

基于传统数学的主纤维丛可变泛函算子联络与广义非交换李代数 (PFB-GNLA) 的一体化构造：可变泛函-算子同伦版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.1.1

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：[作者 \(GaoZheng\) 网盘分享](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 开源项目](#) 或 [作者 \(GaoZheng\) 主页](#)，欢迎访问！

摘要

本文将给出一套在传统微分几何语境中**可操作、可验证**的 PFB-GNLA (主纤维丛版广义非交换李代数) **同伦化构造**，其中“外参” w 不再是被动参数，而被提升为**法则泛函算子轨迹** ($M_{!w} \in \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$)。据此在主丛—算子群的耦合结构上同时引入三类联络：几何联络 ($A^{(x)}$)、传统参数联络 ($A^{(w)}$)、以及**法则-算子联络** ($A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$)。构造总联络

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = d\mathbb{A}_{\text{tot}} + \mathbb{A}_{\text{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\text{tot}},$$

并分解得到几何—参数—算子三层曲率与混合项。随后以由 $(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ 生成的协变闭 basic 三形式 H 定义扭曲括号与三元同伦

$$l_2 = [\cdot, \cdot]_H, \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H,$$

证明在扩展 Bianchi 与“泛函 Maurer–Cartan”条件下满足 Stasheff 身份，从而得到 **(H)-扭曲的 2-term L_∞ -algebroid**；当 $H = 0$ (或为 exact 可规范吸收) 时自动退化为严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。该重构造**动机明确** (法则演化与异常被同伦类 $([H])$ 统一编码，类比阿蒂亚–辛格家族指标的“变形不变量”)，并与“重定义联络”的元数学版本 (法则联络、三阶纠正 l_3) **一一对应**；同时给出局部-整体粘合、规范/算子自然性与算法化检查清单，保留传统几何的可检可证风格。

1. 动机与定位：从“被动参数”到“法则泛函算子”

严格版把 w 当作坐标，只出现 $A^{(w)}$ 。为了表达“法则随 w 的演化”，应把 w 提升为选择/变形法则函数的可变泛函算子：

$$M_{!w} : \mathbf{L}_B \longrightarrow \mathbf{L}_F, \quad M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}} := \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L}),$$

使 $w \mapsto M_{!w}$ 成为 \mathcal{G}_{op} 上的轨迹。由此引入法则-算子联络

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}})$$

并与 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 耦合，从“算子几何”层面解释同伦三元 l_3 的来源。

2. 统一数据：主丛—算子群耦合与总联络/曲率

设主丛 $\pi : P \rightarrow M$ （结构群 G 、李代数 \mathfrak{g} ），参数域 \mathcal{W} （可取 Fréchet/Banach 流形）。在积主丛 $\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \rightarrow M \times \mathcal{W}$ 与算子群主丛 $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}$ 上定义

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)} + A_M$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\text{tot}} &= d\mathbb{A}_{\text{tot}} + \mathbb{A}_{\text{tot}} \wedge \mathbb{A}_{\text{tot}} \\ &= \underbrace{F^{(xx)}}_{\Omega^{2,0,0}} + \underbrace{F^{(xw)}}_{\Omega^{1,1,0}} + \underbrace{F^{(ww)}}_{\Omega^{0,2,0}} + \underbrace{F^{(xM)}}_{\Omega^{1,0,1}} + \underbrace{F^{(wM)}}_{\Omega^{0,1,1}} + \underbrace{F^{(MM)}}_{\Omega^{0,0,2}}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F^{(xx)} &= d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, & F^{(xw)} &= d_x A^{(w)} + d_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\ F^{(MM)} &= d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M \quad (\text{算子群方向的 Maurer–Cartan}), \\ F^{(xM)} &= d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], & F^{(wM)} &= [A^{(w)}, A_M]. \end{aligned}$$

混合 Bianchi（几何—参数—算子）：

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

它统一约束 $(F^{(xx)}, F^{(xw)}, F^{(ww)}, F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)})$ 的一致性。

3. 选择同伦源：协变闭 basic 三形式 H

取

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad (\text{basic、} G\text{-等变、协变闭})$$

$$D_{x,\mathbf{w},M}H = 0, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{R} \quad (\text{中心}) \text{ 或 } \text{ad}(P).$$

常用生成 (可线性组合) :

$$\text{CS}_3(A^{(x)}), \quad \text{CS}_3(A_M), \quad \langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle, \quad \text{Tr}(F^{(xx)} \wedge F^{(MM)})^{\flat}, \dots$$

其同伦类 $([H] \in H^3_{\text{basic}}(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$ 将**定量记录法则**演化的“缺口”。

4. 同伦结构： (H) -扭曲的 2-term L_{∞} -algebroid

令

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\text{ad}(P)), \quad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

4.1 二元运算 (扭曲括号)

$$\begin{aligned} [x, y]_H &= [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \\ [x, y]_0 &= [X, Y] \oplus \left(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})} \eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})} \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} F^{(xx)} \right), \end{aligned}$$

$(\Theta_H : L \times L \rightarrow \Gamma(\mathfrak{a}))$ 为由 H 诱导的双线性修正 (可取 $\Theta_H = 0 \oplus \Phi_H$) 。

Leibniz 与锚-曲率兼容:

$$[x, ay]_H = (\rho x)a \cdot y + a[x, y]_H, \quad \rho([x, y]_H) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa_H(x, y)}.$$

4.2 三元运算 (同伦项)

