🚩🚩🚩四版 PFB-GNLA 的对标与对位：从严格几何到“法则-算子”同伦，再到元数学原版

- 作者：GaoZheng
- 日期：2025-11-08
- 版本：v1.1.1

注：“O3理论/O3元数学理论(基于泛逻辑分析与泛迭代分析的元数学理论)/主纤维丛版广义非交换李代数(PFB-GNLA)”相关理论参见： 作者（GaoZheng）网盘分享 或 作者（GaoZheng）开源项目 或 作者（GaoZheng）主页，欢迎访问！

摘要

本文对齐并对位四个版本的主纤维丛版广义非交换李代数（PFB-GNLA）一体化构造：（1）**严格版**（Jacobi 严格成立）；（2）**同伦版**（允许三元同伦 (l_3)）；（3）**可变泛函-算子同伦版**（将 (w) 从“参数”提升为“**法则泛函算子轨迹**”，引入算子方向联络 (A_M)）；（4）**元数学原版**（“重定义联络”$(\mathcal{A}_M)$ 与三阶纠正(l_3)）。在统一的主丛—参数—算子三层联络图景下，给出核心数据、判据与退化，建立从“法则层”到“传统几何层”的表示对位：

$$A_M \overset{R}{\longleftrightarrow} \mathcal{A}_M, \qquad H!\left(A^{(x)}, A^{(w)}, A_M\right) \overset{R}{\longleftrightarrow} R!\left(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M), \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\right),$$

并给出同构/退化条件：

$$D_{x,\mathbf{w},M} H = 0, \qquad D_{x,\mathbf{w}} \mathbb{F} = 0, \qquad F^{(xM)} = F^{(MM)} = 0 \Rightarrow l_3 = 0.$$

由此说明：严格版是“无异常/无法则演化”的经典极限；同伦版以 (H) 统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版把“法则演化”提升为算子几何的**一等公民**；元数学原版在法则层给出生成—纠正的起点。四版因此形成从**静态等式**到**生成式法则**的层级序列，且可相互表示、检验与退化。

---

1. 统一骨架与分层联络

设主丛 ($\pi : P \to M$)，结构群 (G)，参数域 ($\mathcal{W}$)。在积主丛 ($\mathcal{P} := P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$)上引入

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = d_{x,\mathbf{w}}\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}}$$

并取“骨架”($\mathcal{A}$)-双模

$$L \cong \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \qquad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

严格版与**同伦版**工作在 (($M, \mathcal{W}$))-两层；**可变泛函-算子同伦版**引入第三层（法则—算子）：

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w} \in \Omega^1(\mathcal{W},\ \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}), \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M}$$

$$\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)} + F^{(xM)} + F^{(wM)} + F^{(MM)}$$

$$F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M, \quad F^{(xM)} = d_x A_M + [A^{(x)}, A_M], \quad F^{(wM)} = [A^{(w)}, A_M]$$

并满足**混合 Bianchi**

$$\boxed{D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0}$$

---

2. 严格版（Jacobi on-the-nose）

Atiyah-型括号

$$\boxed{[X \oplus \xi,\ Y \oplus \eta]_0 = [X, Y] \qquad \oplus \Big(\mathcal{L}_X^{\nabla(\mathbf{w})}\eta - \mathcal{L}_Y^{\nabla(\mathbf{w})}\xi + [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} + \iota_{\alpha(X)}\iota_{\alpha(Y)}F^{(xx)}\Big)}$$

满足 Leibniz 与锚-曲率兼容

$$\rho([x, y]_0) = [\rho x, \rho y] + \mathrm{ad}_{\kappa(x,y)}, \qquad \kappa \propto \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}F^{(xx)}$$

且严格 Jacobi

$$\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_0]_0=0.$$

定位：无异常、无法则演化的经典几何；PBW/包络/表示链条直接可用。

---

3. 同伦版（(H)-twisted 2-term (L_∞)）

取 (G)-等变、basic 的三形式

$$\boxed{H\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a})\qquad D_{x,\mathbf{w}}H=0,\ \ \mathfrak{a}=\mathbb{R}\text{ 或 }\mathrm{ad}(P)}$$

