

# 四版 PFB-GNLA 的对标与对位：从严格几何到“法则-算子”同伦，再到元数学原版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.1.1

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：[作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

## 摘要

本文对齐并对位四个版本的主纤维丛版广义非交换李代数 (PFB-GNLA) 一体化构造：(1) **严格版** (Jacobi 严格成立)；(2) **同伦版** (允许三元同伦  $(l_3)$ )；(3) **可变泛函-算子同伦版** (将  $(w)$  从“参数”提升为“法则泛函算子轨迹”，引入算子方向联络  $(A_M)$ )；(4) **元数学原版** (“重定义联络”  $(\mathcal{A}_M)$  与三阶纠正  $(l_3)$ )。在统一的主丛—参数—算子三层联络图景下，给出核心数据、判据与退化，建立从“法则层”到“传统几何层”的表示对位：

$$A_M \xleftarrow{R} \mathcal{A}_M, \quad H! \left( A^{(x)}, A^{(w)}, A_M \right) \xleftarrow{R} R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right),$$

并给出同构/退化条件：

$$D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \quad F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0 \Rightarrow l_3 = 0.$$

由此说明：严格版是“无异常/无法则演化”的经典极限；同伦版以  $(H)$  统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版把“法则演化”提升为算子几何的**一等公民**；元数学原版在法则层给出生成—纠正的起点。四版因此形成从**静态等式**到**生成式法则**的层级序列，且可相互表示、检验与退化。

## 1. 统一骨架与分层联络

设主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$ ，结构群  $(G)$ ，参数域  $(\mathcal{W})$ 。在积主丛  $(\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W})$  上引入

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = d_{x, \mathbf{w}} \mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$$

并取“骨架”  $(\mathcal{A})$ -双模

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

**严格版**与**同伦版**工作在  $((M, \mathcal{W}))$ -两层; **可变泛函-算子同伦版**引入第三层 (法则—算子) :

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}), \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$$

$$\mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M]$$

并满足**混合 Bianchi**

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

---

## 2. 严格版 (Jacobi on-the-nose)

Atiyah-型括号

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_0 = [X, Y] \quad \oplus \left( \mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \right)$$

满足 Leibniz 与锚-曲率兼容

$$\rho([x, y]_0) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \quad \kappa \propto \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} F^{(xx)}$$

且严格 Jacobi

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_0]_0 = 0.$$

**定位**: 无异常、无法则演化的经典几何; PBW/包络/表示链条直接可用。

---

## 3. 同伦版 ((H)-twisted 2-term ( $L_\infty$ ))

取  $(G)$ -等变、basic 的三形式

$$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad D_{x,\mathbf{w}}H = 0, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{R} \text{ 或 } \text{ad}(P)$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

在  $(D_{x,\mathbf{w}}H = 0)$  与  $(D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0)$  下满足 Stasheff:

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0$$

当  $(H = 0)$  或  $(H = dB)$  可吸收，退化回严格版。

**定位：**把“异常/修正”统一吸纳为  $(H)$  的同伦类  $([H])$ ，解释“等式 up to  $(l_3)$ ”。

## 4. 可变泛函-算子同伦版（将 $(w)$ 提升为“法则泛函算子”）

将  $(w)$  提升为法则函子轨迹  $(M_{!w})$ ，引入  $(A_M)$  与三层曲率  $(\mathbb{F}_{\text{tot}})$ 。选择

$$H = H!(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$$

定义

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

此时  $(l_3)$  的来源不再是“外加”，而是**法则演化的算子几何**之必然产物；若

$$F^{(MM)} = 0, \quad F^{(xM)} = 0$$

则“法则演化”与几何兼容， $(H)$  可退为几何/参数二层；进一步若  $(H = 0)$  或 exact，则回收严格版。

**定位：**与元数学“重定义联络”完全对位；解释“法则随  $(w)$  的生成与纠正”。

## 5. 元数学原版（法则联络 $(\mathcal{A}_M)$ 与三阶纠正）

法则层给出

$$\mathcal{A}_M \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}), \quad \mathcal{F}_M = d_{\text{!}w} \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$$

以及三阶纠正

$$l_3^{(\text{orig})}(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

并含非交换修正  $(\Phi_{\hbar})$ :

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]_{\star} = [\cdot, \cdot]_0 + \Phi_{\hbar}(X \oplus \xi, Y \oplus \eta; \mathcal{F}_M).$$

**对位映射 (表示  $(R)$ ) :**

$$\boxed{A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) = R! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)}$$

在  $(R)$  下, 可把原版的法则层同伦项、非交换修正下推至几何—参数—算子三层。

## 6. 对标与对位 (条理化陈述)

### (i) 数据层对位:

严格版与同伦版共享  $((P, \mathcal{W}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbb{F}))$ ; 可变泛函-算子同伦版增加  $((Q; A_M; F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}))$ ; 原版给出  $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$  与  $(\Phi_{\hbar})$ 。映射  $(R)$  实现

$$\mathcal{A}_M \mapsto A_M, \quad \mathcal{F}_M \mapsto F^{(MM)}, \quad \text{并由此生成 } H.$$

### (ii) 同伦/严格判据:

$$D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

$$F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0, \quad H = 0 \text{ (或 exact)} \Rightarrow l_3 = 0 \text{ (严格极限)}.$$

