Tests de Hipótesis

Lic. Lucio José Pantazis

22/5/2023

Motivación

Material audiovisual

Para introducir esta temática, vamos a ver el siguiente extracto de la película "Un cuento chino", del año 2005: https://youtu.be/Vb3QPEr6vAg

Un cuento chino

Imaginemos cómo puede haberse dado la previa a este intercambio.

- Hay una **hipótesis previa**: si bien la cantidad de tornillos por caja es a veces es mayor o menor, su **media** es de 350 tornillos.
  Esta hipótesis es sostenida por el proveedor.
- Como cliente, Ricardo tiene una sospecha que esta hipótesis es falsa.
  Por lo tanto, plantea una **hipótesis alternativa**, contrapuesta a la hipótesis planteada por el proveedor, que establece que la **media** de los tornillos por caja es **menor** que 350 tornillos.
- Para poner a prueba estas hipótesis enfrentadas, Ricardo decide contar la cantidad de tornillos en las cajas.
  Es decir, recolecta **evidencia** que pueda respaldar alguna de las hipótesis.
- Luego de recolectar evidencia, debe **decidir** por una de las hipótesis para saber cómo actuar.
  En esta decisión puede cometer **errores**:
  - Puede decidir que el proveedor se equivoca, cuando éste tiene razón.
    Esto lo llevaría a **cambiar** de proveedor de forma innecesaria. Por lo tanto, ante la duda, estará más reacio a cometer este error.
  - Puede decidir que el proveedor tiene razón, cuando no la tiene.
    Esto lo llevaría a **mantener** a un proveedor que no cumple con su palabra.
- Para decidir por cuál de las dos hipótesis se inclina, debe tener en cuenta que la cantidad de tornillos es **variable**.
  Por lo tanto, no cualquier valor menor que 350 es necesariamente indicio de que la hipótesis del proveedor es falsa. Por lo tanto, debe elegir con cuidado el **límite**.
- Una vez recolectada la evidencia, mientras más alejada esté de 350 la cantidad de tornillos, más sustento tiene la decisión de rechazar la hipótesis del proveedor, ya que la evidencia es **fuerte**.

Analogía judicial

Podemos hacer una analogía con un proceso judicial.

- "Toda persona es inocente hasta que se demuestra lo contrario". Por lo tanto, la hipótesis previa (se suele llamar **hipótesis nula**) es la presunción de inocencia.
- La **hipótesis alternativa** es la hipótesis de culpabilidad, enfrentada a la hipótesis nula.
- Se presentan todas las **evidencias** correspondientes al caso.
- En base a las evidencias, se toma una **decisión**, que puede acarrear 2 tipos de errores:
    - Se puede declarar culpable a alguien que es inocente. Esta decisión **cambia** el estado del acusado en el caso de que sea encarcelado. En casos dudosos, se trata de evitar cometer este error.
    - Se puede declarar inocente a alguien culpable. Con esta decisión, si antes estaba libre, **mantiene** esa condición.
- La decisión deberá contemplar que no cualquier evidencia incriminatoria pueda ser comprobación de culpabilidad. Por lo tanto, la decisión está sujeta a **dudas razonables**.
- En caso de ser declarado culpable, se puede establecer además un **grado de responsabilidad**. Mientras más fuerte sea la evidencia, mayor será pena impuesta.

Hipótesis

Volviendo al cuento chino, vamos a pensar desde la probabilidad el problema de Ricardo.

Consideremos:

$$X_i = \text{ cantidad de tornillos en la } i\text{-ésima caja}$$

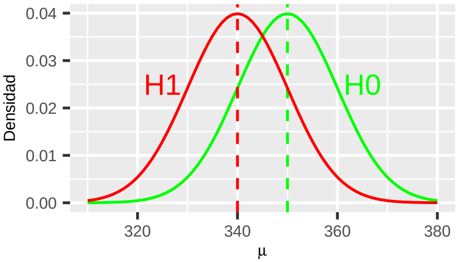
supongamos que $X_i \sim N(\mu, 10)$. Planteamos la media μ como variable porque es lo que está en discusión.

Entonces, tenemos las siguientes hipótesis enfrentadas:

- **Hipótesis nula**. $H_0 : \mu = 350$ (Hipótesis del proveedor, la asumida hasta ahora)
- **Hipótesis alternativa**. $H_1 : \mu < 350$ (Hipótesis de Ricardo, que se encuentra a prueba)

Es decir, bajo cada hipótesis, podemos graficar la densidad de X_i:

```
plot(GG)
```

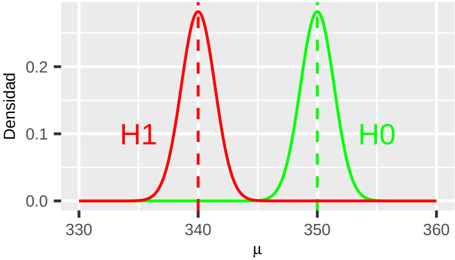


Estadístico de prueba

Para juntar evidencia, Ricardo decide tomar una muestra de $n = 50$ cajas y tomar el promedio de las cajas $\overline{X}_{50}$. Como podemos suponer que son v.a.i.i.d., sabemos que $\overline{X}_{50} \sim N\left(\mu, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$. Esta distribución probabilística nos permite diferenciar las observaciones que son razonables (o **probables**) de lo improbable.

