

基于泛逻辑分析与泛迭代分析的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA)：重定义联络的对齐版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-02
- 版本：v1.0.0

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：作者 (GaoZheng) 网盘分享 或 作者 (GaoZheng) 开源项目 或 作者 (GaoZheng) 主页，欢迎访问！

摘要

本文在原《基于泛逻辑分析与泛迭代分析的 PFB-GNLA：构造与定义》的基础上，给出**“重定义联络 (law-level connection)”的对齐版本。核心做法是：在法则层以强单oidal函子**

$$M_{\mathbf{w}} : \mathbf{L}_B(\mathbf{w}) \longrightarrow \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$$

刻画“价值基准”(w) 驱动的法则对位；由其**对参数域的导数**定义“法则联络”($\mathcal{A}_M := M_{\mathbf{w}}^{-1} d_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}}$) 与“法则曲率”($\mathcal{F}_M = d\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$)。然后通过一个表示

$$R : \text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F(\mathbf{w})) \longrightarrow G \subseteq \text{GL}(V)$$

把法则层数据**退化/还原**为主丛几何中的联络与曲率：

$$A^{(w)} := R(M_{\mathbf{w}})^{-1} d_{\mathbf{w}} R(M_{\mathbf{w}}), \quad F^{(ww)} = d_{\mathbf{w}} A^{(w)} + A^{(w)} \wedge A^{(w)} = R(\mathcal{F}_M).$$

进一步在积丛 $((P \times \mathcal{W}) \rightarrow (M \times \mathcal{W}))$ 上引入**总联络**

$$\mathbb{A} := A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)},$$

其中 $(A^{(x)}(\mathbf{w}) \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}))$ 是对每个 (\mathbf{w}) 的经典 Ehresmann 联络, $(A^{(w)} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}))$ 源自 $(M_{\mathbf{w}})$ 。由此得到的总曲率

$$\mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$$

统一了**传统几何曲率与法则层曲率**, 并满足扩展 Bianchi 恒等式。本文据此重述 PFB-GNLA 的数据与公理, 使锚映射、Leibniz 规则、Jacobi (含三阶同伦修正) 与模联络 $(\nabla(\mathbf{w}))$ 全部与 (\mathbb{A}) 与 (\mathcal{F}_M) 协变, 并在 (\mathbf{w}) 固定时退化回原始版本。

1. 记号与设定

- 底域 (\mathbb{k}) 特征为 (0) 。
- 主 (G) -丛 $(\pi : P \rightarrow M)$, 李代数 (\mathfrak{g}) 。
- **参数域/价值域**: (\mathcal{W}) 为可微流形; $(\mathbf{w} \in \mathcal{W})$ 。
- 非交换么代数 $((\mathcal{A}, \star))$, $(\text{Der}_\star(\mathcal{A}))$ 为其星乘导子李代数; $(\Omega^\bullet_{\mathcal{A}})$ 为普遍微分。
- (\mathcal{A}) -双模 (L) , 锚 $(\rho : L \rightarrow \text{Der}_\star(\mathcal{A}))$ 。
- **法则范畴**: 对每个 (\mathbf{w}) , 由筛选器 $(\Phi_{\mathbf{w}})$ 与闭包 $(\text{cl}_{\Phi_{\mathbf{w}}})$ 得到严格单oidal范畴 $(\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w}))$ 。
- **法则联络**: 强单oidal函子 $(M_{\mathbf{w}})$ 的参数导数

$$\mathcal{A}_M := M_{\mathbf{w}}^{-1} d_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \text{aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)), \quad \mathcal{F}_M := d\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M.$$

- **表示退化**: 固定表示 $(R : \text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F) \rightarrow G)$ 。令

$$A^{(w)} := R(M_{\mathbf{w}})^{-1} d_{\mathbf{w}} R(M_{\mathbf{w}}) \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}), \quad F^{(ww)} = R(\mathcal{F}_M).$$

