Ejercicios Resueltos TP2

Índice

1. Ejercicio 5

Enunciado

Un fabricante de controladoras de discos rígidos somete cada unidad a una prueba rigurosa. De las controladoras recién ensambladas, el 84 % pasa la prueba sin ninguna modificación. Las que fallan en la prueba inicial son reelaboradas; de éstas, el 75 % pasa una segunda prueba. Aquellas controladoras que fallan en la segunda prueba se rehacen por segunda ocasión y se vuelven a probar; el 90 % de ellas pasan la prueba y el resto se desarman. Se define X como la variable aleatoria que corresponde al número de veces que debe reprocesarse una controladora seleccionada al azar.

a) Especificar el recorrido de X y obtener la distribución de probabilidad.

b) Calcular el valor esperado de X. ¿Cómo se interpreta este número?

c) Calcular la varianza y el desvío estándar de X

d) ¿Cuál es el porcentaje de controladoras que se desarman?

Resolución

Variable Aleatoria

A partir de esta guía, en lo personal sugiero, además de definir eventos y datos como en la primer guía, agregar la definición de las variables aleatorias. En este caso, la variable aleatoria ya está definida:

$$X = \text{Cantidad de veces que se reprocesa una controladora seleccionada al azar}$$

Eventos

Definiremos tres eventos pero basados en la misma idea:

$$A_i = \text{La controladora seleccionada pasa la prueba } i. \quad (1 \leq i \leq 3)$$

Datos

Para los datos hay que tener en cuenta que cada prueba sólo se llevaba a cabo si falló la anterior. Por ejemplo, si la controladora se sometió a la tercera prueba, es porque falló la primera y la segunda.

- $P(A_1) = 0{,}84$
- $P(A_2|\bar{A}_1) = 0{,}75$
- $P(A_3|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) = 0{,}9$

1.1. Item a

Para este problema hay que estar muy atentos al enunciado, porque se puede confundir la variable X que definimos previamente con:

$$X = \text{Cantidad de pruebas que falla una controladora seleccionada.} \tag{1}$$

Sin embargo, eso puede llevar a pensar que una controladora puede llegar a reprocesarse 3 veces si falla la tercer prueba. Vale aclarar, que si la controladora falla la tercer prueba, no se reprocesa, **se desarma**.

Por lo tanto, la variable aleatoria sigue siendo

$$X = \text{Cantidad de veces que se } \textbf{reprocesa} \text{ una controladora seleccionada al azar}$$

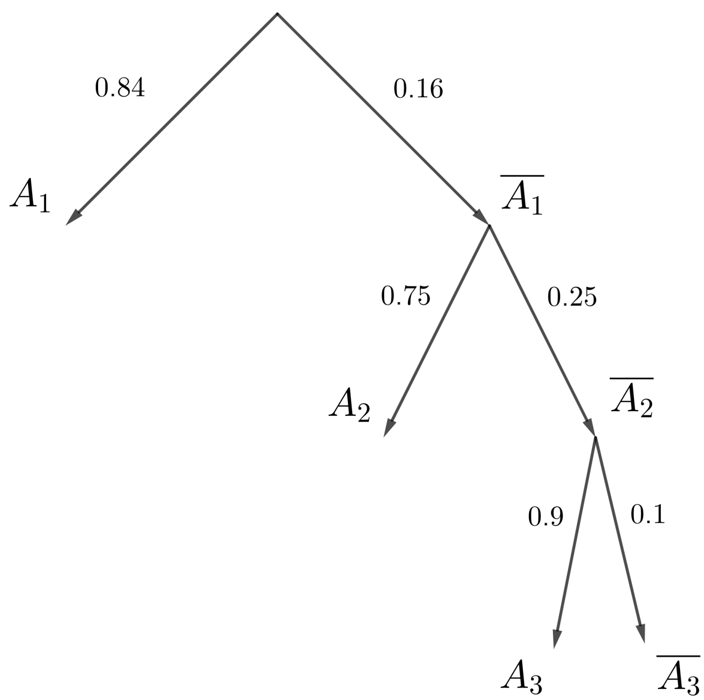
y en consecuencia, su recorrido es $R_X = \{0; 1; 2\}$ ya que puede reprocesarse como máximo 2 veces.