定义

$$[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\qquad \boxed{l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H}$$

在 ($D_{x,\mathbf{w}}H=0$) 与 ($D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$) 下满足 Stasheff：

$$\boxed{\sum_{\mathrm{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z),\qquad l_{n\ge 4}=0}$$

当 ($H=0$) 或 ($H=dB$) 可吸收，退化回严格版。
定位：把“异常/修正”统一吸纳为 (H) 的同伦类 ($[H]$)，解释“等式 up to (l_3)”。

---

4. 可变泛函-算子同伦版（将 (w) 提升为“法则泛函算子”）

将 (w) 提升为法则函子轨迹 ($M_{!w}$)，引入 (A_M) 与三层曲率 ($\mathbb{F}_{\mathrm{tot}}$)。选择

$$\boxed{H=H!\big(A^{(x)},A^{(w)},A_M\big)\in\Omega^3(M\times\mathcal{W},\ \mathfrak{a}),\qquad D_{x,\mathbf{w},M}H=0}$$

定义

$$[x,y]_H = [x,y]_0 + \Theta_H(x,y), \qquad \boxed{l_3(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H(A^{(x)},A^{(w)},A_M)}$$

此时 (l_3) 的来源不再是“外加”，而是**法则演化的算子几何**之必然产物；若

$$F^{(MM)} = 0, \qquad F^{(xM)} = 0$$

则“法则演化”与几何兼容，(H) 可退为几何/参数二层；进一步若 ($H = 0$) 或 exact，则回收严格版。
定位：与元数学“重定义联络”完全对位；解释“法则随 (w) 的生成与纠正”。

---

5. 元数学原版（法则联络 ($\mathcal{A}_M$) 与三阶纠正）

法则层给出

$$\mathcal{A}_M \in \Omega^1(\mathcal{W},\ \mathfrak{g}_{\mathrm{op}}), \qquad \mathcal{F}_M = d_{!w}\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_M \wedge \mathcal{A}_M$$

以及三阶纠正

$$l_3^{(\mathrm{orig})}(x,y,z) = \iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}R!\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\ \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big)$$

并含非交换修正 ($\Phi_\hbar$):

$$[X\oplus\xi,\ Y\oplus\eta]_\star = [\cdot,\cdot]_0 + \Phi_\hbar(X\oplus\xi,\ Y\oplus\eta;\ \mathcal{F}_M).$$

对位映射（表示 (R)）：

$$\boxed{A_M = R(\mathcal{A}_M), \qquad H(A^{(x)},A^{(w)},A_M) = R!\Big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\ \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M \wedge \mathcal{F}_M)\Big)}$$

在 (R) 下，可把原版的法则层同伦项、非交换修正下推至几何—参数—算子三层。

---

6. 对标与对位（条理化陈述）

(i）数据层对位：
严格版与同伦版共享 $((P,\mathcal{W};A^{(x)},A^{(w)};\mathbb{F}))$；可变泛函-算子同伦版增加 ($(\mathcal{Q};A_M;F^{(xM)},F^{(wM)},F^{(MM)})$)；原版给出 $((\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M))$ 与 $(\Phi_\hbar)$。映射 (R) 实现

$$\mathcal{A}_M\mapsto A_M,\quad \mathcal{F}_M\mapsto F^{(MM)},\quad \text{并由此生成 } H.$$

(ii）同伦/严格判据：

$$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0,\quad D_{x,\mathbf{w},M}H=0\ \Rightarrow\ \sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z).$$

$$F^{(xM)}=F^{(MM)}=0,\ H=0\ (\text{或 exact})\quad\Rightarrow\ l_3=0\ (\text{严格极限}).$$

(iii）动机：
严格版=静态等式；同伦版=(H) 统一吸纳三阶“失配”；可变泛函-算子同伦版=法则演化的“算子几何”；原版=生成式法则的起点。
“指标定理式”理解：$([H])$ 是变形不变量（“指数类”），holonomy 方环的“缺口”由 $(\int H)$ 量化。

