空间直线与平面夹角在不同观测偏角的定量分析

大西北最后的温柔

一.引言

我们在研究三维立体几何时，往往会遇到这样的问题，比如一个倾斜的直线与平面的夹角的大小会随着我们观测它的位置变化而变化，为了更好的定向定量分析此类问题，发表该文章。

二.平面上的观测偏角与平面夹角偏角的关系

2.1.平面夹角（默认观测角）

定义：存在平面 β 和一条与 β 有交点的直线 l，设交点为 O，在平面 α 内，有一条直线垂直于 l 且叫 l 于点 O，在这条直线上观测到的 l 与 β 的夹角为 α，称为平面夹角。

2.2 观测零线

定义：在平面 β 内，存在一条与直线 l 垂直的直线，且交直线 l 与点 O，称这条直线叫直线 l 的观测零线，记作 r。

2.3 观测偏线

定义：在平面 β 内，存在与直线 l 相交的直线，称改直线为直线 l 的观测偏线，记作 r'。

注：观测偏线包含了观测零线，通常情况下可以说观测零线属于观测偏线，是观测偏线的一种特殊情况。

2.4 观测偏角

定义：当观测点在 β 内且不在直线 l 上时，设该点与 O 点的连线与直线 l 的夹角为 θ，θ∈(0,Π/2]，θ 成为直线 l 的观测偏角。

2.5 平面夹角偏角

定义：观测点观测到的直线 l 与平面 β 的夹角称为平面夹角偏角，记作 α'。

注：通常情况下可以说平面夹角属于平面夹角偏角，是平面夹角偏角的一种特殊情况。

2.6 五个推导结论

2.6.1 两个长度结论

如果存在点 A 在直线 l 上且能够确定唯一的 OA 长与位置，则有 OA=L，OA 映射在平面上的线段 OA'=L·cos α，在这里简记为 OA'=x，易证高 h=L·sin α。

如果存在 C 点在平面 β 上，且与 O 点确定了唯一的长度与位置关系，则线段 OC 与直线 r 的夹角为 θ，同理可知，过 O 点作射线 OQ，OQ⊂β，且 OQ 与 OA 的夹角为 θ，过 A'点向射线 OQ 作垂线 A'Q，故此确定了线段 OQ 的唯一长度，故此有 OQ=L · cos α · cos θ，简记作 OQ=Δx。

可得到：

$$\varDelta x = L \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta$$

如果存在 C 点在平面 β 上，且与 O 点确定了唯一的长度与位置关系，则线段 OC 与直线 r 的夹角为 θ。在 C 点观测到的 OA 称为 OA''，OA''=ΔL

可得到：

$$\varDelta L = L \cdot \sqrt{sin^2\alpha + cos^2\alpha \cdot cos^2\theta}$$

2.6.2 三个角度结论

如果存在 C 点在平面 β 上，且与 O 点确定了唯一的长度与位置关系，则线段 OC 与直线 r 的夹角为 θ。∠A''OQ=∠α'，可以得到三个∠α'的结论：

1. sin α'=$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{sin^2\alpha+cos^2\alpha \cdot cos^2\theta}}$
2. cos α'=$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\theta}{\sqrt{sin^2\alpha+cos^2\alpha \cdot cos^2\theta}}$
3. tan α'=$\frac{\tan\alpha}{\cos\theta}$