

四版 PFB-GNLA 的对标与对位：从严格几何到“法则-算子”同伦，再到元数学原版

- 作者: GaoZheng
- 日期: 2025-11-08
- 版本: v1.1.1

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：[作者 \(GaoZheng\) 网盘分享 或 作者 \(GaoZheng\) 开源项目 或 作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

摘要

本文对齐并对位四个版本的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA) 一体化构造：(1) **严格版** (Jacobi 严格成立)；(2) **同伦版** (允许三元同伦 (l_3))；(3) **可变泛函-算子同伦版** (将 (w) 从“参数”提升为“法则泛函算子轨迹”，引入算子方向联络 (A_M))；(4) **元数学原版** (“重定义联络”(\mathcal{A}_M) 与三阶纠正(l_3))。在统一的主从—参数—算子三层联络图景下，给出核心数据、判据与退化，建立从“法则层”到“传统几何层”的表示对位：

$$A_M \xleftarrow{R} \mathcal{A}_M, \quad H! \left(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M \right) \xleftarrow{R} R! (\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)),$$

并给出同构/退化条件：

$$D_{x,\mathbf{w},M} H = 0, \quad D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \quad F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0 \Rightarrow l_3 = 0.$$

由此说明：严格版是“无异常/无法则演化”的经典极限；同伦版以 (H) 统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版把“法则演化”提升为算子几何的一等公民；元数学原版在法则层给出生成—纠正的起点。四版因此形成从静态等式到生成式法则的层级序列，且可相互表示、检验与退化。

1. 统一骨架与分层联络

设主从 ($\pi : P \rightarrow M$)，结构群 (G)，参数域 (\mathcal{W})。在积主丛 ($\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$) 上引入

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}} \mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$$

并取“骨架”(\mathcal{A})-双模

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

严格版与同伦版工作在 $((M, \mathcal{W}))$ -两层；**可变泛函-算子同伦版**引入第三层（法则—算子）：

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}), \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$$

$$\mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M]$$

并满足**混合 Bianchi**

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

2. 严格版 (Jacobi on-the-nose)

Atiyah-型括号

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_0 = [X, Y] \oplus \left(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \right)$$

满足 Leibniz 与锚-曲率兼容

$$\rho([x, y]_0) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \quad \kappa \propto \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} F^{(xx)}$$

且严格 Jacobi

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_0]_0 = 0.$$

定位：无异常、无法则演化的经典几何；PBW/包络/表示链条直接可用。

3. 同伦版 ((H) -twisted 2-term (L_∞))

取 (G) -等变、basic 的三形式

$$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad D_{x,w} H = 0, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{R} \text{ 或 } \text{ad}(P)$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

在 $(D_{x,w} H = 0)$ 与 $(D_{x,w} \mathbb{F} = 0)$ 下满足 Stasheff:

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0$$

当 $(H = 0)$ 或 $(H = dB)$ 可吸收，退化回严格版。

定位：把“异常/修正”统一吸纳为 (H) 的同伦类 $([H])$ ，解释“等式 up to (l_3) ”。

4. 可变泛函-算子同伦版（将 (w) 提升为“法则泛函算子”）

将 (w) 提升为法则函子轨迹 $(M_{!w})$ ，引入 (A_M) 与三层曲率 $(\mathbb{F}_{\text{tot}})$ 。选择

$$H = H!(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x,w,M} H = 0$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

此时 (l_3) 的来源不再是“外加”，而是**法则演化的算子几何之必然产物**；若

$$F^{(MM)} = 0, \quad F^{(xM)} = 0$$

则“法则演化”与几何兼容， (H) 可退为几何/参数二层；进一步若 $(H = 0)$ 或 exact，则回收严格版。

定位：与元数学“重定义联络”完全对位；解释“法则随 (w) 的生成与纠正”。

5. 元数学原版（法则联络 (\mathcal{A}_M) 与三阶纠正）

法则层给出

$$\mathcal{A}_M \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}), \quad \mathcal{F}_M = d_{!w}\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$$

以及三阶纠正

$$l_3^{(\text{orig})}(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} R! \left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

并含非交换修正 (Φ_{\hbar}):

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_{\star} = [\cdot, \cdot]_0 + \Phi_{\hbar}(X \oplus \xi, Y \oplus \eta; \mathcal{F}_M).$$

对位映射 (表示 (R)) :

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) = R! \left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

在 (R) 下, 可把原版的法则层同伦项、非交换修正下推至几何—参数—算子三层。

6. 对标与对位 (条理化陈述)

(i) 数据层对标:

严格版与同伦版共享 $((P, \mathcal{W}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbb{F}))$; 可变泛函-算子同伦版增加 $((\mathcal{Q}; A_M; F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}))$; 原版给出 $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$ 与 (Φ_{\hbar}) 。映射 (R) 实现

$$\mathcal{A}_M \mapsto A_M, \quad \mathcal{F}_M \mapsto F^{(MM)}, \quad \text{并由此生成 } H.$$

(ii) 同伦/严格判据:

$$D_{x,w}\mathbb{F} = 0, \quad D_{x,w,M}H = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

$$F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0, \quad H = 0 \quad (\text{或 exact}) \quad \Rightarrow \quad l_3 = 0 \quad (\text{严格极限}) .$$

(iii) 动机:

严格版=静态等式; 同伦版= (H) 统一吸纳三阶“失配”; 可变泛函-算子同伦版=法则演化的“算子几何”; 原版=生成式法则的起点。

“指标定理式”理解: $([H])$ 是变形不变量 (“指数类”), holonomy 方环的“缺口”由 $(\int H)$ 量化。

(iv) 验证/工程:

严格版检 $(D_{x,w}\mathbb{F} = 0)$ 与严格 Jacobi; 同伦版再检 $(D_{x,w}H = 0)$ 与 Stasheff; 可变泛函-算子同伦版还检 $(F^{(MM)}, F^{(xM)})$; 原版可通过 (R) 下推到几何侧进行证据化 (例如 (H) 证书、Jacobiator 证书)。

7. 代表性公式集 (便于引用)

1. 扩展 Bianchi: $(D_{x,w}\mathbb{F} = 0)$, 同伦版外再有 $(D_{x,w,M}H = 0)$ 。
2. 扭曲括号: $([x,y]_H = [x,y]_0 + \Theta_H(x,y))$ 。
3. 三元同伦: $(l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H)$ 。
4. Stasheff: $(\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z))$ 。
5. 算子 Maurer–Cartan: $(F^{(MM)} = d_{!w}A_M + A_M \wedge A_M)$ 。
6. 表示对位: $(A_M = R(\mathcal{A}_M))$, $(H = R(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)))$ 。

8. 结论

四版构造在同一“主丛—参数—算子”联络-曲率语义下**严格对位**: 严格版提供“清爽等式”、同伦版提供“受控失配”的统一编码，可变泛函-算子同伦版将**法则演化**升格为算子几何，元数学原版在法则层给出生成与三阶纠正的“第一性”表达。通过表示 (R) 与协变闭/退化判据，可在四版之间往返：**原版** → **(算子表示)** → **同伦版** → **严格极限**。这种分层与对位，使得“解释为何”“落实如何算”“验证如何检”三者在同一框架内闭环。

附件1：定理化与证明骨架 (Stasheff 闭合、表示下推与 Hopf-algebroid)

把四版正文中的“命题/判据/要点”提升为可复核的**定理—引理—证明提纲**。包含：两层与三层情形下的 L_∞ 闭合定理 (A、B) 、法则层→几何层的表示下推完备性 (C)，以及包络与 Hopf-algebroid 的存在判据 (D)。

统一设定

令 $\pi: P \rightarrow M$ 为主 G -丛，参数域 \mathcal{W} 光滑，积主丛 $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 。

总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,w}\mathbb{F} = 0}$$

骨架双模与锚：

$$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

若引入法则-算子层，则再加：

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,w,M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0}.$$

定理 A (两层 H -twist 的 2-term L_∞ 闭合)

假设：

(H1) $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、 G -等变且协变闭： $D_{x,w}H = 0$ 。

(H2) $D_{x,w}\mathbb{F} = 0$ 。

定义扭曲括号与三元同伦：

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

其中 $([x, y]_0)$ 为 Atiyah-型括号， Θ_H 为由 H 诱导的双线性修正（中心或伴随型）。

结论：形成 2-term L_∞ 代数

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3 \neq 0, \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并且

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

证明提纲：逐项展开 $([\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H])$ 。

- (i) $([\cdot, \cdot]_0)$ 的 Jacobi 由 $D_x F^{(xx)} = 0$ 消去；
- (ii) 混合项在 $D_{x,w}\mathbb{F} = 0$ 与 $D_{x,w}H = 0$ 下配平；
- (iii) 残项汇聚为 $\iota_\rho^3 H$ 。□

定理 B (三层含 A_M 的同伦闭合)

假设：

(B1) 三层曲率满足混合 Bianchi： $D_{x,w,M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 。

(B2) $H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ basic、等变且协变闭： $D_{x,w,M}H = 0$ 。

结论：同上式定义的 (l_1, l_2, l_3) 满足

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并在 $F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0$ (以及 $H = 0$ 或 exact 可吸收) 时退化为严格 Jacobi。

证明提纲：与定理 A 同，但需额外使用 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$ 的混合 Bianchi 项来抵消 A_M 诱导的交叉项。□

定理 C (表示下推的 soundness/completeness up to homotopy)

设定：存在表示 $R : \text{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$ 及 Chern–Simons/传递型函子 $R_!$ 。

(C1) Soundness：给定法则层 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ ，取

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R_!(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)),$$

则 $D_{x,w,M}H = 0$, 定理 B 成立。

(C2) Completeness (up to homotopy) : 若几何侧 (A_M, H) 满足定理 B 且 $[H] \in H^3_{\text{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$, 则存在 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ 与 $(R, R_!)$ 使上式成立, 且给定 H 与 $R_!(\cdot)$ 表示的同伦类相同。

证明提纲: Soundness 由自然性与 $R_!$ 保协变闭性给出; Completeness 以类比 Chern–Weil/家族 CS 传递与同调提升, 构造 \mathcal{A}_M 使 A_M 为其像, 并匹配 $[H]$ 。□

定理 D ($U_*(L)$ 为 Hopf-algebroid 的充分条件)

假设:

(D1) (\mathcal{A}, \star) 为非交换幺代数, L 为 \mathcal{A} -双模, 满足 (P1)–(P4), 并配有增广锚 ρ 。

(D2) **PBW型条件**: $U_*(L)$ 的递增过滤 $\{F^n\}$ 使 $\text{gr } U_*(L) \simeq \text{Sym}_{\mathcal{A}}(L)$ (\mathcal{A} -代数同构)。

