Seminar 5 - 1.11.2021

Relații de echivalență

Ex. 1: Pe $\mathbb{Z}$ se def. rel. $x \sim y \iff m \mid (x-y)$ $(m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$ fixat$)$

Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez: $\underline{m=5}$: $x \sim y \iff 5 \mid (x-y)$.

Verificăm cele 3 cond.:

1. refl.: $x \sim x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x - x = 0$, $5 \mid 0$? Da $\Rightarrow x \sim x$

2. simetria: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Fie x, y a.î. $x \sim y \Rightarrow 5 \mid (x-y) \Rightarrow 5 \mid (x-y) \cdot (-1) \Rightarrow 5 \mid (y-x)$

$\Rightarrow y \sim x$.

3. tranzit.: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Rightarrow 5 \mid (x-y) \\ y \sim z \Rightarrow 5 \mid (y-z) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \mid [(x-y)+(y-z)] \Rightarrow 5 \mid (x-z) \Rightarrow x \sim z.$$

Din 1, 2 și 3 $\Rightarrow$ „$\sim$" este rel. de echiv.

Exemplu: $\mathbb{Z}_5$

$\hat{7} = \hat{2}$ De ce?

$7 : 5 = 1$ rest 2

$(7-2) \vdots 5$

$\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\}$

MULȚIMEA CLASELOR DE RESTURI

$\hat{0} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Relația de echivalență de la Ex. definește $\mathbb{Z}_5$. De fapt, $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/\sim$ (mulțime factor)

Mulțimea factor este mulțimea claselor de echivalență.

Clasă de echivalență: $[x] (= \hat{x}) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \sim x\}$.

Obs.: $y, z \in [x] \Rightarrow y \sim x$ și $z \sim x \Rightarrow y \sim z$ (din propr. rel. de echiv)

Ex.: $\hat{0} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$

$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

$\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, 0, 1, 2, 3, 4 sunt reprezentanți ai claselor de echiv.

0, 1, 2, 3, 4 formează un sistem complet de reprezentanți (SCR)

(avem câte un reprezentant din fiecare clasă de echiv. posibilă)

Ex.: „$\sim$" pe $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ („$\sim$" rel. de echiv. vezi S4).

$$[0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 0 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Z}$$

$$[1,5] = \{\overline{a,5} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Obs. 2 nr. reale sunt în aceeași clasă de echiv dacă au aceeași parte fracționară.

Dem: $\boxed{x \sim y}$

$$\left.\begin{aligned} x &= [x] + \{x\} \\ y &= [y] + \{y\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{x - y}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{[x] - [y]}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\{x\} - \{y\}}_{\in \mathbb{Z}}.$$

$$\{x\} \in [0,1)$$

$$\Rightarrow \{x\} = \{y\}.$$

Un SCR pt „$\sim$" este $[0,1) = S$

$$\mathbb{R}/\sim \; = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} = \{[x] \mid x \in S\}$$

$$[1] = [2]$$

Ex. 3 : Pe $\mathbb{C}$, $z \sim w \iff z - w \in \mathbb{R}$.

$z - w \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$

$\underline{z = a + bi}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$[z] = \{w \in \mathbb{C} \mid z \sim w\} = \{w \in \mathbb{C} \mid z - w \in \mathbb{R}\} = \{w = c + bi \mid c \in \mathbb{R}\}$

$= z + \mathbb{R}$

Un reprezentant pt. $[z]$, $z = a + bi$ este bi.

Un SCR : $S = \{bi \mid b \in \mathbb{R}\}$, $\{b + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$

$x, y \in S,\ x \neq y \Rightarrow [x] \neq [y]$

Ex. 4 : Pe $\mathbb{C}$ se def. rel. „$\sim$" prin $z \sim w \iff |z| = |w|$.

a. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

b. Det. clasele de echiv., SCR.

