Seminar 13 - 03.01.2022

Ex. 1: Calculați nr. de permutări din S_4, resp. S_5, care se scriu ca produs de cicli de lung. 2 disjuncți.

Rez.:

S_4: $\sigma = (i\ j)$ sau $\sigma = (i\ j)(k\ l)$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \phi$.

$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4)$
$(2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$

$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$

$\boxed{C_4^2 = 6} + 3 = 9$

S_5: $\sigma = (i\ j)$ sau $\sigma = (i\ j)(k\ l)$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \phi$

$C_5^2 = 10$

$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ | $(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(1\ 2)$

Obs: $\sigma = (i\ j)(k\ l)(m\ n) \in S_6$

$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{3!}$

Calculați nr. permutărilor de ordin 3 din S_5, resp. S_6.

S_5 : $\sigma = (i \; j \; k) \rightarrow \dfrac{A_5^3}{3}$

∇ $(1 \; 2 \; 3) \neq (1 \; 3 \; 2)$

$(1 \; 2 \; 3) = (2 \; 3 \; 1) = (3 \; 1 \; 2)$

Obs: În general, nr. ciclilor de lungime k din S_n este:

$\dfrac{A_n^k}{k}$.

Exc. $\dfrac{A_n^2}{2} = C_n^2$.

Ex. 2: Det. $m \in \mathbb{N}$ a.î. S_7 conține un elem. de ordin m.

Rez: $\sigma \in S_7$, $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ produs de cicli disj,

$ord(c_i) = l_i$, $ord(\sigma) = [l_1, \dots, l_k]$.

$l_1 + l_2 + \dots + l_k \le 7$ ($=7$ dacă includeți și cicli (i))

Var. 1: $7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1$

$= 3+3+1 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 =$

$= 2+1+\dots+1 = 1+1+\dots+1$

$ord(\sigma) \in \{7, 6, 10, 5, 12, 4, 3, 2, 1\}$.

Obs: $ord(\sigma) \mid |S_7| = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7$

Var. 2: $\sigma = c_1 \cdot \dots \cdot c_k$ desc. în cicli disj, $ord(c_i) = l_i$.

Pp. $l_i \ge 2$, $\forall i$.

$2k \le l_1 + \dots + l_k \le 7 \Rightarrow k \le 3$ (nr. maxim de cicli disj. din desc. lui σ este 3)

$k = 0$, $\sigma = e \rightarrow ord(\sigma) = 1$

$k = 1$, σ este ciclu $\rightarrow ord(\sigma) \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$k=2$, $\sigma = c_1 \circ c_2$, $4 \le \ell_1 + \ell_2 \le 7$, $2 \le \ell_1 \le \ell_2$

$(\ell_1, \ell_2) \in \{ (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4) \}$

$\qquad\qquad \downarrow 2 \quad \downarrow 6 \quad \downarrow 4 \quad \downarrow 10 \quad \downarrow 3 \quad \downarrow 12$

$k=3$, $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$, $6 \le \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \le 7$, $2 \le \ell_1 \le \ell_2 \le \ell_3$

$(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \{ (2,2,2), (2,2,3) \}$

$\qquad\qquad \downarrow 2 \quad \downarrow F$

Ex.: $S_n = \langle \{ (i\ j) \mid 1 \le i < j \le n \} \rangle$. Ar. că S_n este generat de:

a. $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \xrightarrow{\text{ind}} (i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$

b. $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1, n) \to$ fol. pt. a

c. $(1\ 2), (1\ 2 \dots n) \to$ fol. pt. b

(o transp și un n-ciclu) $\quad (1\ 2 \dots n)(1\ 2)(1\ 2 \dots n)^{-1} = ?$

Ex. 3: Rez. ecuația $\tau^2 = \sigma$ în S_8, unde $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$

Rez: $\tau^2 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$

$\tau = c_1 \cdot c_2 \dots c_k$ produs de cicli disj., $ord(c_i) = l_i$.

