Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico N.º 2

Variables aleatorias discretas

1. Considere el experimento de lanzar un par de dados no cargados.
Sean las variables aleatorias X: suma de los puntos obtenidos e Y: máximo puntaje de los dos obtenidos. Obtenga las tablas de la función de probabilidad y la función de distribución de estas variables aleatorias discretas. Calcule las siguientes probabilidades:
   a) $P(X < 7)$ $\quad P(2 \leq X < 8)$ $\quad P(X \geq 9)$
   b) $P(Y \leq 3)$ $\quad P(2 < Y \leq 5)$ $\quad P(Y > 3)$

2. Suponga que la demanda diaria de un artículo es una variable aleatoria D con recorrido $R(D) = \{1, 2, 3, 4\}$ y función de probabilidad $p_D(r) = C\,2^r/r!$.
   a) Calcule la constante C.
   b) Obtenga y represente gráficamente la función de distribución F_D.

3. *a*) Determine el valor esperado y la varianza de las variables aleatorias X e Y del ejercicio 1.
   b) Determine el valor esperado $E[D]$ de la variable aleatoria D de la demanda del ejercicio anterior.

4. Se selecciona al azar una muestra sin reemplazo de 3 artículos de un total de 10 de los cuales 2 son defectuosos. Si X es la variable aleatoria: número de artículos defectuosos en la muestra, obtenga la distribución de probabilidades de X y calcule sus parámetros característicos. ¿Cómo cambia el problema si el muestreo es con sustitución?

5. Un fabricante de controladoras de discos rígidos somete cada unidad a una prueba rigurosa. De las controladoras recién ensambladas, el 84 % pasa la prueba sin ninguna modificación. Las que fallan en la prueba inicial son reelaboradas; de éstas, el 75 % pasa una segunda prueba.
Aquellas controladoras que fallan en la segunda prueba se rehacen por segunda ocasión y se vuelven a probar; el 90 % de ellas pasan la prueba y el resto se desarman.
Se define X como la variable aleatoria que corresponde al número de veces que debe reprocesarse una controladora seleccionada al azar.
   a) Especificar el recorrido de X y obtener la distribución de probabilidad.
   b) Calcular el valor esperado de X. ¿Cómo se interpreta este número?
   c) Calcular la varianza y el desvío estándar de X.
   d) ¿Cuál es el porcentaje de controladoras que se desarman?

6. En una estación de servicio, la distribución de clientes que llegan cada 15 minutos tiene la siguiente distribución de probabilidades:

Nro. de clientes	0	1	2
probabilidad	0.2	0.5	0.3

La probabilidad de que un cliente pague con tarjeta de crédito es 0.25, y cada cliente tiene una forma de pago independiente de la de los demás.

a) Obtenga la distribución de probabilidades de la variable aleatoria Y que indica la cantidad de clientes que en 15 minutos pagan con tarjeta de crédito.

b) Calcule el valor esperado y la dispersión de la variable aleatoria Y.

7. Una organización de consumidores que evalúa automóviles nuevos reporta regularmente el número de defectos importantes en cada automóvil examinado. Sea X el número de defectos importantes en un automóvil seleccionado al azar de un cierto tipo y $F_X(x)$ la función de distribución de probabilidad correspondiente.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.06 & 0 \le x < 1 \\ 0.19 & 1 \le x < 2 \\ 0.39 & 2 \le x < 3 \\ 0.67 & 3 \le x < 4 \\ 0.92 & 4 \le x < 5 \\ 0.97 & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

a) Calcular las siguientes probabilidades directamente de la función dada: $p_X(2) = P(X = 2)$, $P(X > 3)$, $P(2 \le X \le 5)$, y $P(2 < X < 5)$.

b) Representar graficamente $p_X(x)$.

c) ¿Cuál es el número esperado de defectos importantes que se espera al examinar un automóvil, seleccionado al azar, del tipo considerado en este problema?

8. La probabilidad de falla de un cierto tipo de componentes electrónicos es de 0.10.
Una compañía produce con ellos dos tipos de circuitos, denominados I y II respectivamente. El circuito tipo I consiste en un paralelo de dos componentes. El circuito tipo II está armado con una serie de dos componentes. De la producción total se elige un circuito de cada tipo.
Sea X la variable aleatoria que indica el número de circuitos que funciona cuando se prueban ambos.

a) Definir la función de probabilidad p_X, hallar la función de probabilidad y representar ambas funciones en forma gráfica.

b) Hallar el valor esperado de X.

9. Para la situación planteada en el problema de la demanda diaria D suponga que la utilidad U de la venta por artículo es 5 a (la unidad monetaria) y que cualquier artículo que no se venda produce una pérdida de 3 a. El fabricante produce diariamente k artículos.

a) Obtenga la distribución de probabilidades de la utilidad neta diaria U para distintos valores de k (1,2,3,4,5,...) y elija el valor de k que maximice la utilidad esperada $E[U]$.

b) Suponga que de alguna manera se pudiese determinar cuál será la demanda de un día (pagando por la información, desarrollando algún tipo de campaña, etc). ¿Cuánto pagaría como máximo para obtener la información?
Sugerencia: calcule la ganancia esperada considerando que se fabrica exactamente lo que se demanda.

10. Un contratista debe elegir entre dos obras. La primera promete una ganancia de \$ 240000 con una probabilidad de 0.75 o una pérdida de \$ 60000 (por inconvenientes varios) con una probabilidad

de 0.25. La segunda obra promete una ganancia de \$ 360000 con probabilidad 0.5 o una pérdida de \$ 90000 con probabilidad 0.5.

a) ¿Cuál debería elegir el contratista si quiere maximizar la ganancia esperada?

b) ¿Cuál sería la obra que elegiría si su negocio anduviera mal y quebrara a menos que lograra una ganancia de \$ 300000 en su próxima obra?

