Lista 2*, Analiza Matematyczna I

201. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny. Oznaczmy $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ jest rozbieżny natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ jest zbieżny.[1] Co można powiedzieć o zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$?

202. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ jest rozbieżny natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ jest zbieżny, gdzie $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.[2]

203. Ciągi a_n i b_n są dodatnie, ściśle malejące oraz szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ może być zbieżny?

204. Szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

są zbieżne. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ musi być zbieżny?

205. Dla ustalonej liczby $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ określamy ciąg a_n wzorem $a_1 = a > 0$ oraz

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \frac{1-\alpha}{a_n}, \quad n - 1, 2, \ldots.$$

Udowodnić, że ciąg a_n jest zbieżny do 1.

206. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ musi być zbieżny?

207. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ są zbieżne. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ musi być zbieżny?

208. Ciąg a_n jest dodatni i malejący oraz $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \infty$. Czy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\left(a_n, \frac{1}{n \log n}\right)$$

jest zawsze rozbieżny?

---

[1] *Wskazówka:*

$$\begin{aligned} \frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geq 1 - \frac{s_m}{s_n}, \quad m < n, \\ \frac{a_n}{s_n^2} &\leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}. \end{aligned}$$

[2] *Wskazówka:*

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} &\geq 1 - \frac{r_n}{r_m}, \quad m < n, \\ \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} &\leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}). \end{aligned}$$

209. Zbadaj zbieżność szeregu[3]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{en!\}}{n}.$$

210. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ określona w $[a, \infty)$ jest ograniczona w każdym skończonym przedziale $[a, b]$, to:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}, \quad f(x) \geq C > 0,$$

o ile granice po prawej stronie istnieją.

211. Pokazać, że funkcja Riemanna $f(x) = \dfrac{1}{n}$ jeśli $x = \dfrac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwsze, $n \geq 1$, oraz $f(x) = 0$, gdy x jest niewymierne jest nieciągła w punktach wymiernych i ciągła w punktach niewymiernych.

212. Skonstruować funkcję ściśle rosnącą, nieciągłą w punktach przeliczalnego ciągu liczb $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

213. f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1]$ oraz $f(0) = f(1)$. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje x, $0 \leq x \leq 1$, taki, że $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$. Czy stwierdzenie to pozostanie prawdziwe jeśli zamiast $\dfrac{1}{n}$ rozważymy dowolną liczbę $c \in (0, 1)$?

214. Udowodnić, że nie istnieje funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ przyjmująca każdą swoją wartość dokładnie dwa razy. Zbadać dla jakich $n \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ przyjmująca każdą wartość rzeczywistą dokładnie n razy.

215. f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na przedziale $(a, +\infty)$. Pokazać, że dla dowolnej liczby T, istnieje ciąg $x_n \to \infty$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(f(x_n + T) - f(x_n)\big) = 0$.

216. Udowodnić, że funkcja f, która jest ograniczona w pewnym otoczeniu zera spełniająca warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ jest postaci $f(x) = cx$.

[3] *Uwaga:* $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.