Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico N$^{\underline{o}}$ 4

Variables aleatorias continuas

1. Una variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{A^2-x^2}} & x \in (-A, A) \\ 0 & x \notin (-A, A) \end{cases}$$

   a) Determine el valor de la constante c para que sean funciones densidad de probabilidad de variables aleatorias continuas (variable aleatoria continua) X;

   b) Encuentre la función de distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$.

   c) Calcule el valor esperado $\mathrm{E}[X]$ y la varianza $\mathrm{Var}(X)$;

2. Sea X una čon distribución uniforme en $(0, 8)$. Calcular:

   a) $P(2 < X < 5)$.

   b) $P[(0 < X < 3)/(0 < X < 5)]$.

3. La función densidad de probabilidad $f_X(x)$ de la variable aleatoria continua X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

   a) Calcular $\mathrm{E}[X]$ y $\mathrm{Var}(X)$.

   b) Calcular la mediana m de X definida por $P(X < m) = 0.5$.

4. La variable aleatoria continua X tiene por función densidad de probabilidad a $f_X(x) = x/2 \;\; 0 < x < 2$ y 0 fuera de ese intervalo. Si se hacen

   a) dos determinaciones independientes de X, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean mayores que 1?

   b) tres determinaciones independientes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean mayores que 1?

5. El porcentaje de alcohol $(100\ X)$ en cierto compuesto se puede considerar una variable aleatoria continua, en donde X verifica $0 < X < 1$ y tiene la función de densidad $f_X(x) = 20x^3(1-x) \;\; 0 < x < 1$ y 0 fuera de ese intervalo.

   a) Determinar la función de distribución F_X y representarla gráficamente.

   b) Calcular $P[(X < 1/2)/(1/3 < X < 2/3)]$.

6. La duración en horas X de cierto dispositivo electrónico es una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 100/x^2 & x > 100 \\ 0 & x \leq 100 \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un dispositivo dure menos de 200 hs si se sabe que el dispositivo aún funciona después de 150 hs de servicio?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que si se instalan 3 de tales dispositivos en un sistema 2 fallen antes de las 150 horas de servicio y el restante después de las 150 hs?

   c) ¿Cuál es el número máximo de dispositivos que se pueden poner en un sistema para que la probabilidad de que después de 150 horas de servicio todos ellos funcionen sea 0.4?

7. El colectivo de cierta línea va a un horario estricto con intervalos de 5 minutos. Calcular la probabilidad de que un pasajero que se acerque a la parada en un instante al azar tenga que esperar el colectivo menos de tres minutos. Suponga que el instante de llegada del pasajero a la parada es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en (0, 5).

8. La duración en horas de un sistema puede considerarse una variable aleatoria continua con distribución exponencial de parámetro característico 0.001 hora^{-1}.

   a) Una empresa que produce este sistema desea garantizarlo durante cierto tiempo. ¿Cuántas horas lo debe amparar la garantía de buen funcionamiento para asegurar, con probabilidad 0.95, que el sistema funcionará como mínimo el número de horas garantizadas.

   b) Un dispositivo utiliza cinco de estos sistemas y funciona si todos ellos lo hacen. Los sistemas funcionan (y fallan) en forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo opere, por lo menos, 100 horas? ¿Y 1000 horas?

   c) Otro dispositivo también utiliza cinco de estos sistemas y funciona mientras lo hagan por lo menos tres de ellos (no suponga ninguna conexión en especial). Los sistemas funcionan (y también fallan) en forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo funcione aún al cabo de 1000 horas?

9. Un sistema está integrado por dos componentes A y B que fallan al azar en promedio 1 vez cada 500 y 800 horas respectivamente. El sistema falla cuando cualquiera de dichos componentes falla. Se supone que estos componentes fallan en forma independiente y que el tiempo entre fallas es una variable aleatoria con distribución exponencial. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle después de transcurridas las primeras 1000 horas?