(D3) 扩展 Bianchi 与锚-曲率兼容成立 (四版正文条件)。

结论: 存在余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0$$

与 Takeuchi 乘积约束, 使 $U_*(L)$ 成为 (左/右) Hopf-algebroid; 当 $H = 0$ 且 $\hbar \rightarrow 0$ 时退化为经典情形。

证明提纲: 以 (D2) 控制重排与余代数一致性; (D3) 保证余乘与锚兼容; 验证基扩张后 Takeuchi 子空间封闭性。□

附件2：集中定义区（术语与对象的精确定义）

把四版分散出现的核心对象集中定义, 统一语义与约束。

1. 范畴与自同构

- $\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$: 严格单oidal范畴 (单位与结合子恒等), 对象分别为“法则前库/后库”经 $\Phi_{\mathbf{w}}$ 筛选的算子包; \otimes 为并行复合。
- $\text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)$: 保持 \otimes 与单位的单oidal自同构群 (或 2-群)。本文在可表象时视作常规 Lie 群 (或 Fréchet-Lie 群) 处理。

2. 表示与传递

- **表示** R : $\text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}} \subset \text{GL}(V)$ 的群同态。
- **传递** $R_!$: 把 3-形式型特征 (如 CS) 从法则层下推到几何层的函子 (保协变闭性与同伦类)。

3. basic 与等变

- **basic**: 在 P 上为水平且 G -不变的形式; 等价于 $\Omega^\bullet(M, \text{ad}(P))$ 的自然下沉。

- **G -等变**: 对伴随作用不变; 记作 Ad-不变。

4. 星乘与形变项

- (\mathcal{A}, \star) : Moyal/Kontsevich/形式形变类; $\star = \cdot + \hbar B_1 + \hbar^2 B_2 + \dots$ 。
- Φ_\hbar : 括号的非交换修正, 一般形如

$$\boxed{\Phi_\hbar = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}) + \hbar^2 \Pi_2(\mathbb{F}, \nabla) + \dots}$$

并保持 (P1)–(P4) 至相应阶。

5. 价值/语义函数族

- $J : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (逻辑性度量, 次可加、弱单调), $\text{Loc} : \mathcal{P} \rightarrow \text{语义域}$ 。
 - **阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$** : 由 (J, Loc) 给定的 basic 子流形/超曲面族, 用于“连续→离散”的跃迁判据。
-

附件3: 代表性算例与复现实验接口

给出可复算的三类例子与统一的“验证脚本 I/O 规范”。

1. $\text{U}(1)$ 最小例 (两层)

设 $G = \text{U}(1)$ 、 $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ 。取

$$F^{(xx)} = d_x A^{(x)}, \quad A^{(w)} \text{ basic}, \quad H = \lambda F^{(xx)} \wedge A^{(w)}.$$

若 $D_x F^{(xx)} = 0$ 且 $F^{(ww)} = 0$, 则 $D_{x,w} H = 0$ 。于是

$$\boxed{l_3(x, y, z) = \lambda \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} (F^{(xx)} \wedge A^{(w)})}.$$

当 $A^{(w)} = 0$ 或 $\lambda = 0$ 时退化为严格版。

2. $\text{SU}(2)$ 非阿贝尔算例 (两层)

在 $S^3 \simeq \text{SU}(2)$ 上取平凡丛与 Maurer–Cartan 形式 ϑ , 令

$$A^{(x)} = \mu \vartheta, \quad F^{(xx)} = \mu^2 \vartheta \wedge \vartheta, \quad A^{(w)} = \nu(\mathbf{w}) \vartheta.$$

取

$$H = \kappa \langle F^{(xx)} \wedge A^{(w)} \rangle_{\text{Ad}},$$

则在 $d\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ 、 $D_{x,w}F = 0$ 下有 $D_{x,w}H = 0$ ，并得到非零 Jacobiator。检验：计算 $\int_{S^3 \times \gamma_w} H$ 与三元同伦的一致性。

3. 非交换星乘算例 (Moyal 平面)

取 $\mathcal{A} = C_c^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$ 上的 Moyal 星乘；令

$$\Phi_\hbar^{(1)}(x, y) = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}; x, y), \quad \Pi_1 \text{ 线性于 } \mathbb{F}.$$

在 \hbar 一阶，验证

- (i) Leibniz (P1) 与锚兼容 (P2) 保持；
- (ii) l_3 仍由 H 给出，且 $\hbar \rightarrow 0$ 时回收两层严格版。

4. 验证脚本 I/O 规范 (面向工程复现)

- 输入 JSON (示意)

```
{
  "bundle": {"G": "U(1)|SU(2)", "base": "chart or mesh"},
  "forms": {
    "Ax": "...", "Aw": "...", "AM": "...(可空)",
    "H": "...",
    "pairing": "Ad-invariant form (可选)"
  },
  "ops": ["functional_flatness", "mixed_flatness", "stokes_13", "degeneration_test"]
}
```

- 输出

数值证书（曲率范数、Bianchi 偏差、 \sum_{cyc} 与 l_3 的差、方环积分 $\int_{\square} H$ 等），附通过/失败标志与最大偏差。

附件4：相关工作与对照图谱 (提纲式)

