Technical University of Crete

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΤΗΛ302

Εργαστήριο 2

Authors:
Ισίδωρος Πατεράκης AM: 2017030091
Μαρίνου Ιωάννα AM: 2016030143
Σπυριδάκης Χρήστος AM: 2014030022

LAB30242846

November 19, 2019

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ

Άσκηση 1

Αρχικά το σύστημα το οποίο μας δίνεται απεικονίζεται παρακάτω, ενώ ξέρουμε ότι είναι ένα αιτιατό, γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση. Επίσης γνωρίζουμε ότι για τη συχνότητα δειγματοληψίας ισχύει ότι $f_s = 1Hz$. Τέλος, αναφέρεται ότι το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$ και το $G_2(z) = \frac{1}{z+0.2}$.

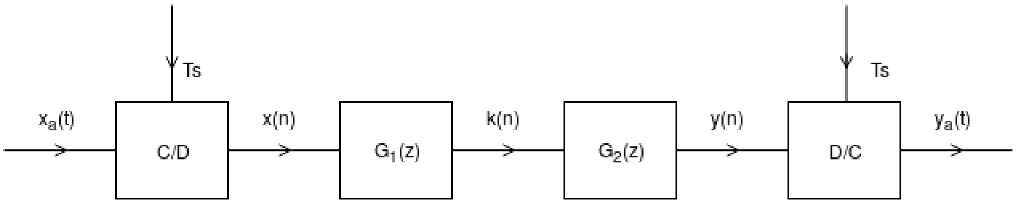

Figure 1: Given system

a)

Για το πρώτο μέρος σχετικά με την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς σε Z-Transform γνωρίζουμε ότι ένα LTI system μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τη κρουστική απόκριση σε Z-Transform ή εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ως το πηλίκο εξόδου προς εισόδου του, άρα για όλου του συστήματος που ζητείται ισχύει:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} \tag{1}$$

Μη γνωρίζοντας άμεσα ούτε το $Y(z)$ ούτε το $X(z)$ πρέπει να βρούμε μέσα από τα δεδομένα ένα τρόπο να τα υπολογίσουμε. Ξέρουμε όμως ότι συνελίξεις στο πεδίο του χρόνου είναι πολλαπλασιασμοί στο πεδίο Z οπότε βλέπουμε ότι:

$$k(n) = x(n) \circledast g_1(n) \xrightarrow{Z} X(z)G_1(z) = K(z) \Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{K(z)}{G_1(z)}} \tag{2}$$

$$y(n) = k(n) \circledast g_2(n) \xrightarrow{Z} K(z)G_2(z) = Y(z) \Rightarrow \boxed{Y(z) = K(z)G_2(z)} \tag{3}$$

Από τις εξισώσεις (1) , (2) και (3) καταλήγουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ισούται:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{K(z)G_2(z)}{\frac{K(z)}{G_1(z)}} \\ &= \boxed{G_1(z)G_2(z)} \end{aligned} \tag{4}$$

Το $G_2(z)$ μας δίνεται, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε και το $G_1(z)$. Ξέρουμε ότι το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$ άρα πρώτο βήμα είναι να δημιουργούμε τον Z-Transform του k(n). Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο.

$$K(z) = 0.9z^{-1}K(z) + 0.2X(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{K(z) = \frac{0.2X(z)}{1 - 0.9z^{-1}}} \tag{5}$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι στην (5) εμφανίζεται το $X(z)$ συνεπώς από την (5) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\boxed{G_1(z) = \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}}} \tag{6}$$

Πλέον έχουμε ότι χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή το $G_1(z)$ και το $G_2(z)$ άρα:

$$\begin{aligned} H(z) &= G_1(z)G_2(z) \\ &= \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}} * \frac{1}{z + 0.2} \\ &= \frac{0.2}{(1 - 0.9z^{-1})(z + 0.2)} \\ &= \frac{0.2}{z - 0.9 + 0.2 - 0.18z^{-1}} \\ &= \frac{0.2}{z - 0.7 - 0.18z^{-1}} \\ &= \boxed{\frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

Όσον αφορά την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) - 0.7z^{-1}Y(z) - 0.18z^{-2}Y(z) = 0.2z^{-1}X(z)$$