Rez : $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$[1] = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 \sim w\} = \{w \in \mathbb{C} \mid |1| = |w|\} =$

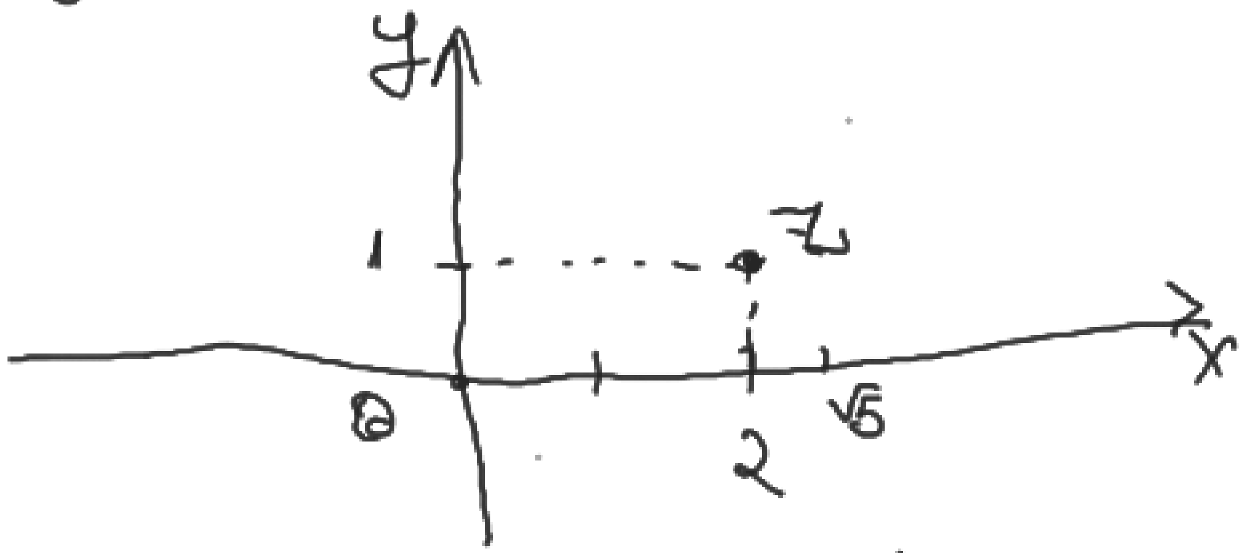
$= \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ $(= \{w \in \mathbb{C} \mid w = a + bi, \sqrt{a^2 + b^2} = 1\})$

$|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$[0] = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| = |0| \} = \{ a+bi \in \mathbb{C} \mid \sqrt{a^2+b^2} = 0 \}$.

$\sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow \underset{a,b \in \mathbb{R}}{a^2+b^2=0} \Rightarrow a=b=0$

$[0] = \{0\}$.



$z = 2+i$

$|z| = \sqrt{5}$

Un SCR: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

$a, b \in \mathbb{R}_+,\ a \neq b \Rightarrow |a| \neq |b|$

$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}_+,\ [z] = [|z|]$.

Ex. 4: Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

$\underset{b,d \neq 0}{ad = bc} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$[(a,b)] = \{ (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid \underset{\Rightarrow c = \frac{ad}{b}}{ad = bc} \} \Leftrightarrow \{ \left(\frac{ad}{b}, d\right) \mid \underset{b \mid ad}{d \in \mathbb{N}^*} \}$

$(a,b) = (216, 123)$

$(c,d) \sim (a,b) \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad \frac{c}{d} = \frac{216}{123}^{(3} = \frac{72}{41}$

$[(a,b)] = [(72, 41)] = \{(72k, 41k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

Un SCR pt. „$\sim$": $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid \text{cmmdc}(a,b) = 1\}$

Obs: $[(a,b)] = [(216, 123)] \overset{?}{=} \{(216k, 123k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$?
NU.

Obs: Un reprezentant pt. $[(a,b)]$ este $\frac{a}{b}$ adusă la forma ired.

Ex. 5: Pe $\mathbb{R}$ def. rel. „$\sim$" prin $x \sim y \iff x^2 - 3x = y^2 - 3y$.

a. Ar. că „$\sim$" este rel de echiv. (Ex.)

b. Det. clasele de echiv și un SCR.

Rez.: b. $[x] = ?$

$[0] = ?$

$y \in [0] \iff y \sim 0 \Rightarrow y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(y-3) = 0 \Rightarrow y = 0$ sau $y = 3$

$[0] = \{0, 3\}$.

$x \sim y \iff x^2 - 3x = y^2 - 3y$.

Var. 1. ($[x]$) $y^2 - 3y - (x^2 - 3x) = 0$ - ec. de gr. 2 în y.

Var. 2: $y^2 - 3y - (x^2 - 3x) = 0$. O sol. este $y = x$.

