

基于传统数学的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA) : 构造与定义

- 作者: GaoZheng
- 日期: 2025-11-02
- 版本: v1.0.0

注: “**O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)**”相关理论参见: [作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#), 欢迎访问!

摘要

本文在完全“传统”的数学框架下 (微分几何、主纤维丛、Lie-algebroid、Lie–Rinehart 结构、非交换代数与其导子、包络代数与 Hopf-algebroid) 给出**主纤维丛版广义非交换李代数** (Principal-Fiber-Bundle Generalized Noncommutative Lie Algebra, 简写 **PFB-GNLA**) 的严格构造与定义。出发点是带结构群 (G) 的主丛 ($\pi : P \rightarrow M$) 及其 Atiyah-algebroid, 与一个不必交换的么结合代数 ((\mathcal{A}, \cdot)) (或其几何化的层/丛版本)。在充分利用联络 (A)、曲率 (F_A) 与 (\mathcal{A}) 的导子李代数 ($\text{Der}(\mathcal{A})$) 的基础上, 构造带锚映射

$$\rho : L \longrightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$$

和满足双侧 Leibniz 规则的括号 ($[,] : L \times L \rightarrow L$) 的 (\mathcal{A})-双模 (L), 并证明其 Jacobi 身份与锚兼容性在 Bianchi 恒等式和 (\mathcal{A})-联络的条件下严格成立。文中同时给出三类标准模型: 经典交换情形 (回到 Atiyah-algebroid)、矩阵 (或 ($\text{End}(E)$)) 模型与形变量子化 (Fedosov/Kontsevich) 模型, 并给出包络代数 ($U_{\mathcal{A}}(L)$) 的 Hopf-algebroid 结构的充分条件。

1. 记号与预备

- 底域 (\mathbb{k}) 特征为 (0)。
- $((\mathcal{A}, \cdot))$ 为么结合 (不必交换) (\mathbb{k})-代数, $(\text{Der}(\mathcal{A}))$ 为其 (\mathbb{k})-线性导子李代数:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b).$$

- $(P \xrightarrow{\pi} M)$ 为光滑主 (G)-丛, 右作用 (R_g) 。联络一形式 $(A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}))$, 曲率

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in \Omega^2(P, \mathfrak{g}), \quad D_A F_A = 0.$$

• Atiyah-algebroid

$$0 \longrightarrow \text{ad}(P) \longrightarrow TP/G \xrightarrow{\alpha} TM \longrightarrow 0,$$

其中 $(\text{ad}(P) := P \times^{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ 。

- $(\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet)$ 为 (\mathcal{A}) 的普遍微分代数 (或选择合适的微分演算), 并写 (∇) 表示 (\mathcal{A}) -模上的 (左) 联络:

$$\nabla : L \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1 \otimes_{\mathcal{A}} L, \quad \nabla(a \cdot x) = da \otimes x + a \cdot \nabla x,$$

曲率 $(\Theta := \nabla^2 \in \Omega_{\mathcal{A}}^2 \otimes_{\mathcal{A}} \text{End}_{\mathcal{A}}(L))$ 。

2. “骨架”: 主丛与 Atiyah-algebroid 的括号

把 $(L_{\text{At}} := \Gamma(TP/G))$ 视为 $(C^\infty(M))$ -模, 锚 $(\alpha : L_{\text{At}} \rightarrow \mathfrak{X}(M))$ 为投影。若 $(X, Y \in \Gamma(TP)^G)$ 为 (G)-不变向量场, 则其诱导的截面括号满足

$$[X, Y]_{\text{At}} = ([X, Y]) \bmod G, \quad \alpha([X, Y]_{\text{At}}) = [\alpha(X), \alpha(Y)].$$

利用主丛联络 (A) 的分解, 得到标准的“显式”形式: 对 $(X \oplus \xi, Y \oplus \eta \in \Gamma(TM \oplus \text{ad}(P)))$ (用联络把 (TP/G) 分解),

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_{\text{At}} = ([X, Y]) \oplus \left(\mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_X \iota_Y F_A \right). \quad (2.1)$$