把四版与经典对象的关系明确化，便于编制参考文献。

- **Atiyah-algebroid 与参数化联络：** 四版的 $([\cdot, \cdot]_0)$ 与 ρ 出自 Atiyah-型结构；参数化联络把 d_x 扩展到 $d_{x,w}$ 。
- **Courant 与 H -twist：** 同伦版是 Courant H -扭曲在“主丛/参数化”的推广；当 $L = TM \oplus T^*M$ 且 $H \in \Omega^3(M)$ 闭时回收经典情形。
- **2-term L_∞ ：** $l_3 = \iota_\rho^3 H$ 的构造与 Stasheff 身份的验证与标准 Lie-2/代数丛框架一致。
- **Chern-Simons 与传递：** H 的来源可由 CS_3 与 $\text{Tr}(F \wedge F)$ 的 basic 投影获得，保障协变闭性。

- 无限维 Lie 群:** 法则-算子群 \mathcal{G}_{op} 的 tame Fréchet/Hilbert-Lie 背景与 Ebin–Marsden、Hamilton、Kriegl–Michor、Neeb 的框架对齐。
- Hopf-algebroid 与 PBW:** $U_*(L)$ 的过滤与 PBW-型判据, 参照双(半)代数与 Takeuchi 乘积的标准条件。

注: 正式稿请据此清单增补规范参考文献条目。

附件5: 统一符号与约定表

符号	含义	说明
$P \rightarrow M$	主 G -丛	结构群 G , 李代数 \mathfrak{g}
\mathcal{W}	参数流形	点 \mathbf{w}
\mathbb{A}	总联络 ($A^{(x)} + A^{(w)}$)	两层情形
\mathbb{F}	曲率 ($F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$)	$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$
A_M	法则-算子联络	$A_M = M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w}$
\mathbb{A}_{tot}	三层总联络	$A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$
\mathbb{F}_{tot}	三层曲率族	含 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$
$D_{x,\mathbf{w}}, D_{x,\mathbf{w},M}$	协变外微分	对应两层/三层
L	\mathcal{A} -双模	$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P))$
ρ	锚	$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$
$[\cdot, \cdot]_0$	Atiyah-型括号	见正文与附件1
$[\cdot, \cdot]_H$	扭曲括号	$[\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H$
l_3	三元同伦	$\iota_\rho^3 H$
Ad/ad	伴随/微伴随	右作用约定
basic	基本性	水平且 G -不变
\star	星乘	形式形变 \hbar -级展开
Φ_\hbar	非交换修正	对括号的 \hbar 级增量
$R, R!$	表示/传递	法则层 \rightarrow 几何层

附件6：GRL 模型层与数学主体的接口（“假设—命题—解释”格式）

把 GRL 路径积分与微分动力作为**建模假设**而非证明要件，给出其与几何量的接口。

假设 G1 (生成机制)

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t), \mathbf{w}(t)), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = U(\mathbf{w}(t); J, \text{Loc}),$$

并用

$$\pi^* = \arg \max_{\pi \in \Pi_{\text{meaningful}}(\mathbf{w})} \mathbb{E} \left[\exp \int \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w}) dt \right]$$

选取“有意义”算子路径。

命题 G2 (证书化接口)

设切面 $s : M \rightarrow P$ 与阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$ 。若

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\gamma, \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \quad \text{横截穿越} \quad \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

则在切面上出现离散跃迁；其证书为 $\int H$ 与混合曲率的方环积分。

解释： $[H]$ 与混合曲率为“等式 up to l_3 ”的可验证量；不参与主体定理的严格性，只作为生成功能的外部接口。

附件7：审稿可复核的“证书化验证”清单

把工程化检查项固化为**可打勾**的证书表。

- **K1: functional_flatness**

计算 $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$ 的范数与最大特征值；目标：到设定阶为 0（或报告非零并量化）。

- **K2: mixed_flatness**

计算 $F^{(xM)}, F^{(wM)}$ ；目标：核对混合 Bianchi 的残差 $|D_{x,w,M} \mathbb{F}_{\text{tot}}|$ 。

- **K3: Bianchi-family**

两层/三层分别验证 $D_{x,w} \mathbb{F} = 0$ 、 $D_{x,w,M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 的数值残差。

- **K4: Stasheff-gap**

评估

$$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

并在给定基上取 supremum。目标： $|\Delta_{\text{Jac}}|$ 在容差内。

- **K5: Holonomy-H 证书**

计算方环 \square 上 $\exp \int_{\square} H$ 与 $\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square)$ 的偏差；目标：与 Stasheff-gap 一致。

- **K6: 退化测试**

附件8：法则扭曲谱与法则动力的度量

本附件在“四版 PFB-GNLA”的框架内整理“法则扭曲”与其动力学度量的表述。核心包括：

1. 以一族 L_{∞} 运算 l_n 定义法则扭曲谱 (twist spectrum) ；
2. 给出“法则变换速度-曲率-同伦强度”的**三联度量**与可投向作用量的统一指标；
3. 以**变分原理/路径积分**形成“法则-几何-控制 (GRL) ”的闭环；
4. 明确与黎曼/广义相对论的**结构对位**与边界；
5. 不变量与分类指标。

适用范围与记号

- 主丛 $\pi : P \rightarrow M$, 参数域 \mathcal{W} , 积主丛 $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 。
- 两层总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0}.$$

