🚩🚩🚩四版 PFB-GNLA 的对标与对位：从严格几何到“法则-算子”同伦，再到元数学原版

- 作者：GaoZheng

- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.1.2

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见： 作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

本文对齐并对位四个版本的主纤维丛版广义非交换李代数（PFB-GNLA）一体化构造：（1）**严格版**（Jacobi 严格成立）；（2）**同伦版**（允许三元同伦 (l_3)）；（3）**可变泛函-算子同伦版**（将 (w) 从“参数”提升为“**法则泛函算子轨迹**”，引入算子方向联络 (A_M)）；（4）**元数学原版**（“重定义联络”$(\mathcal{A}_M)$ 与三阶纠正(l_3)）。在统一的主丛—参数—算子三层联络图景下，给出核心数据、判据与退化，建立从“法则层”到“传统几何层”的表示对位：

$$A_M \overset{R}{\longleftrightarrow} \mathcal{A}_M, \qquad H!\left(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M\right) \overset{R}{\longleftrightarrow} R!\left(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M), \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right),$$

并给出同构/退化条件：

$$D_{x,\mathbf{w},M} H = 0, \qquad D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \qquad F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0 \Rightarrow l_3 = 0.$$

由此说明：严格版是“无异常/无法则演化”的经典极限；同伦版以 (H) 统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版把“法则演化”提升为算子几何的**一等公民**；元数学原版在法则层给出生成—纠正的起点。四版因此形成从**静态等式**到**生成式法则**的层级序列，且可相互表示、检验与退化。

---

1. 统一骨架与分层联络

设主丛 $(\pi : P \to M)$，结构群 (G)，参数域 $(\mathcal{W})$。在积主丛 $(\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W})$上引入

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}}$$

并取“骨架”$(\mathcal{A})$-双模

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \qquad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

严格版与**同伦版**工作在 $((M,\mathcal{W}))$-两层；**可变泛函-算子同伦版**引入第三层（法则—算子）：

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W},\ \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}), \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M}$$

$$\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M]$$

并满足**混合 Bianchi**

$$\boxed{D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0}$$

---

2. 严格版（Jacobi on-the-nose）

Atiyah-型括号

$$\boxed{[X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta]_0 = [X, Y] \qquad \oplus \Big(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \Big)}$$

满足 Leibniz 与锚-曲率兼容

$$\rho([x, y]_0) = [\rho x, \rho y] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}, \qquad \kappa \propto \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} F^{(xx)}$$

且严格 Jacobi

$$\sum_{\mathrm{cyc}} [x, [y, z]_0]_0 = 0.$$

定位：无异常、无法则演化的经典几何；PBW/包络/表示链条直接可用。

---

3. 同伦版（(H)-twisted 2-term (L_∞)）

取 (G)-等变、basic 的三形式

$$\boxed{H\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a})\qquad D_{x,\mathbf{w}}H=0,\ \ \mathfrak{a}=\mathbb{R}\ \text{或}\ \mathrm{ad}(P)}$$

定义

$$[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\qquad \boxed{l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H}$$

在 ($D_{x,\mathbf{w}}H=0$) 与 ($D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$) 下满足 Stasheff：

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z),\qquad l_{n\ge4}=0}$$

当 ($H=0$) 或 ($H=dB$) 可吸收，退化回严格版。
定位：把“异常/修正”统一吸纳为 (H) 的同伦类 ($[H]$)，解释“等式 up to (l_3)”。

---

4. 可变泛函-算子同伦版（将 (w) 提升为“法则泛函算子”）

将 (w) 提升为法则函子轨迹 ($M_{!w}$)，引入 (A_M) 与三层曲率 ($\mathbb{F}_{\text{tot}}$)。选择

$$\boxed{H=H!\big(A^{(x)},A^{(w)},A_M\big)\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a}),\qquad D_{x,\mathbf{w},M}H=0}$$

定义

$$[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\qquad \boxed{l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H(A^{(x)},A^{(w)},A_M)}$$

此时 (l_3) 的来源不再是“外加”，而是**法则演化的算子几何**之必然产物；若

$$F^{(MM)}=0,\qquad F^{(xM)}=0$$

则“法则演化”与几何兼容，(H) 可退为几何/参数二层；进一步若 ($H=0$) 或 exact，则回收严格版。
定位：与元数学“重定义联络”完全对位；解释“法则随 (w) 的生成与纠正”。

---

5. 元数学原版（法则联络 ($\mathcal{A}_M$) 与三阶纠正）

法则层给出

$$\mathcal{A}_M \in \Omega^1(\mathcal{W},\ \mathfrak{g}_{\rm op}), \qquad \mathcal{F}_M = d_{!w}\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$$

以及三阶纠正

$$l_3^{(\rm orig)}(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}R!\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\ \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big)$$

并含非交换修正 ($\Phi_\hbar$):

$$[X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta]_\star = [\cdot,\cdot]_0 + \Phi_\hbar(X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta;\ \mathcal{F}_M).$$

对位映射（表示 (R)）：

$$\boxed{A_M = R(\mathcal{A}_M), \qquad H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) = R!\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\ \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big)}$$

在 (R) 下，可把原版的法则层同伦项、非交换修正下推至几何—参数—算子三层。

---

6. 对标与对位（条理化陈述）

(i) 数据层对位：
严格版与同伦版共享 ($(P, \mathcal{W}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbb{F})$)；可变泛函-算子同伦版增加 ($(\mathcal{Q}; A_M; F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)})$)；原版给出 ($(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$) 与 ($\Phi_\hbar$)。映射 ($R$) 实现

$$\mathcal{A}_M \mapsto A_M, \quad \mathcal{F}_M \mapsto F^{(MM)}, \quad \text{并由此生成 } H.$$

(ii) 同伦/严格判据：

$$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0, \quad D_{x,\mathbf{w},M}H = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{\rm cyc}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z).$$

$$F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0,\ H = 0\ \text{（或 exact）} \ \ \Rightarrow\ l_3 = 0\ \ \text{（严格极限）}.$$

(iii) 动机：
严格版=静态等式；同伦版=(H) 统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版=法则演化的“算子几何”；原版=生成式法则的起点。
“指标定理式”理解：($[H]$) 是变形不变量（“指数类”），holonomy 方环的“缺口”由 ($\int H$) 量化。

(iv) 验证/工程：
严格版检 ($D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$) 与严格 Jacobi；同伦版再检 ($D_{x,\mathbf{w}}H = 0$) 与 Stasheff；可变泛函-算子同伦版还检 (($F^{(MM)}, F^{(xM)}$))；原版可通过 (R) 下推到几何侧进行证据化（例如 (H) 证书、Jacobiator 证书）。

