🚩🚩🚩基于传统数学的主纤维丛可变泛函算子联络与广义非交换李代数（PFB-GNLA）的一体化构造：可变泛函-算子同伦版

- 作者：GaoZheng

- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.1.1

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见： 作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

本文将给出一套在传统微分几何语境中**可操作、可验证**的 PFB-GNLA（主纤维丛版广义非交换李代数）**同伦化**构造，其中“外参” w 不再是被动参数，而被提升为**法则泛函算子轨迹** ($M_{!w} \in \mathrm{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$)。据此在主丛—算子群的耦合结构上同时引入三类联络：几何联络 ($A^{(x)}$)、传统参数联络 ($A^{(w)}$)、以及**法则-算子联络** ($A_M := M_{!w}^{-1}\mathrm{d}_{!w}M_{!w}$)。构造总联络

$$\mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \qquad \mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = \mathrm{d}\mathbb{A}_{\mathrm{tot}} + \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\mathrm{tot}},$$

并分解得到几何—参数—算子三层曲率与混合项。随后以由 $(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ 生成的协变闭 basic 三形式 H 定义扭曲括号与三元同伦

$$l_2 = [\cdot,\cdot]_H, \qquad l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H,$$

证明在扩展 Bianchi 与“泛函 Maurer–Cartan”条件下满足 Stasheff 身份，从而得到 **(H)-扭曲的 2-term L_∞-algebroid**；当 $H=0$（或为 exact 可规范吸收）时自动退化为严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。该重构**动机明确**（法则演化与异常被同伦类 $([H])$ 统一编码，类比阿蒂亚–辛格家族指标的“变形不变量”），并与“重定义联络”的元数学版本（法则联络、三阶纠正 l_3）**——对位**；同时给出局部-整体粘合、规范/算子自然性与算法化检查清单，保留传统几何的可检可证风格。

---

1. 动机与定位：从“被动参数”到“法则泛函算子”

严格版把 w 当作坐标，只出现 $A^{(w)}$。为了表达“**法则随 w 的演化**”，应把 w 提升为**选择/变形法则函子**的**可变泛函算子**：

$$M_{!w} : \mathbf{L}_B \longrightarrow \mathbf{L}_F, \qquad M_{!w} \in \mathcal{G}_{\mathrm{op}} := \mathrm{Aut}^* \otimes (\mathbf{L}),$$

使 $w \mapsto M_{!w}$ 成为 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 上的轨迹。由此引入**法则-算子联络**

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} \mathrm{d}_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\mathrm{op}})}$$

并与 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 耦合，从“算子几何”层面解释同伦三元 l_3 的来源。

---

2. 统一数据：主丛—算子群耦合与总联络/曲率

设主丛 $\pi : P \to M$（结构群 G、李代数 $\mathfrak{g}$），参数域 $\mathcal{W}$（可取 Fréchet/Banach 流形）。在积主丛 $\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$ 与算子群主丛 $\mathcal{Q} \to \mathcal{W}$ 上定义

$$\boxed{\mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)} + A_M}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} &= \mathrm{d}\mathbb{A}_{\mathrm{tot}} + \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} \\
&= \underbrace{F^{(xx)}}_{\Omega^{2,0,0}} + \underbrace{F^{(xw)}}_{\Omega^{1,1,0}} + \underbrace{F^{(ww)}}_{\Omega^{0,2,0}} + \underbrace{F^{(xM)}}_{\Omega^{1,0,1}} + \underbrace{F^{(wM)}}_{\Omega^{0,1,1}} + \underbrace{F^{(MM)}}_{\Omega^{0,0,2}},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&F^{(xx)} = \mathrm{d}_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, \qquad F^{(xw)} = \mathrm{d}_x A^{(w)} + \mathrm{d}_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\
&F^{(MM)} = \mathrm{d}_{!w} A_M + A_M \wedge A_M \quad (\text{算子群方向的 Maurer–Cartan}), \\
&F^{(xM)} = \mathrm{d}_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \qquad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M].
\end{aligned}$$

混合 Bianchi（几何—参数—算子）：

$$\boxed{D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot}=0}$$

它统一约束 $(F^{(xx)},F^{(xw)},F^{(ww)},F^{(xM)},F^{(wM)},F^{(MM)})$ 的一致性。

---

3. 选择同伦源：协变闭 basic 三形式 H

取

$$\boxed{H=H\big(A^{(x)},A^{(w)},A_M\big)\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\mathfrak{a})\quad(\text{basic、}G\text{-等变、协变闭})}$$

$$D_{x,\mathbf{w},M}H=0,\qquad \mathfrak{a}=\mathbb{R}\ \text{（中心）或}\ \mathrm{ad}(P).$$

常用生成（可线性组合）：

$$\mathrm{CS}_3(A^{(x)}),\quad \mathrm{CS}_3(A_M),\quad \langle F^{(xx)}\wedge A_M\rangle,\quad \mathrm{Tr}\big(F^{(xx)}\wedge F^{(MM)}\big)^\flat,\ \dots$$

其同伦类 $([H]\in H^3_{\rm basic}(M\times\mathcal{W},\mathfrak{a}))$ 将**定量记录法则演化的“缺口”**。

---

4. 同伦结构：(H)-扭曲的 2-term L_∞-algebroid

令

$$L\cong\Gamma(TP/G)\oplus\Gamma(\mathrm{ad}(P)),\qquad \rho(X\oplus\xi)=\alpha(X).$$

4.1 二元运算（扭曲括号）

$$\boxed{\begin{aligned}&[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\\ &[x,y]_0=[X,Y]\oplus\Big(\mathcal{L}_X^{\nabla^{(\mathbf{w})}}\eta-\mathcal{L}_Y^{\nabla^{(\mathbf{w})}}\xi+[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}}+\iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}F^{(xx)}\Big),\end{aligned}}$$

