第 3 章作业

聂欣雨

2019 年 11 月 24 日

1 群的性质

1. $\{\mathbb{Z},+\}$ 是否为群? 若是, 验证其满足群定义; 若不是, 说明理由。
   答：$\{\mathbb{Z},+\}$ 是群，按“封结幺逆”顺序依次验证：
   (a) 封闭性：整数加法的结果仍是整数。
   (b) 结合律：显然整数加法满足结合律。
   (c) 幺元：存在幺元 0，任意整数与 0 相加仍是自己。
   (d) 逆：两个相反数相加等于 0。
2. $\{\mathbb{N},+\}$ 是否为群? 若是, 验证其满足群定义; 若不是, 说明理由。
   答：$\{\mathbb{N},+\}$ 不是群，它不满足逆这个条件。即对任意一个自然数 a，不一定存在一个逆 a^{-1}，使得 $a+a^{-1}=0$。

2 验证向量叉乘的李代数性质

现取集合 $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, 数域 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 李括号为:

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{2.1}$$

请验证 $\mathfrak{g}=(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},\times)$ 构成李代数。
答：考虑任意向量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$，数 a，$b\in\mathbb{R}$，依次按照封闭性、双线性、自反性和雅可比等价进行验证：

1. 封闭性
   任意两个向量的叉乘仍是向量，显然满足封闭性。
2. 双线性
   根据叉积的性质，有

$$\begin{aligned}(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\times\mathbf{z}&=(a\mathbf{x})\times\mathbf{z}+(b\mathbf{y})\times\mathbf{z}\\&=a(\mathbf{x}\times\mathbf{z})+b(\mathbf{y}\times\mathbf{z})\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\times(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})&=\mathbf{z}\times a\mathbf{x}+\mathbf{z}\times b\mathbf{y}\\&=a(\mathbf{z}\times\mathbf{x})+b(\mathbf{z}\times\mathbf{y})\end{aligned}\tag{2.3}$$

   所以 $\mathfrak{g}$ 满足双线性。

3. 自反性

   任何向量与自己的叉积都是零向量，所以 $\mathfrak{g}$ 满足自反性。

4. 雅可比等价

   根据向量的三重积，有

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x}^T\mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{z} \tag{2.4}$$

   那么

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + &\mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}^T\mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{z} + (\mathbf{y}^T\mathbf{x})\mathbf{z} - (\mathbf{y}^T\mathbf{z})\mathbf{x} \\ &\qquad + (\mathbf{z}^T\mathbf{y})\mathbf{x} - (\mathbf{z}^T\mathbf{x})\mathbf{y} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

   因此，$\mathfrak{g}$ 满足雅可比等价性，构成李代数。

3 推导 SE(3) 的指数映射

答：令 $\phi = \theta\mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}$ 为单位向量，有

$$\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge = \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I} \tag{3.1}$$

以及

$$\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge = -\mathbf{a}^\wedge \tag{3.2}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= \mathbf{I} + \frac{1}{2!}\theta\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2(\mathbf{a}^\wedge)^2 + \frac{1}{4!}\theta^3(\mathbf{a}^\wedge)^3 + \frac{1}{5!}\theta^4(\mathbf{a}^\wedge)^4 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots) + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots) \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{\theta}(1 - \cos\theta)\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{\theta}(\theta - \sin\theta)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I}) \\ &= \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} + (1 - \frac{\sin\theta}{\theta})\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1 - \cos\theta}{\theta}\mathbf{a}^\wedge \\ &\triangleq \mathbf{J}\end{aligned} \tag{3.3}$$

4 伴随

答：首先证明 $\forall\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$，$\mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge$。对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$，有

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge\mathbf{v} &= (\mathbf{R}\mathbf{a}) \times \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{R}\mathbf{a}) \times (\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{v})\end{aligned} \tag{4.1}$$

由于 $\mathbf{R}$ 是旋转矩阵，有

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{R}\mathbf{a})^{\wedge}\mathbf{v} &= (\mathbf{R}\mathbf{a}) \times (\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{R}^T\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{R}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{R}^T\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

因此，

$$
\mathbf{R}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{a})^{\wedge} \tag{4.3}
$$

对于 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$，有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}\exp(\mathbf{p}^{\wedge})\mathbf{R}^T &= \exp(\mathbf{R}\mathbf{p}^{\wedge}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}) \\
&= \exp((\mathbf{R}\mathbf{p})^{\wedge})
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