(iv）验证/工程：
严格版检 $(D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0)$ 与严格 Jacobi；同伦版再检 $(D_{x,\mathbf{w}}H=0)$ 与 Stasheff；可变泛函-算子同伦版还检 $((F^{(MM)},F^{(xM)}))$；原版可通过 (R) 下推到几何侧进行证据化（例如 (H) 证书、Jacobiator 证书）。

---

7. 代表性公式集（便于引用）

1. **扩展 Bianchi**：$(D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0)$，同伦版外再有 $(D_{x,\mathbf{w},M}H=0)$。
2. **扭曲括号**：$([x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y))$。
3. **三元同伦**：$(l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H)$。
4. **Stasheff**：$(\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z))$。
5. **算子 Maurer–Cartan**：$(F^{(MM)}=d_{!w}A_M+A_M\wedge A_M)$。
6. **表示对位**：$(A_M=R(\mathcal{A}_M))$，$(H=R(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M\wedge\mathcal{F}_M)))$。

---

8. 结论

四版构造在同一“主丛—参数—算子”联络-曲率语义下**严格对位**：严格版提供“清爽等式”、同伦版提供“受控失配”的统一编码，可变泛函-算子同伦版将**法则演化**升格为算子几何，元数学原版在法则层给出生成与三阶纠正的“第一性”表达。通过表示 (R) 与协变闭/退化判据，可在四版之间往返：**原版** $\to$ **（算子表示）** $\to$ **同伦版** $\to$ **严格极限**。这种分层与对位，使得“解释为何”“落实如何算”“验证如何检”三者在同一框架内闭环。

附件1：定理化与证明骨架（Stasheff 闭合、表示下推与 Hopf-algebroid）

把四版正文中的“命题/判据/要点”提升为可复核的**定理—引理—证明提纲**。包含：两层与三层情形下的 L_∞ 闭合定理（A、B）、法则层→几何层的表示下推完备性（C），以及包络与 Hopf-algebroid 的存在判据（D）。

统一设定

令 $\pi : P \to M$ 为主 G-丛，参数域 $\mathcal{W}$ 光滑，积主丛 $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$。
总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0}$$

骨架双模与锚：

$$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P)), \qquad \rho(X \oplus \xi) = \alpha(X).$$

若引入法则-算子层，则再加：

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0}.$$

定理 A（两层 H-twist 的 2-term L_∞ 闭合）

假设：
(H1) $H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、G-等变且协变闭：$D_{x,\mathbf{w}}H = 0$。

(H2) $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$。
定义扭曲括号与三元同伦：

$$\boxed{[x,y]_H=[x,y]_0+\Theta_H(x,y),\qquad l_3(x,y,z)=\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}H}$$

其中 $([x,y]_0)$ 为 Atiyah-型括号，Θ_H 为由 H 诱导的双线性修正（中心或伴随型）。
结论：形成 2-term L_∞ 代数

$$l_1=0,\quad l_2=[\cdot,\cdot]_H,\quad l_3\neq 0,\quad l_{n\geq 4}=0,$$

并且

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z)}.$$

证明提纲：逐项展开 $([\cdot,\cdot]_H=[\cdot,\cdot]_0+\Theta_H)$。
(i) $([\cdot,\cdot]_0)$ 的 Jacobi 由 $D_xF^{(xx)}=0$ 消去；
(ii) 混合项在 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$ 与 $D_{x,\mathbf{w}}H=0$ 下配平；
(iii) 残项汇聚为 ι_ρ^3H。□

定理 B（三层含 A_M 的同伦闭合）

假设：
(B1) 三层曲率满足混合 Bianchi：$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}}=0$。
(B2) $H=H(A^{(x)},A^{(w)},A_M)$ basic、等变且协变闭：$D_{x,\mathbf{w},M}H=0$。
结论：同上式定义的 (l_1,l_2,l_3) 满足

$$\boxed{\sum_{\text{cyc}}[x,[y,z]_H]_H=l_3(x,y,z),\quad l_{n\geq 4}=0,}$$

并在 $F^{(MM)}=F^{(xM)}=0$（以及 $H=0$ 或 exact 可吸收）时退化为严格 Jacobi。
证明提纲：与定理 A 同，但需额外使用 $F^{(xM)},F^{(wM)},F^{(MM)}$ 的混合 Bianchi 项来抵消 A_M 诱导的交叉项。□