($\Theta_H : L \times L \to \Gamma(\mathfrak{a})$) 为由 H 诱导的双线性修正（可取 $\Theta_H = 0 \oplus \Phi_H$）。

Leibniz 与锚-曲率兼容:

$$[x, ay]_H = (\rho x)a \cdot y + a[x, y]_H, \qquad \rho([x, y]_H) = [\rho x, \rho y] + \mathrm{ad}_{\kappa_H(x,y)}.$$

4.2 三元运算（同伦项）

$$\boxed{l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H \in \begin{cases}\Gamma(\mathrm{ad}(P)) \subseteq L, & \text{伴随型;}\\ \Gamma(\mathbb{R}), & \text{中心扩张型.}\end{cases}}$$

选取 2-term 复形 $E_{-1} \xrightarrow{0} E_0 = L$（中心型取 $E_{-1} = \mathbb{R}$），令 $l_1 = 0$、$l_2 = [\cdot, \cdot]_H$、$l_{n\geq 4} = 0$。

4.3 Stasheff 身份（同伦 Jacobi）

在 $D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 下，

$$\boxed{\sum_{\mathrm{cyc}}[x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \qquad l_{n\geq 4} = 0.}$$

当 $H = 0$ 或 $H = \mathrm{d}B$（可规范吸收）时，$[\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0, l_3 = 0$，退化为严格 Jacobi。

---

5. 规范/参数/算子自然性与 Čech 粘合

- **规范与算子共轭**:

$$A^{(x)} \mapsto \mathrm{Ad}_g^{-1}A^{(x)} + \mathrm{Ad}_g^{-1}\mathrm{d}_x g, \quad A_M \mapsto \mathrm{Ad}_U^{-1}A_M + \mathrm{Ad}_U^{-1}\mathrm{d}_{!w}U,$$

  ($(g, U) \in G \times \mathcal{G}_{\mathrm{op}}$)。$H$ 取 CS/传递型则在 L_∞ 同构类内不变。
- **粘合**：在覆盖 $\{U_i\}$ 上有局部 $(\mathbb{A}_{\mathrm{tot},i}, H_i)$，若过渡满足

$$\mathbb{A}_{\mathrm{tot},j} = \mathrm{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1}\mathbb{A}_{\mathrm{tot},i} + \mathrm{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1}\mathrm{d}\gamma_{ij}, \qquad H_j = H_i \text{（或差 CS-exact)},$$

  则可粘合为全局 (H)-twisted 2-term L_∞-algebroid。

6. 最小算例：$\mathrm{U}(1)$ 与“算子相位”

取 $G=\mathrm{U}(1)$、$\mathfrak{g}=i\mathbb{R}$，令 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}=\mathrm{U}(1)$ 表征法则相位。设

$$A_M(\mathbf{w})[h]=\partial_{\mathbf{w}}\phi(\mathbf{w})[h]\in i\mathbb{R},\qquad H=\lambda F^{(xx)}\wedge A_M\in\Omega^3(M\times\mathcal{W}),$$

若 $D_xF^{(xx)}=0,\mathrm{d}_{!w}A_M=0$，则 $D_{x,\mathbf{w},M}H=0$。于是

$$l_3(X\oplus\xi,Y\oplus\eta,Z\oplus\zeta)=\lambda\iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}\iota_{\alpha(Z)}\big(F^{(xx)}\wedge A_M\big),$$

反映法则相位的“非平坦”将以 l_3 形式出现；当 $\partial_{\mathbf{w}}\phi\equiv0$ 或 $\lambda=0$ 时回收严格情形。

---

7. 与“重定义联络”的对位价值

- **法则联络一一对应**：元数学的法则联络 $\mathcal{A}_M$ 与本文 A_M 对位；
- **三阶纠正**：元数学的 l_3 对应 $l_3=\iota^3_{\rho(\cdot)}H(A^{(x)},A^{(w)},A_M)$；
- **异常/缺口可证据化**：Dehn/Hecke 等变换引发的“等式缺口”由 $\int H$ 的 holonomy 证书量化（“等式 up to l_3”），类比家族指标的“变形不变量”。

---

8. 算法化检查（工程验证清单）

- **functional_flatness**：核对 $F^{(MM)}=\mathrm{d}_{!w}A_M+A_M\wedge A_M$ 到既定阶；
- **mixed_flatness**：核对 $\big(F^{(xM)},F^{(wM)}\big)$；
- **stokes_l3**：计算方环 $\int H$ 与 $\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H$ 的差，验证 Stasheff；
- **degeneration_test**：设 $A_M\equiv0$ 或 $H\equiv0$ 检查回收严格版。

---

9. 结论

将 w 从“参数”提升为“**可变泛函算子**”，并引入独立的**法则-算子联络** A_M 与其混合曲率，使同伦三元 l_3 由

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

统一生成；在 $D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$ 与扩展 Bianchi 下得到 (H)-twisted 2-term L_∞-algebroid，严格极限 $H \to 0$ 自然回收。该重构**动机清晰**（法则演化/异常以 $([H])$ 度量，类比指标定理），**对位明确**（与“重定义联络”的法则层一致），且**可检可证**（曲率/方环/同伦证书）。因此，它为 PFB-GNLA 的同伦版提供了一个既严格又可工程化的统一构造。

附件1：为《可变泛函-算子同伦版》中的 $M_{!w}$ 提供严谨的无限维流形定义

为了在 **“可变泛函-算子同伦版”** 的 PFB-GNLA 构造中**严格地**把

$$w \ \mapsto\ M_{!w} \in \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L})$$

