

## # 词法KAT作用么半群的幂子么半群谱系（规范与工程用法）

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-09-26
- 版本：v1.0.0

## 摘要

介绍 Kleene Algebra with Tests (KAT) 与相关闭包/半环结构在本项目中的角色：用以建模可验证控制流、停机点与合规模式。提供从数学结构到工程接口的映射规范，支撑规则检查、代价累积与策略约束的统一表达。

下面按“自由么半群  $M = (\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$  的端算子么半群  $\mathbb{M}_{\text{Lex-KAT}} = (\text{End}(\Sigma^*), \circ, \text{id})$ ”给出**词法KAT作用么半群**的典型\*\*幂子么半群（power submonoid）\*\*族谱。记“ $\langle \cdot \rangle$ ”为由给定算子及其各次幂（函数自合成）生成的最小子么半群。

### 1. 左乘幂子么半群（历史左扩母形）

$$\mathbf{M}_L(h) := \langle \mathbf{L}_h \rangle = \{ \mathbf{L}_{h^n} \mid n \geq 0 \}, \quad \mathbf{L}_h(s) = h \circ s$$

性质： $\mathbf{M}_L(h) \cong (\mathbb{N}, +, 0)$ ； $\mathbf{L}_{h^m} \circ \mathbf{L}_{h^n} = \mathbf{L}_{h^{m+n}}$ 。

### 2. 右乘幂子么半群（预测延展母形）

$$\mathbf{M}_R(h) := \langle \mathbf{R}_h \rangle = \{ \mathbf{R}_{h^n} \mid n \geq 0 \}, \quad \mathbf{R}_h(s) = s \circ h$$

性质： $\mathbf{R}_{h^m} \circ \mathbf{R}_{h^n} = \mathbf{R}_{h^{m+n}}$ 。

### 3. 尾裁剪幂子么半群（投影带）

$$\mathbf{M}_{\text{tail}}(U) := \langle \mathbf{\Pi}_L \mid L \in U \rangle = \{ \mathbf{\Pi}_L \}, \quad \mathbf{\Pi}_L^2 = \mathbf{\Pi}_L$$

性质：幂等、交换；合成等价  $\mathbf{\Pi}_L \circ \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{\Pi}_{\min(L, M)} \cong (U, \min)$ 。

### 4. 首裁剪幂子么半群

$$\mathbf{M}_{\text{head}}(U) := \{ \mathbf{Head}_L \}, \quad \mathbf{Head}_L^2 = \mathbf{Head}_L$$

与上同构  $((U, \min))$ 。

## 5. 测试幂子么半群 (KAT tests)

$$M_{\text{test}}(\mathcal{C}, U) := \langle \mathbf{T}_{L, \mathcal{C}}^{\text{Suf/Pref}} \rangle = \{\mathbf{T}_P\}, \quad \mathbf{T}_P^2 = \mathbf{T}_P$$

性质：幂等、可交换； $\mathbf{T}_P \circ \mathbf{T}_Q = \mathbf{T}_{P \wedge Q}$ （与“谓词合取”同构的 meet-半格）。

## 6. 闭包幂子么半群—后缀闭包（命中即停）

$$M_{\text{cl-suf}}(U, L_p) := \langle \mathbf{Cl}_{U, L_p}^{\text{Suf}} \rangle = \{\text{id}, \mathbf{Cl}_{U, L_p}^{\text{Suf}}\}, \quad (\mathbf{Cl})^2 = \mathbf{Cl}$$

## 7. 闭包幂子么半群—前缀闭包（历史左扩直到命中）

$$M_{\text{cl-pref}}(U) := \langle \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}} \rangle = \{\text{id}, \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}}\}$$

（若采用“至多  $N$  步”的截断闭包，则  $\langle \mathbf{Cl}_{U, N}^{\text{Pref}} \rangle = \{\mathbf{Cl}_{U, kN}^{\text{Pref}} \mid k \geq 0\}$ ，随  $k$  递增，至命中后稳定。）

