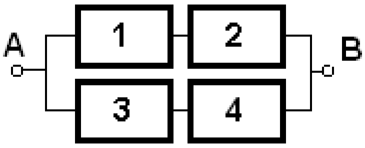
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA 93.24 PRIMER PARCIAL 26/09/13

INDICACIONES: Indique claramente **apellido, nombre, número de legajo y curso** en cada hoja que entregue. No solicite indicaciones ni aclaraciones.

Indique claramente los planteos de los problemas que resuelva, no serán tenidos en cuenta cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. Defina sucesos, variables aleatorias y su distribución y comente la solución. Exprese los resultados redondeando en 4 decimales.

SUERTE... DURACION : 2.0 HORAS.

1. (*2 puntos*) Si $\boldsymbol{Y}$ es el tiempo hasta la falla de un componente de un sistema y $\boldsymbol{F}(y)$ es la función de distribución de $\boldsymbol{Y}$ entonces $P(\boldsymbol{Y} > y) = 1 - \boldsymbol{F}(y)$ es la *confiabilidad* del componente. Suponga que un sistema tiene cuatro componentes idénticos, con igual confiabilidad, conectados como indica el diagrama adjunto. El sistema funciona correctamente cuando opera al menos una cadena de componentes que no fallan entre A y B. Los cuatro componentes funcionan en forma independiente entre sí.



a) Obtenga la función densidad de probabilidad del tiempo hasta la falla $\boldsymbol{T}$ del sistema si el tiempo hasta la falla de cada componente se puede suponer una variable aleatoria con distribución exponencial de media *M.*

b) Calcule la probabilidad de que el tiempo $\boldsymbol{T}$ supere a su valor esperado.

Solución comentada: Sea $\boldsymbol{T}$ el tiempo de funcionamiento del sistema hasta la falla, mientras que $\boldsymbol{T}_1$ y $\boldsymbol{T}_2$ son los tiempos de funcionamiento hasta la falla de las ramas en paralelo. Estas dos últimas variables aleatorias tienen distribución exponencial de parámetro $L = 1/M$. Se tiene

$$F_T(t) = P(\boldsymbol{T} < t) = P(\boldsymbol{T}_1 < t)\, P(\boldsymbol{T}_2 < t) = (\,1 - \exp(-L\,t)\exp(-L\,t)\,)^2 = (\,1 - \exp(-\,2\,L\,t)\,)^2\,,\; t > 0.$$

La función densidad de probabilidad de $\boldsymbol{T}$ es $f_T(t) = 4\,L\,(\exp(-\,2\,L\,t) - \exp(-\,4\,L\,t))\,,\; t > 0$.

Con la definición de valor esperado y sabiendo que $M = 1/L$ es el valor esperado de una variable aleatoria exponencial de parámetro L resulta que $E(\boldsymbol{T}) = 0.75\,M$.

La probabilidad solicitada $P(\boldsymbol{T} > E(\boldsymbol{T})) = 1 - F_T(0.75\,M) \cong 0.3965$.

2. (*3 puntos*) Cierta característica de calidad X de un artículo puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal con media μ y desvío estándar σ. Los artículos de la producción se clasifican en A, B ó C según que el valor de X se halle a más de un σ por debajo de μ, a menos de un σ respecto de μ o más de un σ por encima de μ. La probabilidad de que un artículo elegido al azar pase exitosamente una prueba de control de calidad es 0.5; 0.9 y 0.4 para A, B y C respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que al menos 3 de una muestra de 12 artículos examinados (elegidos al azar de una producción de tamaño mucho mayor) pase con éxito la prueba de control de calidad.

b) Aproxime el valor de la probabilidad de que más del 75 % de una muestra de *n* artículos aprueben el control de calidad si *n* tome los valores 500 y 1000. Suponga que la muestra se extrae al azar de una producción de tamaño mucho mayor.

Solución comentada: La probabilidad de que un artículo pase con éxito la prueba es

$$p = 0.9\,(\,0.1587 + 0.6826) \cong 0.7572.$$

La cantidad de artículos $\boldsymbol{X}$ que pasan la prueba de entre los $n = 12$ tiene distribución binomial de parámetros n y p. Entonces $P(\boldsymbol{X} \geq 3) = 1 - P(\boldsymbol{X} \leq 2) \cong 0.9999$.

Usando la aproximación normal para la distribución normal para $p_n = P(\boldsymbol{X} > 0.75\,n)$ se tiene:

$p_{500} \cong 1 - \Phi(\,(0.75\;500 - 0.7572\;500)/(\,500\;0.7572\;0.2428)^{1/2}) \cong 0.6464$ y en forma análoga $p_{1000} \cong 0.7023$.