- 若含“法则-算子”层，则再引入

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0}.$$

- 骨架双模与锚： $L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P))$, $\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$ 。

1. 法则扭曲谱 (twist spectrum) $\{l_n\}$

最小 2-term L_{∞} (已实现) :

$$\boxed{l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3 = \iota_{\rho(\cdot)}^3 H, \quad l_{n \geq 4} = 0},$$

其中 $([\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H)$, $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、 G -等变且协变闭。

高阶 (建议性扩展)：引入协变闭的特征形式族

$$\boxed{\mathcal{C}_m \in \Omega^m(M \times \mathcal{W}, [\times \mathcal{G}_{\text{op}}], \mathfrak{a}), \quad D\mathcal{C}_m = 0},$$

并定义

$$\boxed{l_m(x_1, \dots, x_m) := \iota_{\rho(x_1)} \cdots \iota_{\rho(x_m)} \mathcal{C}_m \quad (m \geq 3).}$$

当 $m = 3$ 时 $\mathcal{C}_3 = H$ 回收 l_3 。据此定义**谱维度**

$$\delta_{\text{Law}} := \max\{m \mid l_m \neq 0\}.$$

含义： $\delta_{\text{Law}} = 0$ 表示“平坦法则”； $\delta_{\text{Law}} = 3$ 为已实现的最小非平坦层级； $\delta_{\text{Law}} > 3$ 表明存在更高阶同伦耦合（范畴/算子层现象）。

注：定理化的 Stasheff 身份与闭合条件见附件1（定理A、B）。

2. “速度—曲率—同伦”三联度量

将“演化速率、不可积性、同伦缺口”分离刻度，并可汇总成单一指标。

(a) 速度 (一级)

$$v_{\text{Law}}^2(t) := |A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))|_{g_{\text{op}}}^2,$$

其中 g_{op} 为 \mathfrak{g}_{op} 上的选定内积，用于刻度“法则平行运输速率”（可作为 GRL 的即时正则/惩罚项）。

(b) 曲率 (二维)

$$\kappa_{\text{Law}}^2 := |F^{(MM)}|^2 + |F^{(xM)}|^2 + |F^{(wM)}|^2.$$

度量“非可积/环路缺口”的强度，属坐标无关的内蕴量。

(c) 同伦强度 (\geq 三维)

$$\tau_{\text{Law}}^2 := |l_3|^2 + |l_4|^2 + \dots,$$

以 \mathcal{C}_m 的度量固定每个 l_m 的范数。

统一指标 (可投向 Lagrangian) :

$$\mathcal{I}_{\text{Law}} := \alpha v_{\text{Law}}^2 + \beta \kappa_{\text{Law}}^2 + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |l_m|^2,$$

权重 α, β, λ_m 由任务/约束指定，可视为“逻辑性度量 J ”的参数化落点。

3. 作用量与变分原则 (“法则-爱因斯坦”形式)

几何侧作用量

$$S_{\text{geom}}[M_{!w}] = \int_{M \times \mathcal{W}} \left(\beta \langle \mathbb{F}_{\text{tot}}, * \mathbb{F}_{\text{tot}} \rangle + \sum_{m \geq 3} \lambda_m \langle \mathcal{C}_m, * \mathcal{C}_m \rangle \right).$$

控制/约束 (GRL) 侧

$$S_{\text{ctrl}}[\mathbf{w}, \pi] = \int \left(\alpha |A_M(\dot{\mathbf{w}})|^2 - \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w}) \right) dt.$$

总路径积分与变分

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}M_{!w} \mathcal{D}\mathbf{w} \mathcal{D}\pi \exp(-S_{\text{geom}} - S_{\text{ctrl}}).$$

对 $M_{!w}$ 的变分产生“法则-爱因斯坦”型方程（含 Bianchi 约束与高阶源项）；对 \mathbf{w}, π 的变分给出 GRL 的最优化条件。三者形成“几何-同伦-控制”的闭环。

注：上述为**建议性建模**；方程的存在唯一性与规范不变性依赖附件1中的闭合条件。

4. 与黎曼/广义相对论的结构对位（边界与异同）

- **同构之处（层级映射）**
 - 联络/曲率/Bianchi/holonomy 的**结构骨架**被搬到“法则层”；
 - H 与 l_3 提供**同伦级**的“异常/缺口”刻度，类比曲率产生角缺。
- **边界与差异**
 - 研究对象自“几何/力”提升为“**法则/合成律**”，允许态射与对象类型变更（范畴层级）；
 - 非仅“参数变常数”，而是“把法则当联络”，其不可约性由 κ_{Law} 与 $[\cdot, \mathcal{C}_m, \cdot]$ 证书化。
- **退化一致性**
 - 当 $\kappa_{\text{Law}} = \tau_{\text{Law}} = 0$ 时，可规约为“两层世界”的传统情形；该退化在四版中已明确。

5. 不变量与分类指标

- **扭曲谱维度**： $\delta_{\text{Law}} = \max\{m \mid l_m \neq 0\}$ 。
- **法则 Chern-类（示意）**：对闭子流形 $\Sigma \subset M \times \mathcal{W}$,

$$\text{LawIndex}_m(\Sigma) := \int_{\Sigma} \mathcal{C}_m.$$

$\text{LawIndex}_m \neq 0$ 证成“法则可变”的内蕴性。

- **Jacobiator-gap 证书**：
 $\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z)$,
 其数值上界与 $\int_{\square} H$ 的方环偏差一致，可作为“闭合残差”的量化。

