Seminar 11 - 13.12.2021

Ex. 1: Fie grupul $(S_4, \circ)$, $H = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ subgrup în S_4.

a. Arătați că H este subgrup normal în S_4 ($H \trianglelefteq S_4$)

b. Arătați că $S_4/_H \simeq S_3$.

Rez:

a. $H \trianglelefteq S_4 \iff xH = Hx, \forall x \in G = S_4$.

$$xHx^{-1} \subseteq H, \forall x \in G = S_4.$$

$|S_4| = 4! = 24$

Var. 1: Calcul

Var. 2: Verificați pe o mulțime de generatori

De ex., orice permutare poate fi scrisă ca produs de transpoziții, $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$, τ_i transpoziții.

$\tau H \tau^{-1} = H$, $\forall$ τ transpoziție

$(\tau_1\tau_2)H(\tau_1\tau_2)^{-1} = \tau_1(\tau_2 H \tau_2^{-1})\tau_1^{-1} = \tau_1 H \tau_1^{-1} = H.$

$H = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

Câte transpoziții sunt în S_4? $- C_4^2 = 6$.

Var. 3: Fie $\sigma \in S_4$.

$\sigma H \sigma^{-1} = H$

$$\sigma\,(1\,2)(3\,4)\,\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}^{-1}$$

$\sigma(1) \to 1 \to 2 \to \sigma(2)$ $\quad$ $\sigma(3) \to 3 \to 4 \to \sigma(4)$

$\sigma(2) \to 2 \to 1 \to \sigma(1)$ $\quad$ $\sigma(4) \to 4 \to 3 \to \sigma(3)$

$(\sigma(1)\ \sigma(2))(\sigma(3)\ \sigma(4)) \in H$

$\sigma(1\,3)(2\,4)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3))(\sigma(2)\ \sigma(4)) \in H$

$\sigma(1\,4)(2\,3)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(4))(\sigma(2)\ \sigma(3)) \in H$

b. S_4/H, Th. Lagrange: $|G| = |H| \cdot |G:H|$ — indicele lui H în G.

$$|S_4/H| = \frac{|S_4|}{|H|} = \frac{24}{4} = 6.$$

∇. G grup cu 6 elemente $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_6$ sau $G \simeq S_3$

$|S_4/H| = 6 \Rightarrow S_4/H \simeq \mathbb{Z}_6$ $\quad S_4/H \simeq S_3$.

$\mathbb{Z}_6$ grup ciclic, are elem. de ord. 6, comutativ

$S_4/H \simeq \mathbb{Z}_6 \Leftrightarrow S_4/H$ are un elem. de ordin 6.

$\hat{\sigma} \in S_4/H$, $\sigma \in S_4$, $\sigma^6 \in H$, 6 este minim.

$$S_4 = \underbrace{\{e\}}_{1} \cup \underbrace{\{(i\ j) \mid 1 \le i < j \le 4\}}_{6 \text{ transpozitii}} \cup \underbrace{\{(i\ j\ k) \mid 1 \le i, j, k \le 4,\ i \ne j \ne k \ne i\}}_{= \frac{A_4^3}{3} = 8} \cup$$

$$\cup \underbrace{\{(i\ j)(k\ l) \mid \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}\}}_{3} \cup$$

$$\cup \underbrace{\{(i\ j\ k\ l) \mid \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}\}}_{6}$$

∇. În S_4 nu există elem. de ordin 6.

Se obs. că în S_4/H nu există elem. de ord. 6 $\Rightarrow S_4/H \simeq S_3$

Permutări

Ex. 1: Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 & 3 & 6 & 10 & 4 \end{pmatrix} \in S_{10}$.

a. Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții.

b. Det. $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{ord}(\sigma)$ și calculați σ^{2021}.

c. Rezolvați ecuația $\tau^2 = \sigma$ în S_{10}.

d. Fie $\rho \in S_{10}$ cu $\operatorname{ord}(\rho) = 10$. Este posibil ca $\operatorname{sgn}(\rho) = 1$?

e. Există permutări de ordin 30 în S_{10}? Dar de ordin 35?

Rez: a. $\sigma = (1\ 5\ 7\ 3\ 2)(4\ 9\ 10)(6\ 8)$

$$\sigma = (1\ 5)(5\ 7)(7\ 3)(3\ 2)(4\ 9)(9\ 10)(6\ 8).$$

$$1 \to 5 \to 7 \to 3 \to 2 \to 1$$

b. $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{nr. de transp.}} = (-1)^7 = -1$

$= (-1)^{\text{nr. de inversiuni}}$

Obs: $sgn(\tau\rho) = sgn(\tau) \cdot sgn(\rho)$

$\sigma = \underbrace{(1\ 5\ 7\ 3\ 2)}_{5\text{-ciclu}}\underbrace{(4\ 9\ 10)}_{3\text{-ciclu}}\underbrace{(6\ 8)}_{2\text{-ciclu (transpoziție)}}$

$\forall$ $\sigma \in S_n$, c ciclu de lungime m

$$sgn(c) = \begin{cases} -1, & m \text{ par} \\ 1, & m \text{ impar} \end{cases}$$

$ord(\sigma) = k \Leftrightarrow \sigma^k = e$ și k este minim.