### (iii) 动机:

严格版=静态等式; 同伦版= $(H)$  统一吸纳三阶“失配”; 可变泛函-算子同伦版=法则演化的“算子几何”; 原版=生成式法则的起点。

“指标定理式”理解:  $([H])$  是变形不变量 (“指数类”), holonomy 方环的“缺口”由  $(\int H)$  量化。

### (iv) 验证/工程:

严格版检  $(D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0)$  与严格 Jacobi; 同伦版再检  $(D_{x, \mathbf{w}} H = 0)$  与 Stasheff; 可变泛函-算子同伦版还检  $((F^{(MM)}, F^{(xM)}))$ ; 原版可通过  $(R)$  下推到几何侧进行证据化 (例如  $(H)$  证书、Jacobiator 证书)。

## 7. 代表性公式集（便于引用）

1. 扩展 Bianchi:  $(D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0)$ , 同伦版外再有  $(D_{x,\mathbf{w},M}H = 0)$ 。
2. 扭曲括号:  $([x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y))$ 。
3. 三元同伦:  $(l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H)$ 。
4. Stasheff:  $(\sum_{\text{cyc}}[x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z))$ 。
5. 算子 Maurer–Cartan:  $(F^{(MM)} = d_{!w}A_M + A_M \wedge A_M)$ 。
6. 表示对位:  $(A_M = R(\mathcal{A}_M)), (H = R(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)))$ 。

## 8. 结论

四版构造在同一“主丛—参数—算子”联络-曲率语义下**严格对位**：严格版提供“清爽等式”、同伦版提供“受控失配”的统一编码，可变泛函-算子同伦版将**法则演化**升格为算子几何，元数学原版在法则层给出生成与三阶纠正的“第一性”表达。通过表示  $(R)$  与协变闭/退化判据，可在四版之间往返：**原版**  $\rightarrow$  (**算子表示**)  $\rightarrow$  **同伦版**  $\rightarrow$  **严格极限**。这种分层与对位，使得“解释为何”“落实如何算”“验证如何检”三者在同一框架内闭环。

## 附件1：定理化与证明骨架（Stasheff 闭合、表示下推与 Hopf-algebroid）

把四版正文中的“命题/判据/要点”提升为可复核的**定理—引理—证明提纲**。包含：两层与三层情形下的  $L_\infty$  闭合定理（A、B）、法则层 $\rightarrow$ 几何层的表示下推完备性（C），以及包络与 Hopf-algebroid 的存在判据（D）。

### 统一设定

令  $\pi: P \rightarrow M$  为主  $G$ -丛，参数域  $\mathcal{W}$  光滑，积主丛  $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 。

总联络与曲率三分解：

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$$

骨架双模与锚：

$$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

若引入法则-算子层，则再加：

$$A_M := M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

## 定理 A (两层 $H$ -twist 的 2-term $L_\infty$ 闭合)

假设:

(H1)  $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$  为 basic、 $G$ -等变且协变闭:  $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ 。

(H2)  $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 。

定义扭曲括号与三元同伦:

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

其中  $([x, y]_0)$  为 Atiyah-型括号,  $\Theta_H$  为由  $H$  诱导的双线性修正 (中心或伴随型)。

结论: 形成 2-term  $L_\infty$  代数

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3 \neq 0, \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并且

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z).$$

证明提纲: 逐项展开  $([\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H)$ 。

(i)  $([\cdot, \cdot]_0)$  的 Jacobi 由  $D_x F^{(xx)} = 0$  消去;

(ii) 混合项在  $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$  与  $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$  下配平;

(iii) 残项汇聚为  $\iota_\rho^3 H$ 。□

## 定理 B (三层含 $A_M$ 的同伦闭合)

假设:

(B1) 三层曲率满足混合 Bianchi:  $D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 。

(B2)  $H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$  basic、等变且协变闭:  $D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$ 。

结论: 同上式定义的  $(l_1, l_2, l_3)$  满足

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

并在  $F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0$  (以及  $H = 0$  或 exact 可吸收) 时退化为严格 Jacobi。

证明提纲: 与定理 A 同, 但需额外使用  $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$  的混合 Bianchi 项来抵消  $A_M$  诱导的交叉项。□

## 定理 C (表示下推的 soundness/completeness up to homotopy)

设定: 存在表示  $R: \text{Aut}_\otimes(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$  及 Chern–Simons/传递型函子  $R_!$ 。

(C1) Soundness: 给定法则层  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$ , 取

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R_!(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M))$$

则  $D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$ , 定理 B 成立。

**(C2) Completeness (up to homotopy)** : 若几何侧  $(A_M, H)$  满足定理 B 且  $[H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ , 则存在  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$  与  $(R, R_!)$  使上式成立, 且给定  $H$  与  $R_!(\cdot)$  表示的同伦类相同。

**证明提纲**: Soundness 由自然性与  $R_!$  保协变闭性给出; Completeness 以类比 Chern–Weil/家族 CS 传递与同调提升, 构造  $\mathcal{A}_M$  使  $A_M$  为其像, 并匹配  $[H]$ 。□

## 定理 D ( $U_\star(L)$ 为 Hopf-algebroid 的充分条件)

假设:

(D1)  $(\mathcal{A}, \star)$  为非交换么代数,  $L$  为  $\mathcal{A}$ -双模, 满足 (P1)–(P4), 并配有增广锚  $\rho$ 。

(D2) **PBW-型条件**:  $U_\star(L)$  的递增过滤  $\{F^n\}$  使  $\text{gr } U_\star(L) \simeq \text{Sym}_{\mathcal{A}}(L)$  ( $\mathcal{A}$ -代数同构)。

(D3) 扩展 Bianchi 与锚-曲率兼容成立 (四版正文条件)。

**结论**: 存在余代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0$$

与 Takeuchi 乘积约束, 使  $U_\star(L)$  成为 (左/右) Hopf-algebroid; 当  $H = 0$  且  $\hbar \rightarrow 0$  时退化为经典情形。