2. 总联络与扩展曲率

令积主丛 $(\Pi : \mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W})$ 。在 (\mathcal{P}) 上定义

$$\mathbb{A} := A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} := d_{x, \mathbf{w}} \mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$$

其中

$$\begin{aligned}
F^{(xx)} &:= d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)} \in \Omega^{2,0}(P \times \mathcal{W}, \mathfrak{g}), \\
F^{(xw)} &:= d_x A^{(w)} + d_{\mathbf{w}} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}] \in \Omega^{1,1}(\cdot, \mathfrak{g}), \\
F^{(ww)} &:= d_{\mathbf{w}} A^{(w)} + A^{(w)} \wedge A^{(w)} = R(\mathcal{F}_M) \in \Omega^{0,2}(\cdot, \mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

扩展 Bianchi:

$$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} := d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} + [\mathbb{A}, \mathbb{F}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D_x F^{(xx)} = 0, \\ D_x F^{(xw)} + D_{\mathbf{w}} F^{(xx)} = 0, \\ D_{\mathbf{w}} F^{(xw)} + D_x F^{(ww)} = 0, \\ D_{\mathbf{w}} F^{(ww)} = 0. \end{cases}$$

当 (\mathbf{w}) 固定时, (\mathbb{A}) 退化为 $(A^{(x)})$, (\mathbb{F}) 退化为 $(F^{(xx)})$ 。

3. 对齐版 PFB-GNLA 的数据与公理

3.1 数据

$$(M, G, P; \mathcal{W}; \mathcal{A}, \star; L, \rho; [\cdot, \cdot]_\star; \nabla(\mathbf{w}); M_{\mathbf{w}}, R).$$

3.2 公理 (对齐版)

(G1') 非交换基与导子: $((\mathcal{A}, \star))$ 么结合; $(\text{Der}_\star(\mathcal{A}))$ 为李代数。

(G2') 双模与等变性: (L) 为 (\mathcal{A}) -双模并带 (G) -等变结构, 与 (\mathbf{w}) 的变化可交换。

(G3') 锚映射: $(\rho : L \rightarrow \text{Der}_\star(\mathcal{A}))$ 为 (\mathcal{A}) -双模态射。

(G4') Leibniz (双侧) : $(\forall a \in \mathcal{A}, x, y \in L)$

$$[x, a \cdot y]_\star = (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y]_\star, \quad [x \cdot a, y]_\star = [x, y]_\star \cdot a + x \cdot (\rho(y)a).$$

(G5') 锚-曲率兼容: 存在 $(\kappa_{\mathbf{w}} : L \wedge L \rightarrow \mathcal{A})$ (由 (\mathbb{F}) 给出) , 使

$$\boxed{\rho([x, y]_\star) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa_{\mathbf{w}}(x,y)}}$$

且当 $(F^{(xw)} = F^{(ww)} = 0)$ 时, $(\kappa_{\mathbf{w}})$ 退化为仅由 $(F^{(xx)})$ 决定的经典项。

(G6') Jacobi 的同伦修正： 存在三线性 $(l_3^{(\mathbf{w})} : L^{\otimes 3} \rightarrow L)$ (由 (\mathbb{F}) 或闭三形式 $(H(\mathbf{w}))$ 收缩给出) 使

$$[x, [y, z]_\star]_\star + \text{cyc.} = l_3^{(\mathbf{w})}(x, y, z),$$

并在 $(F^{(xw)} = F^{(ww)} = 0)$ 时退化为 $(l_3 = 0)$ 。

(G7') 模联络的法则来源：

$$\nabla(\mathbf{w}) = d + \rho(\mathcal{A}_M) + \Gamma_\star(\mathbf{w})$$

其中 (\mathcal{A}_M) 由 $(M_{\mathbf{w}})$ 定义 (§1) , $(\Gamma_\star(\mathbf{w}))$ 为与星乘 (或形变核) 相关的 (\mathcal{A}) -线性修正; 曲率

$$\Theta(\mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{w})^2$$

与 (\mathbb{F}) 协变并满足 Bianchi 型条件。

(G8') 规范与价值协变性： 对主丛的规范变换 $(g : P \rightarrow G)$ 与价值域微扰 $(\Delta \mathbf{w})$, 存在 $(U_{\Delta \mathbf{w}})$ 使

$$M_{\mathbf{w}+\Delta \mathbf{w}} = U_{\Delta \mathbf{w}} \circ M_{\mathbf{w}}, \quad \mathbb{A} \mapsto \text{Ad}_g^{-1} \mathbb{A} + \text{Ad}_g^{-1} d_{x, \mathbf{w}} g,$$

