基于传统数学的主纤维丛版广义非交换李代数（PFB-GNLA）：重定义联络的对齐版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-02
- 版本：v1.0.0

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见： 作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

在完全“传统数学”框架（主纤维丛、Ehresmann 联络、Atiyah-algebroid、Lie–Rinehart 结构、导子与包络代数）内，对《基于传统数学的 PFB-GNLA：构造与定义》进行**重定义联络（connection）的对齐化改写。做法是不改变经典对象，仅在参数流形** $(\mathcal{W})$ 上引入一族随参的主丛与模联络，并把“重定义联络”的影响体现在**积主丛**

$$\Pi:\ \mathcal{P}:=P\times\mathcal{W}\ \longrightarrow\ M\times\mathcal{W}$$

上的**总联络**

$$\boxed{\mathbb{A}=A^{(x)}(\mathbf{w})+A^{(w)}}$$

及其曲率的标准分解

$$\boxed{\mathbb{F}=F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}}$$

其中 $(A^{(x)}(\mathbf{w}))$ 是对每个 $(\mathbf{w}\in\mathcal{W})$ 的经典 Ehresmann 联络，$(A^{(w)})$ 是沿 $(\mathcal{W})$ 的基本（(G)-等变、基本）$(\mathfrak{g})$-值 1-形式。该构造把“重定义联络”的变化视为**参数方向的联络分量**，并在传统微分几何语言下给出**扩展 Bianchi 恒等式**、**Atiyah-括号与锚兼容的曲率修正**以及**模联络 $(\nabla(\mathbf{w}))$** 的协变化。固定参数时恢复原文结构；若 $(A^{(w)})$ 由一族规范映射 $(g:\mathcal{W}\to\mathcal{G}(P))$ 的 Maurer–Cartan 形式 $(g^{-1}dg)$ 诱

导，则 ($F^{(ww)}$) 自动满足 Maurer–Cartan 方程。本文据此重述 PFB-GNLA 的数据与公理，使“重定义联络”与传统表述**无缝对齐**。

---

1. 记号与预备（传统设定 + 参数化）

- 底域 ($\Bbbk$) 特征 (0)；李群 (G) 与李代数 ($\mathfrak{g}$)。
- 主 (G)-丛 ($\pi : P \to M$)，规范群 ($\mathcal{G}(P)$)。
- **参数流形** ($\mathcal{W}$)（可微）；($\mathbf{w} \in \mathcal{W}$) 表示外参/控制量。
- 经典 Ehresmann 联络 ($A^{(x)}(\mathbf{w}) \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$)；曲率

$$F^{(xx)}(\mathbf{w}) = d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)} \in \Omega^{2,0}(P \times \mathcal{W}, \mathfrak{g}).$$

- 在积主丛 ($\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$) 上取**总联络**

$$\mathbb{A} := A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad A^{(w)} \in \Omega^{0,1}(P \times \mathcal{W}, \mathfrak{g}),$$

  其中 ($A^{(w)}$) 要求基本与 (G)-等变（故可下沉至 ($\mathrm{Ad}(P)$)-值形式）。
- **曲率三分解**

$$\mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = \underbrace{F^{(xx)}}_{\Omega^{2,0}} + \underbrace{F^{(xw)}}_{\Omega^{1,1}} + \underbrace{F^{(ww)}}_{\Omega^{0,2}},$$

  其中

$$\begin{aligned} F^{(xw)} &:= d_x A^{(w)} + d_{\mathbf{w}} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\ F^{(ww)} &:= d_{\mathbf{w}} A^{(w)} + A^{(w)} \wedge A^{(w)}. \end{aligned}$$

- **扩展 Bianchi 恒等式**

$$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} := d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} + [\mathbb{A}, \mathbb{F}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_x F^{(xx)} = 0, \\ D_x F^{(xw)} + D_{\mathbf{w}} F^{(xx)} = 0, \\ D_{\mathbf{w}} F^{(xw)} + D_x F^{(ww)} = 0, \\ D_{\mathbf{w}} F^{(ww)} = 0. \end{cases}$$

- 特别地，若存在光滑 ($g : \mathcal{W} \to \mathcal{G}(P)$) 使 ($A^{(w)} = g^{-1} d_{\mathbf{w}} g$)，则

$$d_{\mathbf{w}} A^{(w)} + A^{(w)} \wedge A^{(w)} = 0 \quad (\text{Maurer–Cartan}),$$

即 ($F^{(ww)}=0$)。

---

2. PFB-GNLA 的对齐数据与公理（传统化表达）

2.1 数据

$$
\big(M,G,P;\ \mathcal{W};\ \mathcal{A};\ L,\rho;\ [\cdot,\cdot];\ \nabla(\mathbf{w});\ \mathbb{A}\big),
$$

其中:

- ($(\mathcal{A},\cdot)$) 为幺结合（可非交换）($\Bbbk$)-代数，($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 为其导子李代数；($\Omega^\bullet_{\mathcal{A}}$) 为普遍微分。
- (L) 为 ($\mathcal{A}$)-双模并带 (G)-等变结构；($\rho: L\to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 为锚。
- ($[\cdot,\cdot]: L\times L\to L$) 为双线性括号。
- ($\nabla(\mathbf{w})$) 为 (L) 上的 ($\mathcal{A}$)-模联络（依赖 ($\mathbf{w}$) 光滑）。
- ($\mathbb{A}=A^{(x)}(\mathbf{w})+A^{(w)}$) 是积主丛的总联络（第 1 节）。

2.2 公理

(A1') Leibniz（双侧）：($\forall a\in\mathcal{A}, x,y\in L$)

$$
[x,ay]=(\rho(x)a)y+a[x,y],\qquad [xa,y]=[x,y]a+x(\rho(y)a).
$$

(A2') 锚-曲率兼容（扩展）：存在 ($\kappa_{\mathbf{w}}: L\wedge L\to\mathcal{A}$)（($\mathcal{A}$)-双线性）使

$$
\boxed{\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]+\mathrm{ad}_{\kappa_{\mathbf{w}}(x,y)}}
$$

且 ($\kappa_{\mathbf{w}}$) 由 ($\mathbb{F}$) 的（表示或配对）给出：在标准显示模型（§3）里,

$$
\kappa_{\mathbf{w}}(X\oplus\xi,\ Y\oplus\eta)\ \sim\ \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}\Big(F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}\Big)
$$

再经 ($\mathrm{ad}(P)\to\mathrm{End}(E)$) 或 ($\mathcal{A}$) 的表示映射传入。

(A3') Jacobi（同伦修正）：存在三线性 ($l_3^{(\mathbf{w})}: L^{\otimes 3}\to L$) 使

$$
[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=l_3^{(\mathbf{w})}(x,y,z),
$$

且 ($l_3^{(\mathbf{w})}$) 由闭三形式 ($H(\mathbf{w})$) 或 ($\mathbb{F}$) 的收缩给出；当 ($F^{(xw)} = F^{(ww)} = 0$) 时退化为 ($l_3 \equiv 0$)。

(A4') 模联络协变化：设 ($\nabla(\mathbf{w}) : L \to \Omega^1_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} L$) 满足

$$\nabla(ay) = da \otimes y + a\nabla y, \qquad \Theta(\mathbf{w}) := \nabla(\mathbf{w})^2 \in \Omega^2_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(L),$$

并与 ($\mathbb{A}$) 协变（见 §3.2），满足 Bianchi 型条件。

(A5') 规范与参数自然性：对任意规范变换 ($g : P \to G$) 与参数变化 ($\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}'$)，

$$\mathbb{A} \mapsto \mathrm{Ad}_g^{-1}\mathbb{A} + \mathrm{Ad}_g^{-1} d_{x,\mathbf{w}} g, \qquad \text{结构式 (A1')–(A4') 保持。}$$

(A6') 退化一致性：若 ($A^{(w)} \equiv 0$) 且 ($\partial_{\mathbf{w}} A^{(x)} \equiv 0$)，则 ($\mathbb{F} = F^{(xx)}$)，全部回到原文之经典版本。

---

3. 显示模型与公式（对齐版）

3.1 Atiyah-型实现与括号修正

用某一 ($A^{(x)}(\mathbf{w})$) 把 (TP/G) 分解，取

$$L \cong \Gamma(TP/G) \ \oplus\ \Gamma(\mathrm{ad}(P)).$$

对 ($X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta$) 令

$$\boxed{\begin{aligned}[X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta] = [X, Y] \ \oplus\ \Big(&\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})}\eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})}\xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} \\ &+\ \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}\big(F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}\big)\Big),\end{aligned}} \tag{3.1}$$

锚

$$\rho(X \oplus \xi) = \mathcal{L}_{\alpha(X)}^{(\cdot,\mathbf{w})} + \mathrm{ad}_{\xi}. \tag{3.2}$$

式 (3.1)–(3.2) 满足 (A1')–(A3')；当 ($A^{(w)} \equiv 0$) 时退化为原文的 Atiyah-括号。

3.2 模联络与曲率

在与 ($\mathbb{A}$) 相容的表示下（例如 ($\mathcal{A}=\Gamma(\mathrm{End}(E))$)），可取

$$\boxed{\nabla(\mathbf{w})=d+\rho(\mathbb{A})\quad\Longrightarrow\quad\Theta(\mathbf{w})=\rho(\mathbb{F})} \tag{3.3}$$

从而 Bianchi ($D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$) 推出 ($\nabla(\mathbf{w})$) 的 Bianchi 型恒等式。若 ($\mathcal{A}$) 带形变量子化，可把 ($\rho(\mathbb{A})$) 与星乘修正合并（保持 Leibniz）。

