

# Paquete de Python para el procesamiento de imágenes usando varios modelos no lineales

Carlos Toledo Silva

Tutor  
MSc. Damian Valdés Santiago

Universidad de La Habana

13 de diciembre 2022

## Puntos claves:

- El Procesamiento Lineal Clásico de Imágenes tiene limitaciones.
- Oppenheim (1965) introduce la teoría homomórfica.
- Jourlin y Pinoli (1988) proponen el primer modelo logarítmico para el procesamiento de imágenes.
- Patrascu y Buzuloiu (2001) proponen un modelo logarítmico simétrico.
- Vertan y colaboradores (2008) proponen el modelo pseudo-logarítmico.
- Diversas aplicaciones: corrección de iluminación, mejora de contraste, mejora de imagen en color, ecualización de histogramas, mejora de rango dinámico, detección de bordes, etc.

# Introducción – Objetivos

## Objetivos:

- Diseño e implementación de un módulo de Python donde se encuentren los modelos no lineales para el procesamiento de imágenes abordados en este trabajo.
- Evaluación de los diferentes modelos en cuanto a las diferentes operaciones, tipos de imágenes y situaciones.

## Tareas de investigación:

- Revisar la literatura referente a los modelos no lineales para el procesamiento de imágenes.
- Implementación en Python de los diferentes modelos a partir de la bibliografía consultada.
- Creación de *datasets* con diferentes tipos de imágenes para evaluar los modelos.
- Selección de métricas para la evaluación de los modelos.
- Evaluación de los modelos.
- Arribar a conclusiones sobre la eficacia y utilidad de estos modelos.

Conceptos relacionados a estos modelos:

- 1 M: Límite superior del rango de niveles de gris. Ej:  $[0, M]$ .
- 2 Dominio:  $E \subseteq \mathbb{R}$ .
- 3 Función de cambio a tonos de gris.
- 4 Función de cambio a niveles de gris.
- 5 Suma:  $v_1 \oplus v_2$ .
- 6 Multiplicación por un escalar:  $\lambda \otimes v$ .
- 7 Resta:  $v_1 \ominus v_2$ .
- 8 Función del isomorfismo:  $\varphi : E \rightarrow F$ ,  $F \subseteq \mathbb{R}$ .
- 9 Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1} : F \rightarrow E$ .

# Estado del Arte – Modelo LIP

Nombre: Modelo Logarítmico Clásico para el Procesamiento de Imágenes.

Propuesto por: Jourlin y Pinoli (1988).

Dominio:  $E = [0, M] \cup E = (-\infty, M)$ .

Función de cambio a tonos de gris:  $v = M - u$ .

Función de cambio a niveles de gris:  $u = M - v$ .

Suma:  $v_1 \oplus v_2 = v_1 + v_2 - \frac{v_1 v_2}{M}$ .

Multiplicación por un escalar:  $\lambda \otimes v = M - M \left(1 - \frac{v}{M}\right)^\lambda$ .

Opuesto:  $\ominus v = -\frac{v}{1 - \frac{v}{M}}$ .

Resta:  $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_2}{M}}$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(v) = -M \ln \left(1 - \frac{v}{M}\right)$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = M \left(1 - e^{-\frac{x}{M}}\right)$ .

Si  $E = [0, M]$  entonces  $(E, \mathbb{R}^+, \oplus, \otimes)$  es un cono positivo.

Si  $E = (-\infty, M)$  entonces  $(E, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  es un espacio vectorial.

# Estado del Arte – Modelo HLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Homomórfico para el Procesamiento de Imágenes.

Propuesto por: Patrascu y Buzuloiu (2001).

Dominio:  $E = (-1, 1)$ .

Función de cambio a tonos de gris:  $v = \frac{2}{M} \left( u - \frac{M}{2} \right)$ .

Función de cambio a niveles de gris:  $u = \frac{M}{2}(v + 1)$ .

Suma:  $v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$ .

Multiplicación por un escalar:  $\lambda \otimes v = \frac{(1+v)^\lambda - (1-v)^\lambda}{(1+v)^\lambda + (1-v)^\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ .

Opuesto:  $\ominus v = -v$ .

Resta:  $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2}$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(v) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right)$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ .

La estructura  $(E, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  es un espacio vectorial.

# Estado del Arte – Modelo PSLIP

Nombre: Modelo Pseudo-logarítmico para el Procesamiento de Imágenes.

Propuesto por: Vertan y colaboradores (2008).

Dominio:  $E = [0, 1]$ .

Función de cambio a tonos de gris:  $v = \frac{u}{M}$ .

Función de cambio a niveles de gris:  $u = M \cdot v$ .

Suma:  $v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2 - 2v_1 v_2}{1 - v_1 v_2}$ .

Multiplicación por un escalar:  $\lambda \otimes v = \frac{\lambda v}{1 + (\lambda - 1)v}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Resta:  $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 + v_1 v_2 - 2v_2}$  :  $v_1 \geq v_2$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(v) = \frac{v}{1-v}$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$ .

La estructura  $(E, \mathbb{R}^+, \oplus, \otimes)$  es un cono positivo. La extensión a un espacio vectorial se puede lograr mediante el uso de la función generadora definida en  $(-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  :  $\varphi(v) = \frac{v}{1-|v|}$ .

# Estado del Arte – Modelo PLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Parametrizado para el Procesamiento de Imágenes.

Propuesto por: Panetta y colaboradores (2010).

Función de cambio a tonos de gris:  $v = \mu(M) - u$ .

Función de cambio a niveles de gris:  $u = \mu(M) - v$ .

Suma:  $v_1 \oplus v_2 = v_1 + v_2 - \frac{v_1 v_2}{\gamma(M)}$ .

Multiplicación por un escalar:  $c \otimes v = \gamma(M) - \gamma(M)(1 - \frac{v}{\gamma(M)})^c$ .

Opuesto:  $\ominus v = -\frac{v}{1 - \frac{v}{\gamma(M)}}$ .

Resta:  $v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_2}{k(M)}}$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(v) = -\lambda(M) \ln^\beta(1 - \frac{v}{\lambda(M)})$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = \lambda(M)(1 - (e^{-\frac{x}{\lambda(M)}})^{\frac{1}{\beta}})$ .

# Estado del Arte – Modelo SLIP

Nombre: Modelo Logarítmico Simétrico para el Procesamiento de Imágenes.

Propuesto por: Navarro y colaboradores (2013).

Dominio:  $E = (-M, M)$ .

Suma:  $v_1 \oplus v_2 = M \cdot \text{sgn}(v_1 + v_2) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right],$

$\gamma_1 = \frac{\text{sgn}(v_1)}{\text{sgn}(v_1 + v_2)}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\text{sgn}(v_2)}{\text{sgn}(v_1 + v_2)}$ .

Multiplicación por un escalar:  $\lambda \otimes v = M \cdot \text{sgn}(\lambda v) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right)^{|\lambda|} \right],$

$\lambda \in \mathbb{R}$ .

Opuesto:  $\ominus v = (-1) \otimes v$ .