Έπειτα υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z.

$$y(n) - 0.7y(n-1) - 0.18y(n-2) = 0.2x(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(n) = 0.7y(n-1) + 0.18y(n-2) + 0.2x(n-1)} \tag{8}$$

b)

Αφού είχαμε βρει την συνάρτηση μεταφοράς, μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα πόλων - μηδενικών με την βοήθεια του MATLAB και της συνάρτησης zplane στην οποία θα δίναμε ορίσματα τους συντελεστής των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή προσέχοντας να είναι συσχετισμένοι οι βαθμοί των πολυωνύμων.

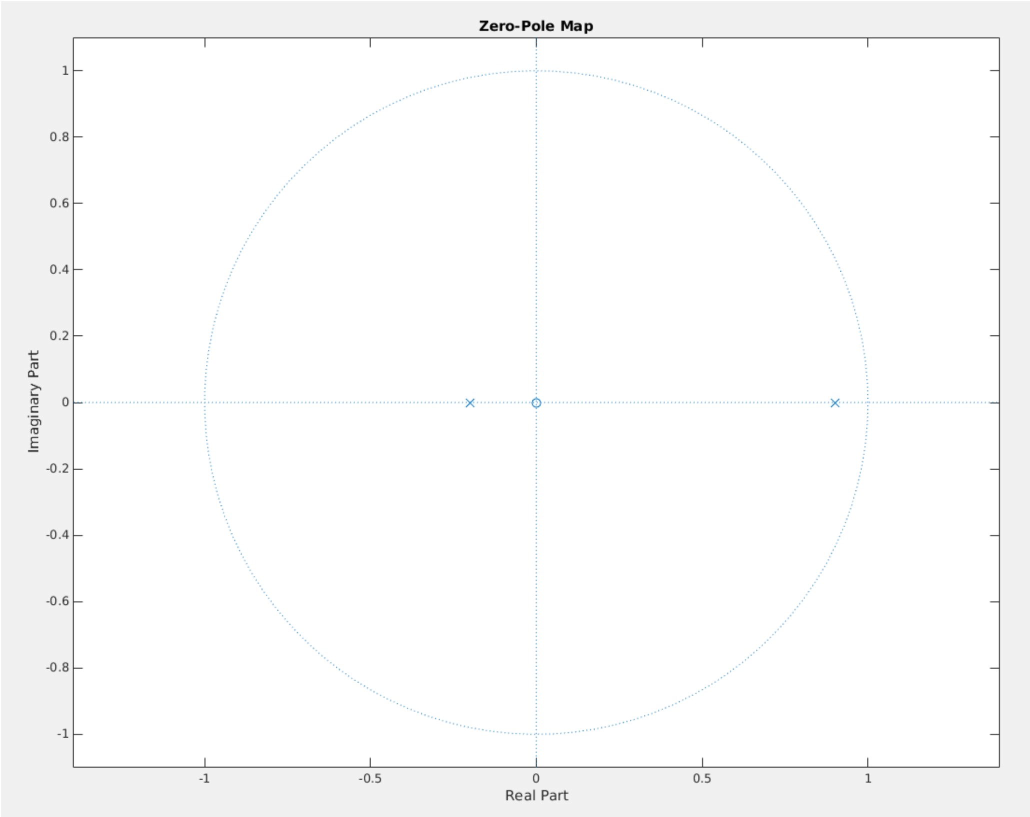

Figure 2: Pole-Zero map on Matlab

c)

Για να είναι BIBO ευσταθές το σύστημα, όπως έχουμε δει και από την θεωρία πρέπει να ισχύει ότι ο ROC (Region of convergence) περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$). Γενικά ξέρουμε ότι η περιοχή σύγκλισης ορίζεται μόνο από τους πόλους. Επίσης ξέρουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό πράγμα που σημαίνει ότι είναι σίγουρα δεξιόπλευρο. Άρα η περιοχή σύγκλισης του ξεκινάει από ένα κύκλο και εκτείνεται προς το $\pm\infty$ (εξωτερική πλευρά κύκλου με ακτίνα $|r_1|$).
Από τα παραπάνω η περιοχή σύγκλισης ικανοποιεί την εξής σχέση $|z| > |r_1|$, με την χρήση του σχεδιαγράμματος μηδενικών - πόλων του β) ερωτήματος βλέπουμε ότι η τιμή του $r_1 = 0.9$ καθώς γνωρίζουμε ότι δεν μπορεί να περιέχονται πόλοι στη περιοχή σύγκλισης, συνεπώς περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος σε αυτή, άρα το σύστημα είναι BIBO ευσταθές.

