Seminar 2 — 11.10.2021. — 142

Ex. 1: Arătați că funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \{n\sqrt{3}\}$ este inj.

Rez: Fie $m, n \in \mathbb{N}$ a.î. $f(m) = f(n)$.

$\{m\sqrt{3}\} = \{n\sqrt{3}\}$.

$$m\sqrt{3} - [m\sqrt{3}] = n\sqrt{3} - [n\sqrt{3}]$$

$$m\sqrt{3} - n\sqrt{3} = [m\sqrt{3}] - [n\sqrt{3}]$$

$$(m-n)\sqrt{3} = \underbrace{[m\sqrt{3}] - [n\sqrt{3}]}_{\in \mathbb{Z}}.$$

$m, n \in \mathbb{N}$

$(m-n)\sqrt{3} \in \mathbb{Z} \iff m = n$.

$\Rightarrow f$ este injectivă.

Ex. 2: Fie M o mulțime finită și $f : M \to M$ o funcție. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente (U.A.E.):

a. f este injectivă

b. f este surjectivă

c. f este bijectivă.

(f inj $\iff$ f bij $\iff$ f surj)

Rez: $|M| = n$.

f inj $\iff$ f surj

"$\Rightarrow$" Pp. că f este inj. $\Rightarrow \forall\, m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$ avem $f(m_1) \neq f(m_2)$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Im} f| = n \\ \operatorname{Im} f \subseteq M \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = M \Leftrightarrow f \text{ surj.}$$

"$\Leftarrow$" Pp. că f este surjectivă. Pp. că f nu este inj.

$\exists\, m_1 \neq m_2 \in M$ a.î. $f(m_1) = f(m_2)$. $\Rightarrow |\operatorname{Im} f| \leq n-1$ ↯.

$|\operatorname{Im} f| = |M| = n$

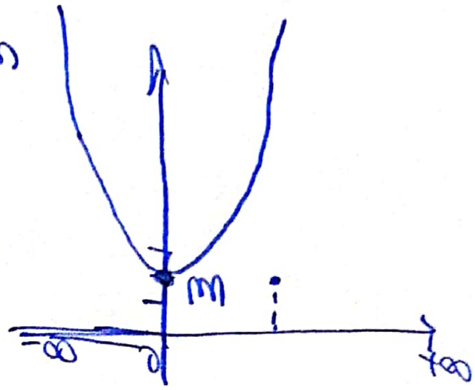
Ex. 3: Studiați inj., surj. și bij. funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+m, & x \leq 0 \quad f_1 \\ mx, & 0 < x < 1 \quad f_2 \\ m^2 - x, & x \geq 1 \quad f_3 \end{cases}$$

în funcție de parametrul real m.

Rez:

$f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = x^2 + m$



$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

În cazul nostru, $V(0, m)$

$0 \in (-\infty, 0]$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f_1 = [m, \infty)$

$f_2 : (0,1) \to \mathbb{R}, \ f(x) = mx$

$$\mathrm{Im} f_2 = \begin{cases} (0, m), & m > 0 \\ \{0\}, & m = 0 \\ (m, 0), & m < 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Im} f_3 = (-\infty, m^2 - 1]$.

Avem 3 cazuri:

I. $m > 0$ II. $m = 0$ III. $m < 0$.

$m > 0$

$\mathrm{Im} f_1 = [m, \infty)$

$\mathrm{Im} f_2 = (0, m)$

$\mathrm{Im} f_3 = (-\infty, m^2 - 1]$

Avem injectivitate pe ramuri.

$\mathrm{Im} f_1 \cap \mathrm{Im} f_2 = \emptyset$

f este inj $\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0$

$m^2 - 1 = 0$

m		-1		0		1	
m^2-1	$+$	0	$-$			0	$+$

$m^2 - 1 \le 0 \iff m \in [-1, 1]$

$m > 0$

$\Rightarrow m \in (0, 1]$.

f surj $\iff \left.\begin{matrix} m^2 - 1 \ge 0 \\ m > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \in [1, \infty)$

f bij $\iff m = 1$.

T: Fie M și N mulțimi finite, $|M| = m$, $|N| = n$.

Se cere:

a. nr. funcțiilor $f : M \to N$

b. nr. funcțiilor inj. $f : M \to N$

c. nr. funcțiilor surj. $f : M \to N$

d. nr. funcțiilor bij. $f : M \to N$

Hint c: $m \ge n$. Calculăm nr. funcțiilor care nu sunt surj.

Pp. că $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Considerăm $A_i = \{f : M \to N \mid i \notin Im f\}$.

$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = ?$ (cu P.I.E.)

$|A_i| = (n-1)^m$

Ex. 4: Calculați $\varphi(n)$ cu P.I.E, unde $\varphi(n)$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este indicatorul lui Euler.

Rez: $\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid a \le n, (a, n) = 1\}|$.

Exemplu: $\varphi(12) = 4$.

$\{a \in \mathbb{N} \mid a \le 12, (a, 12) = 1\} = \{1, 5, 7, 11\}$

$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, p_i nr. prime, $a_i \geq 1$.
desc. în factori primi a lui m.

Fie $A_i = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq m, p_i \mid a\}$, $i = \overline{1,k}$.

Numărăm numerele $a \in \mathbb{N}$, $a \leq m$ cu $(a,m) \neq 1$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| \overset{P.I.E.}{=} \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<l} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \dots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|.$$

$$|A_i| = \frac{m}{p_i} \qquad |A_i \cap A_j \cap A_l| = \frac{m}{p_i \cdot p_j \cdot p_l}$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{p_i \cdot p_j} \qquad \vdots \qquad |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \frac{m}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{m}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{m}{p_i p_j} + \sum_{i<j<l} \frac{m}{p_i p_j p_l} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_k}.$$

$$\varphi(m) = m - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$$
$$= m\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i<j<l} \frac{1}{p_i p_j p_l} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{p_1 \dots p_k}\right)$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

dem. prin ind. după k.

Dacă $k = 1$: $\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$

$k = 2$: $\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 p_2}\right) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$.

Formulă: $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$,

$n = p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$, p_i prime, $a_i \geq 1$.

($p_i \neq p_j$, $i \neq j$).

Exemplu: $\varphi(12) = 12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = 4$.

$12 = 2^2\cdot 3$

T: Fie M o mulțime și $A, B \subseteq M$. Definim funcția $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X\cap A, X\cap B)$.

Arătați că:

a. f inj $\Leftrightarrow A\cup B = M$.

b. f surj $\Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$.

c. f bij $\Leftrightarrow A = C_M B$ (complementul lui B în M)

În acest caz, aflați f^{-1}.