Resta:  $v_1 \ominus v_2 = v_1 \oplus (-1) \otimes v_2$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(v) = -M \cdot \text{sgn}(v) \ln \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right)$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = M \cdot \text{sgn}(x) \left( 1 - e^{-\frac{|x|}{M}} \right)$ .

La estructura  $(E, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  es un espacio vectorial.

Nombre: Modelo Pseudo-logarítmico Parametrizado para el Procesamiento de Imágenes.

## Versión inicial: Parametrizar las funciones de cambio

Se parametrizan solo las funciones de cambio de la siguiente forma:

$$v = \frac{u}{\delta(M)}, \quad u = \delta(M)v$$

tal que  $\delta(M) \geq M$  y se mantienen el resto de operaciones del modelo PSLIP.

Ventaja: Se parametriza el modelo para evitar la pérdida de información.  
Desventaja: Las operaciones se parametrizan con el mismo parámetro.

Versión final: Eliminar las funciones de cambio y hacer los cambios directamente en las operaciones.

Suma:  $u_1 \oplus u_2 = \frac{u_1 + u_2 - \frac{2u_1 u_2}{\gamma(M)}}{1 - \frac{u_1 u_2}{\gamma(M)^2}}$ .

Multiplicación por un escalar:  $c \otimes u = \frac{cu}{1 + \frac{(c-1)u}{\gamma(M)}}$ .

Resta:  $u_1 \ominus u_2 = \frac{u_1 - u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{k(M)^2} - \frac{2u_2}{k(M)}} : u_1 \geq u_2$ .

Función del isomorfismo:  $\varphi(u) = \frac{u}{\lambda(M)-u}$ .

Inversa de la función del isomorfismo:  $\varphi^{-1}(x) = \lambda(M) \frac{x}{1+x}$ .

# Propuesta – Módulo Implementado – Estructuras

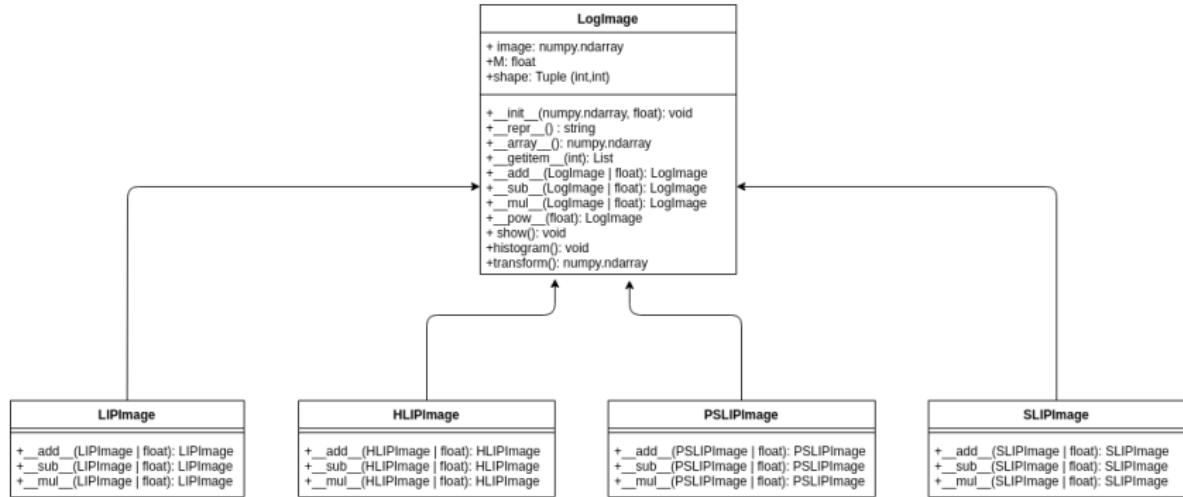


Figura: Diagrama de clases de las estructuras no lineales.

# Propuesta – Módulo Implementado – Espacios

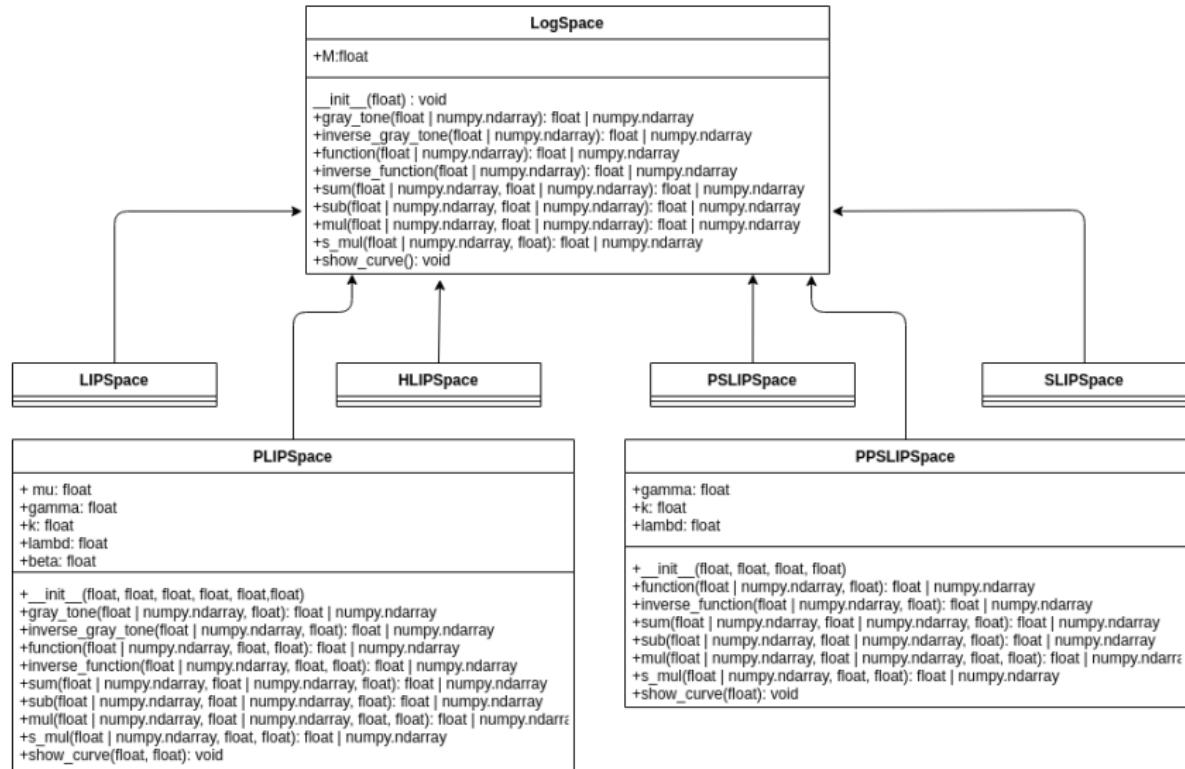


Figura: Diagrama de clases de los espacios no lineales.

