Procesos Estocásticos

Idea:

Un *proceso estocástico* es un proceso o sistema que se desarrolla o evoluciona en el tiempo (y/o en el espacio) mientras que pasa por fluctuaciones al azar.

Ejemplo: Jugar a la ruleta …

Procesos Estocásticos

Jugando a color en la ruleta

Suponga que apuesta a color en la ruleta. Ud elige el color R (rojo) ó N (negro) al azar y puede salir R, N o V (verde si sale el cero).
Ud apuesta 100 $ y puede ganar 100$ si sale el color apostado o perder su apuesta si sale cualquiera de los otros colores.

x_k	0 (verde)	1 (rojo)	2 (negro)
P(X=x_k)	1/37	18/37	18/37

Esta es la distribución de probabilidades de la ganancia que es una variable aleatoria discreta G

g_k	-100	100
P(G=g_k)	19/37	18/37

Procesos Estocásticos

Idea:

Un *proceso estocástico* es un proceso o sistema que se desarrolla o evoluciona en el tiempo (y/o en el espacio) mientras que pasa por fluctuaciones al azar.

Ejemplos:

- : La temperatura corporal tomada en la axila izquierda en el instante .
- : El número de personas que han arribado a la fila de un banco hasta el instante .
- : La densidad lineal de masa de un alambre en un punto (medido desde uno de los extremos).

Procesos Estocásticos

Definiciones:

- El conjunto de variables aleatorias se denomina un **proceso estocástico**.
- es el **espacio del parámetro**.
- La unión de los recorridos de las variables se denomina el **espacio de estados** del proceso.

“Requisito”:

- Debemos poder hablar de la probabilidad conjunta de cualquier número finito de variables aleatorias

Procesos Estocásticos

Ejemplos:

- : La temperatura corporal tomada en la axila izquierda en el instante .
  - **T** : espacio de parámetros continuo y de estados continuo.
- : El número de personas que han arribado a la fila de un banco hasta el instante .
  - **T** espacio de parámetros continuo y de estados discreto.
- : La densidad lineal de masa de un alambre en un punto (medido desde uno de los extremos).
  - **T** : espacio de parámetros continuo y de estados continuo.

Procesos Estocásticos

El precio de una acción al cierre del día en función del día. Este es un ejemplo de un proceso estocástico con ***espacio de estados discreto*** y en ***tiempo discreto***.

T.

Procesos Estocásticos

El precio de una acción al instante *t* durante un día en función del instante *t* . Este es un ejemplo de un proceso estocástico con ***espacio de estados discreto*** y en ***tiempo continuo***.

T.

Procesos Estocásticos

El nivel de tensión de una señal al instante *t* en función del instante *t* . Este es un ejemplo de un proceso estocástico con ***espacio de estados continuo*** (se supone que lo es el nivel de la señal) y en ***tiempo discreto***.

T.

Procesos Estocásticos

El nivel de tensión de una señal al instante *t* en función del instante *t* . Este es un ejemplo de un proceso estocástico con ***espacio de estados continuo*** (se supone que lo es el nivel de la señal) y en ***tiempo continuo***.

T.

Caminata Aleatoria

Idea:

es la posición de una partícula en 1D que, comenzando de en , en cada instante se mueve un lugar a la derecha con probabilidad o un lugar a la izquierda con probabilidad .

Más formalmente:

$$P\left(X(0)=0\right)=1$$

$$P\left(X(n+1)=x \mid X(n)=y\right)=\begin{cases} p & x=y+1 \\ 1-p & x=y-1 \\ 0 & |x-y|\neq 1 \end{cases}$$

