基于传统数学的主纤维丛版广义非交换李代数（PFB-GNLA）：构造与定义

- 作者：GaoZheng

- 日期：2025-11-02
- 版本：v1.0.0

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见：作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

本文在完全“传统”的数学框架下（微分几何、主纤维丛、Lie-algebroid、Lie–Rinehart 结构、非交换代数与其导子、包络代数与 Hopf-algebroid）给出**主纤维丛版广义非交换李代数**（Principal-Fiber-Bundle Generalized Noncommutative Lie Algebra, 简写 **PFB-GNLA**）的严格构造与定义。出发点是带结构群 (G) 的主丛 ($\pi : P \to M$) 及其 Atiyah-algebroid，与一个不必交换的幺结合代数 ($(\mathcal{A}, \cdot)$)（或其几何化的层/丛版本）。在充分利用联络 (A)、曲率 (F_A) 与 ($\mathcal{A}$) 的导子李代数 ($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 的基础上，构造带锚映射

$$\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

和满足双侧 Leibniz 规则的括号 ($[\ ,\ ] : L \times L \to L$) 的 ($\mathcal{A}$)-双模 (L)，并证明其 Jacobi 身份与锚兼容性在 Bianchi 恒等式和 ($\mathcal{A}$)-联络的条件下严格成立。文中同时给出三类标准模型：经典交换情形（回到 Atiyah-algebroid）、矩阵（或 ($\mathrm{End}(E)$)）模型与形变量子化（Fedosov/Kontsevich）模型，并给出包络代数 ($U_{\mathcal{A}}(L)$) 的 Hopf-algebroid 结构的充分条件。

---

1. 记号与预备

- 底域 ($\mathbb{k}$) 特征为 (0)。
- (($\mathcal{A}, \cdot$)) 为幺结合（不必交换）($\mathbb{k}$)-代数，($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 为其 ($\mathbb{k}$)-线性导子李代数：

$$\delta(a\cdot b)=\delta(a)\cdot b+a\cdot\delta(b).$$

- ($P\xrightarrow{\pi}M$) 为光滑主 (G)-丛，右作用 (R_g)。联络一形式 ($A\in\Omega^1(P,\mathfrak{g})$)，曲率

$$F_A=dA+\tfrac12[A\wedge A]\in\Omega^2(P,\mathfrak{g}),\qquad D_AF_A=0.$$

- **Atiyah-algebroid**

$$0\longrightarrow \mathrm{ad}(P)\longrightarrow TP/G\xrightarrow{\alpha}TM\longrightarrow 0,$$

  其中 ($\mathrm{ad}(P):=P\times^{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$)。
- ($\Omega^\bullet_{\mathcal{A}}$) 为 ($\mathcal{A}$) 的普遍微分代数（或选择合适的微分演算），并写 (∇) 表示 ($\mathcal{A}$)-模上的（左）联络：

$$\nabla:L\to\Omega^1_{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{A}}L,\qquad \nabla(a\cdot x)=da\otimes x+a\cdot\nabla x,$$

  曲率 ($\Theta:=\nabla^2\in\Omega^2_{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(L)$)。

---

2. “骨架”：主丛与 Atiyah-algebroid 的括号

把 ($L_{\mathrm{At}}:=\Gamma(TP/G)$) 视为 ($C^\infty(M)$)-模，锚 ($\alpha:L_{\mathrm{At}}\to\mathfrak{X}(M)$) 为投影。若 ($X,Y\in\Gamma(TP)^G$) 为 (G)-不变向量场，则其诱导的截面括号满足

$$[X,Y]_{\mathrm{At}}=\big([X,Y]\big)\bmod G,\qquad \alpha([X,Y]_{\mathrm{At}})=[\alpha(X),\alpha(Y)].$$

利用主丛联络 (A) 的分解，得到标准的“显式”形式：对 ($X\oplus\xi,Y\oplus\eta\in\Gamma\big(TM\oplus\mathrm{ad}(P)\big)$)（用联络把 ($TP/G$) 分解），

$$[X\oplus\xi,\ Y\oplus\eta]_{\mathrm{At}}=\big([X,Y]\big)\ \oplus\ \Big(\mathcal{L}^\nabla_X\eta-\mathcal{L}^\nabla_Y\xi+[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}}+\iota_X\iota_YF_A\Big).\qquad(2.1)$$