La Medida de Mejora por Entropía se calcula dividiendo una imagen  $I$  en  $k_1 \times k_2$  bloques, obteniendo el máximo local  $I_{maxk,I}$  y el mínimo  $I_{mink,I}$  dentro de cada bloque individualmente, y luego procesándolos usando la siguiente ecuación:

$$EMEE_{\alpha, k_1, k_2} = \sum_{l=1}^{k_1} \sum_{k=1}^{k_2} \alpha \left( \frac{I_{maxk,I}}{I_{mink,I}} \right)^\alpha \ln \left( \frac{I_{maxk,I}}{I_{mink,I}} \right), \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es una constante que puede ayudar a seleccionar los parámetros. Se eligió  $\alpha = 1$  y el tamaño de bloque  $4 \times 4$ ,  $4 \times 5$ ,  $5 \times 4$  y  $5 \times 5$ , según las dimensiones de la imagen.

El mejor parámetro (óptimo) se obtiene si se cumple la siguiente condición:

$$EMEE_{optimal} = \max_{local}(EMEE(\alpha, \mu, \gamma, k, \lambda, \beta)) \quad (2)$$

Esta medida se utilizó para obtener las mejores combinaciones de parámetros en el modelo PLIP.

El contraste absoluto entre dos píxeles distintos  $p_1, p_2 \in D, D \subseteq \mathbb{R}^2$ , para una imagen,  $f \in I(D, E)$  se define:

$$C_A(p_1, p_2) = \frac{1}{d(p_1, p_2)} \cdot \frac{|f(p_1) - f(p_2)|}{1 - \frac{f(p_1) \cdot f(p_2)}{M^2}}, \quad (3)$$

Luego de experimentos, se decidió modificar la ecuación anterior, cambiando la definición a:

$$C_A(p_1, p_2) = \frac{|f(p_1) - f(p_2)|}{d(p_1, p_2)} \cdot \frac{256}{M} \quad (4)$$

El contraste para un píxel arbitrario  $p \in D$ , para una imagen  $f \in I(D, E)$ , se define por la media del contraste absoluto entre el píxel  $p$  y los píxeles  $(p_i)_{i=1,\dots,n}$  que pertenecen a una vecindad  $V$ :

$$C(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_A(p, p_i). \quad (5)$$

Luego el valor de  $C_p$  de una imagen es el promedio de los valores de  $C(p)$  de los pixeles que la conforman.

## Detección de bordes

Se utilizan diferentes filtros como Sobel, Prewitt, Scharr, etc. En particular los tres mencionados anteriormente aparecen implementados en la librería `skimage.filters` de Python.

## Unsharp masking

*Unsharp Masking* es una técnica para mejorar la calidad de una imagen. Esta técnica consiste en determinar los bordes de una imagen y luego fusionar la imagen original con la imagen de bordes de dicha imagen.

## Transformación Afín

Transformación afín  $\psi : I(D, E) \rightarrow I(D, E) : E = (a, b)$ , para una imagen  $f \in I(D, E)$ :

$$\psi(f) = \frac{\sigma_u}{\sigma_f} \otimes (f \ominus \mu_f). \quad (6)$$

tal que  $\mu_f$  es la media de la imagen,  $\sigma_f^2$  es la varianza de la imagen y  $\sigma_u^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

Importante: Este algoritmo solo se puede utilizar en espacios vectoriales acotados.

# Detalles de Implementación – Estructura del Módulo

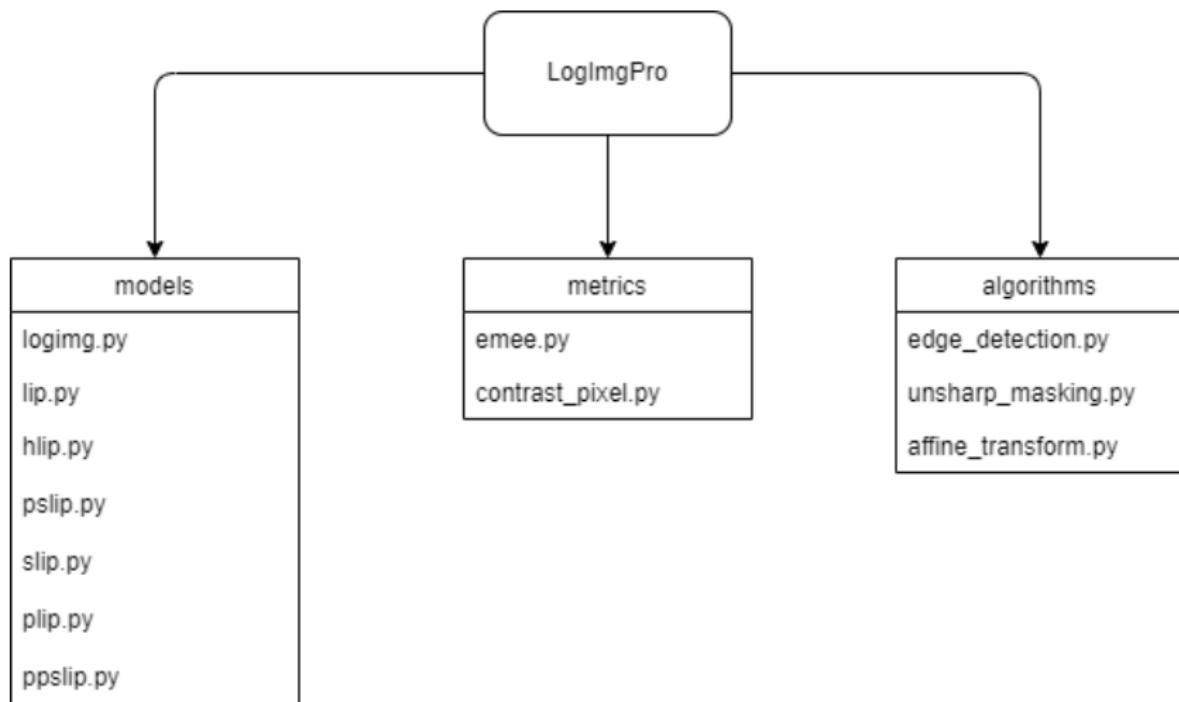


Figura: Diagrama de la estructura del módulo.