**证明提纲**: 以 (D2) 控制重排与余代数一致性; (D3) 保证余乘与锚兼容; 验证基扩张后 Takeuchi 子空间封闭性。□

## 附件2：集中定义区（术语与对象的精确定义）

把四版分散出现的核心对象集中定义, 统一语义与约束。

### 1. 范畴与自同构

- $\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$ : 严格单oidal范畴 (单位与结合子恒等), 对象分别为“法则前库/后库”经  $\Phi_{\mathbf{w}}$  筛选的算子包;  $\otimes$  为并行复合。
- $\text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)$ : 保持  $\otimes$  与单位的单oidal自同构群 (或 2-群)。本文在可表象时视作常规 Lie 群 (或 Fréchet-Lie 群) 处理。

### 2. 表示与传递

- 表示**  $R: \text{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}} \subset \text{GL}(V)$  的群同态。
- 传递**  $R_!$ : 把 3-形式型特征 (如 CS) 从法则层下推到几何层的函子 (保协变闭性与同伦类)。

### 3. basic 与等变

- basic**: 在  $P$  上为水平且  $G$ -不变的形式; 等价于  $\Omega^\bullet(M, \text{ad}(P))$  的自然下沉。

- $G$ -等变：对伴随作用不变；记作 Ad-不变。

## 4. 星乘与形变项

- $(\mathcal{A}, \star)$ : Moyal/Kontsevich/形式形变类； $\star = \cdot + \hbar B_1 + \hbar^2 B_2 + \dots$ 。
- $\Phi_\hbar$ : 括号的非交换修正，一般形如

$$\Phi_\hbar = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}) + \hbar^2 \Pi_2(\mathbb{F}, \nabla) + \dots$$

并保持 (P1)–(P4) 至相应阶。

## 5. 价值/语义函数族

- $J: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$  (逻辑性度量, 次可加、弱单调),  $\text{Loc}: \mathcal{P} \rightarrow \text{语义域}$ 。
- 阈值族  $\Sigma(\mathbf{w})$ : 由  $(J, \text{Loc})$  给定的 basic 子流形/超曲面族, 用于“连续 $\rightarrow$ 离散”的跃迁判据。

# 附件3：代表性算例与复现实验接口

给出可复算的三类例子与统一的“验证脚本 I/O 规范”。

## 1. $U(1)$ 最小例（两层）

设  $G = U(1)$ 、 $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ 。取

$$F^{(xx)} = d_x A^{(x)}, \quad A^{(w)} \text{ basic}, \quad H = \lambda F^{(xx)} \wedge A^{(w)}.$$

若  $D_x F^{(xx)} = 0$  且  $F^{(ww)} = 0$ , 则  $D_{x,w} H = 0$ 。于是

$$l_3(x, y, z) = \lambda \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} (F^{(xx)} \wedge A^{(w)}).$$

当  $A^{(w)} = 0$  或  $\lambda = 0$  时退化为严格版。

## 2. $SU(2)$ 非阿贝尔算例（两层）

在  $S^3 \simeq SU(2)$  上取平凡丛与 Maurer–Cartan 形式  $\vartheta$ , 令

$$A^{(x)} = \mu \vartheta, \quad F^{(xx)} = \mu^2 \vartheta \wedge \vartheta, \quad A^{(w)} = \nu(\mathbf{w}) \vartheta.$$

取



$$H = \kappa \langle F^{(xx)} \wedge A^{(w)} \rangle_{\text{Ad}},$$

则在  $d\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ 、 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$  下有  $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ ，并得到非零 Jacobiator。检验：计算  $\int_{S^3 \times \gamma_{\mathbf{w}}} H$  与三元同伦的一致性。

### 3. 非交换星乘算例（Moyal 平面）

取  $\mathcal{A} = C_c^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$  上的 Moyal 星乘；令

$$\Phi_{\hbar}^{(1)}(x, y) = \hbar \Pi_1(\mathbb{F}; x, y), \quad \Pi_1 \text{ 线性于 } \mathbb{F}.$$

在  $\hbar$  一阶，验证

- (i) Leibniz (P1) 与锚兼容 (P2) 保持；
- (ii)  $l_3$  仍由  $H$  给出，且  $\hbar \rightarrow 0$  时回收两层严格版。

### 4. 验证脚本 I/O 规范（面向工程复现）

- 输入 JSON（示意）

```
{
  "bundle": {"G": "U(1)|SU(2)", "base": "chart or mesh"},
  "forms": {
    "Ax": "...", "Aw": "...", "AM": "... (可空)",
    "H": "...",
    "pairing": "Ad-invariant form (可选)"
  },
  "ops": ["functional_flatness", "mixed_flatness", "stokes_l3", "degeneration_test"]
}
```

- 输出

数值证书（曲率范数、Bianchi 偏差、 $\sum_{\text{cyc}}$  与  $l_3$  的差、方环积分  $\int_{\square} H$  等），附通过/失败标志与最大偏差。

## 附件4：相关工作与对照图谱（提纲式）

把四版与经典对象的关系明确化，便于编制参考文献。

- **Atiyah-algebroid 与参数化联络**：四版的  $([\cdot, \cdot]_0)$  与  $\rho$  出自 Atiyah-型结构；参数化联络把  $d_x$  扩展到  $d_{x,\mathbf{w}}$ 。
- **Courant 与  $H$ -twist**：同伦版是 Courant  $H$ -扭曲在“主丛/参数化”的推广；当  $L = TM \oplus T^*M$  且  $H \in \Omega^3(M)$  闭时回收经典情形。
- **2-term  $L_\infty$** ： $l_3 = \iota_\rho^3 H$  的构造与 Stasheff 身份的验证与标准 Lie-2/代数丛框架一致。
- **Chern–Simons 与传递**： $H$  的来源可由  $\text{CS}_3$  与  $\text{Tr}(F \wedge F)$  的 basic 投影获得，保障协变闭性。

