Paquete de Python para el Procesamiento de Imágenes Usando Varios Modelos no Lineales

Carlos Toledo Silva

Tutor
Damian Valdés Santiago

Universidad de La Habana

5 de diciembre de 2022

Introducción – Surgimiento de los modelos LIP

Puntos claves:

- Bajo ciertas circunstancias el Procesamiento Lineal Clásico de Imágenes (CLIP) demuestra sus limitaciones.
- Alan V. Oppenheim introduce la teoría homomórfica.
- Michel Jourlin y Jean-Charles Pinoli proponen el primer modelo logarítmico para el procesamiento de imágenes definido desde un punto de vista físico.
- Vasile Patrascu y Vasile Buzuloiu proponen otro modelo logarítmico definido desde un punto de vista matemático.
- Constantin Vertan y colaboradores proponen un modelo pseudo-logarítmico.
- Se siguen desarrollando modelos no lineales, muchos inspirados en los anteriores.
- Con estos modelos se han desarrollado diversas aplicaciones: corrección de iluminación, mejora de contraste, mejora de imagen en color, ecualización de histogramas, mejora de rango dinámico, detección de bordes, etc.

Introducción – Objetivos

Objetivos generales:

- Diseño e implementación de un módulo de Python donde se encuentren los modelos no lineales para el procesamiento de imágenes abordados en este trabajo.
- Evaluación de los diferentes modelos en cuanto a las diferentes operaciones, algoritmos, tipos de imágenes y situaciones

Objetivos específicos:

- Revisar la literatura referente a los modelos no lineales para el procesamiento de imágenes.
- Implementación en Python de los diferentes modelos a partir de la bibliografía consultada.
- Creación de *datasets* con diferentes tipos de imágenes para evaluar los modelos.
- Selección de métricas para la evaluación de los modelos.
- Evaluación de los modelos.
- Arribar a conclusiones sobre la eficacia y utilidad de estos modelos.

Estado del Arte – Antecedentes Matemáticos

Definición

Sean $(E, K, \oplus, \otimes)$ *y* $(F, K, +, \cdot)$ *dos estructuras algebraicas,* $K \subseteq \mathbb{R}$*, se denomina homomorfismo a la relación* $\varphi : E \to F$ *que satisface:*

$$\varphi(u \oplus v) = \varphi(u) + \varphi(v), \forall u, v \in E, \tag{1}$$

$$\varphi(\alpha \otimes u) = \alpha \cdot \varphi(u), \forall u \in E, \forall \alpha \in K. \tag{2}$$

La admisión de un inverso y la existencia de biyectividad indica la presencia de un isomorfismo.

En este trabajo:

- $E \subseteq \mathbb{R}$, conjunto de definición de las imágenes.
- $F \subseteq \mathbb{R}$, conjunto de definición de las estructuras vectoriales. Si $u \in E$ entonces $\varphi(u) \in F$
- $I(D, E)$ conjunto de imágenes definidas en $D \subset \mathbb{R}^2$ y valoradas en E.
- $I(D, F)$ conjunto de las estructuras vectoriales definidas en $D \subset \mathbb{R}^2$ y valoradas en F. Si $f \in I(D, E)$ entonces $\varphi(f) \in I(D, F)$.

Estado del Arte – Antecedentes Matemáticos

Ejemplos:

- Si los valores de la imagen son intensidades, como cualquier plano en representación de color RGB, el conjunto E tiene la forma $[0, M)$;
- En el caso del espacio YUV, para los canales de diferencias de color, el conjunto E tiene una forma simétrica, como $(-M/2, +M/2)$
- Una imagen en niveles de gris toma sus valores (niveles de gris) en la escala de grises $[0, M)$. Para imágenes de 8 bits, $M = 256$ y los 256 niveles de gris están en la escala de números enteros $[0, \cdots, 255]$

Estado del Arte – Antecedentes Matemáticos

Con respecto a la restricción de biyectividad y la existencia de φ^{-1}, las leyes de definición están determinadas por:

$$u \oplus v = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \tag{3}$$

$$\alpha \otimes u = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(u)). \tag{4}$$

Propiedad de cierre:

$$\forall u, v \in E, z = u \oplus v \Rightarrow z \in E, \tag{5}$$

$$\forall u \in E, \forall \alpha \in K, z = \alpha \otimes v \Rightarrow z \in E. \tag{6}$$