# Experimentos – Curvas de los Modelos no Parametrizados

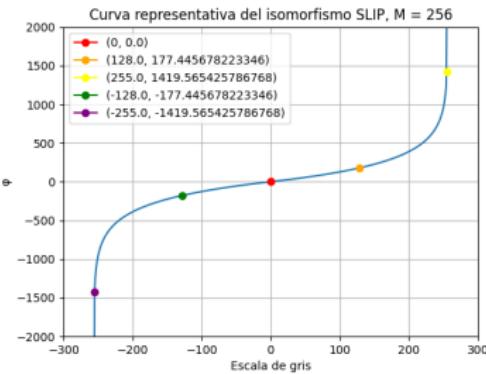
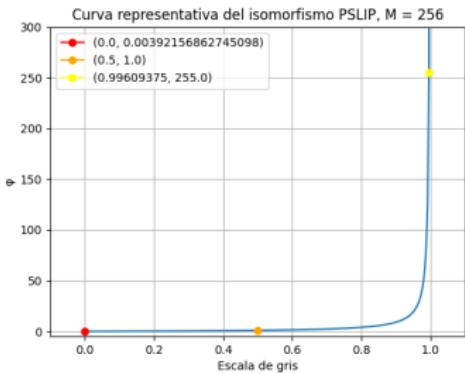
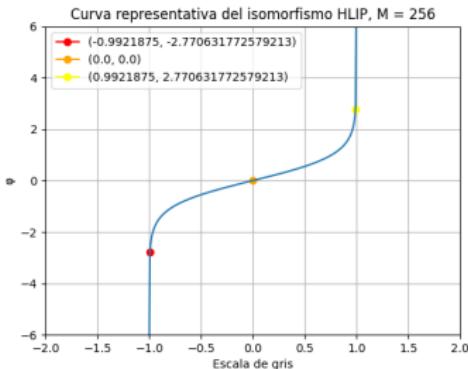
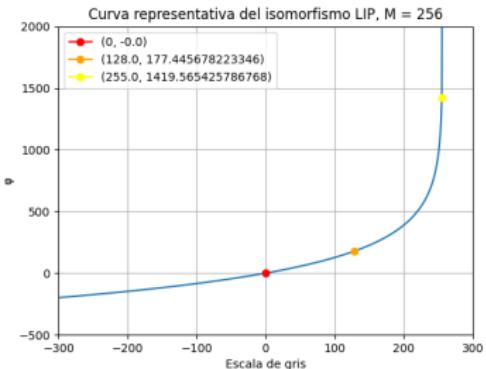
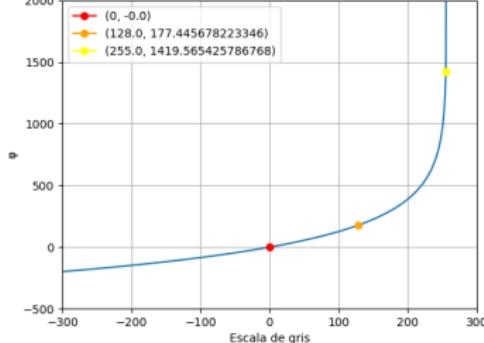


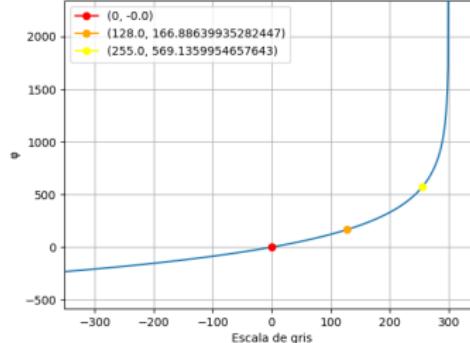
Figura: Curvas representativas de los modelos no parametrizados.

# Experimentos – Curvas del Modelo PLIP

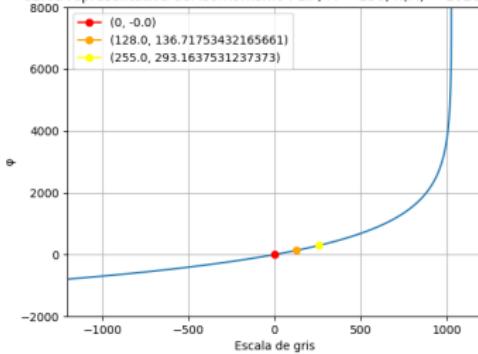
Curva representativa del isomorfismo PLIP,  $M = 256$ ,  $\lambda(M) = 256$ ,  $\beta = 1$



Curva representativa del isomorfismo PLIP,  $M = 256$ ,  $\lambda(M) = 300$ ,  $\beta = 1$



Curva representativa del isomorfismo PLIP,  $M = 256$ ,  $\lambda(M) = 1026$ ,  $\beta = 1$



Curva representativa del isomorfismo PLIP,  $M = 256$ ,  $\lambda(M) = 4100$ ,  $\beta = 1$

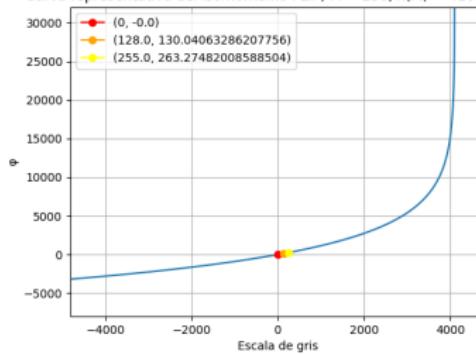


Figura: Curvas representativas del modelo PLIP con diferentes valores de  $\lambda(M)$ .

# Experimentos – Curvas del Modelo PPSLIP

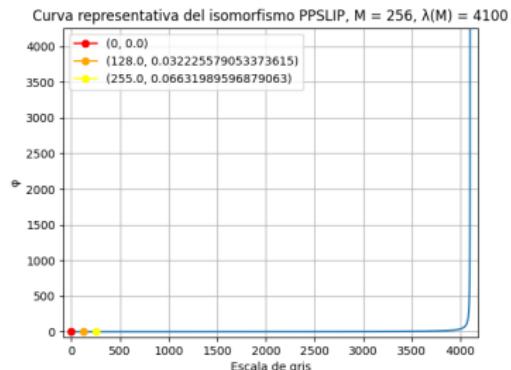
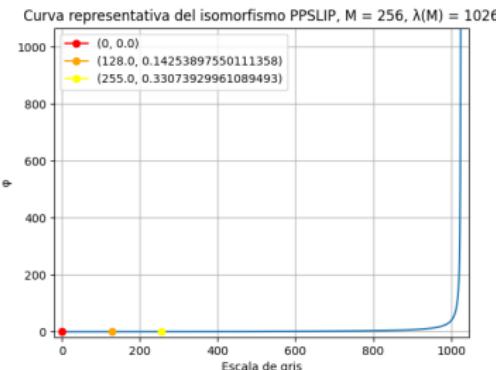
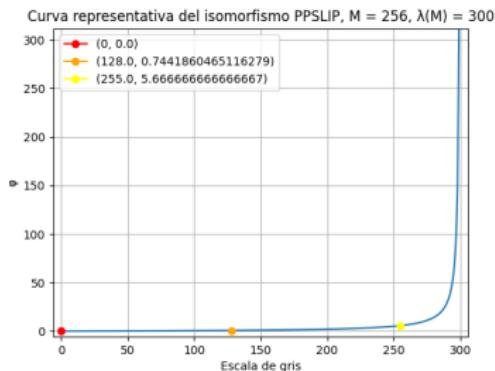
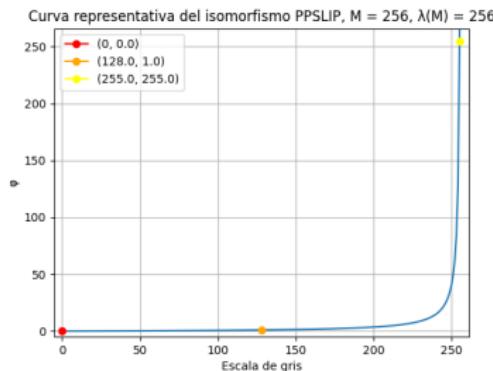


Figura: Curvas representativas del modelo PPSLIP, diferentes valores de  $\lambda(M)$ .