- **无限维 Lie 群**: 法则-算子群  $\mathcal{G}_{\text{op}}$  的 tame Fréchet/Hilbert-Lie 背景与 Ebin–Marsden、Hamilton、Kriegl–Michor、Neeb 的框架对齐。
- **Hopf-algebroid 与 PBW**:  $U_*(L)$  的过滤与 PBW-型判据, 参照双 (半) 代数与 Takeuchi 乘积的标准条件。

注：正式稿请据此清单增补规范参考文献条目。

## 附件5：统一符号与约定表

符号	含义	说明
$P \rightarrow M$	主 $G$ -丛	结构群 $G$ , 李代数 $\mathfrak{g}$
$\mathcal{W}$	参数流形	点 $\mathbf{w}$
$\mathbb{A}$	总联络 $(A^{(x)} + A^{(w)})$	两层情形
$\mathbb{F}$	曲率 $(F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)})$	$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$
$A_M$	法则-算子联络	$A_M = M_{!w}^{-1}d_{!w}M_{!w}$
$\mathbb{A}_{\text{tot}}$	三层总联络	$A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$
$\mathbb{F}_{\text{tot}}$	三层曲率族	含 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$
$D_{x,\mathbf{w}}, D_{x,\mathbf{w},M}$	协变外微分	对应两层/三层
$L$	$\mathcal{A}$ -双模	$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P))$
$\rho$	锚	$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$
$[\cdot, \cdot]_0$	Atiyah-型括号	见正文与附件1
$[\cdot, \cdot]_H$	扭曲括号	$[\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H$
$l_3$	三元同伦	$\iota_\rho^3 H$
$\text{Ad/ad}$	伴随/微伴随	右作用约定
basic	基本性	水平且 $G$ -不变
$\star$	星乘	形式形变 $\hbar$ -级展开
$\Phi_\hbar$	非交换修正	对括号的 $\hbar$ 级增量
$R, R_!$	表示/传递	法则层 $\rightarrow$ 几何层

# 附件6：GRL 模型层与数学主体的接口（“假设—命题—解释”格式）

把 GRL 路径积分与微分动力作为**建模假设**而非证明要件，给出其与几何量的接口。

## 假设 G1（生成机制）

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t), \mathbf{w}(t)), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = U(\mathbf{w}(t); J, \text{Loc}),$$

并用

$$\pi^* = \arg \max_{\pi \in \Pi_{\text{meaningful}}(\mathbf{w})} \mathbb{E} \left[ \exp \int \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w}) dt \right]$$

选取“有意义”算子路径。

## 命题 G2（证书化接口）

设切面  $s : M \rightarrow P$  与阈值族  $\Sigma(\mathbf{w})$ 。若

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\gamma, \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \quad \text{横截穿越} \quad \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

则在切面上出现离散跃迁；其证书为  $\int H$  与混合曲率的方环积分。

**解释：**  $[H]$  与混合曲率为“等式 up to  $l_3$ ”的可验证量；不参与主体定理的严格性，只作为生成功能的外部接口。

# 附件7：审稿可复核的“证书化验证”清单

把工程化检查项固化为**可打勾**的证书表。

### • K1: functional\_flatness

计算  $F^{(MM)} = d_{lw} A_M + A_M \wedge A_M$  的范数与最大特征值；目标：到设定阶为 0（或报告非零并量化）。

### • K2: mixed\_flatness

计算  $F^{(xM)}, F^{(wM)}$ ；目标：核对混合 Bianchi 的残差  $|D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}}|$ 。

### • K3: Bianchi-family

两层/三层分别验证  $D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$ 、 $D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$  的数值残差。

### • K4: Stasheff-gap

评估

$$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

并在给定基上取 supremum。目标： $|\Delta_{\text{Jac}}|$  在容差内。

- **K5: Holonomy-H 证书**

计算方环  $\square$  上  $\exp \int_{\square} H$  与  $\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square)$  的偏差; 目标: 与 Stasheff-gap 一致。

- **K6: 退化测试**

## 附件8：法则扭曲谱与法则动力的度量

本附件在“四版 PFB-GNLA”的框架内整理“法则扭曲”与其动力学度量的表述。核心包括：

1. 以一族  $L_{\infty}$  运算  $l_n$  定义**法则扭曲谱** (twist spectrum) ;
2. 给出“法则变换速度-曲率-同伦强度”的**三联度量**与可投向作用量的统一指标;
3. 以**变分原理/路径积分**形成“法则-几何-控制 (GRL)”的闭环;
4. 明确与黎曼/广义相对论的**结构对位**与边界;
5. 不变量与分类指标。

### 适用范围与记号

- 主丛  $\pi: P \rightarrow M$ , 参数域  $\mathcal{W}$ , 积主丛  $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 。
- 两层总联络与曲率三分解:

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \quad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0.$$

- 若含“法则-算子”层, 则再引入

$$A_M := M_{lw}^{-1} d_{lw} M_{lw}, \quad \mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

- 骨架双模与锚:  $L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$ 。

### 1. 法则扭曲谱 (twist spectrum) $\{l_n\}$

最小 2-term  $L_{\infty}$  (已实现) :

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3 = \iota_{\rho(\cdot)}^3 H, \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

