Seminar 8 - 22.11.2021

Ex. 1: Fie $G = \{x \in \mathbb{R} / 0 \le x < 1\}$. Pe G definim legea de compoziție $x * y = \{x+y\}$ ($\{a\}$ parte fracționară). Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

Rez:

- Parte stabilă: Fie $x, y \in G$. Atunci $x * y = \{x+y\} \in \underbrace{[0,1)}_{G}$
- Asociativitate: Fie $x, y, z \in G$. Vrem:

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

$$(x*y)*z = \{x+y\} * z = \{\{x+y\}+z\} \xlongequal{\{a\} = a - [a]}$$

$$= \{x+y\} + z - [\{x+y\} + z] =$$

$$= x+y - [x+y] + z - [x+y - \underbrace{[x+y]}_{\in \mathbb{Z}} + z] =$$

$$= x+y+z - [x+y] - ([x+y+z] - [x+y])$$

$$= x+y+z - \cancel{[x+y]} - [x+y+z] + \cancel{[x+y]}$$

$$= \{x+y+z\}.$$

Analog se arată că $x*(y*z)=\{x+y+z\}$

$$[x+y+z-[x+y]] = [x+y+z]-[x+y]$$
$$\underbrace{[x+y]}_{\in\mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow$ „$*$" este asoc.

• Comutativitatea: $x*y=\{x+y\}=\{y+x\}=y*x,\ \forall x,y\in G$

• Elem. neutru: $\exists\, e\in G$ a.î. $x*e=e*x=x$.

$x*e=x \quad , x\in[0,1)$.

$\{x+e\}=x$

$e=0 \quad , \quad x*0=0*x=\{x\}\overset{x\in[0,1)}{=}x$

• Elem. sim: $\forall x\in G\quad \exists\, y\in G$ a.î. $x*y=y*x=0$.

Fie $x\in G$. Vrem $y\in G$ a.î. $\{x+y\}=0$.

$y=1-x$ dacă $x\neq 0$, $y=0$ dacă $x=0$.

$y=-x\in(-1,0] \Rightarrow 1-x\in(0,1]$

Ex. 2: Determinați toate morfismele $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Q},+)$ de grupuri.

Rez: f morfism

- $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$
- $\boxed{f(0)=0}$ - cond. de morfism (vezi curs)

Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $f(n)=f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ ori}}) \overset{f \text{ morf.}}{=\!=}$

$=\underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n \text{ ori}} = n\cdot f(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Obs: Dacă știm $f(1)$ știm $f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Paranteză: Fie $(G,\circ)$, $(H,*)$ grupuri și $f:G\to H$ morfism, e elem. neutru în G

$\tilde{e}$ — " — H.

$x, x^{-1}\in G$

$f(x\circ x^{-1}) = f(x)*f(x^{-1})$

$f(e) = f(x)*f(x^{-1})$

Dacă $f(e)=\tilde{e} \Rightarrow f(x)*f(x^{-1})=\tilde{e} \Rightarrow f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$

$\underline{\underline{f(e)}} = f(e \circ e) = \underline{\underline{f(e) * f(e)}}$ în H.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n f(1)$.

$f(-n) = ?$

$n \in \mathbb{N}^*$.

$0 = f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n)$

$\Rightarrow f(-n) = -f(n) = -n \cdot f(1)$.

$f(-n) = (-n) \cdot f(1)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = n f(1)$

$f(n) = n \cdot f(1)$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Morfismele de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(\mathbb{Q}, +)$ sunt:

$f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\quad f(n) = n \cdot a$, $\quad a \in \mathbb{Q}$.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ morfism, $\quad f(0) = f(\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n \text{ ori}})$

$f(0) = 0$. $\quad \Leftarrow f(0) = n \cdot f(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ex.: Det toate morfismele de la $(\mathbb{Q},+)$ la $(\mathbb{Z},+)$

- pt. $n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ se rezolvă ca în ex. anterior
- $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = f(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}) = n f(\frac{1}{n})$
- $f(\frac{m}{n}) = m f(\frac{1}{n})$.

