Seminar 7 – 15.11.2021

Ex. 1: Pe $\mathbb{C}$ se def. rel. de echiv $z \sim w \iff z - w \in \mathbb{R}$.
Det. $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $f : \mathbb{C}/_\sim \to \mathbb{C}$, $f(\hat{z}) = a z \cdot \bar{z} + bz + c\bar{z}$
să fie bine def.

Rez: $\hat{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid z - w \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{C} \mid Im(z) = Im(w)\}$

f bine def $\iff \forall z, w \in \mathbb{C}$ a.î. $\hat{z} = \hat{w}$ $(z \sim w)$
avem $f(\hat{z}) = f(\hat{w})$.

Fie $z, w \in \mathbb{C}$ a.î. $z \sim w$, $z = x_1 + y_1 i$, $w = x_2 + y_2 i$.
$z \sim w \Rightarrow y_1 = y_2 = y$.
$z = x_1 + yi$, $w = x_2 + yi$.
$f(\hat{z}) = a \cdot z \cdot \bar{z} + bz + c\bar{z} = a(x_1^2 + y^2) + b(x_1 + yi) +$
$+ c(x_1 - yi) = (ax_1^2 + ay^2 + bx_1 + cx_1) + (b - c)yi$
$f(\hat{w}) = a w \bar{w} + bw + c\bar{w} = (ax_2^2 + ay^2 + bx_2 + cx_2) +$
$+ (b - c)yi$.

f bine def $\iff f(\hat{z}) = f(\hat{w})$

$$(ax_1^2 + ay^2 + bx_1 + cx_1) + (b-c)yi =$$

$$= (ax_2^2 + ay^2 + bx_2 + cx_2) + (b-c)yi$$

$$\iff ax_1^2 + \cancel{ay^2} + bx_1 + cx_1 = ax_2^2 + \cancel{ay^2} + bx_2 + cx_2$$

$$ax_1^2 + (b+c)x_1 - ax_2^2 - (b+c)x_2 = 0$$

$$a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (b+c)(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b + c\right] = 0 \quad \forall x_1, x_2$$

$$a(x_1 + x_2) + b + c = 0 \quad \forall x_1, x_2$$

$a = 0$ și $b + c = 0 \Rightarrow c = -b$.

$$\Rightarrow f(\hat{z}) = bz - b\bar{z} = b(z - \bar{z}) = b \cdot 2\,\mathrm{Im}(z)$$

Legi de compoziție. Grupuri

Ex. 2: Pe $\mathbb{R}$ se def. legea de comp: $x * y = x + 2y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se studieze proprietățile legii. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dat prin $a_1 = a$, $a_n = a * a_{n-1}$. Calculați a_2, a_3 și a_n.

Rez: $x * y = x + 2y$.

1. Comutativitate 2. Asociativitate 3. Elem. neutru

① Nu $x + 2y \neq y + 2x$ (în general)

② $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$\left.\begin{array}{l} (x * y) * z = (x + 2y) * z = x + 2y + 2z \\ x * (y * z) = x * (y + 2z) = x + 2y + 4z \end{array}\right\} \Rightarrow * \text{ Nu este asoc.}$$

③ $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ll} x + 2e = x \quad \forall x \in \mathbb{R} & e = 0 \\ e + 2x = x & 2x = x, \forall x \quad \text{Fals.} \end{array}\right\} \Rightarrow *^{4} \text{ Nu are elem. neutru}$$

$a \in \mathbb{R}$, $a_1 = a$, $a_n = a * a_{n-1}$.

$a_2 = a * a = a + 2a = 3a$

$a_3 = a * a_2 = a + 6a = 7a$

$a_4 = a * a_3 = 15a$

$a_n = (2^n - 1)a$ – dem. prin ind.

$k \to k+1$

$a_k = (2^k - 1)a$

$a_{k+1} = a * a_k = a + 2(2^k - 1)a$

$= a + 2^{k+1}a - 2a = (2^{k+1} - 1)a$ ok.

Ex. 3: Pe $\mathbb{R}$ def. legea de comp. $x * y = x + y - xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Studiați proprietățile legii „$*$".

Rez:

$x * y = x + y - xy + 1 - 1$
$= x(1-y) - (1-y) + 1$
$= (1-y)(x-1) + 1 = 1 - (1-x)(1-y)$

Comutativitate: OK.

Asociat: $(x * y) * z = x * (y * z)$ $\forall x, y, z$.

$(x*y) * z = (1 - (1-x)(1-y)) * z =$
$= 1 - (1-x)(1-y)(1-z)$

$x * (y * z) = x * (1 - (1-y)(1-z)) =$
$= 1 - (1-x)(1-y)(1-z)$

$\Rightarrow$ „$*$" asoc.