定理 C（表示下推的 soundness/completeness up to homotopy）

设定：存在表示 $R:\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)\to\mathcal{G}_{\rm op}$ 及 Chern–Simons/传递型函子 $R_!$。
(C1) Soundness：给定法则层 $(\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M)$，取

$$\boxed{A_M=R(\mathcal{A}_M),\qquad H=R_!\big(\mathrm{CS}_3(\mathcal{A}_M),\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_M\wedge\mathcal{F}_M)\big)},$$

则 $D_{x,\mathrm{w},M}H=0$，定理 B 成立。
(C2) Completeness（up to homotopy）：若几何侧 (A_M,H) 满足定理 B 且 $[H]\in H^3_{\rm basic}(M\times\mathcal{W},\mathfrak{a})$，则存在 $(\mathcal{A}_M,\mathcal{F}_M)$ 与 $(R,R_!)$ 使上式成立，且给定 H 与 $R_!(\cdot)$ 表示的同伦类相同。
证明提纲：Soundness 由自然性与 $R_!$ 保协变闭性给出；Completeness 以类比 Chern–Weil/家族 CS 传递与同调提升，构造 $\mathcal{A}_M$ 使 A_M 为其像，并匹配 $[H]$。□

定理 D（$U_\star(L)$ 为 Hopf-algebroid 的充分条件）

假设：
(D1) $(\mathcal{A},\star)$ 为非交换幺代数，L 为 $\mathcal{A}$-双模，满足 (P1)–(P4)，并配有增广锚 ρ。
(D2) **PBW-型条件**：$U_\star(L)$ 的递增过滤 $\{F^n\}$ 使 $\mathrm{gr}\,U_\star(L)\simeq\mathrm{Sym}_{\mathcal{A}}(L)$（$\mathcal{A}$-代数同构）。
(D3) 扩展 Bianchi 与锚-曲率兼容成立（四版正文条件）。
结论：存在余代数

$$\boxed{\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\quad \epsilon(x)=0}$$

与 Takeuchi 乘积约束，使 $U_\star(L)$ 成为（左/右）Hopf-algebroid；当 $H=0$ 且 $\hbar\to 0$ 时退化为经典情形。
证明提纲：以 (D2) 控制重排与余代数一致性；(D3) 保证余乘与锚兼容；验证基扩张后 Takeuchi 子空间封闭性。□

附件2：集中定义区（术语与对象的精确定义）

把四版分散出现的核心对象集中定义，统一语义与约束。

1. 范畴与自同构

- $\mathbf{L}_B(\mathbf{w}), \mathbf{L}_F(\mathbf{w})$：严格单oidal范畴（单位与结合子恒等），对象分别为“法则前库/后库”经 $\Phi_{\mathbf{w}}$ 筛选的算子包；$\otimes$ 为并行复合。
- $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F)$：保持 $\otimes$ 与单位的单oidal自同构群（或 2-群）。本文在可表象时视作常规 Lie 群（或 Fréchet-Lie 群）处理。

2. 表示与传递

- **表示** R：$\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathbf{L}_F) \to \mathcal{G}_{\mathrm{op}} \subset \mathrm{GL}(V)$ 的群同态。
- **传递** $R_!$：把 3-形式型特征（如 CS）从法则层下推到几何层的函子（保协变闭性与同伦类）。

3. basic 与等变

- **basic**：在 P 上为水平且 G-不变的形式；等价于 $\Omega^\bullet(M, \mathrm{ad}(P))$ 的自然下沉。
- **G-等变**：对伴随作用不变；记作 Ad-不变。

4. 星乘与形变项

- $(\mathcal{A}, \star)$：Moyal/Kontsevich/形式形变类；$\star = \cdot + \hbar B_1 + \hbar^2 B_2 + \cdots$。
- $\Phi_\hbar$：括号的非交换修正，一般形如

$$\boxed{\Phi_\hbar = \hbar\,\Pi_1(\mathbb{F}) + \hbar^2\,\Pi_2(\mathbb{F}, \nabla) + \cdots}$$

