

# 基于传统数学的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA)：构造与定义

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-02
- 版本：v1.0.0

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：[作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

## 摘要

本文在完全“传统”的数学框架下（微分几何、主纤维丛、Lie-algebroid、Lie-Rinehart 结构、非交换代数与其导子、包络代数与 Hopf-algebroid）给出**主纤维丛版广义非交换李代数**（Principal-Fiber-Bundle Generalized Noncommutative Lie Algebra, 简写 **PFB-GNLA**）的严格构造与定义。出发点是带结构群  $(G)$  的主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$  及其 Atiyah-algebroid，与一个不必交换的么结合代数  $(\mathcal{A}, \cdot)$ （或其几何化的层/丛版本）。在充分利用联络  $(A)$ 、曲率  $(F_A)$  与  $(\mathcal{A})$  的导子李代数  $(\text{Der}(\mathcal{A}))$  的基础上，构造带锚映射

$$\rho : L \longrightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$$

和满足双侧 Leibniz 规则的括号  $([\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L)$  的  $(\mathcal{A})$ -双模  $(L)$ ，并证明其 Jacobi 身份与锚兼容性在 Bianchi 恒等式和  $(\mathcal{A})$ -联络的条件下严格成立。文中同时给出三类标准模型：经典交换情形（回到 Atiyah-algebroid）、矩阵（或  $(\text{End}(E))$ ）模型与形变量子化（Fedosov/Kontsevich）模型，并给出包络代数  $(U_{\mathcal{A}}(L))$  的 Hopf-algebroid 结构的充分条件。

## 1. 记号与预备

- 底域  $(\mathbb{k})$  特征为  $(0)$ 。
- $(\mathcal{A}, \cdot)$  为么结合（不必交换） $(\mathbb{k})$ -代数， $(\text{Der}(\mathcal{A}))$  为其  $(\mathbb{k})$ -线性导子李代数：

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b).$$

- $(P \xrightarrow{\pi} M)$  为光滑主  $(G)$ -丛, 右作用  $(R_g)$ 。联络—形式  $(A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}))$ , 曲率

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in \Omega^2(P, \mathfrak{g}), \quad D_A F_A = 0.$$

- **Atiyah-algebroid**

$$0 \longrightarrow \text{ad}(P) \longrightarrow TP/G \xrightarrow{\alpha} TM \longrightarrow 0,$$

其中  $(\text{ad}(P) := P \times^{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ 。

- $(\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet)$  为  $(\mathcal{A})$  的普遍微分代数 (或选择合适的微分演算), 并写  $(\nabla)$  表示  $(\mathcal{A})$ -模上的 (左) 联络:

$$\nabla : L \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1 \otimes_{\mathcal{A}} L, \quad \nabla(a \cdot x) = da \otimes x + a \cdot \nabla x,$$

曲率  $(\Theta := \nabla^2 \in \Omega_{\mathcal{A}}^2 \otimes_{\mathcal{A}} \text{End}_{\mathcal{A}}(L))$ 。

## 2. “骨架”：主丛与 Atiyah-algebroid 的括号

把  $(L_{\text{At}} := \Gamma(TP/G))$  视为  $(C^\infty(M))$ -模, 锚  $(\alpha : L_{\text{At}} \rightarrow \mathfrak{X}(M))$  为投影。若  $(X, Y \in \Gamma(TP)^G)$  为  $(G)$ -不变向量场, 则其诱导的截面括号满足

$$[X, Y]_{\text{At}} = ([X, Y]) \bmod G, \quad \alpha([X, Y]_{\text{At}}) = [\alpha(X), \alpha(Y)].$$

利用主丛联络  $(A)$  的分解, 得到标准的“显式”形式: 对  $(X \oplus \xi, Y \oplus \eta \in \Gamma(TM \oplus \text{ad}(P)))$  (用联络把  $(TP/G)$  分解),

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_{\text{At}} = ([X, Y]) \oplus \left( \mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_X \iota_Y F_A \right). \quad (2.1)$$

