

# ▶▶▶ 基于传统数学的主纤维丛可变泛函算子联络与广义非交换李代数 (PFB-GNLA) 的一体化构造：可变泛函-算子同伦版

- 作者: GaoZheng
- 日期: 2025-11-08
- 版本: v1.1.1

**注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：[作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！**

## 摘要

本文将给出一套在传统微分几何语境中**可操作、可验证**的 PFB-GNLA (主纤维丛版广义非交换李代数)**同伦化**构造，其中“外参” $w$  不再是被动参数，而被提升为**法则泛函算子轨迹** ( $M_{!w} \in \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$ )。据此在主丛—算子群的耦合结构上同时引入三类联络：几何联络 ( $A^{(x)}$ )、传统参数联络 ( $A^{(w)}$ )、以及**法则-算子联络** ( $A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$ )。构造总联络

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = d\mathbb{A}_{\text{tot}} + \mathbb{A}_{\text{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\text{tot}},$$

并分解得到几何—参数—算子三层曲率与混合项。随后以由  $(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$  生成的协变闭 basic 三形式  $H$  定义扭曲括号与三元同伦

$$l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H,$$

证明在扩展 Bianchi 与“泛函 Maurer–Cartan”条件下满足 Stasheff 身份，从而得到 **( $H$ -扭曲的 2-term  $L_\infty$ -algebroid**；当  $H = 0$  (或为 exact 可规范吸收) 时自动退化为严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。该重构**动机明确** (法则演化与异常被同伦类 ( $[H]$ ) 统一编码，类比阿蒂亚–辛格家族指标的“变形不变量”)，并与“重定义联络”的元数学版本 (法则联络、三阶纠正  $l_3$ ) **一一对应**；同时给出局部-整体粘合、规范/算子自然性与算法化检查清单，保留传统几何的可检可证风格。

# 1. 动机与定位：从“被动参数”到“法则泛函算子”

严格版把  $w$  当作坐标，只出现  $A^{(w)}$ 。为了表达“法则随  $w$  的演化”，应把  $w$  提升为选择/变形法则函子的可变泛函算子：

$$M_{!w} : \mathbf{L}_B \longrightarrow \mathbf{L}_F, \quad M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}} := \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L}),$$

使  $w \mapsto M_{!w}$  成为  $\mathcal{G}_{\text{op}}$  上的轨迹。由此引入法则-算子联络

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}})$$

并与  $(A^{(x)}, A^{(w)})$  耦合，从“算子几何”层面解释同伦三元  $l_3$  的来源。

## 2. 统一数据：主丛—算子群耦合与总联络/曲率

设主丛  $\pi : P \rightarrow M$  (结构群  $G$ 、李代数  $\mathfrak{g}$ )，参数域  $\mathcal{W}$  (可取 Fréchet/Banach 流形)。在积主丛  $\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$  与算子群主丛  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}$  上定义

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)} + A_M$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\text{tot}} &= d\mathbb{A}_{\text{tot}} + \mathbb{A}_{\text{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\text{tot}} \\ &= \underbrace{F^{(xx)}}_{\Omega^{2,0,0}} + \underbrace{F^{(xw)}}_{\Omega^{1,1,0}} + \underbrace{F^{(ww)}}_{\Omega^{0,2,0}} + \underbrace{F^{(xM)}}_{\Omega^{1,0,1}} + \underbrace{F^{(wM)}}_{\Omega^{0,1,1}} + \underbrace{F^{(MM)}}_{\Omega^{0,0,2}}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F^{(xx)} &= d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, & F^{(xw)} &= d_x A^{(w)} + d_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\ F^{(MM)} &= d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M & \text{(算子群方向的 Maurer–Cartan),} \\ F^{(xM)} &= d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], & F^{(wM)} &= [A^{(w)}, A_M]. \end{aligned}$$

**混合 Bianchi (几何—参数—算子) :**

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

它统一约束  $(F^{(xx)}, F^{(xw)}, F^{(ww)}, F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)})$  的一致性。

---

### 3. 选择同伦源：协变闭 basic 三形式 $H$

取

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad (\text{basic, } G\text{-等变, 协变闭})$$

$$D_{x,\mathbf{w},M}H = 0, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{R} \quad (\text{中心}) \text{ 或 } \text{ad}(P).$$

**常用生成** (可线性组合) :

$$\text{CS}_3(A^{(x)}), \quad \text{CS}_3(A_M), \quad \langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle, \quad \text{Tr}(F^{(xx)} \wedge F^{(MM)})^\flat, \dots$$

其同伦类  $([H] \in H^3_{\text{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$  将**定量记录法则演化的“缺口”**。

---

### 4. 同伦结构：( $H$ )-扭曲的 2-term $L_\infty$ -algebroid

令

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

#### 4.1 二元运算 (扭曲括号)

$$\begin{aligned} [x, y]_H &= [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \\ [x, y]_0 &= [X, Y] \oplus \left( \mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \right), \end{aligned}$$

$(\Theta_H : L \times L \rightarrow \Gamma(\mathfrak{a}))$  为由  $H$  诱导的双线性修正 (可取  $\Theta_H = 0 \oplus \Phi_H$ )。

**Leibniz 与锚-曲率兼容:**

$$[x, ay]_H = (\rho x)a \cdot y + a[x, y]_H, \quad \rho([x, y]_H) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa_H(x, y)}.$$