Al tomar un promedio, la distribución cambia su dispersión:

```
plot(GG)
```



Regla de decisión

Luego de tomar la muestra, Ricardo toma una decisión: Diremos que "Rechaza H_0" si las evidencias apoyan su sospecha y "Acepta H_0" si las evidencias no la apoyan lo suficiente. Por lo tanto, como nunca tendremos certeza absoluta si H_0 es cierta o falsa, se pueden dar 4 escenarios:

	Rechaza H_0	**Acepta H_0**
H_0 **Verdadera**	Error tipo I	Decisión correcta
H_0 **Falsa**	Decisión correcta	Error tipo II

Como dijimos, está reacio a cambiar de proveedor de forma innecesaria porque le involucra nuevos esfuerzos y quemar un puente que luego necesitará cruzar. Por lo tanto, querrá además que la probabilidad de error tipo I (se denomina **nivel de significación**, notada α), sea pequeña. Tomemos en este caso $\alpha = 0.05$.

Comentario: Decimos que se "Acepta H_0" porque no significa que sea cierta. Puede que no hayamos juntado las evidencias suficientes para rechazarla. Del mismo modo que si no se junta demasiada evidencia para probar la culpabilidad, no significa que la persona sea inocente.

Valores críticos

Como hemos dicho, para tomar la decisión, **no** va a rechazar la hipótesis del proveedor para **cualquier** valor menor a 350. Rechazará la hipótesis si el valor obtenido es *mucho menor* a 350 (contemplando la variabilidad del proceso). Dicho de otro modo, se rechaza la hipótesis nula si el valor observado de $\overline{X}_{50}$ es **significativamente** menor que 350.

La pregunta es: ¿A partir de qué valor consideramos que el promedio es significativamente menor que 350? Es decir, ¿cómo calculamos un **valor crítico** (llamémoslo x_c) de forma que se rechace H_0 para todos los promedios **menores** que x_c.

Es decir, **previo a tomar la muestra** se determina que:

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } \overline{X}_{50} < x_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } \overline{X}_{50} \geq x_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

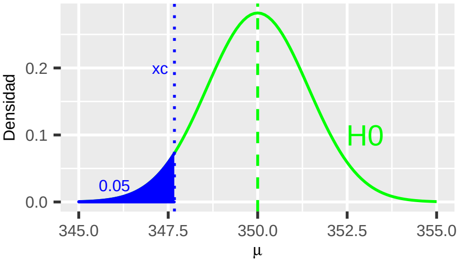
Región de rechazo

Para calcular x_c podemos usar el nivel de significación α (probabilidad de error tipo I) de forma que x_c cumpla lo siguiente:

$$\alpha = P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = P(\overline{X}_{50} < x_c \mid \mu = 350)$$

Para calcular la probabilidad, **usamos la distribución** ya conocida. Como $\overline{X}_{50} \sim N\left(\mu, \frac{10}{\sqrt{50}}\right)$, cuando asumimos que $\mu = 350$, se obtiene que $\overline{X}_{50} \sim N\left(350, \frac{10}{\sqrt{50}}\right)$.

```
plot(GG)
```



Región de rechazo

Por lo tanto, podemos utilizar la estandarización:

$$P(\overline{X}_{50} < x_c \mid \mu = 350) = \Phi\left(\frac{x_c - 350}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right) = \alpha \overset{\alpha=0.05}{\Rightarrow} \frac{x_c - 350}{\frac{10}{\sqrt{50}}} = z_{0.05} = -z_{0.95} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_c = 350 - z_{0.95} \cdot \frac{10}{\sqrt{50}} = 347.6738$$

Es decir, **antes de tomar la muestra**, se determina la siguiente regla de decisión:

Si $\overline{X}_{50} < 347.6738$	$\Rightarrow$	Se rechaza H_0	$\Rightarrow$	**Cambia** el proveedor.
Si $\overline{X}_{50} \geq 347.6738$	$\Rightarrow$	Se acepta H_0	$\Rightarrow$	**Mantiene** el proveedor.

Error tipo II

Estos valores críticos, se calculan para minimizar el error tipo I. Sin embargo, una vez establecidos estos límites, podemos cometer un error de tipo II. Es decir, podemos aceptar H_0 ($\overline{X}_{50} \geq x_c$) cuando H_0 es falsa ($\mu < 350$).

Para cuantificar este error, podemos calcular su probabilidad (notado con la letra β):

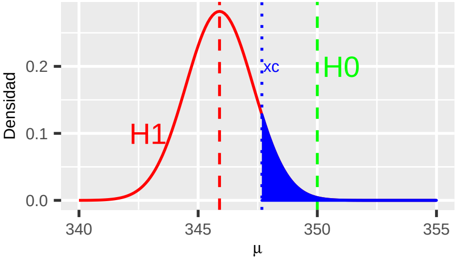
$$\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\overline{X}_{50} \geq x_c \mid \mu < 350)$$

El problema es que a diferencia del cálculo de α, no tenemos un **valor de referencia** (llamado μ_0, que vale 350 en este caso) para usar la media real, ya que lo único que sabemos es que $\mu < 350$.

Error tipo II

Por lo tanto, evaluamos el error de tipo II como función de todos los valores posibles para μ. Como son valores de la hipótesis alternativa, se denota μ_1. Veamos cómo se distribuye el promedio bajo esta hipótesis:

```
plot(GG)
```



Podemos calcularlo utilizando la estandrización correcta:

$$\beta(\mu_1) = P(\overline{X}_{50} \geq x_c \mid \mu = \mu_1 < 350) \overset{\overline{X}_{50} \sim N\left(\mu_1, \frac{10}{\sqrt{50}}\right)}{=} 1 - \Phi\left(\frac{x_c - \mu_1}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right)$$

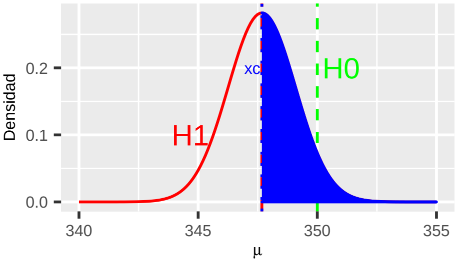
Error tipo II

Hay algunos valores de μ_1 donde se conoce el β correspondiente. Por ejemplo, si $\mu_1 = x_c$:

$$\beta(x_c) = 1 - \Phi\left(\frac{x_c - x_c}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

Esto lo podemos comprobar gráficamente:

```
plot(GG)
```



El valor de 0.5 es coherente con la simetría de la distribución normal.

