Cursuri -Probabilități și Statistică-

Dîrțu Ecaterina și Sandu Anastasia

28 ianuarie 2023

Cuprins

Capitolul 1

Curs 1

1.1 Introducere

1.1.1 Modaliate de notare

Punctajul maxim posibil este 125p și se împarte astfel:

- 10p - Oficiu
- 20p - Laborator și seminar (pentru activitate și o serie de teste rapide neanuțate)
- 30p - Proiect (echipe de 2 sau maxim 3 persoane, cu prezentare în sesiune)
- 50p - Examen scris personalizat (fără materiale, va dura 3 ore)
- 15p - Bonus (nu se ia în calcul pentru promovare)

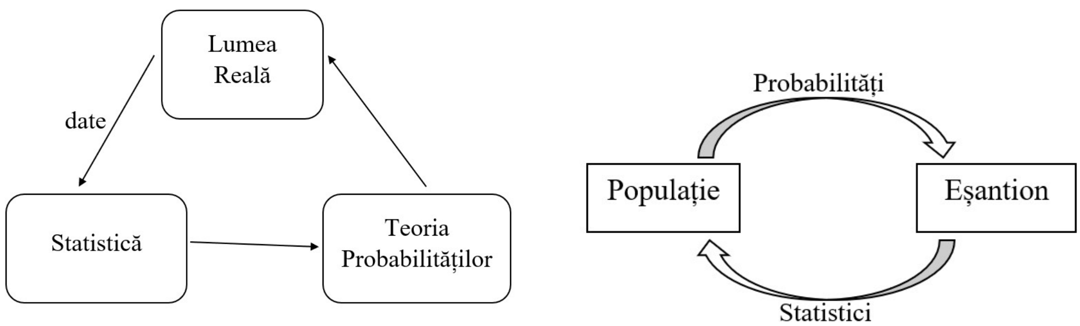
Criterii de promovare:

- nota finală $\geq$ 50p
- nota la examenul scris $\geq$ 25p

1.1.2 Utilitate și Informații

Calucului probabilităților și al statisticilor este foarte util pentru a înțelege mai târziu AI (Artificial Intelligence) și ML (Machine Learning).

Link pentru site-ul cursului: https://alexamarioarei.quarto.pub/curs-ps-2022-2023/



Două diagrame relevante informațiilor din continuare

1.1.3 Exemplu

Într-o urnă cu bile albe și bile negre, proporția bilelor albe este: **p** $\in$ **(0,1)**, o valoare necunoscută. Problema poate fi abordată în două moduri:

1. Probabilități:
   Presupunem **p**=17%, extragem 10 bile cu întoarcere (fiecare bilă este extrasă, consemnată și apoi pusă înapoi în urnă înaintea următoarei extrageri).

   Care este probabilitatea ca din cele 10 bile extrase să avem 4 albe?

2. Statistică:
   Am extras din urnă 10 bile cu întoarcere și observăm că 4 sunt albe.

   Ce se poate spune despre **p**?

1.2 Câmp de probabilitate. Operații cu evenimente.

Eveniment aleator = șir de acțiuni/fenomen cu rezultat necunoscut înaintea realizării lui.

Acestuia îi asociem:

- Ω = mulțimea evenimentelor elementare, mulțimea rezultatelor posibile ale experimentului, spațiul stărilor/probelor.
  ex: $\Omega = \{H(head), T(tail)\}$ (ban), $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (zar) etc.
- $\omega \in \Omega$ = elementele multimii, un eveniment elementar

Proprietăți ale lui Ω:

- mutualitate exclusivă (evenimentele se exclud reciproc)
- colectivitate exhaustivă (cel puțin unul din evenimente se realizează)
  $\Longrightarrow$ "unul și numai unul" se realizează.

Obs: Dacă două fenomene se realizează în același, dar ne interesează doar rezultatul unuia:

1. Afară poate ploua sau nu
2. Se dă cu banul și poate cădea cap sau pajură. (fenomenul relevant)

$\Longrightarrow \Omega = \{$ H și plouă, T și plouă, H și nu plouă, T și nu plouă $\}$

Dacă experimentul cu banul nu este influențat de vreme
(se desfășoară în interoir, cu geamurile închise), atunci $\Omega = \{H, T\}$

Definiție: O submulțime $A \in \Omega$ se numește **eveniment**. Spunem că evenimentul A se realizează dacă în urma desfășurării experimentului aleator rezultatul $\omega \in A$

	Teoria Mulțimilor	Teoria Probabilităților
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor (evenimentul sigur)
ω	un element al lui Ω	evenimentul elementar
$\emptyset$	mulțimea vidă	evenimentul imposibil
A	mulțimea A	evenimentul posibil A
$\overline{A}$	complementara lui A in Ω	evenimentul contrar lui A
$A \cup B$	reuniune	cel pțin unul dintre evenimentele A și B se realizează (A sau B)
$A \cap B$	intersecție	evenimentele A și B se realizează simultan
$A \backslash B$	diferență	evenimentul A se realizează, dar evenimentul B nu
$A \triangle B$	diferență simetrică	sau A sau B se realizează, dar nu ambele

Definiție: **Mulțimea evenimentelor posibile asociate evenimentului aleator cu spațiul stărilor** Ω este o submulțime $\mathcal{F} \in P(\Omega)$ care verifică următoarele proprietăți:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. dacă $A \in \mathcal{F}$, atunci $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. dacă A și $B \in \mathcal{F}$, atunci $A \cup B \in \mathcal{F}$

Observație: Dacă toate proprietățile sunt îndeplinite, $\mathcal{F}$ se numește *algebă*.

1.2.1 Exemplu

Aruncăm cu banul până obținem pentru prima oară H.

$\Longrightarrow \Omega = \{1 \text{ (pt H)}, 2 \text{ (pt TH)}, 3 \text{ (pt TTH) } ...\} = \mathbb{N}^*$

Presupunem că am obținut H după un număr par de aruncări.

$\Longrightarrow A = \{2,\ 4,\ 6\ ...\ \} = \bigcup_1^\infty \{2i\}$

În acest context se remarcă:

$3^{'}$. dacă $(A_n)_n \in \mathcal{F}$, atunci $\bigcup_{i=1}^\infty \{A_n\} \in \mathcal{F}$.

Dacă $\mathcal{F}$ verifică $1, 2, 3^{'}$, atunci acesta se numește "σ-algebră"
(notație definită în cadrul teoriei măsurii). σ face referire la numerabilitate în fața unui termen.
Astfel, se definește $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spațiu probabilizabil și măsurabil.

Capitolul 2

Curs 2

2.1 Formule de calcul

2.1.1 Noțiuni teoretice

Presupunem ca avem un experiment aleator și un eveniment A de interes. Repetam experimentul (în condiții similare) de un număr mare de ori N.

Notăm:
$N(A)$ = nr de realizări ale lui A
$\frac{N(A)}{N}$ = frecvența relativă de realizare a lui A
$\mathbb{P}(A) \simeq \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$
$N(A) \in 0, 1, ..., N \Rightarrow$ că $\mathbb{P} \in$ [0,1]
Dacă $A = \Omega \Rightarrow N(A) = N \Rightarrow \frac{N(A)}{N} = 1 \Rightarrow P(\Omega) = 1$

Presupunem că avem 2 evenimente $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset, A \cup B \in \mathcal{F}$
$N(A \cup B) = N(A) + N(B)/ : N$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (finit aditivitate)

Definiție: O funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to$[0,1] care verifică:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $(\forall)(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ distincte două câte două
   $\mathbb{P}(\bigcup_N A_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (membrul drept e o serie)

Se numește **măsură de probabilitate** pe $(\Omega, \mathcal{F})$ sau prescurtat **probabilitate** ($\sigma-aditivitate$)
Acum putem atribui unui eveniment aleator un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ numit **câmp de probabilitate**.

