Seminar 4 – 25. 10. 2021

Ex. 1: Arătați că nu există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu propr. că $|f(x) - f(y)| > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

Rez:

Obs: $|f(x) - f(y)| > 1, \forall x \neq y \Rightarrow f$ inj $\Rightarrow |\mathbb{R}| = |f(\mathbb{R})| (= |\operatorname{Im} f|)$

$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1)$

$\Downarrow$

$|\operatorname{Im} f \cap [m, m+1)| \leq 1$ (dacă $|\operatorname{Im} f \cap [m, m+1)| > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x, y, x \neq y$ a.î. $f(x), f(y) \in [m, m+1)$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$).

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \cap \mathbb{R}$

nenum. $= \operatorname{Im} f \cap \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1) \right)$

$= \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \big(\underbrace{\operatorname{Im} f \cap [m, m+1)}_{\text{are cel mult un elem.}} \big)$ $\Rightarrow$ reuniunea este mult. finită sau numărabilă!

Obs.: Dacă $|\operatorname{Im} f \cap [m, m+1)| = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$, at. $|\operatorname{Im} f| = |\mathbb{Z}|$
nenum. num.

Reuniunea poate fi văzută ca o submulț. a lui $\mathbb{Z}$.

Relații de echivalență

Def: O rel. binară „$\sim$" pe o mulțime A se num. rel. de echiv. dacă îndeplinește simultan cond:

1. REFLEXIVITATE: $a \sim a$, $\forall a \in A$
2. SIMETRIE: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, $\forall a, b \in A$
3. TRANZITIVITATE: $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$, $\forall a, b, c \in A$.

Ex. 2: Verificați care dintre următ. rel. binare pe $\mathbb{R}$ sunt rel. de echiv:

a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| < 2$

c. $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

Rez:

a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

1. refl: $x \sim x \Leftrightarrow x - x \in \mathbb{Z}$ (A)

2. sim: $x \sim y \overset{?}{\Rightarrow} y \sim x$

$$x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$$

3. tranzit: $x \sim y$ și $y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \in \mathbb{Z} \\ y - z \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim z.$$

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x-y| < 2$.

1. refl. : $x \sim x, \forall x \in \mathbb{R}$

$|x-x| = 0 < 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \sim x$.

2. sim. : $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2 \rightarrow |-(x-y)| < 2 \Rightarrow |y-x| < 2 \Rightarrow y \sim x$

3. tranzit. : $x \sim y$ și $y \sim z \rightarrow x \sim z$

$\left.\begin{array}{l}|x-y|<2 \\ |y-z|<2\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} |x-z| < 2$ < Da - de ce? / Nu - dați un contraex.

$x=4, y=3, z=2$

$|x-y| = 1 \qquad |x-z| = 2 < 2$ (F)

$|y-z| = 1$

„$\sim$" nu este rel. de echiv.

c $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

1. refl: $x \sim x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x + x = 2x \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$? (F)

Ex.: $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

„$\sim$" nu este refl $\Rightarrow$ nu este rel. de echiv.

„$\sim$" este sim, nu este tranzit.

$x \sim y$ și $y \sim x$, dar $x \nsim x$.

Ex. 3: Pe $\mathbb{C}$ def. rel. „$\sim$" prin: $z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R}$.
Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez: Vezi Ex. 2. a.

Obs.: $z - w \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$

$z, w \in \mathbb{C}$ $\quad$ ↘ partea imaginară.

Ex. 4: Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ def. rel: $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$.
Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.:

Rez: 1. refl.: $(a,b) \sim (a,b)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$

$ab = ab$ (A)

2. sim: $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

3. tranzit: $(a,b) \sim (c,d)$ și $(c,d) \sim (e,f) \overset{?}{\Rightarrow} (a,b) \sim (e,f)$

$\begin{cases} ad = bc \\ cf = de \end{cases}$ Vrem: $af = be$

$a, c, e \in \mathbb{Z}$
$b, d, f \in \mathbb{N}^*$

$\left.\begin{array}{l} ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ cf = de \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Rightarrow af = be$

? $(a,b) = (1,2)$

(c,d) cu $(a,b) \sim (c,d)$? $\rightsquigarrow \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$

$d = 2c$

$(c, 2c)$

Ex. 5: Fie A o mult. nevidă și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f: A \to A$.
Pe $\mathcal{F}$ def. rel: $f \sim g \iff \exists\, u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ g$.
Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez: 1. refl: $f \sim f, \forall f \in \mathcal{F}$

? $\exists\, u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ f$

Luăm $u = 1_A$ $\quad f \circ 1_A = f$ și $1_A \circ f = f$

2. sim: $f \sim g \overset{?}{\Rightarrow} g \sim f$

$f \sim g \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $f \circ u = u \circ g$.

<u>Vrem</u> $v \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $g \circ v = v \circ f$

$f \circ u = u \circ g$, $u: A \to A$ bij

u bij $\Rightarrow \exists\, u^{-1}$ inversa sa

$u^{-1} \circ / \, f \circ u = u \circ g \, / \circ u^{-1} \Rightarrow u^{-1} \circ f \circ \underbrace{u \circ u^{-1}}_{1_A} = \underbrace{u^{-1} \circ u}_{1_A} \circ g \circ u^{-1}$

$\Rightarrow u^{-1} \circ f = g \circ u^{-1} \Rightarrow g \circ \underset{v}{u^{-1}} = \underset{v}{u^{-1}} \circ f$, Luăm $v = u^{-1}$!

3. tranzit: $f \sim g$ și $g \sim h \Rightarrow f \sim h$

$\cdot f \sim g \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ g$

$g \sim h \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{F}$ bij a.î. $g \circ v = v \circ h$

Vrem $w \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $f \circ w = w \circ h$

$f \circ u = u \circ g \;|\circ v \Rightarrow f \circ u \circ v = u \circ g \circ v \Rightarrow f \circ (u \circ v) =$

$u \circ / \; g \circ v = v \circ h \qquad \underline{u \circ g \circ v} = u \circ v \circ h \qquad = (u \circ v) \circ h$

„$\circ$" este asociativă? (Da) Luăm $w = u \circ v$.

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow$ „$\sim$" este rel. de echiv.