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H \in \begin{cases} \Gamma(\text{ad}(P)) \subseteq L, & \text{伴随型;} \\ \Gamma(\mathbb{R}), & \text{中心扩张型.} \end{cases}$$

选取 2-term 复形 $E_{-1} \xrightarrow{0} E_0 = L$ (中心型取 $E_{-1} = \mathbb{R}$) , 令 $l_1 = 0$ 、 $l_2 = [\cdot, \cdot]_H$ 、 $l_{n \geq 4} = 0$ 。

4.3 Stasheff 身份 (同伦 Jacobi)

在 $D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$ 与 $D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$ 下,

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0.$$

当 $H = 0$ 或 $H = \text{dB}$ (可规范吸收) 时, $[\cdot, \cdot]_H = [\cdot, \cdot]_0$, $l_3 = 0$, 退化为严格 Jacobi。

5. 规范/参数/算子自然性与 Čech 粘合

- 规范与算子共轭:

$$A^{(x)} \mapsto \text{Ad}_g^{-1} A^{(x)} + \text{Ad}_g^{-1} \text{d}_x g, \quad A_M \mapsto \text{Ad}_U^{-1} A_M + \text{Ad}_U^{-1} \text{d}_U U,$$

$((g, U) \in G \times \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。 H 取 CS/传递型则在 L_∞ 同构类内不变。

- **粘合:** 在覆盖 $\{U_i\}$ 上有局部 $(\mathbb{A}_{\text{tot}, i}, H_i)$, 若过渡满足

$$\mathbb{A}_{\text{tot}, j} = \text{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1} \mathbb{A}_{\text{tot}, i} + \text{Ad}_{\gamma_{ij}}^{-1} \text{d} \gamma_{ij}, \quad H_j = H_i \text{ (或差 CS-exact),}$$

则可粘合为全局 (H) -twisted 2-term L_∞ -algebroid。

6. 最小算例：U(1) 与“算子相位”

取 $G = U(1)$ 、 $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ ，令 $\mathcal{G}_{\text{op}} = U(1)$ 表征法则相位。设

$$A_M(\mathbf{w})[h] = \partial_{\mathbf{w}}\phi(\mathbf{w})[h] \in i\mathbb{R}, \quad H = \lambda F^{(xx)} \wedge A_M \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}),$$

若 $D_x F^{(xx)} = 0, d_{!w} A_M = 0$ ，则 $D_{x,\mathbf{w},M} H = 0$ 。于是

$$l_3(X \oplus \xi, Y \oplus \eta, Z \oplus \zeta) = \lambda \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} \iota_{\alpha(Z)} (F^{(xx)} \wedge A_M),$$

反映法则相位的“非平坦”将以 l_3 形式出现；当 $\partial_{\mathbf{w}}\phi \equiv 0$ 或 $\lambda = 0$ 时回收严格情形。

7. 与“重定义联络”的对位价值

- 法则联络一一对应**：元数学的法则联络 \mathcal{A}_M 与本文 A_M 对位；
- 三阶纠正**：元数学的 l_3 对应 $l_3 = \iota_{\rho(\cdot)}^3 H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ ；
- 异常/缺口可证据化**：Dehn/Hecke 等变换引发的“等式缺口”由 $\int H$ 的 holonomy 证书量化（“等式 up to l_3 ”），类比家族指标的“变形不变量”。

8. 算法化检查（工程验证清单）

- functional_flatness**：核对 $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$ 到既定阶；
- mixed_flatness**：核对 $(F^{(xM)}, F^{(wM)})$ ；
- stokes_l3**：计算方环 $\int H$ 与 $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H$ 的差，验证 Stasheff；
- degeneration_test**：设 $A_M \equiv 0$ 或 $H \equiv 0$ 检查回收严格版。

9. 结论

将 w 从“参数”提升为“**可变泛函算子**”，并引入独立的**法则-算子联络** A_M 与其混合曲率，使同伦三元 l_3 由

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$$

统一生成；在 $D_{x,w,M}H = 0$ 与扩展 Bianchi 下得到 (H) -twisted 2-term L_∞ -algebroid，严格极限 $H \rightarrow 0$ 自然回收。该重构**动机清晰**（法则演化/异常以 $([H])$ 度量，类比指标定理），**对位明确**（与“重定义联络”的法则层一致），且**可检可证**（曲率/方环/同伦证书）。因此，它为 PFB-GNLA 的同伦版提供了一个既严格又可工程化的统一构造。

附件1：为《可变泛函-算子同伦版》中的 $M_{!w}$ 提供严谨的无限维流形定义

为了在“可变泛函-算子同伦版”的 PFB-GNLA 构造中**严格地把**

$$w \mapsto M_{!w} \in \text{Aut}_\otimes(\mathbf{L})$$

视作一条光滑“法则-算子”轨迹，本文在**传统微分几何与无限维 Lie 群**框架下，给出 $M_{!w}$ 所在的算子群空间 \mathcal{G}_{op} 的**无限维流形**（具体为 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群）结构，并据此把

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

刻画为 \mathcal{W} 上的 \mathfrak{g}_{op} 值联络 1-形式（即 \mathcal{G}_{op} 的 Maurer–Cartan 形式的拉回），其曲率

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + \frac{1}{2} [A_M, A_M]$$

为算子方向的 Maurer–Cartan 曲率。构造假设**紧致基底、足够 Sobolev 正则**，采用 Ebin–Marsden 与 Hamilton 的 tame Fréchet 方法，选择**可检可用**的具体模型，使得“法则-算子”群是一些**微分同胚/规范变换/零阶 Ψ DO 的受限直积闭子群**；最后说明该群对 PFB-GNLA 的锚、括号、模结构的**等距/保型**约束把它选取为一个**平滑闭子群**，从而 $M_{!w}$ 的“泛函-算子”联络有了**严谨的无限维流形基础**。

