

# 四版 PFB-GNLA 的对标与对位：从严格几何到“法则-算子”同伦，再到元数学原版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.0.0

**注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：** [作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

## 摘要

本文对齐并对位四个版本的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA) 一体化构造：（1）**严格版** (Jacobi 严格成立)；（2）**同伦版** (允许三元同伦  $(l_3)$ )；（3）**可变泛函-算子同伦版** (将  $(w)$  从“参数”提升为“法则泛函算子轨迹”，引入算子方向联络  $(A_M)$ )；（4）**元数学原版** (“重定义联络” $(\mathcal{A}_M)$  与三阶纠正 $(l_3)$ )。在统一的主丛—参数—算子三层联络图景下，给出核心数据、判据与退化，建立从“法则层”到“传统几何层”的表示对位：

$$A_M \xleftarrow{R} \mathcal{A}_M, \quad H! \left( A^{(x)}, A^{(w)}, A_M \right) \xleftarrow{R} R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right),$$

并给出同构/退化条件：

$$D_{x,w,M}H = 0, \quad D_{x,w}\mathbb{F} = 0, \quad F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0 \Rightarrow l_3 = 0.$$

由此说明：严格版是“无异常/无法则演化”的经典极限；同伦版以  $(H)$  统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版把“法则演化”提升为算子几何的**一等公民**；元数学原版在法则层给出生成—纠正的起点。四版因此形成从**静态等式**到**生成式法则**的层级序列，且可相互表示、检验与退化。

# 1. 统一骨架与分层联络

设主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$ , 结构群  $(G)$ , 参数域  $(\mathcal{W})$ 。在积主丛  $(\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W})$ 上引入

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$$

并取“骨架” $(\mathcal{A})$ -双模

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

**严格版**与**同伦版**工作在  $((M, \mathcal{W}))$ -两层; **可变泛函-算子同伦版**引入第三层 (法则—算子) :

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}), \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$$

$$\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M]$$

并满足**混合 Bianchi**

$$D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0$$

---

## 2. 严格版 (Jacobi on-the-nose)

Atiyah-型括号

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_0 = [X, Y] \quad \oplus \left( \mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \right)$$

满足 Leibniz 与锚-曲率兼容

$$\rho([x, y]_0) = [\rho x, \rho y] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}, \quad \kappa \propto \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} F^{(xx)}$$

且严格 Jacobi

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_0]_0 = 0.$$

**定位：**无异常、无法则演化的经典几何；PBW/包络/表示链条直接可用。

### 3. 同伦版 (( $H$ )-twisted 2-term ( $L_\infty$ ))

取 ( $G$ )-等变、basic 的三形式

$$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad D_{x, \mathbf{w}} H = 0, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{R} \text{ 或 } \text{ad}(P)$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

在 ( $D_{x, \mathbf{w}} H = 0$ ) 与 ( $D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$ ) 下满足 Stasheff:

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0$$

当 ( $H = 0$ ) 或 ( $H = dB$ ) 可吸收, 退化回严格版。

**定位：**把“异常/修正”统一吸纳为 ( $H$ ) 的同伦类 ( $[H]$ ), 解释“等式 up to ( $l_3$ )”。

### 4. 可变泛函-算子同伦版 (将 ( $w$ ) 提升为“法则泛函算子”)

将 ( $w$ ) 提升为法则函子轨迹 ( $M_{!w}$ ), 引入 ( $A_M$ ) 与三层曲率 ( $\mathbb{F}_{\text{tot}}$ )。选择

$$H = H!(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

此时  $(l_3)$  的来源不再是“外加”，而是**法则演化的算子几何**之必然产物；若

$$F^{(MM)} = 0, \quad F^{(xM)} = 0$$

则“法则演化”与几何兼容， $(H)$  可退为几何/参数二层；进一步若  $(H = 0)$  或 exact，则回收严格版。

**定位：**与元数学“重定义联络”完全对位；解释“法则随  $(w)$  的生成与纠正”。

## 5. 元数学原版（法则联络 $(\mathcal{A}_M)$ 与三阶纠正）

法则层给出

$$\mathcal{A}_M \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}), \quad \mathcal{F}_M = d_{\text{lw}} \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$$