其中  $([\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0 + \Theta_H)$ ,  $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$  为 basic、 $G$ -等变且协变闭。

**高阶 (建议性扩展)** : 引入协变闭的特征形式族

$$\mathcal{C}_m \in \Omega^m(M \times \mathcal{W}, [\times \mathcal{G}_{\text{op}}, \mathfrak{a}]), \quad D\mathcal{C}_m = 0,$$

并定义

$$l_m(x_1, \dots, x_m) := \iota_{\rho(x_1)} \cdots \iota_{\rho(x_m)} \mathcal{C}_m \quad (m \geq 3).$$

当  $m = 3$  时  $C_3 = H$  回收  $l_3$ 。据此定义**谱维度**

$$\delta_{\text{Law}} := \max\{m \mid l_m \neq 0\}.$$

含义： $\delta_{\text{Law}} = 0$  表示“平坦法则”； $\delta_{\text{Law}} = 3$  为已实现的最小非平坦层级； $\delta_{\text{Law}} > 3$  表明存在更高阶同伦耦合（范畴/算子层现象）。

注：定理化的 Stasheff 身份与闭合条件见附件1（定理A、B）。

## 2. “速度—曲率—同伦”三联度量

将“演化速率、不可积性、同伦缺口”分离刻度，并可汇总成单一指标。

### (a) 速度（一级）

$$v_{\text{Law}}^2(t) := |A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))|_{g_{\text{op}}}^2,$$

其中  $g_{\text{op}}$  为  $\mathfrak{g}_{\text{op}}$  上的选定内积，用于刻度“法则平行运输速率”（可作为 GRL 的即时正则/惩罚项）。

### (b) 曲率（二维）

$$\kappa_{\text{Law}}^2 := |F^{(MM)}|^2 + |F^{(xM)}|^2 + |F^{(wM)}|^2.$$

度量“非可积/环路缺口”的强度，属坐标无关的内蕴量。

### (c) 同伦强度（ $\geq$ 三维）

$$\tau_{\text{Law}}^2 := |l_3|^2 + |l_4|^2 + \cdots,$$

以  $C_m$  的度量固定每个  $l_m$  的范数。

**统一指标（可投向 Lagrangian）：**

$$\mathcal{I}_{\text{Law}} := \alpha v_{\text{Law}}^2 + \beta \kappa_{\text{Law}}^2 + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |l_m|^2,$$

权重  $\alpha, \beta, \lambda_m$  由任务/约束指定，可视作“逻辑性度量  $J$ ”的参数化落点。

## 3. 作用量与变分原则（“法则-爱因斯坦”形式）

几何侧作用量

$$S_{\text{geom}}[M_{lw}] = \int_{M \times \mathcal{W}} \left( \beta \langle \mathbb{F}_{\text{tot}}, * \mathbb{F}_{\text{tot}} \rangle + \sum_{m \geq 3} \lambda_m \langle \mathcal{C}_m, * \mathcal{C}_m \rangle \right).$$

## 控制/约束 (GRL) 侧

$$S_{\text{ctrl}}[\mathbf{w}, \pi] = \int \left( \alpha |A_M(\dot{\mathbf{w}})|^2 - \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w}) \right) dt.$$

## 总路径积分与变分

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}M_{lw} \mathcal{D}\mathbf{w} \mathcal{D}\pi \exp \left( - S_{\text{geom}} - S_{\text{ctrl}} \right).$$

对  $M_{lw}$  的变分产生“法则-爱因斯坦”型方程（含 Bianchi 约束与高阶源项）；对  $\mathbf{w}, \pi$  的变分给出 GRL 的最优性条件。三者形成“几何-同伦-控制”的闭环。

注：上述为**建议性建模**；方程的存在唯一性与规范不变性依赖附件1中的闭合条件。

## 4. 与黎曼/广义相对论的结构对位（边界与异同）

- 同构之处（层级映射）**
  - 联络/曲率/Bianchi/holonomy 的**结构骨架**被搬到“法则层”；
  - $H$  与  $l_3$  提供**同伦级**的“异常/缺口”刻度，类比曲率产生角缺。
- 边界与差异**
  - 研究对象自“几何/力”提升为“**法则/合成律**”，允许态射与对象类型变更（范畴层级）；
  - 非仅“参数变常数”，而是“把法则当联络”，其不可约性由  $\kappa_{\text{Law}}$  与  $[\cdot, \mathcal{C}_m, \cdot]$  证书化。
- 退化一致性**
  - 当  $\kappa_{\text{Law}} = \tau_{\text{Law}} = 0$  时，可规约为“两层世界”的传统情形；该退化在四版中已明确。

## 5. 不变量与分类指标

- 扭曲谱维度**:  $\delta_{\text{Law}} = \max\{m \mid l_m \neq 0\}$ 。
- 法则 Chern-类 (示意)**：对闭子流形  $\Sigma \subset M \times \mathcal{W}$ ,

$$\text{LawIndex}_m(\Sigma) := \int_{\Sigma} \mathcal{C}_m.$$

$\text{LawIndex}_m \neq 0$  证成“法则可变”的内蕴性。

- Jacobiator-gap 证书**:

$$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

其数值上界与  $\int_{\square} H$  的方环偏差一致，可作为“闭合残差”的量化。

- **统一强度**:  $\mathcal{I}_{\text{Law}}$  作为性能/稳健性权衡指标。

## 附录9 相对论-量子统一与 SR/GR 协变性的定理化证明

B→A 演化下的四版 PFB-GNLA 对位

### 统一设定与记号

- **几何与法则三层**: 主丛  $(\pi : P \rightarrow M)$ , 结构群  $(G)$ , 底流形  $(M)$  (SR:  $(\eta_{\mu\nu})$ ; GR:  $((M, g_{\mu\nu}))$  洛伦兹签名)。参数域  $(\mathcal{W})$  为可微流形。
- **法则-算子群**:  $(\mathcal{G}_{\text{op}})$  为 tame Fréchet/Hilbert-Lie 群, Lie 代数  $(\mathfrak{g}_{\text{op}})$ 。法则轨迹  $(M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$  光滑。
- **三层总联络与曲率** (见正文与前附录) :