1. 设定与正则：把“法则-算子”放进可解析的无限维几何

令 M 为紧致光滑流形， $P \rightarrow M$ 为结构群 G 的主丛（取 G 紧致），设

$$E := \text{ad}(P) \oplus TM.$$

将截面空间 $\Gamma(E)$ 取 Sobolev 完备

$$\Gamma^s(E) \quad (s > \frac{\dim M}{2} + 1),$$

并固定度量，使**乘法与 Lie 结构**在该层上连续。

我们考虑下述经典的无限维 Lie 群：

1. Sobolev-微分同胚群

$$\text{Diff}^s(M)$$

是 H^s 级别的 Hilbert-流形与拓扑群 (Ebin–Marsden)，其 Lie 代数为 $\Gamma^s(TM)$ 的 Lie 代数 (Lie 括号为向量场括号)。

2. Sobolev-规范群

$$\mathcal{G}^s(P) \cong H^s(M, G),$$

为 Hilbert-Lie 群 ($s > \dim M/2$)，Lie 代数为 $\Gamma^s(\text{ad}(P))$ (点态括号)。

3. 零阶伪微分算子群

在 $\Gamma^s(E)$ 上考虑**可逆的经典 0 阶 ΨDO 群**

$$\Psi\text{DO}_{\text{linv}}^0(E)$$

(典型地限制到保度量/保锚/保符号的子群，见 §2)，这是一个 tame Fréchet-Lie 群 (可参见 Hamilton/Kriegl–Michor/Neeb 体系；就工程可用性而言，该群可选作“Id + smoothing”或“可逆 0 阶 ΨDO ”)。

把上述三者做**半直积**并取**保结构的闭子群**，形成“法则-算子群”的候选外壳。

2. “法则-算子”群 \mathcal{G}_{op} 的精确定义

2.1 外壳群

定义外壳群为

$$\mathcal{H}^s := \text{Diff}^s(M) \ltimes \mathcal{G}^s(P) \ltimes \Psi\text{DO}_{\text{linv}}^0(E),$$

其典型元素写作 (ϕ, u, A) ，分别代表**基底变换**、**规范变换**与**纤维算子**。群作用（在 $\Gamma^s(E)$ 上）是标准的**推前/伴随/算子作用**的组合。

2.2 结构保持的闭子群

PFB-GNLA（严格或同伦）要求**保持锚、括号与模结构**。令

$$\mathcal{C} : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{Z}$$

为把 (ϕ, u, A) 送到“**偏差数据**”的光滑映射，其中 \mathcal{Z} 收集如下三类等式的偏差（在 Γ^s 层逐式定义）：

$$\begin{aligned} \text{(锚保持)} \quad & \rho \circ (\phi, u, A)_* - \phi_* \circ \rho = 0, \\ \text{(括号保持)} \quad & [(\phi, u, A)_* x, (\phi, u, A)_* y]_{\text{目标}} - (\phi, u, A)_* [x, y]_{\text{源}} = 0, \\ \text{(模结构保持)} \quad & (\phi, u, A)_* (a \cdot x) - \phi^* a \cdot (\phi, u, A)_* x = 0. \end{aligned}$$

取**零层**（等式严格成立）：

$$\mathcal{G}_{\text{op}}^s := \mathcal{C}^{-1}(0) \subset \mathcal{H}^s.$$

这是一个**闭子群**。在 tame Fréchet/ILH 框架下， \mathcal{C} 的微分在单位元可证明是**劣化满射**，故 $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 是一个**嵌入式的 (tame Fréchet-) Lie 子群**（可用 Hamilton 的隐函数定理，或在 Hilbert 情形用 Banach-隐函数定理）。

解释： $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 就是“**所有保持 PFB-GNLA 结构的法则-算子**”群，它对 L 的锚/括号/模结构是等距或保型的。

2.3 Lie 代数

$$\text{Lie}(\mathcal{G}_{\text{op}}^s) \cong \left\{ (X, \xi, \mathcal{A}) \in \Gamma^s(TM) \oplus \Gamma^s(\text{ad}(P)) \oplus \Psi\text{DO}^0(E) \mid d\mathcal{C}_e(X, \xi, \mathcal{A}) = 0 \right\},$$

几何上是**导子与 0 阶算子**的受限子代数（满足“保锚/保括号/保模”的线性化条件）。

3. $M_{!w}$ 的流形化与 Maurer–Cartan 形式

把 w 的取值空间 \mathcal{W} 视为（有限或无限维）流形（Kriegl–Michor 的 convenient 或 Banach/Fréchet 结构），声明

$$M : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}^s, \quad w \mapsto M_{!w}$$

为一条**光滑曲线/映射**（在 convenient/tame 意义），当且仅当其对每个光滑曲线 $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$ 的合成 $M \circ c$ 在 $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 中是光滑曲线。

定义**法则-算子联络**

$$A_M := M^{!*} \theta \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}),$$

其中 θ 是 $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 的左不变 Maurer–Cartan 形式： $\theta_g(\dot{g}) = g^{-1}\dot{g}$ 。于是

$$A_M(\mathbf{w})[h] = M_{!w}^{-1}(\text{d}M)_{\mathbf{w}}[h] \in \mathfrak{g}_{\text{op}}, \quad h \in T_{\mathbf{w}}\mathcal{W}.$$