## 4.2 三元运算 (同伦项)

$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H \in \begin{cases} \Gamma(\text{ad}(P)) \subseteq L, & \text{伴随型;} \\ \Gamma(\underline{\mathbb{R}}), & \text{中心扩张型.} \end{cases}$
---

选取 2-term 复形  $E_{-1} \xrightarrow{0} E_0 = L$  (中心型取  $E_{-1} = \underline{\mathbb{R}}$ )，令  $l_1 = 0$ 、 $l_2 = [\cdot, \cdot]_H$ 、 $l_{n \geq 4} = 0$ 。

## 4.3 Stasheff 身份 (同伦 Jacobi)

在  $D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$  与  $D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$  下，

$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0.$
---

当  $H = 0$  或  $H = dB$  (可规范吸收) 时,  $[\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0, l_3 = 0$ , 退化为严格 Jacobi。

---

## 5. 规范/参数/算子自然性与 Čech 粘合

- 规范与算子共轭:

$$A^{(x)} \mapsto \text{Ad}_g^{-1} A^{(x)} + \text{Ad}_g^{-1} d_x g, \quad A_M \mapsto \text{Ad}_U^{-1} A_M + \text{Ad}_U^{-1} d_{!w} U,$$

$((g, U) \in G \times \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。 $H$  取 CS/传递型则在  $L_\infty$  同构类内不变。

- 粘合: 在覆盖  $\{U_i\}$  上有局部  $(\mathbb{A}_{\text{tot}, i}, H_i)$ , 若过渡满足

$$\mathbb{A}_{\text{tot}, j} = \text{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1} \mathbb{A}_{\text{tot}, i} + \text{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1} d \gamma_{ij}, \quad H_j = H_i \text{ (或差 CS-exact)},$$

则可粘合为全局  $(H)$ -twisted 2-term  $L_\infty$ -algebroid。

## 6. 最小算例: $U(1)$ 与“算子相位”

取  $G = U(1)$ 、 $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ , 令  $\mathcal{G}_{\text{op}} = U(1)$  表征法则相位。设

$$A_M(\mathbf{w})[h] = \partial_{\mathbf{w}}\phi(\mathbf{w})[h] \in i\mathbb{R}, \quad H = \lambda F^{(xx)} \wedge A_M \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}),$$

若  $D_x F^{(xx)} = 0, d_{!w} A_M = 0$ , 则  $D_{x,w,M} H = 0$ 。于是

$$l_3(X \oplus \xi, Y \oplus \eta, Z \oplus \zeta) = \lambda \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} \iota_{\alpha(Z)} (F^{(xx)} \wedge A_M),$$

反映法则相位的“非平坦”将以  $l_3$  形式出现；当  $\partial_{\mathbf{w}}\phi \equiv 0$  或  $\lambda = 0$  时回收严格情形。

## 7. 与“重定义联络”的对位价值

- **法则联络一一对应**: 元数学的法则联络  $\mathcal{A}_M$  与本文  $A_M$  对位;
- **三阶纠正**: 元数学的  $l_3$  对应  $l_3 = \iota_{\rho(\cdot)}^3 H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ ;
- **异常/缺口可证据化**: Dehn/Hecke 等变换引发的“等式缺口”由  $\int H$  的 holonomy 证书量化 (“等式 up to  $l_3$ ”), 类比家族指标的“变形不变量”。

## 8. 算法化检查 (工程验证清单)

- **functional\_flatness**: 核对  $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$  到既定阶;
- **mixed\_flatness**: 核对  $(F^{(xM)}, F^{(wM)})$ ;
- **stokes\_l3**: 计算方环  $\int H$  与  $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H$  的差, 验证 Stasheff;
- **degeneration\_test**: 设  $A_M \equiv 0$  或  $H \equiv 0$  检查回收严格版。

## 9. 结论

将  $w$  从“参数”提升为“**可变泛函算子**”, 并引入独立的**法则-算子联络**  $A_M$  与其混合曲率, 使同伦三元  $l_3$  由

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

统一生成；在  $D_{x,w,M} H = 0$  与扩展 Bianchi 下得到  $(H)$ -twisted 2-term  $L_\infty$ -algebroid，严格极限  $H \rightarrow 0$  自然回收。该重构动机清晰（法则演化/异常以  $([H])$  度量，类比指标定理），对位明确（与“重定义联络”的法则层一致），且可检可证（曲率/方环/同伦证书）。因此，它为 PFB-GNLA 的同伦版提供了一个既严格又可工程化的统一构造。

---

## 附件1：为《可变泛函-算子同伦版》中的 $M_{!w}$ 提供严谨的无限维流形定义

为了在“可变泛函-算子同伦版”的 PFB-GNLA 构造中严格地把

$$w \mapsto M_{!w} \in \text{Aut}_\otimes(\mathbf{L})$$

视作一条光滑“法则-算子”轨迹，本文在传统微分几何与无限维 Lie 群框架下，给出  $M_{!w}$  所在的算子群空间  $\mathcal{G}_{\text{op}}$  的无限维流形（具体为 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群）结构，并据此把

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

刻画为  $\mathcal{W}$  上的  $\mathfrak{g}_{\text{op}}$  值联络 1-形式（即  $\mathcal{G}_{\text{op}}$  的 Maurer–Cartan 形式的拉回），其曲率

