Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Ejemplo:

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8 %. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

¿Indican los resultados que hay que ajustar la máquina dosificadora? Detalle una prueba de hipótesis adecuada. Considere un nivel de significación del 5 %.

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Ejemplo:

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8 %. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

La variable aleatoriamedida en cada envase es binaria: 0 = llenado adecuado, 1 = falta de llenado. Sea la proporción de envases con falta de llenado.

$$E \quad \text{Bernoulli}(p)$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Ejemplo:

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8 %. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

= cantidad de envases con falta de llenado de entre los 145

$$X \quad \text{Binomial}\left(145\,,p\right)$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Ejemplo:

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8 %. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

$$H_0: p \leq 0.08$$

$$H_1: p > 0.08$$

Si se rechaza se concluirá que la proporción de envases con falta de llenado es significativamente superior a 0.08.

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Sies verdadera entonces el estadístico de prueba tiene distribución binomial con parámetros y .

Usando la función de distribución binomial puede encontrarse que . Si en la muestra se observan 17 o más envases con falta de llenado, entonces se concluye que la proporción de envases con falta de llenado es significativamente mayor a y habrá que ajustar la máquina.

En este ejemplo donde se observaron 18 envases en la muestra con el atributo que se inspecciona. El *valor p* de esta prueba es que resulta .
En Octave:

```
>> P=binocdf(16:18,145,0.08)
P =
   0.92755   0.95816   0.97708
>> 1-P
ans =
   0.072451   0.041844   0.022917
```

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

También se puede plantear el problema usando el estadístico proporción muestral

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Si la hipótesis nula es verdadera, por el Teorema Central del Límite (es grande), la distribución de es aproximadamente normal con parámetros

$$\mu = 0.08\,,\sigma^2 = \frac{0.08 \cdot 0.92}{145} \approx 0.0005$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

$$\mu = 0.08\,,\, \sigma^2 = \frac{0.08 \cdot 0.92}{145} \approx 0.0005$$

El valor crítico que define la aceptación o rechazo se puede calcular a partir de la máxima probabilidad de error de Tipo I (nivel de significación):

$$P(\hat{p} > \hat{p}_c) = 1 - \Phi\left(\frac{\acute{p}_c - 0.08}{\sqrt{0.08 \times 0.92}} \sqrt{145} \right) = 0.05$$

$$\hat{p}_c = 0.08 + z_{0.95} \sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{145}} = 0.1171 \left(11.71\,\% \right)$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Si la proporción en la muestra es superior a 0.1171 entonces se concluye que la proporción de envases con falta de llenado es significativamente mayor a 0.08 y se recomendará ajustar la máquina. Es lo que ocurre en este ejemplo ya que 18/145 es superior a 0.12. El *valor p* de esta prueba es:

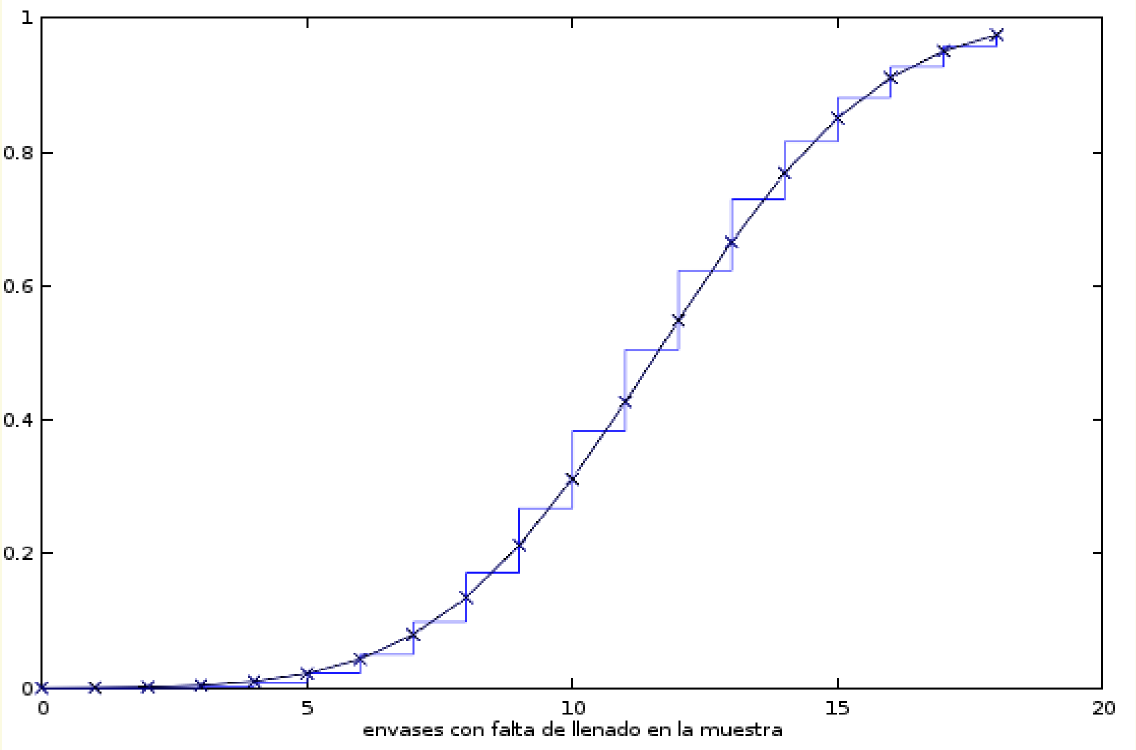
$$P\left(\hat{p} > 18/145\right) = 1 - \Phi\left(\frac{18/145 - 0.08}{\sqrt{0.08 \times 0.92}}\sqrt{145}\right) = 0.025$$

En Octave:

```
>> p = 0.08;
>> n = 145;
>> pobs = 18/n
pobs =  0.12414
>> valorP = 1-normcdf((pobs-p)*sqrt(n)/sqrt(p*(1-p)))
valorP =  0.025050
```

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

Funciones de distribución de y de la si es verdadera. Una de ellas es discontinua (binomial) y la otra es continua (la normal). Esta última aproxima “bastante bien” a la primera. En el eje horizontal se representa el número de envases con falta de llenado en la muestra.



Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

¿Cuál es la probabilidad de decidir que la máquina no debe ser ajustada cuando en realidad la verdadera proporción de envases mal llenados (incompletos) es igual a 0.13?

Es una pregunta sobre la probabilidad de error Tipo II cuando . En este caso, por el Teorema Central del Límite (es grande), la distribución de es aproximadamente normal con parámetros

$$\mu = 0.13, \sigma^2 = \frac{0.13 \cdot 0.87}{145} \approx 0.00078$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

