Seminar 6 - 8.11.2021

Ex. 1: Fie A o mulțime nevidă și $\emptyset \neq B \subseteq A$. Definim pe $\mathcal{P}(A)$ relația binară $X \rho Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$.

a. Arătați că ρ este relație de echivalență

b. Arătați că $\mathcal{P}(A)/\rho$ este în bijecție cu $\mathcal{P}(B)$

c. Clase de echiv. + SCR

Rez:

a. 1. reflexivitate: $X \rho X$, $\forall X \in \mathcal{P}(A)$

$X \cap B = X \cap B \Rightarrow X \rho X$.

2. simetrie:

Fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $X \rho Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B$

$\Rightarrow Y \cap B = X \cap B \Rightarrow Y \rho X$

3. tranzitivitate:

Fie $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $X \rho Y$ și $Y \rho Z$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} X \cap B = Y \cap B \\ \text{și } Y \cap B = Z \cap B \end{array}\right\} \Rightarrow X \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \rho Z$

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow$ ρ rel. de echiv.

Fie $X \in \mathcal{P}(A)$.

$[X] = \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid Y \rho X\} = \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid \underline{Y \cap B = X \cap B}\}.$

$\mathcal{P}(A)/_{\rho} = \{[X] \mid X \in \mathcal{P}(A)\} = \{[X] \mid X \in SCR\}.$

$Y \rho X \iff Y \cap B = X \cap B \subseteq B$

Exemplu: $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

$X = \{1, 5, 7, 9\}$ $\quad X \cap B = \{1\}$

$Y = \{1, 6, 8\}$ $\quad Y \cap B = \{1\}$

$Z \sim X$, $\quad \{1\} \subseteq Z \subseteq \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$X \in \mathcal{P}(A)$, $\quad (X \cap B) \rho X$?

$(X \cap B) \cap B = X \cap B$ $\quad (X \cap B \subseteq B)$

SCR: $X \in \mathcal{P}(A)$, $[X] = \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid Y \cap B = X \cap B\}.$

Întrebare: Ce submulțime caracterizează $[X]$? $\quad X \cap B \subseteq B$

Un SCR este o submulțime a $\mathcal{P}(A)$, $\{A_i\}_i \subseteq \mathcal{P}(A)$ cu proprietățile:

a. $\bigcup_i [A_i] = \mathcal{P}(A)$

b. $A_i \rho A_j \iff i = j$

Obs: $\mathcal{P}(A)/\rho$ este în bijecție cu SCR-ul.

$\underline{\text{Un SCR}: \mathcal{P}(B)}$ $\parallel$

Fie funcția $f: \mathcal{P}(A)/\rho \to \mathcal{P}(B)$, $f([X]) = X \cap B$.

- f bine def.

Fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $[X] = [Y]$ $(X \rho Y)$.

$$\underbrace{f([X])}_{X \cap B} = \underbrace{f([Y])}_{Y \cap B} \Rightarrow f \text{ bine def.}$$

$$X \cap B \underset{X \rho Y}{=} Y \cap B$$

!O funcție a cărui domeniu este o mulțime factor este bine definită dacă aceasta nu depinde de alegerea reprezent. claselor, adică dacă $x \rho y \Rightarrow f([x]) = f([y])$

$(x \rho y \Rightarrow [x] = [y])$.

Exemplu: $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

$g : \mathcal{P}(A)/_{\rho} \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $g([x]) = X$.

Este g bine definită?

$x = \{1, 5, 7, 9\}$ $\quad [x] = [y]$ $\quad (x \rho y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B)$

$y = \{1, 6, 8\}$ $\quad g([x]) = X = \{1, 5, 7, 9\}$

$g([y]) = Y = \{1, 6, 8\}$

$g([x]) \neq g([y])$

$\Rightarrow g$ nu este bine definită

$f: \mathcal{P}(A)/_\rho \to \mathcal{P}(B)$, $f([X]) = X \cap B$.

- f bine def. (f funcție)
- f inj. : Fie $[x], [y] \in \mathcal{P}(A)/_\rho$ a.î. $f([x]) = f([y])$

$\Rightarrow x \cap B = y \cap B \Rightarrow x \rho y \Rightarrow [x] = [y]$.

- f surj. : Fie $Z \in \mathcal{P}(B)$. Vrem $X \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $f([X]) = Z$

Obs : $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_7$, $f(\hat{x}) = \hat{0}$ bine def., nu este inj

$Z \subseteq B \subseteq A$. , $f([X]) = X \cap B = Z$

Putem lua $X = Z$, $f([Z]) = Z \cap B = Z$

$\Rightarrow f$ surj.

f inj + surj $\Rightarrow$ bij.