2.1.2 Exemple

1) Aruncatul cu banul
- $\Omega = \{H, T\}$
- $\mathcal{F} = P(\Omega)$
- funcția $\mathbb{P}$ trebuie sa verifice proprietățile:
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ $\mathbb{P}(\{H\}) = p \in [0, 1] \Rightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - p$
Dacă se dă o monedă echilibrată/corectă $\Rightarrow p = \frac{1}{2}$
2) Aruncat cu zarul

- $\Omega = \{H, T\}$
- $\mathcal{F} = P(\Omega)$
- pentru $\mathbb{P}(i) = p_i \in [0, 1]$, i $\in \Omega$.

Suma probabilităților trebuie să dea 1 pentru că $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Ω e reuniunea celor 6 evenimente elementare disjuncte 2 câte 2 deci $p_1 + ... + p_6 = 1$, alegem primele 5 valori corespunzător și al șaselea e diferența până la 1.

Din definiție rezultă că probabilitatea reuniunii e sumă din probabilitățile elementelor:
$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i)$
3) Proprietate:

Demonstrăm: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Fie șirul $A_N = \emptyset, \bigcup_N A_n = \emptyset$
Presupunem prin reducere la absurd că:
$\mathbb{P}(\emptyset) > 0$, dar din 2. $\Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) \in [0,1] = \sum_n \mathbb{P}(\emptyset) \longrightarrow \infty$ (" $\Rightarrow\Leftarrow$ " - contradicție)

2.2 Modelul clasic de probabilitate. Modelul lui Laplace

Fie N natural nenul și considerăm un eveniment aleator cu N rezultate posibile.
$\Omega, a = \omega_1 ... \omega_N,$
$\mathcal{F} = P(\Omega)$ are 2^N elemente.

Funcția $\mathbb{P}$:
$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{N}$ se numește **echirepartiție**, $\omega_i i = 1...n$ are șanse egale de realizare.

Fie $A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i) = \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Nrcazurifavorabile}{Nrcazuriposibile}$

2.3 Elemente de combinatorică. Analiza combinatorială

A. Formula sume

- Pentru A și B mulțimi finite disjuncte:
$|A \cup B| = |A| + |B|$

- Pentru mulțimi oarecare se scade intersecția:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Pentru N mulțimi oarecare obținem principiul includerii și al excluderii, ce derivă de la Poincare când considerăm că și probabilitățile sunt tot probleme de cardinale.

B. Formula produsului

- Fie A și B mulțimi finite și AxB produsul cartezian, $(a, b) \in AxB$:
$|AxB| = |A| * |B|$

Capitolul 3

Curs 3

3.1 Modalități de eșantionare

3.1.1 Exemplificare teoretica

- schema cu revenire/întoarcere

  Considerăm o urnă cu n bile 1,..n și efectuăm k extrageri cu întoarcere
  Reformulare:

  Avem k bile și n urne: $(x1, ...xk)$ sau, mai general, numărul de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din mulțimea 1,..n

  În câte moduri se pot extrage? $\Rightarrow n^k$ moduri

- schema fără revenire /întoarcere

  Considerăm o urna cu n bile și extragem k bile fără întoarcere (k $\geq$ n).

  Reformulare:
  Numărul de șiruri de lungime k cu termeni distincți din mulțimea 1,..n

  În câte moduri se pot extrage? $\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$

3.1.2 Exemple

1. Câte cuvinte pot fi formate cu literele din MATE (diferite)

   Cu revenire: $4^4 = 256$
   Fără revenire: 4!=24

2. Avem o serie de cărți: 4 de mate, 3 de fizică, 2 de istorie, 1 de geografie

   $\Rightarrow 4! * 4! * 3! * 2! * 1!$

3. Problema aniversăriilor:
   Având N persoane, care e probabilitatea ca cel puțin 2 să fie născute în aceeași zi?

   Ipoteze:
   - anul are 365 zile
   - echirepartiția zilelor de naștere pe parcursul anului
   - ziua cuiva nu o influențează pe a altcuiva (un contraexemplu ar fi gemenii)

   Câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:
   Ω=toate zilele de naștere ale persoanelor, fiecare între 1 și 365 $(Z_i) \Rightarrow |\Omega| = 365^n$

   $\mathcal{F} = P(\Omega)$

   $\mathbb{P} : \mathcal{F} \Rightarrow [0, 1]$, $\mathbb{P}(W) = \frac{1}{365^n}$ din echirepartiție

   Evenimentul favorabil A=2 pers s-au născut în aceeași zi

$\mathbb{P}=\frac{|A|}{|\Omega|}$

$\mathbb{P}^c$=1-$\mathbb{P}$ pentru evenimentul contrar toate cele n persoane s-au născut în zile diferite

$\mathbb{P}^c = \frac{365*364*....*365-n+1}{365^n} \Rightarrow \mathbb{P}$ e aprox 51%

Numărul de submulțimi cu k elemente ale unei mulțimi de n elemente $\Rightarrow$ combinări (pentru că ordinea nu contează)

1. Cu un pachet de 52 cărți, câte mâini de 5 cărți putem avea? C_{52}^5
2. Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 Ași, 2 de 8 și o Damă? $C_4^2 * C_4^2 * C_4^1$
3. Variante de împărțire ale cărților: 4 semne, 13 figuri
   - Cât e probabilitatea să obținem fullhouse (2 identice + 3 identice)?
     Toate pachetele de 5 cărți sunt $C_{52}^5 = \Omega$
     Consideram echirepartiția: $\frac{1}{|\Omega|}$
     A = evenimentul favorabil, $|A| = 13 * C_4^2 * 12 * C_4^3$
   - Cât e probabilitatea să avem o pereche de cărți în mână?
     $13 * C_4^2 * (C_4^1)^3 * C_{12}^3$
4. Problema lui Newton Ripys. Care este probabilitatea ca:
   - cel puțin o valoare de 6 să apară atunci când aruncăm 6 zaruri?
     $|\Omega| = 6^6$ și este echirepartită
     $\mathbb{P} = 1 - \mathbb{P}^c = 1 - \frac{5^6}{6^6}$
   - cel puțin 2 de 6 să apară atunci când aruncăm 12 zaruri?
     $|\Omega| = 6^{12}$
     $\mathbb{P}$=1-(niciuna sau exact una), Observație: 'sau' $\Leftrightarrow$ '+' (pentru că sunt disjuncte)
     $\mathbb{P} = 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - C_{12}^1 * \frac{5^{11}}{6^{12}}$
   - cel puțin 3 de 6 să apară atunci când aruncăm 18 zaruri?
     $\mathbb{P}$=1-(niciuna + exact una + exact două)
     $\mathbb{P} = 1 - \frac{5^{18}}{6^{18}} - C_{18}^1 * \frac{5^{17}}{6^{18}} - C_{18}^2 * \frac{5^{16}}{6^{18}}$

3.2 Partiții. Coeficientul multinomial

Fie o mulțime cu n elemente și considerăm $n_1, n_2...n_k \in \mathbb{N}$ cu $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$
Consideram o partiție cu k submulțimi A_i, unde o submulțime să aibă n_i elemente

