

Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico N° 5: Respuestas
Mezcla de variables aleatorias, funciones de variable
aleatoria y distribuciones conjuntas

1. a) 0.0513 b) $F_V(v) = \frac{1}{2} (\Phi(v/0.3) + \Phi((v - 0.9)/0.25))$, donde Φ es la función de distribución de la variable aleatoria con distribución normal estándar. El valor esperado de V es $E(V) = 0.45$.

2. La función densidad de probabilidad de X es $f_X(x) = \frac{1}{245} (2x+26) I_{(1,8)}(x)$, donde $I_{(a,b)}(x)$ toma valor 1 si $x \in (a, b)$ y 0 en caso contrario. El valor esperado de X es $\frac{71}{15} \approx 4.73$, la varianza $\frac{1813}{450} \approx 4.029$ y el desvío estándar es $\sigma(X) \approx 2.007$.

3. a) $E(Y) = 1.5$, $V(Y) = 20.25$. b) $E(Y) = 2.5$, $V(Y) = 2.25$
 c) $E(Y) = 4.6$, $V(Y) = 108.84$.

4. a) La variable aleatoria X tiene distribución normal de media m y dispersión s . b) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x/2} I_{(0,\infty)}(x)$.

5. a) $f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} I_{(0,1)}(x)$.

6. $g(y) = \frac{1}{6} I_{[7,13)}$, $E(Y) = 10$, $h(z) = \frac{1}{2z}$, $z \in (e, e^3)$, $E(Z) = (e^3 - e)/2$.

7. $h(v) = \frac{3}{2\pi} \left(\left(\frac{3v}{4\pi} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right)$ $0 < v < \frac{4\pi}{3}$.

8. a) 0.865 b) $\frac{25}{6}$ c) $P(B < b) = (1 - (1 - 0.2b)^{0.5})^2$.

9. a) 0.13397 b) 7.33 c) $F_C(c) = 0.5 \sqrt{c-6} I_{[6,10)}(c) + 1 I_{[10,\infty)}(c)$.

10. a) $f(w) = \frac{1}{4\sqrt{2w}}$ $162 < w < 242$ b) $E(W) = \frac{602}{3}$ y $V(W) = \frac{24016}{45}$
 c) $P(W > \frac{602}{3}) \approx 0.492$.

11. a) La función densidad de probabilidad de Y es

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) I_{(0,1)}(y).$$

b) $E(Y) = \frac{1}{6}$ y $V(Y) = \frac{7}{180}$.

12. Los pares (x_k, p_k) de la distribución marginal de X son: (1,0.2), (2, 0.2), (3, 0.1), (4, 0.4) y (5, 0.1). Los pares (y_k, p_k) de la distribución marginal de Y son: (1,0.5), (2, 0.3) y (3, 0.2). Las ternas $(x_i, y_j, p_{i/j})$ de la distribución condicional de X dado $Y = y_j$ son: (1, 1, 0.2), (2, 1, 0.2), (3, 1, 0.1), (4, 1,

0.3), (5, 1, 0.2); (1, 2, 1/6), (2, 2, 1/6), (3, 2, 1/6), (4, 2, 0.5); (1, 3, 0.25), (2, 3, 0.25), (4, 3, 0.5). Las ternas $(y_i, x_j, p_{i/j})$ de la distribución condicional de Y dado $X = x_j$ son: (1, 1, 0.5), (2, 1, 0.25), (3, 1, 0.25); (1, 2, 0.5), (2, 2, 0.25), (3, 2, 0.25); (1, 3, 0.5); (2, 3, 0.5); (1, 4, 0.375), (2, 4, 0.375), (3, 4, 0.25); (1, 1, 1).

13. a) Los pares (x_k, p_k) de la distribución marginal de X son: (0, 0.03), (1, 0.08), (2, 0.16), (3, 0.21), (4, 0.24) y (5, 0.28). Los pares (y_k, p_k) de la distribución marginal de Y son: (0, 0.25), (1, 0.26), (2, 0.25) y (3, 0.24).
b) Los pares (z_k, p_k) de la distribución de $Z = X + Y$ son: (1, 0.02), (2, 0.06), (3, 0.13), (4, 0.19), (5, 0.24), (6, 0.19), (7, 0.12) y (8, 0.05). Los pares (w_k, p_k) de la distribución de $W = XY$ son: (0, 0.28), (1, 0.02), (2, 0.07), (3, 0.07), (4, 0.11), (5, 0.08), (6, 0.09), (8, 0.05), (9, 0.06), (10, 0.06), (12, 0.06) y (15, 0.05). c) $E(X + Y) = 4.87$; $V(X + Y) = 2.6731$; $E(XY) = 4.76$; $V(XY) = 19.2224$ d) -0.2572.

14. a) Los pares (x_k, p_k) de la distribución marginal de X son: (-2, 0.25), (-1, 0.25), (1, 0.25) y (2, 0.25). Los pares (y_k, p_k) de la distribución marginal de Y son: (1, 0.50) y (4, 0.50). b) $E(X) = 0$; $E(Y) = 2.5$ y $E(XY) = 0$
c) Se cumple $Y = X^2$.