这给出经典交换情形的基准。

3. “血肉”: 非交换代数与导子

令 $((\mathcal{A}, \cdot))$ 为一么结合代数。其导子李代数 $(\text{Der}(\mathcal{A}))$ 带交换子

$$[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1.$$

若 $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ 来自向量丛 $(E \rightarrow M)$, 则由 (E) 上的联络 (∇^E) 诱导 (∇^{End}) :

$$\nabla_X^{\text{End}}(\Phi) = [\nabla_X^E, \Phi], \quad \nabla_X^{\text{End}}(\Phi\Psi) = \nabla_X^{\text{End}}(\Phi)\Psi + \Phi\nabla_X^{\text{End}}(\Psi),$$

因此 $(\nabla_X^{\text{End}} \in \text{Der}(\mathcal{A}))$ 。另外, 任意 $(\Phi \in \mathcal{A})$ 给出**内导子** $(\text{ad}_\Phi(\cdot) = [\Phi, \cdot])$ 。

4. PFB-GNLA 的数据与公理 (传统版)

定义 4.1 (PFB-GNLA)

在主丛 $(\pi : P \rightarrow M)$ 与结构群 (G) 上, 一个 **PFB-GNLA** 由九元组

$$(M, G, P; \mathcal{A}; L, \rho, [,], \nabla)$$

组成, 满足:

(A1) (\mathcal{A}) 与 (L): (\mathcal{A}) 为么结合代数; (L) 为 (\mathcal{A}) -双模并带 (G) -等变结构 (与 (\mathcal{A}) -双模结构可交换)。

(A2) 锚: $(\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}))$ 为 (\mathbb{k}) -线性映射, 且为 (\mathcal{A}) -双模态射的导子型增强:

$$\rho(a \cdot x \cdot b) = a \cdot \rho(x) \cdot b, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

(A3) 括号与双侧 Leibniz 规则: 存在 (\mathbb{k}) -双线性

$([,] : L \times L \rightarrow L)$, 使对任意 $(a \in \mathcal{A}), (x, y \in L)$,

$$\begin{aligned} [x, a \cdot y] &= (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y], \\ [x \cdot a, y] &= [x, y] \cdot a + x \cdot (\rho(y)a). \end{aligned} \tag{4.1}$$

(A4) 锚兼容性: (ρ) 把括号送到导子交换子, 允许由曲率诱导的内导子改正:

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \tag{4.2}$$

其中 $(\kappa : L \wedge L \rightarrow \mathcal{A})$ 是与主丛曲率 (F_A) 与 (∇) 相容的 (\mathcal{A}) -双线性映射 (见 §5 的显示模型)。

(A5) Jacobi 恒等式:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{4.3}$$

(A6) (\mathcal{A})-联络与 Bianchi 型条件: (∇) 为 (L) 上的 (\mathcal{A}) -联络, 曲率 $(\Theta = \nabla^2)$ 。记主丛联络为 (A) , 则

$$D_A F_A = 0, \quad (\nabla \wedge \nabla) \circ \rho = \text{ad}_{F_A} \circ \rho, \quad (4.4)$$

其中右端把 (F_A) 作为 (\mathcal{A}) 的内导子密度作用在 (ρ) 上。

(A7) 规范自然性: 对任意规范变换 $(g : P \rightarrow G)$,

$$A \mapsto A^g = g^{-1} A g + g^{-1} d g, \quad [x, y] \mapsto \text{Ad}_g^{-1} [\text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y],$$

(ρ, ∇) 与 (4.1) – (4.4) 保持不变。

| 注: 当 $(\mathcal{A} = C^\infty(M))$ 交换且 $(\kappa \equiv 0)$ 时, (A1)–(A6) 退化为 Atiyah-algebroid 的经典公理。

5. 显示构造 I: $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ 的规范-内禀半直积模型

令 $(E \rightarrow M)$ 为与 (P) 通过表示 $(\rho_G : G \rightarrow \text{Aut}(V))$ 关联的向量丛, $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ 。取 (E) 上联络 (∇^E) 与主丛联络 (A) , 定义

$$L := \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)). \quad (5.1)$$

给出 (\mathcal{A}) -双模结构 (点乘与合成) 以及锚

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla_{\alpha(X)}^{\text{End}} + \text{ad}_{\rho_{!*}(\xi)}, \quad (5.2)$$