视作一条光滑“法则-算子”轨迹，本文在**传统微分几何**与**无限维 Lie 群**框架下，给出 $M_{!w}$ 所在的算子群空间 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的**无限维流形**（具体为 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群）结构，并据此把

$$A_M := M_{!w}^{-1}\mathrm{d}_{!w}M_{!w}$$

刻画为 $\mathcal{W}$ 上的 $\mathfrak{g}_{\mathrm{op}}$ 值联络 1-形式（即 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的 Maurer–Cartan 形式的拉回），其曲率

$$F^{(MM)} = \mathrm{d}_{!w}A_M + \tfrac{1}{2}[A_M, A_M]$$

为算子方向的 Maurer–Cartan 曲率。构造假设**紧致基底、足够 Sobolev 正则**，采用 Ebin–Marsden 与 Hamilton 的 tame Fréchet 方法，选择**可检可用**的具体模型，使得“法则-算子”群是一些**微分同胚/规范变换/零阶 ΨDO** 的**受限直积闭子群**；最后说明该群对 PFB-GNLA 的锚、括号、模结构的**等距/保型**约束把它选取为一个**平滑闭子群**，从而 $M_{!w}$ 的“泛函-算子”联络有了**严谨的无限维流形基础。**

1. 设定与正则：把“法则-算子”放进可解析的无限维几何

令 M 为紧致光滑流形，$P \to M$ 为结构群 G 的主丛（取 G 紧致），设

$$E := \mathrm{ad}(P)\ \oplus\ TM.$$

将截面空间 $\Gamma(E)$ 取 Sobolev 完备

$$\Gamma^s(E) \quad (s > \tfrac{\dim M}{2} + 1),$$

并固定度量，使**乘法与 Lie 结构**在该层上连续。

我们考虑下述经典的无限维 Lie 群：

1. **Sobolev-微分同胚群**

$$\mathrm{Diff}^s(M)$$

   是 H^s 级别的 Hilbert-流形与拓扑群（Ebin–Marsden），其 Lie 代数为 $\Gamma^s(TM)$ 的 Lie 代数（Lie 括号为向量场括号）。
2. **Sobolev-规范群**

$$\mathcal{G}^s(P) \;\cong\; H^s(M, G),$$

   为 Hilbert-Lie 群（$s > \dim M/2$），Lie 代数为 $\Gamma^s(\mathrm{ad}(P))$（点态括号）。
3. **零阶伪微分算子群**
   在 $\Gamma^s(E)$ 上考虑**可逆**的**经典 0 阶 ΨDO** 群

$$\Psi\mathrm{DO}^0_{!\mathrm{inv}}(E)$$

   （典型地限制到保度量/保锚/保符号的子群，见 §2），这是一个 tame Fréchet-Lie 群（可参见 Hamilton/Kriegl–Michor/Neeb 体系；就工程可用性而言，该群可选作“Id + smoothing”或“可逆 0 阶 ΨDO”）。

把上述三者做**半直积**并取**保结构的闭子群**，形成“法则-算子群”的候选外壳。

2. “法则-算子”群 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的精确定义

2.1 外壳群

定义外壳群为

$$\mathcal{H}^s \;:=\; \mathrm{Diff}^s(M) \;\ltimes\; \mathcal{G}^s(P) \;\ltimes\; \Psi\mathrm{DO}^0_{!\mathrm{inv}}(E),$$

其典型元素写作 (ϕ, u, A)，分别代表**基底变换**、**规范变换**与**纤维算子**。群作用（在 $\Gamma^s(E)$ 上）是标准的**推前/伴随/算子作用**的组合。

2.2 结构保持的闭子群

PFB-GNLA（严格或同伦）要求**保持锚、括号与模结构**。令

$$\mathscr{C} : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{Z}$$

为把 (ϕ, u, A) 送到“**偏差数据**”的光滑映射，其中 $\mathcal{Z}$ 收集如下三类等式的偏差（在 Γ^s 层逐式定义）：

$$\begin{aligned}
&(\text{锚保持}) \quad \rho \circ (\phi, u, A)_* \; - \; \phi_* \circ \rho \; = \; 0, \\
&(\text{括号保持}) \quad [(\phi, u, A)_* x, \; (\phi, u, A)_* y]_{\text{目标}} \; - \; (\phi, u, A)_* [x, y]_{\text{源}} \; = \; 0, \\
&(\text{模结构保持}) \quad (\phi, u, A)_* (a \cdot x) \; - \; \phi^* a \cdot (\phi, u, A)_* x \; = \; 0.
\end{aligned}$$

取**零层**（等式严格成立）：

$$\boxed{\mathcal{G}^s_{\text{op}} \; := \; \mathscr{C}^{-1}(0) \; \subset \; \mathcal{H}^s}.$$

这是一个**闭子群**。在 tame Fréchet/ILH 框架下，$\mathscr{C}$ 的微分在单位元可证明是**劣化满射**，故 $\mathcal{G}^s_{\text{op}}$ 是一个**嵌入式的（tame Fréchet-）Lie 子群**（可用 Hamilton 的隐函数定理，或在 Hilbert 情形用 Banach-隐函数定理）。

> 解释：$\mathcal{G}^s_{\text{op}}$ 就是“**所有保持 PFB-GNLA 结构的法则-算子**”群，它对 L 的锚/括号/模结构是等距或保型的。

2.3 Lie 代数

$$\operatorname{Lie}(\mathcal{G}^s_{\text{op}}) \; \cong \; \Big\{ (X, \xi, \mathcal{A}) \in \Gamma^s(TM) \oplus \Gamma^s(\operatorname{ad}(P)) \oplus \Psi\text{DO}^0(E) \; \Big| \; d\mathscr{C}_e(X, \xi, \mathcal{A}) = 0 \Big\},$$