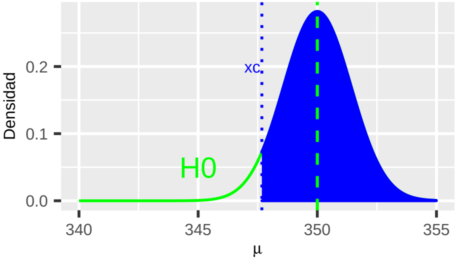
Error tipo II

Otro valor donde se sabe el valor de β es el siguiente: si bien μ_1 debe ser **menor** que μ_0, podemos analizar lo que sucede cuando μ_1 se acerca a μ_0:

$$\lim_{\mu \to \mu_0^-} \beta(\mu) = \beta(\mu_0) = P(\text{Aceptar } H_0 \mid \mu = \mu_0) = 1 - P(\text{Rechazar } H_0 \mid \mu = \mu_0) = 1 - P(\text{Error tipo I}) = 1 - \alpha$$

Es decir, para calcular ese valor límite, podemos realizar el mismo cálculo asumiendo que H_0 es correcta. Gráficamente:

```
plot(GG)
```



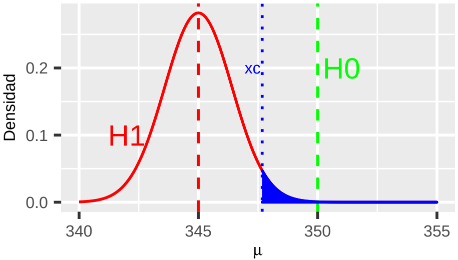
Error tipo II

Para tener alguna noción de cómo evoluciona esta función, podríamos calcular, por ejemplo, la probabilidad de error tipo II para $\mu_1 = 345$:

$$\beta(345) = 1 - \Phi\left(\frac{x_c - 345}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right) \approx 1 - \Phi(1.89068) \approx 0.02933$$

Gráficamente:

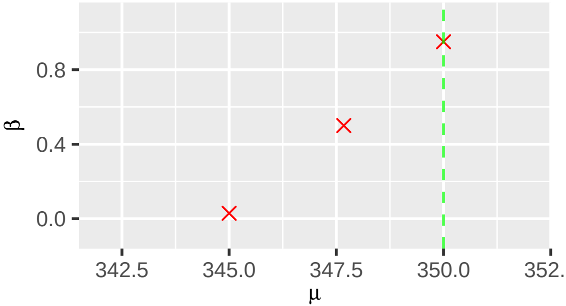
```
plot(GG)
```



Curva de Operación Característica (OC)

Es decir, ya sabemos que la función β pasa por los siguientes puntos:

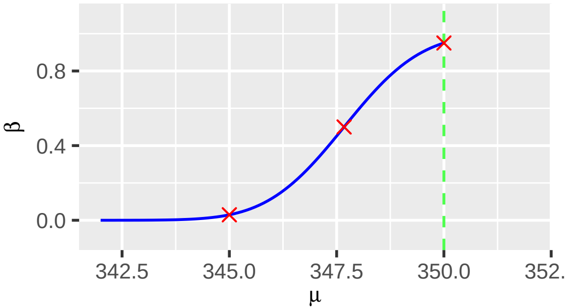
```
plot(GG)
```



Curva de Operación Característica (OC)

Se puede demostrar que la curva de operación característica tiene forma sigmoidea (forma de s), con un cambio de concavidad en el valor de x_c. Sabiendo estos datos, alcanza con saber tres puntos para poder esbozar la gráfica:

```
plot(GG)
```



La curva "termina" en $\mu_0 = 350$ ya que a partir de ese valor, deja de ser falsa la hipótesis nula.

El análisis de esta curva nos permite ver cuánto resignamos de error tipo II al establecer el límite considerando sólo el error tipo I. Por ejemplo, en este caso, si las cajas tienen una cantidad **media** de 345 (es decir, el proveedor miente), hay muy baja probabilidad (2.93%) de aceptar la hipótesis del proveedor.

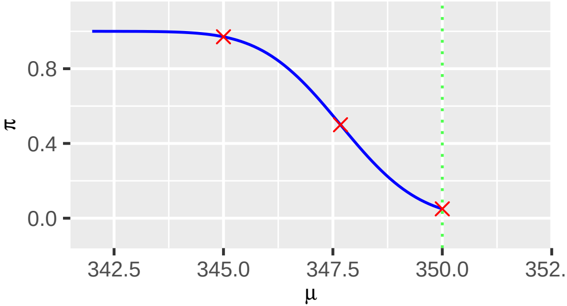
Curva de potencia

Otra función que se puede analizar es la denominada curva de potencia (denotada π), que es complementaria a la función β. Así como el error tipo II se prefiere que sea pequeño, se busca que la potencia sea alta:

$$\pi(\mu_1) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\overline{X}_{50} < x_c \mid \mu = \mu_1 < 350) = 1 - \beta(\mu_1)$$

También se grafica con tres puntos:

```
plot(GG)
```



Decisión Post-Muestra

Hasta ahora todo lo visto es **previo a tomar la muestra**.