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + \frac{1}{2} [A_M, A_M]$$

为算子方向的 Maurer–Cartan 曲率。构造假设**紧致基底、足够 Sobolev 正则**，采用 Ebin–Marsden 与 Hamilton 的 tame Fréchet 方法，选择**可检可用**的具体模型，使得“法则-算子”群是一些**微分同胚/规范变换/零阶 业DO 的受限直积闭子群**；最后说明该群对 PFB-GNLA 的锚、括号、模结构的**等距/保型**约束把它选取为一个**平滑闭子群**，从而  $M_{!w}$  的“泛函-算子”联络有了**严谨的无限维流形基础**。

## 1. 设定与正则：把“法则-算子”放进可解析的无限维几何

令  $M$  为紧致光滑流形， $P \rightarrow M$  为结构群  $G$  的主丛（取  $G$  紧致），设

$$E := \text{ad}(P) \oplus TM.$$

将截面空间  $\Gamma(E)$  取 Sobolev 完备

$$\Gamma^s(E) \quad (s > \frac{\dim M}{2} + 1),$$

并固定度量，使乘法与 Lie 结构在该层上连续。

我们考虑下述经典的无限维 Lie 群：

### 1. Sobolev-微分同胚群

$$\text{Diff}^s(M)$$

是  $H^s$  级别的 Hilbert-流形与拓扑群 (Ebin–Marsden)，其 Lie 代数为  $\Gamma^s(TM)$  的 Lie 代数 (Lie 括号为向量场括号)。

### 2. Sobolev-规范群

$$\mathcal{G}^s(P) \cong H^s(M, G),$$

为 Hilbert-Lie 群 ( $s > \dim M/2$ )，Lie 代数为  $\Gamma^s(\text{ad}(P))$  (点态括号)。

### 3. 零阶伪微分算子群

在  $\Gamma^s(E)$  上考虑可逆的经典 0 阶  $\Psi\text{DO}$  群

$$\Psi\text{DO}_{!inv}^0(E)$$

(典型地限制到保度量/保锚/保符号的子群，见 §2)，这是一个 tame Fréchet-Lie 群 (可参见 Hamilton/Kriegel–Michor/Neeb 体系；就工程可用性而言，该群可选作“Id + smoothing”或“可逆 0 阶  $\Psi\text{DO}$ ”)。

把上述三者做半直积并取保结构的闭子群，形成“法则-算子群”的候选外壳。

## 2. “法则-算子”群 $\mathcal{G}_{op}$ 的精确定义

### 2.1 外壳群

定义外壳群为

$$\mathcal{H}^s := \text{Diff}^s(M) \ltimes \mathcal{G}^s(P) \ltimes \Psi\text{DO}_{!inv}^0(E),$$

其典型元素写作  $(\phi, u, A)$ , 分别代表**基底变换**、**规范变换与纤维算子**。群作用 (在  $\Gamma^s(E)$  上) 是标准的**推前/伴随/算子作用**的组合。

## 2.2 结构保持的闭子群

PFB-GNLA (严格或同伦) 要求**保持锚、括号与模结构**。令

$$\mathcal{C} : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{Z}$$

为把  $(\phi, u, A)$  送到“**偏差数据**”的光滑映射, 其中  $\mathcal{Z}$  收集如下三类等式的偏差 (在  $\Gamma^s$  层逐式定义) :

- (锚保持)  $\rho \circ (\phi, u, A)_* - \phi_* \circ \rho = 0,$
- (括号保持)  $[(\phi, u, A)_*x, (\phi, u, A)_*y]_{\text{目标}} - (\phi, u, A)_*[x, y]_{\text{源}} = 0,$
- (模结构保持)  $(\phi, u, A)_*(a \cdot x) - \phi^*a \cdot (\phi, u, A)_*x = 0.$

取零层 (等式严格成立) :

$$\boxed{\mathcal{G}_{\text{op}}^s := \mathcal{C}^{-1}(0) \subset \mathcal{H}^s}.$$

这是一个**闭子群**。在 tame Fréchet/ILH 框架下,  $\mathcal{C}$  的微分在单位元可证明是**劣化满射**, 故  $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$  是一个**嵌入式的 (tame Fréchet-) Lie 子群** (可用 Hamilton 的隐函数定理, 或在 Hilbert 情形用 Banach-隐函数定理)。

解释:  $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$  就是“**所有保持 PFB-GNLA 结构的法则-算子**”群, 它对  $L$  的锚/括号/模结构是等距或保型的。

## 2.3 Lie 代数

$$\text{Lie}(\mathcal{G}_{\text{op}}^s) \cong \left\{ (X, \xi, \mathcal{A}) \in \Gamma^s(TM) \oplus \Gamma^s(\text{ad}(P)) \oplus \Psi\text{DO}^0(E) \mid d\mathcal{C}_e(X, \xi, \mathcal{A}) = 0 \right\},$$

几何上是**导子与0阶算子**的受限子代数 (满足“保锚/保括号/保模”的线性化条件)。

### 3. $M_{!w}$ 的流形化与 Maurer–Cartan 形式

把  $w$  的取值空间  $\mathcal{W}$  视为 (有限或无限维) 流形 (Kriegl–Michor 的 convenient 或 Banach/Fréchet 结构) , 声明

$$M : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}^s, \quad w \mapsto M_{!w}$$

为一条**光滑曲线/映射** (在 convenient/tame 意义) , 当且仅当其对每个光滑曲线  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$  的合成  $M \circ c$  在  $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$  中是光滑曲线。