---

4. 包络代数与 Hopf-algebroid（参数协变）

取 ($\mathcal{A}$)-双端嵌入 (s,t)，定义

$$U_{\mathcal{A}}(L):=T_{\mathcal{A}}(L)\Big/\langle x\otimes y-y\otimes x-[x,y],\quad x\otimes a-a\otimes x-\rho(x)a\rangle\,.$$

若 ($\nabla(\mathbf{w})$) 与 ($\mathbb{F}$) 满足 PBW-型与 Bianchi-族条件，则存在余代数结构

$$\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\qquad \epsilon(x)=0,$$

使 ($U_{\mathcal{A}}(L)$) 成为（左/右）Hopf-algebroid，并对 ($\mathbf{w}$) 变化协变（即在同伦类上不变）。

---

5. 黏合与存在性（带参数）

令 ($\{U_i\}$) 为 (M) 的开覆盖。在每个 (U_i) 上给定 ($(A_i^{(x)}(\mathbf{w}),A_i^{(w)},\ldots)$)，若过渡函数 ($g_{ij}:U_{ij}\to G$) 使

$$\mathbb{A}_j=\mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}\mathbb{A}_i+\mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}d_{x,\mathbf{w}}g_{ij},$$

且局部括号/锚/联络满足 (A1')–(A4')，则可 Čech 黏合得到全局对齐结构。Bianchi 族在黏合后保持。

---

6. 典型特例

(T1) 经典极限：($A^{(w)}\equiv 0$)、($\partial_{\mathbf{w}}A^{(x)}\equiv 0$)。则 ($\mathbb{F}=F^{(xx)}$)，复现原文。

(T2) 纯参数（Maurer–Cartan）：若 ($A^{(w)}=g^{-1}d_{\mathbf{w}}g$)（($g:\mathcal{W}\to\mathcal{G}(P)$)），则 ($F^{(ww)}=0$)；交叉曲率 ($F^{(xw)}$) 刻画“随参变联络”的非可积性。

(T3) 形变量子化：($\mathcal{A}=\Gamma(\mathrm{End}(E))[[\hbar]]$)。用 ($\rho(\mathbb{A})$) 驱动 ($\nabla(\mathbf{w})$)，并把 ($\mathbb{F}$) 的信息经 ($\hbar$)-级修正注入括号（维持 (A1')–(A3')）。

---

7. 结论

在**不引入范畴或非常规记号**的前提下，通过在参数流形 ($\mathcal{W}$) 上构造积主丛 ($\mathcal{P}=P\times\mathcal{W}$) 的**总联络 ($\mathbb{A}=A^{(x)}(\mathbf{w})+A^{(w)}$)**，即可把“重定义联络”的**随参变化与法则效应**转化为传统微分几何里**参数方向的联络与曲率分量**。由此得到的扩展曲率分解与 Bianchi 恒等式，严格地驱动了 PFB-GNLA 在括号、锚兼容与模联络三方面的**协变修正**；固定参数时，结构**完全退化**为原文。该“对齐版”因此在传统语言中给出一套**可检验、可黏合、可退化**的技术方案，使“重定义联络”与经典 PFB-GNLA **一致可合**。

附：一页式公式总览

总联络： $\mathbb{A}=A^{(x)}(\mathbf{w})+A^{(w)}$;

曲率分解： $\mathbb{F}=F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}$,

$$F^{(xx)}=d_xA^{(x)}+A^{(x)}\wedge A^{(x)},$$
$$F^{(xw)}=d_xA^{(w)}+d_{\mathbf{w}}A^{(x)}+[A^{(x)},A^{(w)}],$$
$$F^{(ww)}=d_{\mathbf{w}}A^{(w)}+A^{(w)}\wedge A^{(w)};$$

扩展 Bianchi： $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$;

括号（显示）：

$$[X\oplus\xi,\,Y\oplus\eta]=[X,Y]\ \oplus\ \Big(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})}\eta-\mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})}\xi+[\xi,\eta]\\ +\ \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}\big(F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}\big)\Big);$$

锚兼容： $\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]+\mathrm{ad}_{\kappa_{\mathbf{w}}(x,y)}$;

Jacobi 修正： $\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]]=l_3^{(\mathbf{w})}(x,y,z)\ (\propto\ \mathbb{F})$;

模联络： $\nabla(\mathbf{w})=d+\rho(\mathbb{A}),\quad \Theta(\mathbf{w})=\nabla(\mathbf{w})^2=\rho(\mathbb{F})$;

退化： $A^{(w)}\equiv 0,\ \partial_{\mathbf{w}}A^{(x)}\equiv 0\ \Rightarrow\ \mathbb{F}=F^{(xx)}$ （回到原文）.