11. Un vendedor de diarios compra cada periódico a 40 centavos y lo vende a 1 peso y no puede devolver los diarios que no vendió. La demanda diaria es independiente de la del día anterior y tiene la siguiente distribución de probabilidades:

cantidad demandada	63	64	65	66	67	68	69	70
probabilidad	0.01	0.04	0.06	0.08	0.15	0.28	0.22	0.16

¿Cuántos diarios debe adquirir diariamente si desea maximizar la ganancia esperada? (Tenga en cuenta que la insatisfacción de la demanda no está penalizada.)

12. De un mazo de naipes ordinarios (52 naipes) bien barajado se extraen cinco cartas, al azar (sin sustitución), para una mano de poker.

a) Obtenga la distribución de probabilidades del número de diamantes D en la mano.

b) Determine el valor esperado y el desvío estándar de D.

c) Calcule la probabilidad de sacar por lo menos un trebol.

d) Calcule la probabilidad de sacar por lo menos dos ases.

13. En una semana de trabajo se realizaron 50 facturas en un comercio. En 5 de ellas se cometió un error.

a) Se eligen 10 facturas al azar. Determinar la distribución de probabilidades del número de facturas que contienen el error buscado. Representar graficamente la función de probabilidad del número de facturas que contienen el error buscado. Calcular el valor esperado y la varianza del número de facturas que contienen el error buscado

b) Suponga que se eligen 10 facturas al azar y no se conoce cuantas facturas hay con errores entre las 50 de esa semana. Se extrae la muestra y se obtiene una factura con error. Se conviene en estimar la cantidad de facturas con error como el valor que maximiza la probabilidad de obtener una factura con error entre las 10. Probar (confeccionando una tabla) que la estimación de la cantidad de facturas con error entre las 50 es 5.

14. De un grupo de N personas se eligen al azar a n de ellas.

a) Calcular la probabilidad de que se encuentren las r más altas entre las n elegidas ($r < n < N$).

b) La mitad de las N personas (N es par) habla inglés. Calcular la probabilidad de que la mitad de las n (n también es par) personas de la muestra aleatoria hable inglés.

c) Suponga que $N = 100$. Verificar que si el muestreo se realiza con sustitución la probabilidad de que la mitad de las n (n es par) personas de la muestra aleatoria hable inglés viene dada por

$$b(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} 0.5^n$$

Si $hg(n)$ es la probabilidad de que la mitad de las n (n es par) personas de la muestra aleatoria hable inglés, para el caso real (muestreo sin sustitución), verificar (confeccionando una tabla) que se cumple $|hg(n) - b(n)| < 0.1\, hg(n)$ si $n < 18$.

15. Un inspector de control de calidad está inspeccionando artículos recientemente producidos para buscar defectos. El inspector inspecciona un artículo en una serie de etapas independientes, cada una con duración fija. Cuando una falla está presente, la probabilidad de que sea detectada durante cualquiera de las etapas es 0.90. Sea X la cantidad de etapas necesarias para detectar una falla presente. Obtener el recorrido de X, la función de probabilidad y calcular $\mathrm{E}[X]$ y $\mathrm{Var}(X)$.
Son conocidas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, q^{k-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}, \quad |q| < 1.$$

16. El contenido de bolillas rojas de la caja C_1 se forma como sigue: se arroja un dado y se colocan tantas bolillas rojas como indica el dado; luego se extraen dos bolillas (sin reemplazo) de una caja C_2, que contiene 3 blancas y 7 rojas, y se introducen en C_1. Suponga que la caja C_1 está inicialmente vacía. Obtenga la función de probabilidad del número R de bolillas rojas que quedan finalmente en C_1. Determine $E[R]$.

17. Considere la variable aleatoria X: *cantidad de espadas en una mano de truco.*
    a) Obtenga la función de probabilidad $p_X(x)$ y la función de distribución $F_X(x)$.
    b) Para jugar se paga \$ 2 y el premio es recibir en \$ el cuadrado de la cantidad de espadas obtenidas. Si Y es la ganancia neta calcule el valor esperado $E[Y]$.

18. La probabilidad de que un cierto examen dé una reacción positiva es igual a 0.4 y las reacciones son independientes. Obtenga la función de probabilidad del número N de reacciones negativas antes de la primera reacción positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran menos de cinco reacciones negativas consecutivas antes de la primera positiva?

19. Sobre una placa **I** inciden partículas que, al chocar, pueden rebotar con probabilidad p_1 ó atravesarla con probabilidad $p_2 = 1 - p_1$. Las partículas que atraviesan la placa **I** impactan contra la placa **II** (paralela a la **I**) con probabilidad 1 de rebotar y por lo tanto vuelven a golpear contra el reverso de la placa **I** donde valen las probabilidades p_1 de rebotar en la **I** y p_2 de atravesarla hacia el medio de ingreso. Obtenga la función de probabilidad de la cantidad de veces N que una partícula rebota contra la placa **II**.

20. Un hombre tiene un llavero con 6 llaves. Ha olvidado cuál es la de su casa y las va probando una por una.
    a) Sea X el número de intentos necesarios hasta abrir la puerta. Halle la función de probabilidad de X y su valor esperado.
    b) Supongamos que este hombre está totalmente borracho y en cada intento vuelve a elegir una llave al azar de entre las 6, en lugar de separar las que ya probó. Halle la función de probabilidad de X, y extraiga conclusiones sobre los beneficios de la sobriedad.