Elem. neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$

$x * e = x$

$1 - (1-x)(1-e) = x \quad \forall x$

$1 - x = (1-x)(1-e) \quad \forall x$

$\Rightarrow 1 - e = 1 \quad \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R}$

Elem. simetrizabile: $x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}$ a.î. $x * y = y * x = e$

$x * y = 0 \Rightarrow 1 - (1-x)(1-y) = 0 \Rightarrow (1-x)(1-y) = 1$

$\Rightarrow 1 - y = \frac{1}{1-x} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1}, \; x \neq 1.$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \exists y = \frac{x}{x-1}$ a.î. $x * y = y * x = 0.$

$x = 1 \Rightarrow x * y = 1 * y = 1 - (1-1)(1-y) = 1, \forall y \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, *)$ monoid comutativ.

Întrebare: $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ este grup abelian?

verif. parte stabilă.

Ex. 4 : Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definim legile de comp :

$x * y = (m+n, ab)$, unde $x = (m, a)$, $y = (n, b)$.

$x \circ y = (mn, a+b)$

a. Să se studieze propr. celor 2 legi

b. Să se studieze distributivitatea legii „$\circ$" față de „$*$"

Rez.:

a. Com. :

$x * y = (m+n, ab) = (n+m, ba) = y * x.$

$x \circ y = (mn, a+b) = (nm, b+a) = y \circ x.$

Asoc : $x, y, z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $z = (p, c)$.

$(x * y) * z = (m+n, ab) * (p, c) = (m+n+p, abc)$

$x * (y * z) = (m, a) * (n+p, bc) = (m+n+p, abc)$

Analog „$\circ$".

Elem. neutru : $\exists e = (m, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ a.î.

$x * e = e * x = x$ + com $\Rightarrow x * e = x$

$(m+n, ab) = (m, a) \Rightarrow e = (0, 1)$

$\exists\ f = (m, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ a.î. $x \circ f = f \circ x = x$ + com.

$\Rightarrow x \circ f = x \Rightarrow (mm, a+b) = (m, a) \Rightarrow f = (1, 0)$.

Elem. simetrizabile :

" $*$ ": $x * y = (0, 1)$, $x = (m, a)$ fixat

$(m+m, ab) = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} m+m = 0 \Rightarrow m = -m \in \mathbb{Z} \\ ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$a \neq 0$.

" $*$ " $x = (m, a)$ cu $a \neq 0$.

$x^{-1} = (-m, \frac{1}{a})$

" $\circ$ " $x \circ y = (1, 0)$

$(mm, a+b) = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} mm = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \\ a+b = 0 \Rightarrow b = -a \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

$m = \frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \pm 1$.

$x = (\pm 1, a)$, $x^{-1} = (\pm 1, -a)$.

Distributivitate „$\circ$" față de „$*$"

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$$

$$x \circ (y * z) = (m, a) \circ (m+p, bc) = (m(m+p), a+bc)$$

$$(x \circ y) * (x \circ z) = (mm, a+b) * (mp, a+c)$$

$$= (mm+mp, (a+b)(a+c))$$

Nu este distributivă

Ex. 5: Pe $\mathbb{R}$ def. legile de comp:

$x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ și $x \circ y = x+y+1$.

a. Să se studieze proprietățile legilor

b. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases}$

Rez: $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, $x \circ y = x+y+1$.

a. Com.: Evident.

Asociativitate:

$(x*y)*z = x*(y*z)$

$\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3+z^3} = \sqrt[3]{x^3+\left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3}$

$\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$

$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$

$(x+y+1)+z+1 = x+(y+z+1)+1$

$x+y+z+2 = x+y+z+2$.

Elem. neutru:

$x*e = e*x = x \quad \forall x$

$\left.\sqrt[3]{x^3+e^3} = x \quad \right)^3$

$x^3+e^3 = x^3 \quad \forall x$

$\Rightarrow e^3=0 \Rightarrow e=0$.

$x\circ f = f\circ x = x \quad \forall x$

$x+f+1 = x$

$\Rightarrow f+1=0 \Rightarrow f=-1$.

Elem. simetrizabile:

$x*y = y*x = 0$

$\sqrt[3]{x^3+y^3} = 0 \Rightarrow x^3+y^3=0$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{-x^3} = -x$

$x\circ y = y\circ x = -1$

$x+y+1 = -1$

$\Rightarrow y = -x-2 \in R$

$(\mathbb{R}, *)$, $(\mathbb{R}, \circ)$ grupuri abeliene

b. $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+y^3} = -1 \quad /^3 \\ x+y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3 = -1 \\ x+y = -1 \end{cases}$

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = (-1)(x^2-xy+y^2)$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1-2xy$

$x^3+y^3 = (-1)(1-2xy-xy) = 3xy-1.$

$\begin{cases} 3xy-1 = -1 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 = P \\ x+y = -1 = S \end{cases} \Rightarrow t^2 - St + P = 0$

x, y răd.

$t^2 + t = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$