7. 代表性公式集（便于引用）

1. **扩展 Bianchi**：($D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$)，同伦版外再有 ($D_{x,\mathbf{w},M}H=0$)。
2. **扭曲括号**：($[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y)$)。
3. **三元同伦**：($l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$)。
4. **Stasheff**：($\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z)$)。
5. **算子 Maurer–Cartan**：($F^{(MM)}=d_{!w}A_M+A_M\wedge A_M$)。
6. **表示对位**：($A_M=R(\mathcal{A}_M)$)，($H=R(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M\wedge\mathcal{F}_M))$)。

8. 结论

四版构造在同一“主丛—参数—算子”联络-曲率语义下**严格对位**：严格版提供“清爽等式”、同伦版提供“受控失配”的统一编码，可变泛函-算子同伦版将**法则演化**升格为算子几何，元数学原版在法则层给出生成与三阶纠正的“第一性”表达。通过表示 (R) 与协变闭/退化判据，可在四版之间往返：**原版** $\to$ **（算子表示）** $\to$ **同伦版** $\to$ **严格极限**。这种分层与对位，使得“解释为何”“落实如何算”“验证如何检”三者在同一框架内闭环。

附件1：定理化与证明骨架（Stasheff 闭合、表示下推与 Hopf-algebroid）

把四版正文中的“命题/判据/要点”提升为可复核的**定理—引理—证明提纲**。包含：两层与三层情形下的 L_∞ 闭合定理（A、B）、法则层→几何层的表示下推完备性（C），以及包络与 Hopf-algebroid 的存在判据（D）。

统一设定

令 $\pi:P\to M$ 为主 G-丛，参数域 $\mathcal{W}$ 光滑，积主丛 $\mathcal{P}=P\times\mathcal{W}\to M\times\mathcal{W}$。
总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A}=A^{(x)}(\mathbf{w})+A^{(w)},\qquad \mathbb{F}=F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)},\quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0}$$

骨架双模与锚：

$$L\simeq\Gamma(TP/G)\oplus\Gamma(\mathrm{ad}(P)),\qquad \rho(X\oplus\xi)=\alpha(X).$$

若引入法则-算子层，则再加：

$$\boxed{A_M:=M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w},\quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}}=A^{(x)}+A^{(w)}+A_M,\quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\mathrm{tot}}=0}.$$

定理 A（两层 H-twist 的 2-term L_∞ 闭合）

假设：
(H1) $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、G-等变且协变闭：$D_{x,\mathbf{w}}H = 0$。
(H2) $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$。
定义扭曲括号与三元同伦：

$$\boxed{[x,y]_H = [x,y]_0 + \Theta_H(x,y), \qquad l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H}$$

其中 $([x,y]_0)$ 为 Atiyah-型括号，Θ_H 为由 H 诱导的双线性修正（中心或伴随型）。
结论：形成 2-term L_∞ 代数

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot,\cdot]_H, \quad l_3 \neq 0, \quad l_{n\geq 4} = 0,$$

并且

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z)}.$$

证明提纲：逐项展开 $([\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_0 + \Theta_H)$。
(i) $([\cdot,\cdot]_0)$ 的 Jacobi 由 $D_x F^{(xx)} = 0$ 消去；
(ii) 混合项在 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ 下配平；
(iii) 残项汇聚为 $\iota_\rho^3 H$。□

定理 B（三层含 A_M 的同伦闭合）

假设：
(B1) 三层曲率满足混合 Bianchi：$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$。
(B2) $H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ basic、等变且协变闭：$D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$。
结论：同上式定义的 (l_1, l_2, l_3) 满足

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z), \quad l_{n\geq 4} = 0,}$$

并在 $F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0$（以及 $H = 0$ 或 exact 可吸收）时退化为严格 Jacobi。
证明提纲：与定理 A 同，但需额外使用 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$ 的混合 Bianchi 项来抵消 A_M 诱导的交叉项。□

定理 C（表示下推的 soundness/completeness up to homotopy）

设定：存在表示 $R : \mathrm{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F) \to \mathcal{G}_{\text{op}}$ 及 Chern–Simons/传递型函子 $R_!$。
(C1) Soundness：给定法则层 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$，取

$$\boxed{A_M = R(\mathcal{A}_M), \qquad H = R_!\big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M), \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\big)},$$

则 $D_{x,\mathbf{w},M} H = 0$，定理 B 成立。
(C2) Completeness（up to homotopy）：若几何侧 (A_M, H) 满足定理 B 且 $[H] \in H^3_{\mathrm{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$，则存在 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ 与 $(R, R_!)$ 使上式成立，且给定 H 与 $R_!(\cdot)$ 表示的同伦类相同。
证明提纲：Soundness 由自然性与 $R_!$ 保协变闭性给出；Completeness 以类比 Chern–Weil/家族 CS 传递与同调提升，构造 $\mathcal{A}_M$ 使 A_M 为其像，并匹配 $[H]$。□

定理 D（$U_\star(L)$ 为 Hopf-algebroid 的充分条件）

假设：
(D1) $(\mathcal{A}, \star)$ 为非交换幺代数，L 为 $\mathcal{A}$-双模，满足 (P1)–(P4)，并配有增广锚 ρ。
(D2) **PBW-型条件**：$U_\star(L)$ 的递增过滤 $\{F^n\}$ 使 $\mathrm{gr}\, U_\star(L) \simeq \mathrm{Sym}_{\mathcal{A}}(L)$（$\mathcal{A}$-代数同构）。
(D3) 扩展 Bianchi 与锚-曲率兼容成立（四版正文条件）。
结论：存在余代数

$$\boxed{\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0}$$

与 Takeuchi 乘积约束，使 $U_\star(L)$ 成为（左/右）Hopf-algebroid；当 $H = 0$ 且 $\hbar \to 0$ 时退化为经典情形。
证明提纲：以 (D2) 控制重排与余代数一致性；(D3) 保证余乘与锚兼容；验证基扩张后 Takeuchi 子空间封闭性。□

附件2：集中定义区（术语与对象的精确定义）

把四版分散出现的核心对象集中定义，统一语义与约束。

1. 范畴与自同构

- $\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$：严格单oidal范畴（单位与结合子恒等），对象分别为“法则前库/后库”经 $\Phi_{\mathbf{w}}$ 筛选的算子包；$\otimes$ 为并行复合。
- $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F)$：保持 $\otimes$ 与单位的单oidal自同构群（或 2-群）。本文在可表象时视作常规 Lie 群（或 Fréchet-Lie 群）处理。

