­­Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БелорусскиЙ государственный университет

информатики и радиоэлектроники

Факультет Компьютерных Систем и Сетей

Кафедра Программного обеспечения информационных технологий

|  |
| --- |
|  |
|  |

Лабораторная работа №3

по дисциплине «Методы оптимизации»

на тему:

Приложения линейного программирования

Вариант 26

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил  Студент гр. 751003 |  | Стубеда В.Д. |
| Проверила: |  | Филатченкова О.А. |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Минск, 2019

**Задание 1** по теме

«ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ИГР»

За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b1, b2, b3 или b4 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c1 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят с2 ед. в расчете на единицу сырья.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях:

а) вероятности q1, q2, q3, q4 потребности в сырье в количествах соответственно b1, b2, b3 , b4 ед. известны;

б) потребление сырья в количествах b1, b2, b3 , b4 ед. представляется равновероятным;

в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования).

*Указание*. В п.3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а) — критерием Байеса, в п. 3б) — критерием Лапласа, в п. 3в) — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

**Условие**:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| b1 | b2 | b3 | b4 | c1 | c2 | q1 | q2 | q3 | q4 | y |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 4 | 8 | 0.3 | 0.5 | 0.1 | 0.1 | 0.6 |

**Решение:**

Представим рассматриваемую ситуацию в виде игры — математической модели конфликта, рассматриваемого в условиях неопределенности, исход которого заранее не известен. Одним из участников игры является руководство предприятия, заинтересованное в минимизации потерь — игрок A. Вторым участником игры является «природа» (совокупность объективных неопределенных факторов) — игрок П, отвечающий за имеющееся кол-во единиц сырья на предприятии.

Такая игра относится к играм с «природой», в которых первый игрок старается действовать осмотрительно, а второй — случайно.

Руководство предприятия может принять решение (стратегию) о закупке определенного кол-ва сырья на склад для производства продукции разного качества. Для «природы» в рассматриваемой ситуации возможны разные стратегии, когда может потребоваться произвести продукцию разного качества, а, следовательно, может потребоваться разное кол-во сырья. Т.е. игрок А не знает продукцию какого качества может запросить игрок П, а значит и не знает, сколько необходимо запасти сырья.

Разница между необходимым и имеющимся сырьем для разных сценариев:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| А2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| А3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
| А4 | -3 | -2 | -1 | 0 |

Составим *платежную матрицу*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 0 | 8 | 16 | 24 |
| А2 | -4 | 0 | 8 | 16 |
| А3 | -8 | -4 | 0 | 8 |
| А4 | -12 | -8 | -4 | 0 |

**Рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья**

*Вероятности потребности в сырье известны и равны q1-4*

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш max ai, где

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий Байеса | П1 | П2 | П3 | П4 | Сумма |
| А1 | 0 | -4 | -1,6 | -2,4 | -8 |
| А2 | -1,2 | 0 | -0,8 | -1,6 | -3,6 |
| А3 | -2,4 | -2 | 0 | -0,8 | -5,2 |
| А4 | -3,6 | -4 | -0,4 | 0 | -8 |

По данному критерию предпочтительнее оказывается стратегия A2.

*Потребление сырья равновероятно*

Для такого подхода воспользуемся принципом недостаточного основания Лапласа, где qj = 1/n = 0,25

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий Лапласа | П1 | П2 | П3 | П4 | Сумма |
| А1 | 0 | -2 | -4 | -6 | -12 |
| А2 | -1 | 0 | -2 | -4 | -7 |
| А3 | -2 | -1 | 0 | -2 | -5 |
| А4 | -3 | -2 | -1 | 0 | -6 |

По данному критерию предпочтительнее оказывается стратегия А3.

*Вероятность потребления сырья неизвестна*

Воспользуемся критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Максимальный критерий Вальда - стратегия крайнего пессимизма. Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий Вальда | П1 | П2 | П3 | П4 | Минимум |
| А1 | 0 | -8 | -16 | -24 | -24 |
| А2 | -4 | 0 | -8 | -16 | -16 |
| А3 | -8 | -4 | 0 | -8 | -8 |
| А4 | -12 | -8 | -4 | 0 | -12 |

По данному критерию предпочтительнее оказывается стратегия А3.