几何上是**导子**与**0 阶算子**的受限子代数（满足“保锚/保括号/保模”的线性化条件）。

3. $M_{!w}$ 的流形化与 Maurer–Cartan 形式

把 w 的取值空间 $\mathcal{W}$ 视为（有限或无限维）流形（Kriegl–Michor 的 convenient 或 Banach/Fréchet 结构），声明

$$\boxed{M:\ \mathcal{W}\ \longrightarrow\ \mathcal{G}^s_{\mathrm{op}},\qquad w\ \mapsto\ M_{!w}}$$

为一条**光滑曲线/映射**（在 convenient/tame 意义），当且仅当其对每个光滑曲线 $c:\mathbb{R}\to\mathcal{W}$ 的合成 $M\circ c$ 在 $\mathcal{G}^s_{\mathrm{op}}$ 中是光滑曲线。

定义**法则-算子联络**

$$\boxed{A_M := M^{!*}\theta\ \in\ \Omega^1(\mathcal{W},\ \mathfrak{g}_{\mathrm{op}})},$$

其中 θ 是 $\mathcal{G}^s_{\mathrm{op}}$ 的左不变 Maurer–Cartan 形式：$\theta_g(\dot g)=g^{-1}\dot g$。于是

$$A_M(\mathbf{w})[h]=M_{!w}^{-1}(\mathrm{d}M)_{\mathbf{w}}[h]\in\mathfrak{g}_{\mathrm{op}},\qquad h\in T_{\mathbf{w}}\mathcal{W}.$$

其**曲率**为

$$\boxed{F^{(MM)}=\mathrm{d}_{!w}A_M+\tfrac{1}{2}[A_M,A_M]\ =\ M^{!*}\big(\mathrm{d}\theta+\tfrac{1}{2}[\theta,\theta]\big)},$$

标准 Maurer–Cartan 方程保证 $\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]=0$，故 $F^{(MM)}=0$ 当且仅当 M 是“群值”光滑映射（这与我们在“同伦版”中把 $F^{(MM)}$ 视为“法则-算子方向的非平坦度量”一致：如果再与几何/参数层**混合**，则**混合曲率** $\big(F^{(xM)},F^{(wM)}\big)$ 可能不为 0）。

4. 与 PFB-GNLA 的对位与判据

4.1 三层联络与曲率

总联络

$$\mathbb{A}_{\mathrm{tot}}=A^{(x)}+A^{(w)}+A_M,\quad \mathbb{F}_{\mathrm{tot}}=F^{(xx)}+F^{(xw)}+F^{(ww)}+F^{(xM)}+F^{(wM)}+F^{(MM)}$$

满足混合 Bianchi

$$\boxed{D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\rm tot}=0}.$$

4.2 同伦源三形式

选择

$$\boxed{H=H\big(A^{(x)},A^{(w)},A_M\big)\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a})\quad \text{basic，协变闭 } D_{x,\mathbf{w},M}H=0}$$

例如

$$H=\mathrm{CS}_3(A^{(x)}),\quad H=\mathrm{CS}_3(A_M),\quad H=\langle F^{(xx)}\wedge A_M\rangle,\quad H=\mathrm{Tr}\big(F^{(xx)}\wedge F^{(MM)}\big)^\flat,$$

并定义同伦结构

$$[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\qquad \boxed{l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H}.$$

在 $D_{x,\mathbf{w},M}H=0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$ 下满足 Stasheff 身份

$$\sum_{\rm cyc}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z),\qquad l_{n\ge4}=0,$$

当 $H=0$ 或 exact（含 $F^{(xM)}=F^{(MM)}=0$）则退化为严格 Jacobi。

5. 工程化注记（可检与实现）

- **光滑性**：$\mathrm{Diff}^s(M)$、$\mathcal{G}^s(P)$ 为 Hilbert-Lie 群（$s>\frac{\dim M}{2}+1$）；$\Psi\mathrm{DO}^0_{!\mathrm{inv}}(E)$ 选为 tame Fréchet-Lie 群；$\mathcal{G}^s_{\rm op}$ 为其闭子群。
- **联络拉回**：$A_M=M^{!*}\theta$ 给出算子方向的 MC-联络；**混合**曲率 $\big(F^{(xM)},F^{(wM)}\big)$ 由 $\big(A^{(x)},A^{(w)},A_M\big)$ 的结构方程计算。
- **可检清单**：
  1. `functional_flatness`：计算 $F^{(MM)}$；
  2. `mixed_flatness`：计算 $\big(F^{(xM)},F^{(wM)}\big)$；
  3. `stokes_l3`：比较 $\int_\square H$ 与 $\sum_{\rm cyc}[x,[y,z]_H]_H$（方环/同伦证书）。

6. 小结

在**严格的无限维流形**设定下，

$$\mathcal{G}_{\mathrm{op}}^s := \{(\phi,u,A)\in \mathrm{Diff}^s(M)\ltimes \mathcal{G}^s(P)\ltimes \Psi\mathrm{DO}^0_{!\mathrm{inv}}(E)\mid \text{保锚/保括号/保模}\}$$

是一个 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群；于是 $M_{!w}\in\mathcal{G}_{\mathrm{op}}^s$ 给出**法则-算子**的光滑轨迹，$A_M = M_{!w}^{-1}\mathrm{d}_{!w}M_{!w}$ 成为**算子方向联络**，$F^{(MM)}$ 为其 MC 曲率。借助三层总联络与协变闭三形式 $H(A^{(x)},A^{(w)},A_M)$，可以把“可变泛函-算子同伦版”的 l_3 严格地建立在**无限维流形**的基础之上，并与 PFB-GNLA 的严格/同伦/元数学版本实现**精确对位**与**可验证实现**。