Estas propiedades se mantienen bajo la hipótesis de biyectividad asumida ya que:

$$z = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \wedge \forall x \in F, \varphi^{-1}(x) \in E \Rightarrow z \in E. \tag{7}$$

$$z = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(u)) \wedge \forall x \in F, \varphi^{-1}(x) \in E \Rightarrow z \in E. \tag{8}$$

Estado del Arte – Antecedentes Matemáticos

Definición

Dadas las dos leyes operativas, $\oplus$, $\otimes$, el conjunto vectorial E y el conjunto escalar K, la definición formal de espacio vectorial implica varias propiedades:

- *La ley de la suma debe ser asociativa, conmutativa, debe tener elemento identidad y elemento inverso*
- *La distributividad debe mantenerse para la multiplicación escalar sobre la suma de vectores y para la multiplicación escalar en el espacio de los escalares.*
- *La multiplicación escalar debe tener elemento identidad y ser compatible con la multiplicación en el espacio de los escalares.*

Las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas se pueden comprobar bajo la hipótesis de biyectividad y la admisión de inverso asumidas.

Estado del Arte – Antecedentes Matemáticos

Elemento identidad con respecto a la suma:

$$\forall u \in E, \exists u_0 : u \oplus u_0 = u | \varphi(u_0) = 0. \tag{9}$$

Elemento inverso con respecto a la suma:

$$\forall u \in E, \exists u^- \Rightarrow u \oplus u^- = u_0 | \varphi(u) + \varphi(u^-) = 0 \Rightarrow \varphi(u^-) = -\varphi(u). \tag{10}$$

Elemento identidad de la multiplicación escalar tiene que ser 1:

$$\forall u \in E - \{u_0\}, \exists \alpha_1 : \alpha_1 \otimes u = u | \alpha_1 = 1. \tag{11}$$

Definición

Sea V un espacio vectorial real y K, el conjunto escalar. Un cono C en V es un subconjunto de V que satisface:

1. *si $u_1, u_2 \in C$ y $\alpha, \beta \in K : \alpha, \beta \geq 0$, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2 \in C$.*
2. $C \cap (-C) = 0.$

Estado del Arte – Modelo LIP

Nombre: Modelo Logarítmico Clásico para el Procesamiento de Imágenes.
Propuesto por: Michel Jourlin y Jean-Charles Pinoli.
Dominio: $E = [0, M) \vee E = (-\infty, M)$.
Funciones de cambio: $v = M - u$, $u = M - v$.
Suma: $v_1 \oplus v_2 = v_1 + v_2 - \frac{v_1 v_2}{M}$.
Multiplicación por un escalar: $\lambda \otimes v = M - M\left(1 - \frac{v}{M}\right)^{\lambda}$.
Opuesto: $\ominus v = -\frac{v}{1-\frac{v}{M}}$.
Resta: $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1-\frac{v_2}{M}}$.
Función del isomorfismo: $\varphi(v) = -M \ln\left(1 - \frac{v}{M}\right)$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = M\left(1 - e^{-\frac{x}{M}}\right)$.
Propiedades:

- La suma $\oplus$ es asociativa, conmutativa, tiene un elemento identidad: 0 y cada elemento tiene un opuesto.
- La multiplicación escalar $\otimes$ es asociativa, tiene elemento identidad: 1 y la distributividad se mantiene para la multiplicación escalar sobre $\oplus$ y para la multiplicación escalar en el espacio de los escalares.

Si $E = [0, M)$ entonces $(E, R^+, \oplus, \otimes)$ es un cono positivo.
Si $E = (-\infty, M)$ entonces $(E, R, \oplus, \otimes)$ es un espacio vectorial.

Estado del Arte – Modelo HLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Homomórfico para el Procesamiento de Imágenes.
Propuesto por: Vasile Patrascu y Vasile Buzuloiu.
Dominio: $E = (-1, 1)$.
Funciones de cambio: $v = \frac{2}{M}\left(u - \frac{M}{2}\right)$, $u = \frac{M}{2}(v + 1)$.
Suma: $v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$.
Multiplicación por un escalar: $\lambda \otimes v = \frac{(1+v)^\lambda-(1-v)^\lambda}{(1+v)^\lambda+(1-v)^\lambda}$.
Opuesto: $\ominus v = -v$.
Resta: $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1-v_2}{1-v_1v_2}$.
Función del isomorfismo: $\varphi(v) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
Propiedades:

- La suma $\oplus$ es asociativa, conmutativa, tiene un elemento identidad: 0 y cada elemento tiene un opuesto.
- La multiplicación escalar $\otimes$ es asociativa, tiene elemento identidad: 1 y la distributividad se mantiene para la multiplicación escalar sobre $\oplus$ y para la multiplicación escalar en el espacio de los escalares.