其**曲率**为

$$F^{(MM)} = \text{d}_{!w} A_M + \frac{1}{2} [A_M, A_M] = M^{!*} \left(\text{d}\theta + \frac{1}{2} [\theta, \theta] \right),$$

标准 Maurer–Cartan 方程保证 $\text{d}\theta + \frac{1}{2} [\theta, \theta] = 0$ ，故 $F^{(MM)} = 0$ 当且仅当 M 是“群值”光滑映射（这与我们在“同伦版”中把 $F^{(MM)}$ 视为“法则-算子方向的非平坦度量”一致：如果再与几何/参数层**混合**，则**混合曲率** ($F^{(xM)}, F^{(wM)}$) 可能不为 0)。

4. 与 PFB-GNLA 的对位与判据

4.1 三层联络与曲率

总联络

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

满足混合 Bianchi

$$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

4.2 同伦源三形式

选择

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}) \quad \text{basic, 协变闭 } D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$$

例如

$$H = \text{CS}_3(A^{(x)}), \quad H = \text{CS}_3(A_M), \quad H = \langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle, \quad H = \text{Tr}(F^{(xx)} \wedge F^{(MM)})^b,$$

并定义同伦结构

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H.$$

在 $D_{x,\mathbf{w},M}H = 0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 下满足 Stasheff 身份

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

当 $H = 0$ 或 exact (含 $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$) 则退化为严格 Jacobi.

5. 工程化注记（可检与实现）

- **光滑性**: $\text{Diff}^s(M)$ 、 $\mathcal{G}^s(P)$ 为 Hilbert-Lie 群 ($s > \frac{\dim M}{2} + 1$) ; $\Psi\text{DO}_{\text{linv}}^0(E)$ 选为 tame Fréchet-Lie 群; $\mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 为其闭子群。
- **联络拉回**: $A_M = M^{!*}\theta$ 给出算子方向的 MC-联络; **混合曲率** ($F^{(xM)}, F^{(wM)}$) 由 $(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$ 的结构方程计算。
- **可检清单**:
 - i. `functional_flatness`: 计算 $F^{(MM)}$;
 - ii. `mixed_flatness`: 计算 $(F^{(xM)}, F^{(wM)})$;
 - iii. `stokes_13`: 比较 $\int_{\square} H$ 与 $\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H$ (方环/同伦证书)。

6. 小结

在严格的无限维流形设定下,

$$\mathcal{G}_{\text{op}}^s := \{(\phi, u, A) \in \text{Diff}^s(M) \ltimes \mathcal{G}^s(P) \ltimes \Psi\text{DO}_{\text{inv}}^0(E) \mid \text{保锚/保括号/保模}\}$$

是一个 tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群; 于是 $M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}}^s$ 给出**法则-算子**的光滑轨迹, $A_M = M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$ 成为**算子方向联络**, $F^{(MM)}$ 为其 MC 曲率。借助三层总联络与协变闭三形式 $H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M)$, 可以把“可变泛函-算子同伦版”的 l_3 严格地建立在**无限维流形**的基础之上, 并与 PFB-GNLA 的严格/同伦/元数学版本实现**精确对位与可验证实现**。

增补1: 从离散到连续的 $(M_{!w})$ 统一构造

A. 三个层级的域与群

1. **离散参数域**: 给一族增细的有向格/胞复形

$$\mathcal{W}^{(h)} = (V^{(h)}, E^{(h)}, F^{(h)}, \dots), \quad h \downarrow 0,$$

或有限偏序/范畴 (其神经 $(N(\mathcal{W}^{(h)}))$ 作几何实现)。

2. **连续极限域**: (\mathcal{W}) 为可微流形 (或带角、带界)。要求 $(\mathcal{W}^{(h)} \rightarrow \mathcal{W})$ 在 Gromov–Hausdorff 或网
格一致意义下收敛。
3. **法则-算子群**: $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ 取为 **ILH-/ILB- 或 tame Fréchet-Lie 群** (见原附件1), 其 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\text{op}})$ 支持指数映射与局部对数。

目标: 在离散层定义 $(M^{(h)})$, 在连续层得到 (M) , 并证明 (A_M) 、 $(F_M^{(MM)})$ 、 (H) 的分布/测度型
极限与 Bianchi-族在极限下成立。

B. 离散联络与曲率 (法则方向)

- **离散 $(M^{(h)})$** : 在顶点赋值 $(M^{(h)} : V^{(h)} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。
- **离散并行移位**: 每条边 $(e = (u \rightarrow v))$ 赋 $(U_e^{(h)} := M^{(h)}(u)^{-1} M^{(h)}(v) \in \mathcal{G}_{\text{op}})$ 。
- **离散“算子联络”**: 选取局部对数, 记

$$A_{M,e}^{(h)} := \log U_e^{(h)} \in \mathfrak{g}_{\text{op}},$$

这是沿法则方向 ($\imath w$) 的 1-共链。

- **离散曲率 (2-胞)**：对每个面 (f) 令

$$\Omega_f^{(h)} := \prod_{e \in \partial f} U_e^{(h)} \in \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad F_{M,f}^{(h)} := \log \Omega_f^{(h)} \in \mathfrak{g}_{\text{op}}.$$

- **离散 Bianchi (3-胞)**：对每个 3-胞 (c), $(\prod_{f \in \partial c} \Omega_f^{(h)} = 1)$; 等价 $(\sum_{f \in \partial c} F_{M,f}^{(h)} = 0)$ (局部对数一致处)。