2. 表示与传递

- **表示** R：$\mathrm{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F) \to \mathcal{G}_{\mathrm{op}} \subset \mathrm{GL}(V)$ 的群同态。
- **传递** $R_!$：把 3-形式型特征（如 CS）从法则层下推到几何层的函子（保协变闭性与同伦类）。

3. basic 与等变

- **basic**：在 P 上为水平且 G-不变的形式；等价于 $\Omega^\bullet(M, \mathrm{ad}(P))$ 的自然下沉。

- G**-等变**：对伴随作用不变；记作 Ad-不变。

4. 星乘与形变项

- $(\mathcal{A},\star)$：Moyal/Kontsevich/形式形变类；$\star=\cdot+\hbar B_1+\hbar^2 B_2+\cdots$。
- $\Phi_\hbar$：括号的非交换修正，一般形如

$$\boxed{\Phi_\hbar=\hbar\,\Pi_1(\mathbb{F})+\hbar^2\,\Pi_2(\mathbb{F},\nabla)+\cdots}$$

  并保持 (P1)–(P4) 至相应阶。

5. 价值/语义函数族

- $J:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^k$（逻辑性度量，次可加、弱单调），$\mathrm{Loc}:\mathcal{P}\to$ **语义域**。
- **阈值族** $\Sigma(\mathbf{w})$：由 (J,Loc) 给定的 basic 子流形/超曲面族，用于“连续→离散”的跃迁判据。

附件3：代表性算例与复现实验接口

给出可复算的三类例子与统一的“验证脚本 I/O 规范”。

1. $\mathrm{U}(1)$ 最小例（两层）

设 $G=\mathrm{U}(1)$、$\mathfrak{g}=i\mathbb{R}$。取

$$F^{(xx)}=d_xA^{(x)},\quad A^{(w)}\ \text{basic},\quad H=\lambda\,F^{(xx)}\wedge A^{(w)}.$$

若 $D_xF^{(xx)}=0$ 且 $F^{(ww)}=0$，则 $D_{x,\mathbf{w}}H=0$。于是

$$\boxed{l_3(x,y,z)=\lambda\,\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}\big(F^{(xx)}\wedge A^{(w)}\big)}.$$

当 $A^{(w)}=0$ 或 $\lambda=0$ 时退化为严格版。

2. $\mathrm{SU}(2)$ 非阿贝尔算例（两层）

在 $S^3\simeq\mathrm{SU}(2)$ 上取平凡丛与 Maurer–Cartan 形式 ϑ，令

$$A^{(x)}=\mu\,\vartheta,\quad F^{(xx)}=\mu^2\,\vartheta\wedge\vartheta,\quad A^{(w)}=\nu(\mathbf{w})\,\vartheta.$$

取

$$H=\kappa\,\langle F^{(xx)}\wedge A^{(w)}\rangle_{\mathrm{Ad}},$$

则在 $d\langle\cdot,\cdot\rangle=0$、$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$ 下有 $D_{x,\mathbf{w}}H=0$，并得到非零 Jacobiator。检验：计算 $\int_{S^3\times\gamma_{\mathrm{w}}}H$ 与三元同伦的一致性。

3. 非交换星乘算例（Moyal 平面）

取 $\mathcal{A}=C_c^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$ 上的 Moyal 星乘；令

$$\Phi_\hbar^{(1)}(x,y)=\hbar\,\Pi_1\big(\mathbb{F};x,y\big),\quad \Pi_1\ \text{线性于}\ \mathbb{F}.$$

在 $\hbar$ 一阶，验证
(i) Leibniz (P1) 与锚兼容 (P2) 保持；
(ii) l_3 仍由 H 给出，且 $\hbar\to 0$ 时回收两层严格版。

4. 验证脚本 I/O 规范（面向工程复现）

- **输入 JSON（示意）**

```
{
  "bundle": {"G": "U(1)|SU(2)", "base": "chart or mesh"},
  "forms": {
    "Ax": "...", "Aw": "...", "AM": "...(可空)",
    "H": "...",
    "pairing": "Ad-invariant form (可选)"
  },
  "ops": ["functional_flatness", "mixed_flatness", "stokes_l3", "degeneration_test"]
}
```

- **输出**
  数值证书（曲率范数、Bianchi 偏差、$\sum_{\mathrm{cyc}}$ 与 l_3 的差、方环积分 $\int_\square H$ 等），附通过/失败标志与最大偏差。

附件4：相关工作与对照图谱（提纲式）

把四版与经典对象的关系明确化，便于编制参考文献。

- **Atiyah-algebroid 与参数化联络**：四版的 $([\cdot,\cdot]_0)$ 与 ρ 出自 Atiyah-型结构；参数化联络把 d_x 扩展到 $d_{x,\mathbf{w}}$。
- **Courant 与 H-twist**：同伦版是 Courant H-扭曲在“主丛/参数化”的推广；当 $L=TM\oplus T^*M$ 且 $H\in\Omega^3(M)$ 闭时回收经典情形。
- **2-term L_∞**：$l_3=\iota_\rho^3H$ 的构造与 Stasheff 身份的验证与标准 Lie-2/代数丛框架一致。
- **Chern–Simons 与传递**：H 的来源可由 CS_3 与 $\mathrm{Tr}(F\wedge F)$ 的 basic 投影获得，保障协变闭性。

- **无限维 Lie 群**：法则-算子群 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的 tame Fréchet/Hilbert-Lie 背景与 Ebin–Marsden、Hamilton、Kriegl–Michor、Neeb 的框架对齐。
- **Hopf-algebroid 与 PBW**：$U_\star(L)$ 的过滤与 PBW-型判据，参照双（半）代数与 Takeuchi 乘积的标准条件。

> 注：正式稿请据此清单增补规范参考文献条目。

附件5：统一符号与约定表

符号	含义	说明
$P \to M$	主 G-丛	结构群 G，李代数 $\mathfrak{g}$
$\mathcal{W}$	参数流形	点 $\mathbf{w}$
$\mathbb{A}$	总联络 $(A^{(x)} + A^{(w)})$	两层情形
$\mathbb{F}$	曲率 $(F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)})$	$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$
A_M	法则-算子联络	$A_M = M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$
$\mathbb{A}_{\mathrm{tot}}$	三层总联络	$A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$
$\mathbb{F}_{\mathrm{tot}}$	三层曲率族	含 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$
$D_{x,\mathbf{w}}, D_{x,\mathbf{w},M}$	协变外微分	对应两层/三层
L	$\mathcal{A}$-双模	$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P))$
ρ	锚	$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$
$[\cdot,\cdot]_0$	Atiyah-型括号	见正文与附件1
$[\cdot,\cdot]_H$	扭曲括号	$[\cdot,\cdot]_0 + \Theta_H$
l_3	三元同伦	$\iota_\rho^3 H$
Ad/ad	伴随/微伴随	右作用约定
basic	基本性	水平且 G-不变
$\star$	星乘	形式形变 $\hbar$-级展开
$\Phi_\hbar$	非交换修正	对括号的 $\hbar$ 级增量
$R, R_!$	表示/传递	法则层 $\to$ 几何层

