# Регрессионный анализ социально-экономических процессов

Модели с фиксированными эффектами и модель со случайными эффектами: введение

# Структуры данных

- Пространственные данные:
  в таких данных представлены наблюдения нескольких (N) пространственных единиц анализа за один и тот же временной период

# Структуры данных

- Пространственные данные:
  в таких данных представлены наблюдения нескольких (N) пространственных единиц анализа за один и тот же временной период
- Временные ряды:
  данные одной пространственной единицы анализа представлены за несколько (T) временных периодов

# Структуры данных

- Пространственные данные:
  в таких данных представлены наблюдения нескольких (N) пространственных единиц анализа за один и тот же временной период
- Временные ряды:
  данные одной пространственной единицы анализа представлены за несколько (T) временных периодов
- Панельные данные:
  данные нескольких (N) пространственных единиц представлены за несколько (T) временных периодов (есть и пространственная, и временная перспектива)

# Пространственные данные: пример

| id | age | spending_score | city | is_employed |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 37 | 42 | London | True |
| 2 | 51 | 78 | Paris | False |
| 3 | 22 | 15 | Moscow | True |

# Временные ряды: пример

| Quarter | GDP Growth (%) | Inflation (%) | Interest Rate (%) |
|---|---|---|---|
| 2023 Q1 | 2.1 | 4.2 | 1.5 |
| 2023 Q2 | 1.8 | 4.5 | 1.8 |
| 2023 Q3 | 2.3 | 4.8 | 2.0 |
| 2023 Q4 | 2.0 | 5.2 | 2.2 |

# Панельные данные: пример

| Company | Year | Revenue ($K) | Profit Margin (%) | Country |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2021 | 987.23 | 18.34 | USA |
| 1 | 2022 | 1054.67 | 12.56 | USA |
| 1 | 2023 | 912.45 | 21.78 | USA |
| 2 | 2021 | 1201.89 | 8.91 | Germany |
| 2 | 2022 | 1156.34 | 14.23 | Germany |
| 2 | 2023 | 1245.67 | 9.45 | Germany |
| 3 | 2021 | 845.12 | 19.67 | Japan |
| 3 | 2022 | 901.45 | 16.89 | Japan |
| 3 | 2023 | 878.90 | 22.34 | Japan |

# TSCS-данные

Кроме того, в англоязычной литературе Вы можете встретить такое понятие, как Time-Series Cross-Sectional Data. Здесь имеет место

- специфика обозначения панельных данных в разных дисциплинах
- длительность временного периода: как правило, TSCS-данными называют данные с относительно небольшим числом пространственных единиц и продолжительным временным рядом. Здесь в большей степени фокусируемся на таких сюжетах, как (не)стационарность данных и моделирование автокорреляции в явном виде

# Последствия игнорирования панельной структуры данных

## Вопрос

К чему приводит оценивание «объединенной» (pooled – без поправок на подгруппы) применительно к панельным данным?

# Последствия игнорирования панельной структуры данных

## Вопрос

К чему приводит оценивание «объединенной» (pooled – без поправок на подгруппы) применительно к панельным данным?

## Ответ

- смещенные оценки

# Последствия игнорирования панельной структуры данных

## Вопрос

К чему приводит оценивание «объединенной» (pooled – без поправок на подгруппы) применительно к панельным данным?

## Ответ

- смещенные оценки
- некорректная значимость оценок: заниженные стандартные ошибки

