# 第 2 章作业

聂欣雨

2019 年 11 月 17 日

## 1 熟悉 Eigen 矩阵运算

1. 在什么条件下,x 有解且唯一?
   答：在 $A$ 为方阵的情况下，当它可逆时 $Ax = b$ 有且仅有一个解。
2. 高斯消元法的原理是什么?
   答：高斯消元法可以被用于求线性方程组 $Ax = b$ 的解。它的基本原理是使用初等行变换将方程组变为 $Ux = b'$，其中 $U$ 是一个上三角矩阵。接着根据该方程组从下往上逐项求解 $x$ 中的元素。当 $U$ 中某行为 0 时，若对应 $b'$ 中元素不为 0，则该方程组无解，否则有任意多个解。
3. QR 分解的原理是什么?
   答：QR 分解将一个矩阵 $A$ 分解为 $A = QR$，其中 $Q$ 是正交矩阵，$R$ 是上三角矩阵。我们可以从 Gram-Schmidt 正交化的角度理解 QR 分解。Gram-Schmidt 正交化方法的原理较为直观：对于一组列向量 $x_1, x_2, \ldots, x_s \in \mathbb{C}^n$，首先令 $y_1 = x_1$，可将 $x_2$ 正交分解为 $x_2 = ky_1 + y_2$，其中 $y_1 \perp y_2$。故 $(y_1, y_2) = (y_1, x_2 - ky_1) = 0$，因此

   $$k = \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}$$

   则

   $$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$$

   同理可将 $x_3$ 正交分解为 $x_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2 + y_3$，得到

   $$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2$$

   以此类推可以得到一组两两正交的向量 $y_1, y_2, \ldots, y_s$，其中

   $$y_i = \begin{cases} x_1 & i = 1 \\ x_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(x_i, y_k)}{(y_k, y_k)} y_k & i = 2, 3, \ldots, s \end{cases} \tag{1.1}$$

   可以发现，每一个 $y_i$ 都能够写成 $x_1, x_2, \ldots, x_i$ 的线性组合。

   对于 QR 分解，我们对矩阵 $A$ 的列向量组 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 进行

Schmidt 正交化，并加上正则化这一步，得到标准正交基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$：

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|_2} = t_{11}x_1 \\
\epsilon_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|_2} = t_{12}x_1 + t_{22}x_2 \\
&\vdots \\
\epsilon_n &= \frac{y_n}{\|y_n\|_2} = t_{1n}x_1 + t_{2n}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n
\end{aligned}$$

矩阵化后为

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

即 $Q = AT$，那么 $A = QT^{-1}$。由于上三角矩阵的逆矩阵还是上三角矩阵，因此可以用上三角矩阵 $R$ 表示 $T^{-1}$，得到

$$A = QR \tag{1.3}$$

4. Cholesky 分解的原理是什么?

答：在实数域上，Cholesky 分解是指将一个正定的实对称矩阵分解成一个下三角矩阵和它的转置矩阵的乘积。若我们有一个正定实对称矩阵 $A$，Cholesky 分解法会将 $A$ 唯一分解为

$$A = LL^T \tag{1.4}$$

其中 $L$ 是一个对角线元素全为正数的下三角矩阵。Cholesky 分解可以由 LDR 分解导出。对于正定实对称矩阵 $A$，LDR 分解将它唯一分解为

$$A = LDR$$

其中 $L$ 是单位下三角矩阵，$D$ 是元素全为正数的对角矩阵，$R$ 是单位上三角矩阵。由于 $A^T = A$，有 $R = LT$，即

$$A = LDL^T$$

将 $D$ 分解成两个相同的对角矩阵 $K$，分别与 $L$ 和 $L^T$ 结合后得到

$$A = (LK)I(KL^T)$$

即得到 Cholesky 分解的结果 $A = LL^T$。

5. 编程实现 A 为 $100 \times 100$ 随机矩阵时, 用 QR 和 Cholesky 分解求 x 的程序。

答：实现代码见附件 useEigen100 文件夹，主要代码如下

```cpp
// QR 分解
Matrix<double, 100, 1> x1 = A.colPivHouseholderQr().solve(b);

// Cholesky 分解
Matrix<double, 100, 1> x2 = A.llt().solve(b);
```

输出结果如图 1 所示。

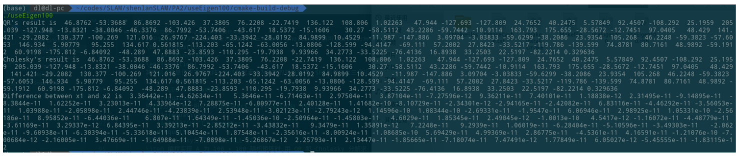

图 1: 矩阵分解结果图

## 2 几何运算练习

实现代码见附件 useGeometry 文件夹，主要代码如下

```cpp
Quaterniond q1(0.55,0.3,0.2,0.2);
q1.normalize();
Vector3d t1(0.7,1.1,0.2);

Quaterniond q2(-0.1,0.3,-0.7,0.2);
q2.normalize();
Vector3d t2(-0.1,0.4,0.8);

Isometry3d T1w(q1), T2w(q2);
T1w.pretranslate(t1);
T2w.pretranslate(t2);

Vector3d p1(0.5,-0.1,0.2);

Vector3d p2 = T2w * T1w.inverse() * p1;
std::cout << p2.transpose() << std::endl;
```

