词法KAT作用幺半群的幂子幺半群谱系（规范与工程用法）

- 作者：GaoZheng

- 日期：2025-09-26
- 版本：v1.0.0

摘要

介绍 Kleene Algebra with Tests（KAT）与相关闭包/半环结构在本项目中的角色：用以建模可验证控制流、停机点与合规模式。提供从数学结构到工程接口的映射规范，支撑规则检查、代价累积与策略约束的统一表达。

下面按“自由幺半群 $M=(\Sigma^*,\circ,\varepsilon)$ 的端算子幺半群 $\mathbb{M}_{\text{Lex-KAT}}=(\mathrm{End}(\Sigma^*),\circ,\mathrm{id})$”给出**词法KAT作用幺半群**的典型**幂子幺半群（power submonoid）**族谱。记“$\langle\cdot\rangle$”为由给定算子及其各次幂（函数自合成）生成的最小子幺半群。

---

1. **左乘幂子幺半群**（历史左扩母形）

$$\boxed{\mathsf{M}_L(h)\ :=\ \langle\,\mathbf{L}_h\,\rangle\ =\ \{\mathbf{L}_{h^n}\mid n\ge 0\},\ \ \mathbf{L}_h(s)=h\circ s}$$

性质：$\mathsf{M}_L(h)\cong(\mathbb{N},+,0)$；$\mathbf{L}_{h^m}\circ\mathbf{L}_{h^n}=\mathbf{L}_{h^{m+n}}$。

2. **右乘幂子幺半群**（预测延展母形）

$$\boxed{\mathsf{M}_R(h)\ :=\ \langle\,\mathbf{R}_h\,\rangle\ =\ \{\mathbf{R}_{h^n}\mid n\ge 0\},\ \ \mathbf{R}_h(s)=s\circ h}$$

性质：$\mathbf{R}_{h^m}\circ\mathbf{R}_{h^n}=\mathbf{R}_{h^{m+n}}$。

3. **尾裁剪幂子幺半群**（投影带）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{tail}}(U)\ :=\ \langle\,\mathbf{\Pi}_L\ (L\in U)\,\rangle\ =\ \{\mathbf{\Pi}_L\}\ ,\ \ \mathbf{\Pi}_L^2=\mathbf{\Pi}_L}$$

性质：幂等、交换；合成等价 $\mathbf{\Pi}_L \circ \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{\Pi}_{\min(L,M)} \ \cong \ (U, \min)$。

4. **首裁剪幂子幺半群**

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{head}}(U) \ := \ \{\mathbf{Head}_L\}\ , \ \ \mathbf{Head}_L^2 = \mathbf{Head}_L}$$

与上同构（$(U, \min)$）。

5. **测试幂子幺半群**（KAT tests）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{test}}(\mathcal{C}, U) \ := \ \langle \, \mathbf{T}_{L,\mathcal{C}}^{\text{Suf/Pref}} \, \rangle \ = \ \{\mathbf{T}_P\}\ , \ \ \mathbf{T}_P^2 = \mathbf{T}_P}$$

性质：幂等、可交换；$\mathbf{T}_P \circ \mathbf{T}_Q = \mathbf{T}_{P \wedge Q}$（与“谓词合取”同构的 meet-半格）。

6. **闭包幂子幺半群—后缀闭包**（命中即停）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{cl-suf}}(U, L_p) \ := \ \langle \, \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\text{Suf}} \, \rangle \ = \ \{\text{id}, \ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\text{Suf}}\}\ , \ \ (\mathbf{Cl})^2 = \mathbf{Cl}}$$

7. **闭包幂子幺半群—前缀闭包**（历史左扩直到命中）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{cl-pref}}(U) \ := \ \langle \, \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}} \, \rangle \ = \ \{\text{id}, \ \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}}\}}$$

（若采用“至多 N 步”的截断闭包，则 $\langle \mathbf{Cl}_{U,N}^{\text{Pref}} \rangle = \{\mathbf{Cl}_{U,kN}^{\text{Pref}} \mid k \geq 0\}$，随 k 递增，至命中后稳定。）