Como vimos en el video, Ricardo termina contando 323 tornillos. Es decir, **después de tomar la muestra**, observa un promedio $\overline{x}_{obs} = 323$.

Según el valor crítico que estableció Ricardo, como $\overline{x}_{obs} = 323 < x_c = 347.6738$. Por lo tanto **rechaza** H_0, ya que el valor observado es **significativamente** menor al valor de referencia $\mu_0 = 350$.

Es decir, Ricardo tiene **suficiente evidencia** para rechazar la hipótesis del proveedor, y por lo tanto, cambiarlo por otro.

p-Valor

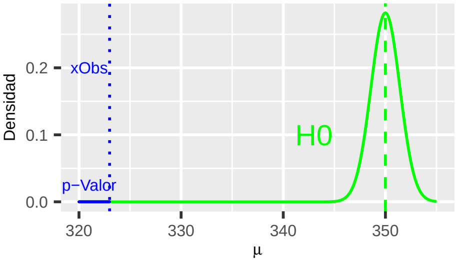
Más aún, no sólo el valor observado fue menor que el valor crítico x_c, sino que fue **mucho** menor. Por lo tanto, podríamos pensar en formas de cuantificar no sólo si la diferencia es significativa, sino **cuán significativa** es.

Para eso, se define el denominado p-Valor. Se calcula **después de tomar la muestra** y da una noción de cuán probable es que una muestra nos de lo observado como resultado (o algo más extremo), asumiendo que la hipótesis nula es verdadera. Es decir,

$$P(\overline{X}_{50} \leq \underbrace{\overline{x}_{obs}}_{323} | \underbrace{H_0 \text{ verdadera}}_{\mu=350}) = \Phi\left(\frac{323-350}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right) \approx \Phi(-19.09) \approx 1.47 \cdot 10^{-81}$$

Gráficamente:

```
plot(GG)
```



p-Valor

Por lo tanto, aún dándole el beneficio de la duda al proveedor (asumiendo H_0 cierta), observar un número tan bajo es tan inverosímil (80 ceros antes del primer dígito significativo), que hay evidencia **muy fuerte** para rechazar su hipótesis. Mientras más chico sea el p-Valor, más evidencia hay para rechazar la hipótesis nula.

Comentarios p-Valor

Suele confundir el uso de "lo observado **(o más extremo)**" en el cálculo del p-Valor.

Por empezar, para identificar lo "más extremo", hay que observar la **hipótesis alternativa**. Como en este caso, $H_1 : \mu < 350$, mientras más **chico** sea el valor observado, más "extremo" será al asumir la hipótesis alternativa.

Por otro lado, si sólo nos basáramos en lo observado, tendríamos:

$$P(\overline{X}_{50} = \overline{x}_{obs} | H_0 \text{ verdadera})$$

Pero como $\overline{X}_{50}$ es continua, esa probabilidad es 0 **para cualquier valor observado**. Por lo tanto, deja de ser informativo para medir la verosimilitud, ya que es constante para cualquier valor. Por lo tanto, se elige tomar además de lo observado, los valores "más extremos".

Tests de hipótesis (desvío conocido)

Tests de hipótesis

Este procedimiento, en el que tenemos una hipótesis sobre un parámetro **poblacional** y decidimos ponerla a prueba a partir de una muestra, se llama **test de hipótesis**. Permite tomar decisiones informadas, basándose en la evidencia.

Hemos visto un primer caso, en el que podemos usar la distribución normal. En este caso, las hipótesis involucraban a **la media** de esa distribución normal.

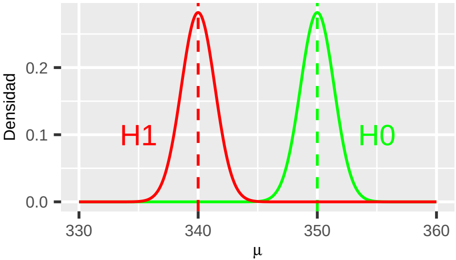
Veremos los distintos tests que pueden aplicarse a la media. Para estos cálculos asumiremos que el desvío σ es **conocido**, y se toma:

- un **valor de referencia** μ_0
- un **tamaño muestral** n
- un **nivel de significación** α

Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu < \mu_0$

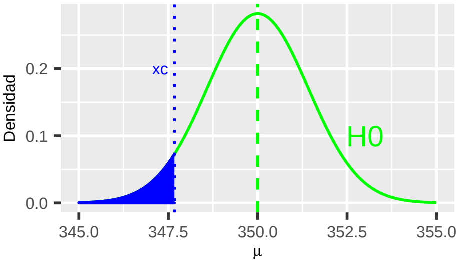
```
plot(GG)
```



Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu < \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$

```
plot(GG)
```



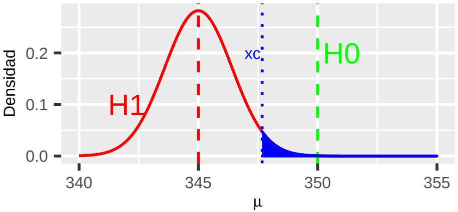
Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu < \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{c} \text{Si } \overline{X}_n < x_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } \overline{X}_n \geq x_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} \text{Si } Z < z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \geq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} \text{Si } p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{x_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



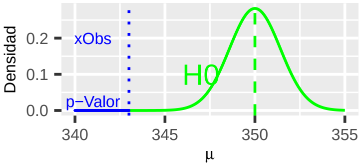
Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 \,:\, \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 \,:\, \mu < \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