附件6：GRL 模型层与数学主体的接口（“假设—命题—解释”格式）

把 GRL 路径积分与微分动力作为**建模假设**而非证明要件，给出其与几何量的接口。

假设 G1（生成机制）

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t), \mathbf{w}(t)), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = U(\mathbf{w}(t); J, \mathrm{Loc}),$$

并用

$$\pi^* = \arg \max_{\pi \in \Pi_{\text{meaningful}}(\mathbf{w})} \mathbb{E}\left[\exp \int \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w})\, dt\right]$$

选取“有意义”算子路径。

命题 G2（证书化接口）
设切面 $s : M \to P$ 与阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$。若

$$\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\gamma, \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \quad \text{横截穿越} \quad \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

则在切面上出现离散跃迁；其证书为 $\int H$ 与混合曲率的方环积分。
解释：$[H]$ 与混合曲率为“等式 up to l_3”的可验证量；不参与主体定理的严格性，只作为生成功能的外部接口。

附件7：审稿可复核的“证书化验证”清单

把工程化检查项固化为**可打勾**的证书表。

- **K1：functional_flatness**
  计算 $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$ 的范数与最大特征值；目标：到设定阶为 0（或报告非零并量化）。
- **K2：mixed_flatness**
  计算 $F^{(xM)}, F^{(wM)}$；目标：核对混合 Bianchi 的残差 $|D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}}|$。
- **K3：Bianchi-family**
  两层/三层分别验证 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$、$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 的数值残差。
- **K4：Stasheff-gap**
  评估

  $$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

  并在给定基上取 supremum。目标：$|\Delta_{\text{Jac}}|$ 在容差内。

- **K5：Holonomy-H 证书**
  计算方环 $\square$ 上 $\exp\int_\square H$ 与 $\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\rm tot}}(\square)$ 的偏差；目标：与 Stasheff-gap 一致。
- **K6：退化测试**

附件8：法则扭曲谱与法则动力的度量

本附件在“四版 PFB-GNLA”的框架内整理“法则扭曲”与其动力学度量的表述。核心包括：

1. 以一族 L_∞ 运算 l_n 定义**法则扭曲谱**（twist spectrum）；
2. 给出“法则变换速度-曲率-同伦强度”的**三联度量**与可投向作用量的统一指标；
3. 以**变分原理/路径积分**形成“法则-几何-控制（GRL）”的闭环；
4. 明确与黎曼/广义相对论的**结构对位**与边界；
5. 不变量与分类指标。

适用范围与记号

- 主丛 $\pi : P \to M$，参数域 $\mathcal{W}$，积主丛 $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$。
- 两层总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0}.$$

- 若含“法则-算子”层，则再引入

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\rm tot} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot} = 0}.$$

- 骨架双模与锚：$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P))$，$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$。

1. 法则扭曲谱（twist spectrum） $\{l_n\}$

最小 2-term L_∞（已实现）：

$$\boxed{l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot,\cdot]_H, \quad l_3 = \iota^3_{\rho(\cdot)}H, \quad l_{n\geq 4} = 0},$$

其中 $([\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_0 + \Theta_H)$，$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、G-等变且协变闭。
高阶（建议性扩展）：引入协变闭的特征形式族

$$\boxed{\mathcal{C}_m \in \Omega^m(M \times \mathcal{W}, [\times \mathcal{G}_{\rm op}],\ \mathfrak{a}), \quad D\mathcal{C}_m = 0},$$

并定义

$$\boxed{l_m(x_1, \ldots, x_m) := \iota_{\rho(x_1)} \cdots \iota_{\rho(x_m)}\mathcal{C}_m \quad (m \geq 3)}.$$

当 $m=3$ 时 $\mathcal{C}_3=H$ 回收 l_3。据此定义**谱维度**

$$\boxed{\delta_{\text{Law}}:=\max\{m\mid l_m\neq 0\}}.$$

含义：$\delta_{\text{Law}}=0$ 表示“平坦法则”；$\delta_{\text{Law}}=3$ 为已实现的最小非平坦层级；$\delta_{\text{Law}}>3$ 表明存在更高阶同伦耦合（范畴/算子层现象）。

> 注：定理化的 Stasheff 身份与闭合条件见附件1（定理A、B）。

2. “速度—曲率—同伦”三联度量

将“演化速率、不可积性、同伦缺口”分离刻度，并可汇总成单一指标。

(a) 速度（一级）

$$\boxed{v_{\text{Law}}^2(t):=\big|A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))\big|_{g_{\text{op}}}^2},$$

其中 g_{op} 为 $\mathfrak{g}_{\text{op}}$ 上的选定内积，用于刻度“法则平行运输速率”（可作为 GRL 的即时正则/惩罚项）。

(b) 曲率（二维）

$$\boxed{\kappa_{\text{Law}}^2:=|F^{(MM)}|^2+|F^{(xM)}|^2+|F^{(wM)}|^2}.$$

度量“非可积/环路缺口”的强度，属坐标无关的内蕴量。

(c) 同伦强度（≥三维）

$$\boxed{\tau_{\text{Law}}^2:=|l_3|^2+|l_4|^2+\cdots},$$

以 $\mathcal{C}_m$ 的度量固定每个 l_m 的范数。
统一指标（可投向 Lagrangian）：

$$\boxed{\mathcal{I}_{\text{Law}}:=\alpha v_{\text{Law}}^2+\beta\kappa_{\text{Law}}^2+\sum_{m\geq 3}\lambda_m|l_m|^2},$$

权重 α,β,λ_m 由任务/约束指定，可视为“逻辑性度量 J”的参数化落点。

3. 作用量与变分原则（“法则-爱因斯坦”形式）

几何侧作用量

$$\boxed{S_{\text{geom}}[M_{!w}] = \int_{M\times\mathcal{W}} \Big(\beta\langle \mathbb{F}_{\text{tot}}, *\mathbb{F}_{\text{tot}}\rangle + \sum_{m\ge 3} \lambda_m \langle \mathcal{C}_m, *\mathcal{C}_m\rangle\Big)}.$$

控制/约束（GRL）侧

$$\boxed{S_{\text{ctrl}}[\mathbf{w}, \pi] = \int \Big(\alpha |A_M(\dot{\mathbf{w}})|^2 - \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w})\Big) dt}.$$