  并保持 (P1)–(P4) 至相应阶。

5. 价值/语义函数族

- $J : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^k$（逻辑性度量，次可加、弱单调），$\mathrm{Loc} : \mathcal{P} \to$ **语义域**。
- **阈值族** $\Sigma(\mathbf{w})$：由 (J, Loc) 给定的 basic 子流形/超曲面族，用于“连续→离散”的跃迁判据。

附件3：代表性算例与复现实验接口

给出可复算的三类例子与统一的“验证脚本 I/O 规范”。

1. $\mathrm{U}(1)$ 最小例（两层）

设 $G=\mathrm{U}(1)$、$\mathfrak{g}=i\mathbb{R}$。取

$$F^{(xx)}=d_xA^{(x)},\quad A^{(w)}\ \text{basic},\quad H=\lambda\,F^{(xx)}\wedge A^{(w)}.$$

若 $D_xF^{(xx)}=0$ 且 $F^{(ww)}=0$，则 $D_{x,\mathbf{w}}H=0$。于是

$$\boxed{l_3(x,y,z)=\lambda\,\iota_{\rho(x)}\iota_{\rho(y)}\iota_{\rho(z)}\big(F^{(xx)}\wedge A^{(w)}\big)}.$$

当 $A^{(w)}=0$ 或 $\lambda=0$ 时退化为严格版。

2. $\mathrm{SU}(2)$ 非阿贝尔算例（两层）

在 $S^3\simeq\mathrm{SU}(2)$ 上取平凡丛与 Maurer–Cartan 形式 ϑ，令

$$A^{(x)}=\mu\,\vartheta,\quad F^{(xx)}=\mu^2\,\vartheta\wedge\vartheta,\quad A^{(w)}=\nu(\mathbf{w})\,\vartheta.$$

取

$$H=\kappa\,\langle F^{(xx)}\wedge A^{(w)}\rangle_{\mathrm{Ad}},$$

则在 $d\langle\cdot,\cdot\rangle=0$、$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F}=0$ 下有 $D_{x,\mathbf{w}}H=0$，并得到非零 Jacobiator。检验：计算 $\int_{S^3\times\gamma_{\mathbf{w}}}H$ 与三元同伦的一致性。

3. 非交换星乘算例（Moyal 平面）

取 $\mathcal{A}=C_c^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$ 上的 Moyal 星乘；令

$$\Phi_\hbar^{(1)}(x,y)=\hbar\,\Pi_1\big(\mathbb{F};x,y\big),\quad \Pi_1\ \text{线性于}\ \mathbb{F}.$$

在 $\hbar$ 一阶，验证
(i) Leibniz (P1) 与锚兼容 (P2) 保持；
(ii) l_3 仍由 H 给出，且 $\hbar\to0$ 时回收两层严格版。

4. 验证脚本 I/O 规范（面向工程复现）

- **输入 JSON（示意）**

```
{
  "bundle": {"G": "U(1)|SU(2)", "base": "chart or mesh"},
  "forms": {
    "Ax": "...", "Aw": "...", "AM": "...(可空)",
    "H": "...",
    "pairing": "Ad-invariant form (可选)"
  },
  "ops": ["functional_flatness", "mixed_flatness", "stokes_l3", "degeneration_test"]
}
```

- **输出**
  数值证书（曲率范数、Bianchi 偏差、$\sum_{\mathrm{cyc}}$ 与 l_3 的差、方环积分 $\int_{\square} H$ 等），附通过/失败标志与最大偏差。

