Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico Nº 1

Cálculo de probabilidades

1. Se arrojan dos dados no cargados.
   a) Describa un espacio muestral o conjunto de todos los resultados posibles.
   b) Calcule la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 7.
   c) Calcule la probabilidad de que la suma sea 4 ó 9.

2. De una urna con bolillas rojas numeradas de 1 a 5 y tres negras numeradas de 6 a 8 se saca una completamente al azar. Juzgue la validez de los siguientes argumentos.
   a) Las rojas tienen mayor probabilidad de salir que las negras. Como 1 es roja y 6 negra, es más probable que salga el 1 que el 6.
   b) Sólo hay dos resultados posibles: **rojo** o **negro**. Luego la probabilidad de cada uno es 1/2.
   c) Cualquier bolilla tiene la misma probabilidad de salir: 1/8.
   d) El experimento ya se realizó una vez y salió el 4. Si se vuelve a realizar sería mucha casualidad que vuelva a salir el 4. Luego en dos repeticiones consecutivas del experimento si la primera vez salió 4, la segunda es menos probable que salga el 4 que, por ejemplo, el 8.

3. Tres componentes se conectan para formar un sistema. El componente 1 se conecta en serie con un paralelo de los componentes 2 y 3. Como éstos dos últimos se conectan en paralelo, este subsistema funcionará si, por lo menos, uno de los dos componentes funciona. Para que el sistema funcione deberán funcionar el componente 1 y al menos uno de los componentes del paralelo.
   Supongamos un experimento aleatorio que consiste en registrar el estado de cada componente como S_i si funciona el componente i y F_i si falla el componente i.
   Listar los resultados que corresponden al suceso:
   a) A: funcionan exactamente dos de los tres componentes.
   b) B: al menos dos de los componentes funcionan.
   c) C: el sistema funciona.

   Hacer una lista de los resultados que corresponden a: $\overline{C}$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

4. En una producción de 100 artículos hay 10 defectuosos y el resto no tiene defectos.
   a) Para cada uno de los siguientes experimentos describa un espacio muestral y asigne la probabilidad a cada suceso elemental.
      1) Se extrae un artículo al azar y se registra su calidad.
      2) Se extraen simultáneamente dos artículos y se registra su calidad.
      3) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se registra su calidad.
      4) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se registra su calidad.
      5) Se extraen sucesivamente con reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.
      6) Se extraen sucesivamente sin reposición 2 artículos y se cuenta la cantidad de defectuosos.

b) Compare los resultados obtenidos en: 2) con 3) y 3) con 4) y saque conclusiones.

c) Calcule la probabilidad de que el segundo artículo sea bueno en los casos 3). y 4). Compare los resultados.

d) Compare los resultados obtenidos en: 2) con 3) y 3) con 4) y saque conclusiones si el tamaño de la población es 1000.

e) Generalice la probabilidad de obtener k defectuosos en una muestra aleatoria de tamaño n en los casos 5) y 6) si hay b artículos buenos y d defectuosos.

5. Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del bobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la de combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que el fallo sea por cada uno de estos tres mecanismos si la probabilidad de que el motor falle es 0.13? Indique las hipótesis que debe asumir para resolver el problema.

6. Se sabe que cierta producción está sujeta a tres tipos de defectos, A, B y C. Entre 1000 unidades producidas en un día, el inspector de la línea de montaje informó de los siguientes resultados:

defecto	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
número de piezas	30	35	20	5	5	4	2

Compruebe que la proporción de unidades defectuosas en las 1000 unidades es de 0.073.
Nota: Para entender esta tabla tenga en cuenta, por ejemplo, que si una unidad tiene el defecto A y el B, pero no el C, figurará en la columna A, en la B y en la AB.

7. La clasificación de los grupos sanguíneos (tipos de sangre) se realiza de acuerdo con la presencia o ausencia de tres antígenos, que están simbolizados por A, B y Rh. Este sistema da lugar a ocho tipos posibles de sangre, que son los siguientes:

Tipo de sangre	**Antígeno presente**
0 negativo	ningún antígeno
0 positivo	Rh
A negativo	A
A positivo	A y Rh
B negativo	B
B positivo	B y Rh
AB negativo	A y B
AB positivo	A, B y Rh

En un grupo numeroso de personas se detectó que 40 % tenían antígeno A, 50 % el antígeno B, 60 % antígeno Rh, 20 % los antígenos A y B, 30 % los antígenos A y Rh, 30 % los antígenos B y Rh y, por último, 20 % los tres.
Determinar el porcentaje de personas que pertenece al tipo sanguíneo:
a) 0 positivo *b*) 0 negativo *c*) A negativo.