这给出经典交换情形的基准。

## 3. “血肉”：非交换代数与导子

令  $((\mathcal{A}, \cdot))$  为一么结合代数。其导子李代数  $(\text{Der}(\mathcal{A}))$  带交换子

$$[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1.$$

若  $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$  来自向量丛  $(E \rightarrow M)$ , 则由  $(E)$  上的联络  $(\nabla^E)$  诱导  $(\nabla^{\text{End}})$ :

$$\nabla_X^{\text{End}}(\Phi) = [\nabla_X^E, \Phi], \quad \nabla_X^{\text{End}}(\Phi\Psi) = \nabla_X^{\text{End}}(\Phi)\Psi + \Phi\nabla_X^{\text{End}}(\Psi),$$

因此  $(\nabla_X^{\text{End}} \in \text{Der}(\mathcal{A}))$ 。另外, 任意  $(\Phi \in \mathcal{A})$  给出**内导子**  $(\text{ad}_\Phi(\cdot) = [\Phi, \cdot])$ 。

## 4. PFB-GNLA 的数据与公理 (传统版)

### 定义 4.1 (PFB-GNLA)

在主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$  与结构群  $(G)$  上, 一个 **PFB-GNLA** 由九元组

$$(M, G, P; \mathcal{A}; L, \rho, [\cdot, \cdot], \nabla)$$

组成, 满足:

**(A1)  $(\mathcal{A})$  与  $(L)$ :**  $(\mathcal{A})$  为么结合代数;  $(L)$  为  $(\mathcal{A})$ -双模并带  $(G)$ -等变结构 (与  $(\mathcal{A})$ -双模结构可交换)。

**(A2) 锚:**  $(\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}))$  为  $(\mathbb{k})$ -线性映射, 且为  $(\mathcal{A})$ -双模态射的导子型增强:

$$\rho(a \cdot x \cdot b) = a \cdot \rho(x) \cdot b, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

**(A3) 括号与双侧 Leibniz 规则:** 存在  $(\mathbb{k})$ -双线性

$([\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L)$ , 使对任意  $(a \in \mathcal{A}), (x, y \in L)$ ,

$$\begin{aligned} [x, a \cdot y] &= (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y], \\ [x \cdot a, y] &= [x, y] \cdot a + x \cdot (\rho(y)a). \end{aligned} \tag{4.1}$$

**(A4) 锚兼容性:**  $(\rho)$  把括号送到导子交换子, 允许由曲率诱导的内导子改正:

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \tag{4.2}$$

其中  $(\kappa : L \wedge L \rightarrow \mathcal{A})$  是与主丛曲率  $(F_A)$  与  $(\nabla)$  相容的  $(\mathcal{A})$ -双线性映射 (见 §5 的显示模型)。

**(A5) Jacobi 恒等式:**

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{4.3}$$

**(A6) ( $\mathcal{A}$ )-联络与 Bianchi 型条件:**  $(\nabla)$  为  $(L)$  上的  $(\mathcal{A})$ -联络, 曲率  $(\Theta = \nabla^2)$ 。记主丛联络为  $(A)$ , 则

$$D_A F_A = 0, \quad (\nabla \wedge \nabla) \circ \rho = \text{ad}_{F_A} \circ \rho, \quad (4.4)$$

其中右端把  $(F_A)$  作为  $(\mathcal{A})$  的内导子密度作用在  $(\rho)$  上。

**(A7) 规范自然性:** 对任意规范变换  $(g : P \rightarrow G)$ ,

$$A \mapsto A^g = g^{-1} A g + g^{-1} d g, \quad [x, y] \mapsto \text{Ad}_g^{-1} [\text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y],$$

$(\rho, \nabla)$  与 (4.1) – (4.4) 保持不变。

注: 当  $(\mathcal{A} = C^\infty(M))$  交换且  $(\kappa \equiv 0)$  时, (A1)–(A6) 退化为 Atiyah-algebroid 的经典公理。

## 5. 显示构造 I: $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ 的规范-内禀半直积模型

令  $(E \rightarrow M)$  为与  $(P)$  通过表示  $(\rho_G : G \rightarrow \text{Aut}(V))$  关联的向量丛,  $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ 。取  $(E)$  上联络  $(\nabla^E)$  与主丛联络  $(A)$ , 定义

$$L := \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)). \quad (5.1)$$

给出  $(\mathcal{A})$ -双模结构 (点乘与合成) 以及锚

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla_{\alpha(X)}^{\text{End}} + \text{ad}_{\rho!_*(\xi)}, \quad (5.2)$$