Nos piden la distribución de probabilidad de la variable X. Con este fin, basta conocer las probabilidades de que la variable X tome los valores de su recorrido, es decir:

- $P(X = 0)$
- $P(X = 1)$
- $P(X = 2)$

Notar que si $X = 0$, entonces la controladora no debió reprocesarse, eso significa que pasó la primera prueba. Dicho de otro modo, $P(X = 0) = P(A_1)$. Del mismo modo, si $X = 1$ eso significa que se reprocesó una única vez. Es decir, falló la primera prueba pero aprobó la segunda. Concluimos que $P(X = 1) = P(\overline{A_1} \cap A_2)$ y por lo tanto, $P(X = 2) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$.

Para calcular estas probabilidades, seguiremos el respectivo diagrama del árbol:



Por lo tanto,

- $P(X = 0) = P(A_1) = 0{,}84$
- $P(X = 1) = P(A_2 \cap \overline{A_1}) = P(A_2|\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1}) = 0{,}16 \cdot 0{,}75 = 0{,}12$
- $P(X = 2) = P(\overline{A_2} \cap \overline{A_1}) = P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1}) = 0{,}16 \cdot 0{,}25 = 0{,}04$

Expresado como tabla:

X	0	1	2
p_X	0,84	0,12	0,04

Notar que todas las probabilidades suman 1.

1.2. Item b

Ya teniendo el recorrido ($R_X = \{0, 1, 2\}$), el valor esperado se calcula del siguiente modo:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{2} i \cdot P(X = i) = 0 \cdot 0{,}84 + 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}2 \tag{2}$$

Esto significa que en una producción de controladores, la cantidad promedio de reprocesamientos será aproximadamente 0,2. Es decir, si se producen 100 controladores, la cantidad de reprocesamientos será aproximadamente $20 = 0{,}2 \cdot 100$.

No confundir la **cantidad de reprocesamientos** con la **cantidad de controladoras reprocesadas**. En este ejemplo puntual, con **20 reprocesamientos**, supongamos que 5 procesadoras fueron reprocesadas más de una vez (es decir, dos veces). Entonces el **número de controladoras reprocesadas fueron 15**.

1.3. Item c

Nos piden calcular la varianza, que podemos calcular del siguiente modo:

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{?} - \underbrace{E^2(X)}_{0{,}2^2}$$

Por lo tanto, sólo debemos calcular $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{2} i^2 \cdot P(X = i) = 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) = 0{,}12 + 0{,}16 = 0{,}28$$

Recopilando estos datos, $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0{,}28 - 0{,}2^2 = 0{,}24$.
Para el desvío, debemos calcular la raíz: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}4898979$

1.4. Item d

Para este ítem, consideramos un nuevo evento:

$$D = \text{la controladora extraída es desarmada}$$

La única forma de que la controladora sea desarmada, es que falle las tres pruebas. Por lo tanto, podemos describir al evento D como $D = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$.
Es decir,

$$P(D) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_3} | \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) P(\overline{A_1}) = 0{,}16 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}004$$

Entonces, se desarman el 0,4 % de las controladoras.

2. Ejercicio 8

Enunciado

La probabilidad de falla de un cierto tipo de componentes electrónicos es de 0.10. Una compañía produce con ellos dos tipos de circuitos, denominados I y II respectivamente. El circuito tipo I consiste en un paralelo de dos componentes. El circuito tipo II está armado con una serie de dos componentes. De la producción total se elige un circuito de cada tipo. Sea X la variable aleatoria que indica el número de circuitos que funciona cuando se prueban ambos.

a) Definir la función de probabilidad p_X, hallar la función de probabilidad acumulada y representar ambas funciones en forma gráfica.

b) Hallar el valor esperado de X.

Resolución

Variable aleatoria

Nuevamente, aquí está definida la variable aleatoria:

$$X = \text{cantidad de circuitos que funcionan}$$

Sabiendo que hay dos circuitos, podemos concluir que $R_X = \{0, 1, 2\}$.

Eventos

Podemos considerar los siguientes eventos:

- C_i = El componente i funciona. $(1 \leq i \leq 4)$
- F_I = funciona el circuito I
- F_{II} = funciona el circuito II

Datos

Siguiendo la figura 1, se puede concluir que $F_I = C_1 \cup C_2$ (debe funcionar alguno de los dos componentes), mientras que $F_{II} = C_3 \cap C_4$ (deben funcionar ambos componentes).