# Experimentos – Suma de Imágenes



(a) Playa



(b) Patineta



(c) Montaña



(d) Insecto

**Figura:** Imágenes para los experimentos de suma.

# Experimentos – Suma de Imágenes – Playa y Patineta



(a) Lineal  $C_p = 3,49$



(b) LIP  $C_p = 5,71$



(c) HLIP  $C_p = 4,96$



(d) PSLIP  $C_p = 1,39$



(e) SLIP  $C_p = 1,45$



(f) PLIP  $C_p = 5,71$



(g) PPSLIP  $C_p = 3,35$

# Experimentos – Suma de Imágenes – Montaña e Insecto



(h) Lineal  $C_p = 3,15$



(i) LIP  $C_p = 2,77$



(j) HLIP  $C_p = 4,53$



(k) PSLIP  $C_p = 3,47$



(l) SLIP  $C_p = 3,65$

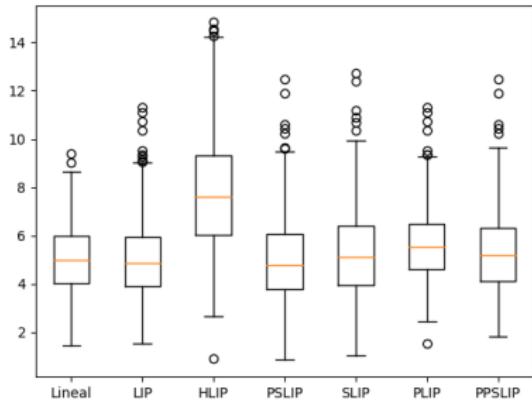


(m) PLIP  $C_p = 3,13$



(n) PPSLIP  $C_p = 3,47$

# Experimentos – Suma de Imágenes – Estadísticas



(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Lineal	5,05	4,98
LIP	5,00	4,85
HLIP	7,73	7,59
PSLIP	4,95	4,78
SLIP	5,24	5,08
PLIP	5,60	5,54
PPSLIP	5,35	5,20

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico de la operación suma de los diferentes modelos utilizando imágenes naturales.

# Experimentos – Imágenes Utilizadas



(a) Cámara  $C_p = 5,00$



(b) Tórax 1  $C_p = 2,26$

Figura: Imágenes para los experimentos de detección de bordes.

# Experimentos – Detección de Bordes – Cámara



(a) Lineal  $C_p = 4,69$



(b) LIP  $C_p = 7,43$



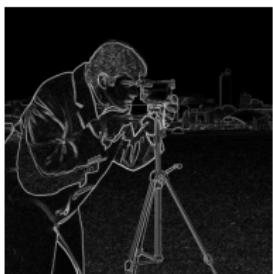
(c) HLIP  $C_p = 8,05$



(d) PSLIP  $C_p = 9,41$



(e) SLIP  $C_p = 6,26$



(f) PLIP  $C_p = 7,43$



(g) PPSLIP  $C_p = 9,41$

**Figura:** Filtro de Scharr aplicado a la imagen Cámara con los diferentes modelos.

# Experimentos – Detección de Bordes – Tórax 1



(a) Lineal  $C_p = 2,89$



(b) LIP  $C_p = 3,66$



(c) HLIP  $C_p = 4,40$



(d) PSLIP  $C_p = 9,73$



(e) SLIP  $C_p = 6,85$



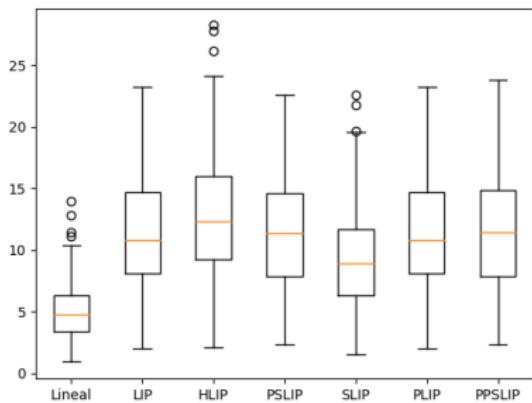
(f) PLIP  $C_p = 3,66$



(g) PPSLIP  $C_p = 9,73$

**Figura:** Filtro de Scharr aplicado a la imagen Tórax 1 con los diferentes modelos.

# Experimentos – Detección de Bordes – Estadísticas



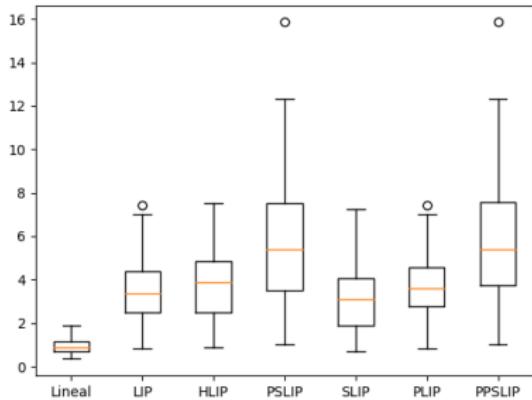
(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Lineal	5,02	4,75
LIP	11,55	10,82
HLIP	12,81	12,36
PSLIP	11,57	11,38
SLIP	9,30	8,91
PLIP	11,59	10,82
PPSLIP	11,65	11,47

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes modelos para la detección de bordes en imágenes naturales.

# Experimentos – Detección de Bordes – Estadísticas



(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Lineal	0,96	0,89
LIP	3,48	3,38
HLIP	3,69	3,85
PSLIP	5,55	5,38
SLIP	3,11	3,09
PLIP	3,68	3,60
PPSLIP	5,64	5,41

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes modelos para la detección de bordes en imágenes de radiografías de tórax.