以及三阶纠正

$$l_3^{(\text{orig})}(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

并含非交换修正  $(\Phi_{\hbar})$ :

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_{\star} = [\cdot, \cdot]_0 + \Phi_{\hbar}(X \oplus \xi, Y \oplus \eta; \mathcal{F}_M).$$

**对位映射（表示  $(R)$ ）：**

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) = R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

在  $(R)$  下，可把原版的法则层同伦项、非交换修正下推至几何—参数—算子三层。

## 6. 对标与对位（条理化陈述）

### (i) 数据层对位：

严格版与同伦版共享  $((P, \mathcal{W}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbb{F}))$ ；可变泛函-算子同伦版增加  $(Q; A_M; F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)})$ ；原版给出  $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$  与  $(\Phi_{\hbar})$ 。映射  $(R)$  实现

$$\mathcal{A}_M \mapsto A_M, \quad \mathcal{F}_M \mapsto F^{(MM)}, \quad \text{并由此生成 } H.$$

### (ii) 同伦/严格判据：

$$D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

$$F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0, \quad H = 0 \text{ (或 exact)} \Rightarrow l_3 = 0 \text{ (严格极限)}.$$

### (iii) 动机：

严格版=静态等式；同伦版= $(H)$  统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版=法则演化的“算子几何”；原版=生成式法则的起点。

“指标定理式”理解： $([H])$  是变形不变量（“指数类”），holonomy 方环的“缺口”由  $(\int H)$  量化。

### (iv) 验证/工程：

严格版检  $(D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0)$  与严格 Jacobi；同伦版再检  $(D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0)$  与 Stasheff；可变泛函-算子同伦版还检  $((F^{(MM)}, F^{(xM)}))$ ；原版可通过  $(R)$  下推到几何侧进行证据化（例如  $(H)$  证书、Jacobiator 证书）。

---

## 7. 代表性公式集（便于引用）

1. 扩展 Bianchi:  $(D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0)$ , 同伦版外再有  $(D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0)$ 。
  2. 扭曲括号:  $([x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y))$ 。
  3. 三元同伦:  $(l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H)$ 。
  4. Stasheff:  $(\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z))$ 。
  5. 算子 Maurer–Cartan:  $(F^{(MM)} = d_{\text{lw}} A_M + A_M \wedge A_M)$ 。
  6. 表示对位:  $(A_M = R(\mathcal{A}_M), (H = R(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)))$ 。
-

## 8. 结论

四版构造在同一“主丛—参数—算子”联络-曲率语义下**严格对位**：严格版提供“清爽等式”、同伦版提供“受控失配”的统一编码，可变泛函-算子同伦版将**法则演化**升格为算子几何，元数学原版在法则层给出生成与三阶纠正的“第一性”表达。通过表示  $(R)$  与协变闭/退化判据，可在四版之间往返：**原版**  $\rightarrow$  **(算子表示)**  $\rightarrow$  **同伦版**  $\rightarrow$  **严格极限**。这种分层与对位，使得“解释为何”“落实如何算”“验证如何检”三者在同一框架内闭环。

## 附件1：定理化与证明骨架 (Stasheff 闭合、表示下推与 Hopf-algebroid)

把四版正文中的“命题/判据/要点”提升为可复核的**定理—引理—证明提纲**。包含：两层与三层情形下的  $L_\infty$  闭合定理 (A、B)、法则层 $\rightarrow$ 几何层的表示下推完备性 (C)，以及包络与 Hopf-algebroid 的存在判据 (D)。

### 统一设定

令  $\pi: P \rightarrow M$  为主  $G$ -丛，参数域  $\mathcal{W}$  光滑，积主丛  $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 。

总联络与曲率三分解：

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$$

骨架双模与锚：

$$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

若引入法则-算子层，则再加：

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0.$$

### 定理 A (两层 $H$ -twist 的 2-term $L_\infty$ 闭合)

假设：

(H1)  $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$  为 basic、 $G$ -等变且协变闭：  $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ 。

(H2)  $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 。

定义扭曲括号与三元同伦：

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

其中  $([x, y]_0)$  为 Atiyah-型括号,  $\Theta_H$  为由  $H$  诱导的双线性修正 (中心或伴随型)。

**结论：** 形成 2-term  $L_\infty$  代数

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3 \neq 0, \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并且