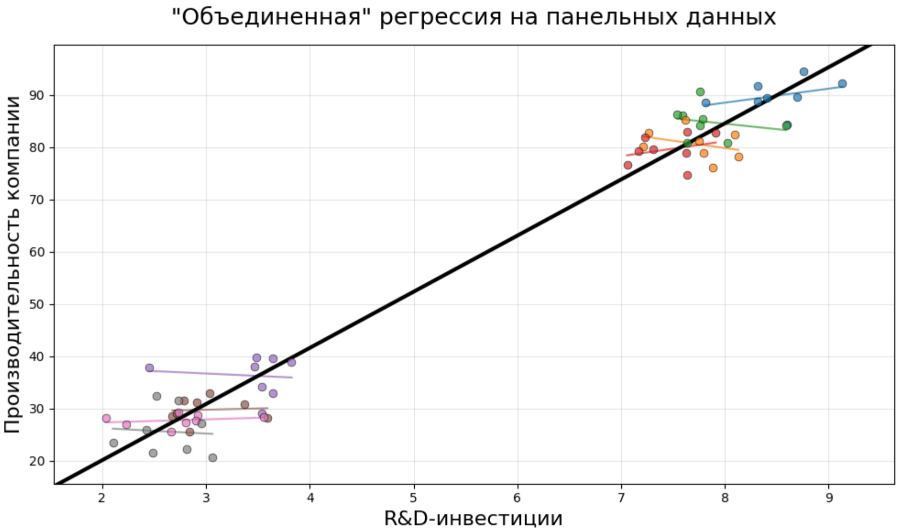
# Последствия игнорирования панельной структуры данных

## Вопрос

К чему приводит оценивание «объединенной» (pooled – без поправок на подгруппы) применительно к панельным данным?

## Ответ

- смещенные оценки
- некорректная значимость оценок: заниженные стандартные ошибки
- не разделяем внутригрупповую (изменения во времени) и межгрупповую дисперсию (между пространственными единицами)


"Объединенная" регрессия на панельных данных
Производительность компании
R&D-инвестиции
20
30
40
50
60
70
80
90
2
3
4
5
6
7
8
9

# Альтернативы*:

- Модели с фиксированными эффектами
  1. на пространственные единицы
  2. на временные периоды
  3. и на пространственные единицы, и на временные периоды
- Модель со случайными эффектами на пространственные единицы

* Список альтернатив будет постепенно пополняться по мере изучения материала

# Англоязычные аббревиатуры для удобства

- FE-модель – модель с фиксированными эффектами (fixed-effects model)
- RE-модель – модель со случайными эффектами (random-effects model)
- LSDV-модель – модель с фиксированными эффектами в формате набора дамми-переменных (least-squares dummy-variables model)
- Within- – модель / оценки модели с внутригрупповым преобразованием

# FE-модель на пространственные единицы

Представим спецификацию модели с фиксированными эффектами в формате модели с набором дамми-переменных (LSDV)

# FE-модель на пространственные единицы

Представим спецификацию модели с фиксированными эффектами в формате модели с набором дамми-переменных (LSDV)

$$\hat{y}_{it} = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_1 D_{1i} + \ldots \hat{\gamma}_{n-1} D_{(n-1)i} + \hat{\beta}_1 x_{it}$$

# FE-модель на пространственные единицы

Представим спецификацию модели с фиксированными эффектами в формате модели с набором дамми-переменных (LSDV)

$\hat{y}_{it} = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_1 D_{1i} + ... \hat{\gamma}_{n-1} D_{(n-1)i} + \hat{\beta}_1 x_{it}$

- $\hat{\beta}_0$ – чему в среднем равно значение зависимой переменной в базовой категории при равенстве предикторов 0

# FE-модель на пространственные единицы

Представим спецификацию модели с фиксированными эффектами в формате модели с набором дамми-переменных (LSDV)

$\hat{y}_{it} = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_1 D_{1i} + ...\hat{\gamma}_{n-1} D_{(n-1)i} + \hat{\beta}_1 x_{it}$

- $\hat{\beta}_0$ – чему в среднем равно значение зависимой переменной в базовой категории при равенстве предикторов 0
- $\hat{\gamma}_i$ – на сколько в среднем отличается значение зависимой переменной в i-ой пространственной единице от базовой категории при прочих равных
- $\hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_i$ – индивидуальная константа (фиксированный эффект)