8. En una pequeña ciudad se publican dos diarios *Nuevos Aires* y *Opinión*. El 40 % de los habitantes lee *Nuevos Aires*, el 23 % lee *Opinión* y el 8 % lee ambos.

   a) ¿Cuál es el porcentaje de personas que lee diarios ?

   b) De los habitantes que leen diarios, ¿qué porcentaje lee *Opinión* ?

c) Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas lean diarios ?
d) ¿Qué porcentaje de la población lee sólo *Nuevos Aires*?

9. Suponga que A y B son sucesos para los cuales $P(A) = x, P(B) = y, P(A \cap B) = z$. Exprese cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y, z.

   a) $P(A \cup B)$
   b) $P(\overline{A} \cap B)$
   c) $P(A \cup \overline{B})$
   d) $P(A \cap \overline{B})$

   Nota: $\overline{A}$ es el suceso complementario del suceso A.

10. Obtener una expresión de cálculo para $P(A\cup B\cup C)$ en términos de $P(A), P(B)$, $P(C)$, $P(A\cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap C)$ y $P(A \cap B \cap C)$.

11. Suponga que A, B y C son sucesos tales que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$, $P(A \cap C) = 1/8$ y $P(A \cap B \cap C) = 0$. Calcule la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A, B o C ocurra.

12. Dos sucesos A y B tienen igual probabilidad de ocurrencia, $P(A) = P(B) = 0.4$. Calcular $P(\overline{A}/\overline{B})$ si la probabilidad de ocurrencia de ambos es $P(A \cap B) = 0.25$.

13. Las probabilidades de ocurrencia de dos sucesos A y B son $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.6$. Calcular $P(A/\overline{B})$ si la probabilidad de ocurrencia de ambos es $P(A \cap B) = 0.25$.

14. Considere dos sucesos A y B para los cuáles $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
    Calcular:
    a) $P(A/B)$ b) $P(B/A)$ c) $P(A \cup B)$ d) $P(\overline{A}/\overline{B})$ e) $P(\overline{B}/\overline{A})$.

15. Si $P(A/B) = 0.6$, $P(\overline{A} \cup B) = P(A \cup \overline{B}) = 0.8$,

    a) ¿Son independientes los sucesos A y B?
    b) Calcular $P(A \cup B)$ y $P(B/A)$.

16. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Considerando que $P(A) = 0.4$, $P(B) = p$ y $P(A \cup B) = 0.7$.¿Cuál es el valor de p si A y B son:

    a) mutuamente excluyentes?
    b) independientes?

17. Se extraen 10 cartas de un mazo de truco (todas de una vez ó una tras otra sin reposición). ¿Cuál es la probabilidad de sacar: a) por lo menos un as, b) por lo menos dos ases.

18. Ocho personas, entre las que se encuentran Jorge y Alejandro, se forman en una fila para acceder a una caja registradora. Si la fila se formó al azar calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

    a) Jorge y Alejandro están uno detrás del otro
    b) Entre Jorge y Alejandro hay dos personas

19. En un sorteo con 100 números hay 5 premios. Se venden todos los números y Ud. compra 5. Calcular la probabilidad de:

a) sacar dos premios.
b) sacar por lo menos un premio.

20. Para poder operar la cuenta personal de banco a través de un cajero automático hay que ingresar un conjunto de 4 dígitos en sucesión (el PIN de la tarjeta). Calcular la probabilidad de poder operar la cuenta en un intento al elegir los cuatro números al azar, sabiendo que:

    a) todos los dígitos son distintos
    b) el número de cuatro dígitos es capicúa.

21. Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Halle la probabilidad de los sucesos que se indican a continuación:

    a) los dos resultados son iguales,
    b) los dos resultados son distintos y su suma no supera 9,
    c) la suma de ambos resultados es 10,
    d) el primer resultado es inferior a 4 y el segundo es impar,
    e) el módulo de la diferencia entre ambos resultados es 1.