$C_n^{n_1} * C_{n-n_1}^{n_2} * ... * C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k}$

Exemple:

- Numărul de anagrame pentru MATEMATICA (2M, 3A, 2T, 1C, 1E și 1I)
  $\Rightarrow C_{10}^3 * (C_{10}^2)^2 * (C_{10}^1)^3$
- Fie un grup de 4 băieți și 12 fete. Care e probabilitatea ca după formarea a 4 subgrupe, în fiecare să fie un baiat?
  $\Rightarrow 4! * \frac{(C_{12}^3)^4}{(C_{16}^4)^4}$

În extragerea cu revenire, ordinea nu contează.
În câte moduri putem plasa k bile (care nu se disting între ele) în n urne?
n urne $\Rightarrow$ n-1 pereți despărțitori
$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

Capitolul 4

Curs 4

4.1 Probabilități condiționate

Exemple:

- Aruncăm cu o monedă echilibrată de 3 ori. Care e probabilitatea să obținem HHH?
  $\Omega = \{H, T\}^3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}, |\Omega| = 8 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{8}$
- Modificăm: Știm că la prima aruncare am obținut H.
  $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}, |\Omega| = 4 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{4}$

Notat $\mathbb{P}(A|B)$ se citește:
A ce vrem, B ce s-a realizat deja, bara e ”știind că”
”probabilitatea realizării lui A știind că B s-a realizat”
”probabilitatea condiționată a lui A la B”

Din perspectivă frecvenționistă:
Avem un experiment aleator pe care îl repetăm de N ori.
Ne interesează pentru evenimentele A și B: $\frac{N(A \cap B)}{N(B)}$
Ca probabilitate: $\mathbb{P} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Definiție:
Fie un câmp de probabiliate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, două evenimente A, B $\in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$.
Atunci probabilitatea condiționată lui A la evenimentul B, notată $\mathbb{P}(A|B)$, se calculează folosind formula $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Obs: A—B nu e un eveniment efectiv, e doar notație, iar
$\mathbb{P}(A)$ e probabilitatea a proiri
$\mathbb{P}(A|B)$ e probabilitatea a posteriori
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$

Exemple:

- Avem un pachet de cărți de joc și extragem în mod aleator 2 cărți succesiv fără întoarcere
  Evenimentele realizate:
  A - prima carte e inima rosie
  B - a doua carte e inima roșie
  C - a doua carte e de culoare rosie

  Vrem să calculăm: $\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(C|A)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C)$

  Soluție:
  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{13*12}{52*51}}{\frac{13}{52}} = \frac{12}{51}$
  $\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{13*25}{52*51}}{\frac{13}{52}} = \frac{25}{51}$
  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(B|A)$, deoarece $\mathbb{P}(B)$ are acceasi șansă înainte să se desfășoare evenimentele ca $\mathbb{P}(A)$ fiind echirepartiție
  $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{13*25}{52*51}}{\frac{26}{52}} = \frac{25}{102}$

- Fie o familie cu 2 copii:
  a) Care e probabilitatea ca cei 2 copii sa fie ambii fete, știind că primul e fată?
  b) Care e probabilitatea ca cei 2 copii sa fie ambii fete, știind că cel puțin unul e fată? Atenție examen!
  c) Care este probabilitatea ca cei 2 copii să fie fete știind că una e născută iarna?

  Soluție:
  a) și b) $\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ și Fiecare copil nu e influențat de celălalt
  $A = \{FB, FF\} \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{2}$
  $B = \{FB, BF, FF\} \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{3}$
  c) $\Omega = \{FI, FV, FP, FT, BI, BV, BP, BT\}^2 \Rightarrow |\Omega| = 64$ elemente
  (2) E - 2 fete dintre care una nascută iarna
  $\mathbb{P}(FI) = \frac{15}{64}, \mathbb{P}(E) = \frac{7}{64}$
  $\Rightarrow \mathbb{P} = \frac{7}{15}$

- Dacă o aeronava apare în zona de interes scanată de un radar, atunci se declanșează o alarmă cu probabilitatea de 99%. Daca nu avem aeronavă, atunci alarma falsă se declanșează cu 10% probabilitate. Șansa ca o aeronavă să treacă prin zona respectivă e 5%.
  a) Care e probabilitatea ca în zonă să nu avem avion și să avem alarmă?
  b) Care e probabilitatea ca în zonă să avem avion și sa nu fie detectat?

  Căutăm evenimentele elementare:
  A - să avem avion
  B - să avem alarmă

  Ipoteză:
  $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{100}, \mathbb{P}(B|A) = \frac{99}{100}, \mathbb{P}(B|A^c) = \frac{10}{100}$
  Soluție:
  Vrem $\mathbb{P}(A^c \cap B)$ pentru a)
  Vrem $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ pentru b)

  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$
  $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(A|B)$
  Observație:
  se poate și $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(B|A)$
  $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(B|A) * (1 - \mathbb{P}(A)) = 0.05 * 0.99$
  $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c) * \mathbb{P}(A) = (1 - \mathbb{P}(B|A)) * \mathbb{P}(A) = 0.01 * 0.05$

Generalizare: Regula produsului
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), A_1, A_2 ... A_n \in \mathcal{F}$ și $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2|A_1) * \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) * .. * \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$

Formula probabilității totale:
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), B_1, B_2, B_3$ și $A \in \mathcal{F}$
$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$ disjuncte două câte două
$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3)$
$= \mathbb{P}(A|B_1) * \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) * \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) * \mathbb{P}(B_3)$

Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $B_1 ... B_n \in \mathcal{F}$ partițiile lui $\Omega, \forall B_i > 0, i = \overline{1, n}$. Dacă $A \in \mathcal{F}$
Caz particular pentru n=2:
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) * \mathbb{P}(B^c)$

Formula lui Bayes:
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și A, B $\in \mathcal{F}$ și presupunem că probabilitățile sunt pozitive.
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} == \frac{\mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) * \mathbb{P}(B^c)}$

Generalizare:
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $B_1...B_n \in \mathcal{F}$ partițiile lui $\Omega, \forall B_i > 0, i = \overline{1,n}$.
$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i) * \mathbb{P}(B_i)$

Exemplu:
Presupunem că prevalența unei boli în populație este de 1% și că efectuăm un test de detecție cu o acuratețe de 95%.
Prin acuratețe înțelegem sensibilitatea si specificitatea testului, unde sensibilitatea înseamnă rata de true pozitive, (probabilitatea ca testul să fie pozitiv știind că e persoana e infectată) și specificitatea e rata de true negative (probabilitatea ca testul să fie negativ știind că persoana nu e infectată).

Notăm evenimentele elementare:
D - pacient infectat
T - test pozitiv

Sensibilitatea este $\mathbb{P}(T|D)$, iar specificitatea este $\mathbb{P}(T^c|D^c)$.

Problema:
Presupunem că ne testăm și testul este pozitiv. Care e probabilitatea să avem boala $\mathbb{P}(D|T)$?