其中  $(\rho!_* : \text{ad}(P) \rightarrow \text{End}(E))$  来自表示  $(\rho_G)$ 。定义括号 (沿用 (2.1) 并附内禀作用)

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta] = ([X, Y]) \oplus \left( \mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F_A \right). \quad (5.3)$$

则有:

**命题 5.3 (Leibniz、锚兼容与 Jacobi)**

(1) 式 (5.3) 与锚 (5.2) 满足 (4.1);

(2) 存在

$$\kappa(X \oplus \xi, Y \oplus \eta) = \rho_{!*}(\iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F_A) \in \mathcal{A}, \quad (5.4)$$

使 (4.2) 成立;

(3) 由  $(D_A F_A = 0)$  与  $([\nabla_X^{\text{End}}, \nabla_Y^{\text{End}}] - \nabla_{[X,Y]}^{\text{End}} = \text{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)})$  可得 Jacobi (4.3)。

证明略。关键在于 Bianchi 恒等式与  $(\text{End}(E))$  上的导子交换子恒等式。

## 6. 显示构造 II：形变量子化 (Fedosov/Kontsevich) 情形

若  $(M)$  为辛/一般泊松流形，取形式星乘  $(\star)$  于  $(C^\infty(M)[[\hbar]])$ 。置

$$\mathcal{A} := (\Gamma(\text{End}(E))[[\hbar]], \star), \quad \text{Der}(\mathcal{A}) = \text{Der}_\star(\mathcal{A}),$$

把 (5.2) 改写为

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla_{\alpha(X)}^{\text{End}, \star} + \text{ad}_{\rho_{!*}(\xi)}^\star, \quad (6.1)$$

并把 (5.3) 的右端附上  $(\hbar)$ -级的纠正项  $(\Phi_\hbar)$  (由 Fedosov/Kontsevich 的多向量场图形泛函给出)，从而仍满足 (4.1)–(4.4)。当  $(\hbar \rightarrow 0)$  时退化到 §5。

## 7. 显示构造 III：纯代数半直积

令  $(\mathfrak{g} \curvearrowright \mathcal{A})$  为代数导子表示  $((\rho_{!*} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})))$ 。取

$$L := \text{Der}(\mathcal{A}) \ltimes (\mathcal{A} \otimes \mathfrak{g}), \quad (7.1)$$

$(\mathcal{A})$ -双模结构来自左/右乘，锚为投影到  $(\text{Der}(\mathcal{A}))$  加上内导子：

$$\rho(\delta \oplus (a \otimes \xi)) = \delta + \text{ad}_{a \cdot \rho_{!*}(\xi)}. \quad (7.2)$$

括号取

$$\begin{aligned} [(\delta_1, a_1 \otimes \xi_1), (\delta_2, a_2 \otimes \xi_2)] = & \left( [\delta_1, \delta_2], \right. \\ & \left. \delta_1(a_2) \otimes \xi_2 - \delta_2(a_1) \otimes \xi_1 + a_1 a_2 \otimes [\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

则 (4.1)–(4.3) 直接成立；若来自某主丛表示，(4.4) 由 Bianchi 推出。

## 8. 包络代数与 Hopf-algebroid

置  $(\mathcal{A})$ -双端嵌入  $(s : \mathcal{A} \rightarrow U_{\mathcal{A}}(L))$ 、 $(t : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow U_{\mathcal{A}}(L))$ ，定义  $(\mathcal{A})$ -相对张量代数的商

$$U_{\mathcal{A}}(L) := T_{\mathcal{A}}(L) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \quad x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a \rangle. \quad (8.1)$$

若  $(L)$  为**平坦可分裂**（存在与  $(\nabla)$  相容的分裂与 PBW 型条件），可赋以余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \Delta \circ s(a) = s(a) \otimes 1, \quad \epsilon(x) = 0, \quad \epsilon \circ s(a) = a, \quad (8.2)$$