8. **规范化幂子幺半群**（去重/清洗）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{norm}} \ := \ \langle \, \mathbf{D}_{\text{head}}, \ \mathbf{CJK} \, \rangle \ = \ \{\mathbf{D}_{\text{head}}, \ \mathbf{CJK}, \ \mathbf{D}_{\text{head}} \circ \mathbf{CJK}, \ldots\}}$$

生成元幂等；产品一般非幂等但封闭。

二、二元/多元复合的幂子幺半群（流程层）

9. **乘-闭包幂子幺半群**

- 右向（bigram/前向拓扑母式）

$$\boxed{\mathsf{M}_{R\text{-}Cl}(\chi; U, L_p) \ := \ \langle \, \mathbf{R}_\chi, \ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\text{Suf}} \, \rangle \ = \ \{ \, \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\text{Suf}} \circ \mathbf{R}_{\chi^n} \mid n \geq 0 \, \}}$$

（利用 $(\mathbf{Cl})^2 = \mathbf{Cl}$ 归并出规范形。）

- 左向（历史拼接 + 前缀闭包）

$$\boxed{\mathsf{M}_{L\text{–}Cl}(h;U)\ :=\ \langle\,\mathbf{L}_h,\ \mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}}\,\rangle\ =\ \{\,\mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}}\circ\mathbf{L}_{h^n}\mid n\ge 0\,\}}$$

10. **裁剪-乘子幂子幺半群**（观测构建母式）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\Pi\text{–}R}(L_h;w)\ :=\ \langle\,\mathbf{\Pi}_{L_h},\ \mathbf{R}_w\,\rangle\ =\ \{\,\mathbf{R}_{w^n}\circ\mathbf{\Pi}_{L_h}\mid n\ge 0\,\}}$$

（w 为固定模板，如 “χ” 的拼接片段。）

11. **测试-闭包核幂子幺半群（KAT-核）**

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{KAT-core}}\ :=\ \langle\,\mathbf{T}_\bullet,\ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\mathrm{Suf}},\ \mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}}\,\rangle}$$

完全由幂等元生成；是“以 tests 与闭包为核”的可审计子幺半群。

12. **合规管线幂子幺半群**（生产可回放序列）

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{pipeline}}\ :=\ \langle\,\mathbf{T}_{\text{legal}},\ \mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}},\ \mathbf{T}_{\text{budget}},\ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\mathrm{Suf}},\ \mathbf{CJK}\,\rangle}$$

以 tests→闭包→tests→闭包→清洗为生成序，所有幂次与排列的合成均在其中封闭；在有限词典/索引上，存在 $k^\star$ 使管线幂序列 F^k 于 $k\ge k^\star$ 稳定（到达固定点）。

三、两类“核级”幂子幺半群（工程优先使用）

A) **E-核幂子幺半群（Idempotent-generated）**

$$\boxed{\mathsf{M}_E\ :=\ \langle\,\mathbf{\Pi}_\bullet,\ \mathbf{Head}_\bullet,\ \mathbf{T}_\bullet,\ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\mathrm{Suf}},\ \mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}},\ \mathbf{D}_{\text{head}},\ \mathbf{CJK}\,\rangle}$$

说明：全部由幂等生成元生成；用于**可审计/可回放**与**形式化等价化简**。

B) **乘-闭包核幂子幺半群（Action-Closure）**

$$\boxed{\mathsf{M}_{\text{ActCl}}\ :=\ \langle\,\mathbf{L}_{h_i},\ \mathbf{R}_{g_j},\ \mathbf{Cl}_U^{\mathrm{Pref}},\ \mathbf{Cl}_{U,L_p}^{\mathrm{Suf}}\,\rangle}$$

说明：把“拼接动作”与“命中闭包”合并成规范形（闭包∘若干乘子），是**预测/历史拓扑**复用最频繁的子幺半群。

四、用法口径（工程建议）

- 需要“**强可解释/强审计**”的业务侧，优先工作在 M_E 与 $\mathsf{M}_{\text{pipeline}}$。
- 需要“**高通量预测**”的在线侧，优先工作在 $\mathsf{M}_{R\text{–}Cl}$、$\mathsf{M}_{L\text{–}Cl}$ 与 $\mathsf{M}_{\Pi\text{–}R}$。
- 单元测试与等式化简，使用投影带 M_{tail}、M_{head} 与测试幂子幺半群 M_{test} 的幂等与交换律做**规约**。