从而 (\mathbb{F}) 与公理保持不变。

(G9') 退化一致性： 若 $(\partial_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}} \equiv 0)$ (法则不随 (\mathbf{w}) 变) , 则 $(\mathcal{A}_M = F^{(ww)} = F^{(xw)} = 0)$, 全部结构退化为原始 PFB-GNLA。

4. 对齐下的显示括号与锚

以 $(\Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)))$ 的实现为例 (用 $(A^{(x)})$ 做分解) , 对 $(X \oplus \xi, Y \oplus \eta)$ 定义

$$\begin{aligned} [X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_\star &= [X, Y] \oplus \left(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_X \iota_Y F^{(xx)} \right) \\ &+ \Phi_{\hbar}(X \oplus \xi, Y \oplus \eta; \mathbb{F}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

锚

$$\rho(X \oplus \xi) = \mathcal{L}_X^{(\star, \mathbf{w})} + \text{ad}_\star(\xi), \quad (4.2)$$

其中 (Φ_{\hbar}) 把非交换性与总曲率 (\mathbb{F}) 的信息注入括号修正项。式 (4.1)–(4.2) 满足 (G4')–(G6')，且在 (\mathbf{w}) 固定与 $(\hbar \rightarrow 0)$ 时回到原式。

5. 包络与 Hopf-algebroid 的对齐

令 (\mathcal{A}) -双端嵌入 (s, t) 与张量代数商

$$U_{\star}(L) = T_{\mathcal{A}}(L) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y]_{\star}, \quad x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a \rangle.$$

若 $(\nabla(\mathbf{w}))$ 与 (\mathbb{F}) 满足扩展 PBW 条件与 Bianchi 族，存在余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0$$

使 $(U_{\star}(L))$ 成为 (左/右) Hopf-algebroid，并对 (\mathbf{w}) 变化协变 (随 $(M_{\mathbf{w}})$ 的同伦类稳定)。

6. 泛迭代分析：自洽构造的对齐流程

以种子 $(\mathcal{S}_0 = (\mathcal{A}_0, L_0, \rho_0, [\cdot, \cdot]_0, \nabla_0; M_{\mathbf{w},0}))$ 为起点，定义迭代

$$\mathcal{I} : \mathcal{S}_n \longmapsto \mathcal{S}_{n+1}$$

包含两步：

- 形变-法则联动**：据 $(\mathcal{F}_{M,n})$ 与泊松/形变核更新 (\star_{n+1}) 、得 (\mathcal{A}_{n+1}) ;
- 括号-锚-联络自洽**：以 (\mathbb{F}_n) 修正 $([\cdot, \cdot]_n \rightarrow [\cdot, \cdot]_{n+1})$ 、 $(\rho_n \rightarrow \rho_{n+1})$ 、 $(\nabla_n \rightarrow \nabla_{n+1})$ 。
若 (\mathcal{I}) 在合适的度量下为压缩 (或经序数稳定化)，得不动点 $(\hat{\mathcal{S}})$ ，即**对齐的自洽 PFB-GNLA**。

7. 存在性与一致性（要点式）

命题 7.1（局部到整体） 若 $(\{U_i\})$ 覆盖 (M) ，在每个 (U_i) 上给定 $((\mathcal{A}_i, L_i, \dots, \mathbb{A}_i))$ ，且过渡函数 (g_{ij}) 与 $(U_{\Delta \mathbf{w}})$ 使

$$\mathbb{A}_j = \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} \mathbb{A}_i + \text{Ad}_{g_{ij}}^{-1} d_{x, \mathbf{w}} g_{ij},$$