22. **Uno de cartas**. Se sacan dos cartas al azar de un mazo de cartas españolas (48 cartas, no se toman en cuenta los comodines). Hallar la probabilidad de que:

    a) las dos cartas sean de espadas.
    b) una sea de espadas y la otra de copas.
    c) las dos sean del mismo palo.
    d) las dos sean de distinto palo

23. Un sistema de frenado diseñado para impedir que los automóviles derrapen puede descomponerse en tres subsistemas en serie (el sistema de frenado opera adecuadamente si y solo sí los tres subsistemas operan adecuadamente), que operan independientemente: un sistema electrónico, otro hidráulico y un tercero mecánico. La *confiabilidad de un sistema* se define como la probabilidad de que funcione adecuadamente durante un período de tiempo dado.
    En cierto tipo de frenado las confiabilidades de cada subsistema son respectivamente 0.998; 0.997.y 0.993.

    a) Determine la confiabilidad del sistema.
    b) Si en cierto período de operación el sistema falló porque eso ocurrió con uno de los subsistemas, ¿cuál de los tres es más probable que haya fallado?

24. Un número binario está compuesto sólo de los dígitos **0** y **1**. Esos dígitos se transmiten uno tras otro a través de cierto canal de información. Suponga que la probabilidad de que se transmita un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al extremo del canal de información un número incorrecto de n dígitos ? La condición de número incorrecto corresponde a que por lo menos un bit sea recibido con error.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al extremo del canal de información un número incorrecto de n dígitos por tener sólo un bit con error?

25. Agregando tres bits extras a una palabra de 4 bits de una manera particular (código de *Hamming*) se puede detectar y corregir hasta un error en cualquiera de los bits. Si la probabilidad de que un bit sea cambiado durante la transmisión (y por consiguiente se transmita con error) es 0.05 y esos cambios son independientes:
    a) ¿cuál es la probabilidad de que una palabra (de 7 bits en total) sea correctamente recibida (o sea con hasta un error) ?
    b) Compare la probabilidad calculada en a) con la que correspondería si la palabra de 4 bits no fuera transmitida con bits de chequeo. En este caso los 4 bits deben recibirse sin error para que la palabra no tenga error.

26. En la fabricación de cierto artículo se encuentra que se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.1 y defectos de un segundo tipo con una probabilidad de 0.05.
    Si la ocurrencia de esos defectos puedan suponerse sucesos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que:
    a) un artículo no tenga ambas clases de defectos?
    b) un artículo sea defectuoso?
    c) sabiendo que un artículo es defectuoso, tenga sólo un tipo de defecto?

27. Los contactos A, B, C, D, pertenecen a distintos relevadores (ver Fig. 1). Cuando se excita cualquier relevador se cierra el contacto pero puede ocurrir una falla de conexión con probabilidad 10^{-2}. Calcule la probabilidad de que circule corriente entre la entrada y la salida del circuito de la figura al excitar los cuatro relevadores. Asuma independencia de falla de los relevadores.

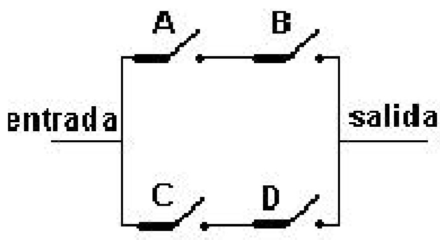

Figura 1: sistema de relevadores

28. Un conjunto electrónico consta de 2 subsistemas, A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen estas probabilidades: P(A falle) = 0.2; P(B sólo falle) = 0.15; P(A y B fallen)= 0.15.
    Calcule las siguientes probabilidades:
    a) P(A falle/ B haya fallado).
    b) P(sólo A falle).

29. Para la señalización de emergencia se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador accione durante la avería es igual a 0.95 para el primero de ellos y 0.9 para el segundo.
    a) Halle la probabilidad de que durante la avería accione sólo un indicador.

b) Calcule la probabilidad de que durante la avería se accionen k indicadores para k tomando los valores 0, 1, y 2.