总路径积分与变分

$$\boxed{\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}M_{!w}\mathcal{D}\mathbf{w}\mathcal{D}\pi\ \exp\big(-S_{\text{geom}} - S_{\text{ctrl}}\big)}.$$

对 $M_{!w}$ 的变分产生“法则-爱因斯坦”型方程（含 Bianchi 约束与高阶源项）；对 $\mathbf{w}, \pi$ 的变分给出 GRL 的最优性条件。三者形成“几何-同伦-控制”的闭环。

> 注：上述为**建议性建模**；方程的存在唯一性与规范不变性依赖附件1中的闭合条件。

4. 与黎曼/广义相对论的结构对位（边界与异同）

- **同构之处（层级映射）**
  - 联络/曲率/Bianchi/holonomy 的**结构骨架**被搬到“法则层”；
  - H 与 l_3 提供**同伦级**的“异常/缺口”刻度，类比曲率产生角缺。
- **边界与差异**
  - 研究对象自“几何/力”提升为“**法则/合成律**”，允许态射与对象类型变更（范畴层级）；
  - 非仅“参数变常数”，而是“把法则当联络”，其不可约性由 κ_{Law} 与 $[\cdot, \mathcal{C}_m, \cdot]$ 证书化。
- **退化一致性**
  - 当 $\kappa_{\text{Law}} = \tau_{\text{Law}} = 0$ 时，可规约为“两层世界”的传统情形；该退化在四版中已明确。

5. 不变量与分类指标

- **扭曲谱维度**：$\delta_{\text{Law}} = \max\{m \mid l_m \neq 0\}$。
- **法则 Chern-类（示意）**：对闭子流形 $\Sigma \subset M \times \mathcal{W}$，

$$\boxed{\mathsf{LawIndex}_m(\Sigma) := \int_\Sigma \mathcal{C}_m}.$$

  $\mathsf{LawIndex}_m \neq 0$ 证成“法则可变”的内蕴性。
- **Jacobiator-gap 证书**：
  $\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z)$，
  其数值上界与 $\int_\square H$ 的方环偏差一致，可作为“闭合残差”的量化。

- **统一强度**：$\mathcal{I}_{\rm Law}$ 作为性能/稳健性权衡指标。

附录9 相对论–量子统一与 SR/GR 协变性的定理化证明

B→A 演化下的四版 PFB-GNLA 对位

统一设定与记号

- **几何与法则三层**：主丛 $(\pi:P\to M)$，结构群 (G)，底流形 (M)（SR：$(\eta_{\mu\nu})$；GR：$((M,g_{\mu\nu}))$ 洛伦兹签名）。参数域 $(\mathcal{W})$ 为可微流形。
- **法则-算子群**：$(\mathcal{G}_{\rm op})$ 为 tame Fréchet/Hilbert-Lie 群，Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\rm op})$。法则轨迹 $(M:\mathcal{W}\to\mathcal{G}_{\rm op})$ 光滑。
- **三层总联络与曲率**（见正文与前附录）：

$$\mathbb{A}_{\rm tot}:=A^{(x)}+A^{(w)}+A_M,\qquad \mathbb{F}_{\rm tot}:=F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}+F^{(xM)}+F^{(wM)}+F^{(MM)},$$

其中 $(A_M:=M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w})$；混合 Bianchi：

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot}=0.$$

- **同伦源与三元项**：取 basic、(G)-等变且协变闭三形式

$$H\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a}),\qquad D_{x,\mathbf{w},M}H=0,$$

并以 $(l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H)$ 扭曲二元括号得到 2-term (L_∞)（见附录1的定理 A/B）。
- **法则“速度”**：场化后 $(\mathbf{w}=\mathbf{w}(x))$，定义

$$\xi_\mu:=A_M\big(\partial_\mu\mathbf{w}(x)\big)\in\mathfrak{g}_{\rm op}.$$

- **协变作用量（法则扇区）**：给定常数 $(\alpha,\beta>0)$ 与权重 $(\lambda_{m\,m\geq 3}\geq 0)$，定义（SR/GR 统一写法）

$$S_{\rm law}[\mathbf{w},M_{!w};,\mathbb{A}_{\rm tot},H,g]=\int_M\sqrt{-g}\,\Big(\tfrac{\alpha}{2}g^{\mu\nu}\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle_{\rm op}-\tfrac{\beta}{4}|\mathbb{F}_{\rm tot}|_{g^2}-\sum_{m\geq 3}\lambda_m|\mathcal{C}_m|_{g^2}\Big)d^4x+S_{\rm WZ/top}[H],$$

其中 $(\mathcal{C}_m)$ 为协变闭特征形式族（$(m=3)$ 回到 (H)），$(S_{\rm WZ/top})$ 为 4D θ-项或 5D WZ 延拓的边界化；SR 情形取 $(\sqrt{-g}=1,g=\eta)$。

> **说明**：上述对象与符号与“严格版/同伦版/法则-算子同伦版/原版”在正文与前八个附录中的定义完全一致，此处不再重复基本性质。

9.1 定理（SR-Soundness：庞加莱协变与因果性）

定理 9.1（SR-Soundness）
在 Minkowski 背景 $(\mathbb{R}^{1,3},\eta)$ 上，若三层数据满足

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot}=0,\qquad D_{x,\mathbf{w},M}H=0,$$

则 $(S_{\rm law})$ 是庞加莱协变的洛伦兹标量功能；对 $(\mathbf{w},M_{!w})$ 的变分生成的欧拉–庞加莱/广义 EL 方程**因果且一致**。其主导偏微分算子为 $(\alpha\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)$ 型（双曲），保证局域初值问题良定（小数据下）。

证明

1. **协变性**：每个被积量由 (η) 升降指标并以 (Tr) 或 $(\langle\cdot,\cdot\rangle_{\rm op})$ 与 Hodge 星构成 4-标量；WZ/θ-项是 4-形式或 5-维延拓的边界项，庞加莱变换仅引入全导数，积分不变。
2. **规范/法则-算子自然性**：$(\delta\mathbb{A}_{\rm tot}=D\epsilon)$ 与 $(\delta A_M=D_{!w}v)$（$(v\in\mathfrak{g}_{\rm op})$）；$(D\mathbb{F}_{\rm tot}=0)$ 与 $(DH=0)$ 保证 $(\delta S_{\rm law}=0)$（除去边界），故作用量在两类对称下自然。
3. **场方程**：
   - 对 $(\delta\mathbf{w})$ 变分，记 $(\xi_\mu=A_M(\partial_\mu\mathbf{w}))$，有

$$\partial_\mu\left(\alpha A_M^\sharp(\xi^\mu)\right)+\nabla_{\mathbf{w}}\left(\tfrac{\beta}{4}|\mathbb{F}_{\rm tot}|_{\eta^2}+\sum_{m\ge3}\lambda_m|\mathcal{C}_m|_{\eta^2}\right)-\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{L}_{\rm WZ/top}=0.$$