# FE на пространственные единицы

Содержательно охватывают весь набор неизменяющихся во времени характеристик пространственных единиц

# FE на пространственные единицы

Содержательно охватывают весь набор неизменяющихся во времени характеристик пространственных единиц

Примеры:

- географические характеристики (географическое положение, расстояние между пространственными единицами, климатическая зона и т.д.)
- членство в ЕС
- правовая система
- культурные нормы

# FE на пространственные единицы

Содержательно охватывают весь набор неизменяющихся во времени характеристик пространственных единиц

Примеры:

- географические характеристики (географическое положение, расстояние между пространственными единицами, климатическая зона и т.д.)
- членство в ЕС
- правовая система
- культурные нормы

То есть, включение фиксированных эффектов не позволяет полностью избавиться от эндогенности, так как мы можем пропустить существенные изменяющиеся во времени характеристики (то есть, $Cov(e_{it}, x_{it}) \neq 0$)

# Модель с внутригрупповым преобразованием

Мы можем представить FE-модель в более экономном виде (то есть, с меньшим количеством параметров), при этом сохранив скорректированную на панельную структуру данных оценку коэффициента наклона
Алгоритм:

1. рассчитываем центрированный $y$, при этом считаем средние по пространственным подгруппам: $y^*_{it} = y_{it} - \overline{y}_i$.
2. аналогичным образом преобразуем предикторы: $x^*_{it} = x_{it} - \overline{x}_i$.
3. оцениваем регрессию $y^*_{it}$ на $x^*_{it}$:

$$\hat{y}^*_{it} = \hat{\beta}_1 x^*_{it}$$

# Куда исчезла константа?

$$\hat{y}^*_{it} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*_{it}$$

Вспоминаем, что для парной модели будет справедливо, что
$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$
В данном случае:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y^*} - \hat{\beta}_1 \overline{x^*} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_{it} - \overline{y_{i\bullet}})}{N} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{it} - \overline{x_{i\bullet}})}{N} = 0$$

# Как рассчитывается $\hat{\beta}_1$?

Оценку коэффициента наклона в FE-модели можно получить на основании соответствующих коэффициентов регрессий, оцененных на отдельных N подвыборках

Нас интересует оценка коэффициента при предикторе

$$\hat{y}^*_{it} = \hat{\beta}_1 x^*_{it}$$

1. Для каждой из N подвыборок оценим регрессию $\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t$ и сохраним $\hat{a}_1$ для каждой i-ой единицы
2. Суммируем взвешенные значения $\hat{a}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\alpha}_{1i}}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

$$w_i = \sum_{t=1}^{T_i} (x_{it} - \bar{x}_{i.})^2$$

# Выведение формулы $\hat{\beta}_1$ для FE-модели

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{Cov}(x^*, y^*)}{\widehat{Var}(x^*)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})(y_{it} - \bar{y}_{i\cdot})}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})^2}$$

Домножим и разделим дробь в числителе на $\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})^2$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})(y_{it} - \bar{y}_{i\cdot})}{\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})^2}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_{i\cdot})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\alpha}_{1i}}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

# Алгоритм получения $\hat{\beta}_1$ в FE-модели при наличии контрольных переменных

1. Очистим $y_{it}$ от эффекта контрольных переменных $z_{it}$. Для этого нужно сохранить остатки регрессии $y_{it}$ на $z_{it}$ (в этой модели учитываем FE)
2. По такому же принципу очищаем $x_{it}$ от эффекта $z_{it}$
3. Далее повторяем уже знакомую процедуру, однако вместо $y_{it}$ и $x_{it}$ используем сохраненные остатки (очищенный $y_{it}$ и очищенный $x_{it}$)