3.(*3 puntos*) Una compañía de exploración petrolera va a perforar diez pozos y cada uno de ellos tiene una probabilidad 0.1 de producir petróleo en forma comercial. El costo de perforación de un pozo es **C** pesos, mientras que si el pozo puede producir petróleo en forma comercial entonces pueden obtenerse 30 **C** pesos de ingreso.

a) Obtenga la distribución de probabilidades de la ganancia (ingresos – costos) de la compañía en la explotación de los 10 pozos.

b) Calcule la probabilidad de que la compañía tenga una ganancia que sea al menos 10 veces su inversión de perforación.

c) Calcule el valor esperado y la dispersión de la ganancia. *Sugerencia*: Exprese la ganancia de la compañía en función de la cantidad de pozos que producen petroleo y luego use propiedades del valor esperado y la varianza.

Solución comentada: Sea $\boldsymbol{X}$ el número de pozos que producen en forma comercial de entre los 10 y $\boldsymbol{G}$ la ganancia obtenida por la explotación de los 10 pozos. Se tiene $\boldsymbol{G} = 30\ C\ \boldsymbol{X} - 10\ C = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$, donde $\boldsymbol{H}$ es una función inyectiva. El recorrido de $\boldsymbol{G}$ es { -10 C, 20 C, 50 C, 80 C, 110 C, 140 C, 170 C, 200 C, 230 C, 260 C, 290 C}. Como $\boldsymbol{X}$ tiene distribución binomial de parámetros n =10 y p = 0.1 y $\boldsymbol{H}$ es una función inyectiva entonces

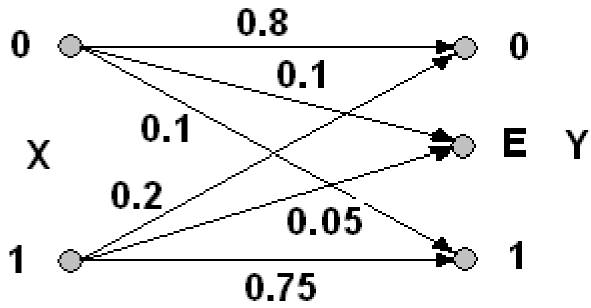
$$P(\boldsymbol{G} = g_k) = P(\boldsymbol{X} = (g_k + 10C)/(30\ C),\ \text{con } P(\boldsymbol{X} = k) = C_{n,k}\, p_k\, (1 - p)^{n-k},\ k: 0,1, \ldots, n.$$

La probabilidad de que la compañía tenga una ganancia que sea al menos 10 veces su inversión de perforación es:

$$P(\boldsymbol{G} \geq 100) = P(\boldsymbol{X} > 3) \cong 0.0126.$$

El valor esperado de $\boldsymbol{G}$ es $E(\boldsymbol{G}) = -10 + 30\ E(\boldsymbol{X}) = -10 + 30\ 10\ 0.1 = 20$.
Para la varianza resulta $V(\boldsymbol{G}) = 900\ V(\boldsymbol{X}) = 900\ 10\ 0.1\ 0.9 = 810$ y asi $\sigma(\boldsymbol{G}) \cong 28.4605$.

4. *(2 puntos)* El canal de comunicación que se muestra en el esquema adjunto transmite los símbolos 0 y 1 desde la entrada mientras que los posibles símbolos a la salida son 0, 1, y E. Sea X el símbolo que se transmite desde la entrada e Y el símbolo recibido a la salida. Supongamos que se indique con $P(Y = y / X = x) = p_{yx}$ la probabilidad de que y se reciba dado que x fue transmitido.



Se suponen las siguientes probabilidades: $p_{00} = 0.8$ (se recibe 0 dado que se transmitió 0), $p_{10} = 0.1$ (se recibe 1 dado que se transmitió 0), mientras que $p_{E0} = 0.1$, $p_{01} = 0.2$, $p_{11} = 0.75$, y $p_{E1} = 0.05$.
Si $P(X = 0) = P(X = 1) = 0.5$ obtenga:
a) $P(X = x/ Y = y)$ para los siguientes pares (x,y): (0 , 0), (1, E) y (1, 1).
b) aproximadamente la probabilidad de que se reciban como máximo 60 símbolos E si se transmiten 1000 símbolos desde la entrada. Indique que supuesto considera para poder calcular esta probabilidad.

Solución comentada:

(x, y)	(0,0)	(1, E)	(1, 1)
$P(\boldsymbol{X} = x / \boldsymbol{Y} = y)$	0.4/0.5 = 0.8	0.025/0.075 = 0.3333	0.375/0.425 ≅ 0.8824

Sea $\boldsymbol{U}$ el número de símbolos E recibidos entre los n = 1000 enviados. Se tiene $P(\boldsymbol{Y} = E) = p = 0.075$. La variable $\boldsymbol{U}$ tiene distribución binomial de parámetros n y p si se supone independencia entre símbolos recibidos y constancia de p para cada símbolo. Como $n\,p = 75$ y $n\,(1 - p) = 925$ son ambos mayores que 10 entonces puede utilizarse la aproximación normal de la binomial para aproximar la probabilidad pedida.
Resulta:

$$P(\boldsymbol{U} \leq 60) \cong \Phi(\ (60.5 - 75)/\ (1000\ \ 0.075\ \ 0.925)^{1/2}) \cong \Phi(-1.741) \cong 0.0409.$$