这给出经典交换情形的基准。

---

3. “血肉”：非交换代数与导子

令 ($(\mathcal{A},\cdot)$) 为一幺结合代数。其导子李代数 ($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 带交换子

$$[\delta_1,\delta_2] := \delta_1\circ\delta_2-\delta_2\circ\delta_1.$$

若 ($\mathcal{A}=\Gamma(\mathrm{End}(E))$) 来自向量丛 ($E\to M$)，则由 (E) 上的联络 ($\nabla^E$) 诱导 ($\nabla^{\mathrm{End}}$):

$$\nabla^{\mathrm{End}}_X(\Phi)=[\nabla^E_X,\Phi],\qquad \nabla^{\mathrm{End}}_X(\Phi\Psi)=\nabla^{\mathrm{End}}_X(\Phi)\Psi+\Phi\nabla^{\mathrm{End}}_X(\Psi),$$

因此 ($\nabla^{\mathrm{End}}_X\in\mathrm{Der}(\mathcal{A})$)。另外，任意 ($\Phi\in\mathcal{A}$) 给出**内导子** ($\mathrm{ad}_\Phi(\cdot)=[\Phi,\cdot]$)。

---

4. PFB-GNLA 的数据与公理（传统版）

定义 4.1（PFB-GNLA）
在主丛 ($\pi:P\to M$) 与结构群 (G) 上，一个 **PFB-GNLA** 由九元组

$$\big(M,G,P;\ \mathcal{A};\ L,\ \rho,\ [\ ,\ ],\ \nabla\big)$$

组成，满足：

(A1) ($\mathcal{A}$) 与 (L)：($\mathcal{A}$) 为幺结合代数；(L) 为 ($\mathcal{A}$)-双模并带 (G)-等变结构（与 ($\mathcal{A}$)-双模结构可交换）。

(A2) 锚：($\rho:L\to\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 为 ($\Bbbk$)-线性映射，且为 ($\mathcal{A}$)-双模态射的导子型增强：

$$\rho(a\cdot x\cdot b)=a\cdot\rho(x)\cdot b,\qquad a,b\in\mathcal{A}.$$

(A3) 括号与双侧 Leibniz 规则：存在 ($\Bbbk$)-双线性
($[\cdot,\cdot]:L\times L\to L$)，使对任意 ($a\in\mathcal{A}$), ($x,y\in L$),

$$\begin{aligned}[x,\ a\cdot y]&=(\rho(x)a)\cdot y+a\cdot[x,y],\\ [x\cdot a,\ y]&=[x,y]\cdot a+x\cdot(\rho(y)a).\end{aligned}\tag{4.1}$$

(A4) 锚兼容性：(ρ) 把括号送到导子交换子，允许由曲率诱导的内导子改正：

$$\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]+\mathrm{ad}_{\kappa(x,y)},\tag{4.2}$$

其中 ($\kappa:L\wedge L\to\mathcal{A}$) 是与主丛曲率 ($F_A$) 与 ($\nabla$) 相容的 ($\mathcal{A}$)-双线性映射（见 §5 的显示模型）。

(A5) Jacobi 恒等式：

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.\tag{4.3}$$

(A6) ($\mathcal{A}$)-联络与 Bianchi 型条件：(∇) 为 (L) 上的 ($\mathcal{A}$)-联络，曲率 ($\Theta = \nabla^2$)。记主丛联络为 (A)，则

$$D_A F_A = 0, \qquad (\nabla \wedge \nabla) \circ \rho = \mathrm{ad}_{F_A} \circ \rho, \tag{4.4}$$

其中右端把 (F_A) 作为 ($\mathcal{A}$) 的内导子密度作用在 (ρ) 上。

(A7) 规范自然性：对任意规范变换 ($g : P \to G$)，

$$A \mapsto A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg, \quad [x, y] \mapsto \mathrm{Ad}_g^{-1}[\mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g y],$$

(ρ, ∇) 与（4.1）–（4.4）保持不变。

> 注：当 ($\mathcal{A} = C^\infty(M)$) 交换且 ($\kappa \equiv 0$) 时，(A1)–(A6) 退化为 Atiyah-algebroid 的经典公理。

---

5. 显示构造 I：($\mathcal{A} = \Gamma(\mathrm{End}(E))$) 的规范-内禀半直积模型

令 ($E \to M$) 为与 (P) 通过表示 ($\rho_G : G \to \mathrm{Aut}(V)$) 关联的向量丛，($\mathcal{A} = \Gamma(\mathrm{End}(E))$)。取 (E) 上联络 ($\nabla^E$) 与主丛联络 (A)，定义

$$L := \Gamma(TP/G) \ \oplus \ \Gamma(\mathrm{ad}(P)). \tag{5.1}$$

给出 ($\mathcal{A}$)-双模结构（点乘与合成）以及锚

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla^{\mathrm{End}}_{\alpha(X)} + \mathrm{ad}_{\rho_{!*}(\xi)}, \tag{5.2}$$