Rem.: $ax^2 + bx + c = 0$, x_1, x_2 răd.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

$$\underline{y^2} - 3y - \underline{x^2} + 3x = 0$$

$$y^2 - x^2 - 3y + 3x = 0$$

$$(y - x)(x + y) - 3(y - x) = 0$$

$$(y - x)(x + y - 3) = 0 \Rightarrow x = y \text{ sau } x + y = 3.$$

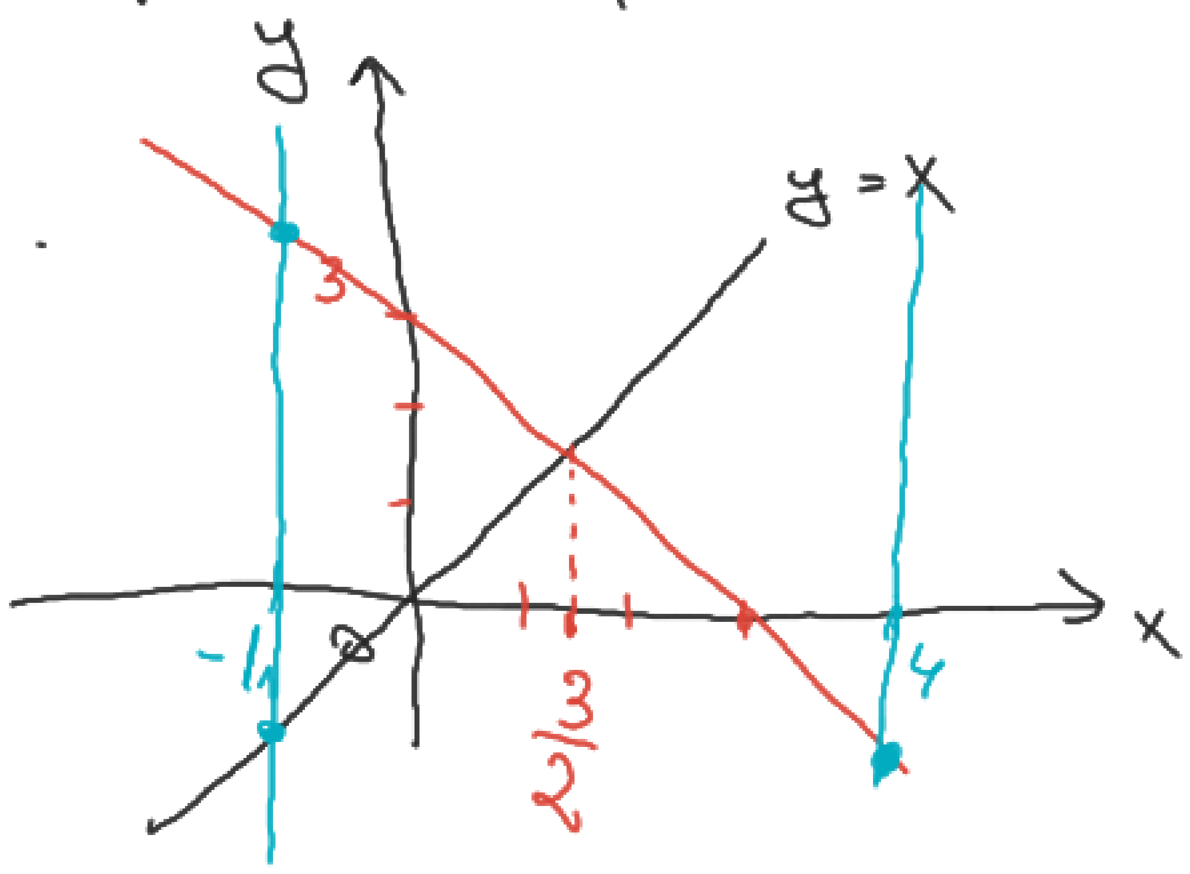
$$[x] = \{x, 3 - x\}$$

Cum obținem un SCR?

În ce punct $[x]$ are un sg element?

$$x = 3 - x \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Interpretare grafică



SCR: $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

sau $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

T: Fie $f: A \to \mathcal{P}(A)$ o funcție, unde A este o mulțime nevidă. Pe A def. rel. „$\sim$" $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Verificați dacă „$\sim$" este rel. de echiv. Dacă da, det. clasele de echiv. și un SCR pt. „$\sim$".

(Arătați că există o bij. între S și $\operatorname{Im} f$).