  $\begin{array}{c} \text{Si } \overline{X}_n < x_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } \overline{X}_n \geq x_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$ o $\begin{array}{c} \text{Si } Z < z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \geq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$ o $\begin{array}{c} \text{Si } p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{x_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

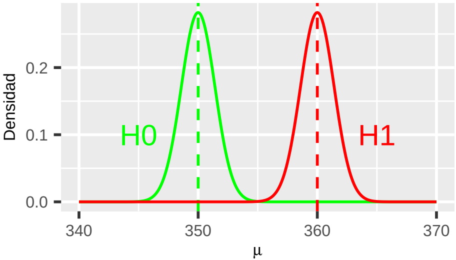
```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$

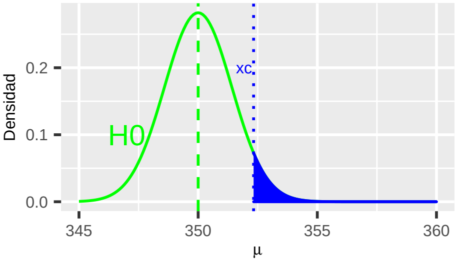
```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$

```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

  Si $\overline{X}_n > x_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $\overline{X}_n \leq x_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

  o

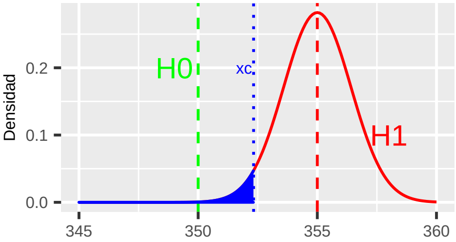
  Si $Z > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $Z \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

  o

  Si $p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



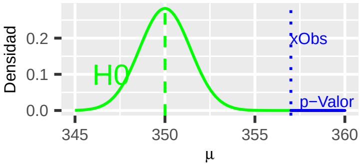
Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $x_c = \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{l} \text{Si } \overline{X}_n > x_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } \overline{X}_n \leq x_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \text{Si } Z > z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \leq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \text{Si } p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = 1 - \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

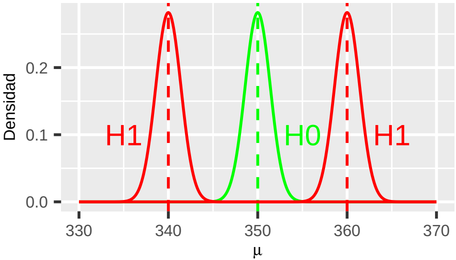
```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

```
plot(GG)
```

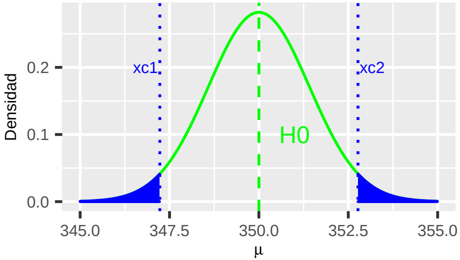


Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ **ó** $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(x_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad y \quad x_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{ó} \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(x_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad y \quad x_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad ó \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

Si $\overline{X}_n < x_{c_1}$ o $\overline{X}_n > x_{c_2} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $x_{c_1} \leq \overline{X}_n \leq x_{c_2} \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

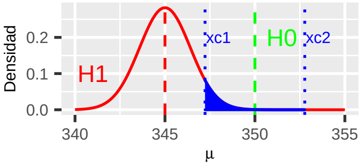
Si $|Z| > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $|Z| \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

$p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
$p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_{c_2} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{c_1} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(x_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad y \quad x_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad ó \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

Si $\overline{X}_n < x_{c_1}$ o $\overline{X}_n > x_{c_2} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $x_{c_1} \leq \overline{X}_n \leq x_{c_2} \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

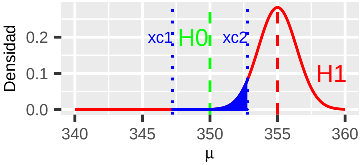
Si $|Z| > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $|Z| \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

$p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
$p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_{c_2} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{c_1} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valores críticos**

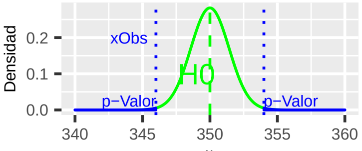
$$\left(x_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad y \quad x_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{ó} \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{c} \text{Si } \overline{X}_n < x_{c_1} \text{ o } \overline{X}_n > x_{c_2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } x_{c_1} \leq \overline{X}_n \leq x_{c_2} \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} \text{Si } |Z| > z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } |Z| \leq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_{c_2} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{c_1} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor(\overline{x}_{obs}) = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{|\overline{x}_{obs} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $\overline{X}_n$ ó $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(x_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad y \quad x_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{ó} \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

Si $\overline{X}_n < x_{c_1}$ o $\overline{X}_n > x_{c_2} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $x_{c_1} \leq \overline{X}_n \leq x_{c_2} \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

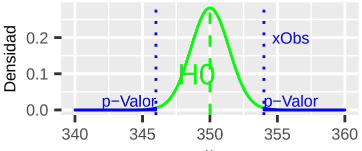
Si $|Z| > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $|Z| \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

$p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
$p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{x_{c_2} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{c_1} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor(\overline{x}_{obs}) = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{|\overline{x}_{obs} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\right)$

```
plot(GG)
```

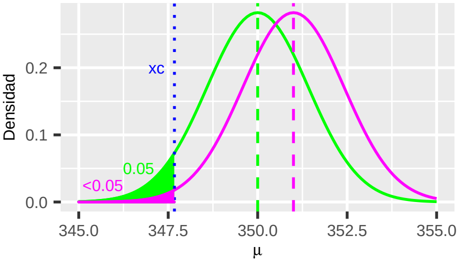


Comentarios

- Las hipótesis se plantean sobre un parámetro **poblacional**.
  Sobre valores muestrales NO se plantean hipótesis, porque es justamente lo que será **conocido**.