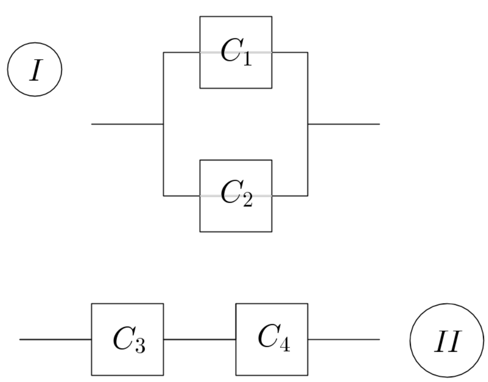


Figura 1: Descripción gráfica de ambos circuitos

Por otro lado, se sabe que los eventos C_i son independientes entre sí y $P(C_i) = 0{,}9 \Rightarrow P(\overline{C_i}) = 0{,}1$. Además, como F_I y F_{II} dependen de componentes distintos, también son independientes entre sí.

2.1. Item a

Nos piden la función de probabilidad puntual $p_X(x)$, para eso, debemos sacar las probabilidades que involucran cada valor del recorrido de X. Es decir:

- $P(X=0)$
- $P(X=1)$
- $P(X=2)$

Para calcular estas probabilidades, podemos pensar los eventos en función de F_I y F_{II}:

- $P(X=0) = P(\overline{F_I} \cap \overline{F_{II}}) \overset{IND}{=} P(\overline{F_I}) \cdot P(\overline{F_{II}})$
- $P(X=1) = P(\overline{F_I} \cap F_{II}) + P(F_I \cap \overline{F_{II}}) \overset{IND}{=} P(\overline{F_I}) \cdot P(F_{II}) + P(F_I) \cdot P(\overline{F_{II}})$
- $P(X=2) = P(F_I \cap F_{II}) \overset{IND}{=} P(F_I) \cdot P(F_{II})$

Por lo tanto, calculando $P(F_I)$ y $P(F_{II})$, se pueden obtener las probabilidades de sus complementos y a partir de ellos construir la función de probabilidad puntual.

$$P(F_I) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) \overset{IND}{=} P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cdot C_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9^2 = 0{,}99$$

Por otro lado,

$$P(F_{II}) = P(C_3 \cap C_4) = P(C_3) \cdot (C_4) = 0{,}9^2 = 0{,}81$$

Además, de estos resultados se concluye que $P(\overline{F_I}) = 0{,}01$ y $P(\overline{F_{II}}) = 0{,}19$.

Notar que la probabilidad de que funcione el circuito I es mayor que la correspondiente al circuito II. Esto tiene sentido ya que para que funcione el circuito II deben funcionar ambos, restringiendo más su funcionamiento.

Por lo tanto,

- $P(X=0) = P(\overline{F_I}) \cdot P(\overline{F_{II}}) = 0{,}01 \cdot 0{,}19 = 0{,}0019$
- $P(X=1) = P(\overline{F_I}) \cdot P(F_{II}) + P(F_I) \cdot P(\overline{F_{II}}) = 0{,}99 \cdot 0{,}19 + 0{,}01 \cdot 0{,}81 = 0{,}1962$
- $P(X=2) = P(F_I) \cdot P(F_{II}) = 0{,}99 \cdot 0{,}81 = 0{,}8019$

Expresado como tabla:

x	0	1	2
$p_X(x)$	0,0019	0,1962	0,8019

Notar que todas estas probabilidades suman 1, dando consistencia a nuestro resultado.

La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta se grafica correspondiendo a cada punto del recorrido un segmento de altura igual a la probabilidad puntual respectiva. Notar que en la figura los segmentos más altos son los correspondientes a $X=1$ y $X=2$, la probabilidad $P(X=0)$ es tan insignificante respecto de las otras que no se aprecia en el gráfico. Sin embargo, siempre debe ser considerada.

