Министерство образования и науки Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра ТПИ

Лабораторная работа №3

по дисциплине «Численные методы»

**Численное интегрирование**

Факультет: ФПМИ

Группа: ПМИ-91

Студенты: Козловский Т.А.

Рыжков Н.В.

Преподаватель: Марков С.И.

Новосибирск

2021

1. Цель работы.

Изучить и реализовать алгоритмы построения квадратурных формул интерполяционного типа и квадратур Гаусса.

2. Ход работы

**1. Разработать класс, реализующий схемы численного интегрирования. Среди реализованных алгоритмов должны быть схема средних прямоугольников, схема семейства Ньютона-Котеса и две квадратурные формулы Гаусса (с нечётным и чётным числом узлов интегрирования).**

Реализовано 3 класса, для метода прямоугольников, для метода трапеций и для метода Гаусса(1-3).

Вычисление интеграла для каждого из метода осуществляется через метод Integral();

**2. Задайте отрезок и постройте две вложенные сетки с равномерным шагом *h* и *h*/2. Для каждой из четырёх реализованных схем численного интегрирования выполните оценку порядка аппроксимации относительно шага равномерного сеточного разбиения. В качестве подынтегральной функции используйте любую неполиномиальную функцию.**

Для оценки порядка была взята функция exp(x)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Гаусс-1 | Гаусс-2 | Гаусс-3 | Метод прямоугольников | Метод трапеций |
| Δ(h) | 6.956056e-02 | 3.854505e-04 | 8.240865e-07 | 6.956056e-02 | 1.408591e-01 |
| Δ(h/2) | 1.776911e-02 | 2.466341e-05 | 1.320501e-08 | 1.776911e-02 | 3.564926e-02 |
|  | 3.91 | 15.63 | 62.4 | 3.91 | 3.95 |

1. **Схема Гаусс-1**

Погрешность аппроксимации уменьшается приблизительно в 4 раза, это значит, что данная схема имеет 2 порядок аппроксимации.

1. **Схема Гаусс-2**

Погрешность аппроксимации уменьшается приблизительно в 16 раза, это значит, что данная схема имеет 4 порядок аппроксимации.

1. **Схема Гаусс-3**

Погрешность аппроксимации уменьшается приблизительно в 64 раза, это значит, что данная схема имеет 6 порядок аппроксимации.

1. **Метод прямоугольников и метод трапеций**  
   У этих двух методов примерно равное уменьшение погрешности аппроксимации в 4 раза, что даёт 2 порядок аппроксимации у этих методов.

**3. Пусть *m* – порядок точности квадратурной формулы. Задайте отрезок и постройте три вложенные сетки с равномерным**

**шагом *h*, *h*/2 и *h*/4. Заполните следующую таблицу**

Для исследования была использована квадратурная формула Гаусс-2, порядок точности которой - 3, то есть является точной для полиномов до 3 степени включительно

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | h | I\* - Ih |  |  | IR | I\*-IR |
| m - 1 | 2x2 | 1 | 0.000000e+00 | - | 0 | 6.666667e-01 | 0.000000e+00 |
| 0.5 | 0.000000e+00 | - | 0 | 6.666667e-01 | 0.000000e+00 |
| 0.25 | 0.000000e+00 | - | 0 | 6.666667e-01 | 0.000000e+00 |
| m | 6x3 | 1 | 0.000000e+00 | - | 0 | 1.500000e+00 | 0.000000e+00 |
| 0.5 | 0.000000e+00 | - | 0 | 1.500000e+00 | 0.000000e+00 |
| 0.25 | 0.000000e+00 | - | 0 | 1.500000e+00 | 0.000000e+00 |
| m + 1 | 12x4 | 1 | 6.666667e-02 | 1.600000e+01 | 2.083333e-02 | 2.416667e+00 | -1.666667e-02 |
| 0.5 | 4.166667e-03 | 1.600000e+01 | 1.302083e-03 | 2.401042e+00 | -1.041667e-03 |
| 0.25 | 2.604167e-04 | 1.600000e+01 | 8.138021e-05 | 2.400065e+00 | -6.510417e-05 |

1. **Выполните исследования из пункта 3 для неполиномиальной функции x\*sin(10000\*x),x∈[0,1]. Исследовать влияние измельчения шага сетки к концам отрезка [0,1] на относительную и абсолютную погрешности численного интегрирования. Сделать выводы.**

**Сделать выводы.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| f(x) | h | I\* - Ih |  |  | IR | I\*-IR |
| x\*sin(10000\*x) | 1 | 4.762878e-01 | 8.304190e+00 | -1.396442e-01 | -8.219390e-02 | 8.228912e-02 |
| 0.5 | 5.735512e-02 | 2.300966e-01 | -1.022068e-01 | -3.513770e-01 | 3.514722e-01 |
| 0.25 | 2.492654e-01 | 7.286543e-01 | -3.094155e-02 | -3.729364e-01 | 3.730316e-01 |

Точное значение интеграла: 9.521248e-05

h = 1:

Вычисленное значение: 4.763831e-01

Абсолютная погрешность: 4.762878e-01

Относительная погрешность: 1.037145e+00

h = 0,5:

Вычисленное значение: 5.745034e-02

Абсолютная погрешность: 5.735512e-02

Относительная погрешность: 6.972537e+00

h = 0,25:

Вычисленное значение: -2.491702e-01

Абсолютная погрешность: 2.492654e-01

Относительная погрешность: 1.528474e+00

При измельчении шага, абсолютная погрешность уменьшается. Абсолютная и относительная погрешность при одном и том же шаге приблизительно равны.

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены и реализованы алгоритмы построения квадратурных формул интерполяционного типа и квадратур Гаусса.