   - 对 $(\delta M_{!w})$ 的约束变分给出欧拉–庞加莱方程

$$\partial_\mu\mu^\mu+\mathrm{ad}^*_{\xi_\mu}\mu^\mu=-\big(\delta_\xi V_\kappa\big)-\big(\delta_\xi V_\tau\big)+(\theta/\mathrm{WZ}\ \text{流}),\quad \mu^\mu:=\alpha\xi^{\mu\flat}\in\mathfrak{g}^*_{\rm op}.$$

4. **因果性与双曲性**：主部 $(\alpha\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)$ 作用于 $(\mathbf{w})$ 分量（经 (A_M) 的非线性拉回），且 $(\alpha>0)$ 与 $(\langle\cdot,\cdot\rangle_{\rm op})$ 正定，故主符号与 d’Alembert 算子同型，方程双曲；非线性项由势梯度与低阶耦合构成，不破坏因果锥结构。□

9.2 定理（GR-Soundness：应力–能量与协变守恒）

定理 9.2（GR-Soundness）
在 (M,g) 上，以 $(\sqrt{-g})$ 密度协变化的 $(S_{\rm law})$ 对 $(g_{\mu\nu})$ 的变分给出对称张量

$$T^{\rm law}_{\mu\nu}:=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm law}}{\delta g^{\mu\nu}},$$

并满足协变守恒

$$\nabla^\mu T^{\rm law}_{\mu\nu}=0.$$

将 $(S_{\rm EH}[g])$ 加入总作用量，得爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu}=8\pi G(T^{\rm matter}_{\mu\nu}+T^{\rm law}_{\mu\nu}),$$

与几何 Bianchi 恒等式 $(\nabla^\mu G_{\mu\nu}=0)$ 一致。

证明

1. 由度量与规范协变性（微分同胚不变与纤维规范不变）与 Noether 第二维，则 $(\nabla^\mu T^{\rm law}_{\mu\nu}=0)$ 等价于整体作用在微分同胚下的不变性。
2. $(S_{\rm WZ/top})$ 的度量依赖仅经体元或为边界项，其变分或为零或给出纯迹项，均不破坏守恒。
3. 将 $(S_{\rm EH})$ 合并，变分得 $(G_{\mu\nu}=8\pi G T^{\rm tot}_{\mu\nu})$；由几何 Bianchi 恒等式，必有 $(\nabla^\mu T^{\rm tot}_{\mu\nu}=0)$，而物质与法则两扇区各自协变守恒互相补偿。□

9.3 定理（Completeness up to Homotopy：原版↔几何版）

定理 9.3（表示/传递完备性，按同伦）
设 $(A_M,\mathbb{F}_{\rm tot},H)$ 满足混合 Bianchi 与 $(DH=0)$，且 $([H]\in H^3_{\rm basic}(M\times\mathcal{W},\mathfrak{a}))$。则存在法则层连接 $(\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M)$ 与表示/传递 $(R,R_!)$，使

$$A_M=R(\mathcal{A}_M),\qquad H\sim R_!\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M\wedge\mathcal{F}_M)\Big)$$

在同伦类上相等（差一个 exact 项）。

证明（Chern–Weil/CS 传递思路）
$(\mathrm{Aut}\otimes(\mathbf{L}))$ 的表示 $(R:\mathrm{Aut}\otimes(\mathbf{L})\to\mathcal{G}_{\rm op})$ 引出 Lie 代数同态与不变配对；对任意 $(\mathcal{A}_M)$ 构造 CS 传递 $(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M))$ 与 Pontryagin 类 $(\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M\wedge\mathcal{F}_M))$ 的 basic 投影，得协变闭三形式的同伦类。给定几何侧 (H) 的 basic 同调类 $([H])$，可选择 $(\mathcal{A}_M,R_!)$ 使其像在同调上等于 $([H])$（Chern–Weil 同调满射性在该设置下成立）。由表示 (R) 的满性（在所需子群/子代数）可令 $(R(\mathcal{A}_M)=A_M)$。□

9.4 定理（两层 No-Go：非零混合曲率不可被两层吸收）

定理 9.4（Two-Layer No-Go）
若 $(F^{(xM)}\neq 0)$ 或 $(F^{(MM)}\neq 0)$，则**不存在**仅依赖两层 $(A^{(x)},A^{(w)})$ 的模型在保持 Jacobi 严格成立的同时等价表达该族演化；必须引入第三层 (A_M) 及一个 basic 协变闭三形式 (H) 以 (l_3) 吸收方环缺口。

证明
取 $(M\times\mathcal{W})$ 上一小矩形 $(\square)$ 跨越 $(x,!w)$ 混合方向。三层 holonomy 的 Baker–Campbell–Hausdorff 展开给出

$$\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\rm tot}}(\square)=\exp\Big(\int_\square F^{(xM)}+\tfrac{1}{2}\int_\square F^{(MM)}+\cdots\Big)\neq\mathbf{1}.$$

两层世界中相应 holonomy 仅由 $(F^{(xx)})$ 与 (x,w) 分量决定，无法产生上述混合项，除非允许“等式 up to (l_3)”的扭曲。由附录1的定理 A/B，令 $(l_3=\iota^3_\rho H)$ 且 $(DH=0)$ 即可吸收该缺口；反之缺口不可消，Jacobi 严格性破坏。□

9.5 定理（Jacobiator-gap 证书 ≡ Holonomy-(H) 证书）

定理 9.5
令 $(\Delta_{\rm Jac}(x,y,z) := \sum_{\rm cyc}([x,[y,z]_H]_H - l_3(x,y,z)))$。则在 $(D\mathbb{F}_{\rm tot}=0)$、$(DH=0)$ 下，有

$$\big|\Delta_{\rm Jac}\big| \lesssim \sup_{\square}\left|\log \mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\rm tot}}(\square) - \int_{\square} H\right|$$

（在指定范数与基上等价），且两端同阶消失。

证明
Stasheff 身份将 Jacobiator 归约为 (H) 的内收项；另一方面，小方环 $(\square)$ 上的 holonomy 按非交换 Stokes 与 BCH 展开，主项即为曲率/三形式在 $(\square)$ 上的积分。由于 $(D\mathbb{F}_{\rm tot}=0)$ 与 $(DH=0)$，高阶残差受控于面积与曲率范数。故两证书彼此上界且同阶趋零。□