30. Una instalación industrial funciona cuando lo hacen un motor y al menos dos de tres equipos de bombeo. La probabilidad de que funcione el motor es 0.95 y la de funcionamiento de cada equipo de bombeo es 0.8. Se supone que la ocurrencia de falla en el motor o cualquiera de las bombas son sucesos independientes.

    a) Calcule la probabilidad de buen funcionamiento de la instalación.
    b) Si la instalación funciona calcular la probabilidad de que funcionen exactamente dos equipos de bombeo.

31. Un análisis para detectar una enfermedad infecciosa ofrece un 90 % de confiabilidad en los enfermos (la probabilidad de detección de la enfermedad si la persona está enferma es 0.9) y 99 % en las personas sanas (o sea que en el 1 % de los casos se declara como enfermo a una persona que no lo está).
    Por datos recopilados con anterioridad se estimó que el 5 % de las personas padece esta enfermedad.

    a) Calcule la probabilidad de que un análisis resulte positivo.
    b) Calcule la probabilidad de que ocurra un *falso positivo*. Esto sucede cuando el análisis da positivo y la persona no está infectada.
    c) Calcule la probabilidad de que se produzca un *falso negativo*. Esto ocurre cuando el análisis da negativo y la persona está infectada.
    d) Supongamos que se hace un análisis en un laboratorio y resulta positivo. Calcule la probabilidad que la persona de la que se extrajo la muestra para este análisis esté efectivamente enferma.
    e) Una persona se realiza el análisis y le da positivo. Como está preocupado decide realizar en otro laboratorio un análisis del mismo tipo (con las mismas probabilidades 0.9 y 0.99 del anterior laboratorio). Suponga que los resultados de los análisis de estos laboratorios son independientes. Si ambos análisis dan positivos, ¿cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma?
    Sugerencia: Realice un diagrama de árbol para representar la sucesión de eventos.

32. El control de calidad para cierto tipo de motor eléctrico consiste en dos pruebas: S (ensayo de sobrecarga) y C (ensayo de consumo). Se estimó que el 3 % de los motores que se someten a este control falla en la prueba S, el 4 % en la prueba C y el 95 % en ninguna de las dos.

    a) ¿Son las fallas en las pruebas sucesos estadísticamente independientes?
    b) De los motores que fallan en S, ¿qué porcentaje falla en la prueba C?

33. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25 %, 35 % y 40 % de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5 %, 4 % y 2 % respectivamente son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar del total de lo producido por las tres máquinas.

    a) ¿Cual es la probabilidad de que el perno extraído sea defectuoso?
    Esta probabilidad expresada como porcentaje corresponde al porcentaje de defecto del total de lo producido y siempre resulta entre los porcentajes mínimo y máximo de defectos de las máquinas.
    b) Si el perno extraído es defectuoso, ¿de qué máquina es más probable que provenga ?

34. Hay tres partidas de 20 piezas en cada una. El número de piezas estándares en la primera, segunda y tercera de las partidas es respectivamente igual a 20, l5 y 10. De una partida tomada al azar se ha escogido en forma aleatoria una pieza que resultó estándar.
Calcular la probabilidad de que la pieza se haya tomado de la tercera partida.

35. Un sistema de transmisión de energía eléctrica está compuesto por un transformador elevador T_1, dos líneas de transporte de energía L y dos transformadores reductores T_2 (ver Fig. 2). El consumidor puede recibir por cualquier línea la potencia que necesite, pero el transformador reductor puede transmitir sólo el 50 % de la potencia requerida por el consumidor. La probabilidad

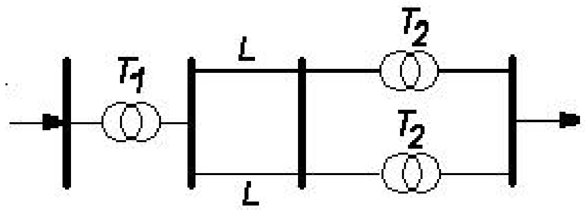

Figura 2: sistema de transmisión

de falla del transformador T_1 es $q_{T1} = 0.05$, de una línea L es $q_L = 0.03$ y la del transformador T_2 es $q_{T2} = 0.006$. Los fallos de todos los elementos se consideran sucesos aleatorios independientes. Determine la probabilidad de transmitir un porcentaje de la potencia requerida por el consumidor del:
a) 100 %, *b*) 50 %, *c*) 0 %.
Sugerencias: Por ejemplo para que el consumidor pueda recibir el 100 % de lo que requiere debe funcionar correctamente el transformador elevador T_1, al menos una de las dos líneas L deben funcionar y no fallar ninguno de los dos transformadores reductores T_2. Puede resultar conveniente realizar un diagrama de árbol con una sucesión de sucesos independientes comenzando con un primer par de sucesos (primeras dos ramas) ***T1*** *y su opuesto siendo* ***T1*** *la falla del transformador 1.*