输出结果如图 2 所示。

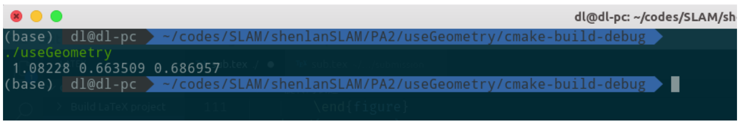


图 2: 坐标变换结果图

## 3 旋转的表达

1. 设有旋转矩阵 $R$，证明 $R^TR = I$ 且 $detR = +1$。
   答：假设在 $\mathbb{R}^3$ 有两个单位正交基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 和 $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$。对于某个固定向量 $\mathbf{a}$，它在两个坐标系下的坐标分别为 $(a_1, a_2, a_3)^T$ 和 $(a'_1, a'_2, a'_3)^T$，那么有

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3]\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

   从中我们可以引出旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] \tag{3.2}$$

   则

$$\begin{aligned} R^TR &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'^T \\ \mathbf{e}_2'^T \\ \mathbf{e}_3'^T \end{bmatrix} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'^T \\ \mathbf{e}_2'^T \\ \mathbf{e}_3'^T \end{bmatrix} \mathbf{I}[\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{3.3}$$

   因此，有 $det(R^TR) = det(I)$，得到 $detR = \pm 1$。我们定义旋转矩阵 $R$ 的行列式为 $+1$，以表示通常的旋转。

2. 设有四元数 $\mathbf{q}$, 我们把虚部记为 $\epsilon$, 实部记为 $\eta$, 那么 $\mathbf{q} = (\epsilon, \eta)$。请说明 $\epsilon$ 和 $\eta$ 的维度。
   答：$\epsilon \in \mathbb{R}^3$，$\eta \in \mathbb{R}$。

3. 请证明对任意单位四元数 $q_1$,$q_2$，四元数乘法可写成矩阵乘法。
   答：由四元数的乘法公式可得

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + \epsilon_1^\wedge\epsilon_2 \\ \eta_1\eta_2 - \epsilon_1^T\epsilon_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

   而

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^+\mathbf{q}_2 &= \begin{bmatrix} \eta_1\mathbf{I} + \epsilon_1^\wedge & \epsilon_1 \\ -\epsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1\epsilon_2 + \epsilon_1^\wedge\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 \\ -\epsilon_1^T\epsilon_2 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2^\oplus\mathbf{q}_1 &= \begin{bmatrix} \eta_2\mathbf{I} - \epsilon_2^\wedge & \epsilon_2 \\ -\epsilon_2^T & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_2\epsilon_1 - \epsilon_2^\wedge\epsilon_1 + \epsilon_2\eta_1 \\ -\epsilon_2^T\epsilon_1 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1\epsilon_2 + \epsilon_1^\wedge\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 \\ -\epsilon_1^T\epsilon_2 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

# 4 罗德里格斯公式的证明

1. 证明罗德里格斯公式。
   答：罗德里格斯公式为

$$\mathbf{R} = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\mathbf{n}^\wedge \tag{4.1}$$

   根据wiki 相关页面进行证明。首先使用单位向量 $\mathbf{k}$ 和旋转角度 $\theta$ 定义一个旋转：某个向量 $\mathbf{v}$ 绕着 $\mathbf{k}$ 旋转了 $\theta$ 角度后成为新的向量 $\mathbf{v}_{rot}$。参考图 3，可将 $\mathbf{v}$ 分解为平行于 $\mathbf{k}$ 的和垂直于 $\mathbf{k}$ 的两部分

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$$

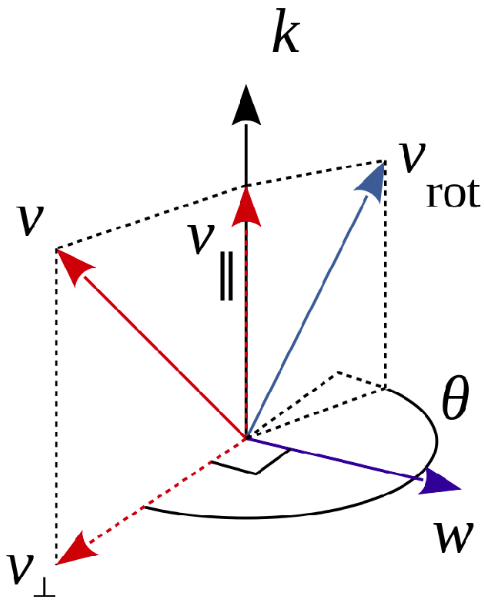


图 3: 旋转示意图

根据几何知识可知 $\mathbf{v}_{\parallel}$ 是 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{k}$ 上的投影，由于 $\mathbf{k}$ 是单位向量，有