Folosim Bayes:
$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(T \cap D)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|D) * \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)} == \frac{\mathbb{P}(T|D) * \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D) * \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c) * \mathbb{P}(D^c)}$
$\mathbb{P}(D|T) = \frac{0.95 * 0.01}{0.95 * 0.01 + 0.05 * 0.99} = 0.16$

Capitolul 5

Curs 5

5.1 Recapitulare probabilitati conditionate

Notație : Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), A \in F, \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{Q}(B) = \mathbb{P}(B|A), \forall B \in A \cap F$

Exemplu:

Presupunem că avem 2 monede: - una echilibrată cu H cu probabilitatea $\frac{1}{2}$
- una trucată cu H cu probabilitatea $\frac{3}{4}$
Șansa de a alege una din ele este egală.
După ce aruncă cu cea aleasă rezultă HHH

1. care e probabilitatea să fi ales moneda echilibrată?
2. are e probabilitatea ca dacă mai aruncăm acum odată să cadă tot H?

Soluții:

1. Notăm evenimentele:
   A - evenim prin care în primele 3 aruncări s-a obținut HHH
   B - evenim ca am ales moneda echilibrată

   Vrem $\mathbb{P}(B|A)$ (rezolvăm cu Bayes)Ș
   $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = (1)$
2. Notăm:
   C - evenimentul ca la a patra aruncare se obține H?
   $\mathbb{P}(C|A)$ Fie: $\mathbb{Q}(C)$ și folosim formula probabilității totale:
   (2)

5.2 Independența evenimentelor

5.2.1 Noțiuni teoretice

Observație:

2 evenimente sunt independente dacă realizarea unuia nu aduce vreun fel de informație suplimentara despre realizarea celuilalt.

Definiție:

Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, A și B 2 evenimente din $\mathcal{F}$. Spunem că A și B sunt independiente.
Dacă $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(A) \cap B = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$

Definiție:

Independența pentru n evenimente în $\mathcal{F}$:
Spunem că $A_1 ... A_n$ sunt mutual independente dacă:
$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Pentru n=3:

$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2)$ $\mathbb{P}(A_1|A_3) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_3)$ $\mathbb{P}(A_3|A_2) = \mathbb{P}(A_3) * \mathbb{P}(A_2)$ $\mathbb{P}(A_1|A_2|A_3) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

Pentru n oarecare sunt $(2^n) - n - 1$
$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i - \mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^0$

Independența condiționată:

Definție:

Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și 3 evenimente A, B și C.
Spunem că A și B sunt conditionate la C, dacă $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) * \mathbb{P}(B|C)$.

$\mathbb{Q}(.) = \mathbb{P}(.|C) \Rightarrow \mathbb{Q}(A \cap B) = \mathbb{Q}(A) * \mathbb{Q}(B)$

5.2.2 Exemple

1. Aruncăm cu banul de 2 ori:
   A_1 - evenimentul prin care la prima aruncare am obținut H
   A_2 - evenim prin care la a doua aruncare am obținut H

   $\Omega = \{H, T\}^2$
   $A_1 = \{HH, HT\} \to \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$
   $A_2 = \{TH, HH\} \to \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$
   $A_1 \cap A_2 = \{HH\} \to \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$ (se verifică)

2. Fie un zar cu 4 fețe (tetraedru).
   Aruncăm de 2 ori, deci $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$

   Se dau următoatele evenimente:

   A = primul zar cade 1
   B = al doilea are suma fețelor 5

   C = minimul dintre zarurile aruncate e 2
   D = maximul dintre zarurile aruncate e 2

   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, cu $x \in \{1..4\}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$; $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{16}$
   $\mathbb{P}(C) = \frac{5}{16}$; $\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16}$; $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{16}$

3. Fie evenimentele A_1 și A_2 din exercițiul anterior.
   A_3 - evenimentul când cele 2 zaruri sunt diferite

   $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ Toate intersecțiile de 2 câte 2 $=\frac{1}{4}$ Deci A_1, A_2, A_3 sunt independente 2 câte 2

   $\mathbb{P}(A_1|A_2|A_3) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2) * \mathbb{P}(A_3)\ \emptyset = \frac{1}{8} \to$ contradicție.
   Concluzie: A_1, A_2, A_3 nu sunt independente.

4. Continuarea exercițiului legat de covid din cursul anterior.

   D - o persoană are afecțiunea T - testul e pozitiv Presupunem că în populație boala e la 1% din persoane, iar acuratețea testului e 95%.

   $\mathbb{P}(T|D) = 95\%$, dar $\mathbb{P}(D|T) = 15\%$

   Presupunem că se mai efectuează un test (iese tot +) Si rezultatele celor 2 teste sunt independente cu statusul bolii

   Care e probabilitatea ca acum persoana să aibă boala

   T1 - primul test pozitiv T2 - al doilea e pozitiv $\mathbb{P}(T1 \cap T2|D) = \mathbb{P}(T1|D) * \mathbb{P}(T2|D)$, lafel și pentru D^c

   $\Rightarrow \mathbb{P}(T1 \cap T2) \simeq 0.78$

5.3 Variable aleatoare. Repartiția unei v.a. și funcția de repartiție

5.3.1 Noțiuni teoretice

Definiție:
Fie câmpul de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și $X \to \Omega : \mathbb{R}$ o funcție.
Spunem că X e o variabilă aleatoare notată: X v.a. dacă multimea $\{w \in \Omega\ |X(w) \leq x \in \mathbb{R}\} = \{X \leq x\}$

Observații:
V.a. se notează cu litere mari de la finalul alfabetului X poate fi de două tipuri: discretă / continuă $X(\omega)$ e cel mult numărabila ca să fie discretă

Definim:

1. Repartiția unei variabile aleatoare
   Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și X o v.a.
   Se numește repartiția lui X (distribuția lui X) prin probabilitatea pe $\mathbb{R}$ definită prin $\mathbb{P}x(A) = \mathbb{P}(x \in A)$, pt orice A interval din $\mathbb{R}$

2. Funcția de repartiție (CDF - cumulative definitive function)
   Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X o v.a.
   Definim funcția de repartiție a lui X notată $F : \mathbb{R} \to \in [0, 1]$ F(x)=$\mathbb{P}(X <= xC)$

   Proprietățile funcției de repartiție:

   - funcția e crescătoare (nu strict)
   - funcția e continuă la dreapta
   - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
     $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

5.3.2 Exemple

1. Aruncăm 2 zaruri și definim X suma punctelor de pe cele 2 zaruri

   Numărul de H din cele două aruncări ale banului
   Din multimea $\{HH, HT, TH, TT\} \Rightarrow \{0, 1, 2\}$

   Observație:
   Preimaginea pentru A în X sunt invers: $X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$ etc.

   Pentru a demonstra se ia pe cazuri:
   - $x < 0 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$
   - $x \in [0, 1) \Rightarrow \{TT\} \in \mathcal{F}$
   - $x \in [1, 2) \Rightarrow \{TT, TH, HT\} \in \mathcal{F}$
   - $x > 2 \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$

2. Luăm la întâmplare un număr de la [0, 1)

   Distanța de la 0 la punct e X variabilă continuă Semnul numărului (e în mulțimea $\{-1, 0, 1\}$), deci discretă

   Vrem să calculăm: P_X în A unde $A \in \mathbb{R}$ Pentru $A \notin \mathbb{R}$ e mai complicat (de ex radiograma)

Capitolul 6

Curs 6

6.1 Noțiuni teoretice

Fie X v.a și X(Ω) mulțimea valorilor lui X. Dacă această mulțime este cel mult numarabilă, atunci este discretă, altfel este continuă.

Fie $X \to \Omega : \mathbb{R}$, vrem să calculăm $P(X \in A)$ (2)
Definiție:
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și X v.a. discretă. Se numește funcția de masă asociată (PMF - probability mass function), funcția $f(x) = \mathbb{P}(X = x), cux \in X(\Omega), f : X(\Omega) \in [0, 1]$

Observație:
Se mai folosește și notația p_X sau p_{X_x}.