# Experimentos – Unsharp Masking – Cámara



(a) Lineal  $C_p = 4,13$



(b) LIP  $C_p = 5,14$



(c) HLIP+  $C_p = 5,66$



(d) HLIP-  $C_p = 5,73$



(e) PSLIP  $C_p = 4,84$



(f) SLIP  $C_p = 5,16$



(g) PLIP  $C_p = 5,14$



(h) PPSLIP  $C_p = 5,80$

**Figura:** Unsharp masking aplicado a la imagen Cámara con los diferentes modelos.

# Experimentos – Unsharp Masking – Tórax 1



(a) Lineal  $C_p = 2,60$



(b) LIP  $C_p = 2,53$



(c) HLIP+  $C_p = 3,46$



(d) HLIP-  $C_p = 2,62$



(e) PSLIP  $C_p = 2,52$



(f) SLIP  $C_p = 2,59$



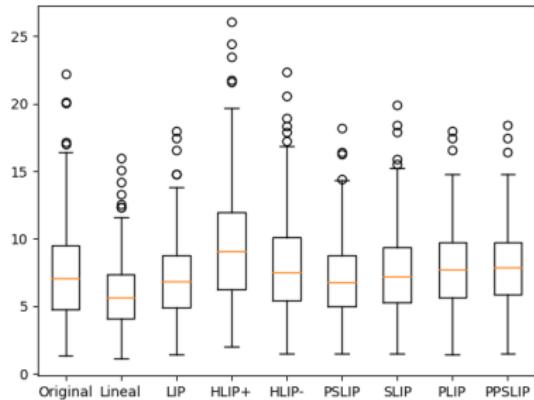
(g) PLIP  $C_p = 2,53$



(h) PPSLIP  $C_p = 4,97$

**Figura:** Unsharp masking aplicado a la imagen Tórax 1 con los diferentes modelos.

# Experimentos – Unsharp Masking – Estadísticas



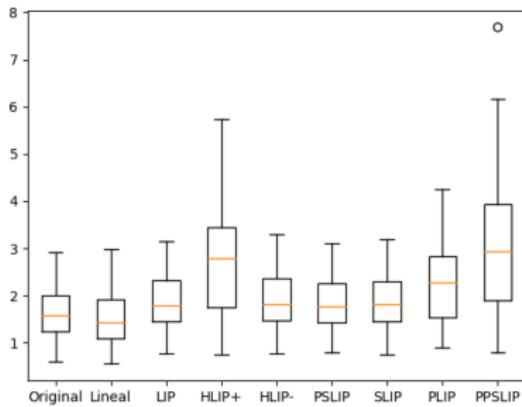
(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Original	7,63	7,07
Lineal	6,04	5,66
LIP	7,24	6,81
HLIP+	9,67	9,07
HLIP-	8,23	7,52
PSLIP	7,10	6,73
SLIP	7,65	7,24
PLIP	7,95	7,72
PPSLIP	7,99	7,84

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes modelos para el algoritmo *unsharp masking* en imágenes naturales.

# Experimentos – Unsharp Masking – Estadísticas



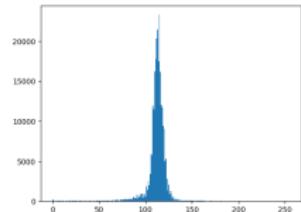
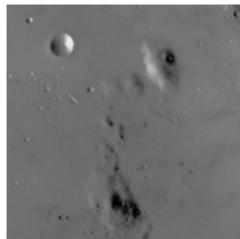
(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Original Lineal	1,64	1,57
LIP	1,49	1,42
HLIP+	1,88	1,78
HLIP-	2,71	2,78
PSLIP	1,91	1,82
SLIP	1,84	1,78
PLIP	1,87	1,80
PPSLIP	2,21	2,27
PPSLIP	3,00	2,94

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes modelos para el algoritmo *unsharp masking* en imágenes de radiografías de tórax.

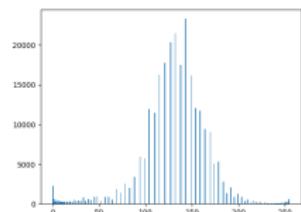
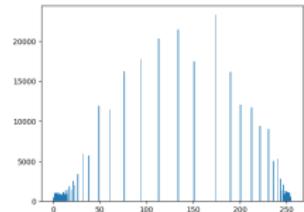
# Experimentos – Transformación Afín – Luna



(a) Original  
 $C_p = 1,30$



(c) Ecualizada  
 $C_p = 10,86$



(e) HLIP  
 $C_p = 5,35$



(g) SLIP  
 $C_p = 5,07$

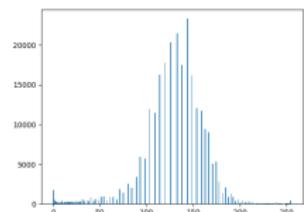
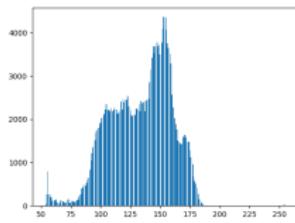


Figura: Diferentes técnicas de modificación del histograma de la imagen Luna.

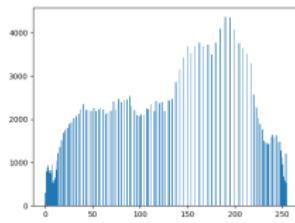
# Experimentos – Transformación Afín – Tórax 2



(a) Original  $C_p = 1,05$



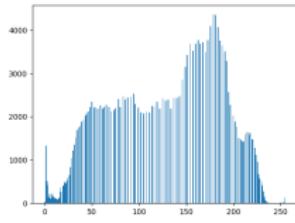
(c) Ecualizada  $C_p = 2,82$



(d) Ecualizada Histograma



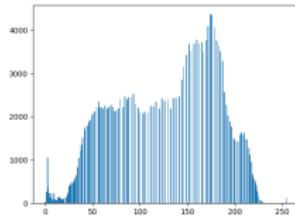
(e) HLIP  $C_p = 2,36$



(f) HLIP Histograma



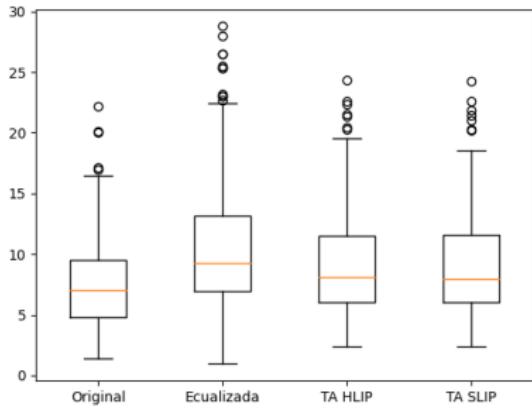
(g) SLIP  $C_p = 2,19$



(h) SLIP Histograma

**Figura:** Diferentes técnicas de modificación del histograma de la imagen Tórax 2.

# Experimentos – Transformación Afín – Estadísticas



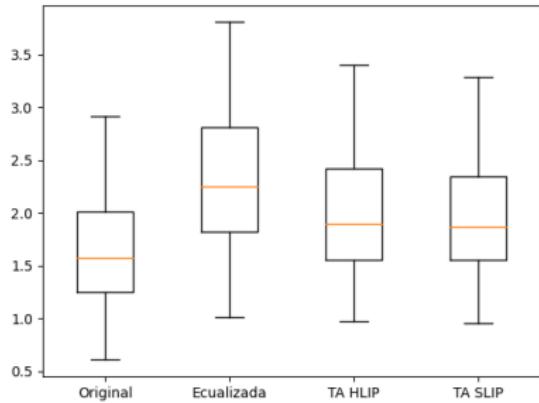
(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Original	7,63	7,07
Ecualización	10,75	9,29
TA HLIP	9,20	8,07
TA SLIP	9,11	7,94

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes algoritmos para la modificación del histograma en imágenes naturales.

# Experimentos – Transformación Afín – Estadísticas



(a) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Original	1,64	1,57
Ecualización	2,32	2,24
TA HLIP	2,01	1,89
TA SLIP	1,98	1,86

(b) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico para la medida  $C_p$  utilizando los diferentes algoritmos para la modificación del histograma en imágenes de radiografías de tórax.

