Technical University of Crete

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
ΤΗΛ302

Εργαστήριο 2

Authors:
Ισίδωρος Πατεράκης AM: 2017030091
Μαρίνου Ιωάννα AM: 2016030143
Σπυριδάκης Χρήστος AM: 2014030022

LAB30242846

November 12, 2019

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ

Άσκηση 1

Αρχικά το σύστημα το οποίο μας δίνεται απεικονίζεται παρακάτω, ενώ ξέρουμε ότι είναι ένα αιτιατό, γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση. Επίσης γνωρίζουμε ότι για τη συχνότητα δειγματοληψίας ισχύει ότι $f_s = 1Hz$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$ και το $G_2(z) = \frac{1}{z+0.2}$.

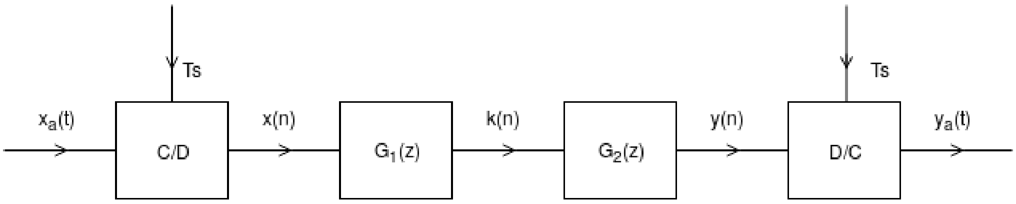

Image 1.1: Given system

a)

Για το πρώτο μέρος σχετικά με εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} \tag{1}$$

Μη γνωρίζοντας άμεσα ούτε το $Y(z)$ ούτε το $X(z)$ πρέπει να βρούμε μέσα από τα δεδομένα ένα τρόπο να τα υπολογίσουμε. Ξέρουμε όμως ότι συνελίξεις στο πεδίο του χρόνου είναι πολλαπλασιασμοί στο πεδίο Z οπότε βλέπουμε ότι ισχύει:

$$X(z) * G_1(z) = K(z) \Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{K(z)}{G_1(z)}} \tag{2}$$

$$K(z) * G_2(z) = Y(z) \Rightarrow \boxed{Y(z) = K(z)G_2(z)} \tag{3}$$

Από τις εξισώσεις (1) , (2) και (3) βλέπουμε ότι για την συνάρτηση μεταφοράς ισχύει:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{K(z)G_2(z)}{\frac{K(z)}{G_1(z)}} \\ &= \boxed{G_1(z)G_2(z)} \end{aligned} \tag{4}$$

Το $G_2(z)$ μας δίνεται, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε και το $G_1(z)$. Πρώτο βήμα είναι να δημιουργούμε τον Z-Transform του k(n).

$$K(z) = 0.9z^{-1}K(Z) + 0.2X(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{K(z) = \frac{0.2X(z)}{1 - 0.9z^{-1}}} \tag{5}$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι στην (5) εμφανίζεται το $X(z)$ συνεπώς από την (5) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\boxed{G_1(z) = \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}}} \tag{6}$$

Πλέον έχουμε ότι χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή το $G_1(z)$ και το $G_2(z)$ άρα:

$$\begin{aligned} H(z) &= G_1(z)G_2(z) \\ &= \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}} * \frac{1}{z+0.2} \\ &= \frac{0.2}{(1-0.9z^{-1})(z+0.2)} \\ &= \frac{0.2}{z-0.9+0.2-0.18z^{-1}} \\ &= \frac{0.2}{z-0.7-0.18z^{-1}} \\ &= \boxed{\frac{0.2z^{-1}}{1-0.7z^{-1}-0.18z^{-2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

Όσον αφορά την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.2z^{-1}}{1-0.7z^{-1}-0.18z^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) - 0.7z^{-1}Y(z) - 0.18z^{-2}Y(z) = 0.2z^{-1}X(z)$$

Άρα από τον αντίθετο μετασχηματισμό Z καταλήγουμε ότι:

$$y(n) - 0.7y(n-1) - 0.18y(n-2) = 0.2x(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(n) = 0.7y(n-1) + 0.18y(n-2) + 0.2x(n-1)} \tag{8}$$

b)

Αφού είχαμε βρει την συνάρτηση μεταφοράς, μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα πόλων - μηδενικών με την χρήση του MATLAB.