Критерий Сэвиджа – стратегия минимаксного риска. Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Платежная матрица | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 0 | -8 | -16 | -24 |
| А2 | -4 | 0 | -8 | -16 |
| А3 | -8 | -4 | 0 | -8 |
| А4 | -12 | -8 | -4 | 0 |

Составим матрицу рисков, где элементы матрицы рисков rij = max Пj – aij:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Матрица рисков | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 0 | 8 | 16 | 24 |
| А2 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| А3 | 8 | 4 | 0 | 8 |
| А4 | 12 | 8 | 4 | 0 |

По данному критерию предпочтительнее оказывается стратегия А3.

Критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма) – это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Стратегия выбирается в соответствии со значением min(λ\*max rij + (1- λ)\*min rij).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Матрица рисков | П1 | П2 | П3 | П4 | Максимум | Минимум | По Гурвицу |
| А1 | 0 | 8 | 16 | 24 | 24 | 0 | 14,4 |
| А2 | 4 | 0 | 8 | 16 | 16 | 0 | 9,6 |
| А3 | 8 | 4 | 0 | 8 | 8 | 0 | 4,8 |
| А4 | 12 | 8 | 4 | 0 | 12 | 0 | 7,2 |

По данному критерию предпочтительнее оказывается стратегия А3.

**Решение задачи**

В данной игре α= max min aij = -8 <> 0 = min max aij = β и игру следует решать в смешанных стратегиях. Т.к. цена игры v<0 (α<v<β) то, прежде чем сводить игру к задаче линейного программирования, требуется, для получения положительной цены игры, прибавить ко всем элементам платежной матрицы одно и тоже положительное число. После получения ответа это число отнимают от новой цены игры. Например, число 24:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Платежная матрица | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 24 | 16 | 8 | 0 |
| А2 | 20 | 24 | 16 | 8 |
| А3 | 16 | 20 | 24 | 16 |
| А4 | 12 | 16 | 20 | 24 |

Математическая модель задачи для игрока А:



Математическая модель задачи для игрока П:



Найдем оптимальную стратегию q\* игрока П. Для этого воспользуемся функцией «Поиск решения»:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Платежная матрица | П1 | П2 | П3 | П4 |  | Ограничения | | | |
| А1 | 24 | 16 | 8 | 0 |  | 1 | <= | 1 |
| А2 | 20 | 24 | 16 | 8 |  | 1 | <= | 1 |
| А3 | 16 | 20 | 24 | 16 |  | 1 | <= | 1 |
| А4 | 12 | 16 | 20 | 24 |  | 1 | <= | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| y\*= | 0,041666667 | 0 | 0 | 0,02083333 |  | f(y)= | 0,0625 |  |

Решение для двойственной задачи можно найти и из отчета по устойчивости:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x\*= | 0,020833333 | 0 | 0 | 0,04166667 |  | z(x)= | 0,0625 |

Вычисляем цену игры v и компоненты qi и pi оптимальной смешанной стратегии:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| v = 1 / f(y) = | 16 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| qi = v \* yi | 0,666666667 | 0 | 0 | 0,33333333 |
| pi = v \* xi | 0,333333333 | 0 | 0 | 0,66666667 |

Т.к. для решения получения решения мы прибавляли число 24, то отнимем его для вычисления цены игры:

v = 16 - 24 = -8.

**Задание 2** по теме «ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЕТЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ»

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность tij и минимально возможное время выполнения dij. Пусть задан срок выполнения проекта t0, а расчетное tкр > t0. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств хij и выражается соотношением: t’ij = tij – kij\*xij. Технологические коэффициенты kij известны.

Требуется найти:

1) критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

2) построить линейный график (график Ганта),

3) такие , , чтобы:

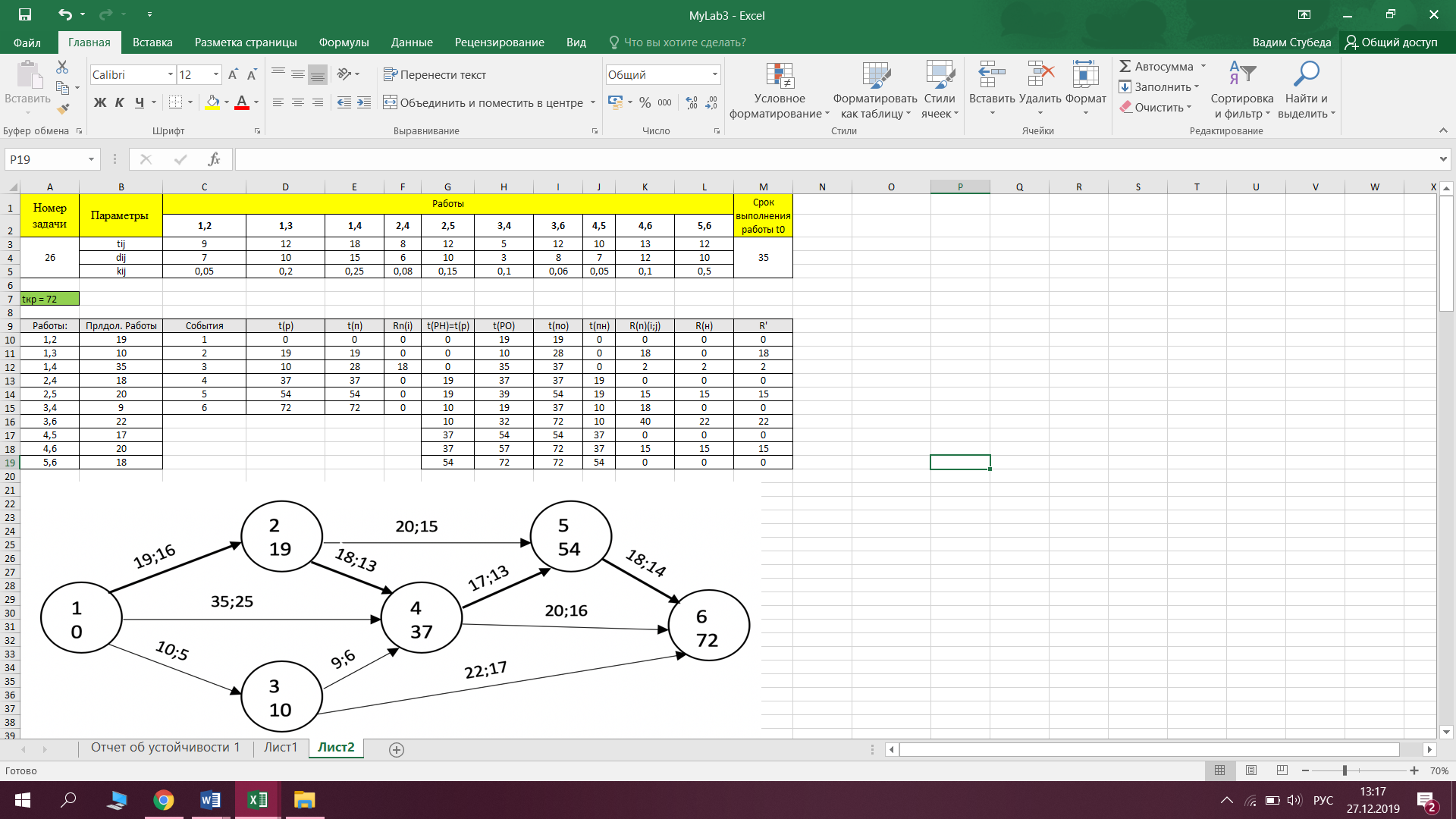
* срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t0;
* суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным;
* продолжительность выполнения каждой работы t’ij была не меньше заданной величины dij.

4) по найденным данным найти новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

5) построить линейный график

6) сделать выводы

**Условие:**



**Решение:**

*Ранним сроком* tр свершения события i называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы.

*Поздним сроком* tп свершения события i является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени tкр.

Зная сроки свершения событий, можно определить временные параметры работ.

*Ранний срок начала работы* (i, j) равен раннему сроку свершения события i: tрн(i, j) =tp(i).

*Ранний срок окончания работы* (i, j) равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности: tpo(i, j) =tp(i) + tij.

*Поздний срок окончания работы* (i, j) совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: tпо(i, j) =tп(j).

*Поздний срок начала работы* (i, j) равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью: tпн(i, j) =tп(j)-tij.

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых tрн(i, j) и tпо(i, j), то они могут иметь разного вида резервы времени.

*Полный резерв времени работы* Rп(i, j) =tп(j) – tр(i)-tij.

*Независимый (свободный) резерв времени работы*  Rн(i, j) = tр(j) – tп(i)-tij.

*Резерв времени события* - разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет: R(i) = tп(i) – tр(i).

Величина необходимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

*Частный резерв времени работы первого вида* R’ (i, j) = tп(j) – tп(i)-tij.