Proprietăți:
1 - e pozitivă în fiecare punct
2 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ și Ω e reuniunea de sus, atunci:
$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)$, (deci masa totală e 1)

Legătura dintre funcția de masă și funcția de repartiție:
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \in X(\Omega)} f(y)$
$f(x) = F(x) - F(-x)$

6.2 Exemple

1. Aruncăm de 3 ori cu banul, X numărul de H găsiți
   $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ (calculat la cursul anterior)
   Pentru:
   $x = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}$,
   $x = 1 \Rightarrow \frac{3}{8}$,
   $x = 2 \Rightarrow \frac{3}{8}$,
   $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{8}$
2. Presupunem v.a. X=c, constantă
   f(x)=1 dacă x=c, 0 altfel
   F(x)=0 daca x¡c, 1 altfel
3. Presupunem variabila aleatoare de tip Bernoulli (care ia 2 valori)
   Avem un experiment și un eveniment A de interes.
   Presupunem că $\mathbb{P}(A)eP \in [0, 1]$

   Fie $X \to \Omega : \mathbb{R}$ și $X(\Omega) = 1$, dacă $W \in A$, 0 altfel.

   $f(1) = \mathbb{P}(A) = p, f(0) = \mathbb{P}(A^c) = 1 - p$
   $F(x) = 0$ pentru $x < 0$,
   $F(x) = 1 - p$ pentru $0 \leq x < 1$,
   $F(x) = 1$ pentru $x \geq 1$

   Scriem sub forma compactă a funcției de masă
   $f(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$
4. Cazul general
   Fie X cu $x_1, x_2 ... x_n$ și fiecare cu $\mathbb{P}(x_i) = pi \Rightarrow$ suma tuturor este 1.

5. V.a de tip binomial

   Presupunem că avem un experiment aleator și un eveniment A de interes. Repetăm experimentul de n ori și ne interesează numărul de realizări ale lui A.
   X - nr realizări în n repetări

   Notăm $X \sim B(n, p)$ variabila repartizată binomial de parametri n și p, unde:
   - n e nr de repetari
   - p probab in cadrul experim de realizare a lui A

   $X \in \{0...n\}$ $f(k) = \mathbb{P}(x = k) = ?$
   $\mathbb{P}(x = k) = \binom{1}{k} * (1 - p)^{n-k} * p^k$
   $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(x = k) = 1$ (Adevărat)

   Analog:
   Într-o urnă avem N bile albe și negre, M negre
   Extragem n bile cu întoarcere
   Ne interesează nr de bile negre din cele n extrase.
   $X \sim B(n, \frac{M}{N})$

6. V.a. repartizată hipergeometrica

   Avem o urnă cu N bile albe și negre și M de culoare neagră.
   Extragem n bile fără întoarcere.
   Ne interesează nr de bile negre din cele n extrase.

   X e repartizată hipergeometric HG(n, N, M)
   $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{C}_M^k * \mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$

Capitolul 7

Curs 7

7.1 Recapitulare

O urna cu bile numerotate de la 1 la 100. Extragem 5.
a) care este Repartiția variabilei aleatoare care da bilele cu nr mai mare ca 70?
b) cum e reprez v.a care da a 3-a extragere?
c) șansă ca numărul 79 sa fie extras cel puțin odată?

Soluție:
1. extragerea cu revenire
a) $X \sim B(5, \frac{31}{100})$ Probababilitatea să avem succes
b) $X_1, X_2, ...X_{100} \in 1..n$
$X_i\ U(\{1...100\})$, cu X_i independente
c) 79 extras măcar odată $= X_1 = 79$ sau $X_2 = 79$ sau... sau $X_5 = 79$
$= 1 - P(X_1 \neq 79 si...si X_5 \neq 79)$
evenimente independente disjuncte $= 1 - P(X_1 \neq 79) * ... * P(X_5 \neq 79) = 1 - (\frac{99}{100})^5$
2. extragere fără întoarcere
a) $Y \sim HG(5, 100, 31)$
b) $Y_1, ...Y_5$
$Y_i \sim U(1...100)$, dar Y_i nu sunt independente
$\Omega = \bigcup_1^{100}\{y_i = I\}$
O partiție a lui $\Omega : B_1 \cup B_1 ... \cup B_1$ disjuncte 2 câte 2 (1)
c) 79 extras măcar odată $= Y_1 = 79$ sau $Y_2 = 79$ sau... sau $Y_5 = 79$ nu sunt disjuncte
$= \sum_1^5 P(Y_i = 79)$, deci $\frac{5}{79}$

7.2 Reprezentarea geometrica și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă in mod repetat cu șansa de succes = p pentru H. X e v.a. care ne dă numărul de aruncări pana obținem succes (incluzând și primul succes)
$X \in 1, 2, ... = \mathbb{N}*$
Vrem sa calculăm funcția de masă:
$\mathbb{P}(X = k)$ e 1-p la k-1 * p
Înseamnă că primele k-1 aruncări sunt T și a k-a e H
$X \sim G(p)$ (2)
Definim:
V.a. Z care ne dă numarul de aruncări până când obținem a r-a oară succes se numește negativ binomială și se notează:
$Z \sim NB(r, p)$, Z=r, r+1,..., $\mathbb{P}(Z = k)$
Presupunem k=7, r=3 (3) V.a. de tip Poisson:
Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată Poisson de parametru λ dacă $x \in \mathbb{N}$ și
$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda * \lambda^{\frac{k}{k!}}}$
Cand se folosește?
Poate fi văzut ca o binomială, doar că M e foarte mare și N e foarte mic
$\sum_{k=0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Aproximarea Poisson a binomialei

$X \sim B(n,p)$ Avem $\mathbb{P}(X=k) = \binom{1}{k} * (1-p)^{n-k} * p^k$.

Presupunem că n e mare și p e mic a.î. n*p tinde la λ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} * (\frac{\lambda}{n})^k * (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k} * \frac{\lambda^k}{k!} * (1-\frac{\lambda}{n})^n * (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$, unde, pentru n $\longrightarrow \infty$:

$\frac{n!}{(n-k)!n^k} \longrightarrow 1$, $\frac{\lambda}{n} \longrightarrow 0$, $1-\frac{\lambda}{n} \longrightarrow 1$

Cazul de 1^∞ se rezolvă cunoscând formula $e^x = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!}$

Capitolul 8

Curs 8

8.1 Recapitulare

Definiție:
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și $X \to \Omega : \mathbb{R}$ un câmp de probabilitate si v.a. discretă, definim media:
$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) = \sum_x xf(x)$ ori de câte ori $\sum |x| f(x) < \infty$
În cazul în care seria este ∞ atunci spunem că v.a. X nu are medie.