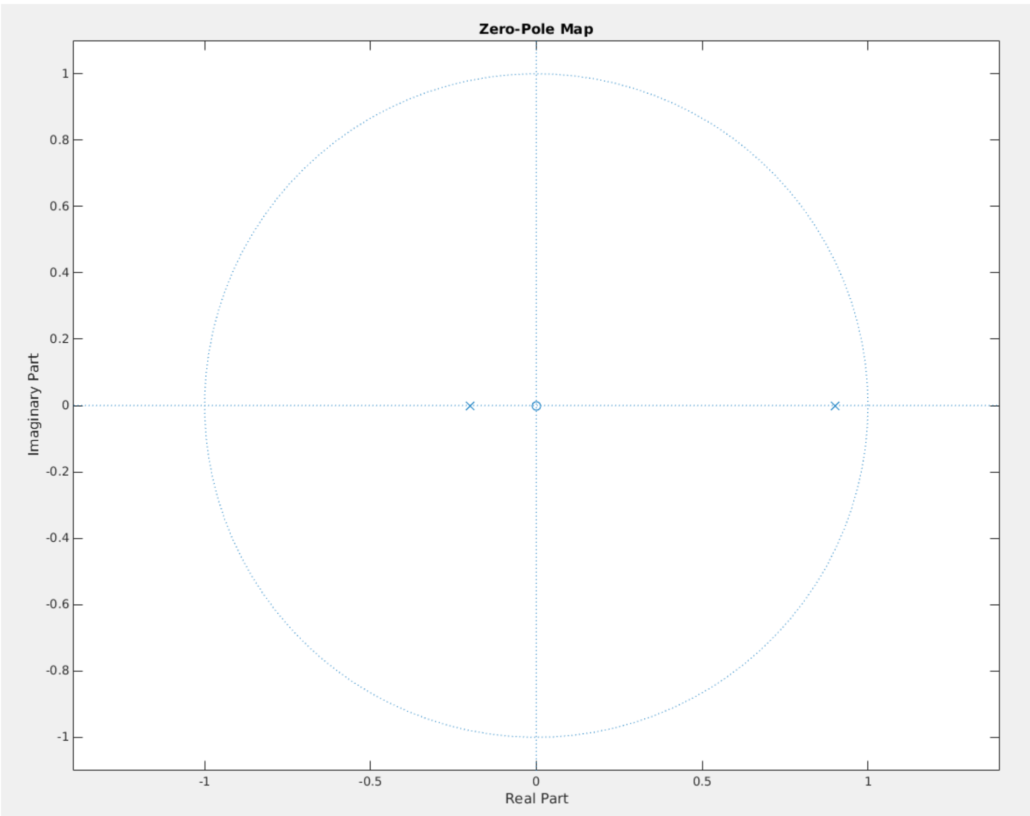

Image 1.2: Pole-Zero map on Matlab

c)

Για να είναι BIBO ευσταθές το σύστημα, όπως έχουμε δει και από την θεωρία πρέπει να ισχύει ότι ο ROC (Region of convergence) περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$). Επίσης ξέρουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό πράγμα που σημαίνει ότι είναι σίγουρα δεξιόπλευρο. Άρα η περιοχή σύγκλισης του ξεκινάει από ένα κύκλο και εκτείνεται προς το $\pm\infty$.
Συνεπώς $|z| > |r_1|$, με την χρήση του σχεδιάγραμμα μηδενικών - πόλων του παραπάνω ερωτήματος βλέπουμε ότι η τιμή του $r_1 = 0.9$ πράγμα που σημαίνει ότι περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος άρα το σύστημα είναι BIBO ευσταθές.

d)

f)

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 2$$

a)

Η θεωρητική ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς είναι η εξής:
Βρίσκονται οι πόλοι λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση. Σπάει ο αριθμητής και βρίσκονται οι συντελεστές του μέσω της μεθόδου χρήσης των A-B.

$$1 - 2.5z^{-1} + z^{-2} = 0$$
$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2.5)^2 - 4 * 1 * 1 = 6.25 - 4 = 2.25$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2.25} = 1.5$$
$$p_{1,2} = \frac{2.5 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2} \Rightarrow p_1 = 2 \quad \text{and} \quad p_2 = 0.5$$

$$\begin{aligned}
\frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} &= \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1 - p_2 z^{-1}} \\
&= \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.5z^{-1}} \\
&= \frac{A(1 - 0.5z^{-1}) + B(1 - 2z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \Leftrightarrow \\
& A(1 - 0.5z^{-1}) + B(1 - 2z^{-1}) = 4 - 3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
& A - 0.5Az^{-1} + B - 2Bz^{-1} = 4 - 3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
& A + B - (0.5A + 2B) = 4 - 3.5z^{-1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$A + B = 4 \Leftrightarrow A = 4 - B$$
$$0.5A + 2B = 3.5 \Leftrightarrow A + 4B = 7 \Leftrightarrow 4 - B + 4B = 7 \Leftrightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1 \quad \text{and} \quad A = 3$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

```
roots =

     3
     1


poles =

    2.0000
    0.5000


k =

     0

    3        1
- ----- - -------
  2        1
  - - 1   --- - 1
  z       2 z
```

Image 2.1: Matlab result

b)

Το σύστημα είναι αιτιατό για $|z| > 2$. Για δεξιόπλευρο όρο ισχύει η ιδιότητα:

$$\frac{K_i * Z}{Z - A_i} \Longleftrightarrow K_i * (A_i^n) * u(n)$$

Οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$3 * (2^n) * u(n) + (0.5^n) u(n)$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

```
Hz =

3*2^n + (1/2)^n
```

Image 2.2: Matlab result