其中 $(\rho_{!*} : \text{ad}(P) \rightarrow \text{End}(E))$ 来自表示 (ρ_G) 。定义括号 (沿用 (2.1) 并附内禀作用)

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta] = ([X, Y]) \oplus \left(\mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_\mathfrak{g} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F_A \right). \quad (5.3)$$

则有:

命题 5.3 (Leibniz、锚兼容与 Jacobi)

(1) 式 (5.3) 与锚 (5.2) 满足 (4.1);

(2) 存在

$$\kappa(X \oplus \xi, Y \oplus \eta) = \rho_{!*}(\iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F_A) \in \mathcal{A}, \quad (5.4)$$

使 (4.2) 成立；

(3) 由 $(D_A F_A = 0)$ 与 $([\nabla_X^{\text{End}}, \nabla_Y^{\text{End}}] - \nabla_{[X,Y]}^{\text{End}} = \text{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)})$ 可得 Jacobi (4.3)。

证明略。关键在于 *Bianchi* 恒等式与 $(\text{End}(E))$ 上的导子交换子恒等式。

6. 显示构造 II：形变量子化 (Fedosov/Kontsevich) 情形

若 (M) 为辛/一般泊松流形，取形式星乘 (\star) 于 $(C^\infty(M)[[\hbar]])$ 。置

$$\mathcal{A} := (\Gamma(\text{End}(E))[[\hbar]], \star), \quad \text{Der}(\mathcal{A}) = \text{Der}_\star(\mathcal{A}),$$

把 (5.2) 改写为

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla_{\alpha(X)}^{\text{End}, \star} + \text{ad}_{\rho_{!*}(\xi)}^\star, \quad (6.1)$$

并把 (5.3) 的右端附上 (\hbar) -级的纠正项 (Φ_\hbar) (由 Fedosov/Kontsevich 的多向量场图形泛函给出)，从而仍满足 (4.1)–(4.4)。当 $(\hbar \rightarrow 0)$ 时退化到 §5。

7. 显示构造 III：纯代数半直积

令 $(\mathfrak{g} \curvearrowright \mathcal{A})$ 为代数导子表示 $((\rho_{!*} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})))$ 。取

$$L := \text{Der}(\mathcal{A}) \ltimes (\mathcal{A} \otimes \mathfrak{g}), \quad (7.1)$$

(\mathcal{A}) -双模结构来自左/右乘，锚为投影到 $(\text{Der}(\mathcal{A}))$ 加上内导子：

$$\rho(\delta \oplus (a \otimes \xi)) = \delta + \text{ad}_{a \cdot \rho_{!*}(\xi)}. \quad (7.2)$$

括号取

$$[(\delta_1, a_1 \otimes \xi_1), (\delta_2, a_2 \otimes \xi_2)] = \left([\delta_1, \delta_2], \right. \\ \left. \delta_1(a_2) \otimes \xi_2 - \delta_2(a_1) \otimes \xi_1 + a_1 a_2 \otimes [\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}} \right), \quad (7.3)$$

则 (4.1)–(4.3) 直接成立；若来自某主丛表示，(4.4) 由 Bianchi 推出。

8. 包络代数与 Hopf-algebroid

置 (\mathcal{A}) -双端嵌入 $(s : \mathcal{A} \rightarrow U_{\mathcal{A}}(L))$ 、 $(t : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow U_{\mathcal{A}}(L))$ ，定义 (\mathcal{A}) -相对张量代数的商

$$U_{\mathcal{A}}(L) := T_{\mathcal{A}}(L) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \quad x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a \rangle. \quad (8.1)$$

若 (L) 为平坦可分裂（存在与 (∇) 相容的分裂与 PBW 型条件），可赋以余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \Delta \circ s(a) = s(a) \otimes 1, \quad \epsilon(x) = 0, \quad \epsilon \circ s(a) = a, \quad (8.2)$$