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

**证明提纲：** 逐项展开  $([\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H)$ 。

(i)  $([\cdot, \cdot]_0)$  的 Jacobi 由  $D_x F^{(xx)} = 0$  消去;

(ii) 混合项在  $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$  与  $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$  下配平;

(iii) 残项汇聚为  $\iota_\rho^3 H$ 。□

## 定理 B (三层含 $A_M$ 的同伦闭合)

**假设：**

(B1) 三层曲率满足混合 Bianchi:  $D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 。

(B2)  $H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$  basic、等变且协变闭:  $D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$ 。

**结论：** 同上式定义的  $(l_1, l_2, l_3)$  满足

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并在  $F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0$  (以及  $H = 0$  或 exact 可吸收) 时退化为严格 Jacobi。

**证明提纲：** 与定理 A 同, 但需额外使用  $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$  的混合 Bianchi 项来抵消  $A_M$  诱导的交叉项。□

## 定理 C (表示下推的 soundness/completeness up to homotopy)

设定：存在表示  $R : \text{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$  及 Chern–Simons/传递型函子  $R_!$ 。

(C1) Soundness：给定法则层  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ ，取

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R_!(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M))$$

则  $D_{x,w,M}H = 0$ ，定理 B 成立。

(C2) Completeness (up to homotopy)：若几何侧  $(A_M, H)$  满足定理 B 且  $[H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \alpha)$ ，则存在  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$  与  $(R, R_!)$  使上式成立，且给定  $H$  与  $R_!(\cdot)$  表示的同伦类相同。

证明提纲：Soundness 由自然性与  $R_!$  保协变闭性给出；Completeness 以类比 Chern–Weil/家族 CS 传递与同调提升，构造  $\mathcal{A}_M$  使  $A_M$  为其像，并匹配  $[H]$ 。□

## 定理 D ( $U_\star(L)$ 为 Hopf-algebroid 的充分条件)

假设：

(D1)  $(\mathcal{A}, \star)$  为非交换么代数， $L$  为  $\mathcal{A}$ -双模，满足 (P1)–(P4)，并配有增广锚  $\rho$ 。

(D2) PBW-型条件： $U_\star(L)$  的递增过滤  $\{F^n\}$  使  $\text{gr } U_\star(L) \simeq \text{Sym}_{\mathcal{A}}(L)$  ( $\mathcal{A}$ -代数同构)。

(D3) 扩展 Bianchi 与锚-曲率兼容成立（四版正文条件）。

结论：存在余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0$$

与 Takeuchi 乘积约束，使  $U_\star(L)$  成为（左/右）Hopf-algebroid；当  $H = 0$  且  $\hbar \rightarrow 0$  时退化为经典情形。

证明提纲：以 (D2) 控制重排与余代数一致性；(D3) 保证余乘与锚兼容；验证基扩张后 Takeuchi 子空间封闭性。□

## 附件2：集中定义区（术语与对象的精确定义）

把四版分散出现的核心对象集中定义，统一语义与约束。

## 1. 范畴与自同构

- $\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$ : 严格单oidal范畴（单位与结合子恒等），对象分别为“法则前库/后库”经  $\Phi_{\mathbf{w}}$  筛选的算子包； $\otimes$  为并行复合。
- $\text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)$ : 保持  $\otimes$  与单位的单oidal自同构群（或 2-群）。本文在可表象时视作常规 Lie 群（或 Fréchet-Lie 群）处理。

## 2. 表示与传递

- 表示**  $R: \text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}} \subset \text{GL}(V)$  的群同态。
- 传递**  $R_!$ : 把 3-形式型特征（如 CS）从法则层下推到几何层的函子（保协变闭性与同伦类）。

## 3. basic 与等变

- basic**: 在  $P$  上为水平且  $G$ -不变的形式；等价于  $\Omega^{\bullet}(M, \text{ad}(P))$  的自然下沉。
- $G$ -等变**: 对伴随作用不变；记作  $\text{Ad}$ -不变。

## 4. 星乘与形变项

- $(\mathcal{A}, \star)$ : Moyal/Kontsevich/形式形变类； $\star = \cdot + \hbar B_1 + \hbar^2 B_2 + \dots$ 。
- $\Phi_{\hbar}$ : 括号的非交换修正，一般形如

$$\Phi_{\hbar} = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}) + \hbar^2 \Pi_2(\mathbb{F}, \nabla) + \dots$$