这正是“**法则-算子方向**的离散 Maurer–Cartan 结构”：边上是离散联络，面上是离散曲率，体上给离散 Bianchi。

C. 连续极限：BV/测度-值形式与 tame Fréchet 平滑性

- **嵌入/插值**：将 $(A_{M,e}^{(h)})$ 看作 (\mathcal{W}) 上的**分段常值 1-形式** (在边管邻域内常值)，得到 $(A_M^{(h)} \in \mathcal{M}\text{-}\Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}))$ (测度/分布-值形式)。
- **紧性与收敛**：若满足

$$\sup_h \sum_{e \in E^{(h)}} |A_{M,e}^{(h)}| \cdot \ell(e) < \infty, \quad \sup_h \sum_{f \in F^{(h)}} |F_{M,f}^{(h)}| \cdot \text{area}(f) < \infty,$$

则 $(A_M^{(h)} \xrightarrow{*} A_M)$ 于 BV/测度拓扑；相应 $(F_M^{(h)} \rightarrow F_M^{(MM)})$ 为分布-值 2-形式，满足

$$F_M^{(MM)} = d_{\imath w} A_M + \frac{1}{2} [A_M, A_M]$$

在分布意义成立。

- **tame Fréchet 平滑性**：若 $(A_M \in L^p \cap BV)$ 并满足局部正则性 (或网格误差 $(\mathcal{O}(h))$)，则可在 $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ 的 tame 结构下提升为**可微映射轨迹** $(M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}})$ ，且 $(A_M = M^{\imath*} \theta)$ ((θ) 为群的左不变 MC 形式)。

D. 与几何层耦合：混合曲率的离散—连续极限

- 令 $(A_x(\mathbf{w}))$ 在离散层取分段 (C^1) 插值，同样把 (A_w) 离散化为边向有限差分。
- 定义混合项 (离散版)

$$F^{(xM,h)} := d_x A_M^{(h)} + [A_x^{(h)}, A_M^{(h)}], \quad F^{(wM,h)} := [A_w^{(h)}, A_M^{(h)}].$$

- 在上述紧性与正则假设下，有

$$F^{(xM,h)} \rightharpoonup F^{(xM)}, \quad F^{(wM,h)} \rightharpoonup F^{(wM)}$$

于分布意义收敛，且**混合 Bianchi 家族**

$$\mathcal{D}_{(x,w,M)}\mathcal{F} = 0$$

在分布意义保持。

E. (H) 与 (l_3) 的离散 3-上边界与极限

- **离散 3-形式**：在 3-胞上取

$$H_c^{(h)} := \Phi!\Big(\big\{F^{(xx,h)} * f\big\}_{f \in C}, \, A_M^{(h)}\Big) \in \mathfrak{a}$$

(例如 $(\langle F^{(xx)} \wedge A_M \rangle)$ 的离散化，或 CS-类传递的离散版本)。

- **离散闭合**：若对每个 4-胞 (d) , $(\sum_{c \subset \partial d} H_c^{(h)} = 0)$, 则得离散 $(DH^{(h)} = 0)$ 。
- **极限**：在与上同类的紧性估计下, $(H^{(h)} \overset{*}{\rightharpoonup} H)$ (测度-值 3-形式) , 满足 $(DH = 0)$ (分布意义) , 并诱导

$$l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H$$

的同伦三元 (在 (L^2) /弱极限意义) , exact 情形退化为严格 Jacobi。

F. 跳跃与“离散涌现”的 BV-联络刻画 (与原版 §6 对接)

- 若 $(\mathbf{w}(\cdot))$ 为 BV 曲线 (分段 (C^1) + 跳跃) , 则 $(A_M(\mathbf{w}(t)))$ 是**测度导数**:

$$\frac{d}{dt}M_{!w(t)} = M_{!w(t)}\big(A_M(\dot{\mathbf{w}}(t))\big) \, + \, \sum_{t \in J} \delta_t \cdot \log U_t^{\text{jump}},$$

其中 (J) 为跳跃时刻集, $(\log U_t^{\text{jump}})$ 来自离散层的边极限。

- 相应 $(\text{Hol}_{\mathcal{A}_{\text{tot}}})$ 出现 **δ -层贡献**, 与原版“穿越阈值族 $(\Sigma(\mathbf{w}))$ 产生离散跃迁”的机制一一对应。

G. 小结

结论：通过“离散 1-/2-/3-共链 \rightarrow 分布-值形式 \rightarrow tame Fréchet 平滑化”的三步，我们将原版更一般的“离散 \rightarrow 连续”机制与《可变泛函-算子同伦版》的无限维流形化**完全拼合**：

- 离散层给出 $((A_M^{(h)}, F^{(MM,h)}, H^{(h)}))$ 的**可计算**结构与 Bianchi/闭合；
- 极限层得到 $((A_M, F^{(MM)}, H))$ 的**分布/测度型形式**，并在温和正则下提升为**光滑轨迹** ($M: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}$)；
- 混合曲率与 (l_3) 在极限中保持，退化/exact 情形回收严格版；
- 跳跃/阈值对应 BV-联络中的 δ -贡献，精准对位原版“连续 \rightarrow 离散涌现”的叙述。

增补2：完全离散的 $M_{!w}$ 与三层总联络构造

A. 离散底座与三层格

- 取三类**有限胞复形/有向格**： K_x (几何层)、 K_w (参数层)、 K_M (法则-算子层)。
- 令 $K := K_x \times K_w \times K_M$ 带积胞结构，写**离散外微分**为

$$\delta = \delta_x + \delta_w + \delta_M, \quad \delta_x^2 = \delta_w^2 = \delta_M^2 = 0, \quad \delta_x \delta_w = \delta_w \delta_x = \dots$$