- **统一强度**: \mathcal{I}_{Law} 作为性能/稳健性权衡指标。

附录9 相对论-量子统一与 SR/GR 协变性的定理化证明

B→A 演化下的四版 PFB-GNLA 对位

统一设定与记号

- **几何与法则三层**: 主丛 $(\pi : P \rightarrow M)$, 结构群 (G) , 底流形 (M) (SR: $(\eta_{\mu\nu})$; GR: $((M, g_{\mu\nu}))$ 洛伦兹签名)。参数域 (\mathcal{W}) 为可微流形。
- **法则-算子群**: $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ 为 tame Fréchet/Hilbert-Lie 群, Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\text{op}})$ 。法则轨迹 $(M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$ 光滑。
- **三层总联络与曲率** (见正文与前附录) :

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} := A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} := F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)},$$

其中 $(A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w})$; 混合 Bianchi:

$$D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

- **同伦源与三元项**: 取 basic、 (G) -等变且协变闭三形式

$$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x,\mathbf{w},M} H = 0,$$

并以 $(l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H)$ 扭曲二元括号得到 2-term (L_∞) (见附录1的定理 A/B)。

- **法则“速度”**: 场化后 $(\mathbf{w} = \mathbf{w}(x))$, 定义

$$\xi_\mu := A_M(\partial_\mu \mathbf{w}(x)) \in \mathfrak{g}_{\text{op}}.$$

- **协变作用量 (法则扇区)** : 给定常数 $(\alpha, \beta > 0)$ 与权重 $(\lambda_{mm \geq 3} \geq 0)$, 定义 (SR/GR 统一写法)

$$S_{\text{law}}[\mathbf{w}, M_{!w};, \mathbb{A}_{\text{tot}}, H, g] = \int_M \sqrt{-g} \left(\frac{\alpha}{2} g^{\mu\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle_{\text{op}} - \frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|_{g^2} - \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|_{g^2} \right) d^4x + S_{\text{WZ/top}}[H],$$

其中 (\mathcal{C}_m) 为协变闭特征形式族 ($m = 3$ 回到 (H)) , $(S_{\text{WZ/top}})$ 为 4D θ-项或 5D WZ 延拓的边界化; SR 情形取 $(\sqrt{-g} = 1, g = \eta)$ 。

说明: 上述对象与符号与“严格版/同伦版/法则-算子同伦版/原版”在正文与前八个附录中的定义完全一致, 此处不再重复基本性质。

9.1 定理 (SR-Soundness: 庞加莱协变与因果性)

定理 9.1 (SR-Soundness)

在 Minkowski 背景 $(\mathbb{R}^{1,3}, \eta)$ 上, 若三层数据满足

$$D_{x,w,M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0, \quad D_{x,w,M}H = 0,$$

则 (S_{law}) 是庞加莱协变的洛伦兹标量功能; 对 $(w, M_{!w})$ 的变分生成的欧拉-庞加莱/广义 EL 方程**因果且一致**。其主导偏微分算子为 $(\alpha\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)$ 型 (双曲), 保证局域初值问题良定 (小数据下)。

证明

1. **协变性**: 每个被积量由 (η) 升降指标并以 (Tr) 或 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{op}})$ 与 Hodge 星构成 4-标量; WZ/θ-项是 4-形式或 5-维延拓的边界项, 庞加莱变换仅引入全导数, 积分不变。
2. **规范法则-算子自然性**: $(\delta A_M = D\epsilon)$ 与 $(\delta A_M = D_{!w}v)$ ($(v \in \mathfrak{g}_{\text{op}})$) ; $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$ 与 $(DH = 0)$ 保证 $(\delta S_{\text{law}} = 0)$ (除去边界), 故作用量在两类对称下自然。
3. **场方程**:

- 对 (δw) 变分, 记 $(\xi_\mu = A_M(\partial_\mu w))$, 有

$$\partial_\mu \left(\alpha A_M^\sharp(\xi^\mu) \right) + \nabla_w \left(\frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|_{\eta^2} + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|_{\eta^2} \right) - \nabla_w \mathcal{L}_{\text{WZ/top}} = 0.$$

- 对 $(\delta M_{!w})$ 的约束变分给出欧拉-庞加莱方程

$$\partial_\mu \mu^\mu + \text{ad}_{\xi_\mu}^* \mu^\mu = -(\delta_\xi V_\kappa) - (\delta_\xi V_\tau) + (\theta/\text{WZ 流}), \quad \mu^\mu := \alpha \xi^{\mu b} \in \mathfrak{g}_{\text{op}}^*.$$

4. **因果性与双曲性**: 主部 $(\alpha\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)$ 作用于 (w) 分量 (经 (A_M) 的非线性拉回), 且 $(\alpha > 0)$ 与 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{op}})$ 正定, 故主符号与 d'Alembert 算子同型, 方程双曲; 非线性项由势梯度与低阶耦合构成, 不破坏因果锥结构。□

9.2 定理 (GR-Soundness: 应力-能量与协变守恒)

定理 9.2 (GR-Soundness)