Proprietăți:
1) Dacă X este constantă $\Rightarrow$ media este acea constantă ($X = c \Rightarrow \mathbb{E}[X] = c$)
2) Dacă $X \geq 0$ atunci $\mathbb{E}[X] \geq 0$ (pozitivitate)
3) Dacă $X \geq Y$ atunci $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ (monotonie) $(X(\omega) \geq Y(\omega) \forall \omega \in \Omega)$
4) Dacă X și Y v.a. discrete și $a, b \in \mathbb{R}$ atunci $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ (liniaritate)
5) Legătura dintre medie și probabilitate:
Fie $A \in \mathcal{F}$ eveniment.
$1_A = \{^{0, \omega \in A}_{1, w \notin A}$
$\mathbb{P}(1_A = 1) = \mathbb{P}(A)$
$1_A \sim (^{0}_{1-\mathbb{P}(A))} {}^{1}_{\mathbb{P}(A)})$
$\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$
6) Fie X v.a. discretă, $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ și y=g(x)
Atunci:
$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$

Demonstrație:
$\mathbb{E}[y] = \sum_y y\mathbb{P}(Y = y)$
$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(x) = y) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(y))$
$g^{-1}(y) = \{x, \text{ unde } g[x] = y\} = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x)$
$\mathbb{E}[g(x)] = \mathbb{E}[Y] = \sum_y y \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$

8.2 Exemple

1. Aruncăm cu un zar.
   $X \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$
   $\mathbb{X} = x = \frac{1}{6}$, deci $\mathbb{E}[X] = \sum_x \mathbb{P}(X = x) = 1 * \frac{1}{6} + ... + 6 * \frac{1}{6} = 3,5$
2. $X \sim (^{x_1 ... x_n}_{p_1 ... p_n})$
   $\mathbb{E}[X] = x_1p_1 + ... + x_np_n$
   $(^{-1 0 \, 1}_{\frac{1}{2} \, \frac{1}{4} \frac{1}{4}})$
   $\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{2} + -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$
3. Aruncăm cu o monedă de 10 ori.
   X=nr de H din cele 10 aruncări
   $\{X = k\} = \{(\omega_1, ...\omega_{10}) | \omega_i \in \{H, T\}$ și exact k sunt H
   $\Omega = \{H, T\}^{10}$

$X \sim B(10, p)$
$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} * p^k * (1-p)^{10-k}$
Deci, $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_\omega (X+Y)_\omega \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_\omega (X(\omega) + Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\})$
$= \sum_\omega X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_\omega Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$

4. $X \sim \binom{-2 \; -1 \; 1 \; 3}{\frac{1}{4} \; \frac{1}{8} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{8}}$
   $y = X^2$
   Metoda 1:
   $y \in \{1, 4, 9\}$
   $\mathbb{P}(y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1)$
   $= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
   $y = X^2 \sim \binom{1 \; 4 \; 9}{\frac{5}{8} \; \frac{4}{8} \; \frac{1}{8}}$
   $\mathbb{E}[X^2] = \frac{5}{8} + \frac{8}{8} + \frac{9}{8} = \frac{22}{8}$

   Metoda 2:
   $g(x) = x^2$
   $\mathbb{E}[X^2] = (-2)^2 * \frac{1}{4} + (-1)^2 * \frac{1}{2} + (1)^2 * \frac{1}{8} + (3)^2 * \frac{1}{8} = \frac{22}{8}$

Definiție:
Fie X o v.a. discretă, numim moment de ordin $k \geq 1$, ca fiind $\mathbb{E}[X^k]$.
Se numește moment de ordin k centrat in $a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[(X-a)^k]$ și moment central de ordin k, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$.

Definiție: Varianța sau dispersia v.a. X este momentul centrat de ordin 2 și se notează cu:
Var(X) = $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Observație : Arată gradul de împărțire a observației față de medie.
$X_1 \sim \binom{1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5}{\frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5}}$
$X_2 \sim \binom{1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5}{\frac{1}{10} \; \frac{2}{10} \; \frac{4}{}10 \; \frac{2}{10} \; \frac{1}{10}}$
$X_3 \sim \binom{1 \; 2345}{\frac{1}{2} \; 000 \; \frac{1}{2}}$
$X_4 \sim \binom{12345}{00000}$
$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = \mathbb{E}[X_4] = 3$
$Var(X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - 3)^2] = \frac{10}{5} = 2$
$Var(X_2) = \mathbb{E}[(X_2 - 3)^2] = \frac{12}{10}$
$Var(X_3) = \frac{8}{2} = 4$
$Var(X_4) = 0$

Proprietați ale varianței:
1) Dacă X=c (cnst) $\Rightarrow Var(X) = 0$.
2) $Var(X) \geq 0$
3) Dacă X v.a. și $a \in \mathbb{R}$ atunci Var(a+X) = Var (X) = 0
4) Dacă X v.a. și $b \in \mathbb{R}^*$ atunci $Var(b * X) = b^2 * Var(X)$
$Var(bX) = \mathbb{E}[(bX - \mathbb{E}[bX])^2]$
$= \mathbb{E}[b^2 * (X - \mathbb{E}[X])^2]$
5) $Var(a + bX) = b^2 * Var(X); \forall a, b \in \mathbb{R}$
6) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
7) X și Y v.a. independente

Definiție:
Fie X,Y - v.a. se numește covarianța lui X si Y:
Cov(X,Y)=$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Definiție: Se numește abatere starndard:
$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$
σ^2 se notează Varianță
σ se notează Abatere standard

8.3 Variabile aleatoare. Continuare

Definiție:
Fie un câmp de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si X: $\nleq \to \mathbb{R}$ v.a.
X este continuă (absolut continuă) dacă există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cu proprietatea :
$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx, \forall A \subseteq \mathbb{R}$

Observație: Dacă A=(a,b)
$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^e f(x)dx$
Daca f e densitate de repartiție :
1) $f \geq 0$
2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

Observație:
$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$
A=a
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$
$= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$
$= \mathbb{P}(a < X \leq b)$

Capitolul 9

Curs 10

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$
Simetricul fata de :
$\varphi(x) = \varphi(-x)\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$
φ Densitate:
1)$\varphi(x) \geq 0$
2)$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$
$X \sim N(0,1)$ normala standard
$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$
Var(X)=$\mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$
$\mathbb{E}[x^2] = \int x^2\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \Rightarrow Var(X) = 1$

Observație:
Dacă $X \sim N(0,1)$ atunci $\mathbb{E}[x] = 0$ si Var(X) = 1

Definiție:
Spunem că v.a. $X \sim N(\mu, \nabla^2)$ dacă admite densitatea de repartiție :
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nabla} * e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\nabla^2}}, x \in \mathbb{R}$
Dacă $X \sim N(\mu, \nabla^2)$ atunci $\exists Z \sim N(0,1)$ a.î. $X = \mu + \nabla Z$

Repartiție normală
$X \sim N(\mu, \nabla^2) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mu + \nabla Z] * \mu + \nabla\mathbb{E}[Z] = \mu$
$Z \sim N(2,1)$
$Var(X) = Var(\mu + \nabla Z) = \nabla^2 Var(Z) = \nabla^2$
$F(x) = \mathbb{P}(x \leq x) = \mathbb{P}(\mu + \nabla Z \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{x-\mu}{\nabla}) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\nabla}\right)$
$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x-\mu}{\nabla}\right) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\nabla}\right)\frac{1}{\nabla}$
$(f \circ g)' = f'(g) * g'$

9.1 Exemple

1. $X \sim N(-1,4)$
   $\mathbb{P}(|x| < 3)$
   Pas 1: Standardizare :
   $\mathbb{P}(-3 < x < 3) = \mathbb{P}(-3-(-1) < x-(-1) < 3-(-1)) = \mathbb{P}(-2 < x+1 < 4)$
   $\mathbb{P}\left(-\frac{2}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{4}{2}\right) = \mathbb{P}\left(-1 < \frac{x+1}{2} < 2\right) \sim N(0,1)$
   $= \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) + \mathbb{P}(1 \leq Z \leq 2)$