*Частный резерв времени работы второго вида* R’’ (i, j) = tр(j) – tр(i)-tij.

Определим ранние, поздние сроки событий, резерв времени и крит. путь:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| События | t(p) | t(п) | Rn(i) |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 9 | 10 | 1 |
| 3 | 12 | 13 | 1 |
| 4 | 18 | 18 | 0 |
| 5 | 28 | 28 | 0 |
| 6 | 40 | 40 | 0 |
| tкр= | 40 |  |  |

Критический путь - 40

Определяем временные параметры работ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t(PH)=t(p) | t(PO) | t(по) | t(пн) | R(n)(i;j) | R(н) | R' |
| 0 | 9 | 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 12 | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 18 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 17 | 18 | 10 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 21 | 28 | 16 | 7 | 6 | 6 |
| 12 | 17 | 18 | 13 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 24 | 40 | 28 | 16 | 15 | 15 |
| 18 | 28 | 28 | 18 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 31 | 40 | 27 | 9 | 9 | 9 |
| 28 | 40 | 40 | 28 | 0 | 0 | 0 |

Сетевой график:



Линейный график Ганта:

Расчеты показали, что срок выполнения проекта tкр = 40 превышает директивный срок t0 = 35.

**Оптимизация:**

*Составление математической модели задачи*

Целевая функция имеет вид

f = x12 + x13 + x14 + x24 + x25 + x34 + x36 + x45 + x46 + x56 (min)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ограничения | |  |  |  |
| а) срок выполнения проекта | | |  |  |
|  |  |  |  |  |
| б) продолжительность выполнения каждой работы | | | | |
| |  | | --- | |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств | | | | |
| |  | | --- | |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| г) время начала выполнения каждой работы | | | |  |
| |  | | --- | |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| д) условие неотрицательности неизвестных | | | |  |
|  |  |  |  |  |

Решив задачу с помощью EXEL получаем следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры | Работы | | | | | | | | | |
| **1,2** | **1,3** | **1,4** | **2,4** | **2,5** | **3,4** | **3,6** | **4,5** | **4,6** | **5,6** |
| tij | 9 | 12 | 18 | 8 | 12 | 5 | 12 | 10 | 13 | 12 |
| dij | 7 | 10 | 15 | 6 | 10 | 3 | 8 | 7 | 12 | 10 |
| kij | 0,05 | 0,2 | 0,25 | 0,08 | 0,15 | 0,1 | 0,06 | 0,05 | 0,1 | 0,5 |
| t' | 9 | 10 | 15 | 8 | 12 | 5 | 12 | 10 | 13 | 10 |
| tн | 0 | 0 | 0 | 9 | 13 | 10 | 10 | 15 | 17 | 25 |
| to | 9 | 10 | 15 | 17 | 25 | 15 | 22 | 25 | 30 | 35 |
| x | 0 | 10 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| to-tн | 9 | 10 | 15 | 8 | 12 | 5 | 12 | 10 | 13 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| f | 26 | - используемые ресурсы |  |  |  |  |  |  |  |  |

Определим новые ранние, поздние сроки событий, новый резерв времени и новый крит. путь:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| События | t(p) | t(п) | Rn(i) |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 9 | 9 | 0 |
| 3 | 12 | 12 | 0 |
| 4 | 17 | 17 | 0 |
| 5 | 25 | 25 | 0 |
| 6 | 35 | 35 | 0 |
| tкр= | 35 |  |  |

Критический путь - 35

Определяем новые временные параметры работ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t(PH)=t(p) | t(PO) | t(по) | t(пн) | R(n)(i;j) | R(н) | R' |
| 0 | 9 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 12 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 17 | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 17 | 17 | 9 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 21 | 25 | 13 | 4 | 4 | 4 |
| 12 | 17 | 17 | 12 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 24 | 35 | 23 | 11 | 11 | 11 |
| 17 | 25 | 25 | 17 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 30 | 35 | 22 | 5 | 5 | 5 |
| 25 | 35 | 35 | 25 | 0 | 0 | 0 |

Новый сетевой график:



Новый линейный график Ганта:

**Выводы:**

Чтобы выполнить работы проекта за директивное время t0=35, необходимо дополнительно вложить 48 ден.ед. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ден.ед. – в работу (1,4), 40 ден.ед. – в работу (4,5), 4 ден.ед. – в работу (5,6), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,4) на 1 дня, работы (4,5) - на 2 дня, работы (5,6) - на 2 дня. Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 5 ед. времени.