- Para los test unilaterales, a veces puede plantearse, por ejemplo $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
  Se puede escribir de ambas formas de manera indistinta ya que en ambos casos, el valor crítico que se obtiene es el mismo.
  Esto se debe a que el valor crítico se calcula en función del **valor de referencia**.

```
plot(GG)
```



Es decir, al controlar el error tipo I para el valor de referencia, se impone un máximo para todos los otros valores de H_0.

Tests de hipótesis (Desvío desconocido)

TCL

Cuando el desvío **poblacional** σ es **desconocido**, algunas cuentas ya no se pueden realizar previo a tomar la muestra, ya que debe reemplazarse con el desvío **muestral** s.

Por ejemplo, consideremos un test unilateral a izquierda ($H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu < \mu_0$). Si n es grande, el Teorema Central del Límite nos dice que el promedio tendrá distribución normal.
Sin embargo, ya no podemos tomar un valor del promedio $\overline{x}_c$ como crítico, ya que sería de la siguiente forma:

$$\overline{x}_c = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto, como s es desconocido previo a tomar la muestra, se utiliza sólo $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ como estadístico de prueba y el valor $z_c = z_{1-\alpha}$ como crítico.

Error tipo II y desvío desconocido

Del mismo modo, tampoco puede calcularse previo a la muestra el error tipo II, ya que tendría la siguiente fórmula:

$$\beta(\mu_1) = P(\text{Aceptar } H_0|\mu = \mu_1) = P(Z \geq z_c|\mu = \mu_1) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq z_c|\mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}_n}{\frac{s}{\sqrt{n}}} - \frac{\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq z_c|\mu = \mu_1\right) = P\left(\frac{\overline{X}_n}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq z_c + \frac{\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}|\mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}_n}{\frac{s}{\sqrt{n}}} - \frac{\mu_1}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq z_c + \frac{\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} - \frac{\mu_1}{\frac{s}{\sqrt{n}}}|\mu = \mu_1\right) \overset{TCL}{\approx} 1 - \Phi\left(z_c + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$$

Sin embargo, estos cálculos podrían estimarse si se tiene un desvío muestral previo s proveniente de una muestra más chica (suele denominarse “prueba piloto”).

Vamos a detallar las cuentas que sí podemos hacer con TCL.

Test unilateral a izquierda (TCL)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu < \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $z_c = -z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } Z < z_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \geq z_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor = \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$ (es **posterior** a tomar la muestra)

Test unilateral a derecha (TCL)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $z_c = z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } Z > z_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \leq z_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor = 1 - \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$ (es **posterior** a tomar la muestra)

Test bilateral (TCL)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcc} \text{Si } |Z| > z_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } |Z| \leq z_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor(\overline{x}_{obs}) = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{|\overline{x}_{obs} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\right)$ (es **posterior** a tomar la muestra)

Tamaños muestrales pequeños

Cuando el desvío es desconocido, y el tamaño muestral no es suficiente, ya no podemos utilizar la distribución normal.
Sin embargo, sabemos que si las variables promediadas X_i son normales ($X_i \sim N(\mu, \sigma)$), el siguiente estadístico tiene distribución t de student:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

En cualquiera de los casos anteriores, podemos tomar $H_0 : \mu = \mu_0$.
Por lo tanto, **suponiendo H_0 cierta**, obtenemos:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Por lo tanto, éste será el estadístico de prueba.

Test unilateral a izquierda (t de Student)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu < \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $T = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $t_c = -t_{n-1;1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } T < t_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } T \geq t_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor = F_{T_{n-1}}\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$

donde $F_{T_{n-1}}$ es la función de distribución acumulada de una t de student con $n-1$ grados de libertad.

Test unilateral a derecha (t de Student)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu > \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $T = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $t_c = t_{n-1;1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } T > t_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } T \leq t_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor = 1 - F_{T_{n-1}}\left(\dfrac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$

donde $F_{T_{n-1}}$ es la función de distribución acumulada de una t de student con $n-1$ grados de libertad.

Test bilateral (t de Student)

- **Hipótesis nula** $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **Estadístico de prueba** $T = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- **Valor crítico** $t_c = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } |T| > t_c & \Rightarrow & \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } |T| \leq t_c & \Rightarrow & \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **p-Valor:** $p - Valor = 2 \cdot \left(1 - F_{T_{n-1}}\left(\dfrac{|\overline{x}_{obs} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\right)$

donde $F_{T_{n-1}}$ es la función de distribución acumulada de una t de student con $n-1$ grados de libertad.

Tests para proporciones

Proporciones

Cuando lo que se quiere poner a prueba es una proporción **poblacional** p, recordemos que la proporción **muestral** $\widehat{p}$ cumple lo siguiente (asumiendo que vale la aproximación normal a la binomial):

$$\widehat{p} \overset{(a)}{\sim} N\left(p; \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right) \Rightarrow \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

Por lo tanto, si el tamaño muestral n es grande, podemos utilizar esta aproximación.