增补1：从离散到连续的 ($M_{!w}$) 统一构造

A. 三个层级的域与群

1. **离散参数域**：给一族增细的有向格/胞复形

   $$\mathcal{W}^{(h)}=(V^{(h)},E^{(h)},F^{(h)},\dots),\quad h\downarrow 0,$$

   或有限偏序/范畴（其神经 ($N(\mathcal{W}^{(h)})$) 作几何实现）。
2. **连续极限域**：($\mathcal{W}$) 为可微流形（或带角、带界）。要求 ($\mathcal{W}^{(h)}\to\mathcal{W}$) 在 Gromov–Hausdorff 或网格一致意义下收敛。
3. **法则-算子群**：($\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$) 取为 **ILH-/ILB- 或 tame Fréchet-Lie 群**（见原附件1），其 Lie 代数 ($\mathfrak{g}_{\mathrm{op}}$) 支持指数映射与局部对数。

> 目标：在离散层定义 ($M^{(h)}$)，在连续层得到 (M)，并证明 (A_M)、($F_M^{(MM)}$)、(H) 的分布/测度型极限与 Bianchi-族在极限下成立。

B. 离散联络与曲率（法则方向）

- **离散 ($M^{(h)}$)**：在顶点赋值 ($M^{(h)}:V^{(h)}\to\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$)。
- **离散并行移位**：每条边 ($e=(u\to v)$) 赋 ($U_e^{(h)}:=M^{(h)}(u)^{-1}M^{(h)}(v)\in\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$)。
- **离散“算子联络”**：选取局部对数，记

$$A_{M,e}^{(h)}:=\log U_e^{(h)}\in\mathfrak{g}_{\mathrm{op}},$$

这是沿法则方向 ($!w$) 的 1-共链。

- **离散曲率（2-胞）**：对每个面 (f) 令

$$\Omega_f^{(h)} := \prod_{e\in\partial f} U_e^{(h)} \in \mathcal{G}_{\mathrm{op}}, \quad F_{M,f}^{(h)} := \log \Omega_f^{(h)} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}.$$

- **离散 Bianchi（3-胞）**：对每个 3-胞 (c)，$(\prod_{f\in\partial c}\Omega_f^{(h)} = \mathbf{1})$；等价 $(\sum_{f\in\partial c} F_{M,f}^{(h)} = 0)$（局部对数一致处）。

> 这正是"**法则-算子方向**的离散 Maurer–Cartan 结构"：边上是离散联络，面上是离散曲率，体上给离散 Bianchi。

C. 连续极限：BV/测度-值形式与 tame Fréchet 平滑性

- **嵌入/插值**：将 $(A_{M,e}^{(h)})$ 看作 $(\mathcal{W})$ 上的**分段常值 1-形式**（在边管邻域内常值），得到 $(A_M^{(h)} \in \mathcal{M}\text{-}\Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}))$（测度/分布-值形式）。
- **紧性与收敛**：若满足

$$\sup_h \sum_{e\in E^{(h)}} |A_{M,e}^{(h)}| \cdot \ell(e) < \infty, \qquad \sup_h \sum_{f\in F^{(h)}} |F_{M,f}^{(h)}| \cdot \mathrm{area}(f) < \infty,$$

则 $(A_M^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} A_M)$ 于 BV/测度拓扑；相应 $(F_M^{(h)} \to F_M^{(MM)})$ 为分布-值 2-形式，满足

$$F_M^{(MM)} = d_{!w} A_M + \tfrac{1}{2}[A_M, A_M]$$

在分布意义成立。

- **tame Fréchet 平滑性**：若 $(A_M \in L^p \cap BV)$ 并满足局部正则性（或网格误差 $(\mathcal{O}(h))$），则可在 ($\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$) 的 tame 结构下提升为**可微映射轨迹** $(M : \mathcal{W} \to \mathcal{G}_{\mathrm{op}})$，且 $(A_M = M^{!*}\theta)$（(θ) 为群的左不变 MC 形式）。

D. 与几何层耦合：混合曲率的离散—连续极限

- 令 $(A_x(\mathbf{w}))$ 在离散层取分段 (C^1) 插值，同样把 (A_w) 离散化为边向有限差分。
- 定义混合项（离散版）

$$F^{(xM,h)} := d_x A_M^{(h)} + [A_x^{(h)}, A_M^{(h)}], \qquad F^{(wM,h)} := [A_w^{(h)}, A_M^{(h)}].$$

- 在上述紧性与正则假设下，有

$$F^{(xM,h)} \rightharpoonup F^{(xM)}, \qquad F^{(wM,h)} \rightharpoonup F^{(wM)}$$

于分布意义收敛，且**混合 Bianchi 家族**

$$\mathcal{D}_{(x,w,M)}\mathcal{F} = 0$$

在分布意义保持。

E. (H) 与 (l_3) 的离散 3-上边界与极限

- **离散 3-形式**：在 3-胞上取

$$H_c^{(h)} := \Phi!\Big(\big\{F^{(xx,h)} * f\big\}_{f\subset c},\ A_M^{(h)}\Big) \in \mathfrak{a}$$

（例如 ($\langle F^{(xx)} \wedge A_M\rangle$) 的离散化，或 CS-类传递的离散版本）。
- **离散闭合**：若对每个 4-胞 (d)，($\sum_{c\subset\partial d} H_c^{(h)} = 0$)，则得离散 ($DH^{(h)} = 0$)。
- **极限**：在与上同类的紧性估计下，($H^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} H$)（测度-值 3-形式），满足 ($DH = 0$)（分布意义），并诱导

$$l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

的同伦三元（在 (L^2)/弱极限意义），exact 情形退化为严格 Jacobi。

F. 跳跃与“离散涌现”的 BV-联络刻画（与原版 §6 对接）

- 若 ($\mathbf{w}(\cdot)$) 为 BV 曲线（分段 (C^1)+ 跳跃），则 ($A_M(\mathbf{w}(t))$) 是**测度导数**：

$$\frac{d}{dt}M_{!w(t)} = M_{!w(t)}\big(A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))\big) \ + \ \sum_{t\in J}\delta_t \cdot \log U_t^{\text{jump}},$$