Ex. 3: Fie $(G,\cdot)$ un grup în care $x^2 = 1$, $\forall x \in G$, 1 = elem. neutru în G. Arătați că G este grup comutativ.

Rez: Vrem să dem. că $xy = yx$, $\forall x, y \in G$.

$x, y \in G \Rightarrow x^2 = y^2 = 1$

$x^2 \cdot y^{-1} = (x \cdot y \cdot y^{-1})^2 \cdot y^{-1} \overset{?}{=} (y^{-1} \cdot x \cdot y)^2 \cdot y^{-1}$

$\boxed{\text{Nu știm}}$

$x^2 = 1$
$y^2 = 1$

Obs: Dacă $(G,\cdot)$ nu este comutativ

$(xy)^2 = xyxy \neq x^2 \cdot y^2$

$x^2 = 1 \,\Big|\, \cdot x^{-1} \Rightarrow x^2 \cdot x^{-1} = x^{-1} \Rightarrow x = x^{-1}, \forall x \in G.$

Îm particular, $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$
$\forall x, y \in G.$

$x = x^{-1}$
$y = y^{-1}$

Obs: Fie $(G, \cdot)$ un grup, nu neapărat comutativ.
$x, y \in G$, x^{-1}, y^{-1} inversele lor

$(xy)\cdot(xy)^{-1} = 1.$ $\qquad xyx^{-1}y^{-1} \neq 1.$

$= x\underbrace{y \cdot y^{-1}}_{1} \cdot x^{-1} = 1$ $\qquad a \cdot a^{-1} = 1, \forall a \in G.$

$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_t)^{-1} = x_t^{-1} \cdot x_{t-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}$
valabil $\forall$ G grup.

$(xy)^2 = xyxy \xrightarrow{G \text{ com}} x^2y^2$

Ex. 4: Se consideră mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \ m, n \in \mathbb{Z}_5, \ m \in \{\pm \hat{1}\} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5).$$

Arătați că $(G, \cdot)$ este grup, „$\cdot$” înmulțirea matricelor.

Rez:

• Parte stabilă:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\in \{\pm \hat{1}\}}{mp} & \overset{\in \mathbb{Z}_5}{mq + n} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G.$$

$m, n, p, q \in \mathbb{Z}_5$, $m, p \in \{\pm \hat{1}\}$

• Asociativitatea:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} p & q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \right] = ?$$

Înmulțirea matricelor este asoc.

• Comutativitate: În general „$\cdot$” nu este com.

$$\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mp & mq+n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pm & pn+q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

"$\cdot$" ar fi com. dacă $mq+n = pn+q$, $\forall\, m, n, p, q \in \mathbb{Z}_5$.

$n = \hat{0}$ $\qquad mq = q$

$m = -\hat{1}$

$q = \hat{1}$ $\qquad -\hat{1} = \hat{1}$ (fals)

"$\cdot$" nu este comutativă

• Elem. neutru: I_2.

$$\begin{pmatrix} mp & mq+n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow p = \hat{1},\ q = \hat{0}.$$

• Elem. simetrizabile: ......

$$\begin{pmatrix} mp & mq+n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pm & mp+q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} mp = \hat{1} \\ mq + m = \hat{0} \\ mp + q = \hat{0} \end{cases} \Rightarrow p = m \qquad m, p \in \{\pm \hat{1}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mq + m = \hat{0} \\ \underbrace{m}_{=p} m + q = \hat{0} \end{cases}$$

$q = -mm$

$m \cdot (-mm) + m =$

$= -m^2 \cdot m + m = -m + m = \hat{0}$.

$m(q-m) - (q-m) = \hat{0}$

$(m - \hat{1})(q - m) = \hat{0}$

Dacă $m = \hat{1} \Rightarrow m + q = \hat{0} \Rightarrow q = -m$

Dacă $m \neq \hat{1} \Rightarrow q = m$.

$(m = -\hat{1})$

$$\begin{pmatrix} m & m \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m & -mm \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

Obs: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^2 - \mathrm{Tr}(A) A + I_2 \cdot \det A = 0$.

$I_2 = \frac{1}{\det} \left(\mathrm{Tr}(A) I_2 - A \right) A$