附件4：相关工作与对照图谱（提纲式）

把四版与经典对象的关系明确化，便于编制参考文献。

- **Atiyah-algebroid 与参数化联络**：四版的 $([\cdot,\cdot]_0)$ 与 ρ 出自 Atiyah-型结构；参数化联络把 d_x 扩展到 $d_{x,\mathbf{w}}$。
- **Courant 与 H-twist**：同伦版是 Courant H-扭曲在“主丛/参数化”的推广；当 $L = TM \oplus T^*M$ 且 $H \in \Omega^3(M)$ 闭时回收经典情形。
- **2-term L_∞**：$l_3 = \iota_\rho^3 H$ 的构造与 Stasheff 身份的验证与标准 Lie-2/代数丛框架一致。
- **Chern–Simons 与传递**：H 的来源可由 CS_3 与 $\mathrm{Tr}(F \wedge F)$ 的 basic 投影获得，保障协变闭性。
- **无限维 Lie 群**：法则-算子群 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的 tame Fréchet/Hilbert-Lie 背景与 Ebin–Marsden、Hamilton、Kriegl–Michor、Neeb 的框架对齐。
- **Hopf-algebroid 与 PBW**：$U_\star(L)$ 的过滤与 PBW-型判据，参照双（半）代数与 Takeuchi 乘积的标准条件。

> 注：正式稿请据此清单增补规范参考文献条目。

附件5：统一符号与约定表

符号	含义	说明
$P \to M$	主 G-丛	结构群 G，李代数 $\mathfrak{g}$
$\mathcal{W}$	参数流形	点 $\mathbf{w}$
$\mathbb{A}$	总联络 ($A^{(x)} + A^{(w)}$)	两层情形
$\mathbb{F}$	曲率 ($F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}$)	$D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$
A_M	法则-算子联络	$A_M = M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}$
$\mathbb{A}_{\text{tot}}$	三层总联络	$A^{(x)} + A^{(w)} + A_M$
$\mathbb{F}_{\text{tot}}$	三层曲率族	含 $F^{(xM)}, F^{(wM)}, F^{(MM)}$
$D_{x,\mathbf{w}}, D_{x,\mathbf{w},M}$	协变外微分	对应两层/三层
L	$\mathcal{A}$-双模	$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P))$
ρ	锚	$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$
$[\cdot,\cdot]_0$	Atiyah-型括号	见正文与附件1
$[\cdot,\cdot]_H$	扭曲括号	$[\cdot,\cdot]_0 + \Theta_H$
l_3	三元同伦	$\iota_\rho^3 H$
Ad/ad	伴随/微伴随	右作用约定
basic	基本性	水平且 G-不变
$\star$	星乘	形式形变 $\hbar$-级展开
$\Phi_\hbar$	非交换修正	对括号的 $\hbar$ 级增量
$R, R_!$	表示/传递	法则层 $\to$ 几何层

附件6：GRL 模型层与数学主体的接口（“假设—命题—解释”格式）

把 GRL 路径积分与微分动力作为**建模假设**而非证明要件，给出其与几何量的接口。

假设 G1（生成机制）

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t), \mathbf{w}(t)), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = U(\mathbf{w}(t); J, \mathrm{Loc}),$$

并用

$$\pi^* = \arg\max_{\pi\in\Pi_{\text{meaningful}}(\mathbf{w})} \mathbb{E}\left[\exp\int \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w})\, dt\right]$$

选取“有意义”算子路径。

命题 G2（证书化接口）
设切面 $s : M \to P$ 与阈值族 $\Sigma(\mathbf{w})$。若

$$\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\text{tot}}}(\gamma, \mathbf{w}) \cdot s(\gamma(t)) \quad \text{横截穿越} \quad \Sigma(\mathbf{w}(t)),$$

则在切面上出现离散跃迁；其证书为 $\int H$ 与混合曲率的方环积分。
解释：$[H]$ 与混合曲率为“等式 up to l_3”的可验证量；不参与主体定理的严格性，只作为生成功能的外部接口。

附件7：审稿可复核的“证书化验证”清单

把工程化检查项固化为**可打勾**的证书表。

- **K1：functional_flatness**
  计算 $F^{(MM)} = d_{!w} A_M + A_M \wedge A_M$ 的范数与最大特征值；目标：到设定阶为 0（或报告非零并量化）。
- **K2：mixed_flatness**
  计算 $F^{(xM)}, F^{(wM)}$；目标：核对混合 Bianchi 的残差 $|D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}}|$。
- **K3：Bianchi-family**
  两层/三层分别验证 $D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0$、$D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\text{tot}} = 0$ 的数值残差。
- **K4：Stasheff-gap**
  评估

$$\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z),$$

并在给定基上取 supremum。目标：$|\Delta_{\mathrm{Jac}}|$ 在容差内。

- **K5：Holonomy-H 证书**
  计算方环 $\square$ 上 $\exp\int_\square H$ 与 $\mathrm{Hol}_{\mathbb{A}_{\mathrm{tot}}}(\square)$ 的偏差；目标：与 Stasheff-gap 一致。
- **K6：退化测试**

