Funciones de variable aleatoria

e son variables aleatorias, es una función real de una variable real.

$$Y = H(X)$$

Dos cuestiones a plantear:

a) Conocido el recorrido de **,** cómo obtener el de

b) Conocida la función de distribución de cómo obtener la de

Funciones de variable aleatoria

	-2	-1	0	2	4
	0.10	0.30	0.35	0.20	0.05

$$Y = H(X) = 2X + 3$$

	-1	1	3	7	11
	0.10	0.30	0.35	0.20	0.05

Funciones de variable aleatoria

	-2	-1	0	2	4
	0.10	0.30	0.35	0.20	0.05

$$Y = H(X) = X^2$$

	0	1	4	16
	0.35	0.30	0.30	0.05

Funciones de variable aleatoria

e son variables aleatorias discretas, es una función real de una variable real.

$$Y = H(X)$$

En general:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{\{x : H(x) = y\}} p_X(x)$$

Funciones de variable aleatoria

Una compañía de exploración petrolera va a perforar diez pozos y cada uno de ellos tiene una probabilidad 0.1 de producir petróleo en forma comercial. A la compañía le cuesta C pesos perforar cada pozo. De un pozo comercial se puede extraer petróleo por valor de 40 C pesos.

: cantidad de pozos que producen petróleo

$$X \quad Binomial(10,0.1)$$

: ganancia obtenida

$$G=40\,C\,X-10\,C$$

$$R_G=\{g:g=40\,C\,k-10\,k\,,con\,k=0,1\,,\cdots,10\}$$

$$p_G(g)=P(40\,C\,X-10\,C=g)=P\left(X=\frac{g+10\,C}{40\,C}\right)=\binom{10}{\frac{g+10\,C}{40\,C}}0.1^{\frac{g+10\,C}{40\,C}}\,0.9^{\frac{390C-g}{40C}}$$

Funciones de variable aleatoria

Una compañía de exploración petrolera va a perforar diez pozos y cada uno de ellos tiene una probabilidad 0.1 de producir petróleo en forma comercial. A la compañía le cuesta C pesos perforar cada pozo. De un pozo comercial se puede extraer petróleo por valor de 40 C pesos.

: cantidad de pozos que producen petróleo

$$X \quad Binomial(10,0.1)$$

: ganancia obtenida

$$G = 40\,C\,X - 10\,C$$

$$E[G] = E[40\,C\,X - 10\,C] = 40\,C\,E[X] - 10\,C = 40\,C\,10\,0.1 - 10\,C = 30\,C$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.d., es una función real de una variable real “escalonada”.

– Normal estándar

$$Y = H(X) = \begin{cases} ¿ -1 \; X < -1, \\ ¿ \; 0 \; -1 < X < 2, \\ ¿ +1 \; 2 < X \, . \end{cases}$$

	-1	0	1
	0.1587	0.8186	0.0227

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.d., es una función real de una variable real “escalonada”.

$$Y = H(X)$$

En general:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \int_{\{x : H(x) = y\}} f_X(x)\,dx$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente.

– Normal estándar

$$Y = H(X) = 2X + 5$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X + 5 \le y) = P\left(X \le \frac{y-5}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-5}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-5}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

también tiene distribución normal pero de media 5 y desvío estándar 2, i.e.,

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente.

– Normal estándar

$$Y = H(X) = A\,X + B$$

En general:

también tiene distribución normal pero de media y desvío estándar , i.e.,

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente.

– Exponencial de parámetro 1

$$Y=H(X)=e^X$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(e^X\le y\right)=P(X\le \ln(y))=F_X(\ln(y))$$

$$\boldsymbol{F_Y(y)=1-e^{-\ln(y)}=1-\frac{1}{y}}$$

$$f_Y(y)=f_X(\ln(y))\times\frac{1}{y}=e^{-\ln(y)}\times\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\times\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2}$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente.

– Exponencial de parámetro 1

$$Y = H(X) = e^{X}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y} & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y^2} & y > 1 \end{cases}$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente y derivable.

$$Y = H(X)$$

En general:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y) = P(X \leq H^{-1}(y)) = F_X(H^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \times \frac{d}{dy} H^{-1}(y) = f_X(H^{-1}(y)) \times \frac{1}{H'(H^{-1}(y))}$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente y derivable.