2. $Y \sim N(0,1), X = |Y|$
   $\mathbb{E}[X], Var[X], f(x)$
   $\mathbb{E}[|Y|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
   $Var(|Y|) = \mathbb{E}[|Y|^2] - \mathbb{E}[|Y|]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \frac{2}{x} = 1 - \frac{2}{\pi}$
   $F_x(x) = \mathbb{P}(x \leq x) = \mathbb{P}(|Y| \leq x)$

Dacă $x < 0 \Rightarrow F_x(x) = 0$
Dacă $x > 0 \Rightarrow F_x(x) = \mathbb{P}(-x \leq Y \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x)$

9.2 Repartiții comune, marginale și condiționate

x,y două v.a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathbb{P}((x, y) \in A * B)$
$\mathbb{P}(x \in A) sau \mathbb{P}(y \in B)$
$\mathbb{P}(x \in A | y \in B)$
1. Cazul discret :
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un camp de probabilitați si $X : \Omega \to \mathbb{R}, Y : \Omega \to \mathbb{R}$
$X(\Omega) = x_1, ...x_m$
$Y(\Omega) = y_1, ...y_m$
Perechea $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$
Funcția de masă a(X,Y)
$f_{x,y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) \forall x \in x_i, ..., x_m, y \in y_i, ..., y_m$

Proprietăți:
a)$f_{x,y} \geq 0, \forall x, y$
b)$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{x,y}(x, y) = 1$
$f_x(x) = \sum_y f_{x,y}(x, y) \longrightarrow$ funcția de masă a lui x rep marginală a lui x
$f_y(y) = \sum_x f_{x,y}(x, y) \longrightarrow$ reprezentarea marginală pentru y
Fie X o v.a. adevarată si $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0$
$\mathbb{P}(X = x | A) = \frac{\mathbb{P}(X=x) \cap A}{\mathbb{P}(A)}$

Dacă A=Y=y atunci $\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{=} \mathbb{P}(Y = y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$
$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$
$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} \longrightarrow$ funcția de masă condiționată a lui y la x

9.3 Formula probabilității totale

$B, A_1, ...A_N \in \mathcal{F}$
$A_1, ..., A_2$ formăm o partiție pe Ω
$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$

Dacă $B = \{X = x\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x|A_i)\mathbb{P}(A_i)$
$A = \{Y = y_i\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x|Y = y_i)\mathbb{P}(Y = y_i)$
$f_x(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x|y}(x|y_i) f_y(y_i)$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$
$A = \{X = x\}, B = \{Y = y\}$
$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x|Y = y)$
$f_{x,y}(x, y) = f_x(x) f_{y|x}(y|x) = f_y(y) f_{x|y}(x|y)$

Formula lui Bayes :
$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y, X = x)$
$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_x(x) f_{y|x}(y|x)}{\sum_{x'} f_x(x') f_{y|x}(y|x')}$
$\mathbb{P}(Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)}{\sum_{x'} \mathbb{P}(X=x')\mathbb{P}(Y=y|X=x')}$

Media unei funcții de v.a.
X v.a. $\Omega \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$
$\mathbb{E}[xy] = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
$x, y : \Omega \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\mathbb{E}[g(x, y)] = \sum_{x,y} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
//curs 12

Capitolul 10

Curs 12

10.1 Cazul discret

X,Y v.a. discrete, $X \in x_i, ..., x_n, Y \in y_1, ..., y_n$
$f_{x,y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ repartiția normală
$f_x(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y f_{x,y}(x,y)$
$f_y(y) = \mathbb{P}(Y = x) = \sum_x f_{x,y}(x,y)$
repartiții marginale

10.1.1 Repartiția condiționată

$f_{x|y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$
$f_{y|x}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$

Media condiționată:
Dacă X v.a. discretă si $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0$ atunci am văzut că $f_{x,y}(x) = \mathbb{P}(X = x|A)$ probabilitate

Media condiționată a lui X la A:
$\mathbb{E}[X|A] = \sum_x x * \mathbb{P}(X = x|A) = \sum_x x * f_{X|A}(x)$
Dacă g este o funcție atunci g(x) este o v.a. discretă și $\mathbb{E}[g(x)|A] = \sum_x g(x) * f_{X|A}(x)$
Dacă $A = \{Y = y\}$ atunci
$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x * f_{x|y}(x|y)$
media condiționată a lui X la Y=y

Dacă X și Y sunt v.a. discrete atunci
$\mathbb{E}[x] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y = y] * \mathbb{P}(Y = y)$
$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x * f_{x,y}(x|y), f_{x,y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$
$\sum_y \sum_x x * f_{x|y}(x|y) * f_y(y) = \sum_x x \sum_y f_{x,y}(x,y) = \mathbb{E}[x]$

Definiție:
Fie X și Y două v.a. discrete. Se numește media condiționată a lui X la Y și se noteaza $\mathbb{E}[X|Y]$, v.a. de forma h(Y) pentru care $h(y) =, \mathbb{E}[X|Y = y] \forall y$

Media mediei condiționate este
$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
$\mathbb{E}[X|Y] \sim \binom{\mathbb{E}[X|Y=y_1]...\mathbb{E}[X|Y=y_n]}{\mathbb{P}(Y=y_1)...\mathbb{P}(Y=y_n)}$

10.2 Cazul v.a.

Conține: repartiție comună, repartiție marginală si repartiție condiționată.

Definiție: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitați și X,Y două v.a. continue. Spunem că vectorul (X,Y) formează o pereche de v.a. continue dacă există o funcție $f_{(x,y)}(x,y) \geq 0$ cu proprietatea:

$\mathbb{P}((x,y)\in A)=\int\int_A f_{(x,y)}(x,y)dx,dy\forall A\subseteq\mathbb{R}^2$
Funcția $f_{(x,y)}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se numește densitatea comună a (x,y).

Dacă A=[a,b]*[c,d]
$\mathbb{P}((X,Y)\in[a,b]*[c,d])=\mathbb{P}(a\le X\le b,c\le Y\le d)=\int_a^b\int_c^d f_{(x,y)}(x,y)dxdy$
Dacă $A=mathbbR^2$ atunci:
$\mathbb{P}((X,Y)\in\mathbb{R}^2)=\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)}(x,y)dxdy=1$
$f_{(x,y)}$ este densitatea $\Leftrightarrow$
a) $f_{(x,y)}\ge 0$
b) $\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)}(x,y)dxdy=1$

Observație:
Dacă știm $f_{(x,y)}(x,y)$ atunci putem calcula orice probabilitate de tipul $\mathbb{P}(X\in A,Y\in B)$
$f_{(x,y)}(x,y)$ conține toată informația despre X și Y
Repartiție uniformă pe $S\subseteq\mathbb{R}^2$
Presupunem că $S\subseteq\mathbb{R}^2$ marginită
$(X,Y)\sim U(S)$ dacă $\exists f_{(x,y)}(x,y)\ge 0$ astfel încat:
$f_{(x,y)}(x,y)=$
c, $(x,y)\in S$
0, altfel

Cum $f_{(x,y)}$ este densitate $\Rightarrow c\le 0$ și $\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)}(x,y)dxdy=1\Rightarrow\int\int_{\mathbb{R}^2} c*f_{(x,y)}(x,y)dxdy=1$
$c=\frac{1}{\int\int_S 1dxdy}=\frac{1}{Aria(S)}$
S=[a,b]*[c,d]
$f_{(x,y)}(x,y)$=
$\frac{1}{Aria(S)},(x,y)\in S$
0, altfel
$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int\int_A f_{(x,y)}(x,y)dxdy=\int\int_A\frac{1}{Aria(S)}\not\Vdash_S(x,y)dxdy=\frac{\int\int_A\not\Vdash_S(x,y)dxdy}{Aria(S)}=\frac{\int\int_{A\cap S}1dxdy}{Aria(S)}=\frac{Aria(A\cap S)}{Aria(S)}$