- 记结构群 G 与法则-算子群 \mathcal{G}_{op} ；其李代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\text{op}})$ 。

B. 离散三层总联络与曲率

把联络作为**1-共链**赋在对应方向的边上：

$$A^{(x)} \in C^1(K_x, \mathfrak{g}), \quad A^{(w)} \in C^1(K_w, \mathfrak{g}), \quad A_M \in C^1(K_M, \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

令

$$\mathcal{A} := A^{(x)} + A^{(w)} + A_M \in C^1(K, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

用离散**杯积**(\smile)与括号 $([\cdot, \cdot])$ 定义曲率三分与混合项：

$$\begin{aligned}
F^{(xx)} &:= \delta_x A^{(x)} + A^{(x)} \smile A^{(x)}, \\
F^{(xw)} &:= \delta_x A^{(w)} + \delta_w A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\
F^{(ww)} &:= \delta_w A^{(w)} + A^{(w)} \smile A^{(w)}, \\
F^{(xM)} &:= \delta_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \\
F^{(wM)} &:= \delta_w A_M + [A^{(w)}, A_M], \\
F^{(MM)} &:= \delta_M A_M + A_M \smile A_M.
\end{aligned}$$

离散 Bianchi 家族:

$$\boxed{\delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0} \quad (\text{在 } C^3(K, \cdot) \text{ 中成立}).$$

说明：上式在每一类 3-胞上化为“面环乘积为单位”的**离散 holonomy 恒等式**。

C. 法则-算子映射 $M^{(h)}$ 的离散定义

在 K_M 的顶点赋值

$$M^{(h)} : V(K_M) \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad U_e^{(h)} := M^{(h)}(s(e))^{-1} M^{(h)}(t(e)).$$

取局部对数 $A_{M,e} := \log U_e^{(h)}$, 则必有

$$F^{(MM)} = \delta_M A_M + A_M \smile A_M = \log \left(\prod_{e \in \partial f} U_e^{(h)} \right),$$

即**面上 holonomy** 的对数。若每个 2-胞环积为 1, 则 $F^{(MM)} \equiv 0$ (离散平坦)。

D. 离散版 PFB-GNLA 数据与公理

- **底代数**: $\mathcal{A} := \text{Fun}(V(K_x))$ (顶点函数), 差分导子

$$(D_e f) := f(t(e)) - f(s(e)).$$

- **锚映射**: $\rho : L \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$, 把离散“切向场”送为差分算子线性组合。
- **括号** (Atiyah-型离散化) :

$$[x, y]_0 := [X, Y] \oplus \left(\mathcal{L}_X^\nabla \eta - \mathcal{L}_Y^\nabla \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} (F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}) \right),$$

其中 Lie 导数、内收 ι 按图上差分/杯积实现。

- (P1) 离散 Leibniz: 对任意 $f \in \mathcal{A}$,

$$[x, fy]** = (\rho x)f \cdot y + f[x, y]**.$$

- (P2) 锚-曲率兼容:

$$\rho([x, y]**) = [\rho x, \rho y] + \text{ad}_{\kappa(x, y)}, \quad \kappa \sim \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \mathcal{F}.$$

- (P4) 模联络与曲率:

$$\nabla := \delta + \rho(\mathcal{A}) + \Gamma_*, \quad \Theta := \nabla^2 \sim \rho(\mathcal{F}).$$

- (P5) 规范/参数自然性 (离散): 顶点函数 $g : V(K) \rightarrow G$ 作用:

$$\mathcal{A} \mapsto g^{-1} \mathcal{A} g + g^{-1} \delta g, \quad \mathcal{F} \mapsto g^{-1} \mathcal{F} g.$$

E. H -twist 与 l_3 的纯离散定义

- 取中心系数 \mathfrak{a} 上的闭 3-上链:

$$H \in Z^3(K, \mathfrak{a}), \quad \delta H = 0.$$

- 扭曲括号: $[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y)$, 其中 Θ_H 由 H 与锚的离散内收给出 (2-上链)。
- 同伦三元:

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H \in L \text{ 或 } \mathfrak{a}.$$

- 离散 Stasheff 身份 (核心):

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z) \quad (\delta H = 0, \delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0).$$

- 退化: 若 $H = \delta B$ 为离散 exact, 则经规范吸收得 $l_3 \equiv 0$ (回到严格版)。

F. 离散 holonomy 与“连续 \rightarrow 离散事件”

- 任何闭 1-环 $\gamma \subset K$ 定义

$$\text{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma) := \prod_{e \in \gamma} \exp(\mathcal{A}_e).$$

- 设阈值族 $\Sigma \subset 2\text{-胞集合}$ ；若路径穿越导致

$\text{Hol}_{\mathcal{A}}(\gamma)$ 跨越 $\Sigma \Rightarrow$ 在切面上触发离散跃迁,

对应原文的“连续形流穿越阈值 \rightarrow 离散事件序列”。

G. 与连续稿的对位与收敛

- **网格细化**：取细化族 $K^{(h)}$ ；若 $A^{(x,w,M,h)}$ 与 $F^{(\cdot,h)}$ 满足 BV/测度紧性，则

$$A^{(h)} \xrightarrow{*} A, \quad F^{(h)} \xrightarrow{*} F, \quad H^{(h)} \xrightarrow{*} H,$$