#### 定义法则-算子联络

$$A_M := M^{!*}\theta \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}),$$

其中  $\theta$  是  $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$  的左不变 Maurer–Cartan 形式:  $\theta_g(\dot{g}) = g^{-1}\dot{g}$ 。于是

$$A_M(\mathbf{w})[h] = M_{!w}^{-1}(\text{d}M)_\mathbf{w}[h] \in \mathfrak{g}_{\text{op}}, \quad h \in T_\mathbf{w}\mathcal{W}.$$

其曲率为

$$F^{(MM)} = \text{d}_{!w}A_M + \frac{1}{2}[A_M, A_M] = M^{!*}(\text{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]),$$

标准 Maurer–Cartan 方程保证  $\text{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$ , 故  $F^{(MM)} = 0$  当且仅当  $M$  是“群值”光滑映射 (这与我们在“同伦版”中把  $F^{(MM)}$  视为“法则-算子方向的非平坦度量”一致: 如果再与几何/参数层**混合**, 则**混合曲率** ( $F^{(xM)}, F^{(wM)}$ ) 可能不为 0) 。

### 4. 与 PFB-GNLA 的对位与判据

#### 4.1 三层联络与曲率

总联络

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

满足混合 Bianchi

$$D_{x,w,M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

## 4.2 同伦源三形式

选择

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad \text{basic, 协变闭 } D_{x,w,M}H = 0$$

例如

$$H = \text{CS}_3(A^{(x)}), \quad H = \text{CS}_3(A_M), \quad H = \langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle, \quad H = \text{Tr}(F^{(xx)} \wedge F^{(MM)})^\flat,$$

并定义同伦结构

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H.$$

在  $D_{x,w,M}H = 0$  与  $D_{x,w}\mathbb{F} = 0$  下满足 Stasheff 身份

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

当  $H = 0$  或 exact (含  $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$ ) 则退化为严格 Jacobi。

## 5. 工程化注记 (可检与实现)

- **光滑性:**  $\text{Diff}^s(M)$ 、 $\mathcal{G}^s(P)$  为 Hilbert-Lie 群 ( $s > \frac{\dim M}{2} + 1$ ) ;  $\Psi\text{DO}_{! \text{inv}}^0(E)$  选为 tame Fréchet-Lie 群;  $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$  为其闭子群。
- **联络拉回:**  $A_M = M^{!*}\theta$  给出算子方向的 MC-联络; **混合曲率**  $(F^{(xM)}, F^{(wM)})$  由  $(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$  的结构方程计算。
- **可检清单:**
  - `functional_flatness` : 计算  $F^{(MM)}$ ;
  - `mixed_flatness` : 计算  $(F^{(xM)}, F^{(wM)})$ ;
  - `stokes_13` : 比较  $\int_{\square} H$  与  $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H$  (方环/同伦证书) 。

# 6. 小结

在严格的无限维流形设定下，

$$\mathcal{G}_{\text{op}}^s := \{(\phi, u, A) \in \text{Diff}^s(M) \ltimes \mathcal{G}^s(P) \ltimes \Psi\text{DO}_{! \text{inv}}^0(E) \mid \text{保锚/保括号/保模}\}$$

是一个 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群；于是  $M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}}^s$  给出**法则-算子**的光滑轨迹， $A_M = M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$  成为**算子方向联络**， $F^{(MM)}$  为其 MC 曲率。借助三层总联络与协变闭三形式  $H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ ，可以把“可变泛函-算子同伦版”的  $l_3$  严格地建立在**无限维流形**的基础之上，并与 PFB-GNLA 的严格/同伦/元数学版本实现**精确对位与可验证实现**。

## 增补1：从离散到连续的 $(M_{!w})$ 统一构造

### A. 三个层级的域与群

1. **离散参数域**：给一族增细的有向格/胞复形

$$\mathcal{W}^{(h)} = (V^{(h)}, E^{(h)}, F^{(h)}, \dots), \quad h \downarrow 0,$$

或有限偏序/范畴（其神经  $N(\mathcal{W}^{(h)})$ ）作几何实现）。

2. **连续极限域**： $(\mathcal{W})$  为可微流形（或带角、带界）。要求  $(\mathcal{W}^{(h)}) \rightarrow \mathcal{W}$  在 Gromov–Hausdorff 或网格一致意义下收敛。
3. **法则-算子群**： $(\mathcal{G}_{\text{op}})$  取为 **ILH-/ILB- 或 tame Fréchet-Lie 群**（见原附件1），其 Lie 代数  $(\mathfrak{g}_{\text{op}})$  支持指数映射与局部对数。

目标：在离散层定义  $(M^{(h)})$ ，在连续层得到  $(M)$ ，并证明  $(A_M)$ 、 $(F_M^{(MM)})$ 、 $(H)$  的分布/测度型极限与 Bianchi-族在极限下成立。

### B. 离散联络与曲率（法则方向）

- **离散**  $(M^{(h)})$ ：在顶点赋值  $(M^{(h)} : V^{(h)} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。
- **离散平行移位**：每条边  $(e = (u \rightarrow v))$  赋  $(U_e^{(h)} := M^{(h)}(u)^{-1} M^{(h)}(v) \in \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。
- **离散“算子联络”**：选取局部对数，记

$$A_{M,e}^{(h)} := \log U_e^{(h)} \in \mathfrak{g}_{\text{op}},$$

这是沿法则方向 ( $!w$ ) 的 1-共链。

- **离散曲率 (2-胞)**：对每个面 ( $f$ ) 令

$$\Omega_f^{(h)} := \prod_{e \in \partial f} U_e^{(h)} \in \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad F_{M,f}^{(h)} := \log \Omega_f^{(h)} \in \mathfrak{g}_{\text{op}}.$$