# Выводы по формуле $\hat{\beta}_1$ в FE-модели на пространственные единицы:

- Пространственные единицы с большей внутригрупповой изменчивостью предиктора (то есть, изменчивостью предиктора во времени) вносят больший вклад в оценку $\hat{\beta}_1$
- Те единицы анализа, у которых предиктор вообще не изменяется во времени, не участвуют в формировании оценки коэффициента $\hat{\beta}_1$ в FE-модели на пространственные единицы
- $\hat{\beta}_1$ формируется на основании внутригрупповой изменчивости предиктора. Поэтому интерпретация $\hat{\beta}_1$ будет в общем виде следующей: При увеличении предиктора на одну единицу, зависимая переменная в среднем растет на $\hat{\beta}_1$ для объектов внутри одной пространственной единицы при прочих равных условиях

# Модель со случайными эффектами

Для моделирования различий в стартовых условиях можно воспользоваться моделью со случайными эффектами (RE-модель). Здесь различия в стартовых условиях представлены как случайная величина:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \alpha_i + e_{it}$$

$\alpha_i$ – межгрупповая изменчивость (отклонения группового среднего от общего среднего)
$e_{it}$ – внутригрупповая изменчивость (отклонения наблюдений за t-ый временной период от группового среднего)

# Допущения RE-модели

- $Cov(\alpha_i, e_{it}) = 0$
- $Cov(x_{it}, e_{it}) = 0$
- $Cov(x_{it}, \alpha_i) = 0$
- $Cov(e_{it}, e_{is}) = 0$, при этом $t \neq s$
- $Cov(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, при этом $i \neq j$
- $e_{it} \sim i.i.d.(0, \sigma_e^2)$; $\alpha_i \sim i.i.d.(0, \sigma_\alpha^2)$

# Обобщенный метод наименьших квадратов

Вместо робастной оценки дисперсии предлагаем альтернативный способ оценивания коэффициентов в регрессионной модели – ОМНК (обобщенный МНК)

$\Sigma$ – ковариационная матрица ошибок (учитывает случай гетероскедастичности)

Матрица $P$ такая, что справедливо следующее: $\Sigma^{-1} = P^T P$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

# Обобщенный метод наименьших квадратов

Используем матрицу $P$ для предварительного преобразования:

$$PY = PX\beta + P\varepsilon$$

$$Var(P\varepsilon) = PVar(\varepsilon)P^T = I$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\beta}_{GLS} = ((PX)^T (PX))^{-1} (PX)^T (PY) = (X^T P^T P X)^{-1} X^T P^T P Y = \\ = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Y$$

Такой подход (ОМНК / GLS) будет давать наиболее эффективные оценки среди линейных несмещенных оценок, но на практике не все так просто...см. далее идею FGLS

# Реализуемый ОМНК

На практике мы имеем дело с реализуемым ОМНК (FGLS – feasible generalized least squares)

$\hat{\beta}_{FGLS} = (X^T\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X^T\hat{\Sigma}^{-1}Y$
То есть, здесь нам предстоит оценить (!) ковариационную матрицу ошибок
Оценки FGLS асимптотически состоятельны и эффективны. Однако при малых по объему выборках мы мало что можем сказать о свойствах оценок FGLS. Стоит понимать, что на конечных выборках может быть значимое смещение оценок. Кроме этого, при малых n могут быть даже менее эффективны по сравнению с исходными OLS-оценками

# Тест Хаусмана

$$H_0 : Cov(x_{it}, \alpha_i) = 0$$

$$\beta_{FE} = \beta_{RE}$$

$$H_1 : Cov(x_{it}, \alpha_i) \neq 0$$

$$\beta_{FE} \neq \beta_{RE}$$

Статистика критерия:

$$H = (\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE})'[\widehat{Var}(\hat{\beta}_{FE}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_{RE})]^{-1}(\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}) \sim \chi^2_{df=k}$$

$k$ – количество изменяющихся во времени предикторов
Если $H_0$ отвергается, значит модель с фиксированными эффектами более предпочтительна. Оценки модели со случайными эффектами оказываются смещенными и несостоятельными