15. a) Las ternas $(r, k, p_{Y/X}(r/k))$ de la función de probabilidad condicional $p_{Y/X}$ son: (0, 0, 0.1), (1, 0, 0.3), (0, 1, 0.4), y (1, 1, 0.2). c) Los pares $(k, p_X(k))$ de la función de probabilidad p_X son: (0, 0.5) y (1, 0.5) mientras que los pares $(r, p_Y(r))$ de la función de probabilidad p_Y son: (0, 0.4) y (1, 0.6). d) -0.1.

16. a) La función de probabilidad condicional $p_{Y/X}$ viene dada por:
 $p_{Y/X}(r/k) = \binom{k}{r} \frac{1}{2^k}$ para $0 \leq r \leq k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. b) La función de probabilidad conjunta es $p_{XY}(k, r) = \binom{k}{r} \frac{1}{6 \cdot 2^k}$ $0 \leq r \leq k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

17. a) 0.2 b) $\frac{7}{30}$ c) 0.6 d) $\frac{4}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) Las ternas $(r, k, p_{Y/X}(r/k))$ de la función de probabilidad condicional $p_{Y/X}$ son: (0, 0, 0), (0, 1, $\frac{1}{6}$), (0, 2, $\frac{2}{9}$), (0, 3, $\frac{1}{4}$), (1, 0, $\frac{1}{3}$), (1, 1, $\frac{1}{3}$), (1, 2, $\frac{1}{3}$), (1, 3, $\frac{1}{3}$), (2, 0, $\frac{2}{3}$), (2, 1, $\frac{1}{2}$), (2, 2, $\frac{4}{9}$), y (2, 3, $\frac{5}{12}$). g) Los pares $(k, p_X(k))$ de la función de probabilidad p_X son: (0, $\frac{1}{10}$) y (1, $\frac{1}{5}$), (2, $\frac{3}{10}$) y (3, $\frac{2}{5}$), mientras que los pares $(r, p_Y(r))$ de la función de probabilidad p_Y son: (0, $\frac{1}{5}$) y (1, $\frac{1}{3}$) y (2, $\frac{7}{15}$).
h) $E(X) = 2$ $E(Y) = \frac{19}{15}$ i) $E(X + Y) = \frac{49}{15}$; $V(X + Y) = \frac{299}{225} \approx 1.3289$.

18. a) 0.15 b) 0.4 c) 0.22 d) 0.17 e) $E(X) = 1.7$, $E(Y) = 1.55$
f) X e Y no son independientes.

20. a) 0.1255 b) 0.34 c) 0.417 d) 0.08 (no tenga en cuenta el par

$(0, 0)$ e) $\frac{1}{6}$ f) 0.12.

21. a) Sea $Z = X + Y$. Los pares $(z_k, p_Z(z_k))$ de la función de probabilidad p_Z son: $(0, 0.02)$, $(5, 0.1)$, $(10, 0.18)$, $(15, 0.45)$, $(20, 0.24)$ y $(25, 0.01)$. El valor esperado de Z es 14.1. b) Las variables X e Y no son independientes.

22. a) $\frac{45}{64}$ y $\frac{5}{16}$ b) La variable Z tiene distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0.5$.

23.

	Tabla 1	Tabla 2	Tabla 3
$E(X)$	0	0	0
$E(Y)$	0	0	0
$E(XY)$	0	0.4	-0.4
$V(X)$	0.2	0.4	0.4
$V(Y)$	0.2	0.4	0.4
$\text{Cov}(X, Y)$	0	0.4	-0.4
$\rho(X, Y)$	0	1	-1
Independencia	NO	NO	NO

24. a) $\frac{1}{9}$ b) $E(X) = E(Y) = \frac{7}{4} V(X) = V(Y) = \frac{11}{16}$.

25. a) No son independientes b) 0.412.

26. a) e^{-3} b) La variable X tiene distribución exponencial de parámetro 1, y la variable Y tiene a $\frac{1}{(1+y)^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ como función densidad de probabilidad. Las variables aleatorias X e Y no son independientes. c) El valor esperado de Y no es finito.

27. a) $\frac{15}{29}$ b) Las probabilidades solicitadas son 0.4909, 0.5194 y 0.7566. c) $\frac{405}{232}$ y $\frac{245}{174}$. d) No son independientes.

28. La función densidad de probabilidad de D viene dada por

$$f_D(d) = ((1 - e^{(10-d)})/2) I_{(10,12)}(x) + ((e^{(12-d)} - e^{(10-d)})/2) I_{(12,\infty)}(x).$$

b) $P(D > 13) = (e^{-1} - e^{-3})/2 \approx 0.1590$.

29. a) $f(x, y) = \lambda^2 \exp(-\lambda(x+y))$ si $x > 0$ e $y > 0$. b) $(1 - \exp(-1))^2$ c) $1 - \exp(-\lambda t) - \lambda t \exp(-\lambda t)$.

30. a) $F_T(t) = \frac{1}{900} (60t - t^2) I_{[0,30]}(t) + I_{(30,\infty)}(t)$ y la función densidad de probabilidad de T es $f_T(t) = \frac{1}{900} (60 - 2t) I_{(0,30)}(t)$. b) El valor esperado

de T es 10 y la varianza es 50.

31. a) 0.5 b) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2}{9} (1 + \ln \frac{9}{2})$.