附件8：法则扭曲谱与法则动力的度量

本附件在“四版 PFB-GNLA”的框架内整理“法则扭曲”与其动力学度量的表述。核心包括：

1. 以一族 L_∞ 运算 l_n 定义**法则扭曲谱**（twist spectrum）；
2. 给出“法则变换速度-曲率-同伦强度”的**三联度量**与可投向作用量的统一指标；
3. 以**变分原理/路径积分**形成“法则-几何-控制（GRL）”的闭环；
4. 明确与黎曼/广义相对论的**结构对位**与边界；
5. 不变量与分类指标。

适用范围与记号

- 主丛 $\pi: P \to M$，参数域 $\mathcal{W}$，积主丛 $\mathcal{P} = P \times \mathcal{W} \to M \times \mathcal{W}$。
- 两层总联络与曲率三分解：

$$\boxed{\mathbb{A} = A^{(x)}(\mathbf{w}) + A^{(w)}, \qquad \mathbb{F} = F^{(xx)} + F^{(xw)} + F^{(ww)}, \quad D_{x,\mathbf{w}}\mathbb{F} = 0}.$$

- 若含“法则-算子”层，则再引入

$$\boxed{A_M := M_{!w}^{-1} d_{!w} M_{!w}, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{tot}} = A^{(x)} + A^{(w)} + A_M, \quad D_{x,\mathbf{w},M}\mathbb{F}_{\mathrm{tot}} = 0}.$$

- 骨架双模与锚：$L \simeq \Gamma(TP/G) \oplus \Gamma(\mathrm{ad}(P))$，$\rho(X \oplus \xi) = \alpha(X)$。

1. 法则扭曲谱（twist spectrum） $\{l_n\}$

最小 2-term L_∞（已实现）：

$$\boxed{l_1 = 0, \quad l_2 = [\cdot,\cdot]_H, \quad l_3 = \iota^3_{\rho(\cdot)} H, \quad l_{n\ge 4} = 0},$$

其中 $([\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_0 + \Theta_H)$，$H \in \Omega^3(M \times \mathcal{W}, \mathfrak{a})$ 为 basic、G-等变且协变闭。

高阶（建议性扩展）：引入协变闭的特征形式族

$$\boxed{\mathcal{C}_m \in \Omega^m(M \times \mathcal{W}, [\times \mathcal{G}_{\text{op}}],\ \mathfrak{a}), \quad D\mathcal{C}_m = 0},$$

并定义

$$\boxed{l_m(x_1, \ldots, x_m) := \iota_{\rho(x_1)} \cdots \iota_{\rho(x_m)} \mathcal{C}_m \quad (m \geq 3)}.$$

当 $m = 3$ 时 $\mathcal{C}_3 = H$ 回收 l_3。据此定义**谱维度**

$$\boxed{\delta_{\text{Law}} := \max\{m \mid l_m \neq 0\}}.$$

含义：$\delta_{\text{Law}} = 0$ 表示“平坦法则”；$\delta_{\text{Law}} = 3$ 为已实现的最小非平坦层级；$\delta_{\text{Law}} > 3$ 表明存在更高阶同伦耦合（范畴/算子层现象）。

> 注：定理化的 Stasheff 身份与闭合条件见附件1（定理A、B）。

2. “速度—曲率—同伦”三联度量

将“演化速率、不可积性、同伦缺口”分离刻度，并可汇总成单一指标。

(a) 速度（一级）

$$\boxed{v_{\text{Law}}^2(t) := \left| A_M(\dot{\mathbf{w}}(t)) \right|_{g_{\text{op}}}^2},$$