Ejemplo test de hipótesis para proporción

Consideremos una materia en la cual, el porcentaje de aprobados suele ser 40%.
Se sospecha que ese número ha aumentado. Por lo tanto, el curso siguiente (de n=150 alumnos), se registra el porcentaje de aprobados para poner a prueba la sospecha.

Describamos las hipótesis enfrentadas:

- $H_0 : p = p_0 = 0.4$
- $H_1 : p > p_0 = 0.4$

Proporción crítica

Por lo tanto, se rechaza H_0 si el valor estimado de $\widehat{p}$ es **mayor** que un valor crítico p_c. Considerando un nivel de significación $\alpha = 0.05$, se limita la probabilidad de Error Tipo I:

$$0.05 = P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{verdadera}) = P\left(\widehat{p} > p_c | p = 0.4\right) =$$

$$= P\left(\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} > \frac{p_c - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} | p = 0.4\right) =$$

$$= P\left(\frac{\widehat{p} - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{n}}} > \frac{p_c - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{n}}} | p = 0.4\right) \overset{TCL}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{p_c - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{n}}}\right)$$

Entonces,

$$0.05 = 1 - \Phi\left(\frac{p_c - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{n}}}\right) \Rightarrow \frac{p_c - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{n}}} = z_{0.95} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_c = 0.4 + z_{0.95} \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot (1-0.4)}{150}} = 0.4657941$$

Estadísticos de prueba y decisiones

Por lo tanto, podemos tomar como estadísticos de prueba tanto $\widehat{p}$ y $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}$.

- Se rechaza H_0 si $\widehat{p} > p_c = 0.4657941$ o si $Z > z_{1-\alpha}$
- Se acepta H_0 si $\widehat{p} \leq p_c = 0.4657941$ o si $Z \leq z_{1-\alpha}$

Error tipo II

Con estos límites, podríamos calcular la probabilidad de Error Tipo II si el porcentaje de aprobados es 48%:

$$\beta(0.48) = P(\text{Aceptar } H_0 | p = 0.48) = P(\widehat{p} \leq p_c | p = 0.48) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{p_c - 0.48}{\sqrt{\frac{0.48\cdot(1-0.48)}{150}}}\right) = 0.3638263$$

Post muestra

Si se observa un porcentaje de aprobados de 50% ($p_{obs} = 0.5$), se rechaza H_0 ya que $\widehat{p} = 0.5 > 0.4657941 = p_c$.
Es decir, hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de que la proporción de aprobados es $p = 0.4$.

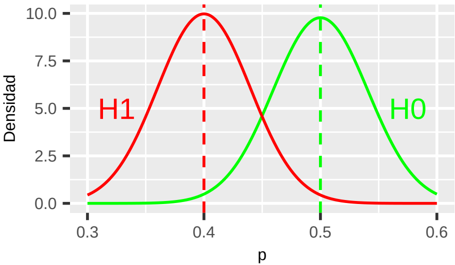
Más aún, el p-Valor sería

$$p - Valor = P(\widehat{p} \geq p_{obs} | p = 0.4) \approx 1 - \Phi\left(\frac{0.5 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{150}}}\right) = 0.0062$$

Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : p < p_0$

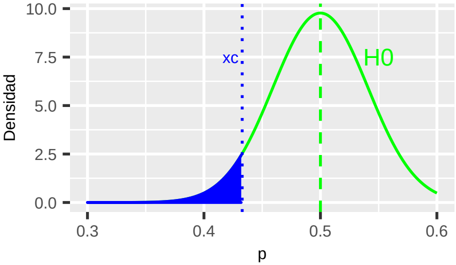
```
plot(GG)
```



Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p < p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$

```
plot(GG)
```



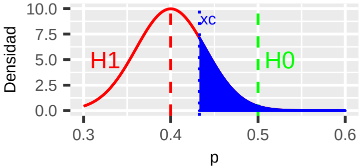
Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p < p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{l} \text{Si } \widehat{p} < p_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } \widehat{p} \geq p_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \text{Si } Z < z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } Z \geq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \text{Si } p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(p_1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



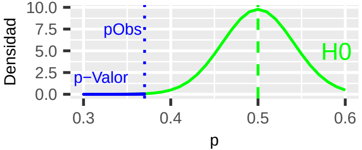
Test unilateral a izquierda

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p < p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = -z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

  Si $\widehat{p} < p_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $\widehat{p} \geq p_c \Rightarrow$ Se acepta H_0 o
  Si $Z < z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $Z \geq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0 o
  Si $p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(p_1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = \Phi\left(\dfrac{p_{obs} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}\right)$

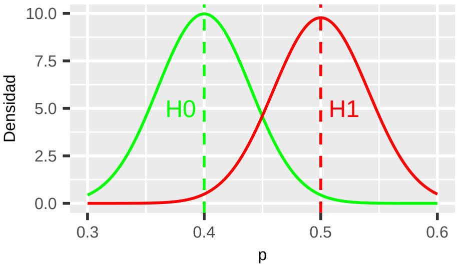
```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : p > p_0$

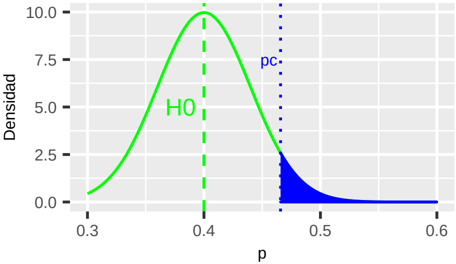
```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p > p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$

```
plot(GG)
```



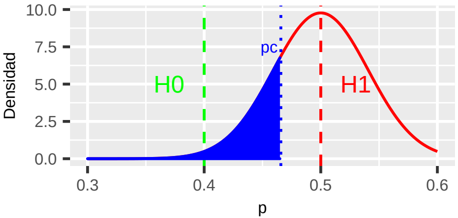
Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p > p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