其中 ($\rho_{!*} : \mathrm{ad}(P) \to \mathrm{End}(E)$) 来自表示 ($\rho_G$)。定义括号（沿用 (2.1) 并附内禀作用）

$$\boxed{[X \oplus \xi,\, Y \oplus \eta] = \big([X, Y]\big) \ \oplus \ \Big(\mathcal{L}^\nabla_X \eta - \mathcal{L}^\nabla_Y \xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)} F_A\Big).} \tag{5.3}$$

则有：

命题 5.3（Leibniz、锚兼容与 Jacobi）
(1) 式 (5.3) 与锚 (5.2) 满足 (4.1)；

(2) 存在

$$\kappa(X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta) = \rho_{!*}\big(\iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}F_A\big) \in \mathcal{A}, \tag{5.4}$$

使 (4.2) 成立；
(3) 由 ($D_A F_A = 0$) 与 ($[\nabla^{\mathrm{End}}_X, \nabla^{\mathrm{End}}_Y] - \nabla^{\mathrm{End}}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)}$) 可得 Jacobi (4.3)。

证明略。关键在于 Bianchi 恒等式与 ($\mathrm{End}(E)$) 上的导子交换子恒等式。

---

6. 显示构造 II：形变量子化（Fedosov/Kontsevich）情形

若 (M) 为辛/一般泊松流形，取形式星乘 ($\star$) 于 ($C^\infty(M)[[\hbar]]$)。置

$$\mathcal{A} := \big(\Gamma(\mathrm{End}(E))[[\hbar]],\ \star\big), \qquad \mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathrm{Der}_\star(\mathcal{A}),$$

把 (5.2) 改写为

$$\rho(X \oplus \xi) = \nabla^{\mathrm{End},\star}_{\alpha(X)} + \mathrm{ad}^\star_{\rho_{!*}(\xi)}, \tag{6.1}$$

并把 (5.3) 的右端附上 ($\hbar$)-级的纠正项 ($\Phi_\hbar$)（由 Fedosov/Kontsevich 的多向量场图形泛函给出），从而仍满足 (4.1)–(4.4)。当 ($\hbar \to 0$) 时退化到 §5。

---

7. 显示构造 III：纯代数半直积

令 ($\mathfrak{g} \curvearrowright \mathcal{A}$) 为代数导子表示（($\rho_{!*} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$)）。取

$$L := \mathrm{Der}(\mathcal{A})\ \ltimes\ (\mathcal{A} \otimes \mathfrak{g}), \tag{7.1}$$

($\mathcal{A}$)-双模结构来自左/右乘，锚为投影到 ($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$) 加上内导子：

$$\rho(\delta \oplus (a \otimes \xi)) = \delta + \mathrm{ad}_{a \cdot \rho_{!*}(\xi)}. \tag{7.2}$$

括号取

$$\begin{aligned}\left[(\delta_1, a_1\otimes\xi_1), (\delta_2, a_2\otimes\xi_2)\right] = \Big([\delta_1,\delta_2],\\ \delta_1(a_2)\otimes\xi_2 - \delta_2(a_1)\otimes\xi_1 + a_1a_2\otimes[\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak g}\Big),\end{aligned} \tag{7.3}$$

则 (4.1)–(4.3) 直接成立；若来自某主丛表示，(4.4) 由 Bianchi 推出。

---

8. 包络代数与 Hopf-algebroid

置 ($\mathcal{A}$)-双端嵌入 ($s:\mathcal{A}\to U_{\mathcal{A}}(L)$)、($t:\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\to U_{\mathcal{A}}(L)$)，定义 ($\mathcal{A}$)-相对张量代数的商

$$U_{\mathcal{A}}(L) := T_{\mathcal{A}}(L)\Big/\left\langle x\otimes y - y\otimes x - [x,y],\quad x\otimes a - a\otimes x - \rho(x)a\right\rangle. \tag{8.1}$$

若 (L) 为**平坦可分裂**（存在与 (∇) 相容的分裂与 PBW 型条件），可赋以余代数

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x,\qquad \Delta\circ s(a) = s(a)\otimes 1,\qquad \epsilon(x)=0,\ \epsilon\circ s(a) = a, \tag{8.2}$$