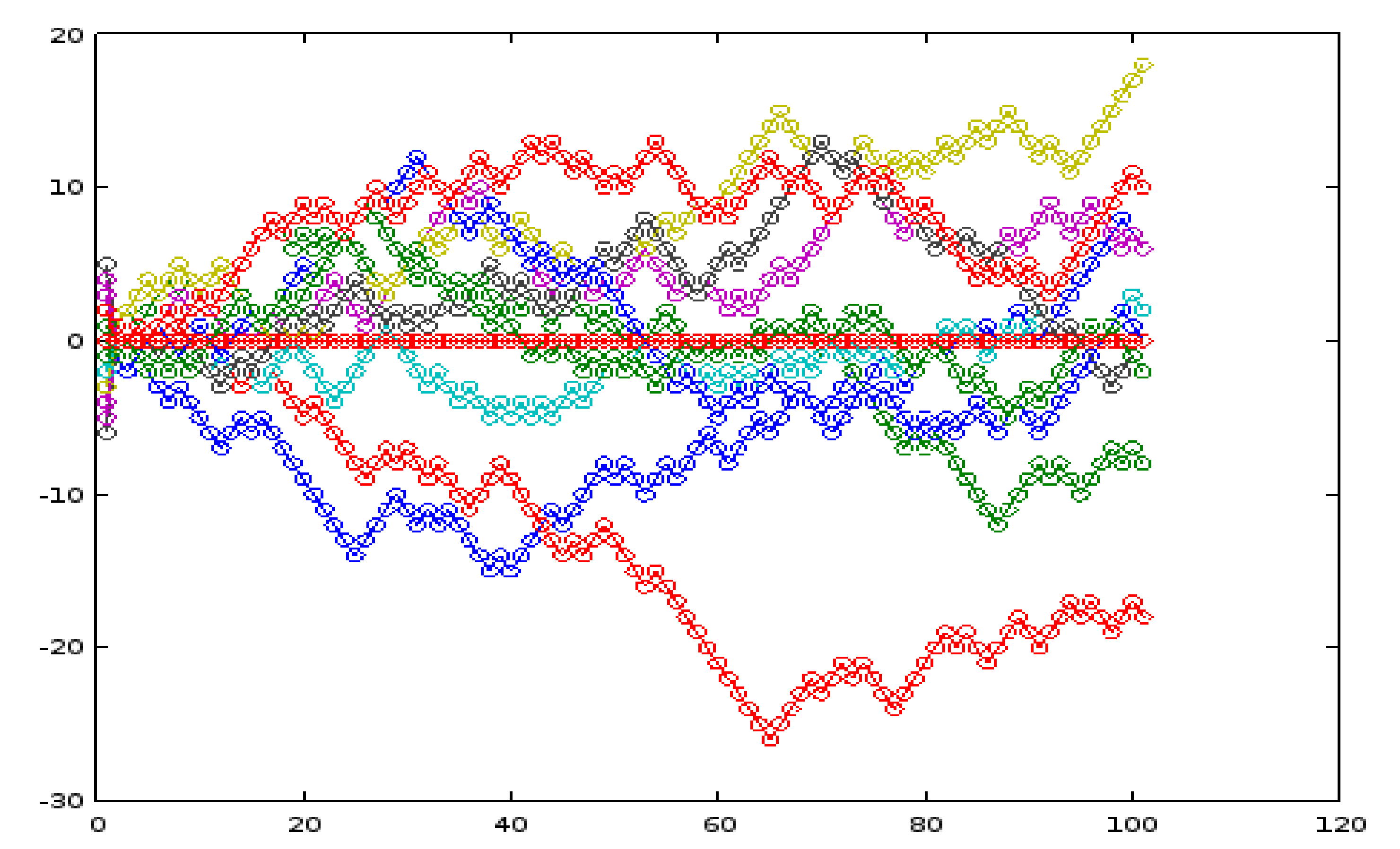
Este es un ejemplo de un proceso estocástico con ***espacio de estados discreto*** y en ***tiempo discreto***.

T.

Caminata Aleatoria

```
p = 0.5;
N = 100;
derecha = (rand(1,N) < p);
saltos = 2*(derecha-0.5);
x = cumsum(saltos);
plot(0:N-1,x)
```

Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria

$$\left.\begin{array}{l}
R_{X(0)} = \{0\} \\
R_{X(1)} = \{-1, +1\} \\
R_{X(2)} = \{-2, 0, +2\} \\
R_{X(3)} = \{-3, -1, +1, +3\} \\
\qquad\qquad \vdots \\
R_{X(n)} = \{-n, -n+2, \cdots, +n-2, +n\}
\end{array}\right\} \quad \mathbf{E} = \mathbb{Z}$$

Caminata Aleatoria

Llamemos al número de pasos a la derecha hasta tiempo (incluido).

Dado es igual al número de pasos a la derecha menos el número de pasos a la izquierda, tenemos:

$$X(n)=D(n)-(n-D(n))=2D(n)-n$$

Como es claramente binomial con parámetros y :

$$P(X(n)=k)=P\left(D(n)=\frac{n+k}{2}\right)=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

si   está en el recorrido de .