则可 Čech 黏合得到全局对齐结构。

命题 7.2（Bianchi-保真） 若 (\mathcal{F}_M) 闭且 (R) 为李群表示，则 $(D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0)$ 等价于在 (R) 下的所有 Bianchi 族。

命题 7.3（退化极限） 当 $(\partial_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}} \equiv 0)$ 或 (R) 取平凡表示时，对齐公理退化为原始公理。

证明思路： 黏合用标准 1-上同调与自然性；保真来自表示对李括号与外微分的相容；退化直接由定义给出。

8. 连续-离散的切面机制（可选补充）

令切面 $(s : M \rightarrow P)$ 与阈值族 $(\Sigma(\mathbf{w}))$ （由语义度量/约束 $((J, \Phi))$ 确定）。沿基底形流 $(\gamma(t))$ 的平行输运 holonomy $(\text{Hol}_{\mathbb{A}}(\gamma, t, \mathbf{w}))$ 若穿越 $(\Sigma(\mathbf{w}))$ ，则在切面诱导的状态上出现离散跃迁；可概括为

$$\mathcal{T}_{\text{discrete}} = M_{\mathbf{w}}(\mathcal{T}_{\text{point-set}}),$$

与 (G5')-(G7') 一致。

9. 三类典型特例

(T1) 经典极限： $(\partial_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}} \equiv 0)$ 。则 $(A^{(w)} = F^{(xw)} = F^{(ww)} = 0)$ ，恢复原文的 Atiyah-型结构。

(T2) 星乘-形变量子化： $(\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(E))[[\hbar]])$ ； (Φ_{\hbar}) 把 (\mathbb{F}) 注入括号修正； $(\nabla(\mathbf{w}) = d + \rho(\mathcal{A}_M) + O(\hbar))$ 。

(T3) 纯代数半直积： $(M = \{*\})$ ， $(L = \text{Der}_*(\mathcal{A}) \ltimes \mathfrak{g})$ ， $(\kappa_{\mathbf{w}})$ 由 $(R(\mathcal{F}_M))$ 决定，给出法则-到-内导子的耦合。

10. 结论

对齐版把原 PFB-GNLA 的**几何联络**提升为**法则层联络**的表示影像：法则层由 $(M_{\mathbf{w}})$ 给出，几何层由 (\mathbb{A}) 与 (\mathbb{F}) 承载；锚、Leibniz、Jacobi 与模联络对 (\mathbf{w}) 的变化协变，并在 (\mathbf{w}) 固定时严格退化为原结构。这样，**“动力/价值 (\Rightarrow) 法则联络 (\Rightarrow) 几何联络”**成为一条自洽链路，使泛逻辑分析（法则选择）与泛迭代分析（自洽收敛）在 PFB-GNLA 框架内完备闭环。

附：关键公式速览（对齐版）

法则联络： $\mathcal{A}_M = M_{\mathbf{w}}^{-1} d_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}}, \quad \mathcal{F}_M = d\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M;$

表示退化： $A^{(w)} = R(M_{\mathbf{w}})^{-1} d_{\mathbf{w}} R(M_{\mathbf{w}}), \quad F^{(ww)} = R(\mathcal{F}_M);$

总联络： $\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0;$

Leibniz/锚： $[x, ay]_{\star} = (\rho(x)a)y + a[x, y]_{\star}, \quad \rho([x, y]_{\star}) = [\rho(x), \rho(y)] + \text{ad}_{\kappa_{\mathbf{w}}(x,y)};$

三阶修正： $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_{\star}]_{\star} = l_3^{(\mathbf{w})}(x, y, z) \quad (\propto \mathbb{F});$

模联络： $\nabla(\mathbf{w}) = d + \rho(\mathcal{A}_M) + \Gamma_{\star}(\mathbf{w}), \quad \Theta(\mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{w})^2.$