d)

Παρατηρούμε ότι αν βάλουμε το διάστημα της συχνότητας ως τρίτο όρισμα στην freqz, παίρνουμε την συχνότητα στο διάστημα [-π, π] (δηλαδή το διάστημα που εισάγαμε) ενώ αλλιώς στο το [0, π]. Η απόκριση επηρεάζεται απ' τους πόλους ανάλογα με την απόστασή τους και την γωνία τους από το σημείο της συχνότητας στον μοναδιαίο κύκλο. Το πλάτος αυξάνεται όταν αυξάνεται η απόσταση ενός μηδενικού με το σημείο της συχνότητας και η φάση όταν αυξάνεται η γωνία. Ενώ με τους πόλους συμβαίνει το αντίθετο.

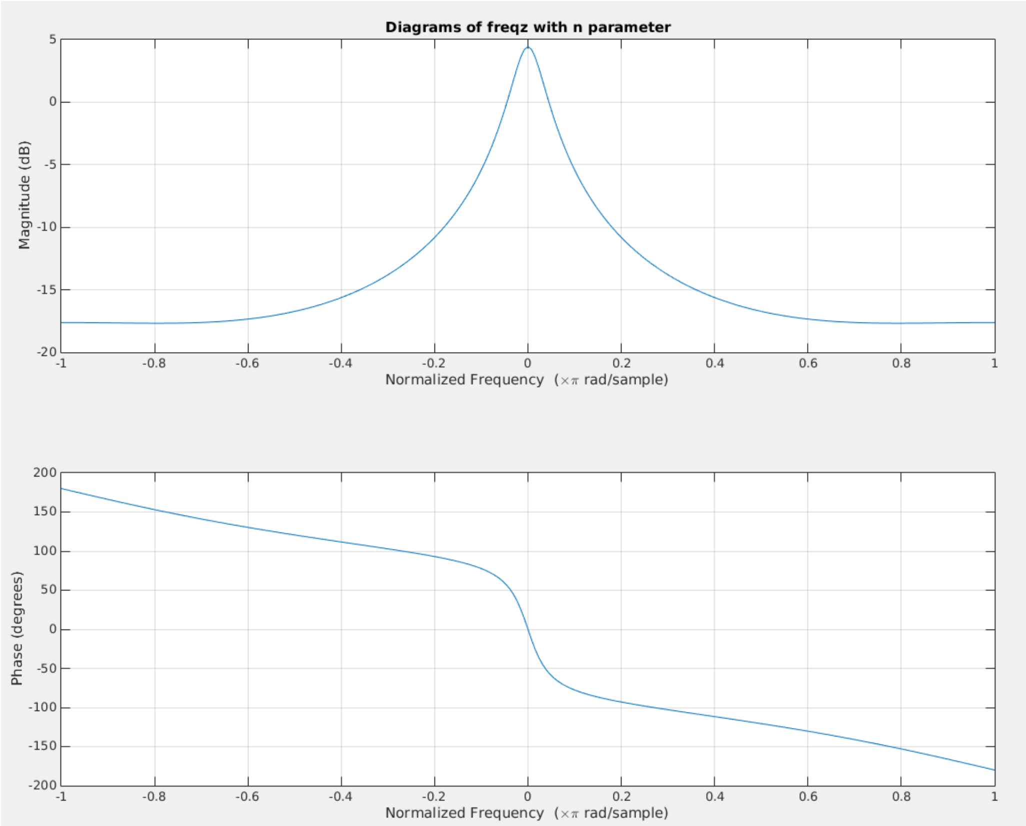