并保持 (P1)–(P4) 至相应阶。

## 5. 价值/语义函数族

- $J: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$ （逻辑性度量，次可加、弱单调）， $\text{Loc}: \mathcal{P} \rightarrow \text{语义域}$ 。
- 阈值族**  $\Sigma(\mathbf{w})$ : 由  $(J, \text{Loc})$  给定的 basic 子流形/超曲面族，用于“连续 $\rightarrow$ 离散”的跃迁判据。

## 附件3：代表性算例与复现实验接口

给出可复算的三类例子与统一的“验证脚本 I/O 规范”。

## 1. $U(1)$ 最小例 (两层)

设  $G = U(1)$ 、 $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ 。取

$$F^{(xx)} = d_x A^{(x)}, \quad A^{(w)} \text{ basic}, \quad H = \lambda F^{(xx)} \wedge A^{(w)}.$$

若  $D_x F^{(xx)} = 0$  且  $F^{(ww)} = 0$ , 则  $D_{x,\mathbf{w}} H = 0$ 。于是

$$l_3(x, y, z) = \lambda \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} (F^{(xx)} \wedge A^{(w)}).$$

当  $A^{(w)} = 0$  或  $\lambda = 0$  时退化为严格版。

## 2. $SU(2)$ 非阿贝尔算例 (两层)

在  $S^3 \simeq SU(2)$  上取平凡丛与 Maurer–Cartan 形式  $\vartheta$ , 令

$$A^{(x)} = \mu \vartheta, \quad F^{(xx)} = \mu^2 \vartheta \wedge \vartheta, \quad A^{(w)} = \nu(\mathbf{w}) \vartheta.$$

取

$$H = \kappa \langle F^{(xx)} \wedge A^{(w)} \rangle_{\text{Ad}},$$

则在  $d\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ 、 $D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$  下有  $D_{x,\mathbf{w}} H = 0$ , 并得到非零 Jacobiator。检验: 计算  $\int_{S^3 \times \gamma_{\mathbf{w}}} H$  与三元同伦的一致性。

## 3. 非交换星乘算例 (Moyal 平面)

取  $\mathcal{A} = C_c^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$  上的 Moyal 星乘; 令

$$\Phi_{\hbar}^{(1)}(x, y) = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}; x, y), \quad \Pi_1 \text{ 线性于 } \mathbb{F}.$$

在  $\hbar$  一阶, 验证

- (i) Leibniz (P1) 与锚兼容 (P2) 保持;
- (ii)  $l_3$  仍由  $H$  给出, 且  $\hbar \rightarrow 0$  时回收两层严格版。

## 4. 验证脚本 I/O 规范（面向工程复现）

• 输入 JSON（示意）

```
{
  "bundle": {"G": "U(1)|SU(2)", "base": "chart or mesh"},
  "forms": {
    "Ax": "...", "Aw": "...", "AM": "... (可空)",
    "H": "...",
    "pairing": "Ad-invariant form (可选)"
  },
  "ops": ["functional_flatness", "mixed_flatness", "stokes_l3", "degeneration_test"]
}
```

• 输出

数值证书（曲率范数、Bianchi 偏差、 $\sum_{\text{cyc}}$  与  $l_3$  的差、方环积分  $\int_{\square} H$  等），附通过/失败标志与最大偏差。

## 附件4：相关工作与对照图谱（提纲式）

把四版与经典对象的关系明确化，便于编制参考文献。

- **Atiyah-algebroid 与参数化联络**：四版的  $([\cdot, \cdot]_0)$  与  $\rho$  出自 Atiyah-型结构；参数化联络把  $d_x$  扩展到  $d_{x,w}$ 。
- **Courant 与  $H$ -twist**：同伦版是 Courant  $H$ -扭曲在“主丛/参数化”的推广；当  $L = TM \oplus T^*M$  且  $H \in \Omega^3(M)$  闭时回收经典情形。
- **2-term  $L_\infty$** ：  $l_3 = \iota_\rho^3 H$  的构造与 Stasheff 身份的验证与标准 Lie-2/代数丛框架一致。
- **Chern–Simons 与传递**：  $H$  的来源可由  $CS_3$  与  $\text{Tr}(F \wedge F)$  的 basic 投影获得，保障协变闭性。
- **无限维 Lie 群**：法则-算子群  $\mathcal{G}_{\text{op}}$  的 tame Fréchet/Hilbert-Lie 背景与 Ebin–Marsden、Hamilton、Kriegl–Michor、Neeb 的框架对齐。
- **Hopf-algebroid 与 PBW**：  $U_\star(L)$  的过滤与 PBW-型判据，参照双（半）代数与 Takeuchi 乘积的标准条件。