并在附加可逆元条件下给出反元素  $(S)$ ，使  $(U_{\mathcal{A}}(L))$  成为（左/右）**Hopf-algebroid**。这一结构在 §5–§7 的显示模型下可检验。

## 9. 黏合与存在性

取  $(\{U_i\})$  为  $(M)$  的开覆盖，局部给定  $((\mathcal{A}_i, L_i, \rho_i, [\cdot, \cdot]_i, \nabla_i, A_i))$ ，若过渡函数  $(g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G)$  使

$$\begin{aligned} A_j &= g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij}, & [\cdot, \cdot]_j &= \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \circ [\cdot, \cdot]_i \circ \text{Ad}_{g_{ij}}, \\ \rho_j &= \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \circ \rho_i \circ \text{Ad}_{g_{ij}}, & \kappa_j &= \rho_{i*}(\text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \kappa_i), \end{aligned} \quad (9.1)$$

则可按 Čech-1 黏合得到全局 PFB-GNLA。Bianchi 恒等式与 (4.1)–(4.4) 在黏合后保持。

## 10. 三类特例与退化

**(T1) 经典交换情形：**  $(\mathcal{A} = C^\infty(M))$ ,  $(\rho)$  锚入  $(\mathfrak{X}(M))$ ,  $(\kappa \equiv 0)$ 。则  $(L \simeq \Gamma(TP/G))$ , (5.3) 退化为 (2.1)。

**(T2) 纯内禀非交换点模型：**  $(M = \{*\})$ ,  $(P = G)$ 。  $(\mathcal{A})$  任意非交换么代数,  $(L) = (\mathfrak{g})$  作用为  $(\rho_{!*} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}))$ , 括号为  $([\ , \ ]_{\mathfrak{g}})$ , 锚兼容性即  $(\rho_{!*})$  为李代数同态。

**(T3) 关联矩阵模型：**  $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E)))$ , 括号与锚如 (5.2)–(5.3);  $(\kappa)$  由 (5.4) 给出, 为曲率的“代数影像”。

## 11. 关键恒等式与核验

- **Leibniz** (双侧) :

$$[x, a \cdot y] = (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y], \quad [x \cdot a, y] = [x, y] \cdot a + x \cdot (\rho(y)a).$$

- **锚兼容：**

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}.$$

- **Jacobi：**

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

- **曲率-导子换位** (典型于 §5) :

$$[\nabla_X^{\text{End}}, \nabla_Y^{\text{End}}] - \nabla_{[X, Y]}^{\text{End}} = \text{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)}.$$

## 12. 结论

PFB-GNLA 的“传统”构造把三条成熟脉络——主纤维丛/联络-曲率、非交换代数/导子、Lie-algebroid 与其包络代数——以最小假设组合在同一框架下：以  $(L)$  为  $(\mathcal{A})$ -双模, 锚入  $(\text{Der}(\mathcal{A}))$ , 以 (5.3) 类型的括号与 (4.1)–(4.4) 的公理为核心, 使几何 (Atiyah-algebroid) 与非交换“内禀对称”通过曲率  $(\kappa)$  耦合。该结构在交换极限回到经典, 在  $(\text{End}(E))$  与形变量子化情形下给出可计算的非交换扩展, 并可在 PBW 条件下提升为 Hopf-algebroid 的包络对象, 为后续分析 (表示论、同调-上同调、规范场的代数化表述) 提供基础。

## 附：一页式结构清单

**数据：**  $(M, G, P; \mathcal{A}; L, \rho, [\ , \ ], \nabla)$ .

**锚：**  $\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ .

**Leibniz：**  $[x, ay] = (\rho(x)a)y + a[x, y], \quad [xa, y] = [x, y]a + x(\rho(y)a)$ .

**锚兼容：**  $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}$ .

**Jacobi：**  $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]] = 0$ .

**曲率：**  $F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A], \quad D_A F_A = 0, \quad \kappa = \rho!_*(\iota F_A)$ .

**典型括号（显式）：**

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta] = [X, Y] \oplus (\mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta] + \iota_X \iota_Y F_A).$$

**包络：**  $U_{\mathcal{A}}(L) = T_{\mathcal{A}}(L) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y], x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a \rangle$ .