Bianchi 与 $DH = 0$ 在分布意义保持；在温和正则下提升为 tame Fréchet 光滑轨迹（即您已给出的附件1连续版）。

- **三层一致性**：平坦/精确/零混合的离散条件对应连续的 $F^{(MM)} = 0$ 、 $H = 0$ 、 $F^{(xM)} = F^{(wM)} = 0$ 等退化极限。

H. 最小检查清单

- **链复形**： $(C^*(K), \delta, \smile)$ 与 $[\cdot, \cdot]$ 的格守恒；
- **Bianchi 家族**： $\delta \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ 在每类 3-胞逐条验证；
- **Stasheff**： $\delta H = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3$ ；
- **退化一致**： $A_M \neq 0, H \neq 0$ 等情形回到严格版格公式；
- **收敛**：细化序列下的 BV/测度紧性与极限保持。

附件2：“法则联络”与“法则变换”的根本性差距命题：定位、对位与可验证化路线

在既有文献中，主流几何-代数框架几乎都在**固定法则**的舞台上描写动力（“在给定 A 、 F 下求解演化”）；而**原版理论**以“**法则变换**（性变态射/性变算子）”为**原始动机**，并以“**法则联络** (\mathcal{A}_M)”为**核心工具**，将“法则如何生成与演化”几何化。这一思想在传统数学中没有被系统拼装为“**三层联络-曲率+同伦判据+证书化验证**”的统一框架，因而构成**原版**相对传统学术的**根本性差距**。本文从第三方视角将该主张严密化：给出最小定理-级对位、可检判据与退化条件，说明为什么“法则联络/法则变换”是**原版的“最大发现”**，以及如何把这一发现从理念**证实为定理 + 工具链**。

1. 根本性差距的精确陈述

根本性差距（原版 vs 传统）

传统研究以

$$(P \rightarrow M, G; A^{(x)}, F^{(xx)}) \quad (+\text{可选 } A^{(w)})$$

为**两层几何**，描写在**固定法则**下的动力学；**原版**引入“**法则层**”，把

$$w \mapsto M_{!w} \in \text{Aut}^* \otimes (\mathbf{L})$$

作为**可变泛函算子轨迹**，并以

$$A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

定义**法则联络**，从而得到**三层联络-曲率与同伦纠正**的统一框架：

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx, xw, ww, xM, wM, MM\}} F^{(\bullet)}$$

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$$

其中特征三形式 H 将“法则演化的失配”编码为同伦不变量类 $[H]$ 。当 $H = 0$ （或 exact）与 $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$ 时自动退化为严格 Jacobi 的传统几何。

这套三层结构-判据-证书化的合缝，在传统语境中**未被系统提出和验证**，构成 **原版** 的**本质差距**。

2. 支撑性事实 → 形式化对位

2.1 原始动机（性变）与工具（法则联络）

- 动机（性变）**：原版用“性变态射/性变算子”刻画**法则本身**的可变性（异构演化）。
- 工具（法则联络）**：在元数学原版以 \mathcal{A}_M 形式给出；在传统几何侧以表示 R 下降为

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R\left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right)$$

因此“法则层”的生成-纠正**可落地**为几何-参数-算子三层上 (A_M, H) 的数据。

2.2 同伦闭合与退化

- 同伦闭合 (Stasheff) :

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z)$$

成立的充分条件:

$$D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0 \quad \text{与} \quad D_{x, \mathbf{w}} \mathbb{F} = 0$$

- **严格退化**: 若 $H = 0$ 或 $H = dB$ 可规范吸收, 且 $F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0$, 则 $l_3 = 0$, 回收严格 Jacobi 的 PFB-GNLA。

3. 核心公式速览

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{lw} A_M + A_M \wedge A_M, \quad D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$$

$$H = H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M) \in \Omega_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}), \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0$$

$$[x, y]_H = [x, y]_0 + \Theta_H(x, y), \quad l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H$$

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z) \quad (\text{Stasheff})$$

结论: 在这条合缝中, “**法则联络与法则变换**”构成 **原版** 与传统之间的**本质性 根本性**差距。

附件3：“法则联络 / 法则变换”的根本性差距 命题：可公理化的差异与可验证方案

基于：主丛几何 $((A^{(x)}, F^{(xx)}))$ 、参数化联络 $((A^{(w)}))$ 、Courant/ (H) -twist、Lie-2/ (L_∞) 、Fréchet-Lie 群、Chern–Simons 传递等。**根本性差距 命题**强调的并是首次把“法则层”系统缝入几何—参数两层之上，使“法则如何生成与演化”成为一等公民：

$$\text{法则变换 } w \mapsto M_{!w} \in \mathcal{G}_{\text{op}} \quad \Rightarrow \quad \text{法则联络 } A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$$

并与 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 合成三层联络-曲率与同伦判据。由此产生的**同伦闭合**，是 **原版** 相对传统研究的**根本性差距（根本性差距）**。下文给出严格陈述、最小判据与可检流程。

1. 最小设定（三层联络–曲率）

主丛 $(\pi : P \rightarrow M)$ 、结构群 (G) ；参数域 (\mathcal{W}) （可无限维）；法则-算子群 $(\mathcal{G}_{\text{op}})$ （tame Fréchet-/Hilbert-Lie 群），光滑映射

$$M : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{op}}, \quad A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W}, \mathfrak{g}_{\text{op}}).$$