在 (M, g) 上, 以 $(\sqrt{-g})$ 密度协变化的 (S_{law}) 对 $(g_{\mu\nu})$ 的变分给出对称张量

$$T_{\mu\nu}^{\text{law}} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{law}}}{\delta g^{\mu\nu}},$$

并满足协变守恒

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{law}} = 0.$$

将 $(S_{\text{EH}}[g])$ 加入总作用量, 得爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{\text{matter}} + T_{\mu\nu}^{\text{law}}),$$

与几何 Bianchi 恒等式 ($\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$) 一致。

证明

1. 由度量与规范协变性 (微分同胚不变与纤维规范不变) 与 Noether 第二维, 则 $(\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{law}} = 0)$ 等价于整体作用在微分同胚下的不变性。
2. $(S_{WZ/\text{top}})$ 的度量依赖仅经体元或为边界项, 其变分或为零或给出纯迹项, 均不破坏守恒。
3. 将 (S_{EH}) 合并, 变分得 $(G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^{\text{tot}})$; 由几何 Bianchi 恒等式, 必有 $(\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{tot}} = 0)$, 而物质与法则两扇区各自协变守恒互相补偿。□

9.3 定理 (Completeness up to Homotopy: 原版 \leftrightarrow 几何版)

定理 9.3 (表示/传递完备性, 按同伦)

设 $(A_M, \mathbb{F}_{\text{tot}}, H)$ 满足混合 Bianchi 与 $(DH = 0)$, 且 $([H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$ 。则存在法则层连接 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ 与表示/传递 $(R, R_!)$, 使

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H \sim R_! \left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

在同伦类上相等 (差一个 exact 项)。

证明 (Chern–Weil/CS 传递思路)

$(\text{Aut} \otimes (\mathbf{L}))$ 的表示 $(R : \text{Aut} \otimes (\mathbf{L}) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$ 引出 Lie 代数同态与不变配对; 对任意 (\mathcal{A}_M) 构造 CS 传递 $(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M))$ 与 Pontryagin 类 $(\text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M))$ 的 basic 投影, 得协变闭三形式的同伦类。给定几何侧 (H) 的 basic 同调类 $([H])$, 可选择 $(\mathcal{A}_M, R_!)$ 使其像在同调上等于 $([H])$ (Chern–Weil 同调满射性在该设置下成立)。由表示 (R) 的满性 (在所需子群/子代数) 可令 $(R(\mathcal{A}_M) = A_M)$ 。□

9.4 定理 (两层 No-Go: 非零混合曲率不可被两层吸收)

定理 9.4 (Two-Layer No-Go)

若 $(F^{(xM)} \neq 0)$ 或 $(F^{(MM)} \neq 0)$, 则不存在仅依赖两层 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 的模型在保持 Jacobi 严格成立的同时等价表达该族演化; 必须引入第三层 (A_M) 及一个 basic 协变闭三形式 (H) 以 (l_3) 吸收方环缺口。

证明

取 $(M \times \mathcal{W})$ 上一小矩形 (\square) 跨越 $(x, !w)$ 混合方向。三层 holonomy 的 Baker–Campbell–Hausdorff 展开给出

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \left(\int_{\square} F^{(xM)} + \frac{1}{2} \int_{\square} F^{(MM)} + \dots \right) \neq \mathbf{1}.$$

两层世界中相应 holonomy 仅由 $(F^{(xx)})$ 与 (x, w) 分量决定, 无法产生上述混合项, 除非允许“等式 up to (l_3) ”的扭曲。由附录1的定理 A/B, 令 $(l_3 = \iota_\rho^3 H)$ 且 $(DH = 0)$ 即可吸收该缺口; 反之缺口不可消, Jacobi 严格性破坏。□

9.5 定理 (Jacobiator-gap 证书 \equiv Holonomy-(H) 证书)

定理 9.5

令 $(\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}}([x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z)))$ 。则在 $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$ 、 $(DH = 0)$ 下，有

$$|\Delta_{\text{Jac}}| \lesssim \sup_{\square} \left| \log \text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) - \int_{\square} H \right|$$

(在指定范数与基上等价)，且两端同阶消失。

证明

Stasheff 身份将 Jacobiator 归约为 (H) 的内收项；另一方面，小方环 (\square) 上的 holonomy 按非交换 Stokes 与 BCH 展开，主项即为曲率/三形式在 (\square) 上的积分。由于 $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$ 与 $(DH = 0)$ ，高阶残差受控于面积与曲率范数。故两证书彼此上界且同阶趋零。□

9.6 定理 (Euler–Poincaré 与广义 EL：完整推导)

定理 9.6

对 (S_{law}) 在固定边界条件下的变分，得到

$$\partial_{\mu}\mu^{\mu} + \text{ad}_{\xi_{\mu}}^{*}\mu^{\mu} = -\delta_{\xi}V_{\kappa} - \delta_{\xi}V_{\tau} + (\theta/\text{WZ 流}),$$

\$\$

$$\partial_{\mu}\alpha A_M^{\sharp(\xi_i\mu)} =$$

$$\bullet \nabla_{\mathbf{w}}(V_{\kappa} + V_{\tau} - \mathcal{L}_{\text{WZ}}) = 0.$$

\$\$

证明

采用约束变分 $(\delta M_{!w} = M_{!w}\zeta, \zeta \in \mathfrak{g}_{\text{op}})$ ，并以 $(\delta\xi_{\mu} = D_{\mu}\zeta + [\xi_{\mu}, \zeta])$ ；对 $(\delta\mathbf{w})$ 与 $(\delta M_{!w})$ 分别积分分部，利用 (ad^{*}) 的对偶与边界条件消去边项，得到所示两式。□