La estructura $(E, R, \oplus, \otimes)$ es un espacio vectorial.

Nombre: Modelo Pseudo-logarítmico para el Procesamiento de Imágenes.
Propuesto por: Constantin Vertan y colaboradores.
Dominio: $E = [0, 1)$.
Funciones de cambio: $v = \frac{u}{M}$, $u = M \cdot v$.
Suma: $v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1+v_2-2v_1v_2}{1-v_1v_2}$.
Multiplicación por un escalar: $\lambda \otimes v = \frac{\lambda v}{1+(\lambda-1)v}$.
Resta: $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1-v_2}{1+v_1v_2-2v_2} : v_1 \geq v_2$.
Función del isomorfismo: $\varphi(v) = \frac{v}{1-v}$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$.
Propiedades:

- La suma $\oplus$ es asociativa, conmutativa y tiene un elemento identidad: 0.
- La multiplicación escalar $\otimes$ es asociativa, tiene elemento identidad: 1 y la distributividad se mantiene para la multiplicación escalar sobre $\oplus$ y para la multiplicación escalar en el espacio de los escalares.

$(E, R^+, \oplus, \otimes)$ es un cono positivo. La extensión a un espacio vectorial se puede lograr mediante el uso de la función generadora definida en $(-1, 1)$:

$$\varphi(v) = \frac{v}{1-|v|}. \tag{12}$$

Estado del Arte – Modelo PLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Parametrizado para el Procesamiento de Imágenes.
Propuesto por: Karen Panetta y colaboradores.
Dominio: $E = [0, M) \vee E = (-\infty, M)$.
Funciones de cambio: $v = \mu(M) - u$, $u = \mu(M) - v$.
Suma: $v_1 \oplus v_2 = v_1 + v_2 - \frac{v_1 v_2}{\gamma(M)}$.
Multiplicación por un escalar: $c \otimes v = \gamma(M) - \gamma(M)(1 - \frac{v}{\gamma(M)})^c$.
Opuesto: $\ominus v = -\frac{v}{1 - \frac{v}{\gamma(M)}}$.
Resta: $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_2}{k(M)}}$.
Función del isomorfismo: $\varphi(v) = -\lambda(M) \ln^{\beta}(1 - \frac{v}{\lambda(M)})$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = \lambda(M)(1 - (e^{-\frac{x}{\lambda(M)}})^{\frac{1}{\beta}})$.

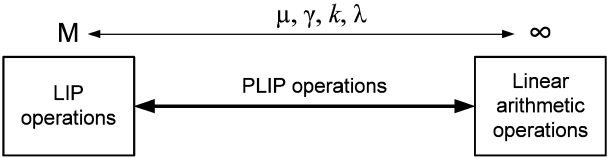

Figura: Operaciones en el modelo PLIP

Estado del Arte – Modelo PLIP

Propiedades del modelo PLIP:

- En el modelo PLIP, las operaciones aritméticas lineales se reemplazan con nuevas operaciones de la misma manera que en el modelo LIP tradicional.
- Las operaciones en el modelo PLIP son iguales a las del modelo tradicional LIP cuando $\mu(M) = \gamma(M) = k(M) = \lambda(M) = M$ y $\beta = 1$.
- Las operaciones en el modelo PLIP se asemejan a las operaciones aritméticas lineales a medida que $\gamma(M)$, $k(M)$ y $\lambda(M)$ se aproximan al infinito.
- Las operaciones PLIP pueden generar más casos entre los dos casos extremos del LIP y las operaciones aritméticas lineales cuando los parámetros μ, γ, k y λ cambian dentro de $[M, +\infty)$.
- Las operaciones PLIP cumplen las leyes de asociatividad, conmutatividad, elemento identidad, elemento opuesto para la suma y las propiedades distributivas.

Estado del Arte – Modelo SLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Simétrico para el Procesamiento de Imágenes.
Propuesto por: Laurent Navarro y colaboradores.
Dominio: $E = (-M, M)$.
Suma: $v_1 \oplus v_2 = Msgn(v_1 + v_2)\left[1 - \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right)^{\gamma_1}\left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right)^{\gamma_2}\right]$,
$\gamma_1 = \frac{sgn(v_1)}{sgn(v_1+v_2)}$, $\gamma_2 = \frac{sgn(v_2)}{sgn(v_1+v_2)}$.
Multiplicación por un escalar: $\lambda \otimes v = Msgn(\lambda v) = \left[1 - \left(1 - \frac{|v|}{M}\right)^{|\lambda|}\right]$.
Opuesto: $\ominus v = (-1) \otimes v$.
Resta: $v_1 \ominus v_2 = v_1 \oplus (-1) \otimes v_2$.
Función del isomorfismo: $\varphi(v) = -Msgn(v) \ln\left(1 - \frac{|v|}{M}\right)$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = Msgn(x)\left(1 - e^{-\frac{|x|}{M}}\right)$.