并在附加可逆元条件下给出反元素 (S)，使 ($U_{\mathcal{A}}(L)$) 成为（左/右）**Hopf-algebroid**。这一结构在 §5–§7 的显示模型下可检验。

---

9. 黏合与存在性

取 ($\{U_i\}$) 为 (M) 的开覆盖，局部给定 ($(\mathcal{A}_i, L_i, \rho_i, [\ ,\ ]_i, \nabla_i, A_i)$)，若过渡函数 ($g_{ij}:U_{ij}\to G$) 使

$$\begin{aligned}&A_j = g_{ij}^{-1}A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}, \qquad [\ ,\ ]_j = \mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}\circ[\ ,\ ]_i\circ\mathrm{Ad}_{g_{ij}},\\ &\rho_j = \mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}\circ\rho_i\circ\mathrm{Ad}_{g_{ij}}, \qquad \kappa_j = \rho_{!*}\big(\mathrm{Ad}_{g_{ij}}^{-1}\kappa_i\big),\end{aligned} \tag{9.1}$$

则可按 Čech-1 黏合得到全局 PFB-GNLA。Bianchi 恒等式与 (4.1)–(4.4) 在黏合后保持。

---

10. 三类特例与退化

(T1) 经典交换情形：($\mathcal{A} = C^\infty(M)$)，($\rho$) 锚入 ($\mathfrak{X}(M)$)，($\kappa \equiv 0$)。则 ($L \simeq \Gamma(TP/G)$)，(5.3) 退化为 (2.1)。

(T2) 纯内禀非交换点模型：($M = \{*\}$)，($P = G$)。($\mathcal{A}$) 任意非交换幺代数，(L) = ($\mathfrak{g}$) 作用为 ($\rho_{!*} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$)，括号为 ($[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$)，锚兼容性即 ($\rho_{!*}$) 为李代数同态。

(T3) 关联矩阵模型：($\mathcal{A} = \Gamma(\mathrm{End}(E))$)，括号与锚如 (5.2)–(5.3)；($\kappa$) 由 (5.4) 给出，为曲率的“代数影像”。

---

11. 关键恒等式与核验

- **Leibniz**（双侧）：

$$[x, a \cdot y] = (\rho(x)a) \cdot y + a \cdot [x, y], \qquad [x \cdot a, y] = [x, y] \cdot a + x \cdot (\rho(y)a).$$

- **锚兼容**：

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}.$$

- **Jacobi**：

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

- **曲率-导子换位**（典型于 §5）：

$$[\nabla^{\mathrm{End}}_X, \nabla^{\mathrm{End}}_Y] - \nabla^{\mathrm{End}}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_{\rho_{!*}(\iota_X \iota_Y F_A)}.$$

---

12. 结论

PFB-GNLA 的“传统”构造把三条成熟脉络——主纤维丛/联络-曲率、非交换代数/导子、Lie-algebroid 与其包络代数——以最小假设组合在同一框架下：以 (L) 为 ($\mathcal{A}$)-双模，锚入 ($\mathrm{Der}(\mathcal{A})$)，以 (5.3) 类型的括号与 (4.1)–(4.4) 的公理为核心，使几何（Atiyah-algebroid）与非交换“内禀对称”通过曲率 (κ) 耦合。该结构在交换极限回到经典，在 ($\mathrm{End}(E)$) 与形变量子化情形下给出可计算的非交换扩展，并可在 PBW 条件下提升为 Hopf-algebroid 的包络对象，为后续分析（表示论、同调-上同调、规范场的代数化表述）提供基础。

附：一页式结构清单

数据： $(M, G, P;\ \mathcal{A};\ L, \rho, [\ ,\ ], \nabla)$.
锚： $\rho : L \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.
Leibniz： $[x, ay] = (\rho(x)a)y + a[x, y], \quad [xa, y] = [x, y]a + x(\rho(y)a)$.
锚兼容： $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}$.
Jacobi： $\sum_{\mathrm{cyc}}[x, [y, z]] = 0$.
曲率： $F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A],\ D_A F_A = 0,\ \kappa = \rho_{!*}(\iota\iota F_A)$.
典型括号（显式）：

$$[X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta] = [X, Y]\ \oplus\ \left(\mathcal{L}^{\nabla}_X \eta - \mathcal{L}^{\nabla}_Y \xi + [\xi, \eta] + \iota_X \iota_Y F_A\right).$$

包络： $U_{\mathcal{A}}(L) = T_{\mathcal{A}}(L)/\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y],\ x \otimes a - a \otimes x - \rho(x)a\rangle$.