# Conclusiones

- El modelo lineal mostró deficiencias en determinadas ocasiones, las cuales pueden ser resueltas por alguno de los modelos no lineales presentados.
- El modelo LIP presentó sensibilidad hacia las tonalidades oscuras, mientras que el SLIP sin expansión presentó sensibilidad hacia las tonalidades claras.
- El modelo HLIP demostró ser muy efectivo en los diferentes experimentos realizados dado su carácter simétrico.
- El modelo PSLIP demostró ser muy efectivo para la detección de bordes, fundamentalmente en los niveles de mayor intensidad, quedando a deber en los de menor intensidad.

# Conclusiones

- La parametrización de los modelos demostró tener gran utilidad ya que permite cierta flexibilidad en favor de obtener mejores resultados.
- El algoritmo de transformación afín con los dos modelos utilizados puede dar como resultado una imagen de mejor contraste que la imagen original y más natural que la imagen ecualizada.
- La métrica  $C_p$  utilizada para evaluar los experimentos puede ser utilizada para la evaluación de distintos algoritmos para el procesamiento de imágenes.

# Recomendaciones

- Continuar el estudio de estos modelos con el fin de profundizar más en sus ventajas y desventajas, así como de otros modelos no lineales para el procesamiento de imágenes.
- Implementar algoritmos que combinen dos o más modelos aprovechando las ventajas que ofrece cada uno.
- En los futuros estudios que se realicen, incluir también, como medida subjetiva, la opinión de diferentes usuarios con respecto a la calidad de los resultados obtenidos.
- Implementación de un algoritmo que permita estimar para un modelo parametrizado el mejor o los mejores parámetros para la realización de una determinada operación.

# Paquete de Python para el procesamiento de imágenes usando varios modelos no lineales

Carlos Toledo Silva

Tutor  
MSc. Damian Valdés Santiago

Universidad de La Habana

13 de diciembre 2022

# Preguntas del Oponente

- 1 Demuestre las afirmaciones que se realizan en los dos últimos párrafos de la sección 1.6 (página 14) del Trabajo de Diploma.
- 2 En la sección 2.1, (página 15) se plantea “Como se puede apreciar en los ejemplos de la Tabla 2.1, al ejercer la suma, *se pierde más información* en el modelo PSLIP que en el modelo LIP”. Argumente con mayor amplitud esta afirmación sobre la pérdida de información.
- 3 Proporcione una tabla similar a la 3.1 (página 36) sobre operación de suma de imágenes naturales para imágenes médicas.

# Pregunta 1

Demostrar las siguientes propiedades del Modelo SLIP:

- 1  $\lambda \otimes v \in (-M, M), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in (-M, M)$
- 2  $\lambda \otimes (v_1 \oplus v_2) = (\lambda \otimes v_1) \oplus (\lambda \otimes v_2), \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall v_1, v_2 \in (-M, M)$
- 3  $\beta \otimes (\lambda \otimes v) = (\beta \cdot \lambda) \otimes v, \forall \beta, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in (-M, M)$
- 4  $1 \otimes v = v, \forall v \in (-M, M)$
- 5 Opuesto de  $v$  es  $w = (-1) \otimes v, \forall v \in (-M, M)$

## Pregunta 1

Asumiendo que  $\varphi : (-M, M) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  definida por

$$\varphi(v) = -M \cdot \operatorname{sgn}(v) \ln \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right), \quad (7)$$

es un isomorfismo entre las estructuras algebraicas

$(E, \mathbb{R}, \oplus, \otimes) : E = (-M, M)$  y  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$  se pueden demostrar estas afirmaciones utilizando las siguientes propiedades de un isomorfismo:

$$v_1 \oplus v_2 = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)), \quad (8)$$

$$\lambda \otimes v = \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v)). \quad (9)$$

# Pregunta 1

1. Demostración  $\lambda \otimes v \in (-M, M), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in (-M, M).$   
 $\lambda \otimes v = \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v)) \wedge \forall x \in F, \varphi^{-1}(x) \in E \Rightarrow \lambda \otimes v \in E.$
2. Demostración  $\lambda \otimes (v_1 \oplus v_2) = (\lambda \otimes v_1) \oplus (\lambda \otimes v_2)$

$$\begin{aligned}\lambda \otimes (v_1 \oplus v_2) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v_1 \oplus v_2)) \\&= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)))) \\&= \varphi^{-1}(\lambda \cdot (\varphi(v_1) + \varphi(v_2))) \\&= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v_1) + \lambda \cdot \varphi(v_2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda \otimes v_1) \oplus (\lambda \otimes v_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(\lambda \otimes v_1) + \varphi(\lambda \otimes v_2)) \\&= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v_1))) + \varphi(\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v_2)))) \\&= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v_1) + \lambda \cdot \varphi(v_2))\end{aligned}$$

# Pregunta 1

3. Demostración  $\beta \otimes (\lambda \otimes v) = (\beta \cdot \lambda) \otimes v$

$$\begin{aligned}\beta \otimes (\lambda \otimes v) &= \beta \otimes \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v)) \\&= \varphi^{-1}(\beta \cdot \varphi(\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(v)))) \\&= \varphi^{-1}(\beta \cdot \lambda \cdot \varphi(v)) \\&= \varphi^{-1}((\beta \cdot \lambda) \cdot \varphi(v)) \\&= (\beta \cdot \lambda) \otimes v\end{aligned}$$

4. Demostración  $1 \otimes v = v$

$$\begin{aligned}1 \otimes v &= M \cdot sgn(v) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right) \right] \\&= M \cdot sgn(v) \left[ 1 - 1 + \frac{|v|}{M} \right] \\&= M \cdot sgn(v) \frac{|v|}{M} \\&= v\end{aligned}$$

# Pregunta 1

5. Demostración opuesto de  $v$  es  $w = -1 \otimes v$

$$\begin{aligned}-1 \otimes v &= M \cdot sgn(-v) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right) \right] \\&= sgn(-v)|v| \\&= sgn(-1)sgn(v)|v| \\&= -v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v \oplus (-v) &= M \cdot sgn(v - v) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right] \\&= 0\end{aligned}$$

# Pregunta 1

Para demostrar que  $\varphi$  es un isomorfismo se debe verificar que:

- 1  $\varphi(v_1 \oplus v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \forall v_1, v_2 \in E.$
- 2  $\varphi(\lambda \otimes v) = \lambda \cdot \varphi(v), \forall v \in E, \forall \lambda \in K.$
- 3  $\varphi$  es biyectiva.
- 4  $\varphi$  admite inverso.

# Pregunta 1

Demostración  $\varphi(v_1 \oplus v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \forall v_1, v_2 \in E.$

1.  $sgn(v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1$

Sin pérdida de generalidad suponer que  $v_1 \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\varphi(v_1 \oplus v_2) &= \varphi\left(M \cdot sgn(v_1 + v_2) \left[1 - \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right)^{\gamma_2}\right]\right) \\ &= \varphi\left(M \cdot 0 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right)^{\gamma_2}\right]\right) \\ &= \varphi(0) \\ &= -M \cdot sgn(0) \ln\left(1 - \frac{|0|}{M}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) + \varphi(v_2) &= -M \cdot sgn(v_1) \ln\left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right) - M \cdot sgn(v_2) \ln\left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right) \\ &= -M \ln\left(1 - \frac{v_1}{M}\right) + M \ln\left(1 - \frac{v_1}{M}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

# Pregunta 1

2.  $\operatorname{sgn}(v_1 + v_2) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(v_1 \oplus v_2) = \operatorname{sgn}(v_1 + v_2)$ .

$$v_1 \oplus v_2 = M \cdot \operatorname{sgn}(v_1 + v_2) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right],$$

$$\gamma_1 = \frac{\operatorname{sgn}(v_1)}{\operatorname{sgn}(v_1 + v_2)},$$

$$\gamma_2 = \frac{\operatorname{sgn}(v_2)}{\operatorname{sgn}(v_1 + v_2)}$$

$M > 0$  por definición.

