

基于传统数学语言的形式化：PFB-GNLA 退化 \times 词法KAT作用么半群 \times GRL路径积分中的“价值偏基
准量与微分动力量子”

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-09-26
- 版本：v1.0.0

注：“O3理论/O3元数学理论/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见： [作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

摘要

介绍 Kleene Algebra with Tests (KAT) 与相关闭包/半环结构在本项目中的角色：用以建模可验证控制流、停机点与合规模式。提供从数学结构到工程接口的映射规范，支撑规则检查、代价累积与策略约束的统一表达。

0. 结论（业务口径）

- 用**主纤维丛 + 非交换李代数**给“语义—算子—路径”的连续几何底座；
- 在**退化（离散化）**极限下落到**词法KAT作用么半群**上的可计算算子模型；
- 用**GRL路径积分**刻画策略在算子序列上的价值；
- 价值基准向量**是目标泛函对“算子权重/占用”的偏导；
- 微分动力量子**是将该偏导经过步长/约束量化后的**最小可执行增量**（含非交换惩罚）。

1. 传统数学定义：主纤维丛版广义非交换李代数（PFB-GNLA）

1.1 主纤维丛（Principal Fiber Bundle）

- 设 \mathcal{X} 为光滑流形， G 为李群， $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ 为主 G -丛：
($\mathcal{P}, \mathcal{X}, G, \pi$) 且右作用 $R_g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ 自由且传递。
- 联络**: $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}; \mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$)，满足
Ad-协变与 $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ 。

- 曲率: $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2(\mathcal{P}; \mathfrak{g})$ 。

1.2 广义非交换李代数 (Generalized Non-commutative Lie Algebra)

- 取一实 (或复) 拓扑李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$; 允许为**分次/滤过**结构或巴拿赫李代数。
- 取一个 (可能非交换的) **算子代数** $\mathcal{A} \subseteq \text{End}(V)$ (带乘法与对易括号), 并给出表象 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ (导子表示)。
- 记 $U(\mathfrak{g})$ 为包络代数, 则 ρ 唯一延拓为 $\tilde{\rho}: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$ 。

PFB-GNLA 结构: $(\mathcal{P}, \mathcal{X}, G, \omega; \mathfrak{g}, \mathcal{A}, \rho)$ 。

1.3 退化 (Degeneration) 到离散可计算层

- 取符号字母表 Σ 与自由幺半群 $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ 。
- 定义退化表示

$$\Phi: U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \text{End}(\Sigma^*),$$

将连续生成元经“局域近似/取样”映射为**离散算子** (定义见 §2), 即

$$\Phi(X) \in \{\mathbf{L}_h, \mathbf{R}_h, \mathbf{\Pi}_L, \mathbf{T}, \mathbf{Cl} \dots\}.$$

- 直观上: ω 的平行输运在离散极限对应“可见窗口/预算/合规”的**硬门控成本**;
 Ω 的曲率对应路径的**环路增量成本** (见 §4 的路径积分惩罚项)。

2. 传统数学定义: 词法KAT作用幺半群 (离散层)

2.1 底座与端算子

- 自由幺半群: $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ 。
- 端算子幺半群: $(\text{End}(\Sigma^*), \circ_{\text{func}}, \text{id})$ 。
- **基本算子 (生成集)**
 - 左乘: $\mathbf{L}_h(s) = h \circ s$; 右乘: $\mathbf{R}_h(s) = s \circ h$ 。
 - 投影 (幂等): 尾裁剪 $\mathbf{\Pi}_L$, 首裁剪 \mathbf{Head}_L , $\mathbf{\Pi}_L \circ \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{\Pi}_{\min(L, M)}$ 。
 - 测试 (idempotent tests): $\mathbf{T}_{L, C}^{\text{Suf}}, \mathbf{T}_{L, C}^{\text{Pref}}$ (命中留存, 否则 \perp)。
 - 闭包 (命中即停): $\mathbf{Cl}_{U, L_p}^{\text{Suf}}, \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}}$ (扩张、单调、幂等)。
 - 规范化: $\mathbf{D}_{\text{head}}, \mathbf{CJK}$ (幂等清洗)。

2.2 KAT 与加权结构

- 取布尔tests 的Kleene Algebra with Tests (KAT) 结构;
- 若引入权重半环 (S, \oplus, \otimes) (如 $[0, 1], \max, \times$) , 则得**带权KAT**,
“最长可用命中”对应 \oplus -择优, “IDF \times 隶属度 \times 语义门控”对应 \otimes -乘。

命名: 词法KAT作用么半群 $\mathbb{M}_{\text{Lex-KAT}} := \langle \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{T}, \mathbf{Cl}, \dots \rangle \leq \text{End}(\Sigma^*)$ 。

3. GRL 路径积分 (传统概率论/测度论表述)

3.1 路径空间与策略测度

- 状态空间 S (含文本片段、窗口、预算等) , 动作空间 $A \subseteq \mathcal{G}$ (选算子) 。
- 路径 $\omega = (s_0, a_0, s_1, a_1, \dots) \in \Omega = (S \times A)^{\mathbb{N}}$ 。
- 策略 $\pi(a|s)$ 与转移核 $P(\cdot|s, a)$ 诱导到 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\pi)$ 。
- 折扣 $\gamma \in (0, 1)$ 。

3.2 价值泛函 (路径积分语义)