10. El tiempo de duración hasta la falla de un dispositivo mecánico se supone que tiene distribución exponencial con una media de 400 hs.

   a) Este dispositivo ha funcionado sin fallas durante 400 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que falle en las próximas 100 horas?.

   b) Si se ponen a funcionar 10 de estos dispositivos , ¿cuál es la probabilidad de que falle al menos uno de ellos antes de 100 horas?. Suponga que los dispositivos fallan de manera independiente.

11. Un sistema consta de n componentes idénticos conectados en serie. Cuando falla por lo menos un componente falla todo el sistema. Suponga que la duración de cada componente es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.01$ 1/hora, y que los componentes fallan independientemente uno de otro. Defina los sucesos independientes $A_i =$ i- ésimo componente dura por lo menos t horas, $i = 1, \ldots n$. Sea T el tiempo en el que falla el sistema, esto es, la duración mínima de funcionamiento entre los n componentes.
    Considerando la independencia de los sucesos A_i, obtenga $F(t) = P(T < t)$ y la función densidad de probabilidad de T. ¿Qué tipo de distribución de probabilidades tiene T ? ¿Cuál es el valor esperado de T?

12. La duración de ciertos dispositivos es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ (en 1/hora). La probabilidad de que en una muestra de 5 dispositivos haya por lo menos uno que dure más de 1200 hs. es 0.75.
    a) Hallar la constante λ.
    b) Suponga que estos dispositivos se conectan en serie de manera tal que al fallar por lo menos uno de ellos falla todo el sistema. Calcular la probabilidad de que el sistema funcione mas de 1500 horas.

13. Una función que se relaciona a veces con variable aleatoria continua no negativas es la función de tasa de fallas (o la tasa de riesgo). Esta función se define por $R(t) = f(t)/(1 - F(t))$ para una función de densidad $f(t)$ con su correspondiente función de distribución $F(t)$.
    Si la variable aleatoria T es la duración de un componente entonces, para Δt pequeño, $P[(t \leq T \leq t + \Delta t)|(T > t)] \approx R(t)\Delta t$. Demostrar que una variable aleatoria continua que toma valores reales positivos tiene distribución exponencial si y solo si $R(t)$ es constante.

    Comentario: Observe que la condición es necesaria y suficiente, si T tiene distribución exponencial de parámetro λ usando la definición de $R(t)$ resulta que $R(t) = \lambda$. Con la condición $R(t) = \lambda$ se obtiene un problema de valor inicial para $F_T(t)$, la función de distribución de T..

14. Se sabe que la duración X de una pieza responde a la distribución de *Weibull* cuya función de distribución es: $F(x) = 1 - \exp(-(\lambda\, x)^b)$ para $x > 0$ con b y λ constantes reales positivas. Si x se mide en miles de horas, $b = 2$ y $\lambda = 0.01$:
    a) obtener la función de densidad de probabilidad de la duración de la pieza.
    b) calcular la duración garantizada G_{90} con un 90 % de confiabilidad. *Nota:* Se cumple $P(X > G_{90}) = 0{,}90$.
    c) Se realizó una prueba con un lote muy grande de piezas y se separaron 1000 con duración superior a 10000 horas; ¿cuántas unidades espera Ud. haya en este lote de 1000 cuyas duraciones totales sean superiores a 20000 horas?

15. **Sobre la distribución normal**
    Suponga que la variable aleatoria continua X tiene distribución normal de media μ y desvío estándar σ. Sean f_X y F_X las funciones de densidad de probabilidad y de distribución respectivamente.

a) Demostrar que $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, donde Φ es la función de distribución de la variable continua Z que tiene distribución normal estándar (media cero y desvío estándar unitario).

b) Demostrar que $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

c) Sea z_α el fractil α de la variable continua Z que tiene distribución normal estándar, entonces $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Demostrar que $z_{1-\omega} = -z_\omega$.

d) Para una variable aleatoria X de media μ y desvío estándar σ el coeficiente de *kurtosis* κ viene dado por $\kappa = \frac{\mathrm{E}\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}$. Demostrar que para la variable continua X que tiene distribución normal se verifica $\kappa = 3$. Es dato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^4 \exp(-a\, z^2)\, dz = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\, a^{-\frac{5}{2}}, \qquad a > 0.$$

e) Calcule los cuartiles primero Q_1, tercero Q_3 y el rango intercuartílico $I_Q = |Q_3 - Q_1|$ para la variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desvío estándar σ. Según la definición de fractil se cumple $F(Q_1) = 0.25$ mientras que $F(Q_3) = 0.75$.