10.2.1 Repartiții condiționate

Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un câmp de probabilitate si X o v.a. continuă si $A\in\mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A)>0$
Definim densitatea condiționată a lui X la A, $f_{X|A}(x)$ funcția $f_{X|A}(x)\ge 0$ care verifică $\mathbb{P}(X\in B|A)=\int_B f_{X|A}(x)dx\forall B\subseteq R$

Observații:
1. Dacă B=R $\Rightarrow\mathbb{P}(X\in B|A)=1$
altfel $\int_{\mathbb{R}} f_{X|A}(x)dx=1,f_{X|A}\ge 0\Rightarrow f_{X|A}$ este o densitate de probabilități
2. În cazul lui A considerăm $ev\,\{X\in A\}$ astfel încat $\mathbb{P}(X\in A)>0$
$\mathbb{P}(X\in B|X\in A)=\frac{\mathbb{P}(X\in B|X\in A)}{\mathbb{P}(X\in A)}=\frac{\mathbb{P}(X\in A\cap B)}{\mathbb{P}(X\in A)}$

Cum X v.a. continuă si densitatea f_x avem:
$\mathbb{P}(X\in B|X\in A)=\frac{\int_{A\cap B}f_x x dx}{\mathbb{P}(X\in A)}$
$\mathbb{P}(X\in B|X\in A)=\int_B f_{x|\{X\in A\}(x)dx}$
$\Rightarrow\int_B f_{x|\{x\in A\}(x)dx}=\int_{A\cap B}\frac{f_x(x)dx}{\mathbb{P}(x\in A)}=\int_B\frac{f_x(x)*\not\Vdash_A(x)}{\mathbb{P}(x\in A)}dx$
$\int_{A\cap B}fdx=\int f*\not\Vdash_{A\cap B}(x)dx=\int f(x)\not\Vdash_A(x)*\not\Vdash_B(x)=\int_B f(x)*\not\Vdash_A(x)dx$

Capitolul 11

Curs 13

11.1 Independeța v.a

$\mathbb{P}(x \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(x \in A) * \mathbb{P}(y \in B), \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$
$A = (-\infty, x]$
$B = (-\infty, y]$
$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) * \mathbb{P}(Y \leq y) \forall x, y$
$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_(x,y)(u,v) dv du = \int_{\infty}^{x} f_x(u) du \int_{-\infty}^{y} f_x(v) dv$

Derivăm după y si x:
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_(x,y)(u,v) dv du = f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) f_y(y)$

Propoziție:
Fie X și Y v.a cu densitate fx și repartiția fy:
Atunci:
$x \perp f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) f_y(y)$
Propoziție:
Fie X si Y două v.a. și g și h 2 fete.
Dacă $f_{(x|y)}(x|y) = g(x) * h(y) \forall x, y$ atunci $x \perp y$

Propoziție:
Dacă X si Y sunt 2 v.a independente
$\mathbb{E}[g(x) * h(y)] = \mathbb{E}[g(x)] * \mathbb{E}[h(y)]$

Formula lui Bayes
X,Y v.a continuă
$f_{x|y}(x,y) = f_{x|y}(x|y) f_y y = f_{y|x}(y|x) f_x x$
$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{f_{y|x}(y|x) * f_x(x)}{f_y(y)} = \frac{f_{y|x}(y|x) * f_x(x)}{\int f_{y|x}(y|x') * f_x(x') dx'}$

11.1.1 Experiment

A și B durată de viață pentru telefonul din firmă
A este Exp(α_0)
B Exp(α_1)
Presupunem că primim un telefon de la A cu prob p_0 și de la B cu $p_1 = 1 - p_0$
Fie T durata de viață a telefonului primit

Se cer:
a) funcția de repartiție și densitatea lui T
b) Probabilitatea ca telefonul sa fi provenit de la B știind că T=t

T v.a. continuă
Fie I v.a =
0, telefon produs de A;
1, telefon produs de B

$\mathbb{P}(I=0)=p_0$
$\mathbb{P}(I=1)=p-1=1-p_0$
$T|I=0 \sim Exp(\alpha_0)$
$T|I=1 \sim Exp(\alpha_1)$
$\mathbb{P}(T\leq t)=\mathbb{P}(T\leq t|I=0)*\mathbb{P}(I=0)+\mathbb{P}(T\leq t|I=1)*\mathbb{P}(I=1)$

11.2 Media unei funcții de v.a.

X și Y două v.a.
$f_{x,y}(x,y)$și$g:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$
$\mathbb{E}[g(x,y)]=\int\int g(x,y)*f_{x,y}(x,y)dxdy$
In particular,
$\mathbb{E}[xy]=\int\int xyf_{x,y}(x,y)dxdy$

11.3 Media condiționată

X v.a. continuă și A un eveniment $\mathbb{P}(A)>0$
$\mathbb{E}[X|A]=\int xf_{x|A}(x)dx$
Dacă $A=\{Y=y\}$
$\mathbb{E}[X|Y=y]=\int xf_{x|y}(x,y)$dx

11.4 Formula probabilității totale

$f_x(x)=\sum_{i=1}^n f_{x|A_i}(x)*\mathbb{P}(A_i)|*$ x apoi integăm
$\Rightarrow\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X|A]*\mathbb{P}(A_i)$
$\mathbb{E}[X]=\int\mathbb{E}[X|Y=y]f_y(y)dy$

Definiție:
Fie $g(y)=\mathbb{E}[X|Y=y]$
Atunci v.a. $\mathbb{E}[X|Y]=g(y)$

Proprietate:
$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]=\mathbb{E}[x]$
$Var(X)=Var(\mathbb{E}[X|Y]+\mathbb{E}[Var(x|y)])$

Exercițiu:
N clienți
X_1,X_2... sumele pe care le-au achitat
$T=X_1+X_2+...X_\lambda$
$N(\omega_1)=10$
$T(\omega_1)=X_1(\omega_1)+...X_{10}(\omega_1)$

11.5 Covarianța și corelație

Definiție:
Fie X și Y două v.a. se numesc covarianțe dintre X si Y
$Cov(X,Y)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Convarianța este:
$\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]*\mathbb{E}[Y]$

Definiție:
Spunem că X și Y sunt necorelate dacă convarianța lor este 0.

Dacă $X \perp Y \Rightarrow$ X si Y sunt necorelate.

Proprietăți:
a) Cov(X,X) = Var(X)
b) Cov(X,a) =0 , a const
c) Cov(a+bx, y)=b Cov(X,Y)
d) Cov(X,Y) = Cov(Y,X)
e) Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)
$Var(x_1...x_n) = \sum_{i=1} Var(x_i) + 2\sum_{i<j} Cov(x_i, x_j)$
f) Cov(x+y,z)=Cov(x,z)+Cov(y,z)

11.6 Inegalități și termeni limită

Inegalitatea Cauchy Schwartz:
Fie X și Y v.a. cu $Var(x) < \infty$
Atunci:
$|\mathbb{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbb{E}[x^2]\mathbb{E}[y^2]}$

Funcția convexă:
Inegalitatea lui Jensen:
Fie X v.a. pozitivă.
Atunci:
$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$