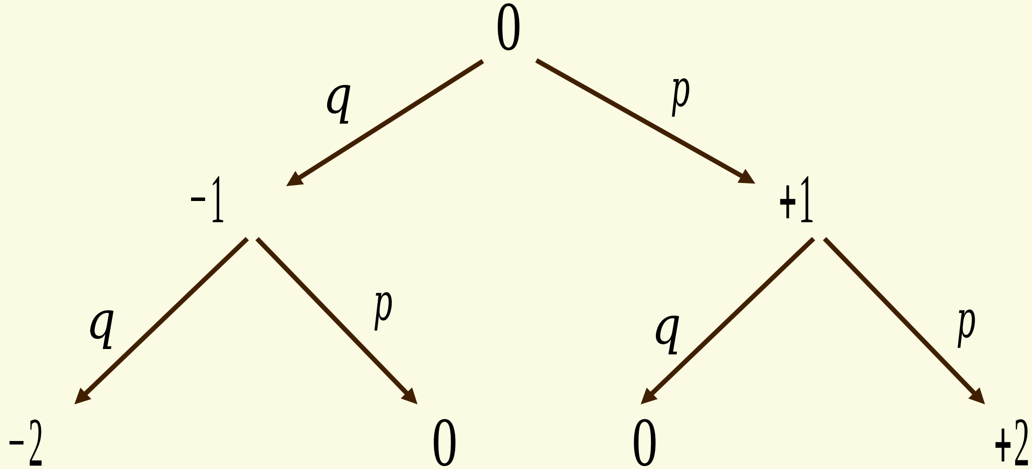
Caminata Aleatoria

Una distribución conjunta

$$P(X(n+1)=x, X(n)=y)=\begin{cases} \binom{n}{\frac{n+y}{2}} p^{\frac{n+y+2}{2}} q^{\frac{n-y}{2}} & x=y+1, y\in R_{X(n)} \\ \binom{n}{\frac{n+y}{2}} p^{\frac{n+y}{2}} q^{\frac{n-y+2}{2}} & x=y-1, y\in R_{X(n)} \\ 0 & |x-y|\neq 1 \text{ o } y\notin R_{X(n)} \end{cases}$$

Caminata Aleatoria

Estructura de árbol



Proceso de Markov

Se dice que un proceso estocástico es un **proceso de Markov** sii para todo toda secuencia y todo

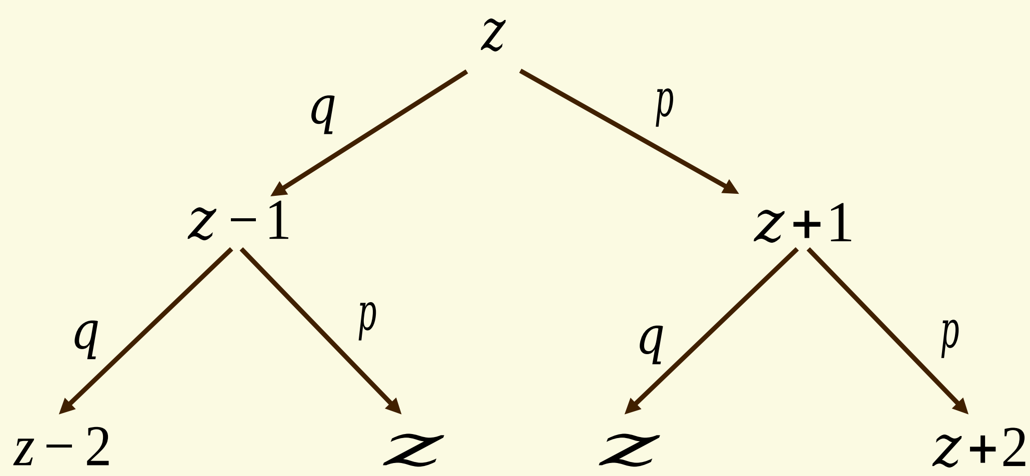
Es decir, sólo importa el valor más “reciente”.

Hechos:

- La caminata aleatoria es un proceso de Markov.
- Asumir que se trata de un proceso de Markov simplifica mucho las cosas.

Caminata Aleatoria

Estructura de árbol



$$P\left(X(n)=x \mid X(n-1)=y, X(n-2)=z\right)=P\left(X(n)=x \mid X(n-1)=y\right)$$

Caminata Aleatoria

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P(X(n)=z \vee X(n-2)=z)=¿$$

$$¿P(X(n)=z|X(n-1)=z-1) \times P(X(n-1)=z-1 \vee X(n-2)=z)+P(X(n)=z|X(n-1)=z+1) \times P(X(n-1)=z+1 \vee X(n-2)=z)$$

Caminata Aleatoria

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P\left(X(n)=x \vee X(n-k)=z\right)=¿$$

$$\sum_{y \in R_{X(n-m)}} P\left(X(n)=x \middle| X(n-m)=y\right) P\left(X(n-m)=y \middle| X(n-k)=z\right)$$

Procesos Estacionarios

Se dice que un proceso estocástico es **estacionario** sii para todo toda secuencia todo conjunto de valores y todo

Es decir, las probabilidades “no dependen” del tiempo.

Hechos:

- La caminata aleatoria **no** es un proceso estacionario.
- Asumir que un proceso es estacionario simplifica las cosas, pero es muy fuerte.

Caminata Aleatoria

No es un proceso estacionario

Procesos Estacionarios

Se dice que un proceso estocástico es **estacionario en sentido amplio** sii para todo

Hechos:

- La caminata aleatoria **no** es un proceso estacionario en sentido amplio.
- No es una condición tan fuerte como la anterior, pero es suficiente en muchos casos.

Caminata Aleatoria

No es un proceso estacionario en sentido amplio.

$$X(n)=2D(n)-n$$

$$E[X(n)]=2E[D(n)]-n=2np-n$$

$$\mathrm{Var}[X(n)]=4\,\mathrm{Var}[D(n)]=4np(1-p)$$

Incrementos Estacionarios

Se dice que un proceso estocástico tiene **incrementos estacionarios** sii para todo , todo , y todo

Es decir: la distribución de los incrementos "no depende" del tiempo.

Hecho:

- La caminata aleatoria es de incrementos estacionarios.

Incrementos Independientes

Se dice que un proceso estocástico tiene **incrementos independientes** sii para todo y todo conjunto de pares ordenados con y para , las variables aleatorias

son independientes entre sí.