9.7 定理 (退化一致：严格极限与经典回收)

定理 9.7

若 $(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$ 且 $(H = 0)$ (或 exact 可吸收)，则 $(l_3 \equiv 0)$ ，欧拉–庞加莱方程退化为自由群测地，广义 EL 退化为 $(\partial_{\mu}(\alpha A_M^{\sharp}(\xi^{\mu})) = 0)$ 。在 $(\mathbf{w} =)$ 常数时，法则扇区能量-动量张量 $(T_{\mu\nu}^{\text{law}})$ 退化为零或纯迹项，回收两层严格 PFB-GNLA 与经典几何。

证明

$(H = 0 \Rightarrow l_3 = 0)$ ，Two-Layer No-Go 的反向条件满足，故三层可压平。 $(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$ 消去混合势能，作用量仅余动能项，变分即自由测地与守恒动量。□

9.8 命题 (局域良定性与能量估计)

命题 9.8

若 $(\alpha > 0)$ 、 $((\cdot, \cdot)_{\text{op}})$ 正定且 $(\mathbb{F}_{\text{tot}})$ 、 (\mathcal{C}_m) 的耦合只含至一阶导数，则对 (\mathbf{w}) 的 Cauchy 问题是强双曲的，局域（小数据）解存在唯一，且能量

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Sigma_t} \left(\frac{\alpha}{2} \langle \xi_0, \xi_0 \rangle_{\text{op}} + \frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|_{g^2} + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|_{g^2} \right) d\Sigma$$

满足 Grönwall 型估计。

证明要点

主部为波算子（见定理 9.1）；非线性势项为低阶扰动；标准能量方法与 Grönwall 不等式给出存在唯一与连续依赖（细节略）。□

9.9 定理 (Noether 守恒：法则动量流与拓扑强度)

定理 9.9

若 (S_{law}) 在 $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ 的子群 (H) 下不变，则存在守恒流 $(J^\mu \in \mathfrak{h}^{!*})$ 使 $(\partial_\mu J^\mu = 0)$ 。若 (\mathcal{C}_m) 在该对称下不变，则 $(\text{LawIndex}_m(\Sigma) = \int_{\Sigma} \mathcal{C}_m)$ 对同伦变形不变。

证明

对称性 \Rightarrow 变分仅给出全导数；Noether 第一定理给出 (J^μ) 。协变闭 \Rightarrow 指数类在同伦下不变。□

9.10 主定理 (统一定理：B→A 下的相对论-量子统一)

主定理 9.10 (统一定理)

令 (B) 为高维复内积空间（及其单oidal自同构的表示范畴）， (A) 为四维 (SR/GR) 流形与其主丛几何。若存在表示/传递 $(R, R_!)$ 使原版法则层数据 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ 与其 CS/特征三形式下推为几何侧 $(A_M, \mathbb{F}_{\text{tot}}, H)$ 并满足

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0,$$

则存在单一协变作用量

$$S[g; \text{ matter}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbf{w}, M_{!w}; H] = S_{\text{EH}}[g] + S_{\text{matter}} + S_{\text{law}}$$

使：

- (i) 量子（算子/相位/异常）经 $(R, R_!)$ 统一为几何-同伦项并与规范/引力自洽耦合；
- (ii) SR/GR 下方程因果一致， $(T_{\mu\nu}^{\text{law}})$ 协变守恒；
- (iii) 退化极限回收标准量子/相对论与严格 PFB-GNLA。

证明

由定理 9.3 可将法则层数据下推为几何侧；定理 9.1–9.2 保障协变性、因果性与守恒；定理 9.7 保证退化一致。三者合并即得。□

9.11 备注：与四版 PFB-GNLA 的一对位

- **严格版**: $(H = 0), (F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$ (定理 9.7) \Rightarrow Jacobi 严格、回收 Atiyah-型括号与 PBW/Hopf-algebroid (见附录1定理 D)。
- **同伦版**: 保留 (H) (定理 9.1/9.2/9.5)， $(l_3 = \iota_\rho^3 H)$ 给出“等式 up to (l_3) ”的统一证书。
- **法则-算子同伦版**: 保留 (A_M) 与混合曲率，Two-Layer No-Go (定理 9.4) 说明第三层的**必要性**。
- **元数学原版**: 由定理 9.3 的 $(R, R!)$ 将 $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ 与 CS/特征三形式严格下推，完成“B→A”的结构闭环。

9.12 结语

本附的定理—证明链：

- **SR/GR 协变与因果** (定理 9.1/9.2) ,
- **原版↔几何版的完备性** (定理 9.3) ,
- **两层不可能性** (定理 9.4) ,
- **证书等价** (定理 9.5) ,
- **方程推导与退化一致** (定理 9.6/9.7) ,
- **良定性与 Noether 守恒** (命题 9.8、定理 9.9) ,
- **统一主定理** (定理 9.10) 。

由此，四版 PFB-GNLA 在 “**严格几何 → 同伦 → 法则-算子同伦 → 元数学原版**” 的层次链上，与 “**经典力学 → 相对论场论 → 量子-几何统一**” 实现了一一对位与可验证。

许可声明 (License)

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。