! $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ produs de cicli disjuncți

$ord(\sigma) = [ord(\tau_1), ord(\tau_2), \dots, ord(\tau_k)]$.

c ciclu de lungime m, $ord(c) = m$

$ord(\sigma) = [5, 3, 2] = 30$, $\sigma^{30} = e$

$\sigma^{2021} = \sigma^{30 \cdot c + r} = \sigma^{30 \cdot 67 + 11} = \sigma^{11}$

$$\sigma = (1\ 5\ 7\ 3\ 2)(4\ 9\ 10)(6\ 8)$$

$$\sigma^2 = (1\ 7\ 2\ 5\ 3)(4\ 10\ 9)\ ,\ \sigma^3 = \dots$$

$$\sigma^4 = \dots\ ,\ \sigma^8 = \dots$$

$$\sigma^{11} = \big((1\ 5\ 7\ 3\ 2)(4\ 9\ 10)(6\ 8)\big)^{11} \overset{\circ}{=}$$

$ab = ba$

$$= (1\ 5\ 7\ 3\ 2)^{11} \cdot (4\ 9\ 10)^{11}\ (6\ 8)^{11}$$

$$= (1\ 5\ 7\ 3\ 2)(4\ 10\ 9)(6\ 8)$$

$$(1\ 5\ 7\ 3\ 2)^{11} = (1\ 5\ 7\ 3\ 2)^{5\cdot 2+1} = (1\ 5\ 7\ 3\ 2)$$

$$\left[\begin{array}{l} c = (a_1\ a_2 \dots a_k)\ ,\quad c^{-1} = (a_1\ a_k\ a_{k-1} \dots a_2) \\ c^i(a_j) = a_{j+i}\ ,\quad j+i \bmod k \end{array}\right.$$

Obs.: $(4\ 9\ 10)^2 = (4\ 9\ 10)^{-1}$ deoarece $\operatorname{ord}(4\ 9\ 10) = 3$.

c. $\tau^2 = \sigma$.

$sgn(\sigma) = -1$

$sgn(\tau^2) = sgn(\tau) \cdot sgn(\tau) = 1$.

$\Rightarrow$ ecuația nu are soluții

! $\tau^{2k} = \sigma$ Mai întâi verificați dacă $sgn(\sigma) = 1$.

d. $\rho \in S_{10}$, $ord(\rho) = 10$.

$\rho = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ produs de cicli disjuncți

$ord(\rho) = 10$

ρ = ciclu de lungime 10 $\to sgn(\rho) = -1$

$\rho = (i\ j)(k\ l\ m\ n\ o) \to sgn(\rho) = (-1) \cdot 1 = -1$

$\rho = \underset{2}{(1\ 2)}\underset{2}{(3\ 4)}\underset{5}{(5\ 6\ 7\ 8\ 9)}(10) \to \underline{\underline{sgn(\rho) = 1}}$.

e. Permutări de ordin 30 — există

$ord(\rho) = 35$, $\rho = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ desc. în cicli disj.

$l_i = ord(\tau_i) \geq 2$; $[l_1, l_2, \dots, l_k] = 35$, $l_1 + l_2 + \dots + l_k \leq 10$.

$[\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k] = 35 = \underline{\underline{5 \cdot 7}}$

Nu există permutări de ord. 35 în S_{10}.

Cel mai mic n a.î. există permutări de ordin 35 în S_n este $5+7=12$.

Ex. 2: Det. toate ordinele posibile ale unei permutări din S_6.

$\sigma \in S_6$

$\sigma = e \to 1$

σ transp. $\to 2$

σ 3-ciclu $\to 3$

σ 4-ciclu $\to 4$

σ 5-ciclu $\to 5$

σ 6-ciclu 6

$\sigma = (i\ j)(k\ \ell) \to 2$

$\sigma = (i\ j)(k\ \ell)(m\ n) \to 2$

$\sigma = (i\ j)(k\ \ell\ m) \to 6$

$\sigma = (i\ j)(k\ \ell\ m\ n) \to 4$

$\sigma = (i\ j\ k)(\ell\ m\ n) \to 3$

$ord(\sigma) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 2+2+2 = 2+2+1+1 =$

$= 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$