Hechos:

- La caminata aleatoria es de incrementos independientes.
- El proceso se puede escribir como una suma de incrementos independientes: haciendo

Procesos de Conteo

Se dice que un proceso estocástico es de **conteo** sii:

1.

2. para todo

3.

representa el número de eventos que ocurrieron después de y no después de .

Procesos de Conteo

Un ejemplo conocido:

En cada instante de tiempo (discreto) se realiza un experimento. Todos los experimentos son independientes y la probabilidad de éxito es siempre la misma, . cuenta la cantidad de éxitos hasta el tiempo (inclusive).

$$N(t) \sim \text{Binomial}(t, p)$$

$$R_{N(t)} = \{0, 1, \cdots, t\} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbb{N}^{o}$$

Procesos de Conteo

Un ejemplo conocido:

$$N(t) \sim \text{Binomial}(t, p)$$

$$P(N(t)=k)=\begin{cases} \binom{t}{k} p^k q^{t-k} & k \in R_{N(t)} \\ 0 & k \notin R_{N(t)} \end{cases} \Rightarrow \text{no es estacionario}$$

Procesos de Conteo

Un ejemplo conocido:

$$N(t_2) - N(t_1) \sim \mathrm{Binomial}(t_2 - t_1, p)$$

$$N(t_2 + \tau) - N(t_1 + \tau) \sim \mathrm{Binomial}(t_2 - t_1, p)$$

$$\Rightarrow \text{incrementos estacionarios}$$

$$\text{Experimentos independientes} \Rightarrow \text{incrementos independientes}$$

Procesos de Poisson

Se dice que un proceso estocástico de conteo es un **proceso de Poisson con parámetro** sii:

1. Tiene **incrementos independientes**.
2. Los incrementos son **estacionarios**.
3. La probabilidad de que exactamente un evento ocurra en un intervalo de tiempo de longitud es .
4. La probabilidad de que más de evento ocurra en un intervalo de tiempo de longitud es .

Incrementos

Se dice que un proceso estocástico tiene **incrementos estacionarios** sii para todo , todo , y todo

Es decir: la distribución de los incrementos "no depende" del tiempo.

Se dice que un proceso estocástico tiene **incrementos independientes** sii para todo y todo conjunto de pares ordenados con y para , las variables aleatorias

son independientes entre sí.

Procesos de Poisson

$$p_n(t) \triangleq P(N(t)=n)$$

$$p_0(t+h)=P(N(t+h)=0)$$

$$p_0(t+h)=P(N(t+h)-N(t)=0, N(t)=0)$$

$$p_0(t+h)=P(N(t+h)-N(t)=0)P(N(t)=0)$$ Inc. indep.

$$p_0(t+h)=P(N(h)=0)P(N(t)=0)$$ Inc. estac.

$$p_0(t+h)=(1-\lambda h-o(h))p_0(t)$$ Cond. 3

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(h)}{h}$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)$$

Procesos de Poisson

$$p_n(t) \triangleq P(N(t)=n)$$

$$p_n(t+h) = P(N(t+h)=n)$$

$$\begin{tikzcd}
N(t)=n \arrow[dr, "1-\lambda h-o(h)"'] & N(t)=n-1 \arrow[d, "\lambda h+o(h)"] & N(t)=n-k \arrow[dl, "o(h)"] \\
& N(t+h)=n &
\end{tikzcd}$$

Procesos de Poisson

$$p_n(t) \triangleq P(N(t)=n)$$

$$p_n(t+h)=P(N(t+h)=n)$$

$$p_n(t+h)=(1-\lambda h-o(h))\,p_n(t)+(\lambda h+o(h))\,p_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}$$

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$$

Procesos de Poisson

$$p_n(t) \triangleq P(N(t)=n)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \text{con}\, p_0(0)=0$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad \text{con}\, p_n(0)=0, n>0$$

Procesos de Poisson

$$p_n(t) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$N(t) \quad \text{Poisson}(\lambda t)$$

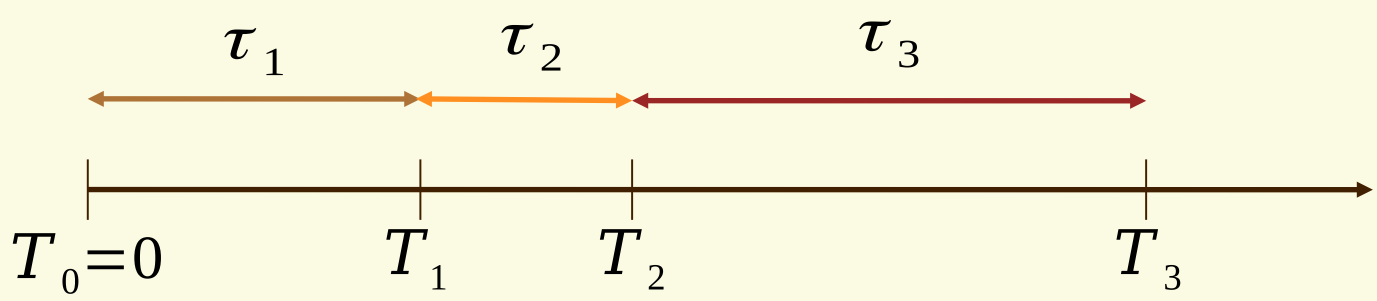
En valor medio, ocurren eventos en un tiempo .