36. Un transmisor está enviando un mensaje mediante un código binario, es decir, una secuencia de **0** y **1**. Cada bit transmitido (**0** ó **1**) debe pasar por tres sistemas repetidores para llegar al receptor. En cada repetidor el bit enviado puede ser diferente del bit recibido (una inversión) con probabilidad 0.10. Supongamos que los repetidores operan independientemente uno de otro.

$$\text{Transmisor} \rightarrow \text{Repetidor 1} \rightarrow \text{Repetidor 2} \rightarrow \text{Repetidor 3} \rightarrow \text{Receptor.}$$

a) Si se envía un **1** desde el transmisor, ¿cuál es la probabilidad de que el receptor reciba un **1**?
b) Supongamos que 70 % de todos los bits enviados desde el transmisor son **1**. Si un **1** es recibido por el receptor, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado un **1**?

37. En un proceso de producción de artículos de goma se consideran de buena calidad a aquellos que no son ni excesivamente duros ni excesivamente blandos. Se ha efectuado un estudio estadístico determinándose que el 5 % de los artículos son excesivamente blandos (EB) y el 4 % son excesivamente duros (ED). El 15 % de los artículos ED se vende al público, mientras que el 98 % de los EB no sale a la venta. Se sabe además que la probabilidad de que un artículo de buena calidad no se venda es 0.01.

    a) ¿Qué porcentaje de artículos se vende al público?

    b) ¿Qué porcentaje de artículos que salen a la venta son de mala calidad?

38. Suponga que en una población de N elementos se toma una muestra aleatoria de tamaño n.

    a) Encontrar la probabilidad p de que ninguno de m elementos ($m \leq N$) determinados queden incluídos en la muestra si suponemos que el muestreo se hace: (a) sin reemplazo, (b) con reemplazo.

    b) Comparar los valores numéricos de las probabilidades para ambas modalidades de muestreo si $N = 100$ y: a) $n = m = 3$, b) $n = m = 10$ c) $n = m = 20$. Saque alguna conclusión.

    c) Obtenga expresiones para p, en ambas modalidades de muestreo, en la forma de un producto de n factores (en un caso son distintos y en el otro todos iguales). Suponga $n > 1$. Por comparación de esos factores demuestre que la probabilidad p es menor en el caso del muestreo sin reposición que el caso con reposición.

39. Una empresa compra bulones a un proveedor. El control de calidad en la recepción establece seleccionar una muestra al azar de 20 bulones de la partida entregada por el proveedor y rechazarla si se encuentra 1 o más defectuosos. La probabilidad de que un bulón sea defectuoso es $p = 0.04$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la partida? Indique que consideraciones tuvo en cuenta para hacer el cálculo.

    b) Realice un gráfico de la probabilidad de aceptar la partida en función de p.

    c) Un lote se considera aceptable si $p \leq 0.03$. ¿Cuál es la máxima probabilidad de rechazar un lote aceptable?

    d) Para ahorrar costo en el control de recepción los bulones se verifican uno tras otro y se detiene el proceso rechazando el lote ante el primer bulón defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el rechazo se produzca con el quinto bulón controlado? Suponga $p = 0.04$.

40. Un fabricante arma equipos con 10 componentes básicos. Si alguno de ellos falla el equipo no funciona. La probabilidad de que un componente sea defectuoso es $p = 0.02$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione al ser armado?

    b) ¿Cuál debería ser el valor de p para que la probabilidad de que el equipo funcione sea la mitad de la calculada anteriormente?

    c) Para disminuir la probabilidad de que el equipo falle se coloca en cada uno de los 10 componentes otro idéntico en paralelo. De esta manera cada uno de estos paralelos de dos componentes funciona si por lo menos uno funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo falle? Considere $p = 0.02$.