Seminar 3 - 18.10.2021 - 142

Ex. 1: Fie M, N mulțimi finite, $|M| = m$, $|N| = n$.

a. Nr. funcțiilor $f: M \to N$: n^m

b. Nr. funcțiilor injective $f: M \to N$: A_n^m, $m \leq n$

d. Nr. funcțiilor bijective $f: M \to N$: $A_n^m = P_n$, $m = n$

c. Nr. funcțiilor surjective $f: M \to N$: $m \geq n$

Pp. că $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = \{f: M \to N \mid i \notin \operatorname{Im} f\}$, $i = \overline{1,n}$

$|A_i| = ?$

$f \in A_i \iff i \notin \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f \subseteq N \setminus \{i\}$.

$|A_i| = (n-1)^m$ $\left(= \text{nr. funcțiilor } f: M \to N \setminus \{i\} \right)$
$\forall i = \overline{1,n}$.

$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$ $\left(= \text{nr. funcțiilor } f: M \to N \setminus \{i, j\} \right)$
$i \neq j$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \overset{P.I.E.}{=} \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right| =$$

$$= \underbrace{n}_{= C_n^1} (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + C_n^3 (n-3)^m - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} \cdot C_n^{n-1} [n - (n-1)]^m + (-1)^{n-1} \cdot C_n^n (n-n)^m$$

$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| =$ nr. funcțiilor care nu sunt surjective.

Nr. funcțiilor surjective: $n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots$
$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m$

Ex. 2: Fie M o mulțime, $A, B \subseteq M$. Definim $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$, $\forall X \subseteq M$. Arătați că:

a. f inj $\Leftrightarrow A \cup B = M$.

b. f surj $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

c. f bij $\Leftrightarrow A = C_M B$. În acest caz, aflați f^{-1}.

Rez:

a. „$\Rightarrow$" Pp. că f este injectivă. Trebuie să arătăm că $A \cup B = M$. Pp. că $A \cup B \neq M$. ($A \cup B \subsetneq M$).

$\Rightarrow \exists\, x \in M$ a.î. $x \notin A$ și $x \notin B$. ($x \notin A \cup B$).

$f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$.

$f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$

$\Rightarrow f(\{x\}) = f(\emptyset) \Rightarrow f$ nu este inj. $\mathcal{A}\!\!\!\!\int$. (contradicție)

$\{x\} \neq \emptyset$ $\quad\quad$ $\int + \mathcal{A} = \mathcal{A}\!\!\!\!\int$

„$\Leftarrow$" $A \cup B = M$. Trebuie să arătăm că f este inj.

Pp. că f nu este injectivă $\Rightarrow \exists\, X, Y \subseteq M$, $X \neq Y$ a.î. $f(X) = f(Y)$.

$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$.

$X \neq Y \Leftrightarrow X \setminus Y \neq \emptyset$ sau $Y \setminus X \neq \emptyset$.

$(X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X)$

Putem pp. că $X \setminus Y \neq \phi$. $\Rightarrow \exists\, x \in X \setminus Y$, $x \in M$.

și $x \in X$ și $x \notin Y$.

$$\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$$

Dacă $x \in A \Rightarrow x \in X \cap A$ (deoarece $x \in X$)

$\Rightarrow x \in Y \cap A$. Dar $x \notin Y$. ⨳ $\Rightarrow x \notin A$

Analog se arată că $x \notin B$.

$\Rightarrow x \notin A \cup B = M$ ⨳.

b. f surj $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$.

"$\Rightarrow$" Pp. că f este surjectivă. Vrem $A \cap B = \phi$.

Pp. că $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \exists\, x \in A \cap B$.

[Vrem $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ a.î. $\forall X \subseteq M$ $f(X) \neq (C, D)$]

$(\{x\}, \phi) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Căutăm $X \subseteq M$ a.î. $f(X) = (\{x\}, \phi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \cap A = \{x\} \Rightarrow x \in X \text{ și } x \in A \\ X \cap B = \phi \end{cases}$$

$x \in X$, $x \in B \Rightarrow x \in X \cap B = \phi$ ⨳.