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} := A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} := F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)},$$

其中  $(A_M := M_{lw}^{-1} d_{lw} M_{lw})$ ; 混合 Bianchi:

$$D_{x,\mathbf{w},M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

- **同伦源与三元项**: 取 basic、 $(G)$ -等变且协变闭三形式

$$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x,\mathbf{w},M} H = 0,$$

并以  $(l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H)$  扭曲二元括号得到 2-term  $(L_\infty)$  (见附录1的定理 A/B)。

- **法则“速度”**: 场化后  $(\mathbf{w} = \mathbf{w}(x))$ , 定义

$$\xi_\mu := A_M(\partial_\mu \mathbf{w}(x)) \in \mathfrak{g}_{\text{op}}.$$

- **协变作用量 (法则扇区)**: 给定常数  $(\alpha, \beta > 0)$  与权重  $(\lambda_{m \geq 3} \geq 0)$ , 定义 (SR/GR 统一写法)

$$S_{\text{law}}[\mathbf{w}, M_{lw};, \mathbb{A}_{\text{tot}}, H, g] = \int_M \sqrt{-g} \left( \frac{\alpha}{2} g^{\mu\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle_{\text{op}} - \frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|_{g^2} - \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|_{g^2} \right) d^4x + S_{\text{WZ/top}}[H],$$

其中  $(\mathcal{C}_m)$  为协变闭特征形式族  $((m = 3)$  回到  $(H))$ ,  $(S_{\text{WZ/top}})$  为 4D  $\theta$ -项或 5D WZ 延拓的边界化; SR 情形取  $(\sqrt{-g} = 1, g = \eta)$ 。

**说明**: 上述对象与符号与“严格版/同伦版/法则-算子同伦版/原版”在正文与前八个附录中的定义完全一致, 此处不再重复基本性质。

## 9.1 定理 (SR-Soundness: 庞加莱协变与因果性)

### 定理 9.1 (SR-Soundness)

在 Minkowski 背景  $(\mathbb{R}^{1,3}, \eta)$  上, 若三层数据满足

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0,$$

则  $(S_{\text{law}})$  是庞加莱协变的洛伦兹标量功能; 对  $(\mathbf{w}, M_{lw})$  的变分生成的欧拉-庞加莱/广义 EL 方程**因果且一致**。其主导偏微分算子为  $(\alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu)$  型 (双曲), 保证局域初值问题良定 (小数据下)。

#### 证明

- 协变性:** 每个被积量由  $(\eta)$  升降指标并以  $(\text{Tr})$  或  $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{op}})$  与 Hodge 星构成 4-标量; WZ/ $\theta$ -项是 4-形式或 5-维延拓的边界项, 庞加莱变换仅引入全导数, 积分不变。
- 规范/法则-算子自然性:**  $(\delta \mathbb{A}_{\text{tot}} = D\epsilon)$  与  $(\delta A_M = D_{lw} v)$  ( $(v \in \mathfrak{g}_{\text{op}})$ );  $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$  与  $(DH = 0)$  保证  $(\delta S_{\text{law}} = 0)$  (除去边界), 故作用量在两类对称下自然。

#### 3. 场方程:

- 对  $(\delta \mathbf{w})$  变分, 记  $(\xi_\mu = A_M(\partial_\mu \mathbf{w}))$ , 有

$$\partial_\mu \left( \alpha A_M^\#(\xi^\mu) \right) + \nabla_{\mathbf{w}} \left( \frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|^2_{\eta^2} + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|^2_{\eta^2} \right) - \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{L}_{\text{WZ/top}} = 0.$$

- 对  $(\delta M_{lw})$  的约束变分给出欧拉-庞加莱方程

$$\partial_\mu \mu^\mu + \text{ad}_{\xi_\mu}^* \mu^\mu = -(\delta_\xi V_\kappa) - (\delta_\xi V_\tau) + (\theta/\text{WZ 流}), \quad \mu^\mu := \alpha \xi^{\mu b} \in \mathfrak{g}_{\text{op}}^*.$$

- 因果性与双曲性:** 主部  $(\alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu)$  作用于  $(\mathbf{w})$  分量 (经  $(A_M)$  的非线性拉回), 且  $(\alpha > 0)$  与  $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{op}})$  正定, 故主符号与 d'Alembert 算子同型, 方程双曲; 非线性项由势梯度与低阶耦合构成, 不破坏因果锥结构。□

## 9.2 定理 (GR-Soundness: 应力-能量与协变守恒)

### 定理 9.2 (GR-Soundness)

在  $(M, g)$  上, 以  $(\sqrt{-g})$  密度协变化的  $(S_{\text{law}})$  对  $(g_{\mu\nu})$  的变分给出对称张量

$$T_{\mu\nu}^{\text{law}} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{law}}}{\delta g^{\mu\nu}},$$

并满足协变守恒

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{law}} = 0.$$

将  $(S_{\text{EH}}[g])$  加入总作用量, 得爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{\text{matter}} + T_{\mu\nu}^{\text{law}}),$$