f) Según la convención introducida por J. W. Tukey para la construcción del *diagrama de caja* ó *boxplot*, los valores medidos de la variable de interés en una muestra que sean menores que $q_1 - 1.5\, i_q$, o mayores que $q_3 + 1.5\, i_q$, son declarados *valores extremos* ó *outliers* (q_1, q_3 e i_q son, respectivamente, los cuartiles primero, tercero y el rango intercuartílico para los datos de la muestra considerada). Calcule la probabilidad que una variable aleatoria X con distribución normal tome *valores extremos*.

g) Considere la variable continua Z con distribución normal estándar (media cero y desvío estándar unitario). Calcule $\mathrm{E}[|Z|]$.

16. El consumo mensual de combustible en una planta industrial se puede considerar una variable aleatoria continua con distribución normal con media 18000 litros y desvío estándar 1500 litros.

a) ¿Qué porcentaje de los meses se consume menos de 21000 litros?

b) ¿Qué porcentaje de los meses se consume mas de 17000 litros?

c) ¿Qué porcentaje de los meses el consumo es mayor que 17000 y menor que 21000 litros?.

d) ¿Qué capacidad debe tener un tanque para satisfacer el consumo mensual con probabilidad 0.95?

e) ¿Cuál es el consumo superado en el 90 % de los meses ?

f) De los meses que se consume mas de 17000 litros, ¿qué porcentaje se consume menos de 21000 litros ?

17. Por larga experiencia se ha determinado que la capacidad de cierto tipo de condensadores, fabricados con el mismo procedimiento, es una variable aleatoria continua con distribución normal de media 10 y desvío standard 0.1 (ambos valores en microfaradios).

a) Para que estos componentes puedan utilizarse en un sistema deben tener una capacidad no inferior a 9.8. ¿Cuál es el porcentaje de condensadores que no cumplen la especificación?

b) ¿Para que valor de la capacidad C_0 el 99 % de los condensadores tienen una capacidad igual o menor que C_0?

18. Un comerciante tiene piezas de mármol en dos depósitos, 70 % y 30 % respectivamente, en cada uno de ellos. El peso de estas piezas en kg se distribuye así: $N_1(1200, 150)$ y $N_2(1100, 100)$, (una forma de anotar media y dispersión de una distribución normal). Por error se juntaron las piezas en un solo depósito y se debe enviar 50 de ellas con un peso no inferior a 1100 kg sin tiempo para revisarlas. Calcular la probabilidad de que más de 10 piezas sean devueltas.

19. Una máquina produce tornillos con un diámetro que se distribuye en forma normal con media 8 mm. Se sabe que el 10 % de la producción es frágil por tener un diámetro menor que 5 mm. ¿Qué porcentaje de la producción tiene un diámetro mayor que 10 mm?

20. Un fábrica entrega remaches cuyo diámetro tiene una distribución normal. Se sabe que el 2.81 % de los remaches entregados tiene un diámetro mayor que 2.1 mm y que el 13.79 % tiene un diámetro menor que 1.5 mm. ¿Cuál es el valor medio y la varianza del diámetro de los remaches entregados?

21. El diámetro de contacto de la rosca de una unión se distribuye normalmente con media 10.02 mm y desvío standard 0.075 mm. Las especificaciones dadas para esa rosca son: 10.00 ± 0.025 mm.(la especificación es un intervalo de valores dentro del cuál deberá estar el diámetro para que sea considerado aceptable).

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la rosca esté fuera de la especificación dada?
    b) Suponiendo que el diámetro de contacto esté centrado en el valor nominal de la especificación (10 mm), ¿cuál es la máxima desviación standard del diámetro aceptable que permitirá no más de una defectuosa entre mil producidas?