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

那么

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

根据向量三重积展开，有

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

则

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v})$$

在旋转之后，$\mathbf{v}_{\parallel}$ 保持不变，而 $\mathbf{v}_{\perp}$ 则会绕 $\mathbf{k}$ 旋转 $\theta$。考虑一个向量 $\mathbf{w}$，令

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{k} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \\ &= \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{\perp} \end{aligned}$$

显然 $\mathbf{w}$ 在 $\mathbf{v}_{\perp}$ 的旋转平面上，且相当于 $\mathbf{v}_{\perp}$ 绕 $\mathbf{k}$ 旋转了 $\frac{\pi}{2}$ 所成的新向量。有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp rot} &= \cos \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{\perp} \\ &= \cos \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

那么

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{rot} &= \mathbf{v}_{\parallel rot} + \mathbf{v}_{\perp rot} \\
&= \mathbf{v}_{\parallel} + \cos\theta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}) + \sin\theta\mathbf{k} \times \mathbf{v} \\
&= \cos\theta\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{v}_{\parallel} + \sin\theta\mathbf{k} \times \mathbf{v} \\
&= \cos\theta\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\mathbf{k} + \sin\theta\mathbf{k} \times \mathbf{v} \\
&= \cos\theta\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{k}\mathbf{k}^T\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{k} \times \mathbf{v} \\
&= (\cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{k}\mathbf{k}^T + \sin\theta\mathbf{k}^\wedge)\mathbf{v} \\
&= \mathbf{R}\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

由此式 4.1 得证。

2. 请使用此式请明 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$。
答：当对旋转操作取逆操作时，显然旋转轴 $\mathbf{n}$ 不变，旋转角 $\theta$ 取反，因此

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1} &= \cos(-\theta)\mathbf{I} + (1-\cos(-\theta))\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin(-\theta)\mathbf{n}^\wedge \\
&= \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \sin\theta\mathbf{n}^\wedge \\
&= (\cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\mathbf{n}^\wedge)^T \\
&= \mathbf{R}^T
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

# 5 四元数运算性质的验证

1. 验证旋转后的点 $\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$ 仍为虚四元数。
答：令四元数 $\mathbf{q}$ 为 $[s_1, \mathbf{v}_1]$，点 $\mathbf{p}$ 为 $[0, \mathbf{v}_2]$，规定 $lr$ 指取出实部内容，则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} &= (\mathbf{q}\mathbf{p})\mathbf{p}^{-1} \\
&= [-\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2, s_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]p^{-1}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

取 $\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$ 的实部

$$
\begin{aligned}
lr(\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}) &= (-\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 s_1 - (s_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T(-\mathbf{v}_1))/\|q\|^2 \\
&= (\underbrace{-\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 s_1 + s_1\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1}_{0} + \underbrace{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T\mathbf{v}_1}_{0})/\|q\|^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

2. 请根据你的推导, 给出矩阵 $\mathbf{Q}$。
答：根据公式 (3.5) 和公式 (3.6) 得

$$
\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^+\mathbf{q}^{-1\oplus}\mathbf{p} \tag{5.3}
$$

分别计算 $\mathbf{q}^+$ 和 $\mathbf{q}^{-1\oplus}$

$$\mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} + \mathbf{v}^\wedge & \mathbf{v} \\ -\mathbf{v}^T & s \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{q}^{-1\oplus} = \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} + \mathbf{v}^\wedge & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & s \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} + \mathbf{v}^\wedge & \mathbf{v} \\ -\mathbf{v}^T & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} + \mathbf{v}^\wedge & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} s^2\mathbf{I} + 2s\mathbf{v}^\wedge + \mathbf{v}^\wedge\mathbf{v}^\wedge + \mathbf{v}\mathbf{v}^T & -s\mathbf{v} + s\mathbf{v} \\ -s\mathbf{v}^T - \mathbf{v}^T\mathbf{v}^\wedge + s\mathbf{v}^T & \mathbf{v}^T\mathbf{v} + s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s^2\mathbf{I} + 2s\mathbf{v}^\wedge + \mathbf{v}^\wedge\mathbf{v}^\wedge + \mathbf{v}\mathbf{v}^T)/\|q\|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

# 6 熟悉 C++11

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;

class A {
    public:
    A(const int& i ) : index(i) {}
    int index = 0;
};

int main() {
    A a1(3), a2(5), a3(9);
    vector<A> avec{a1, a2, a3};
    std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const
    ↪ A&a1, const A&a2) {return
    ↪ a1.index<a2.index;}); // [](参数){函数定
    ↪ 义}:lambda 表达式, 匿名函数
    for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" "; //
    ↪ auto: 自动类型推导 for(:) 范围 for 循环
```

```
        cout<<endl;
        return 0;
    }
```