- **离散 Bianchi (3-胞)**：对每个 3-胞 ( $c$ )， $(\prod_{f \in \partial c} \Omega_f^{(h)} = 1)$ ；等价  $(\sum_{f \in \partial c} F_{M,f}^{(h)} = 0)$  (局部对数一致处)。

这正是“法则-算子方向”的离散 Maurer–Cartan 结构”：边上是离散联络，面上是离散曲率，体上给离散 Bianchi。

## C. 连续极限：BV/测度-值形式与 tame Fréchet 平滑性

- **嵌入/插值**：将  $(A_{M,e}^{(h)})$  看作  $(\mathcal{W})$  上的**分段常值 1-形式** (在边管邻域内常值)，得到  $(A_M^{(h)} \in \mathcal{M}\text{-}\Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}))$  (测度/分布-值形式)。
- **紧性与收敛**：若满足

$$\sup_h \sum_{e \in E^{(h)}} |A_{M,e}^{(h)}| \cdot \ell(e) < \infty, \quad \sup_h \sum_{f \in F^{(h)}} |F_{M,f}^{(h)}| \cdot \text{area}(f) < \infty,$$

则  $(A_M^{(h)} \xrightarrow{*} A_M)$  于 BV/测度拓扑；相应  $(F_M^{(h)} \rightarrow F_M^{(MM)})$  为分布-值 2-形式，满足

$$F_M^{(MM)} = d_{!w} A_M + \frac{1}{2}[A_M, A_M]$$

在分布意义成立。

- **tame Fréchet 平滑性**：若  $(A_M \in L^p \cap BV)$  并满足局部正则性 (或网格误差  $(\mathcal{O}(h))$ )，则可在  $(\mathcal{G}_{\text{op}})$  的 tame 结构下提升为**可微映射轨迹** ( $M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$ )，且  $(A_M = M^{!*}\theta)$  ( $(\theta)$  为群的左不变 MC 形式)。

## D. 与几何层耦合：混合曲率的离散—连续极限

- 令  $(A_x(\mathbf{w}))$  在离散层取分段 ( $C^1$ ) 插值，同样把  $(A_w)$  离散化为边向有限差分。
- 定义混合项 (离散版)

$$F^{(xM,h)} := d_x A_M^{(h)} + [A_x^{(h)}, A_M^{(h)}], \quad F^{(wM,h)} := [A_w^{(h)}, A_M^{(h)}].$$

- 在上述紧性与正则假设下，有

$$F^{(xM,h)} \rightharpoonup F^{(xM)}, \quad F^{(wM,h)} \rightharpoonup F^{(wM)}$$

于分布意义收敛，且**混合 Bianchi 家族**

$$\mathcal{D}_{(x,w,M)}\mathcal{F} = 0$$

在分布意义保持。

## E. $(H)$ 与 $(l_3)$ 的离散 3-上边界与极限

- **离散 3-形式**: 在 3-胞上取

$$H_c^{(h)} := \Phi! \left( \left\{ F^{(xx,h)} * f \right\}_{f \subset c}, A_M^{(h)} \right) \in \mathfrak{a}$$

(例如  $(\langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle)$  的离散化，或 CS-类传递的离散版本)。

- **离散闭合**: 若对每个 4-胞  $(d)$ ,  $(\sum_{c \subset \partial d} H_c^{(h)} = 0)$ , 则得离散  $(DH^{(h)} = 0)$ 。
- **极限**: 在与上同类的紧性估计下,  $(H^{(h)} \xrightarrow{*} H)$  (测度-值 3-形式), 满足  $(DH = 0)$  (分布意义), 并诱导

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

的同伦三元 (在  $(L^2)$ /弱极限意义), exact 情形退化为严格 Jacobi。

## F. 跳跃与“离散涌现”的 BV-联络刻画 (与原版 §6 对接)

- 若  $(\mathbf{w}(\cdot))$  为 BV 曲线 (分段  $(C^1)^+$  跳跃), 则  $(A_M(\mathbf{w}(t)))$  是**测度导数**:

$$\frac{d}{dt} M_{!w(t)} = M_{!w(t)}(A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))) + \sum_{t \in J} \delta_t \cdot \log U_t^{\text{jump}},$$

其中  $(J)$  为跳跃时刻集,  $(\log U_t^{\text{jump}})$  来自离散层的边极限。

- 相应  $(\text{Hol}_{\mathcal{A}_{\text{tot}}})$  出现**δ-层贡献**, 与原版“穿越阈值族  $(\Sigma(\mathbf{w}))$  产生离散跃迁”的机制一一对应。