$$\mu = 0.13, \sigma^2 = \frac{0.13 \cdot 0.87}{145} \approx 0.00078$$

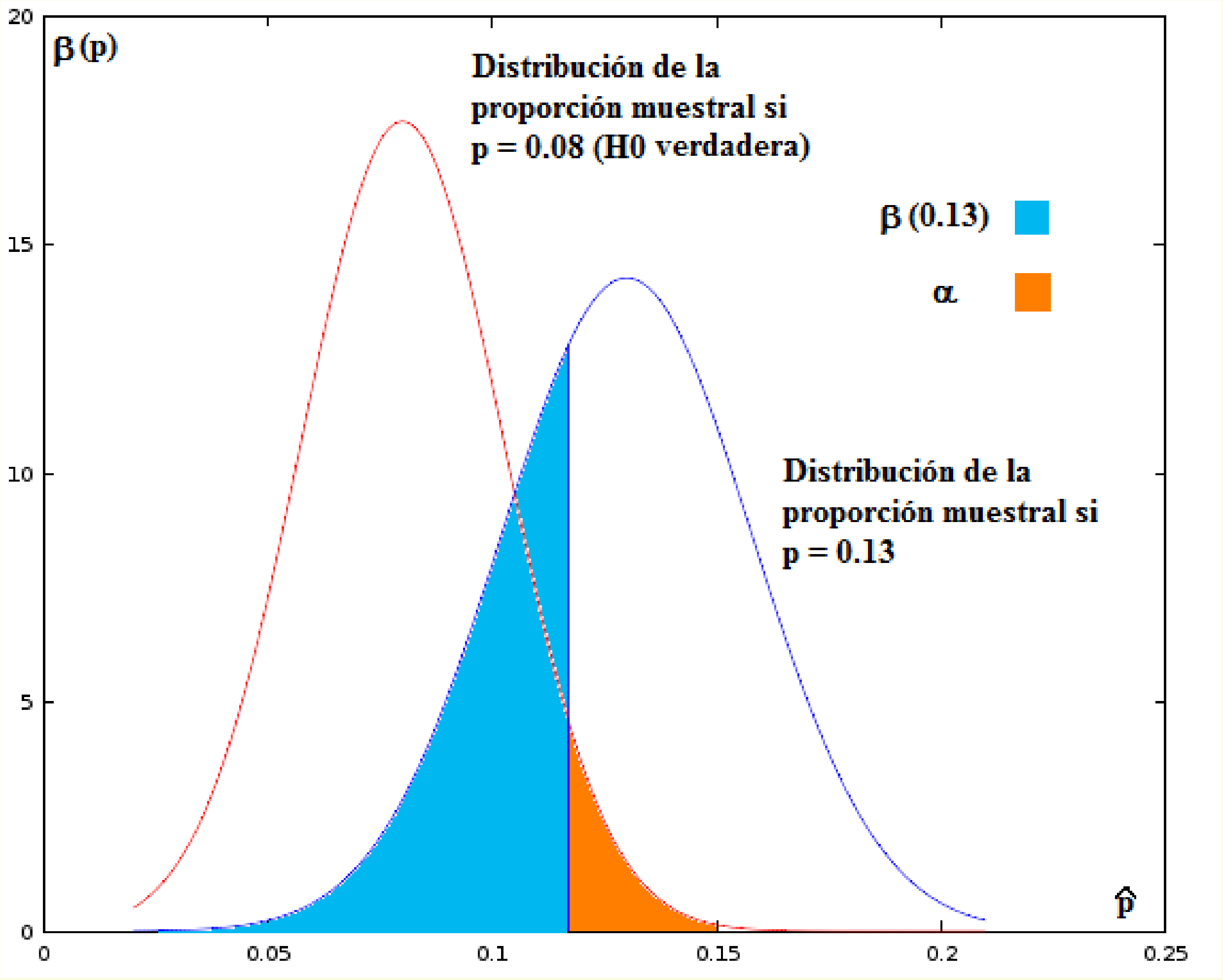
$$\beta(0.13) = P(\hat{p} < \hat{p}_c = 0.1171) = \Phi\left(\frac{0.1171 - 0.13}{\sqrt{0.13 \times 0.87}}\sqrt{145}\right) = 0.3221$$

En Octave:

```
>> normcdf((0.1171-0.13)/sqrt(0.13*0.87/145))

ans =  0.32208
```

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional



Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

La curva de operación característica de esta prueba es la representación gráfica de la probabilidad de cometer error de Tipo II que viene dada, en esta prueba de cola derecha, por:

$$\beta(p)=P(\hat{p}<\hat{p}_c=0.1171\vee p)=\Phi\left(\frac{0.117-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{145}\right)$$

$$\beta(\hat{p}_c)=P(\hat{p}<\hat{p}_c)=0.5$$

$$\beta(p_0)=1-\alpha=0.95$$

$$\beta(1)=0$$

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional

La curva de operación característica de esta prueba es la representación gráfica de la probabilidad de cometer error de Tipo II que viene dada, en esta prueba de cola derecha, por:

$$\beta(p)=P\left(\hat{p}<\hat{p}_c=0.1171 \vee p\right)=\Phi\left(\frac{0.117-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{145}\right)$$

En Octave:

```
>> p = 0.08:0.001:0.18;

>> beta = normcdf((0.1171-p)./sqrt(p.*(1-p)/145));

>> plot(p,beta)
```

Prueba de hipótesis sobre la proporción poblacional