Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico N$^{\underline{o}}$ 3

Las distribuciones binomial y de Poisson

1. Se determinó, a partir de numerosas experiencias previas, que de cada 5 fusibles que produce una máquina 1 es defectuoso. Calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria (extraída de un lote de gran tamaño) de 4 fusibles se obtengan:
   a) uno defectuoso;
   b) como máximo dos defectuosos;
   c) ninguno defectuoso;
   d) los cuatro defectuosos.

2. Supongamos que diez trabajadores van a usar intermitentemente energía eléctrica y que nos interesa estimar la carga total con la que se va a operar. Supondremos que, en un instante dado, cada trabajador tiene aproximadamente la misma probabilidad p de requerir una unidad de energía. Si, en promedio, un trabajador usa la energía durante 12 minutos por hora, tomaremos $p = 0.2$ (ya que 12 minutos es el 20 % de una hora) .
   Calcular la probabilidad de que 7 o más trabajadores requieran energía eléctrica al mismo tiempo (lo que equivale a calcular la probabilidad de sobrecarga cuando el suministro se ajusta a 6 unidades de energía).

3. Los motores de una producción se someten a dos controles independientes A y B. Se sabe, de experiencias previas, que el 1 % de los motores de este tipo falla en la prueba A y el 2 % en la prueba B.
   a) Calcular la probabilidad de que un motor probado falle en por lo menos uno de los controles.
   b) Si se selecciona al azar 20 de esos motores (se supone que el total de los motores es mucho mayor que 20), calcular la probabilidad de que fallen en por lo menos uno de los controles:
      1) ningún motor;
      2) a lo sumo el 10 % de los motores de la muestra.

      Representar gráficamente la función de probabilidad $p_X(x)$ de la variable aleatoria X : número de motores que fallan en por lo menos uno de los controles.

4. La máquina A produce diariamente el doble de artículos que la máquina B; el 4 % de los artículos producidos por la máquina A tiende a ser defectuoso, mientras que para la máquina B el porcentaje de defectuosos es del 2 %. Se combina la producción diaria de ambas máquinas y se toma una muestra aleatoria de 10 artículos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga exactamente 2 artículos defectuosos?
   b) Determinar el valor esperado y el desvío estándar del número de artículos defectuosos en esa muestra aleatoria de 10 artículos.

5. Una producción de lámparas eléctricas tiene un porcentaje de defecto del 1 %. Se prueba una muestra de 100 lámparas y si hay a lo sumo una defectuosa se acepta la producción; si hay dos o más defectuosas se toma otra muestra de 100 lámparas. Si en esta muestra hay a lo sumo una

defectuosa se acepta la producción y en caso contrario se rechaza. Calcular la probabilidad de aceptación de la producción.

6. Una proporción p de un gran número de artículos en un lote es defectuosa. Se extrae una muestra de m artículos y si ésta no contiene items defectuosos, el lote es aceptado, en tanto que si contiene más de dos items defectuosos, el lote es rechazado. Si la muestra contiene uno o dos artículos defectuosos, se extrae una muestra independiente de tamaño m y si el número combinado de defectuosas en las dos muestras no excede de dos, el lote es aceptado. Calcular la probabilidad de aceptar este lote.

7. Un comprador y un vendedor acuerdan un plan de muestreo de tamaño $n = 10$ para hacer el control de calidad. El comprador acepta el lote del que se extrae la muestra sólo si el número de artículos defectuosos es 0, 1 o 2. En caso contrario la rechaza. Llamemos p a la probabilidad de que un artículo sea defectuoso y supongamos que el tamaño de la población de la que se extrae la muestra es lo suficientemente grande para suponer que las observaciones muestrales son independientes. Calcular la probabilidad de que el comprador acepte el lote para los siguientes valores de p: (a) 0.1, (b) 0.3 y (c) 0.5. Representar gráficamente la probabilidad de aceptación como función de p.

8. Sea p la probabilidad de que cualquier símbolo particular de un código se transmita erróneamente a través de un sistema de comunicaciones. Suponga que en diferentes símbolos ocurren errores independientemente uno de otro. Suponga también que con probabilidad p_2 un símbolo erróneo se corrige al recibirse. Sea X_n el número de símbolos correctos recibidos en un bloque de mensaje formado por n símbolos (una vez que el proceso de corrección haya terminado).

   a) Demostrar que X_n es una variable aleatoria discreta con distribución binomial.
   b) Determinar el valor esperado y la varianza de X_n si $n = 10$, $p = 0.02$, y $p_2 = 0.95$.