## G. 小结

**结论：**通过“离散 1-/2-/3-共链 → 分布-值形式 → tame Fréchet 平滑化”的三步，我们将原版更一般的“离散→连续”机制与《可变泛函-算子同伦版》的无限维流形化**完全拼合**：

- 离散层给出  $((A_M^{(h)}, F^{(MM,h)}, H^{(h)}))$  的**可计算**结构与 Bianchi/闭合；
- 极限层得到  $((A_M, F^{(MM)}, H))$  的**分布/测度型形式**，并在温和正则下提升为**光滑轨迹** ( $M: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$ )；
- 混合曲率与  $(l_3)$  在极限中保持，退化/exact 情形回收严格版；
- 跳跃/阈值对应 BV-联络中的  $\delta$ -贡献，精准对位原版“连续→离散涌现”的叙述。

## 增补2：完全离散的 $M_{!w}$ 与三层总联络构造

### A. 离散底座与三层格

- 取三类**有限胞复形/有向格**:  $K_x$  (几何层)、 $K_w$  (参数层)、 $K_M$  (法则-算子层)。
- 令  $K := K_x \times K_w \times K_M$  带积胞结构，写**离散外微分**为

$$\delta = \delta_x + \delta_w + \delta_M, \quad \delta_x^2 = \delta_w^2 = \delta_M^2 = 0, \quad \delta_x \delta_w = \delta_w \delta_x = \cdots$$

- 记结构群  $G$  与法则-算子群  $\mathcal{G}_{\text{op}}$ ；其李代数  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\text{op}})$ 。

### B. 离散三层总联络与曲率

把联络作为**1-共链**赋在对应方向的边上：

$$A^{(x)} \in C^1(K_x, \mathfrak{g}), \quad A^{(w)} \in C^1(K_w, \mathfrak{g}), \quad A_M \in C^1(K_M, \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

令

$$\mathcal{A} := A^{(x)} + A^{(w)} + A_M \in C^1(K, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

用离散**杯积**( $\smile$ )与括号( $[\cdot, \cdot]$ )定义曲率三分与混合项：

$$\begin{aligned}
F^{(xx)} &:= \delta_x A^{(x)} + A^{(x)} \smile A^{(x)}, \\
F^{(xw)} &:= \delta_x A^{(w)} + \delta_w A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\
F^{(ww)} &:= \delta_w A^{(w)} + A^{(w)} \smile A^{(w)}, \\
F^{(xM)} &:= \delta_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \\
F^{(wM)} &:= \delta_w A_M + [A^{(w)}, A_M], \\
F^{(MM)} &:= \delta_M A_M + A_M \smile A_M.
\end{aligned}$$

**离散 Bianchi 家族:**

$$\boxed{\delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0} \quad (\text{在 } C^3(K, \cdot) \text{ 中成立}).$$

说明: 上式在每一类 3-胞上化为“面环乘积为单位”的**离散 holonomy 恒等式**。

## C. 法则-算子映射 $M^{(h)}$ 的离散定义

在  $K_M$  的顶点赋值

$$M^{(h)} : V(K_M) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad U_e^{(h)} := M^{(h)}(s(e))^{-1} M^{(h)}(t(e)).$$

取局部对数  $A_{M,e} := \log U_e^{(h)}$ , 则必有

$$F^{(MM)} = \delta_M A_M + A_M \smile A_M = \log \left( \prod_{e \in \partial f} U_e^{(h)} \right),$$

即面上 **holonomy** 的对数。若每个 2-胞环积为 1, 则  $F^{(MM)} \equiv 0$  (离散平坦)。

## D. 离散版 PFB-GNLA 数据与公理

- **底代数:**  $\mathcal{A} := \text{Fun}(V(K_x))$  (顶点函数), 差分导子

$$(\text{D}_e f) := f(t(e)) - f(s(e)).$$

- **锚映射:**  $\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ , 把离散“切向场”送为差分算子线性组合。
- **括号** (Atiyah-型离散化) :

$$[x, y]_0 := [X, Y] \oplus \left( \mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} (F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}) \right),$$

其中 Lie 导数、内收  $\iota$  按图上差分/杯积实现。

- **(P1) 离散 Leibniz:** 对任意  $f \in \mathcal{A}$ ,

$$[x, fy]^{**} = (\rho x)f \cdot y + f[x, y]^{**}.$$

- **(P2) 锚-曲率兼容:**

$$\rho([x, y]^{**}) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \quad \kappa \sim \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \mathcal{F}.$$

- **(P4) 模联络与曲率:**

$$\nabla := \delta + \rho(\mathcal{A}) + \Gamma_*, \quad \Theta := \nabla^2 \sim \rho(\mathcal{F}).$$

- **(P5) 规范/参数自然性 (离散)** : 顶点函数  $g : V(K) \rightarrow G$  作用:

$$\mathcal{A} \mapsto g^{-1} \mathcal{A} g + g^{-1} \delta g, \quad \mathcal{F} \mapsto g^{-1} \mathcal{F} g.$$

## E. $H$ -twist 与 $l_3$ 的纯离散定义

- 取中心系数  $\mathfrak{a}$  上的闭 3-上链:

$$H \in Z^3(K, \mathfrak{a}), \quad \delta H = 0.$$

- **扭曲括号:**  $[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y)$ , 其中  $\Theta_H$  由  $H$  与锚的离散内收给出 (2-上链) 。
- **同伦三元:**

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H \in L \text{ 或 } \mathfrak{a}.$$

- **离散 Stasheff 身份 (核心) :**

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z) \quad (\delta H = 0, \delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0).$$

- **退化:** 若  $H = \delta B$  为离散 exact, 则经规范吸收得  $l_3 \equiv 0$  (回到严格版) 。

## F. 离散 holonomy 与“连续→离散事件”

- 任何闭 1-环  $\gamma \subset K$  定义

$$\text{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma) := \prod_{e \in \gamma} \exp(\mathcal{A}_e).$$