## 8. 规范化幂子么半群（去重/清洗）

$$M_{\text{norm}} := \langle \mathbf{D}_{\text{head}}, \mathbf{CJK} \rangle = \{\mathbf{D}_{\text{head}}, \mathbf{CJK}, \mathbf{D}_{\text{head}} \circ \mathbf{CJK}, \dots\}$$

生成元幂等；产品一般非幂等但封闭。

# 二、二元/多元复合的幂子么半群（流程层）

## 9. 乘-闭包幂子么半群

- 右向（bigram/前向拓扑母式）

$$M_{R\text{-Cl}}(\chi; U, L_p) := \langle \mathbf{R}_\chi, \mathbf{Cl}_{U, L_p}^{\text{Suf}} \rangle = \{ \mathbf{Cl}_{U, L_p}^{\text{Suf}} \circ \mathbf{R}_{\chi^n} \mid n \geq 0 \}$$

（利用  $(\mathbf{Cl})^2 = \mathbf{Cl}$  归并出规范形。）

- 左向（历史拼接 + 前缀闭包）

$$M_{L\text{-Cl}}(h; U) := \langle \mathbf{L}_h, \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}} \rangle = \{ \mathbf{Cl}_U^{\text{Pref}} \circ \mathbf{L}_{h^n} \mid n \geq 0 \}$$

## 10. 裁剪-乘子幂子么半群（观测构建母式）

$$M_{\Pi-R}(L_h; w) := \langle \Pi_{L_h}, R_w \rangle = \{ R_{w^n} \circ \Pi_{L_h} \mid n \geq 0 \}$$

( $w$  为固定模板，如 “ $\chi$ ” 的拼接片段。)

#### 11. 测试-闭包核幂子么半群 (KAT-核)

$$M_{\text{KAT-core}} := \langle T., Cl_{U, L_p}^{\text{Suf}}, Cl_U^{\text{Pref}} \rangle$$

完全由幂等元生成；是“以 tests 与闭包为核”的可审计子么半群。

#### 12. 合规管线幂子么半群 (生产可回放序列)

$$M_{\text{pipeline}} := \langle T_{\text{legal}}, Cl_U^{\text{Pref}}, T_{\text{budget}}, Cl_{U, L_p}^{\text{Suf}}, CJK \rangle$$

以 tests→闭包→tests→闭包→清洗为生成序，所有幂次与排列的合成均在其中封闭；在有限词典/索引上，存在  $k^*$  使管线幂序列  $F^k$  于  $k \geq k^*$  稳定（到达固定点）。

### 三、两类“核级”幂子么半群（工程优先使用）

#### A) E-核幂子么半群 (Idempotent-generated)

$$M_E := \langle \Pi., \text{Head.}, T., Cl_{U, L_p}^{\text{Suf}}, Cl_U^{\text{Pref}}, D_{\text{head}}, CJK \rangle$$

说明：全部由幂等生成元生成；用于可审计/可回放与形式化等价化简。

#### B) 乘-闭包核幂子么半群 (Action-Closure)

$$M_{\text{ActCl}} := \langle L_{h_i}, R_{g_j}, Cl_U^{\text{Pref}}, Cl_{U, L_p}^{\text{Suf}} \rangle$$

说明：把“拼接动作”与“命中闭包”合并成规范形（闭包 $\circ$ 若干乘子），是预测/历史拓扑复用最频繁的子么半群。

### 四、用法口径（工程建议）

- 需要“强可解释/强审计”的业务侧，优先工作在  $M_E$  与  $M_{\text{pipeline}}$ 。
- 需要“高通量预测”的在线侧，优先工作在  $M_{R-Cl}$ 、 $M_{L-Cl}$  与  $M_{\Pi-R}$ 。

- 单元测试与等式化简，使用投影带  $M_{\text{tail}}$ 、 $M_{\text{head}}$  与测试幂子么半群  $M_{\text{test}}$  的幂等与交换律做规约。
- 

## 许可声明 (License)

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。