注：正式稿请据此清单增补规范参考文献条目。

附件5：统一符号与约定表

符号	含义	说明
$P \rightarrow M$	主 $G$ -丛	结构群 $G$ , 李代数 $\mathfrak{g}$
$\mathcal{W}$	参数流形	点 $\mathbf{w}$
$\mathbb{A}$	总联络 $(A^{(x)} + A^{(w)})$	两层情形
$\mathbb{F}$	曲率 $(F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)})$	$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$
$A_M$	法则-算子联络	$A_M = M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$
$\mathbb{A}_{\text{tot}}$	三层总联络	$A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$
$\mathbb{F}_{\text{tot}}$	三层曲率族	含 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$
$D_{x,\mathbf{w}}, D_{x,\mathbf{w},M}$	协变外微分	对应两层/三层
$L$	$\mathcal{A}$ -双模	$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P))$
$\rho$	锚	$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$
$[\cdot, \cdot]_0$	Atiyah-型括号	见正文与附件1
$[\cdot, \cdot]_H$	扭曲括号	$[\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H$
$l_3$	三元同伦	$\iota_\rho^3 H$
$\text{Ad/ad}$	伴随/微伴随	右作用约定
basic	基本性	水平且 $G$ -不变
$\star$	星乘	形式形变 $\hbar$ -级展开
$\Phi_{\hbar}$	非交换修正	对括号的 $\hbar$ 级增量
$R, R_!$	表示/传递	法则层 $\rightarrow$ 几何层

附件6：GRL 模型层与数学主体的接口（“假设—命题—解释”格式）

把 GRL 路径积分与微分动力作为**建模假设**而非证明要件，给出其与几何量的接口。

假设 G1 (生成机制)

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t), \mathbf{w}(t)), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = U(\mathbf{w}(t); J, \text{Loc}),$$

并用

$$\pi^* = \arg \max_{\pi \in \Pi_{\text{meaningful}}(\mathbf{w})} \mathbb{E} \left[ \exp \int \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w}) dt \right]$$

选取“有意义”算子路径。

命题 G2 (证书化接口)

设切面  $s : M \rightarrow P$  与阈值族  $\Sigma(\mathbf{w})$ 。若

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\gamma, \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \quad \text{横截穿越} \quad \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

则在切面上出现离散跃迁；其证书为  $\int H$  与混合曲率的方环积分。

解释：[H] 与混合曲率为“等式 up to  $l_3$ ”的可验证量；不参与主体定理的严格性，只作为生成功能的外部接口。

附件7：审稿可复核的“证书化验证”清单

把工程化检查项固化为可打勾的证书表。

- **K1: functional\_flatness**  
计算  $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$  的范数与最大特征值；目标：到设定阶为 0（或报告非零并量化）。
- **K2: mixed\_flatness**  
计算  $F^{(xM)}, F^{(wM)}$ ；目标：核对混合 Bianchi 的残差  $|D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}}|$ 。
- **K3: Bianchi-family**  
两层/三层分别验证  $D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$ 、 $D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$  的数值残差。
- **K4: Stasheff-gap**  
评估

$$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

并在给定基上取 supremum。目标： $|\Delta_{\text{Jac}}|$  在容差内。

- **K5: Holonomy-H 证书**

计算方环  $\square$  上  $\exp \int_{\square} H$  与  $\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square)$  的偏差；目标：与 Stasheff-gap 一致。

- **K6: 退化测试**

令  $A_M \equiv 0$  或  $H \equiv 0$  或  $\hbar \rightarrow 0$ , 验证严格 Jacobi 与经典 Hopf-algebroid 的恢复。

---

## 许可声明 (License)

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。