– Normal

$$Y = H(X) = e^X$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, y} \exp\left(-\dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\ln(y) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) & y > 0 \end{cases}$$

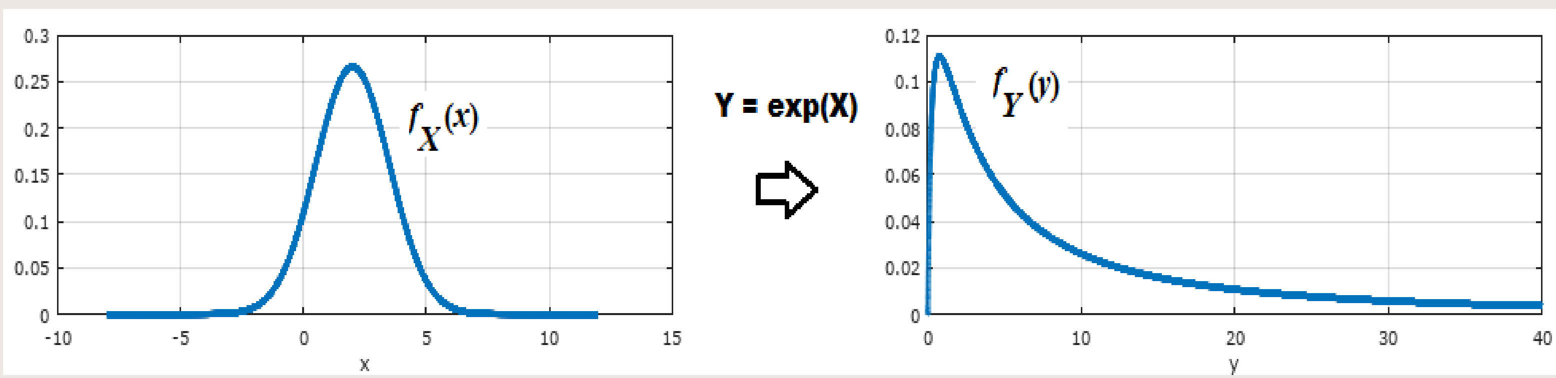
tiene distribución lognormal

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente creciente y derivable.

– Normal

$$Y = H\left(X\right) = e^{X}$$



tiene distribución normal

tiene distribución lognormal

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua estrictamente decreciente.

– Uniforme entre 1 y 3

$$Y = H(X) = \frac{1}{X}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{1}{X} \le y\right) = P\left(X \ge \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2y} & y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \\ 0 & y \notin \left(\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \\ 0 & y \notin \left(\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases}$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua no monótona.

– Normal estándar

$$Y = H(X) = X^2$$

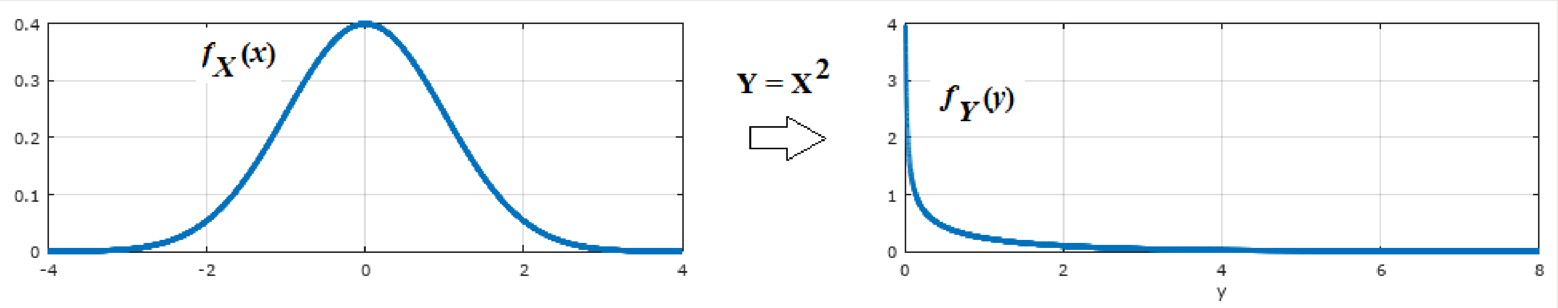
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} & y > 0 \end{cases}$$

tiene distribución ji-cuadrado con un grado de libertad

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real continua no monótona.