SCR : $\mathcal{P}(B) \begin{cases} Z, W \in \mathcal{P}(B), \quad Z \rho W \Leftrightarrow \underset{Z \cap B = W \cap B}{Z \overset{?}{=} W} \\ \bigcup_{Z \in \mathcal{P}(B)} [Z] = \mathcal{P}(A) \text{ (adică } \forall X \in \mathcal{P}(A) \\ \qquad [X] = [Z], Z \in \mathcal{P}(B)) \end{cases}$

Ex. 2 : Pe $\mathbb{R}$ se def. rel. $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 5$.

a. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

b. Det. $\hat{x}$, SCR pt. „$\sim$"

c. Det. dacă funcțiile $f, g : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}$, $f(\hat{x}) = 4x^2 - 20x + 29$, $g(\hat{x}) = x^2 + x + 1$ sunt bine definite.

Rez :

a. Tranzitivitate : Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ a. î. $x \sim y$ și $y \sim z$.

$x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 5$

$y \sim z \Leftrightarrow y = z$ sau $y + z = 5$

Dacă $x = y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Dacă $x + y = 5$ și $y \sim z$: $\begin{cases} y = z \Rightarrow x + z = 5 \Rightarrow x \sim z \\ y + z = 5 \Rightarrow x = z \Rightarrow x \sim z \end{cases}$

b. $\hat{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim x\} = \{x, 5 - x\}$ | SCR : $[\frac{5}{2}, \infty)$

$y = x$ sau $x + y = 5$ (sau $(-\infty, \frac{5}{2}]$.)

$x = 5 - x \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

c. $f, g : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}$, $f(\hat{x}) = 4x^2 - 20x + 29$

$g(\hat{x}) = x^2 + x + 1$.

f bine definită?

$\hat{x} = \{x, 5-x\}$, $\hat{\frac{5}{2}} = \{\frac{5}{2}\}$.

$\hat{x} = \hat{\frac{5}{2}}$

$x \neq \frac{5}{2}$, $\hat{x} = \{x, 5-x\}$, $x \neq 5-x$.

$f(\hat{x}) = f(\widehat{5-x})$, $\forall x$.

$f(\hat{x}) = 4x^2 - 20x + 29$

$f(\widehat{5-x}) = 4(5-x)^2 - 20(5-x) + 29$

$= \cancel{100} - 40x + 4x^2 - \cancel{100} + 20x + 29 = 4x^2 - 20x + 29$

$f(\hat{x}) = f(\widehat{5-x})$, $\forall x \Rightarrow f$ bine def.

$g(\hat{x}) = g(\widehat{5-x})$? $g(\hat{0}) \neq g(\hat{5})$

$x^2 + x + 1 = (5-x)^2 + (5-x) + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - 11x + 31$ (Fals)

Ex. 3. Pentru ce nr. nat. $n \geq 2$ funcția $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$,

$f(\hat{k}) = i^k$ este bine definită?

Rez:

$\hat{k} = \hat{l} \Rightarrow n \mid k - l$ (k și l dau același rest la $: n$)

$k = n \cdot t + r$, $t \in \mathbb{Z}$

$l = n \cdot s + r$, $s \in \mathbb{Z}$

f bine def dacă $f(\hat{k}) = f(\hat{l}) \Rightarrow i^k = i^l$

$$\Rightarrow i^{k-l} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k - l = 4a = n(t-s) \\ 4 \mid k - l \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4 \mid n(t-s)$, $\forall t, s \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \mid n$.

$n = 4a$, $f(\hat{k}) = f(\hat{l})$

$k = 4at + r$

$l = 4as + r$

$$i^k = i^{4at+r} = \underbrace{(i^4)^{at}}_{=1} \cdot i^r = i^r = i^l$$

Exemplu: $n = 3$, $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$.

$\hat{0} = \hat{3} = \hat{6}$, $f(\hat{0}) = i^0 = 1$, $f(\hat{3}) = i^3 = -i$

$\Rightarrow$ f nu este bine def.

$n = 8$, $\mathbb{Z}_8 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\}$. – f bine def.

f nu este inj.

$f(\hat{0}) = i^0 = 1$ $\qquad$ $f(\hat{4}) = i^4 = 1$

$f(\hat{8t}) = i^{8t} = 1$ $\qquad$ $f(\hat{12}) = i^{12} = 1$