并在附加可逆元条件下给出反元素 (S)，使 $(U_{\mathcal{A}}(L))$ 成为（左/右）**Hopf-algebroid**。这一结构在 §5–§7 的显示模型下可检验。

9. 黏合与存在性

取 $(\{U_i\})$ 为 (M) 的开覆盖，局部给定 $((\mathcal{A}_i, L_i, \rho_i, [\ ,]_i, \nabla_i, A_i))$ ，若过渡函数 $(g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G)$ 使

$$A_j = g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} d g_{ij}, \quad [\ ,]_j = \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \circ [\ ,]_i \circ \text{Ad}_{g_{ij}}, \\ \rho_j = \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \circ \rho_i \circ \text{Ad}_{g_{ij}}, \quad \kappa_j = \rho_{!*}(\text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \kappa_i), \quad (9.1)$$

则可按 Čech-1 黏合得到全局 PFB-GNLA。Bianchi 恒等式与 (4.1)–(4.4) 在黏合后保持。

10. 三类特例与退化

(T1) 经典交换情形: $(\mathcal{A} = C^\infty(M))$, (ρ) 锚入 $(\mathfrak{X}(M))$, $(\kappa \equiv 0)$ 。则 $(L \simeq \Gamma(TP/G))$, (5.3) 退化为 (2.1)。

(T2) 纯内禀非交换点模型: $(M = \{\ast\})$, $(P = G)$ 。 (\mathcal{A}) 任意非交换么代数, $(L) = (\mathfrak{g})$ 作用为 $(\rho_{!*} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}))$, 括号为 $([,]_{\mathfrak{g}})$, 锚兼容性即 $(\rho_{!*})$ 为李代数同态。

(T3) 关联矩阵模型: $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$, 括号与锚如 (5.2)–(5.3); (κ) 由 (5.4) 给出, 为曲率的“代数影像”。

11. 关键恒等式与核验

- **Leibniz** (双侧) :

$$[x, a \cdot y] = (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y], \quad [x \cdot a, y] = [x, y] \cdot a + x \cdot (\rho(y)a).$$

- 锚兼容:

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x,y)}.$$

- **Jacobi**:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

- **曲率-导子换位** (典型于 §5) :

$$[\nabla_X^{\text{End}}, \nabla_Y^{\text{End}}] - \nabla_{[X,Y]}^{\text{End}} = \text{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)}.$$

12. 结论

PFB-GNLA 的“传统”构造把三条成熟脉络——主纤维丛/联络-曲率、非交换代数/导子、Lie-algebroid 与其包络代数——以最小假设组合在同一框架下: 以 (L) 为 (\mathcal{A}) -双模, 锚入 $(\text{Der}(\mathcal{A}))$, 以 (5.3) 类型的括号与 (4.1)–(4.4) 的公理为核心, 使几何 (Atiyah-algebroid) 与非交换“内禀对称”通过曲率 (κ) 耦合。该结构在交换极限回到经典, 在 $(\text{End}(E))$ 与形变量子化情形下给出可计算的非交换扩展, 并可在 PBW 条件下提升为 Hopf-algebroid 的包络对象, 为后续分析 (表示论、同调-上同调、规范场的代数化表述) 提供基础。

附：一页式结构清单

数据: $(M, G, P; \mathcal{A}; L, \rho, [,], \nabla)$.

锚: $\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$.

Leibniz: $[x, ay] = (\rho(x)a)y + a[x, y], \quad [xa, y] = [x, y]a + x(\rho(y)a)$.

锚兼容: $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x,y)}$.

Jacobi: $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]] = 0$.

曲率: $F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A], \quad D_A F_A = 0, \quad \kappa = \rho_{!*}(\iota u F_A)$.

典型括号 (显式) :

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta] = [X, Y] \oplus (\mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta] + \iota_X \iota_Y F_A).$$

包络: $U_{\mathcal{A}}(L) = T_{\mathcal{A}}(L)/\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y], x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a \rangle$.