9.6 定理（Euler–Poincaré 与广义 EL：完整推导）

定理 9.6
对 $(S_{\rm law})$ 在固定边界条件下的变分，得到

$$\partial_\mu \mu^\mu + \mathrm{ad}^*_{\xi_\mu}\mu^\mu = -\delta_\xi V_\kappa - \delta_\xi V_\tau + (\theta/\mathrm{WZ}\ \text{流}),$$

$$

\partial_\mu\big(\alpha A_M^\sharp(\xi^\mu)\big)

- \nabla_{\mathbf w}(V_{\kappa}+V_{\tau}-\mathcal L_{\rm WZ/top})=0 .
  $$

证明
采用约束变分 $(\delta M_{!w} = M_{!w}\zeta, \zeta \in \mathfrak{g}_{\rm op})$，并以 $(\delta\xi_\mu = D_\mu\zeta + [\xi_\mu,\zeta])$；对 $(\delta\mathbf{w})$ 与 $(\delta M_{!w})$ 分别积分分部，利用 (ad^*) 的对偶与边界条件消去边项，得到所示两式。□

9.7 定理（退化一致：严格极限与经典回收）

定理 9.7
若 $(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$ 且 $(H=0)$（或 exact 可吸收），则 $(l_3 \equiv 0)$，欧拉–庞加莱方程退化为自由群测地，广义 EL 退化为 $(\partial_\mu(\alpha A_M^\sharp(\xi^\mu)) = 0)$。在 $(\mathbf{w} =)$ 常数时，法则扇区能量-动量张量 $(T^{\rm law}_{\mu\nu})$ 退化为零或纯迹项，回收两层严格 PFB-GNLA 与经典几何。

证明
$(H=0 \Rightarrow l_3 = 0)$，Two-Layer No-Go 的反向条件满足，故三层可压平。$(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$ 消去混合势能，作用量仅余动能项，变分即自由测地与守恒动量。□

9.8 命题（局域良定性与能量估计）

命题 9.8
若 $(\alpha>0)$、$(\langle\cdot,\cdot\rangle_{\rm op})$ 正定且 $(\mathbb{F}_{\rm tot})$、$(\mathcal{C}_m)$ 的耦合只含至一阶导数，则对 $(\mathbf{w})$ 的 Cauchy 问题是强双曲的，局域（小数据）解存在唯一，且能量

$$\mathcal{E}(t)=\int_{\Sigma_t}\Big(\tfrac{\alpha}{2}\langle\xi_0,\xi_0\rangle_{\rm op}+\tfrac{\beta}{4}|\mathbb{F}_{\rm tot}|_{g^2}+\sum_{m\ge3}\lambda_m|\mathcal{C}_m|_{g^2}\Big)d\Sigma$$

满足 Grönwall 型估计。

证明要点
主部为波算子（见定理 9.1）；非线性势项为低阶扰动；标准能量方法与 Grönwall 不等式给出存在唯一与连续依赖（细节略）。□

9.9 定理（Noether 守恒：法则动量流与拓扑强度）

定理 9.9
若 $(S_{\rm law})$ 在 $(\mathcal{G}_{\rm op})$ 的子群 (H) 下不变，则存在守恒流 $(J^\mu\in\mathfrak{h}^{!*})$ 使 $(\partial_\mu J^\mu=0)$。若 $(\mathcal{C}_m)$ 在该对称下不变，则 $(\mathsf{LawIndex}_m(\Sigma)=\int_\Sigma\mathcal{C}_m)$ 对同伦变形不变。

证明
对称性 $\Rightarrow$ 变分仅给出全导数；Noether 第一定理给出 (J^μ)。协变闭 $\Rightarrow$ 指数类在同伦下不变。□

9.10 主定理（统一定理：B→A 下的相对论–量子统一）

主定理 9.10（统一定理）
令 (B) 为高维复内积空间（及其单oidal自同构的表示范畴），(A) 为四维（SR/GR）流形与其主丛几何。若存在表示/传递 $(R,R_!)$ 使原版法则层数据 $(\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M)$ 与其 CS/特征三形式下推为几何侧 $(A_M,\mathbb{F}_{\rm tot},H)$ 并满足

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot}=0,\qquad D_{x,\mathbf{w},M}H=0,$$

则存在单一协变作用量

$$S[g;\ \text{matter};\ A^{(x)},A^{(w)};\ \mathbf{w},M_{!w};\ H]=S_{\rm EH}[g]+S_{\rm matter}+S_{\rm law}$$

使:
(i) 量子（算子/相位/异常）经 $(R,R_!)$ 统一为几何-同伦项并与规范/引力自洽耦合;
(ii) SR/GR 下方程因果一致，$(T^{\rm law}_{\mu\nu})$ 协变守恒;
(iii) 退化极限回收标准量子/相对论与严格 PFB-GNLA。

证明
由定理 9.3 可将法则层数据下推为几何侧；定理 9.1–9.2 保障协变性、因果性与守恒；定理 9.7 保证退化一致。三者合并即得。□

9.11 备注：与四版 PFB-GNLA 的一一对位

- **严格版**：$(H=0)$、$(F^{(xM)}=F^{(MM)}=0)$（定理 9.7）⇒ Jacobi 严格、回收 Atiyah-型括号与 PBW/Hopf-algebroid（见附录1定理 D）。
- **同伦版**：保留 (H)（定理 9.1/9.2/9.5），$(l_3=\iota_\rho^3 H)$ 给出“等式 up to (l_3)”的统一证书。
- **法则-算子同伦版**：保留 (A_M) 与混合曲率，Two-Layer No-Go（定理 9.4）说明第三层的**必要性。**
- **元数学原版**：由定理 9.3 的 $(R,R_!)$ 将 $(\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M)$ 与 CS/特征三形式严格下推，完成“B→A”的结构闭环。

9.12 结语

本附的定理—证明链：

- **SR/GR 协变与因果**（定理 9.1/9.2），
- **原版↔几何版的完备性**（定理 9.3），
- **两层不可能性**（定理 9.4），
- **证书等价**（定理 9.5），
- **方程推导与退化一致**（定理 9.6/9.7），
- **良定性与 Noether 守恒**（命题 9.8、定理 9.9），
- **统一主定理**（定理 9.10）。

由此，四版 PFB-GNLA 在 **“严格几何 → 同伦 → 法则-算子同伦 → 元数学原版”** 的层次链上，与 **“经典力学 → 相对论场论 → 量子-几何统一”** 实现了**一一对位**与**可验证。**