Se demostró que  $\left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right] > 0$ . Para esto se analizaron los siguientes casos:

- 1  $\operatorname{sgn}(v_1) = \operatorname{sgn}(v_2) = \operatorname{sgn}(v_1 + v_2)$ .
- 2 Cuando uno es cero y el otro es distinto de cero.
- 3  $\operatorname{sgn}(v_1) \neq \operatorname{sgn}(v_2), \operatorname{sgn}(v_1) \neq 0, \operatorname{sgn}(v_2) \neq 0$  :
  - 1  $\operatorname{sgn}(v_1 + v_2) = 1$ .
  - 2  $\operatorname{sgn}(v_1 + v_2) = -1$ .

En todos estos casos se comprobó la desigualdad.

Por tanto  $\operatorname{sgn}(v_1 \oplus v_2) = \operatorname{sgn}(v_1 + v_2)$ .

# Pregunta 1

$$3. \varphi(v_1 \oplus v_2) =$$

$$-M \cdot sgn(v_1 + v_2) \ln \left( 1 - \frac{\left| M \cdot sgn(v_1 + v_2) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right] \right|}{M} \right)$$

$$= -M \cdot sgn(v_1 + v_2) \ln \left( 1 - \frac{M \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{\gamma_1} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{\gamma_2} \right]}{M} \right)$$

⋮

$$= -M \ln \left( \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{sgn(v_1)} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{sgn(v_2)} \right)$$

$$\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = -M \cdot sgn(v_1) \ln \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right) - M \cdot sgn(v_2) \ln \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)$$

⋮

$$= -M \ln \left( \left( 1 - \frac{|v_1|}{M} \right)^{sgn(v_1)} \left( 1 - \frac{|v_2|}{M} \right)^{sgn(v_2)} \right)$$

# Pregunta 1

Demostración  $\varphi(\lambda \otimes v) = \lambda \cdot \varphi(v) \quad \forall v \in E, \forall \lambda \in K.$

$$\lambda \otimes v = M \cdot sgn(\lambda v) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right)^{|\lambda|} \right]$$

Si  $sgn(\lambda v) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$  y es sencillo demostrar que  
 $\varphi(\lambda \otimes v) = \lambda \cdot \varphi(v) = 0.$

# Pregunta 1

Para  $sgn(\lambda v) \neq 0$  es sencillo demostrar que  $sgn(\lambda \otimes v) = sgn(\lambda v)$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \otimes v) &= \varphi\left(M \cdot sgn(\lambda v) \left[1 - \left(1 - \frac{|v|}{M}\right)^{|\lambda|}\right]\right) \\ &= -M \cdot sgn(\lambda v) \ln\left(1 - \frac{M\left[1 - \left(1 - \frac{|v|}{M}\right)^{|\lambda|}\right]}{M}\right)\end{aligned}$$

⋮

$$= -\lambda M \cdot sgn(v) \ln\left(1 - \frac{|v|}{M}\right)$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \varphi(v) &= \lambda(-M \cdot sgn(v) \ln\left(1 - \frac{|v|}{M}\right)) \\ &= -\lambda M \cdot sgn(v) \ln\left(1 - \frac{|v|}{M}\right)\end{aligned}$$

# Pregunta 1

## Demostración Inyectividad

Suponer que se tiene  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$  entonces:

$$-M \cdot sgn(v_1) \ln \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right) = -M \cdot sgn(v_2) \ln \left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right)$$

$$sgn(v_1) \ln \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right) = sgn(v_2) \ln \left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right), \quad sgn(v_1) = sgn(v_2)$$

$$\ln \left(1 - \frac{|v_1|}{M}\right) = \ln \left(1 - \frac{|v_2|}{M}\right)$$

⋮

$$|v_1| = |v_2| \wedge sgn(v_1) = sgn(v_2)$$

$$v_1 = v_2$$

# Pregunta 1

Inverso.

Se puede comprobar mediante una serie de despejes que el inverso de  $\varphi$  es efectivamente la función:  $\varphi^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-M, M)$  definida como:

$$\varphi^{-1}(x) = M \cdot \operatorname{sgn}(x) \left( 1 - e^{-\frac{|x|}{M}} \right)$$

Demostración Sobrejetividad.

Se puede comprobar de forma gráfica mediante el gráfico mostrado anteriormente de la función  $\varphi$ .

Otra vía es la analítica al comprobar que el codominio de la función  $\varphi$  coincide con el dominio de su inversa  $\varphi^{-1}$ .

## Pregunta 2

Cuadro: Comparativa de la suma en los modelos LIP y PSLIP

LIP	PSLIP
$45 \boxplus 15 = 57,36$	$45 \oplus 15 = 55,29$
$45 \boxplus 70 = 102,69$	$45 \oplus 70 = 94,95$
$45 \boxplus 150 = 168,63$	$45 \oplus 150 = 158,60$
$45 \boxplus 215 = 222,20$	$45 \oplus 215 = 216,35$

Información a nivel de pixel: Cuanto de su valor de intensidad aporta al resultado final de la operación.

Información a nivel de imagen: Información de la imagen que se mantuvo después de realizar la operación.

# Pregunta 2



(a) Lineal  $C_p = 3,49$

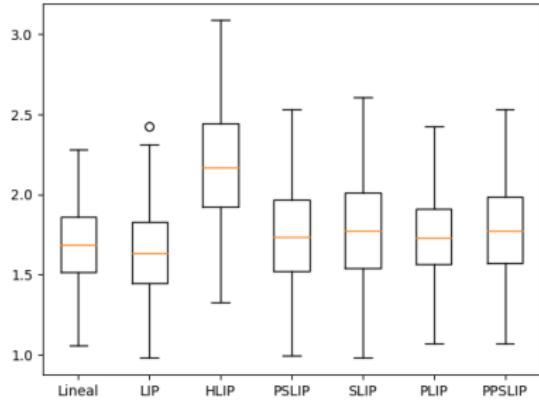


(b) LIP  $C_p = 5,71$



(c) PSLIP  $C_p = 1,39$

# Pregunta 3



(d) Diagramas de caja para la medida  $C_p$ .

Modelo	Media	Mediana
Lineal	1,68	1,68
LIP	1,63	1,63
HLIP	2,18	2,17
PSLIP	1,74	1,73
SLIP	1,78	1,77
PLIP	1,73	1,73
PPSLIP	1,77	1,77

(e) Media y mediana del valor de  $C_p$ .

**Figura:** Análisis estadístico de la operación suma de los diferentes modelos utilizando imágenes de radiografías de tórax.