pokaż, że f jest stała.

11. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą, $f(0) > 0$, $f'(0) > 1$. Wykaż, że $f(x) > x$ dla $x > 0$.

12. Wykazać, że jeśli funkcja f jest wypukła na każdym z przedziałów $[a, b]$ i $[b, c]$ oraz różniczkowalna w punkcie b, to jest wypukła na $[a, c]$. Pokazać przykład świadczący o tym, że założenie różniczkowalności w punkcie b jest istotne.