与几何 Bianchi 恒等式 ( $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ) 一致。

### 证明

1. 由度量与规范协变性（微分同胚不变与纤维规范不变）与 Noether 第二维，则 ( $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{law}} = 0$ ) 等价于整体作用在微分同胚下的不变性。
2. ( $S_{\text{WZ/top}}$ ) 的度量依赖仅经体元或为边界项，其变分或为零或给出纯迹项，均不破坏守恒。
3. 将 ( $S_{\text{EH}}$ ) 合并，变分得 ( $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{tot}}$ )；由几何 Bianchi 恒等式，必有 ( $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{tot}} = 0$ )，而物质与法则两扇区各自协变守恒互相补偿。□

## 9.3 定理 (Completeness up to Homotopy: 原版↔几何版)

### 定理 9.3 (表示/传递完备性, 按同伦)

设  $(A_M, \mathbb{F}_{\text{tot}}, H)$  满足混合 Bianchi 与  $(DH = 0)$ , 且  $([H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$ 。则存在法则层连接  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$  与表示/传递  $(R, R_!)$ , 使

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H \sim R_! \left( \text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M) \right)$$

在同伦类上相等 (差一个 exact 项)。

### 证明 (Chern–Weil/CS 传递思路)

$(\text{Aut} \otimes (\mathbf{L}))$  的表示  $(R : \text{Aut} \otimes (\mathbf{L}) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$  引出 Lie 代数同态与不变配对；对任意  $(\mathcal{A}_M)$  构造 CS 传递  $(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M))$  与 Pontryagin 类  $(\text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M))$  的 basic 投影，得协变闭三形式的同伦类。给定几何侧  $(H)$  的 basic 同调类  $([H])$ ，可选择  $(\mathcal{A}_M, R_!)$  使其像在同调上等于  $([H])$  (Chern–Weil 同调满射性在该设置下成立)。由表示  $(R)$  的满性 (在所需子群/子代数) 可令  $(R(\mathcal{A}_M) = A_M)$ 。□

## 9.4 定理 (两层 No-Go: 非零混合曲率不可被两层吸收)

### 定理 9.4 (Two-Layer No-Go)

若  $(F^{(xM)} \neq 0)$  或  $(F^{(MM)} \neq 0)$ ，则**不存在**仅依赖两层  $(A^{(x)}, A^{(w)})$  的模型在保持 Jacobi 严格成立的同时等价表达该族演化；必须引入第三层  $(A_M)$  及一个 basic 协变闭三形式  $(H)$  以  $(l_3)$  吸收方环缺口。

### 证明

取  $(M \times \mathcal{W})$  上一小矩形  $(\square)$  跨越  $(x, !w)$  混合方向。三层 holonomy 的 Baker–Campbell–Hausdorff 展开给出

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \left( \int_{\square} F^{(xM)} + \frac{1}{2} \int_{\square} F^{(MM)} + \dots \right) \neq 1.$$

两层世界中相应 holonomy 仅由  $(F^{(xx)})$  与  $(x, w)$  分量决定，无法产生上述混合项，除非允许“等式 up to  $(l_3)$ ”的扭曲。由附录1的定理 A/B，令  $(l_3 = \iota_\rho^3 H)$  且  $(DH = 0)$  即可吸收该缺口；反之缺口不可消，Jacobi 严格性破坏。□

9.5 定理 (Jacobiator-gap 证书 ≡ Holonomy-(H) 证书)

定理 9.5

令  $(\Delta_{\text{Jac}}(x,y,z) := \sum_{\text{cyc}}([x,[y,z]_H]_H - l_3(x,y,z)))$ 。则在  $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$ 、 $(DH = 0)$  下, 有

$$|\Delta_{\text{Jac}}| \lesssim \sup_{\square} \left| \log \text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) - \int_{\square} H \right|$$

(在指定范数与基上等价) , 且两端同阶消失。

证明

Stasheff 身份将 Jacobiator 归约为  $(H)$  的内收项; 另一方面, 小方环  $(\square)$  上的 holonomy 按非交换 Stokes 与 BCH 展开, 主项即为曲率/三形式在  $(\square)$  上的积分。由于  $(D\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0)$  与  $(DH = 0)$ , 高阶残差受控于面积与曲率范数。故两证书彼此上界且同阶趋零。□

9.6 定理 (Euler–Poincaré 与广义 EL：完整推导)

定理 9.6

对  $(S_{\text{law}})$  在固定边界条件下的变分, 得到

$$\partial_{\mu}\mu^{\mu} + \text{ad}^*_{\xi_{\mu}}\mu^{\mu} = -\delta_{\xi}V_{\kappa} - \delta_{\xi}V_{\tau} + (\theta/\text{WZ 流}),$$

\$\$

$$\partial_{\mu}\mu^{\mu} + \text{ad}^*_{\xi_{\mu}}\mu^{\mu} = -\delta_{\xi}V_{\kappa} - \delta_{\xi}V_{\tau} + (\theta/\text{WZ 流})$$

- $\nabla_{\mathbf{w}}(V_{\kappa}+V_{\tau}-\mathcal{L}_{\text{WZ/top}})=0$  .
- \$\$

证明

采用约束变分  $(\delta M_{lw} = M_{lw}\zeta, \zeta \in \mathfrak{g}_{\text{op}})$ , 并以  $(\delta \xi_{\mu} = D_{\mu}\zeta + [\xi_{\mu}, \zeta])$ ; 对  $(\delta \mathbf{w})$  与  $(\delta M_{lw})$  分别积分分部, 利用  $(\text{ad}^*)$  的对偶与边界条件消去边项, 得到所示两式。□