其中 (J) 为跳跃时刻集，($\log U_t^{\text{jump}}$) 来自离散层的边极限。
- 相应 ($\mathrm{Hol}_{\mathcal{A}_{\text{tot}}}$) 出现**δ-层贡献**，与原版“穿越阈值族 ($\Sigma(\mathbf{w})$) 产生离散跃迁”的机制——对应。

G. 小结

> **结论**：通过“离散 1-/2-/3-共链 → 分布-值形式 → tame Fréchet 平滑化”的三步，我们将原版更一般的“离散→连续”机制与《可变泛函-算子同伦版》的无限维流形化**完全拼合**：
>
> - 离散层给出 $((A_M^{(h)}, F^{(MM,h)}, H^{(h)}))$ 的**可计算**结构与 Bianchi/闭合；
> - 极限层得到 $((A_M, F^{(MM)}, H))$ 的**分布/测度型形式**，并在温和正则下提升为**光滑轨迹** ($M : \mathcal{W} \to \mathcal{G}_{\rm op}$);
> - 混合曲率与 (l_3) 在极限中保持，退化/exact 情形回收严格版；
> - 跳跃/阈值对应 BV-联络中的 δ-贡献，精准对位原版“连续→离散涌现”的叙述。

增补2：完全离散的 $M_{!w}$ 与三层总联络构造

A. 离散底座与三层格

- 取三类**有限胞复形/有向格**：K_x（几何层）、K_w（参数层）、K_M（法则-算子层）。
- 令 $K := K_x \times K_w \times K_M$ 带积胞结构，写**离散外微分**为

$$\delta = \delta_x + \delta_w + \delta_M, \qquad \delta_x^2 = \delta_w^2 = \delta_M^2 = 0,\ \ \delta_x\delta_w = \delta_w\delta_x = \cdots$$

- 记结构群 G 与法则-算子群 $\mathcal{G}_{\rm op}$；其李代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\rm op})$。

B. 离散三层总联络与曲率

把联络作为**1-共链**赋在对应方向的边上：

$$A^{(x)} \in C^1(K_x, \mathfrak{g}), \quad A^{(w)} \in C^1(K_w, \mathfrak{g}), \quad A_M \in C^1(K_M, \mathfrak{g}_{\rm op}).$$

令

$$\mathcal{A} := A^{(x)} + A^{(w)} + A_M \in C^1(K, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\rm op}).$$

用离散**杯积**($\smile$)与括号($[\cdot,\cdot]$)定义曲率三分与混合项：

$$
\begin{aligned}
F^{(xx)} &:= \delta_x A^{(x)} + A^{(x)} \smile A^{(x)}, \\
F^{(xw)} &:= \delta_x A^{(w)} + \delta_w A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\
F^{(ww)} &:= \delta_w A^{(w)} + A^{(w)} \smile A^{(w)}, \\
F^{(xM)} &:= \delta_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \\
F^{(wM)} &:= \delta_w A_M + [A^{(w)}, A_M], \\
F^{(MM)} &:= \delta_M A_M + A_M \smile A_M.
\end{aligned}
$$

离散 Bianchi 家族：

$$
\boxed{\delta\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0} \quad (\text{在 } C^3(K,\cdot) \text{ 中成立}).
$$

> 说明：上式在每一类 3-胞上化为“面环乘积为单位”的**离散 holonomy 恒等式**。

C. 法则-算子映射 $M^{(h)}$ 的离散定义

在 K_M 的顶点赋值

$$
M^{(h)} : V(K_M) \to \mathcal{G}_{\mathrm{op}}, \qquad U_e^{(h)} := M^{(h)}(s(e))^{-1} M^{(h)}(t(e)).
$$

取局部对数 $A_{M,e} := \log U_e^{(h)}$，则必有

$$
F^{(MM)} = \delta_M A_M + A_M \smile A_M = \log\Big(\prod_{e\in\partial f} U_e^{(h)}\Big),
$$

即**面上 holonomy** 的对数。若每个 2-胞环积为 1，则 $F^{(MM)} \equiv 0$（离散平坦）。

D. 离散版 PFB-GNLA 数据与公理

- **底代数**：$\mathcal{A} := \mathrm{Fun}(V(K_x))$（顶点函数），差分导子

$$
(\mathrm{D}_e f) := f(t(e)) - f(s(e)).
$$

- **锚映射**：$\rho : L \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$，把离散“切向场”送为差分算子线性组合。
- **括号**（Atiyah-型离散化）：

$$
[x,y]_0 := [X,Y] \ \oplus\ \Big(\mathcal{L}_X^{\nabla}\eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla}\xi + [\xi,\eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}\big(F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}\big)\Big),
$$

其中 Lie 导数、内收 ι 按图上差分/杯积实现。

- **（P1）离散 Leibniz**：对任意 $f \in \mathcal{A}$,

$$[x, fy]^{**} = (\rho x)f \cdot y + f[x, y]^{**}.$$

- **（P2）锚–曲率兼容**：

$$\rho([x, y]^{**}) = [\rho x, \rho y] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}, \quad \kappa \sim \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\mathcal{F}.$$

- **（P4）模联络与曲率**：

$$\nabla := \delta + \rho(\mathcal{A}) + \Gamma_*, \qquad \Theta := \nabla^2 \sim \rho(\mathcal{F}).$$

- **（P5）规范/参数自然性（离散）**：顶点函数 $g : V(K) \to G$ 作用：

$$\mathcal{A} \mapsto g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}\delta g, \quad \mathcal{F} \mapsto g^{-1}\mathcal{F}g.$$