Estado del Arte – Modelo SLIP

Propiedades:

- La suma $\oplus$ es asociativa, conmutativa, tiene un elemento identidad: 0 y cada elemento tiene un opuesto.
- La multiplicación escalar $\otimes$ es asociativa, tiene elemento identidad: 1 y la distributividad se mantiene para la multiplicación escalar sobre $\oplus$ y para la multiplicación escalar en el espacio de los escalares.

La estructura $(E, R, \oplus, \otimes)$ es un espacio vectorial.
Relación Matemática entre los Modelos LIP y SLIP:

- Desde un punto de vista matemático, cuando $v \in [0, M)$, las dos funciones generadoras $\varphi_{LIP}(v)$ y $\varphi_{SLIP}(v)$ son exactamente las mismas (sin tener en cuenta la inversión de la escala de grises).
- El modelo SLIP($\odot$) es el mismo que el modelo LIP($\boxdot$) para el rango de valores de píxeles $[0, M)$
- Difieren entre sí en la forma en que tratan los valores negativos. Por ejemplo, cuando $\lambda < 0$ y $v > 0$, tenemos $\lambda \boxtimes v \in (-\infty, 0)$ y $\lambda \otimes v \in (-M, 0)$. Del mismo modo, cuando $-\infty < v_1 < v_2 < M$ se tiene $v_1 \boxminus v_2 \in (-\infty, 0)$ y cuando $-M < v_1 < v_2 < M$, se tiene $v_1 \ominus v_2 \in (-M, 0)$.

Propuesta – Modelo PPSLIP

Nombre: Modelo Pseudo-logarítmico Parametrizado para el Procesamiento de Imágenes.

Versión inicial: Parametrizar las funciones de cambio

Se parametrizan solo las funciones de cambio de la siguiente forma: $v = \frac{u}{\delta(M)}$ y $u = \delta(M)v$, tal que $\delta(M) \geq M$ y mantener el dominio y el resto de operaciones del modelo PSLIP.
Ventaja: Se parametriza el modelo para evitar la pérdida de información.
Desventaja: Las operaciones se parametrizan con el mismo parámetro.

Versión final: Eliminar las funciones de cambio y hacerlos directamente

Dominio: $E = [0, M)$.
Suma: $u_1 \oplus u_2 = \frac{u_1 + u_2 - \frac{2u_1 u_2}{\gamma(M)}}{1 - \frac{u_1 u_2}{\gamma(M)^2}}$.
Multiplicación por un escalar: $c \otimes u = \frac{cu}{1 + \frac{(c-1)u}{\gamma(M)}}$.
Resta: $u_1 \ominus u_2 = \frac{u_1 - u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{k(M)^2} - \frac{2u_2}{k(M)}} : u_1 \geq u_2$.
Función del isomorfismo: $\varphi(u) = \frac{u}{\lambda(M) - u}$.
Inversa de la función del isomorfismo: $\varphi^{-1}(x) = \lambda(M)\frac{x}{1+x}$.

Propuesta – Modelo PPSLIP

Propiedades del modelo PPSLIP:

- En el modelo PPSLIP, las operaciones aritméticas lineales se reemplazan con nuevas operaciones de la misma manera que en el modelo PSLIP tradicional.
- Las operaciones en el modelo PPSLIP son iguales a las del modelo tradicional PSLIP cuando $\gamma(M) = k(M) = \lambda(M) = M$.
- Las operaciones en el modelo PLIP se asemejan a las operaciones aritméticas lineales a medida que $\gamma(M),\ k(M)$ y $\lambda(M)$ se aproximan al infinito.
- Las operaciones PPSLIP pueden generar más casos entre los dos casos extremos del PSLIP y las operaciones aritméticas lineales cuando los parámetros γ, k y λ cambian dentro de $[M, +\infty)$.
- Las operaciones PPSLIP cumplen las leyes de asociatividad, conmutatividad, elemento identidad y las propiedades distributivas.