Seminar 1 – 04.10.2021 – 142

1. Arătați că:

$$A \overset{not.}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3a-1}{a-2},\ a \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \right\} = \mathbb{R}\setminus\{3\} \overset{not.}{=} B$$

Obs: $A = B$ (A, B mulțimi) $\Leftrightarrow$ $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

$A \subseteq B$

Știm că $A \subseteq \mathbb{R}$. Trebuie să arătăm că $x \neq 3$ $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Presupunem că $\exists a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ pt. care $x = \frac{3a-1}{a-2} = 3$

$\frac{3a-1}{a-2} = 3 \Rightarrow 3a - 1 = 3a - 6 \Rightarrow -1 = -6$ ⚡

$\Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow x \neq 3$ $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\Rightarrow A \subseteq B$.

$B \subseteq A$

Fie $x \in B$. Vrem să arătăm că $x = \frac{3a-1}{a-2}$ cu $a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$x = \frac{3a-1}{a-2} = \frac{3a-6+5}{a-2} = \frac{3(a-2)}{a-2} + \frac{5}{a-2} = 3 + \frac{5}{a-2}$$

$\Rightarrow x - 3 = \frac{5}{a-2} \Rightarrow a - 2 = \frac{5}{x-3} \Rightarrow a = 2 + \frac{5}{x-3} = \frac{2x-1}{x-3}$

Mai trebuie, $a \neq 2$. (verif.)

Obs.: Ex. 1 poate fi rescris ca:

Arătați că $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(a) = \frac{3a-1}{a-2}$ este surjectivă.

2. Det. A și B știind că $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B \setminus A = \{3,5\}$ și $A \cap B \not\subseteq \{1,2,3\}$.

Obs.: $C \not\subseteq D \Leftrightarrow \exists\, x \in C$ a.î. $x \notin D$.

$A = \{$

$B = \{3,5,$

$A \cap B \not\subseteq \{1,2,3\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4,5 \text{ sau } 6 \in A \cap B \\ 5 \notin A \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \text{ sau } 6 \in A \cap B$

Avem 3 cazuri:

I. $4 \in A \cap B$ și $6 \notin A \cap B$

II. $4 \notin A \cap B$ și $6 \in A \cap B$

III. $\{4,6\} \subseteq A \cap B$

I. $A \cap B \ni 4$

$A = \{4,6,1,2\}$

$B = \{3,5,4,1,2\}$

$A \cap B$: $\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$

II. Analog cu I.

III. $A = \{4,6,1,2\}$

$B = \{3,5,4,6,1,2\}$

Principiul includerii și excluderii

Notație : $\text{card}(A) \overset{\text{not.}}{:=} |A|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Generalizare :

$$\Big|\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} \Big|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big|$$

Formula se dem. prin inducție matematică (ex.)

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n\Big| = \underbrace{\Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big|}_{\text{ip. de ind.}} + |A_n| - \underbrace{\Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n\Big|}_{\text{ip. de ind.}}$$

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)$$

3. Din 40 de elevi, 14 practică fotbal, 16 volei și 11 baschet. Mai mult, 7 practică fotbal și volei, 8 volei și baschet, 5 fotbal și baschet, 4 toate cele 3 sporturi.

a. Câți elevi nu practică niciun sport?

b. Câți elevi practică fotbal și volei, dar nu și baschet.

Rez.: F = mulțimea elevilor care practică fotbal

V = — " — " — " — " volei

B = — " — " — " — " baschet.

$|F| = 14$, $|V| = 16$, $|B| = 11$
$|F \cap V| = 7$, $|V \cap B| = 8$, $|F \cap B| = 5$
$|F \cap V \cap B| = 4$.

a. $|F \cup V \cup B| = 14 + 16 + 11 - 7 - 8 - 5 + 4 = 25$
$40 - 25 = 15$ nu practică niciun sport

b. $7 - 4 = 3$.

4. Fie $A = \{1, 2, \dots, 100\}$.

a. Câte nr. divizibile cu 7 sunt în A?

b. Câte nr. din A sunt divizibile cu 2 sau cu 3? Dar cu 2 și cu 3?

c. Câte nr. din A nu sunt divizibile cu 10?

Rez.:

a. $\left[\frac{100}{7}\right] = 14$ (obs. $[n] = \lfloor n \rfloor$)

b. Cu 2 și cu 3

$\left[\frac{100}{6}\right] = 16$

Cu 2 : $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$

Cu 3 : $\left[\frac{100}{3}\right] = 33$

Cu 2 SAU cu 3 (P.I.E.)

$50 + 33 - 16 = 67$.

c. Cu 10 : $\left[\frac{100}{10}\right] = 10$

Nu sunt divizibile cu 10 : $100 - 10 = 90$.

5. $(3\mathbb{N}+1)\cap(7\mathbb{N}+6)=21\mathbb{N}+13$

Dublă incluziune

$A\cap B=C$

$C\subseteq A\cap B \Leftrightarrow C\subseteq A$ și $C\subseteq B$.

„$\supseteq$" $21\mathbb{N}+13\subseteq(3\mathbb{N}+1)\cap(7\mathbb{N}+6)$

Fie $m\in 21\mathbb{N}+13 \Rightarrow m=21k+13,\ k\in\mathbb{N}$.

$m=21k+13=21k+12+1=3(7k+4)+1=3t+1\in 3\mathbb{N}+1$

$m=21k+13=21k+7+6=7(3k+1)+6=7s+6\in 7\mathbb{N}+6$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow m\in(3\mathbb{N}+1)\cap(7\mathbb{N}+6)\Rightarrow$ c.c.t.d.

„$\subseteq$" Fie $m\in(3\mathbb{N}+1)\cap(7\mathbb{N}+6)$

$\Rightarrow m=3t+1=7s+6$

$3t+1=7s+6 \Rightarrow 3t=7s+5$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 3\mid 7s+5\\ \quad 3\mid 6s+3\end{array}\right\}\Rightarrow 3\mid s+2 \Rightarrow s=3k+1,\ k\in\mathbb{N}$

$m=7s+6=7(3k+1)+6=21k+7+6=21k+13,\ k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow m\in 21\mathbb{N}+13$.

T.: Câte elemente are mulțimea:

$A=\left\{x\in\mathbb{Q}\ \middle|\ x=\dfrac{n^2+3}{n^2+n+2},\ n=\overline{1,1000}\right\}$?

Scanned with CamScanner