Intuitivamente, es la tasa (media) de ocurrencia de eventos.

Procesos de Poisson

Sea el tiempo de ocurrencia del -ésimo evento y definamos los **tiempos entre eventos**

con y .



Procesos de Poisson

si no ocurre ningún evento en . Entonces:

$$P(\tau_k > x) = P(N(T_{k-1}+x) - N(T_{k-1}) = 0) = P(N(x) = 0)$$

$$P(\tau_k > x) = \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} \Rightarrow P(\tau_k \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

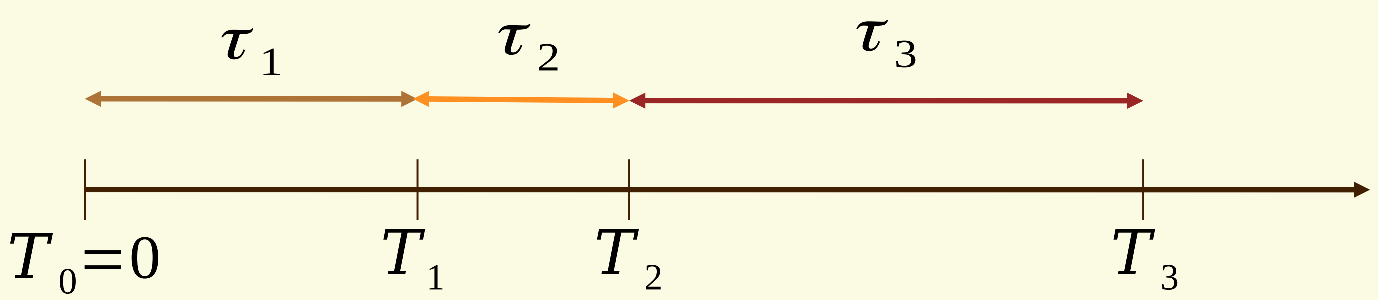
Los tiempos entre eventos tienen distribución exponencial

Incrementos de son independientes Los tiempos entre eventos son independientes entre sí.

Procesos de Poisson

Sea el tiempo de ocurrencia del -ésimo evento y definamos los **tiempos entre eventos**

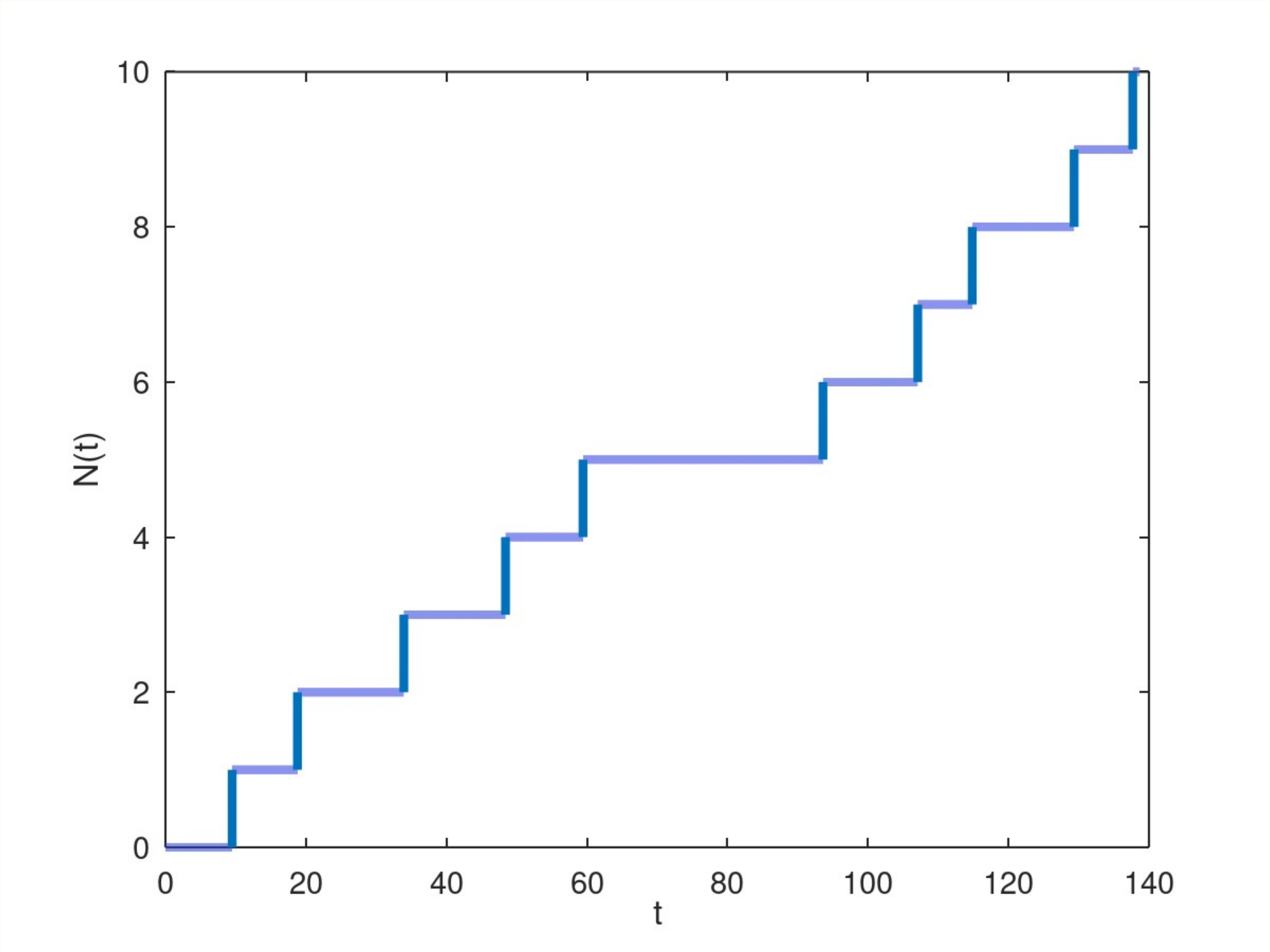
con y . Las variables son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución exponencial de parámetro .