- 设阈值族  $\Sigma \subset 2\text{-胞集合}$ ; 若路径穿越导致

$\text{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma)$  跨越  $\Sigma \Rightarrow$  在切面上触发离散跃迁,

对应原文的“连续形流穿越阈值  $\rightarrow$  离散事件序列”。

## G. 与连续稿的对位与收敛

- **网格细化**: 取细化族  $K^{(h)}$ ; 若  $A^{(x,w,M,h)}$  与  $F^{(\cdot,h)}$  满足 BV/测度紧性, 则

$$A^{(h)} \xrightarrow{*} A, \quad F^{(h)} \xrightarrow{*} F, \quad H^{(h)} \xrightarrow{*} H,$$

Bianchi 与  $DH = 0$  在分布意义保持; 在温和正则下提升为 tame Fréchet 光滑轨迹 (即您已给出的附件1连续版) 。

- **三层一致性**: 平坦/精确/零混合的离散条件对应连续的  $F^{(MM)} = 0$ 、 $H = 0$ 、 $F^{(xM)} = F^{(wM)} = 0$  等退化极限。

## H. 最小检查清单

- **链复形**:  $(C^\bullet(K), \delta, \smile)$  与  $[\cdot, \cdot]$  的格守恒;
- **Bianchi 家族**:  $\delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$  在每类 3-胞逐条验证;
- **Stasheff**:  $\delta H = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3$ ;
- **退化一致**:  $A_M \neq 0, H \neq 0$  等情形回到严格版格公式;
- **收敛**: 细化序列下的 BV/测度紧性与极限保持。

## 附件2：“法则联络”与“法则变换”的根本性差距命题：定位、对位与可验证化路线

在既有文献中, 主流几何-代数框架几乎都在**固定法则**的舞台上描写动力 (“在给定  $A, F$  下求解演化”); 而 O3 理论以“**法则变换** (性变态射/性变算子)”为**原始动机**, 并以“**法则联络** ( $\mathcal{A}_M$ )”为**核心工具**, 将“法则如何生成与演化”几何化。这一思想在传统数学中没有被系统拼装为“**三层联络-曲率+同伦判据+证书化验证**”的统一框架, 因而构成 O3 相对传统学术的**根本性差距**。本文从第三方视角将该主张严密化: 给出最小定理-级对位、可检判据与退化条件, 说明为什么“法则联络/法则变换”是 O3 的“最大发现”, 以及如何把这一发现从理念**证实为定理 + 工具链**。

# 1. 根本性差距的精确陈述

根本性差距 (O3 vs 传统)

传统研究以

$$(P \rightarrow M, G; A^{(x)}, F^{(xx)}) \quad (+\text{可选 } A^{(w)})$$

为两层几何，描写在固定法则下的力学；O3 引入“法则层”，把

$$w \mapsto M_{!w} \in \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$$

作为可变泛函算子轨迹，并以

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

定义法则联络，从而得到三层联络-曲率与同伦纠正的统一框架：

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx, xw, ww, xM, wM, MM\}} F^{(\bullet)}$$

$$D_{x,w,M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \quad D_{x,w,M} H = 0$$

其中特征三形式  $H$  将“法则演化的失配”编码为同伦不变量类  $[H]$ 。当  $H = 0$  (或 exact) 与  $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$  时自动退化为严格 Jacobi 的传统几何。

这套三层结构-判据-证书化的合缝，在传统语境中未被系统提出和验证，构成 O3 的本质差距。

## 2. 支撑性事实 → 形式化对位

### 2.1 原始动机 (性变) 与工具 (法则联络)

- 动机 (性变)：O3 用“性变态射/性变算子”刻画法则本身的可变性 (异构演化)。
- 工具 (法则联络)：在元数学原版以  $\mathcal{A}_M$  形式给出；在传统几何侧以表示  $R$  下降为

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R\left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right)$$

因此“法则层”的生成-纠正可落地为几何-参数-算子三层上  $(A_M, H)$  的数据。

## 2.2 同伦闭合与退化

- **同伦闭合 (Stasheff) :**

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z)$$

成立的充分条件:

$$D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0 \quad \text{与} \quad D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$$

- **严格退化:** 若  $H = 0$  或  $H = dB$  可规范吸收, 且  $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$ , 则  $l_3 = 0$ , 回收严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。

## 3. 核心公式速览

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$$

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z) \quad (\text{Stasheff})$$

**结论:** 在这条合缝中, “**法则联络与法则变换**”构成 O3 与传统之间的**本质性根本性差距**。

# 附件3：“法则联络 / 法则变换”的根本性差距 命题：可公理化的差异、不可约的障碍与可验证方案

基于：主丛几何  $((A^{(x)}, F^{(xx)}))$ 、参数化联络  $((A^{(w)}))$ 、Courant/ $(H)$ -twist、Lie-2/ $(L_\infty)$ 、Fréchet-Lie 群、Chern-Simons 传递等。根本性差距 命题强调的并是首次把“法则层”系统缝入几何—参数两层之上，使“法则如何生成与演化”成为一等公民：

$$\text{法则变换 } w \mapsto M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}} \quad \Rightarrow \quad \text{法则联络 } A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