"$\Leftarrow$" $A \cap B = \phi$. Vrem f surj. Fie $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

$C \subseteq A$ $\quad C \cap B \subseteq A \cap B = \phi$

$D \subseteq B$ $\quad D \cap A = \phi$.

Căutăm $X \in \mathcal{P}(M)$ a.î. $f(X) = (C, D)$.

$$\begin{cases} X \cap A = C \\ X \cap B = D \end{cases}$$

Luăm $X = C \cup D$.

$$f(C \cup D) = ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B) =$$

$$= ((\underbrace{C \cap A}_{=C}) \cup (\underbrace{D \cap A}_{\phi}), (\underbrace{C \cap B}_{\phi}) \cup (\underbrace{D \cap B}_{D}))$$

$$= (C, D).$$

Exemplu: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$.

$C = \{1\}$, $D = \{4\}$

$f(\{1, 4\}) = (\{1\}, \{4\}) = (C, D)$.

$f(\{1, 4, 5\}) = (C, D)$

$f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ este bijectivă

$f^{-1}: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(M)$, $f^{-1}(C, D) = C \cup D$.

Ex. 3: Fie $f: A \to B$ o funcție. Arătați că:

a. f surj $\Leftrightarrow \exists\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$

$1_B: B \to B$, $f(x) = x$ funcția identitate

b. f inj $\Leftrightarrow \exists\, h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

Obs: $f \circ g = 1_B$ (1_B funcție bijectivă)

$\Rightarrow f$ surj și g inj.

Rez: „$\Leftarrow$" Ps. că $\exists\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$.
Arătăm că f este surjectivă.

$f \circ g = 1_B \Leftrightarrow f(\underbrace{g(b)}_{\in A}) = b, \ \forall b \in B$.

Fie $b \in B$. Vrem $a \in A$ a.î. $f(a) = b$. Luăm $a = g(b)$.

$f \circ g = 1_B \Rightarrow \operatorname{Im}(f \circ g) = B$

$$\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f \subseteq B$$

$f: A \to B$.

$g: B \to A$

$$\operatorname{Im}(f\circ g) = f(\operatorname{Im} g) \subseteq f(A) = \operatorname{Im} f$$

$f \circ g : B \to B$, $\operatorname{Im} g \subseteq A$

$f \circ g \rightsquigarrow f_1 : \operatorname{Im} g \to B$

„$\Rightarrow$" f surjectivă. Vrem $g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$.

f surj $\Leftrightarrow \forall b \in B \ \exists\, a_b \in A$ a.î. $f(a_b) = b$

Construim $g: B \to A$, $g(b) = a_b$.

Obs: Alegem un unic $a_b \in f^{-1}(\{b\})$.

Ex.: $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a,b) = a$, f surj.

$f^{-1}(\{a\}) = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid f(x,y) = a\}$

$= \{(a, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\} = \{a\} \times \mathbb{N}$.

$g_y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $g_y(n) = (n, y)$ sau $g_1(n) = (n,n)$

$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(f\circ g)(n) = n$

b. f inj $\Leftrightarrow \exists h : B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

"$\Leftarrow$" $\exists h : B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

$\Rightarrow h \circ f$ inj.

Pp. că f nu este inj. $\Rightarrow \exists a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ a.î.
$f(a_1) = f(a_2)$. $\Rightarrow (h \circ f)(a_1) = (h \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.
abs.

"$\Rightarrow$" f inj. $\Rightarrow \exists h : B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

f inj $\Rightarrow |A| \leq |B|$

$f : A \to B$ inj $\quad f(a_1) \neq f(a_2) \ \forall a_1 \neq a_2$

$f(a) = b$.

$$h : B \to A, \quad h(b) = \begin{cases} a_b, & b = f(a_b) \ (b \in \mathrm{Im} f) \\ a_0 & b \notin \mathrm{Im} f \end{cases}$$

unde $a_0 \in A$ arbitrar

$(h \circ f)(a) = a$

T: Găsiți bijecții între:
- $(0, 1)$ și (c, d), $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$.
- $(0, 1)$ și $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}_+^*$.