Función de variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución (acumulada) $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada. Si se define una nueva variable aleatoria $Y = g(X)$, la función de distribución de Y está dada por

$$F_Y(y) = P\big(Y \leq y\big) = P\big(g(X) \leq y\big). \tag{1}$$

Generación de variables aleatorias

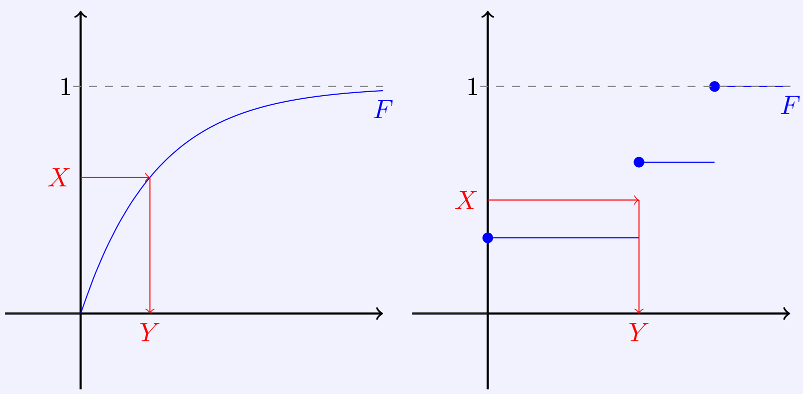
Un caso particular de interés es el siguiente. Sea $X \sim U(0, 1)$ y F una función de distribución de probabilidad (acumulada) cualquiera. Definamos g de la siguiente manera:

$$g(x) = \min \{y \in \mathbb{R} : \ F(y) \geq x\} . \tag{2}$$

Recordemos que F es no-decreciente y continua por derecha, por lo que esta definición de g es correcta. En particular, si existe un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en el cual F sea estrictamente creciente, entonces $g(x) = F^{-1}(x)$ para todo $x \in F([a, b])$. Luego, si definimos una nueva variable aleatoria $Y = g(X)$, es fácil demostrar que (ver los gráficos más abajo)

$$F_Y(y) = P\big(Y \leq y\big) = P\big(g(X) \leq y\big) = F(y). \tag{3}$$

Es decir, la distribución de probabilidad de Y viene dada por F. **Estas ecuaciones proveen una forma de simular una variable aleatoria con una distribución cualquiera a partir de una variable aleatoria con distribución uniforme.**

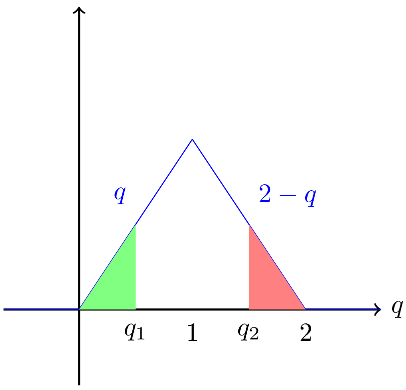


Transformaciones afines

Sea X una variable aleatoria y $a, b \in \mathbb{R}$. Si definimos $Y = aX + b$, es fácil demostrar que

$$E[Y] = aE[X] + b, \tag{4}$$
$$\mathrm{Var}[Y] = a^2 \mathrm{Var}[X], \tag{5}$$

siempre y cuando los momentos en los lados derechos de las ecuaciones anteriores estén definidos.



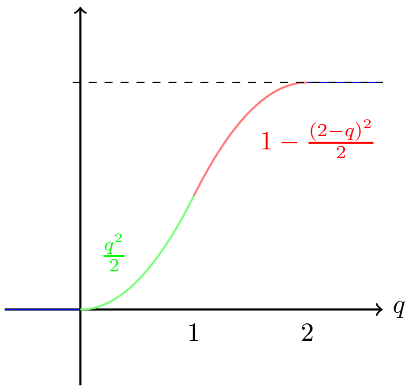


Figura 1: Densidad de probabilidad (izquierda) y función de distribución (derecha) de Q, Ejercicio 8 de la guía 5

Problema 8 Guía 5.

El beneficio total de una empresa está dado por $B = 10\,Q - 5\,Q^2$ (en miles de pesos) si Q es la cantidad vendida, que se supone es una variable aleatoria continua que toma valores entre 0 y 2 con función densidad de probabilidad: $f_Q(q) = q$ si $0 < q < 1$ y $f_Q(q) = -q + 2$ si $1 < q < 2$.