Figure 3: Matlab result - freqz μαζί με το τρίτο όρισμα

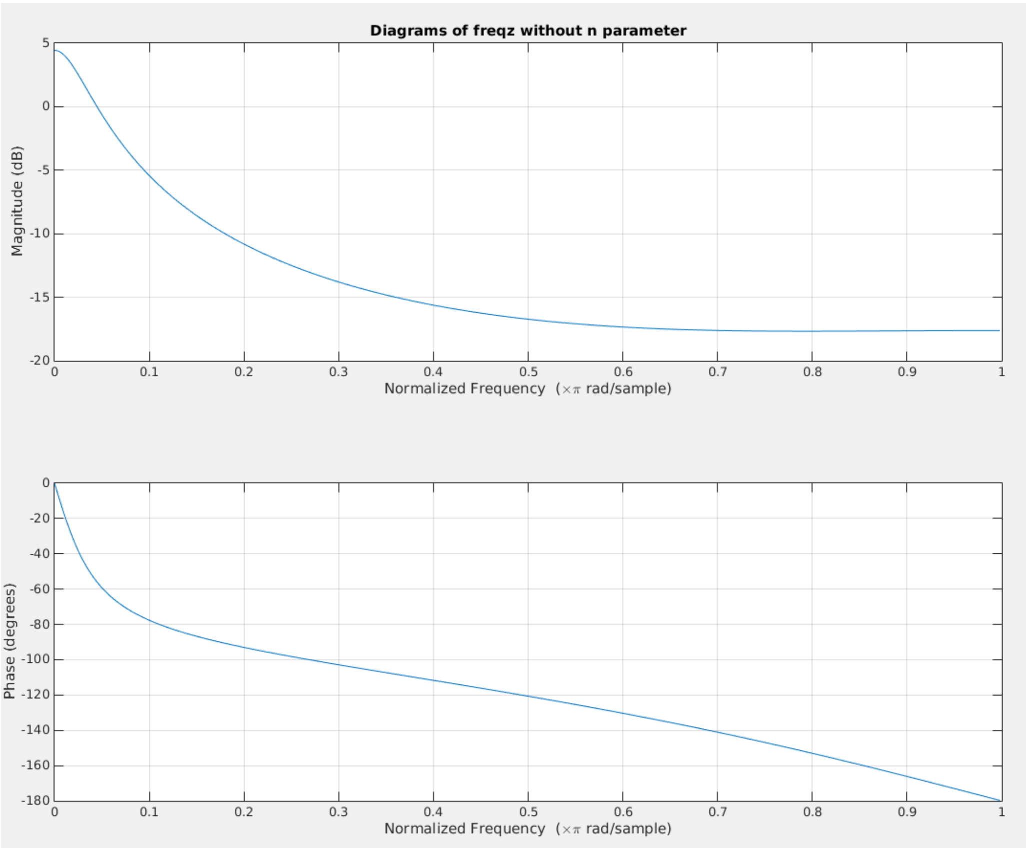

Figure 4: Matlab result - freqz χωρίς το τρίτο όρισμα

e)

Προσθέτοντας τον πόλο παρατηρούμε ότι το σύστημα χάνει την ευστάθεια του (οριακή συνθήκη αστάθειας $|z| = 1$). Περιμένουμε να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς απειρίζεται, όταν η συχνότητα πλησιάζει το μηδέν, το μέτρο πλησιάζει το άπειρο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση του πλάτους έχει μετατοπιστεί στον κατακόρυφο άξονα κατά 15 (περίπου) dB. Με τον επιπλέον πόλο έχουμε:

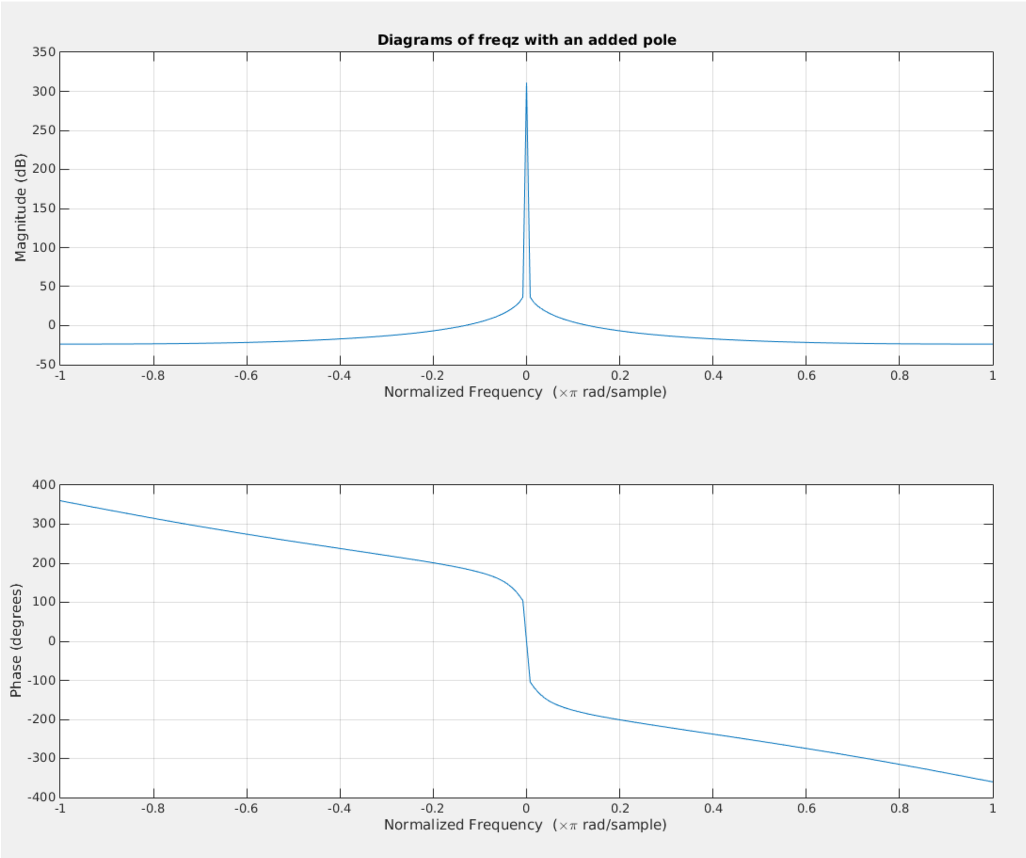

Figure 5: Matlab result

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 2$$

a)

Η θεωρητική ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς είναι η εξής:
Βρίσκονται οι πόλοι λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση. Σπάει ο αριθμητής και βρίσκονται οι συντελεστές του μέσω της μεθόδου χρήσης των A-B.

$$1 - 2.5z^{-1} + z^{-2} = 0$$
$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2.5)^2 - 4 * 1 * 1 = 6.25 - 4 = 2.25$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2.25} = 1.5$$
$$p_{1,2} = \frac{2.5 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2} \Rightarrow p_1 = 2 \quad \text{and} \quad p_2 = 0.5$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} &= \frac{A}{1-p_1z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2z^{-1}} \\
&= \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-0.5z^{-1}} \\
&= \frac{A(1-0.5z^{-1})+B(1-2z^{-1})}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \Leftrightarrow \\
& A(1-0.5z^{-1})+B(1-2z^{-1}) = 4-3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
& A-0.5Az^{-1}+B-2Bz^{-1} = 4-3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
& A+B-(0.5A+2B) = 4-3.5z^{-1}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς:

$$A+B=4 \Leftrightarrow A=4-B$$

$$0.5A+2B=3.5 \Leftrightarrow A+4B=7 \Leftrightarrow 4-B+4B=7 \Leftrightarrow 3B=3 \Rightarrow B=1 \quad \text{and} \quad A=3$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

```
zero_roots =

     3
     1


pole_roots =

    2.0000
    0.5000


k =

     0

    3         1
- ----- - -------
  2         1
  - - 1   --- - 1
  z       2 z
```

Figure 6: Matlab result

b)

Το σύστημα είναι αιτιατό για $|z|>2$. Για δεξιόπλευρο όρο ισχύει η ιδιότητα:

$$\frac{k_iz}{z-a_i} \Leftrightarrow k_ia_i^nu(n)$$

Οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$3*2^nu(n)+0.5^nu(n)$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

```
Hz =

3*2^n + (1/2)^n
```

Figure 7: Matlab result