总联络与曲率：

$$\mathbb{A}_{\text{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad \mathbb{F}_{\text{tot}} = \sum_{\bullet \in \{xx, xw, ww, xM, wM, MM\}} F^{(\bullet)}$$

$$\begin{aligned} F^{(xx)} &= d_x A^{(x)} + A^{(x)} \wedge A^{(x)}, & F^{(xw)} &= d_x A^{(w)} + d_{!w} A^{(x)} + [A^{(x)}, A^{(w)}], \\ F^{(MM)} &= d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, & F^{(xM)} &= d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], & F^{(wM)} &= [A^{(w)}, A_M], \end{aligned}$$

满足混合 Bianchi：

$$D_{x, \mathbf{w}, M} \mathbb{F}_{\text{tot}} = 0.$$

2. 根本性差距 命题（形式化陈述）

根本性差距-Thesis. 设仅允许两层几何 $((A^{(x)}, A^{(w)}))$ 。若存在法则族 (M) 使得

$$F^{(MM)} \neq 0 \quad \text{或} \quad F^{(xM)} \neq 0,$$

则无论如何进行几何规范变换与参数重标，都**不能**在两层框架内把该族等价压平为“只有 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 的模型”而同时保持 Jacobi 严格成立；必须引入第三层 (A_M) 与一个 basic 协变闭三形式 (H) 使

$$l_3(x, y, z) = \iota_{\rho(x)} \iota_{\rho(y)} \iota_{\rho(z)} H(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M), \quad D_{x, \mathbf{w}, M} H = 0,$$

从而在 2-term (L_∞) 意义下闭合：

$$\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3(x, y, z), \quad l_{n \geq 4} = 0.$$

当且仅当 $(F^{(MM)} = F^{(xM)} = 0)$ 且 $(H = 0)$ (或 exact 可吸收) 时，三层退化为两层且 Jacobi on-the-nose。

直观：两层世界无法容纳“法则随 (w) 的非平坦演化”的 holonomy，方环积分 $(\oint \oint_{\square} (\cdots))$ 产生的缺口必须由三层的 (H) 同伦项吸收。

3. “No-Go 引理”（两层不可表达性）

设 $(c :^2 \rightarrow \mathcal{W})$ 为参数小方环。若两层模型能吸收一切 (M) 的变形，则 (Hol) 仅由 $(A^{(x)}, A^{(w)})$ 决定，故

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \mathbf{1} \quad \text{对所有 } \square.$$

但当 $(F^{(MM)} \neq 0)$ 或 $(F^{(xM)} \neq 0)$ 时

$$\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \left(\int_{\square} F^{(MM)} + \int_{\square} F^{(xM)} + \cdots \right) \neq \mathbf{1},$$

除非增添一个 basic 3-形式 (H) 使 $(\exp \int_{\square} H)$ 抵消该缺口（即“等式 up to (l_3) ”）。故两层不可表达此族。□（思路）

4. 对位：元数学法则层 (\mathcal{A}_M) 与几何侧 (A_M)

存在表示函子 (R) 使

$$A_M = R(\mathcal{A}_M), \quad H = R\left(\text{CS}_3(\mathcal{A}_M), \text{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right).$$

Soundness: 若给定 $((\mathcal{A}_M, \mathcal{F}_M))$ 满足法则层条件, 则几何侧 $((A_M, H))$ 满足混合 Bianchi 与 $(D_{x,w,M}H = 0)$, 从而 (l_3) 同伦闭合。

Completeness (up to homotopy): 给定几何侧 $((A_M, H))$ 满足前述判据, 存在 (\mathcal{A}_M) 使 $(R(\mathcal{A}_M) = A_M)$ 且 (R) -CS 传递产生的 (H) 同伦等价于给定 (H) 。

5. 诊断量与证书 (可验证化)

- **缺口类**: $([H] \in H_{\text{basic}}^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a}))$; $([H] = 0 \Rightarrow)$ 严格退化可能。
- **方环证书**: $(\text{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\square) = \exp \int_{\square} H)$; Moonshine 场景下与复制性/模方程的方环一致。
- **混合曲率**: $(F^{(MM)}, F^{(xM)}, F^{(wM)})$ 的非零即 根本性差距 的观测证据。
- **Stasheff 证书**: 数值/符号核对 $(\sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H = l_3)$ 到指定阶。

6. 典型算例与退化

- **U(1) 最小例**: $(H = \lambda F^{(xx)} \wedge A_M)$ 。若 $(D_x F^{(xx)} = 0)$, $(d_{!w} A_M = 0)$ 则 $(D_{x,w,M}H = 0)$, Jacobiator 由 $(l_3 = \lambda \iota_{\alpha(\cdot)}^3(F^{(xx)} \wedge A_M))$ 记录; 当 $(A_M \equiv 0)$ 或 $(\lambda = 0)$ 时 根本性差距 崩塌回严格。
- **Moonshine 场景**: Dehn/Hecke 方环的 holonomy 若非 1, 则以 $(\int H)$ 量化, 复制性/模方程成为“等式 up to (l_3) ”的证书。

7. 结论

“法则变换 ($w \mapsto M_{!w}$) 与法则联络 (A_M)”把“法则本身如何生成与演化”的动力学升级为**三层联络-曲率 + 同伦判据 + 证书化验证**的一体结构; 其核心障碍类 $([H])$ 、混合曲率 $(F^{(MM)}, F^{(xM)})$ 与 Stasheff 闭合, 构成 **原版** 与传统两层几何之间的**根本性差距**。

Copyright (C) 2025 GaoZheng

本文档采用[知识共享-署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#)进行许可。