5 轨迹的描绘

1. 事实上,T_{wc} 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么?为何画出 T_{wc} 的平移部分就得到了机器人的轨迹?
   答：T_{wc} 的平移部分表示机器人当前位置在世界坐标系中的坐标，因此画出 T_{wc} 的平移部分就得到了机器人在世界坐标系中的运动轨迹。
2. 运行代码
   答：CMakeLists.txt 文件内容如下：

```
project(trajectory)
cmake_minimum_required(VERSION 3.10)

find_package(Eigen3 REQUIRED)
find_package(Sophus REQUIRED)
find_package(Pangolin REQUIRED)

include_directories(${EIGEN3_INCLUDE_DIR})
include_directories(${Sophus_INCLUDE_DIRS})
include_directories(${Pangolin_INCLUDE_DIRS})

set(CMAKE_RUNTIME_OUTPUT_DIRECTORY
↪  ${PROJECT_SOURCE_DIR})
add_executable(draw draw_trajectory.cpp)
target_link_libraries(draw
        ${Pangolin_LIBRARIES}
        ${Sophus_LIBRARIES})
```

在 draw_trajectory.cpp 文件中添加如下代码：

```
fstream fin(trajectory_file);
double t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w;
while (fin >> t >> t_x >> t_y >> t_z >> q_x >> q_y >>
↪  q_z >> q_w)
{
    Eigen::Quaterniond q(q_w, q_x, q_y, q_z);
    Eigen::Vector3d t(t_x, t_y, t_z);
    poses.push_back(Sophus::SE3d(q, t));
}
```

运行结果图 1 所示。

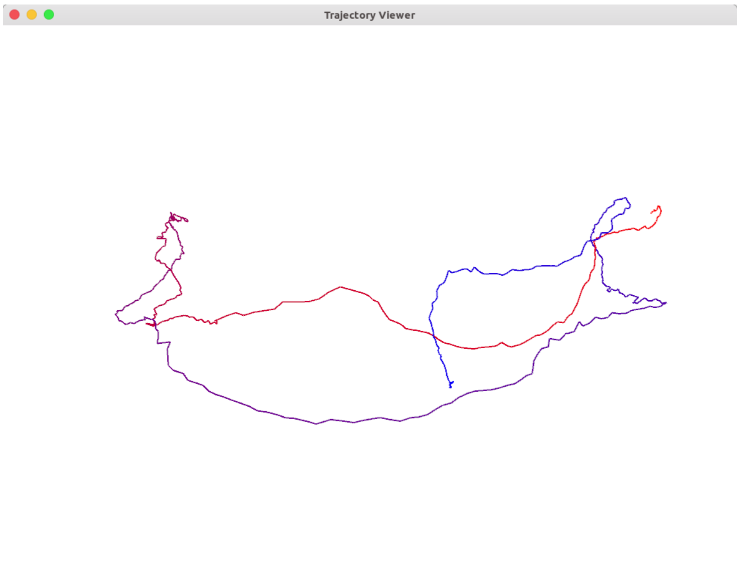

图 1: draw_trajectory 运行结果图

6 轨迹的误差

参考 slambook2/ch4/example/trajectoryError.cpp 完成代码，其中计算 RMSE 部分如下：

```cpp
double cal_RMSE(trajectory &poses_gt, trajectory &poses_pred)
{
    double rmse = 0;
    for (size_t i = 0; i < poses_gt.size(); i++)
    {
    auto gt = poses_gt[i], pred = poses_pred[i];
    double e = (gt.inverse() * pred).log().norm();
    rmse += e * e;
    }
return sqrt(rmse/poses_gt.size());
}
```

运行结果见图 2 和图 3。其中图 3 红色线条表示估计轨迹，蓝色线条表示实际轨迹。

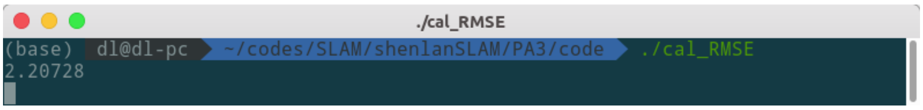

图 2: RMSE 结果图

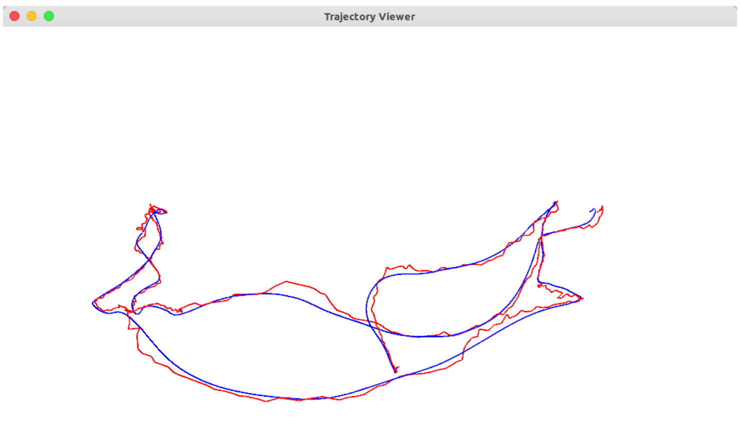

图 3: 轨迹结果对比图