22. Dos máquinas rectificadoras A y B trabajan de tal manera que cuando se ajusta el diámetro requerido para la pieza rectifican según una distribución normal de media 5 mm y desvíos de 0.01 y 0.02 mm respectivamente. La máquina A hace el 80 % del trabajo y la B el resto.
    Se mezclan las piezas rectificadas y se supone que una pieza es buena si su diámetro D está comprendido entre 5 mm y 5.02 mm.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza extraída al azar resulte fuera de especificación?
    b) Si una pieza extraída al azar resulta fuera de especificación, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido rectificada por la máquina B?
    c) Si se toma una muestra de 10 artículos de la mezcla de los fabricados por ambas máquinas ¿cuál es la probabilidad de encontrar i.) una pieza buena, ii.) por lo menos una pieza buena?

23. La vida promedio de cierto tipo de motor pequeño es de 10 años con una desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza reponer todos los motores que fallen dentro de un cierto período. Suponiendo que la vida de un motor sea una variable aleatoria continua distribuida normalmente, hallar el período de garantía que debe ofrecer el fabricante si sólo desea tener que reponer el 3 % de los motores que fallen.

24. El gerente de producción de una fábrica estima que la vida útil de una máquina es una variable aleatoria continua distribuida normalmente con una media de 3000 horas. Si además considera que hay una probabilidad de 0.5 de que la máquina dure menos de 2632 o más de 3368 horas, ¿cuál es la desviación típica de la duración de dicha máquina?

25. Si el tiempo T para fallar de un sistema está distribuido normalmente con media 90 horas y un desvío standard 5 horas, ¿cuántas horas de operación (t_c) deben considerarse para que la confiabilidad (probabilidad de que el tiempo de buen funcionamiento exceda t_c) sea 0.90? ¿ y 0.95?

26. Se puede ajustar una máquina expendedora de gaseosas de tal manera que llene los vasos con un promedio de m unidades de volumen (U_V) por vaso. Si se supone que el volumen despachado por la máquina es una variable aleatoria continua con distribución normal de media m y desvío standard 0.3 U_V, determine el valor de m de manera que los vasos de 8 U_V solamente se derramen el 1 % de las veces en que son llenados.

27. Se supone que los resultados de un examen tienen una distribución normal con una media de 78 y una varianza de 36.

    a) Determinar la probabilidad de que una persona que realiza el examen obtenga una nota mayor que 72.

    b) Suponga que a los estudiantes que se encuentran en el 10 % de la parte superior de la distribución se les asigna una calificación A. ¿Cuál es la nota mínima que se debe obtener para tener calificación A?

    c) ¿Cuál debe ser la mínima nota aprobatoria si el evaluador pretende que solamente el 28.1 % de los estudiantes apruebe?

    d) Calcular, aproximadamente, la proporción de los estudiantes que tienen nota que exceden por lo menos en 5 puntos a la calificación reprobatoria del 25 % (calificaciones inferiores).

    e) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea mayor que 84?

28. Un empleado va al trabajo en subte el 70 % de las veces y en colectivo el 30 % restante. El tiempo que tarda cuando va en subte es una variable aleatoria normal con media 30 min. y dispersión 5 min, mientras que el tiempo que tarda cuando va en colectivo es una variable aleatoria normal con media 40 min. y dispersión 8 min.

    a) Si un día tarda en llegar al trabajo mas de 35 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en subte?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos dos de 10 días consecutivos tarde mas de 35 minutos en llegar al trabajo? Indique que suposición permite el cálculo de esta probabilidad.

29. La longitud de ciertos dispositivos mecánicos tiene la siguiente tolerancia: 58 $\pm$ 0.21 mm. Se han recibido tres partidas de distintos proveedores de 200, 300 y 500 cajas de 6 unidades cada una, que si bien no difieren en su valor medio 58 mm presentan distintas dispersiones: 0.102 mm, 0.12 mm y 0.146 mm. Se supone que la longitud de esos dispositivos es una variable aleatoria con

distribución normal. En el almacén se han mezclado las cajas. Si se elige una caja al azar y se comprueba que exactamente 4 de las piezas están dentro de los límites de tolerancia, ¿cuál es la probabilidad de que la caja haya sido entregada por el proveedor número 2?