Procesos de Poisson

```
lambda = 0.1;
n = 10;
tau = exprnd(1/lambda,1,n);
T = [0 cumsum(tau)];
t = 0:1e-3:max(T)+1;
N = zeros(size(t));
for k = 1:length(T)
    N(t>=T(k)) = k-1;
end
plot(t,N)
```

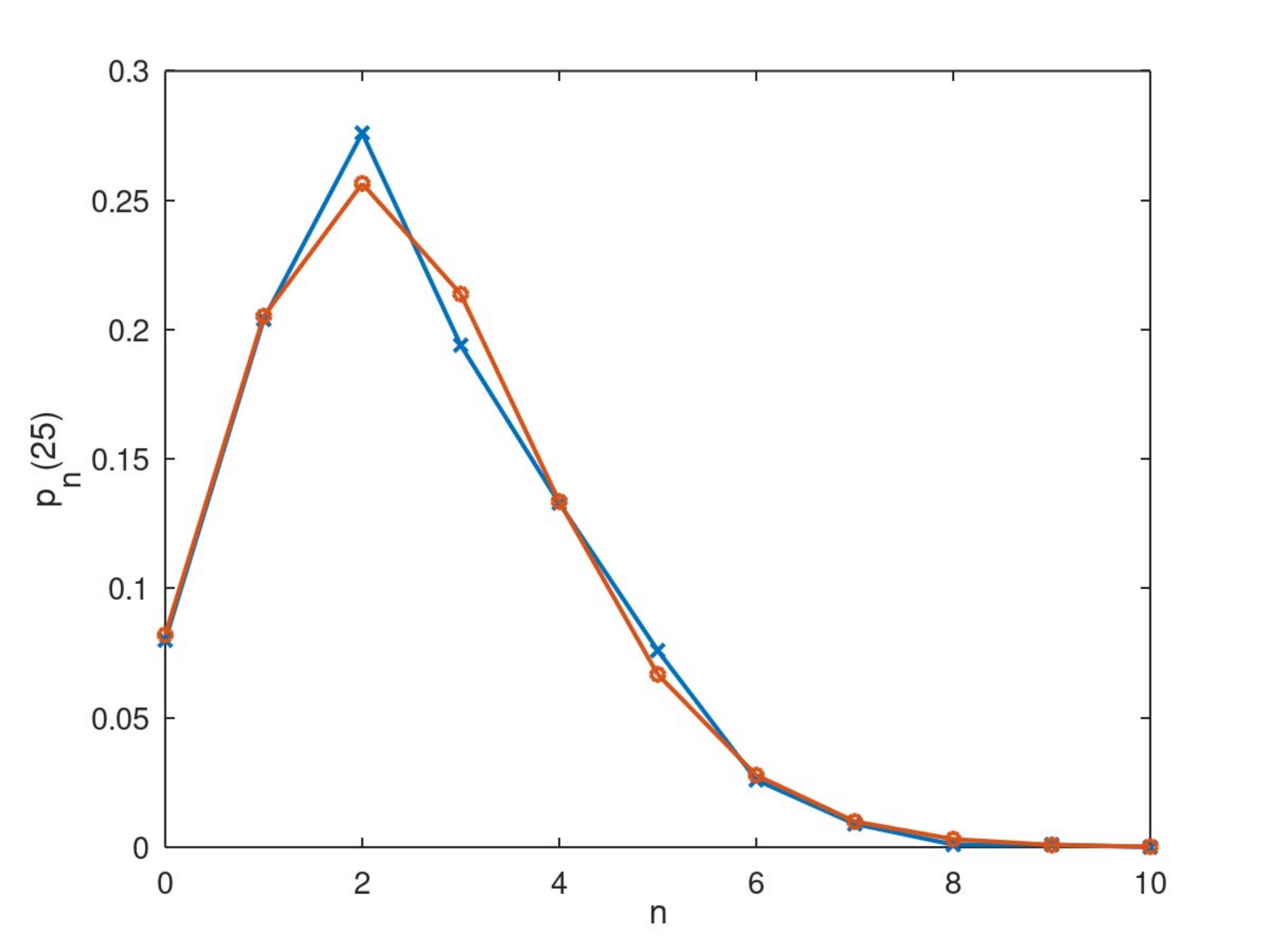
Procesos de Poisson



Procesos de Poisson

```
lambda=0.1; t = 25; n = 10;
M = 1000;
ENES = zeros(1,M);
for k = 1:M
    tau = exprnd(1/lambda,1,n);
    T = [0 cumsum(tau)];
     [a,i] = max(T(T<=t));
     ENES(k) = i - 1;
end
[n,x]=hist(ENES,0:10,1);
plot(x,n,'-x',x,poisspdf(x,t*lambda),'-o')
```

Procesos de Poisson



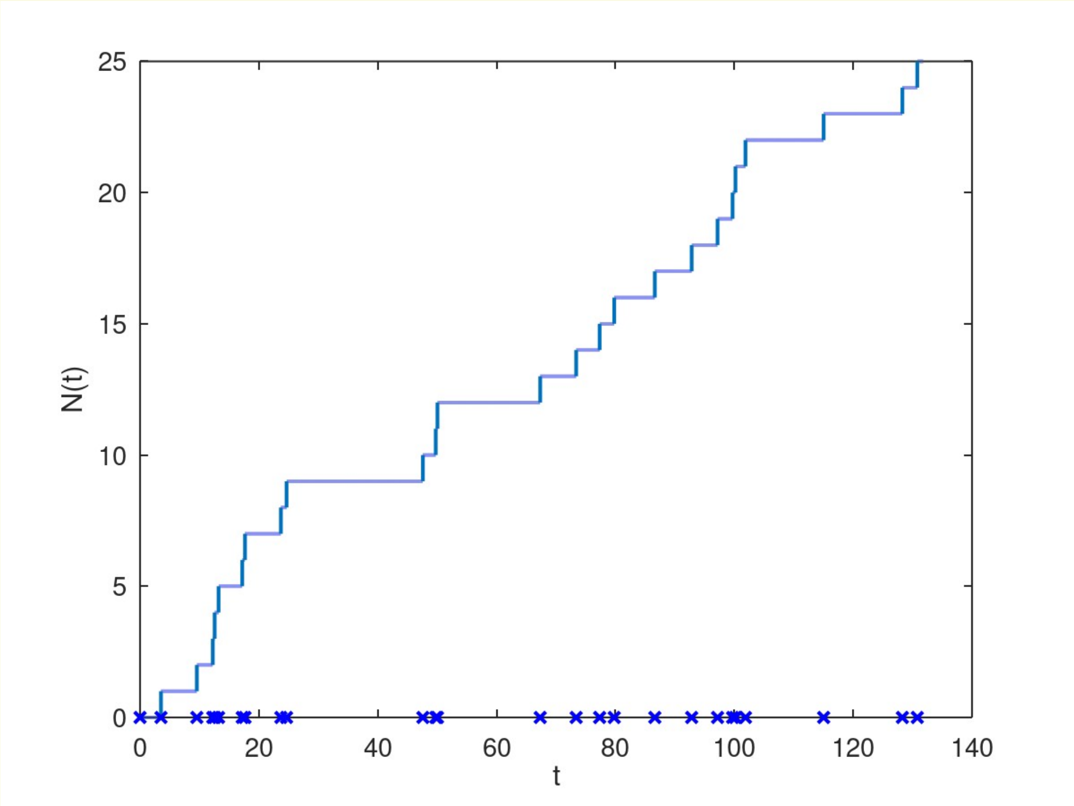
Procesos de Poisson

Ejemplo:

Los arribos de automóviles a un estacionamiento se supone que, en cierta parte del día, ocurren como un proceso de Poisson de parámetro 1/min. En promedio llega un automóvil cada 5 min.

Por tratarse de este tipo de proceso se cumple que el número de automóviles que llega en el intervalo es una variable aleatoria discreta con distribución de Poisson de parámetro , mientras que los tiempos entre llegadas son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro .

Procesos de Poisson



Una simulación del proceso de Poisson. En el eje horizontal se representan las llegadas de los automóviles al estacionamiento y en la vertical el contador de llegadas.

Procesos de Poisson

¿Cuál es la probabilidad de que arriben más de 3 automóviles en un intervalo de 15 min.?

En el intervalo de 15 min se cumple que el número de arribos es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro

1/min min .

En este caso se requiere calcular:

$$P\left(N\left(15\right)>3\right)=1-P\left(N\left(15\right)\leq 3\right)=1-\exp\left(-3\right)\left(1+3+4.5+4.5\right.$$

$$P\left(N\left(15\right)>3\right)\approx 0.3528$$

Procesos de Poisson

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre dos arribos consecutivos exceda 10 min.?