– Normal estándar



– Normal estándar

tiene distribución ji-cuadrado con un grado de libertad

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. e es una v.a.c., es una función real de una variable real: Cálculo de momentos

Dos maneras: Una de ellas usando la distribución obtenida de y luego la definición.

$$E\left[Y^n\right] = \sum_{y \in R_Y} y^n p_Y(y) \qquad E\left[Y^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y)\, dy$$

La otra es usando la distribución conocida de y la función :

$$E\left[Y^n\right] = \sum_{x \in R_X} \left(H(x)\right)^n p_X(x) \qquad E\left[Y^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H(x)\right)^n f_X(x)\, dx$$

Funciones de variable aleatoria

– Uniforme entre 1 y 3

$$Y=H(X)=\frac{1}{X}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y^2} & y\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)\\ 0 & y\notin\left(\dfrac{1}{3},1\right)\end{cases}$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy=\int_{1/3}^{1} y\,\frac{1}{2y^2}\,dy=\frac{\ln(3)}{2}$$

$$E[Y^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy=\int_{1/3}^{1} y^2\frac{1}{2y^2}\,dy=\frac{1}{3}$$

$$Var[Y]=\frac{1}{3}-\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)^2\approx 0.032$$

Funciones de variable aleatoria

– Uniforme entre 1 y 3

$$Y=H(X)=\frac{1}{X}$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f_X(x)\,dx=\int_1^3 \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}\,dx=\frac{\ln(3)}{2}$$

$$E[Y^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} (H(x))^2 f_X(x)\,dx=\int_1^3 \frac{1}{x^2}\times\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{3}$$

$$Var[Y]=\frac{1}{3}-\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)^2\approx 0.032$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c. y es su función de distribución

$$Y = F_X(X)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F_X(X) \le y) = P\left(X \le F_X^{-1}(y)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(y)\right)$$

$$F_Y(y) = y \; \forall\, y \in (0,1)$$

$$f_Y(y) = 1 \; \forall\, y \in (0,1)$$

$$Y \quad U(0,1)$$

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c., es su función de distribución y

$$Y = F_X^{-1}(U)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(F_X^{-1}(U) \le y\right) = P\left(U \le F_X(y)\right) = F_X(y)$$

$$Y \qquad\qquad X$$

La función de distribución de es la de ; a partir de valores de una variable aleatoria continua con distribución uniforme en (0,1) se obtienen los de una variable aleatoria continua si se usa como función de transformación la inversa de su función de distribución.

Funciones de variable aleatoria

es una v.a.c., es su función de distribución y

$$Y = F_X^{-1}(U)$$

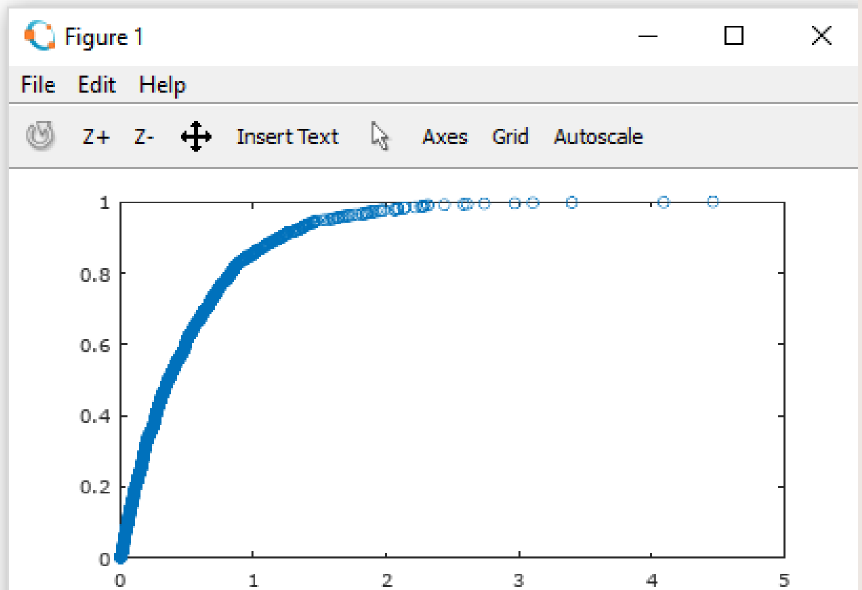
Octave

File Edit Debug Window Help News

Current Directory: C:\Users\paco

Command Window

```
>> % F_X(x) = 1 - exp(-L*x) entonces su inversa es y = (-1/L)*ln(1-u) con u=rand
>> N=1000;U=rand(N,1); L =2;
>> Y=(-1/L)*log(1-U);
>> % muestro la distribucion empirica
>> plot(sort(Y),(1:N)/N,'o')
>>
```



En este caso se considera una variable aleatoria continua con distribución exponencial de parámetro 2. Se sortean 1000 números aleatorios (rand) y a partir de ellos se generan los valores de Y que serán los de la variable exponencial.