Cálculo Lambda I

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

5 de mayo de 2020

Objetivo de la clase

$(\lambda x\colon \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z\colon \text{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w\colon \text{Bool}.\ w)$

¿Qué significa esto? ¿Significa algo? ¿Es válido? ¿Es un valor? ¿Cómo nos damos cuenta?

Mapa del tema

- Sintaxis — M, σ
- Reglas de Tipado — $\Gamma \vdash M : \sigma$
- Valores — V
- Reglas de Evaluación — M $\to$ M'

Sintaxis

Ejercicio: ¿cuáles son expresiones sintácticamente válidas? Dibujar el árbol sintáctico y marcar las ocurrencias libres de variables.

1. $\lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.x\ \textit{true}$
2. $x\ y\ \lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.x\ y$
3. $(\lambda x : \text{Bool} \to \text{Nat}.x\ \textit{true})\,(\lambda y : \text{Bool}.x)$
4. $\lambda x : \text{Nat}$
5. $\lambda x.\ x$
6. $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z : \text{Bool}.z$
7. $x\ (\lambda y : \text{Bool}.y)$
8. $\textit{true}\ \textit{false}$
9. $\text{succ}(M)$
10. $\text{succ}\ \textit{true}$
11. $\text{if } \text{succ}(\textit{true}) \text{ then } \lambda x : \text{Bool}.x$

Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \lambda y : \mathsf{Bool}.\ \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{true}\ \mathit{else}\ y)\ \mathit{false} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$
2. $\{x : \mathsf{Bool}\} \vdash \mathsf{succ}(0) : \mathsf{Nat}$
3. $\emptyset \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ z : \mathsf{Bool}$
4. $\{x : \mathsf{Bool}\} \vdash \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else}\ 0 : \mathsf{Nat}$
5. ¿Existen Γ y σ tal que $\Gamma \vdash x\,x : \sigma$?

Valores

Ejercicio: ¿cuáles de estos términos son valores?

1. if true then $(\lambda x : \mathsf{Bool}.\ x)$ else $(\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \mathit{false})$
2. $\lambda x : \mathsf{Bool}.\ \mathit{false}$
3. $(\lambda x : \mathsf{Bool}.\ x)\ \mathit{false}$
4. $\mathsf{succ}(0)$
5. $\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(0))$
6. $\mathsf{succ}(\mathsf{pred}(0))$
7. $\mathsf{succ}(x)$
8. $\lambda x : \mathsf{Bool}.\ (\lambda y : \mathsf{Bool}.x)\ \mathit{false}$
9. $\lambda x : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}.\ x\ \mathit{true}$

Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1. $(\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ \ x\ \ then\, true\, else\, y)\ false$
2. $(\lambda x\!:\mathrm{Bool}.\ \lambda y : \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z\!: \mathrm{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w\!: \mathrm{Bool}.\ w)$

Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{\mathrm{Bool}} \stackrel{def}{=} \lambda x : \mathrm{Bool}.x$
- $\mathrm{and} \stackrel{def}{=} \lambda x : \mathrm{Bool}.\lambda y : \mathrm{Bool}.\mathrm{if}\ x\ \mathrm{then}\ y\ \mathrm{else}\ \mathit{false}$

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x\colon \tau.\ M \to \lambda x\colon \tau.\ M'}\ E-ABS$$

Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si ($\lambda x\colon \text{Bool}.\ Id_{\text{Bool}}\ true$) es o no un valor.¿Y ($\lambda x\colon \text{Bool}.\ x$)?
2. ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?
3. Utilizando la nueva regla y los valores definidos, reducir la expresión:
   $\lambda z\colon \text{Nat} \to \text{Nat}.\ (\lambda x\colon \text{Nat} \to \text{Nat}.\ z\ \underline{23})\ (\lambda x\colon \text{Nat}.\ 0)$
   ¿Qué se puede concluir entonces? ¿Tiene sentido o no agregar esta regla?

Cambiando reglas semánticas

Ejercicio: considerar el cálculo **sin** la regla $pred(0) \to 0$ y evaluar:

1. $(\lambda x : Nat.\ \text{iszero}(\text{pred}(\text{succ}(x))))\,0$
2. $(\lambda x : Nat.\ \text{succ}(\text{pred}(\text{pred}(\text{succ}(x)))))\,0$
3. $\text{pred}(\text{succ}(x))$

¿Habrá términos que nunca lleguen a una forma normal?... Clase que viene.

Continuará...

¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿?

$(\lambda x : \mathit{Clase}.\ \mathit{fin}\ x)\ (\mathit{Cálculo\ Lambda\ I})$

Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma \quad ::= \quad \mathit{Bool} \mid \mathit{Nat} \mid \sigma \to \rho$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$
\begin{array}{rcl}
M & ::= & x \\
 & \mid & \mathit{true} \\
 & \mid & \mathit{false} \\
 & \mid & \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\
 & \mid & \lambda x : \sigma.\ M \\
 & \mid & M\, M \\
 & \mid & 0 \\
 & \mid & \text{succ}(M) \\
 & \mid & \text{pred}(M) \\
 & \mid & \text{iszero}(M)
\end{array}
$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathit{true} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathit{false} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-False})$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}\ (\text{T-Var})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \mathit{if}\ M\ \mathit{then}\ P\ \mathit{else}\ Q : \sigma}\ (\text{T-If})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.\ M : \sigma \to \tau}\ (\text{T-Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}\ (\text{T-App})$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \mathit{Nat}} \text{(T-Zero)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{succ}(M) : \mathit{Nat}} \text{(T-Succ)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{pred}(M) : \mathit{Nat}} \text{(T-Pred)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{iszero}(M) : \mathit{Bool}} \text{(T-IsZero)}$$

Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid \lambda x : \sigma.\ M \mid 0 \mid \mathrm{succ}(V)$$

(Los valores de tipo *Nat* pueden escribirse como $\underline{n}$, lo cual abrevia $\mathrm{succ}^n(0)$).

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{M_1\ M_2 \to M_1'\ M_2}\ (\text{E-App1 o } \mu)$$

$$\frac{M_2 \to M_2'}{V_1\ M_2 \to V_1\ M_2'}\ (\text{E-App2 o } \nu)$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.\ M)\ V \to M\{x \leftarrow V\}}\ (\text{E-AppAbs o } \beta)$$

Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid \lambda x : \sigma.\ M \mid 0 \mid \mathrm{succ}(V)$$

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{}{\text{if } \mathit{true} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_2}\ (\text{E-IfTrue})$$

$$\frac{}{\text{if } \mathit{false} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_3}\ (\text{E-IfFalse})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to \text{if } M_1' \text{ then } M_2 \text{ else } M_3}\ (\text{E-If})$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{succ}(M_1) \to \mathsf{succ}(M_1')} \text{(E-SUCC)}$$

$$\frac{}{\mathsf{pred}(0) \to 0} \text{(E-PREDZERO)} \qquad \frac{}{\mathsf{pred}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \underline{n}} \text{(E-PREDSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{pred}(M_1) \to \mathsf{pred}(M_1')} \text{(E-PRED)}$$

$$\frac{}{\mathsf{iszero}(0) \to \mathit{true}} \text{(E-ISZEROZERO)} \qquad \frac{}{\mathsf{iszero}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \mathit{false}} \text{(E-ISZEROSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{iszero}(M_1) \to \mathsf{iszero}(M_1')} \text{(E-ISZERO)}$$