El tiempo entre dos arribos consecutivos es una variable aleatoria continua con distribución exponencial de parámetro 1/min, en promedio hay un arribo cada 5 min.

En este caso se requiere calcular:

$$P(\tau > 10) = \exp(- \quad 10) \qquad 0.1353$$

Procesos de Poisson

¿Cuál es la probabilidad de que el número de automóviles que arriben en un intervalo de 20 min sea menor que 5 sabiendo que fue mayor que 2?

En el intervalo de 20 min se cumple que el número de arribos es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro

1/min min .

En este caso se requiere calcular:

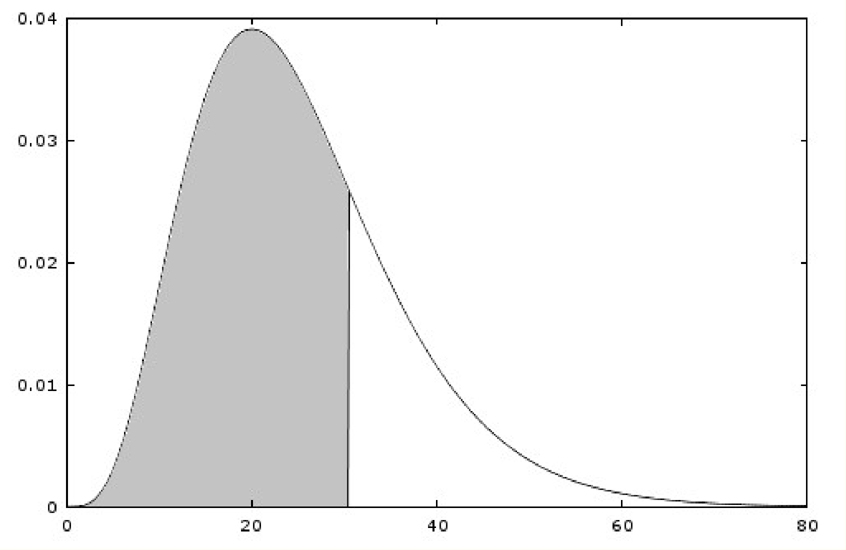
$$P(N(20)<5 | N(20)>2) = P(N(20)\leq 4 | N(20)\geq 3) = \frac{P(3\leq N(20) N 20\leq 4)}{1-P(N(20)\leq 2)}$$

$$P(N(20)<5 | N(20)>2) = \frac{p3 + p4}{1 - p0 - p1 - p2} \qquad 0.5128$$

Procesos de Poisson

El estacionamiento abre a las 8.00 hs. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto automóvil arribe antes de las 8.30 hs?

El tiempo hasta la ocurrencia del evento es una variable aleatoria continua con distribución Gama de parámetros y . Se verifica que



Procesos de Poisson

El estacionamiento abre a las 8.00 hs. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto automóvil arribe antes de las 8:30 hs?

El tiempo hasta la ocurrencia del evento es una variable aleatoria continua con distribución Gama de parámetros y . Se verifica que

En este caso se requiere calcular:

$$P(T5 < 30) = P(N(30) \quad 5) = 1 - P(N(30) < 5) \quad 0.7149$$

Procesos de Poisson

¿Cuál es la probabilidad de que arriben 4 automóviles en los primeros 20 min, 8 en los primeros 40 minutos y 20 en los primeros 90 min?

Las variables aleatorias , y no son independientes y se desea calcular

Pero los incrementos son estacionarios:

Procesos de Poisson

A las 12 h se abre una entrada auxiliar al estacionamiento, por la que entran automóviles según otro proceso de Poisson con parámetro = 1/min, en forma independiente de lo que ocurre por la entrada principal.

¿Cuál es la probabilidad de que el número total de automóviles que arriban al estacionamiento durante 20 min a partir de las 12 h exceda 10?

Si y son, respectivamente, la cantidad de automóviles que arriban por cada entrada en entonces se pide calcular .

Como los procesos son independientes entonces es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro .

Procesos de Poisson

A las 12 h se abre una entrada auxiliar al estacionamiento, por la que entran automóviles según otro proceso de Poisson con parámetro = 1/min, en forma independiente de lo que ocurre por la entrada principal.

¿Cuál es la probabilidad de que el número total de automóviles que arriban al estacionamiento durante 20 min a partir de las 12 h exceda 10?

Si y son, respectivamente, la cantidad de automóviles que arriban por cada entrada en entonces se pide calcular .

.

Procesos de Poisson

A las 12 h se abre una entrada auxiliar al estacionamiento, por la que entran automóviles según otro proceso de Poisson con parámetro = 1/min, en forma independiente de lo que ocurre por la entrada principal.

¿Cuál es la probabilidad de que arriben 5 automóviles por la entrada principal y 3 por la entrada auxiliar en un intervalo de 30 min a partir de las 12 h.?

Si y son, respectivamente, la cantidad de automóviles que arriban por cada entrada en entonces se pide calcular .

.

Siméon Denis Poisson
(1781-1840)