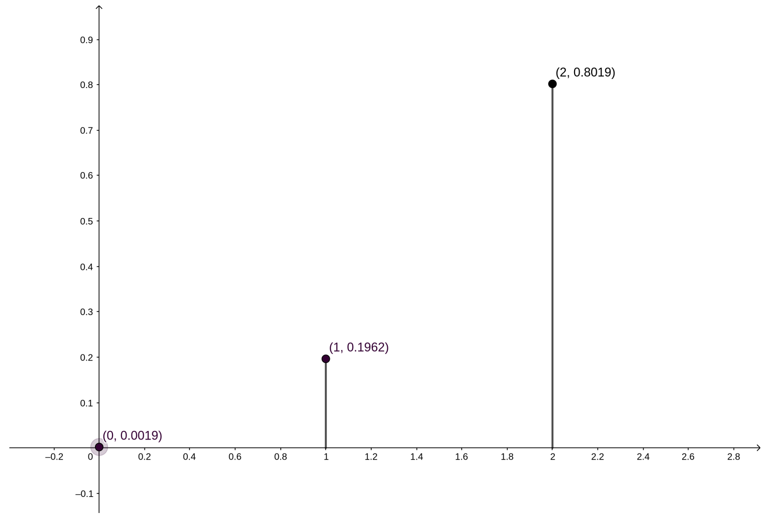


Figura 2: Función de probabilidad puntual

Además, se pide la función de desitribución acumulada. Para **cualquier** variable aleatoria, esta función se define como:

$$F_X(t) = P(X \leq t), \quad \underline{\forall t \in \mathbb{R}}$$

Si bien la la variable X tiene probabilidad cero para todo valor fuera del recorrido, esta función de distribución es válida para todo valor $t \in \mathbb{R}$. Es un error común considerar que sólo hay que definirla en los puntos de probabilidad positiva. Esto se debe a que esta función cambiará su valor únicamente en los valores del recorrido. Por lo tanto, para calcular F_X dividiremos en casos:

- Si $t < 0 \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = 0$ (no se acumula ningún punto de probabilidad positiva).
- Si $0 \leq t < 1 \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = 0) = 0{,}0019$ (el único punto de probabilidad positiva es $X = 0$).
- Si $1 \leq t < 2 \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1981$ (los únicos valores del recorrido menores o iguales que t son $X = 0$ y $X = 1$).
- Si $t \geq 2 \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$ (se acumulan todos los valores del recorrido).

Es decir, la función de distribución se define del siguiente modo:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0{,}0019 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0{,}1981 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, graficar F_X es lo mismo que graficar cualquier función en $\mathbb{R}$. Este gráfico se ve en la Figura 3, notar que los saltos de esta función se dan en los puntos de probabilidad positiva, y la magnitud del salto se corresponde con la probabilidad respectiva.

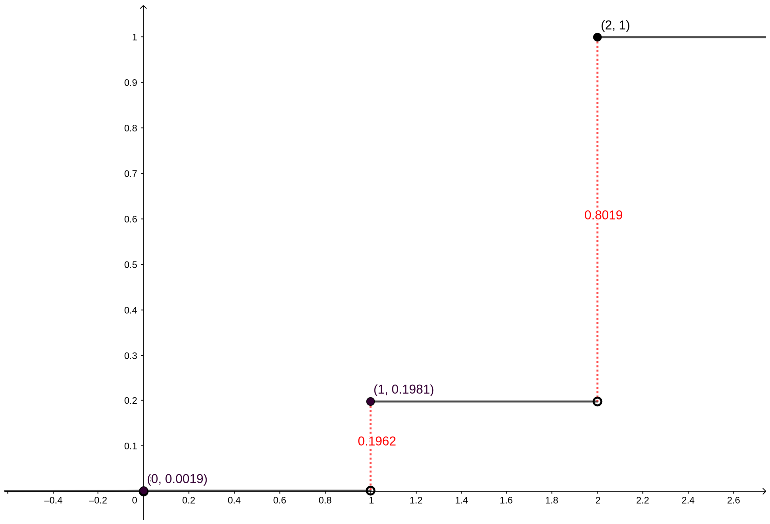


Figura 3: Función de distribución de X

2.2. Item b

Sabiendo que el recorrido de X es $R_X = \{0, 1, 2\}$, el valor esperado se calcula del siguiente modo:

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = 0 \cdot 0{,}0019 + 1 \cdot 0{,}1962 + 2 \cdot 0{,}8019 = 1{,}8$$

3. Ejercicio Extra

Enunciado

Una fábrica de automotores (A) ha determinado que la cantidad de fallas en sus productos, dada por la variable aleatoria X, sigue la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0{,}4 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0{,}45 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0{,}9 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

a) Hallar $p_X(x)$ y $E(X)$.

b) Hallar $V(X)$ y $\sigma(X)$

c) Su competencia (la fábrica B) asegura que ha logrado mejorar la cantidad de fallas en sus unidades (dada por la variable aleatoria Y), exponiendo la siguiente tabla de probabilidades puntuales $p_Y(y)$:

Y	0	1	2	3	4	5	6
p_Y	0,55	0,2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05

Hallar $E(Y)$, ¿mejora la cantidad promedio de fallas?

d) Hallar $V(Y), \sigma(Y)$ ¿Qué fábrica eligiría para comprar un auto?