其中 g_{op} 为 $\mathfrak{g}_{\text{op}}$ 上的选定内积，用于刻度“法则平行运输速率”（可作为 GRL 的即时正则/惩罚项）。

(b) 曲率（二维）

$$\boxed{\kappa_{\text{Law}}^2 := |F^{(MM)}|^2 + |F^{(xM)}|^2 + |F^{(wM)}|^2}.$$

度量“非可积/环路缺口”的强度，属坐标无关的内蕴量。

(c) 同伦强度（≥三维）

$$\boxed{\tau_{\text{Law}}^2 := |l_3|^2 + |l_4|^2 + \cdots},$$

以 $\mathcal{C}_m$ 的度量固定每个 l_m 的范数。
统一指标（可投向 Lagrangian）：

$$\boxed{\mathcal{I}_{\text{Law}} := \alpha v_{\text{Law}}^2 + \beta\kappa_{\text{Law}}^2 + \sum_{m\geq 3}\lambda_m |l_m|^2},$$

权重 α, β, λ_m 由任务/约束指定，可视为“逻辑性度量 J”的参数化落点。

3. 作用量与变分原则（“法则-爱因斯坦”形式）

几何侧作用量

$$\boxed{S_{\text{geom}}[M_{!w}] = \int_{M\times\mathcal{W}} \Big(\beta\langle\mathbb{F}_{\text{tot}}, *\mathbb{F}_{\text{tot}}\rangle + \sum_{m\geq 3}\lambda_m\langle\mathcal{C}_m, *\mathcal{C}_m\rangle\Big)}.$$

控制/约束（GRL）侧

$$\boxed{S_{\text{ctrl}}[\mathbf{w}, \pi] = \int \Big(\alpha|A_M(\dot{\mathbf{w}})|^2 - \mathcal{L}(\pi; J, \mathbf{w})\Big)dt}.$$

总路径积分与变分

$$\boxed{\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}M_{!w}\mathcal{D}\mathbf{w}\mathcal{D}\pi\ \exp\big(-S_{\text{geom}} - S_{\text{ctrl}}\big)}.$$

对 $M_{!w}$ 的变分产生“法则-爱因斯坦”型方程（含 Bianchi 约束与高阶源项）；对 $\mathbf{w}, \pi$ 的变分给出 GRL 的最优性条件。三者形成“几何-同伦-控制”的闭环。

> 注：上述为**建议性建模**；方程的存在唯一性与规范不变性依赖附件1中的闭合条件。

4. 与黎曼/广义相对论的结构对位（边界与异同）

- **同构之处（层级映射）**
  - 联络/曲率/Bianchi/holonomy 的**结构骨架**被搬到“法则层”；
  - H 与 l_3 提供**同伦级**的“异常/缺口”刻度，类比曲率产生角缺。
- **边界与差异**

- 研究对象自“几何/力”提升为“**法则/合成律**”，允许态射与对象类型变更（范畴层级）；
- 非仅“参数变常数”，而是“把法则当联络”，其不可约性由 κ_{Law} 与 $[\cdot, \mathcal{C}_m, \cdot]$ 证书化。

- **退化一致性**
  - 当 $\kappa_{\text{Law}} = \tau_{\text{Law}} = 0$ 时，可规约为“两层世界”的传统情形；该退化在四版中已明确。

5. 不变量与分类指标

- **扭曲谱维度**：$\delta_{\text{Law}} = \max\{m \mid l_m \neq 0\}$。
- **法则 Chern-类（示意）**：对闭子流形 $\Sigma \subset M \times \mathcal{W}$，

$$\boxed{\mathsf{LawIndex}_m(\Sigma) := \int_\Sigma \mathcal{C}_m}.$$

  $\mathsf{LawIndex}_m \neq 0$ 证成“法则可变”的内蕴性。
- **Jacobiator-gap 证书**：
  $\Delta_{\text{Jac}}(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} [x, [y, z]_H]_H - l_3(x, y, z)$,
  其数值上界与 $\int_\Box H$ 的方环偏差一致，可作为“闭合残差”的量化。
- **统一强度**：$\mathcal{I}_{\text{Law}}$ 作为性能/稳健性权衡指标。
