🚩🚩基于传统数学的主纤维丛参数化联络与广义非交换李代数（PFB-GNLA）的一体化构造：同伦版

- 作者：GaoZheng

- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.0.0

注："O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)"相关理论参见： 作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

本文为**同伦 Lie-型（Jacobi 允许受控失配）构造版，简称同伦版**。本文在传统微分几何的框架中，给出**可操作的、逐步的**"同伦版"PFB-GNLA 构造。核心思想是：在参数化主丛

$$\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \longrightarrow M \times \mathcal{W}$$

上引入**总联络**

$$\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)},$$

并选取一个 G-等变、basic 的、协变闭三形式 $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$。在此数据上定义扭曲括号 $l_2 = [\cdot,\cdot]_H$ 与三元同伦 $l_3 = \iota^3_{\rho(\cdot)} H$，得到一个**2-term L_∞-algebroid**（或半严格 Lie-2 代数丛）

$$l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot,\cdot]_H, \quad l_3 \neq 0, \quad l_{n \geq 4} = 0,$$

在 $D_{x,\mathbf{w}} H = 0$ 与扩展 Bianchi 恒等式 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 下满足 Stasheff 身份；当 $H = 0$ 或 $H = dB$ 可经规范吸收时退化为**严格 Jacobi**的 PFB-GNLA。构造过程详细给出**输入数据、逐步定义、局部-整体粘合、判据、规范性与参数自然性、示例与退化**，并附上**算法化检查清单**，保留传统几何的可检与可证风格，同时与"法则联络 ($\mathcal{A}_M$) 引入的三阶纠正 (l_3)"的元数学版对齐。

0. 预备与符号

- 主丛：$\pi : P \to M$，结构群 G，李代数 $\mathfrak{g}$。
- 参数域（外参/价值）：$\mathcal{W}$（光滑流形），点记 $\mathbf{w}$。
- 积主丛：$\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$。
- **总联络**：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}}, \qquad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}.$$

- **扩展 Bianchi**：

$$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} := d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} + [\mathbb{A}, \mathbb{F}] = 0.$$

- “骨架”$\mathcal{A}$-双模与锚：

$$L \;\cong\; \Gamma(TP/G) \;\oplus\; \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \qquad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X) \in \mathfrak{X}(M).$$

1. 构造输入：选择三形式源 H（同伦数据）

输入 1.1（H） 取

$$\boxed{H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W},\ \mathfrak{a}) \quad \text{basic 且 } G\text{-等变}, \qquad D_{x,\mathbf{w}}H = 0},$$

其中 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$（中心层）或 $\mathrm{ad}(P)$（伴随丛）。

典型来源

- **CS-传递**：令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathfrak{g}$ 上不变配对，

$$\mathrm{CS}_3(\mathbb{A}) = \big\langle \mathbb{A}, d\mathbb{A} \big\rangle + \tfrac{1}{3}\langle \mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{A}] \rangle, \quad d\,\mathrm{CS}_3 = \langle \mathbb{F} \wedge \mathbb{F} \rangle,$$

  对 CS_3 取 basic 投影或差分得到 H。
- **法则联络下推**（与元数学版对齐）：

$$H = R_!\big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M)\big) \quad \text{或} \quad H = R_!\big(\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\big)^\flat,$$

其中 $\mathcal{A}_M$ 是法则联络，R 为表示。

> **作用**：H 的同伦类 $([H])$ 将编码“雅可比失配”的受控量；$D_{x,\mathbf{w}}H=0$ 是同伦一致性的关键判据。

---

2. 构造底座：2-term 链复形与锚

定义 2.1（2-term 复形）

- 方案 A（伴随型）：$E_{-1}=0, E_0=L$;
- 方案 B（中心扩张型）：$E_{-1}=\mathbb{R}$（或 $\underline{\mathfrak{a}}$）、$E_0=L$。
  两者均取 $l_1=0$。

锚：$\rho: E_0=L\to TM$ 取 $\rho(X\oplus\xi)=\alpha(X)$。中心层 E_{-1} 取零锚。

---

3. 第 1 步：定义扭曲括号 $l_2=[\cdot,\cdot]_H$

对 $x=X\oplus\xi, y=Y\oplus\eta\in L$，设

$$\boxed{\begin{aligned}&[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\\ &[x,y]_0=[X,Y]\ \oplus\ \Big(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})}\eta-\mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})}\xi+[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}}+\iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}F^{(xx)}\Big),\end{aligned}}$$

其中 $\Theta_H: L\times L\to\Gamma(\mathfrak{a})$ 为由 H 诱导的双线性修正（可取 $\Theta_H=0\oplus\Phi_H$）。

检查 3.1（Leibniz 与锚兼容）

$$[x,ay]_H=(\rho x)a\cdot y+a[x,y]_H,\qquad \rho([x,y]_H)=[\rho x,\rho y]+\mathrm{ad}_{\kappa_H(x,y)},$$