$\tau^2 = c_1^2 \cdot c_2^2 \dots c_k^2 = \sigma$

$2 \mid l_i \to c_i^2$ – produs de 2 $l_i/2$-cicli

$2 \nmid l_i \to c_i^2$ – l_i-ciclu (! l_i impar)

$\Rightarrow \tau = c_1 \cdot c_2$, c_1, c_2 – 4-cicli

$c_1^2 \circ c_2^2 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$

$\begin{cases} c_1^2 = (1\ 2)(3\ 4) \\ c_2^2 = (5\ 6)(7\ 8) \end{cases}$ sau $\begin{cases} (1\ 2)(5\ 6) \\ (3\ 4)(7\ 8) \end{cases}$ sau $\begin{cases} (1\ 2)(7\ 8) \\ (3\ 4)(5\ 6) \end{cases}$

$c_1^2 = (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 2)(4\ 3) \Rightarrow c_1 = (1\ 3\ 2\ 4)$ sau $(1\ 4\ 2\ 3)$

$c_2^2 = (5\ 6)(7\ 8) \Rightarrow c_2 = (5\ 7\ 6\ 8)$ sau $(5\ 8\ 6\ 7)$

Ex. 4 Fie $\tau = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10) \in S_n$, $n \geq 10$.

a. Det. dacă există un n-ciclu $\sigma \in S_n$ a.î. $\sigma^k = \tau$ pt. un $k \in \mathbb{Z}$.

b. $\tau = (1\,2)(3\,4\,5) \in S_n$, $n \geq 5$. (*) Aceeași cerință.

Rez: σ n-ciclu

σ^k:
- $k \mid n \to \sigma^k$ produs de k $\frac{n}{k}$-cicli
- $(k, n) = 1 \to \sigma^k$ n-ciclu
- $(k, n) = d > 1 \to \sigma^k = (\sigma^d)^{k_1} \to$ produs de d $\frac{n}{d}$-cicli

a. $\sigma^k = \tau = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)$

produs de 5 2-cicli

$(k, n) = 5$, $\frac{n}{5} = 2 \Rightarrow n = 10$, $k = 5$

O sol. este $\sigma = (1\;3\;5\;7\;9\;2\;4\;6\;8\;10)$

Nu este unică.

$\sigma^5 = \tau$ în S_{10}. Câte sol. sunt? $\underbrace{4!}_{\text{ordinea transp.}} \cdot \underbrace{2^4}_{(i\,j) \text{ sau } (j\,i)}$

Ex. 5: Rez. ecuatia $\tau^2 = \sigma$, unde:

a. $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11) \in S_{11}$

b. $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10) \in S_{10}$

Rez: a. $sgn(\sigma) = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 \cdot (-1) = -1$ nu avem sol.

b. $sgn(\sigma) = 1$.

$\tau^2 = \sigma$, $\tau = c_1 \dots c_k$ desc. în cicli disj.

$ord(c_i) = l_i$

$\tau^2 = c_1^2 \dots c_k^2$

$2 | l_i \rightarrow c_i^2$ este prod. de 2 $l_i/2$ - cicli

$2 \nmid l_i \rightarrow c_i^2$ este l_i - ciclu

$\sigma = (1\ \underbrace{2)(3}_{c_1^2}\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)$

c_1^2, c_1 4-ciclu

Avem următ. cazuri:

I. $\tau = c_1 \cdot c_2$, c_1 4-ciclu, c_2 - 6-ciclu

II. $\tau = c_1 \cdot c_3 \cdot c_4$, c_1 4-ciclu, c_3, c_4 3-cicli

$c_1^2 = (1\ 2)(3\ 4) \rightarrow c_1 = (1\ 3\ 2\ 4)$ sau $(1\ 4\ 2\ 3)$

$c_2^2 = (5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)$

$c_2 = (5\ 8\ 6\ 9\ 7\ 10)$ sau $(5\ 9\ 6\ 10\ 7\ 8)$ sau $(5\ 10\ 6\ 8\ 7\ 9)$

$c_3^2 = (5\ 6\ 7) \Rightarrow c_3 = (5\ 7\ 6)$

$c_4^2 = (8\ 9\ 10) \Rightarrow c_4 = (8\ 10\ 9)$

I. $2 \cdot 3 = 6$ sol. II. 2 sol.

Algoritmul lui Euclid.

$a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = \underline{\underline{d}}$, $\underline{d = ma + nb}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Aplicație: $(a, b) = 1$, $1 = ma + nb$, $\hat{m}$ este inversul lui $\hat{a}$ modulo b.

$(576, 385)$ – Temă.

Exemplu: $(576, 342) = 18$ TÎR.

$576 = 342 \cdot 1 + 234$

$342 = 234 \cdot 1 + 108$

$234 = 108 \cdot 2 + 18$ $(576, 342) = 18$

$108 = 18 \cdot 6$ rest 0

$18 = 234 - 108 \cdot 2$

$= 234 - (342 - 234 \cdot 1) \cdot 2$

$= 234 \cdot 3 - 342 \cdot 2$

$= (576 - 342) \cdot 3 - 342 \cdot 2 = 576 \cdot 3 - 342 \cdot 5$