  Si $\widehat{p} > p_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $\widehat{p} \leq p_c \Rightarrow$ Se acepta H_0
  o
  Si $Z > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $Z \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0
  o
  Si $p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(p_1) = \Phi\left(\dfrac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



Test unilateral a derecha

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ y **Hipótesis alternativa** $H_1 : p > p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valor crítico** $p_c = p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ ó $z_c = z_{1-\alpha}$
- **Regla de decisión:**

  Si $\widehat{p} > p_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $\widehat{p} \leq p_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

  o

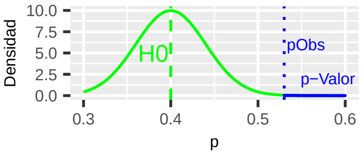
  Si $Z > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $Z \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

  o

  Si $p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
  Si $p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(p_1) = \Phi\left(\dfrac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = 1 - \Phi\left(\dfrac{p_{obs} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}\right)$

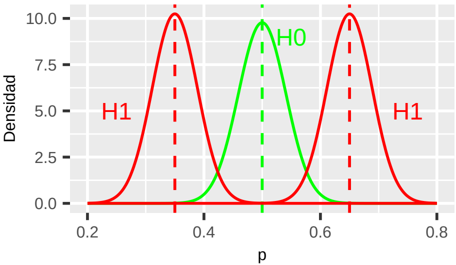
```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$
- **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$

```
plot(GG)
```

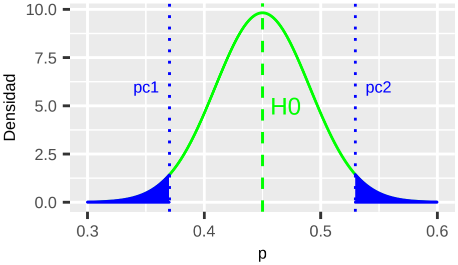


Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(pc_1 = p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}} \quad y \quad pc_2 = p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}} \right) \quad ó \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valores críticos**

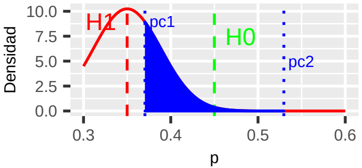
$$\left(p_{c_1} = p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}} \ \ y \ \ p_{c_2} = p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}} \right) \quad ó \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{c} \text{Si } \widehat{p} < p_{c_1} \text{ o } \widehat{p} > p_{c_2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p_{c_1} \leq \widehat{p} \leq p_{c_2} \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} \text{Si } |Z| > z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } |Z| \leq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{p_{c_2} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{p_{c_1} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}}$
- **Valores críticos**

$$\left(p_{c_1} = p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \;\; y \;\; p_{c_2} = p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \right) \;\; ó \;\; z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

Si $\widehat{p} < p_{c_1}$ o $\widehat{p} > p_{c_2} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $p_{c_1} \leq \widehat{p} \leq p_{c_2} \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

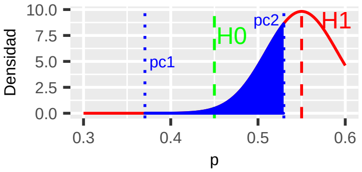
Si $|Z| > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $|Z| \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

$p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
$p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{p_{c_2} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{p_{c_1} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n}}}\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{(\widehat{p} - p_0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}}$
- **Valores críticos**

$$\left(p_{c_1} = p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \;\; y \;\; p_{c_2} = p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \right) \;\; ó \;\; z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

Si $\widehat{p} < p_{c_1}$ o $\widehat{p} > p_{c_2} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $p_{c_1} \leq \widehat{p} \leq p_{c_2} \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

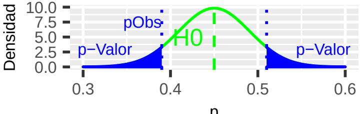
Si $|Z| > z_c \Rightarrow$ Se rechaza H_0
Si $|Z| \leq z_c \Rightarrow$ Se acepta H_0

o

$p - Valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
$p - Valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{(p_{c_2} - p_1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_1 \cdot (1 - p_1)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{(p_{c_1} - p_1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_1 \cdot (1 - p_1)}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{|p_{obs} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}\right)\right)$

```
plot(GG)
```



Test bilateral

- **Hipótesis nula** $H_0 : p = p_0$ **Hipótesis alternativa** $H_1 : p \neq p_0$
- **Estadístico de prueba** $\widehat{p}$ ó $Z = \dfrac{(\widehat{p} - p_0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}}$
- **Valores críticos**

$$\left(p_{c_1} = p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \quad y \quad p_{c_2} = p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} \right) \quad \text{ó} \quad z_c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- **Regla de decisión:**

$$\begin{array}{l} \text{Si } \widehat{p} < p_{c_1} \text{ o } \widehat{p} > p_{c_2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } p_{c_1} \leq \widehat{p} \leq p_{c_2} \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \text{Si } |Z| > z_c \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ \text{Si } |Z| \leq z_c \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} p - Valor < \alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \\ p - Valor \geq \alpha \Rightarrow \text{Se acepta } H_0 \end{array}$$

- **Probabilidad de error tipo II:** $\beta(\mu_1) = \Phi\left(\dfrac{(p_{c_2} - p_1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_1 \cdot (1 - p_1)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{(p_{c_1} - p_1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_1 \cdot (1 - p_1)}}\right)$
- **p-Valor:** $p - Valor = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{|p_{obs} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}\right)\right)$

```
plot(GG)
```