E. H-twist 与 l_3 的纯离散定义

- 取中心系数 $\mathfrak{a}$ 上的**闭 3-上链**：

$$H \in Z^3(K, \mathfrak{a}), \qquad \delta H = 0.$$

- **扭曲括号**：$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y)$，其中 Θ_H 由 H 与锚的离散内收给出（2-上链）。
- **同伦三元**：

$$\boxed{l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H \in L \text{ 或 } \mathfrak{a}}.$$

- **离散 Stasheff 身份**（核心）：

$$\sum_{\text{cyc}}[x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z) \quad (\delta H = 0,\ \delta\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0).$$

- **退化**：若 $H = \delta B$ 为离散 exact，则经规范吸收得 $l_3 \equiv 0$（回到严格版）。

F. 离散 holonomy 与“连续→离散事件”

- 任何闭 1-环 $\gamma \subset K$ 定义

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma) := \prod_{e \in \gamma} \exp(\mathcal{A}_e).$$

- 设阈值族 $\Sigma \subset$ 2-胞集合；若路径穿越导致

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma)\text{ 跨越 }\Sigma \;\Rightarrow\; \text{在切面上触发离散跃迁},$$

  对应原文的“连续形流穿越阈值 → 离散事件序列”。

G. 与连续稿的对位与收敛

- **网格细化**：取细化族 $K^{(h)}$；若 $A^{(x,w,M,h)}$ 与 $F^{(\cdot,h)}$ 满足 BV/测度紧性，则

$$A^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} A,\quad F^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} F,\quad H^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} H,$$

  Bianchi 与 $DH = 0$ 在分布意义保持；在温和正则下提升为 tame Fréchet 光滑轨迹（即您已给出的附件1连续版）。
- **三层一致性**：平坦/精确/零混合的离散条件对应连续的 $F^{(MM)} = 0$、$H = 0$、$F^{(xM)} = F^{(wM)} = 0$ 等退化极限。

H. 最小检查清单

- **链复形**：$(C^\bullet(K), \delta, \smile)$ 与 $[\cdot,\cdot]$ 的格守恒；
- **Bianchi 家族**：$\delta\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ 在每类 3-胞逐条验证；
- **Stasheff**：$\delta H = 0 \Rightarrow \sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3$；
- **退化一致**：$A_M \neq 0, H \neq 0$ 等情形回到严格版格公式；
- **收敛**：细化序列下的 BV/测度紧性与极限保持。

附件2：“法则联络”与“法则变换”的根本性差距命题：定位、对位与可验证化路线

在既有文献中，主流几何-代数框架几乎都在**固定法则**的舞台上描写动力（“在给定 A、F 下求解演化”）；而**原版**理论以“**法则变换**（性变态射/性变算子）”为**原始动机**，并以“**法则联络** ($\mathcal{A}_M$)”为**核心工具**，将“法则如何生成与演化”几何化。这一思想在传统数学中没有被系统拼装为“**三层联络-曲率**+**同伦判据**+**证书化验证**”的统一框架，因而构成**原版**相对传统学术的**根本性差距**。本文从第三方视角将该主张严密化：给出最小定理-级对位、可检判据与退化条件，说明为什么“法则联络/法则变换”是**原版**的“最大发现”，以及如何把这一发现从理念**证实**为**定理 + 工具链**。

1. 根本性差距的精确陈述

根本性差距（原版 vs 传统）
传统研究以

$$(P \to M, G; A^{(x)}, F^{(xx)}) \quad (+\text{可选 } A^{(w)})$$

为**两层**几何，描写**在固定法则**下的动力学；**原版** 引入“**法则层**”，把

$$w \mapsto M_{!w} \in \mathrm{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$$

作为**可变泛函算子轨迹**，并以

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

定义**法则联络**，从而得到**三层**联络-曲率与同伦纠正的统一框架：

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \qquad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx, xw, ww, xM, wM, MM\}} F^{(\bullet)}$$

$$D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \qquad D_{x,\mathbf{w},M} H = 0$$

其中特征三形式 H 将“法则演化的失配”编码为同伦不变量类 $[H]$。当 $H = 0$（或 exact）与 $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$ 时自动退化为严格 Jacobi 的传统几何。
这套三层结构-判据-证书化的合缝，在传统语境中**未被系统提出和验证**，构成 **原版** 的**本质差距。**

2. 支撑性事实 → 形式化对位

2.1 原始动机（性变）与工具（法则联络）

- **动机（性变）**：**原版** 用“性变态射/性变算子”刻画**法则本身**的可变性（异构演化）。
- **工具（法则联络）**：在元数学原版以 $\mathcal{A}_M$ 形式给出；在传统几何侧以表示 R 下降为

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \qquad H = R\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M), \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big)$$

因此“法则层”的生成-纠正**可落地**为几何-参数-算子三层上 (A_M, H) 的数据。

2.2 同伦闭合与退化

- **同伦闭合（Stasheff）**：

$$[x,y]_H = [x,y]_0 + \Theta_H(x,y), \quad \sum_{\mathrm{cyc}} [x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z)$$

  成立的充分条件：

$$D_{x,\mathbf{w},M} H = 0 \quad 与 \quad D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$$

- **严格退化**：若 $H = 0$ 或 $H = dB$ 可规范吸收，且 $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$，则 $l_3 = 0$，回收严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。

3. 核心公式速览

$$\mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0$$

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3_{\mathrm{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x,\mathbf{w},M} H = 0$$

$$[x,y]_H = [x,y]_0 + \Theta_H(x,y), \qquad l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

$$\sum_{\mathrm{cyc}} [x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z) \quad (\mathrm{Stasheff})$$