1. Calcular la probabilidad de obtener un beneficio superior a los 3000 pesos.
2. Calcular el valor esperado de B.
3. Obtener la función de distribución de B.

Respuesta:
En todo el desarrollo, asumiremos que trabajamos con las cantidades en miles de pesos. El primer paso es determinar la función de distribución de la variable aleatoria Q. Para ello, es conveniente graficar la densidad de probabilidad, como se hace en la Fig. 1. Dado que el área de un triángulo es $0.5\times$`base`$\times$`altura`, es fácil ver que

$$F_Q(q) = \begin{cases} 0 & q \leq 0 \\ \frac{q^2}{2} & q \in [0,1] \\ 1 - \frac{(2-q)^2}{2} & q \in [1,2] \\ 1 & q \geq 2, \end{cases} \tag{6}$$

donde hemos usado el hecho $P\big(Q < 0\big) = P\big(Q > 2\big) = 0$.

Para calcular la función de distribución del beneficio B, también ayuda realizar un gráfico, como el que aparece en la Fig. 2. A partir de esta figura, para $b_\alpha \in [0,5]$

$$F_B\left(b_\alpha\right) = P\big(B \leq b_\alpha\big) = P\big(Q \leq q_{\alpha,1}\big) + P\big(Q \geq q_{\alpha,2}\big) = \frac{q_{\alpha,1}^2}{2} + 1 - \left[1 - \frac{\left(2-q_{\alpha,2}\right)^2}{2}\right] \tag{7}$$

$$= \frac{q_{\alpha,1}^2}{2} + \frac{\left(2-q_{\alpha,2}\right)^2}{2}, \tag{8}$$

donde $q_{\alpha,1}$ y $q_{\alpha,2}$ pueden ser obtenidos como solución de la ecuación

$$b_\alpha = 10q_\alpha - 5q_\alpha^2 \Rightarrow q_{\alpha,1}, q_{\alpha,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{b_\alpha}{5}}. \tag{9}$$

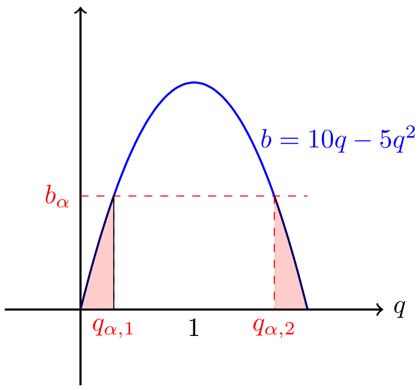


Figura 2: Beneficio en función del costo, Ejercicio 8 de la guía 5

Finalmente, tenemos

$$F_B(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 0 \\ \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{5}}\right)^2 & b \in [0, 5] \\ 1 & b \geq 5 \end{cases} \tag{10}$$

Obsérvese que es fácil determinar la densidad de probabilidad a partir de este resultado:

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{5}}} - 1\right) & b \in (0, 5) \\ 0 & b \notin (0, 5) \end{cases} \tag{11}$$

A partir de la Ec. (10), es fácil calcular la probabilidad de obtener un beneficio superior a 3000 pesos:

$$P\big(B > 3\big) = 1 - F_B(3) = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{5}}\right)^2 \approx 0.8649. \tag{12}$$

El valor esperado del beneficio puede obtenerse de varias formas, por ejemplo, mediante las siguientes integrales:

$$E[B] = \int_{\mathbb{R}} b f_B(b) db = \int_{\mathbb{R}} \left(10q - 5q^2\right) f_Q(q) dq. \tag{13}$$

En este problema, parece más sencillo utilizar la segunda de las integrales. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} E[B] &= \int_0^1 \left(10q - 5q^2\right) q dq + \int_1^2 \left(10q - 5q^2\right)(2 - q)\, dq \\ &= \int_0^1 \left(10q^2 - 5q^3\right) q dq + \int_1^2 \left(20q - 20q^2 + 5q^3\right) dq \\ &= \left(\frac{10}{3}q^3 - \frac{5}{4}q^4\right)\Big|_0^1 + \left(10q^2 - \frac{20}{3}q^3 + \frac{5}{4}q^4\right)\Big|_1^2 \\ &= \left[\left(\frac{10}{3} - \frac{5}{4}\right) - (0)\right] + \left[\left(40 - \frac{160}{3} + \frac{80}{4}\right) - \left(10 - \frac{20}{3} + \frac{5}{4}\right)\right] \\ &= \frac{25}{6}. \end{aligned}$$