κ_H 由 $\mathbb{F}$ 与 Θ_H 汇总给定。

---

4. 第 2 步：定义三元同伦 l_3

$$\boxed{l_3(x,y,z) := \ \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H \ \in \begin{cases}\Gamma(\mathrm{ad}(P)) \subseteq L, & \text{方案 A;}\\ \Gamma(E_{-1}), & \text{方案 B（中心）}\end{cases}.}$$

除 l_3 外，令 $l_{n\geq 4} \equiv 0$。

---

5. 第 3 步：验证 2-term L_∞ 身份（Stasheff)

命题 5.1（同伦 Jacobi 判据)
若 $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$ 成立，则

$$\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H = l_3(x,y,z), \qquad l_{n\geq 4} = 0.$$

证明要点. 展开双括号，$[\cdot,\cdot]_0$ 的 Jacobi 抵消；Θ_H 的混合项在 Bianchi 与 $D_{x,\mathbf{w}}H = 0$ 下汇聚为 $\iota^3_{\rho(\cdot)}H$。□

> **退化**：当 $H = 0$ 或 $H = dB$（并相应 B-场规范）时，$[\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_0, l_3 = 0$，返回严格 Jacobi。

---

6. 局部—整体：规范变换与粘合条件

规范与参数自然性

- 规范变换 $g : P \to G$：

$$\mathbb{A} \mapsto \mathrm{Ad}_g^{-1}\mathbb{A} + \mathrm{Ad}_g^{-1}d_{x,\mathbf{w}}g, \qquad \mathbb{F} \mapsto \mathrm{Ad}_g^{-1}\mathbb{F},$$

  H 取 CS-传递或不变构造 ⇒ 结构在 L_∞ 同构类不变。
- 参数变换 $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}'$：若 H 协变闭且 basic，则 (l_2, l_3) 自然流形同构。

粘合
在覆盖 $\{U_i\}$ 上，若局部数据 $(\mathbb{A}_i, H_i)$ 与过渡函数 g_{ij} 满足

$$\mathbb{A}_j = \mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}\mathbb{A}_i + \mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1} d_{x,\mathrm{w}} g_{ij}, \qquad H_j = H_i \text{ (或差一个 CS-精确项)},$$

则局部 L_∞ 结构可粘合为全局结构；不同选择导致的差异为 L_∞ 同构。

---

7. 退化与对照：严格版、Courant、string

- **严格版**：$H = 0$ 或 $H = dB$ 可吸收 ⇒ $[\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_0, l_3 = 0$。
- **Courant-型**：令 $L = TM \oplus T^*M$、$H \in \Omega^3(M)$ 闭，得经典 H-twisted Courant；本文为其在主丛/参数化的推广。
- **string-型中心扩张**：取 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}, E_{-1} = \mathbb{R}$，$l_3$ 为中心 ⇒ string Lie-2 模型；$H \to 0$ 回收严格版。

---

8. 最小算例：$\mathrm{U}(1)$ 与参数方向

令 $G = \mathrm{U}(1)$、$\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$。取

$$H := \lambda F^{(xx)} \wedge A^{(w)} \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

若 $D_x F^{(xx)} = 0$、$F^{(ww)} = 0$，则 $D_{x,\mathrm{w}} H = 0$。于是

$$l_3(X \oplus \xi, Y \oplus \eta, Z \oplus \zeta) = \lambda\, \iota_{\alpha(X)} \iota_{\alpha(Y)} \iota_{\alpha(Z)} \big(F^{(xx)} \wedge A^{(w)}\big),$$

给出非零 Jacobiator；当 $A^{(w)} = 0$ 或 $\lambda = 0$ 时退化为严格 PFB-GNLA。

---

9. 构造流程（算法化清单）

1. **输入**：主丛 $P \to M$、参数域 $\mathcal{W}$、总联络 $\mathbb{A}$、$\mathbb{F}$；
2. **选取** H：由 CS/法则联络构造 basic 协变闭 H；
3. **定义**：$E_{-1}, E_0, \rho, [\cdot,\cdot]_H, l_3$；

4. **检查**：Leibniz、锚兼容；验证 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0, D_{x,\mathbf{w}}H=0$；
5. **Stasheff**：证明 $\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z)$；
6. **规范/参数自然性**：变换规则与 L_∞ 同构；
7. **粘合**：覆盖上局部数据的 Čech 粘合；
8. **退化/特化**：必要时令 $H\to 0$（严格）、或取 Courant/string 特例。

---

10. 结论

上述**同伦化**构造将 PFB-GNLA 从“严格 Lie-型”系统性提升为**2-term L_∞** 体系：同伦三元 l_3 由协变闭三形式 H 控制，满足 Stasheff 身份并与扩展 Bianchi 相容；在 $H=0$/exact 时自动退化为严格版。该构造**完整体现了过程**（输入-定义-判据-粘合-自然性-退化-特例-算法化检查），既保留传统几何的可检与工程可落地性，又与元数学“重定义联络”的三阶纠正 (l_3) 形成一一对位，为刻画**法则演化**、异常/修正及其不变量（$([H])$）提供统一且可验证的工具集。