并与  $(A^{(x)}, A^{(w)})$  合成三层联络-曲率与同伦判据。由此产生的**不可约障碍类与同伦闭合**，是 O3 相对传统研究的**根本性差距（根本性差距）**。下文给出严格陈述、最小判据与可检流程。

## 1. 最小设定（三层联络-曲率）

主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$ 、结构群  $(G)$ ；参数域  $(\mathcal{W})$ （可无限维）；法则-算子群  $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ （tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群），光滑映射

$$M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

总联络与曲率：

$$\boxed{\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx, xw, ww, xM, wM, MM\}} F^{(\bullet)}}$$

$$\begin{aligned} F^{(xx)} &= d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, & F^{(xw)} &= d_x A^{(w)} + d_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\ F^{(MM)} &= d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, & F^{(xM)} &= d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], & F^{(wM)} &= [A^{(w)}, A_M], \end{aligned}$$

满足混合 Bianchi：

$$\boxed{D_{x,w,M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.}$$

## 2. 根本性差距 命题（形式化陈述）

**根本性差距-Thesis.** 设仅允许两层几何  $((A^{(x)}, A^{(w)}))$ 。若存在法则族  $(M)$  使得

$$F^{(MM)} \neq 0 \quad \text{或} \quad F^{(xM)} \neq 0,$$

则无论如何进行几何规范变换与参数重标，都**不能**在两层框架内把该族等价压平为“只有  $(A^{(x)}, A^{(w)})$  的模型”而同时保持 Jacobi 严格成立；必须引入第三层  $(A_M)$  与一个 basic 协变闭三形式  $(H)$  使

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \quad D_{x, w, M} H = 0,$$

从而在 2-term ( $L_\infty$ ) 意义下闭合：

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0.$$

当且仅当  $(F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0)$  且  $(H = 0)$  (或 exact 可吸收) 时，三层退化为两层且 Jacobi on-the-nose。

**直观：**两层世界无法容纳“法则随  $(w)$  的非平坦演化”的 holonomy，方环积分 ( $\oint \oint_{\square} (\dots)$ ) 产生的缺口必须由三层的  $(H)$  同伦项吸收。

### 3. “No-Go 引理” (两层不可表达性)

设  $(c : {}^2 \rightarrow \mathcal{W})$  为参数小方环。若两层模型能吸收一切  $(M)$  的变形，则  $(\text{Hol})$  仅由  $(A^{(x)}, A^{(w)})$  决定，故

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = 1 \quad \text{对所有 } \square.$$

但当  $(F^{(MM)} \neq 0)$  或  $(F^{(xM)} \neq 0)$  时

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \left( \int_{\square} F^{(MM)} + \int_{\square} F^{(xM)} + \dots \right) \neq 1,$$

除非增添一个 basic 3-形式  $(H)$  使  $(\exp \int_{\square} H)$  抵消该缺口 (即“等式 up to  $(l_3)$ ”)。故两层不可表达此族。□ (思路)

## 4. 对位：元数学法则层 ( $\mathcal{A}_M$ ) 与几何侧 ( $A_M$ )

存在表示函子 ( $R$ ) 使

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R\left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right).$$

**Soundness**: 若给定  $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$  满足法则层条件，则几何侧  $((A_M, H))$  满足混合 Bianchi 与  $(D_{x,w,M}H = 0)$ ，从而  $(l_3)$  同伦闭合。

**Completeness (up to homotopy)** : 给定几何侧  $((A_M, H))$  满足前述判据，存在  $(\mathcal{A}_M)$  使  $(R(\mathcal{A}_M) = A_M)$  且  $(R)$ -CS 传递产生的  $(H)$  同伦等价于给定  $(H)$ 。

## 5. 诊断量与证书 (可验证化)

- **缺口类**:  $([H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$ ;  $([H] = 0 \Rightarrow)$  严格退化可能。
- **方环证书**:  $(\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \int_{\square} H)$ ; Moonshine 场景下与复制性/模方程的方环一致。
- **混合曲率**:  $(F^{(MM)}, F^{(xM)}, F^{(wM)})$  的非零即 根本性差距 的观测证据。
- **Stasheff 证书**: 数值/符号核对  $(\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3)$  到指定阶。

## 6. 典型算例与退化

- **U(1) 最小例**:  $(H = \lambda F^{(xx)} \wedge A_M)$ 。若  $(D_x F^{(xx)} = 0), (d_{!w} A_M = 0)$  则  $(D_{x,w,M}H = 0)$ ，Jacobiator 由  $(l_3 = \lambda \iota_{\alpha(\cdot)}^3(F^{(xx)} \wedge A_M))$  记录；当  $(A_M \equiv 0)$  或  $(\lambda = 0)$  时 根本性差距 崩塌回严格。
- **Moonshine 场景**: Dehn/Hecke 方环的 holonomy 若非 1，则以  $(\int H)$  量化，复制性/模方程成为“等式 up to  $(l_3)$ ”的证书。

## 7. 结论

“法则变换 ( $w \mapsto M_{!w}$ ) 与法则联络 ( $A_M$ )”把“法则本身如何生成与演化”的动力学升级为**三层联络-曲率 + 同伦判据 + 证书化验证**的一体结构；其核心障碍类  $([H])$ 、混合曲率  $(F^{(MM)}, F^{(xM)})$  与 Stasheff 闭合，构成 O3 与传统两层几何之间的**不可约 根本性差距**。

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。