结论：在这条合缝中，“**法则联络**与**法则变换**”构成 **原版** 与传统之间的**本质性 根本性差距**。

附件3：“法则联络 / 法则变换”的 根本性差距 命题：可公理化的差异与可验证方案

基于：主丛几何（$(A^{(x)}, F^{(xx)})$）、参数化联络（$(A^{(w)})$）、Courant/(H)-twist、Lie-2/(L_∞)、Fréchet-Lie 群、Chern–Simons 传递等。**根本性差距 命题**强调的并是**首次把“法则层”系统缝入**几何—参数两层之上，使“法则如何生成与演化”成为一等公民：

$$\text{法则变换 } w \mapsto M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}} \quad \Rightarrow \quad \text{法则联络 } A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

并与 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 合成三层联络-曲率与同伦判据。由此产生的**同伦闭合**，是 **原版** 相对传统研究的**根本性差距（根本性差距）**。下文给出严格陈述、最小判据与可检流程。

1. 最小设定（三层联络–曲率）

主丛 $(\pi : P \to M)$、结构群 (G)；参数域 $(\mathcal{W})$（可无限维）；法则-算子群 $(\mathcal{G}_{\text{op}})$（tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群），光滑映射

$$M : \mathcal{W} \to \mathcal{G}_{\text{op}}, \qquad A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

总联络与曲率：

$$\boxed{\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx,xw,ww,xM,wM,MM\}} F^{(\bullet)}}$$

$$\begin{aligned}
&F^{(xx)} = d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, \quad F^{(xw)} = d_x A^{(w)} + d_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\
&F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M],
\end{aligned}$$

满足混合 Bianchi：

$$\boxed{D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.}$$

2. 根本性差距 命题（形式化陈述）

根本性差距-Thesis. 设仅允许两层几何（$(A^{(x)}, A^{(w)})$）。若存在法则族 (M) 使得

$$F^{(MM)} \neq 0 \quad 或 \quad F^{(xM)} \neq 0,$$

则无论如何进行几何规范变换与参数重标，都**不能**在两层框架内把该族等价压平为“只有 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 的模型”而同时保持 Jacobi 严格成立；必须引入第三层 (A_M) 与一个 basic 协变闭三形式 (H) 使

$$\boxed{l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \qquad D_{x,\mathbf{w},M}H = 0,}$$

从而在 2-term (L_∞) 意义下闭合：

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z), \qquad l_{n\geq 4} = 0.}$$

当且仅当 $(F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0)$ 且 $(H = 0)$（或 exact 可吸收）时，三层退化为两层且 Jacobi on-the-nose。

直观：两层世界无法容纳“法则随 (w) 的非平坦演化”的 holonomy，方环积分 $(\oint \oint_\square (\cdots))$ 产生的缺口必须由三层的 (H) 同伦项吸收。

3. “No-Go 引理”（两层不可表达性）

设 $(c :^2 \to \mathcal{W})$ 为参数小方环。若两层模型能吸收一切 (M) 的变形，则 (Hol) 仅由 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 决定，故

$$\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\mathrm{tot}}}(\square) = \mathbf{1} \quad 对所有 \ \square.$$

但当 $(F^{(MM)} \neq 0)$ 或 $(F^{(xM)} \neq 0)$ 时

$$\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\mathrm{tot}}}(\square) = \exp\left(\int_\square F^{(MM)} + \int_\square F^{(xM)} + \cdots\right) \neq \mathbf{1},$$

除非增添一个 basic 3-形式 (H) 使 $(\exp \int_\square H)$ 抵消该缺口（即“等式 up to (l_3)”）。故两层不可表达此族。□（思路）

4. 对位：元数学法则层 $(\mathcal{A}_M)$ 与几何侧 (A_M)

存在表示函子 (R) 使

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \qquad H = R\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\ \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big).$$

Soundness：若给定 $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$ 满足法则层条件，则几何侧 $((A_M, H))$ 满足混合 Bianchi 与 $(D_{x,\mathbf{w},M} H = 0)$，从而 (l_3) 同伦闭合。
Completeness（up to homotopy）：给定几何侧 $((A_M, H))$ 满足前述判据，存在 $(\mathcal{A}_M)$ 使 $(R(\mathcal{A}_M) = A_M)$ 且 (R)-CS 传递产生的 (H) 同伦等价于给定 (H)。

5. 诊断量与证书（可验证化）

- **缺口类**：$([H] \in H^3_{\text{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$；$([H] = 0 \Rightarrow)$ 严格退化可能。
- **方环证书**：$(\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \int_{\square} H)$；Moonshine 场景下与复制性/模方程的方环一致。
- **混合曲率**：$(F^{(MM)}, F^{(xM)}, F^{(wM)})$ 的非零即 根本性差距 的观测证据。
- **Stasheff 证书**：数值/符号核对 $(\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3)$ 到指定阶。

6. 典型算例与退化

- **U(1) 最小例**：$(H = \lambda F^{(xx)} \wedge A_M)$。若 $(D_x F^{(xx)} = 0)$, $(d_{!w} A_M = 0)$ 则 $(D_{x,\mathbf{w},M} H = 0)$，Jacobiator 由 $(l_3 = \lambda \iota^3_{\alpha(\cdot)}(F^{(xx)} \wedge A_M))$ 记录；当 $(A_M \equiv 0)$ 或 $(\lambda = 0)$ 时 根本性差距 崩塌回严格。
- **Moonshine 场景**：Dehn/Hecke 方环的 holonomy 若非 1，则以 $(\int H)$ 量化，复制性/模方程成为“等式 up to (l_3)”的证书。

7. 结论

“法则变换 $(w \mapsto M_{!w})$ 与法则联络 (A_M)”把“法则本身如何生成与演化”的动力学升级为**三层联络-曲率 + 同伦判据 + 证书化验证**的一体结构；其核心障碍类 $([H])$、混合曲率 $(F^{(MM)}, F^{(xM)})$ 与 Stasheff 闭合，构成 **原版** 与传统两层几何之间的**根本性差距**。

许可声明 (License)