- 单步收益分解:
 $r_t = S_t + \delta_t - C_t$, 其中
 S_t 为语义质量项 (相似度/覆盖等的函数) ,
 δ_t 为词法增益 (U 上命中 \times 语义门控 \times IDF/隶属度) ,
 C_t 为长度/预算/合规成本。
- 目标泛函:**

$$\mathcal{J}(\pi) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\pi} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t \right].$$

4. 价值基准向量: 传统梯度与占用测度

4.1 参数化与梯度定义

- 令 π_α 以参数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{L_h}, \alpha_{L_p})$
控制算子门控与窗口上限。

- 定义（梯度版）：

$$v_i := \frac{\partial \mathcal{J}(\pi_\alpha)}{\partial \alpha_i} \stackrel{\text{PG}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\pi_\alpha}} \left[\sum_{t \geq 0} \gamma^t A_t \partial_{\alpha_i} \log \pi_\alpha(a_t | s_t) \right].$$

其中 A_t 为优势（标准定义）。

4.2 占用测度版（可审计）

- 定义算子占用 $\mu_i := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\pi} [\sum_t \gamma^t \mathbf{1}(a_t = G_i)]$;
则在“线性—响应”近似下

$$v_i \approx \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mu_i} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\pi} \left[\sum_t \gamma^t r_t \mathbf{1}(a_t = G_i) \right].$$

- 对 L_h, L_p 同理得 v_{L_h}, v_{L_p} 。

定义（价值基准向量）： $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_m, v_{L_h}, v_{L_p})^\top$ 。

5. 微分动力量子：量化增量的传统定义

5.1 量化算子

- 取允许步长集合 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ （或盒形约束），定义量化算子

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda, \quad Q(x) = \text{sgn}(x) \cdot \min\{|x|^\beta, \eta\},$$

其中 $0 < \beta \leq 1$ 、 $\eta > 0$ 控制次线性与上限。

5.2 非交换惩罚与最终定义

- 记算子对易子 $[G_i, G_j] := G_i \circ G_j - G_j \circ G_i$ ，取一致算子范数 $\|\cdot\|$ 。
- 定义耦合惩罚 $p_i := \lambda_{\text{comm}} \sum_j \|[G_i, G_j]\| \pi(a = G_j)$ 。
- 定义（微分动力量子）：

$$\Delta_i := Q(v_i) - p_i$$

并投影回可行域： $\alpha_i \leftarrow \Pi_{\text{adm}}(\alpha_i + \Delta_i)$ 。

对 L_h, L_p 做同样量化与投影（确保窗口与上限在业务阙内）。

解释： Δ_i 是“在非交换约束下，对第 i 类算子/窗口进行最小可执行更新”的离散化微分。

6. PFB-GNLA \rightarrow 离散层的严格映射（传统范畴性表述）

- $\Phi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(\Sigma^*)$ 为代数同态；
- ω -平行输运沿曲线 $\gamma \subset \mathcal{X}$ 的 holonomy $\text{Hol}_\omega(\gamma) \in G$ 经 $\Phi \circ \exp$ 诱导为**路径上算子权重更新**；
- 曲率 Ω 的 Wilson 环量 $\text{Tr}(\text{Hol}_\omega(\partial S))$ 对应**离散路径上的环路代价**（进入 C_t ）；
- 因此 \mathbf{v} 可看作共轭动量 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 在 Φ 下的坐标化影像，
 Δ 为在对易关系受限下的**离散最小步**。

7. 关键性质（陈述版）

- (闭包) $\text{CI}^{\text{Suf/Pref}}$ 在 (Σ^*, \preceq) 上**扩张、幂等、单调**。
- (投影带) $\{\Pi_L\}_L$ 与 $\{\text{Head}_L\}_L$ 各自构成交换幂等半群（与 (\mathbb{N}, \min) 同构）。
- (乘子) $\mathbf{L}_{h_1} \circ \mathbf{L}_{h_2} = \mathbf{L}_{h_1 \circ h_2}$ ， \mathbf{R} 类似（右侧反序）。
- (改进充分条件) 若 Q 的上界 η 与 λ_{comm} 选取使
 $\sum_i v_i \Delta_i \geq \kappa \sum_i \Delta_i^2$ （某 $\kappa > 0$ ），则存在 $\epsilon > 0$ 使小步长下 \mathcal{J} 单调不减。

8. 最小可执行流程（可审计）

1. 离线/在线统计： μ_i, v_i （梯度或占用法）。
2. 量化： $\Delta_i = Q(v_i) - p_i$ ；对 L_h, L_p 同理。
3. 投影与热更： $\alpha_i \leftarrow \Pi_{\text{adm}}(\alpha_i + \Delta_i)$ ，更新窗口/上限。
4. 合规闸：tests 不通过即拒绝更新。
5. 监控： \mathcal{J} 提升、`word_noncompliance` 下降、吞吐/显存稳定、日志回放 100%。

9. 一句话定位

用**主纤维丛 + 非交换李代数**给出连续可微的“语义力学”，退化到**词法KAT作用么半群**得到可计算的“算子代数”，再以**GRL路径积分**评估收益—成本；其**价值基准向量**是“对每类算子的边际价值”，**微分动力量子**

是“在非交换约束下最小可执行的结构增量”。这套形式化既可证明、可审计，又能直接驱动参数热更与线上治理。

许可声明 (License)

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。