9.7 定理 (退化一致：严格极限与经典回收)

定理 9.7

若  $(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$  且  $(H = 0)$  (或 exact 可吸收) , 则  $(l_3 \equiv 0)$ , 欧拉–庞加莱方程退化为自由群测地, 广义 EL 退化为  $(\partial_{\mu}(\alpha A_M^{\sharp}(\xi^{\mu})) = 0)$ 。在  $(\mathbf{w} =)$  常数时, 法则扇区能量-动量张量  $(T^{\text{law}}_{\mu\nu})$  退化为零或纯迹项, 回收两层严格 PFB-GNLA 与经典几何。

证明

$(H = 0 \Rightarrow l_3 = 0)$ , Two-Layer No-Go 的反向条件满足, 故三层可压平。  $(F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0)$  消去混合势能, 作用量仅余动能项, 变分即自由测地与守恒动量。□

## 9.8 命题（局域良定性与能量估计）

### 命题 9.8

若  $(\alpha > 0)$ 、 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{op}})$  正定且  $(\mathbb{F}_{\text{tot}})$ 、 $(\mathcal{C}_m)$  的耦合只含至一阶导数，则对  $(\mathbf{w})$  的 Cauchy 问题是强双曲的，局域（小数据）解存在唯一，且能量

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Sigma_t} \left( \frac{\alpha}{2} \langle \xi_0, \xi_0 \rangle_{\text{op}} + \frac{\beta}{4} |\mathbb{F}_{\text{tot}}|_{g^2} + \sum_{m \geq 3} \lambda_m |\mathcal{C}_m|_{g^2} \right) d\Sigma$$

满足 Grönwall 型估计。

### 证明要点

主部为波算子（见定理 9.1）；非线性势项为低阶扰动；标准能量方法与 Grönwall 不等式给出存在唯一与连续依赖（细节略）。□

## 9.9 定理（Noether 守恒：法则动量流与拓扑强度）

### 定理 9.9

若  $(S_{\text{law}})$  在  $(\mathcal{G}_{\text{op}})$  的子群  $(H)$  下不变，则存在守恒流  $(J^\mu \in \mathfrak{h}^{!*})$  使  $(\partial_\mu J^\mu = 0)$ 。若  $(\mathcal{C}_m)$  在该对称下不变，则  $(\text{LawIndex}_m(\Sigma) = \int_\Sigma \mathcal{C}_m)$  对同伦变形不变。

### 证明

对称性  $\Rightarrow$  变分仅给出全导数；Noether 第一定理给出  $(J^\mu)$ 。协变闭  $\Rightarrow$  指数类在同伦下不变。□

## 9.10 主定理（统一定理：B→A 下的相对论-量子统一）

### 主定理 9.10（统一定理）

令  $(B)$  为高维复内积空间（及其单oidal自同构的表示范畴）， $(A)$  为四维（SR/GR）流形与其主丛几何。若存在表示/传递  $(R, R_!)$  使原版法则层数据  $(\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M)$  与其 CS/特征三形式下推为几何侧  $(A_M, \mathbb{F}_{\text{tot}}, H)$  并满足

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0,$$

则存在单一协变作用量

$$S[g; \text{matter}; A^{(x)}, A^{(w)}; \mathbf{w}, M_{!w}; H] = S_{\text{EH}}[g] + S_{\text{matter}} + S_{\text{law}}$$

使：

- (i) 量子（算子/相位/异常）经  $(R, R_!)$  统一为几何-同伦项并与规范/引力自洽耦合；
- (ii) SR/GR 下方方程因果一致， $(T_{\mu\nu}^{\text{law}})$  协变守恒；
- (iii) 退化极限回收标准量子/相对论与严格 PFB-GNLA。

证明

由定理 9.3 可将法则层数据下推为几何侧；定理 9.1–9.2 保障协变性、因果性与守恒；定理 9.7 保证退化一致。三者合并即得。□

9.11 备注：与四版 PFB-GNLA 的一一对位

- **严格版**：( $H = 0$ )、( $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$ ) (定理 9.7)  $\Rightarrow$  Jacobi 严格、回收 Atiyah-型括号与 PBW/Hopf-algebroid (见附录1定理 D)。
- **同伦版**：保留 ( $H$ ) (定理 9.1/9.2/9.5) , ( $l_3 = \iota_\rho^3 H$ ) 给出“等式 up to ( $l_3$ )”的统一证书。
- **法则-算子同伦版**：保留 ( $A_M$ ) 与混合曲率, Two-Layer No-Go (定理 9.4) 说明第三层的**必要性**。
- **元数学原版**：由定理 9.3 的 ( $R, R_!$ ) 将 ( $\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M$ ) 与 CS/特征三形式严格下推, 完成“B $\rightarrow$ A”的结构闭环。

9.12 结语

本附的定理—证明链：

- **SR/GR 协变与因果** (定理 9.1/9.2) ,
- **原版 $\leftrightarrow$ 几何版的完备性** (定理 9.3) ,
- **两层不可能性** (定理 9.4) ,
- **证书等价** (定理 9.5) ,
- **方程推导与退化一致** (定理 9.6/9.7) ,
- **良定性与 Noether 守恒** (命题 9.8、定理 9.9) ,
- **统一主定理** (定理 9.10) 。

由此，四版 PFB-GNLA 在 “**严格几何  $\rightarrow$  同伦  $\rightarrow$  法则-算子同伦  $\rightarrow$  元数学原版**” 的层次链上，与 “**经典力学  $\rightarrow$  相对论场论  $\rightarrow$  量子-几何统一**” 实现了**一一对位与可验证**。

许可声明 (License)

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。