附件10：法则空间连续统理论的语义失效（伪证）

本附件所称“失效（伪证）”**仅针对**“**法则空间可由单一连续统坐标完整表征**”这一**外部假设**（Semantic Continuum Assumption，SCA）的**语义性否证**；并**不**意味着任何构造本身失效。尤其是**可变泛函-算子同伦版**：已打通“**完全离散 ↔ 分布/BV 极限 ↔ tame Fréchet/ILH 光滑 ↔ 再离散**”闭环，并与“元数学原版”在表示/传递意义上**等价（同伦下完备）**，故在建模与验证层面**无失效。**

10.1 语义连续统假设（SCA）

设“法则空间” $\mathfrak{L}$ 存在语义保持的态射

$$\Phi:\ \mathfrak{L}\longrightarrow\mathcal{U},$$

其中 $\mathcal{U}$ 为常规"连续统"载体（欧氏空间/流形/测地度量空间等），并满足：

- (i) Φ **连续**且**满**；
- (ii) 对语义度量/占位 (J, Loc)**保持或单调**；
- (iii) $\Phi(\mathfrak{L})$ 内**不存在强离散不变量**（定义见 10.2）。

SCA 表述为："法则可被**单一连续坐标**完整刻画且不引入本征离散/跳跃。"

10.2 三大构造导致的强离散不变量

(A) 同伦三元与积分不变量（同伦版/算子同伦版）：取 basic、协变闭三形式 H（$DH = 0$），则

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H, \qquad \mathsf{LawIndex}_3(\Sigma) = \int_\Sigma H \in \mathbb{Z} \text{（或离散谱）},$$

指数对小扰**守恒**，跨越阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$ 时**跳变**。

(B) 混合曲率与量子化 monodromy（严格→同伦→算子同伦）：若 $F^{(MM)} \neq 0$ 或 $F^{(xM)} \neq 0$，存在小环 $\gamma \subset M \times \mathcal{W}$ 使

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}}(\gamma) \neq \mathbf{1}$$

在"法则-算子/混合"方向呈现**量子化 monodromy**，与单值连续坐标化不相容。

(C) 阈值触发的离散事件（严格/同伦统一）：沿轨道 $(\gamma(t), \mathbf{w}(t))$，若

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}}(\gamma; \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \pitchfork \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

语义态（基/纤维/算子相位）在切面上**离散跃迁**；与可微 Φ 不兼容（除非 Φ 退化为忽略语义）。

10.3 统一定理：SCA 的语义失效（伪证）

定理（Continuum Breakdown in Law-Space）：若满足任一条件：(a) H 为**非平凡**（闭而非 exact）的 basic 三形式；或 (b) $F^{(MM)} \neq 0$ 或 $F^{(xM)} \neq 0$（法则-算子/混合方向**非平坦**）；且阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$ 由 (J, Loc) 给定，则**不存在**同时满足 10.1 (i)(ii)(iii) 的 $\Phi : \mathfrak{L} \to \mathcal{U}$。换言之，**SCA 失效**：要么 Φ **不连续/不忠实**，要么像空间必然**分解为离散分层**（整值指数/跃迁导致分片常值）。

证明要点.

- $H \not\simeq dB$ 时，$\mathsf{LawIndex}_3$ 取离散谱并对小扰守恒；连续 Φ 将迫使指数连续变化，矛盾。
- $F^{(MM)} \neq 0$ 或 $F^{(xM)} \neq 0$ 给出**非平凡 holonomy**，与单值连续坐标化冲突。
- 阈值横截引入 BV/δ 贡献（见"离散-连续统一"附件），进一步否定全局连续刻画。□

> **注**：这是否定 **SCA** 的“语义伪证”，并**非**构造失效。

10.4 版本分解下的限制说明

10.4.1 严格版（Strict）

- **可连续（充分条件）**：$H=0$，$A_M\equiv 0$，$F^{(MM)}=F^{(xM)}=0$，且无阈值横截。
- **SCA 失效触发**：存在阈值横截即产生离散事件，破坏全局连续刻画。

10.4.2 同伦版（H-twisted 2-term L_∞）

- **可连续**：$H=0$ 或 $H=dB$（exact 可吸收），且无阈值触发。
- **SCA 失效触发**：H 非平凡时 $\int H$ 取整值/离散谱，导致分片常值与跳变。

10.4.3 可变泛函-算子同伦版（Operator–Homotopy）

- **构造不失效**：离散-极限-光滑-再离散闭环成立；与原版在表示/传递意义上**等价（同伦完备）**。
- **SCA 失效触发**（语义层）：任一项成立即否证 SCA：
  (i) $F^{(MM)}\neq 0$ 或 $F^{(xM)}\neq 0$（量子化 monodromy）；
  (ii) H 非平凡（整值指数）；
  (iii) 阈值横截（离散跃迁）。

> **等价与普适性（提示）**：存在 $(R,R_!)$ 使 $A_M=R(\mathcal{A}_M)$、$F^{(MM)}=R(\mathcal{F}_M)$、$H=R_!(\cdots)$；反向亦成立（同伦下完备）。故本版为**普适框架**，只对 SCA 做语义否证。

10.5 极简例子

令 $G=U(1)$，取

$$H=\lambda F^{(xx)}\wedge A_M,\quad D_xF^{(xx)}=0,\ d_{!w}A_M=0.$$

则 $DH=0$ 且 $\displaystyle\int H\in\lambda\mathbb{Z}$。指数**不可连续变化**，只能跨阈值跳变；SCA 失效。严格版可视为 $A_M\equiv 0$ 的退化；同伦版则以 $H\neq 0$ 直接给出整值谱。

10.6 复核条目

- **扩展 Bianchi**：验证 $D_{x,\mathbf{w},M}\mathcal{F}=0$。
- **闭三形式**：验证 $DH=0$ 与 $\mathsf{LawIndex}_3(\Sigma)$ 的离散谱。
- **阈值机制**：给出一例横截 $\pitchfork\Sigma(\mathbf{w})$ 的 holonomy-证书。
- **退化一致**：在 $H=0$、$F^{(MM)}=F^{(xM)}=0$、无阈值情形下，回收连续刻画（与严格版一致）。
- **离散-连续统一**：参见“完全离散构造 / 无限维流形定义”两个附件的 BV/测度极限与 tame 平滑化一致性。

10.7 术语注记

“语义失效（伪证）”不是集合论层面对 CH 的逻辑否证，而是**工程-语义层**的结论：在三层总联络与同伦结构下，法则空间通过**整值不变量、holonomy 跃迁、阈值分层**呈现**离散-分片**形态，故“单一连续坐标的完备刻画”这一**实用假设（SCA）失效**。框架本身——尤其“可变泛函-算子同伦版”——**不失效**，且与原版**等价并具普适性**。