Resolución

Variables aleatorias

En este ejercicio, las variables aleatorias están definidas:

- X = Cantidad de fallas en un auto elegido al azar de la fábrica A
- Y = Cantidad de fallas en un auto elegido al azar de la fábrica B

Eventos

Este ejercicio en particular no requiere un evento adicional ya que alcanzan los análisis de las variables X e Y.

Datos

Como datos, se tienen la función de distribución de X ($F_X(t)$) y la función de probabilidad puntual de Y ($p_Y(y)$).

3.1. Item a

Siguiendo lo visto en el ejercicio anterior, para una variable aleatoria discreta, la función de distribución tiene saltos en los valores del recorrido. Entonces, viendo $F_X(t)$, podemos deducir que $R_X(t) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Además, el tamaño de los saltos en cada punto es igual a su probabilidad puntual. Calcularlo formalmente escapa a los contenidos de este curso, por lo tanto, se ofrece una alternativa simplificada, utilizando valores fuera del recorrido. Es decir:

- $P(X = 0) = F_X(0) - F_X(-0{,}5) = 0{,}4 - 0 = 0{,}4$
- $P(X = 1) = F_X(1) - F_X(0{,}5) = 0{,}45 - 0{,}4 = 0{,}05$
- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X(1{,}5) = 0{,}9 - 0{,}45 = 0{,}45$
- $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(2{,}5) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

Entonces, expresado como tabla se tiene que:

X	0	1	2	3
p_X	0,4	0,05	0,45	0,1

Para calcular el valor esperado, usamos la fórmula:

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}25$$

Es decir, el número promedio de fallas es 1.25. Esto quiere decir que en 100 autos de la fábrica A, habrá **aproximadamente** un promedio de 125 fallas, distribuidas entre los autos de la muestra.

3.2. Item b

Para calcular la varianza, sacaremos primero $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3) = 0^2 \cdot 0{,}4 + 1^2 \cdot 0{,}05 + 2^2 \cdot 0{,}45 + 3^2 \cdot 0{,}1 = 2{,}75$$

Teniendo este dato:

$$V(X) = 2{,}75 - 1{,}25^2 = 1{,}1875$$

Por último,

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}089725$$

3.3. Item c

Para calcular el valor esperado de Y, necesitamos su recorrido y sus probabilidades puntuales (dados como dato). Podemos deducir a partir de la tabla que el recorrido de Y es $R_Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Entonces, podemos calcular el valor esperado:

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{6} i \cdot P(Y=i) = 0 \cdot 0{,}55 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}05 = 1{,}2$$

Podemos concluir que la cantidad promedio de fallas es menor para los autos fabricados por B.

3.4. Item d

Para calcular la varianza, empezamos por $E(Y^2)$:

$$E(Y^2) = \sum_{i=0}^{6} i^2 \cdot P(Y=i) = 0^2 \cdot 0{,}55 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}05 + 4^2 \cdot 0{,}05 + 5^2 \cdot 0{,}05 + 6^2 \cdot 0{,}05 = 4{,}7$$

Por lo tanto,

$$V(Y) = 4{,}7 - 1{,}2^2 = 3{,}26 \Rightarrow \sigma(Y) = 1{,}8055$$

Notemos que si bien el número promedio de fallas de la fábrica B es menor que aquellos de la fábrica A, la dispersión es mayor. Esto se puede observar en ambos recorridos R_X y R_Y, ya que Y tiene más valores alejados de su media y es probable que pueda tener un número muy grande de fallas.

Siendo la seguridad fundamental en el uso de un automóvil, sería preferible elegir un auto con el menor número de fallas posible, en este caso, uno proveniente de la fábrica A.

Moraleja: Sabiendo que el común de la gente tiene el promedio como única medida de intuición estadística, pueden ser usados para buscar resumir erróneamente la calidad de un producto (aunque se extiende a casi cualquier ámbito). Sin embargo, como futuros ingenieros siempre deben ir más allá de este promedio, ya que resume demasiado la información. De hecho, un ingeniero siempre debe priorizar la precisión, por lo que el desvío es en algunas ocasiones hasta más importante que el valor esperado. Si en una comparación entre la calidad de dos productos, los promedios están cercanos, pero un desvío es mucho menor que el otro, el de menor desvío será un producto de calidad más “confiable”.