9. Se supone que un proceso de fabricación de fusibles produce un 1 % de fusibles defectuosos. El proceso se controla periódicamente examinando 10 fusibles, y, si alguno falla, se detiene el proceso para revisarlo.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de detener el proceso con el sistema de control implementado?
   b) ¿Cúantos fusibles deberán probarse (en vez de 10) si se desea que la probabilidad de detener el proceso para revisarlo sea 0.95 cuando esté produciendo 5 % de fusibles defectuosos (que es un porcentaje de defectos muy por encima del aceptable)?
   c) Con el tamaño de muestra obtenido en el punto (b), ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso cuando esté produciendo al 1 % de fusibles defectuosos?

10. Una partícula esta sometida a la acción de impulsos aleatorios, pudiéndose mover en la dirección del eje x. Supongamos conocida la probabilidad de un salto unitario hacia la derecha es p y la probabilidad de un salto unitario hacia la izquierda $q = 1-p$. Este proceso aleatorio se denomina un *Random Walk* o caminata aleatoria unidimensional.

    a) Obtener una expresión para la probabilidad que la partícula alcance cierta abscisa x al cabo de n *saltos*. Suponga que la posición inicial es 0.
    Sugerencia: Si la partícula se encuentra en la posición x tras n saltos de los cuales r fueron a la derecha y l a la izquierda entonces se tiene: $r + l = n$ y $r - l = x$.
    b) Sea X_n la posición de la partícula al cabo de n *saltos*. Si $p = 0.5$ y $X_0 = 0$ calcular las siguientes probabilidades:

1) $P(X_n \geq 0)$ para n tomando los valores de 1 a 4.
2) $P(|X_n| \leq 2)$ para n tomando los valores de 1 a 4.

11. Un dispositivo está compuesto de un gran número de elementos que trabajan independientemente con igual probabilidad (pequeña) de falla de cada elemento durante un tiempo T. Hallar el promedio de elementos que fallan en el tiempo T, si la probabilidad de que en ese tiempo falle por lo menos un elemento es igual a 0.999.

12. Una batería de artillería dispara a un blanco y se sabe que la probabilidad de acertar es p =0.01. ¿Cuántos disparos tendrá que realizar para tener probabilidad mayor que 90 % de dar en el blanco por lo menos una vez? Resolver usando las distribuciones binomial y de Poisson. Generar una tabla con la razón de las respuestas obtenidas con una y otra distribución para valores de p desde 0.1 hasta 0.01 en pasos de 0.005.

13. El número promedio de personas que realizan transacciones en un cajero automático cada 10 minutos es de 3.4 personas. El número de personas que acude al cajero automático se puede suponer una variable aleatoria con distribución de Poisson. Calcular la probabilidad de que en 10 minutos cualesquiera, se realicen:
    a) menos de 2 transacciones.
    b) más de 2 transacciones.

14. Una fábrica envía al depósito 500 artículos. La probabilidad de deterioro de un artículo en el camino es igual a 0.002. Hallar la probabilidad de que en el camino se deterioren:
    a) exactamente 3 artículos;
    b) menos de 3 artículos;
    c) más de 3 artículos;
    d) por lo menos uno.

15. En una población el 1 % de las personas padece de daltonismo. ¿Cuál debe ser el tamaño de una muestra aleatoria (con reemplazo), de manera tal que la probabilidad de que la misma contenga por lo menos un daltónico sea mayor o igual a 0.95? Resuelva usando las distribuciones binomial y de Poisson.

16. La probabilidad de que se haga una soldadura defectuosa en una determinada conexión de una tubería es 10^{-4}.
    a) Hallar el valor esperado y la desviación típica de la variable aleatoria X: número de soldaduras defectuosas realizadas, si el número de soldaduras que requiere el tendido de la tubería es $5\,10^4$.
    b) Calcular la probabilidad de que en dicho trabajo no haya ninguna soldadura defectuosa.

17. Suponga un sistema de comunicación óptica que transmite dos símbolos, **1** y **0**. Como transmisor, se utiliza un láser que se enciende (para enviar un **1**) y se apaga (para enviar un **0**). El número de fotones durante el tiempo que está encendido el láser sigue una distribución de Poisson con media λ. Como receptor, se tiene un dispositivo ideal que puede contar cada fotón que llega. De esta forma, si cuenta al menos un fotón, el receptor decide que se envió un **1**; caso contrario, decide que se envió un **0**. Si se transmiten tantos **1**s como **0**s, determine el valor de λ para que la tasa de error en la decisión del receptor sea menor a 10^{-9}.