Nombre: ______________________ Legajo: ______________________

Pregunta	1	2	3	4	5	Total
Puntos	2	2	2	2	2	10
Calificación						

No se contestan preguntas.
Justifique sus cálculos.
Redondee los resultados finales a 4 decimales.

1. Usted ha sido contratado en un criadero de chanchos donde se ha implementado una nueva dieta para los animales. El dueño le informa que, al final del proceso de crianza, el peso de un chancho adulto tomado al azar puede considerarse una variable aleatoria normal con desvío $\sigma = 5$ kg.
   (a) ($1/2$ pto.) El dueño le pide que determine el peso medio de los chanchos adultos al final de la crianza con un nivel de confianza del 95% y un margen de error de 1 kg. ¿Cuál es el número mínimo de chanchos que debería pesar? Justifique su respuesta.
   (b) ($1/2$ pto.) Al final, usted pesa 25 chanchos tomados al azar y el peso promedio le da $\overline{x} = 200$ kg. Determine el intervalo de confianza con un nivel de 95 % para el peso medio.
   (c) (1 pto.) Históricamente, antes de la implementación de la nueva dieta, el peso medio de los chanchos era de 198 kg. ¿Puede concluirse que la nueva dieta aumentó el peso medio? Plantee la prueba de hipótesis correspondiente, calcule el valor P de la misma y escriba su conclusión.

Respuesta:
(a) Dado el nivel de confianza $\gamma = 0.95$, el margen de error es

$$\Delta = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{0.975} \frac{5}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 \therefore n \geq 96.04.$$

Rta.: $n = 97$.
(b) En este caso

$$\Delta = z_{0.975} \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96.$$

Rta.: $(198.04, 201.96)$.
(c) La prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \mu \leq 198 \, (= \mu_0)$$
$$H_1 : \mu > 198$$

El valor del estadístico de prueba observado es

$$z_{\text{obs}} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{200 - 198}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = 2.$$

Luego,

$$\text{Valor P} = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 0.022750.$$

Rta.: Para todo nivel de significación $\alpha > 0.022750$, existe suficiente evidencia de que la dieta aumentó el peso medio.

2. Usted no confía en el dueño del criadero y descree que el desvío poblacional sea igual a 5 kg. Por ello, calcula el desvío muestral a partir de los datos de los 25 chanchos, obteniendo $s = 4.8452$.

(a) (1 pto.) Determine el intervalo de confianza con un nivel de 95 % para el peso medio.

(b) (1 pto.) ¿Puede concluirse que la nueva dieta aumentó el peso medio? Plantee la prueba de hipótesis con un nivel de significación del 5 % y escriba su conclusión.

Respuesta:

Idea general: igual que el ejercicio anterior, pero con σ desconocido.

(a) En este caso:

$$\Delta = t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} = t_{0.975,24}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.0639\frac{4.8452}{\sqrt{25}} = 2.$$

Rta.: $(198, 202)$.

(b) El valor del estadístico de prueba observado es

$$t_{\text{obs}} = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{200-198}{\frac{4.8452}{\sqrt{25}}} = 2.0639.$$

Dado que $t_{\text{obs}} = t_{0.975,24}$, claramente es mayor que $t_c = t_{1-\alpha,n-1} = t_{0.95,24}$. De todas formas, se puede buscar en la tabla $t_{0.95,24} = 1.7109$. Rta.: Para todo nivel de significación $\alpha > 0.025$ (en particular, para $\alpha = 0.05$), existe suficiente evidencia de que la dieta aumentó el peso medio.

3. Un nuevo pasante ingresó al criadero. Para que comience a entrenarse, usted le pide plantee una prueba de hipótesis para determinar si la proporción de chanchos que pesa más de 201 kg es superior al 75 % con un nivel de significación del 5 %. Asuma que usa una muestra de tamaño $n = 2500$.

(a) (1 pto.) Plantee detalladamente la prueba de hipótesis, el estadístico de prueba y la región de rechazo.

(b) (1 pto.) Dibuje la curva OC especificando al menos 3 puntos.

Respuesta:

Se trata de una prueba de hipótesis para una proporción:

$$H_0 : p \leq 0.75\,(= p_0)$$
$$H_1 : p > 0.75$$

La zona de rechazo se puede especificar de dos formas, dependiendo del estadístico de prueba:

- Estadístico Z.
$$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\hat{p}-0.75}{\sqrt{\frac{0.75(0.25)}{2500}}}.$$
Se rechaza si $z_{\text{obs}} > z_c = z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.6449$.

- Estadístico $\hat{p}$. Se rechaza si $\hat{p} > \hat{p}_c$, donde
$$\hat{p}_c = p_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.75 + z_{0.95}\sqrt{\frac{0.75(0.25)}{2500}} = 0.7642.$$

Para graficar la OC, hay que recordar que

$$\beta(p_0) = 1-\alpha \to \beta(0.7500) = 0.95,$$
$$\beta(\hat{p}_c) = 0.5 \quad \to \beta(0.7642) = 0.50,$$
$$\beta(1) = 0$$

Para obtener más puntos, recordamos que

$$\beta(p) = P_p\left(\hat{p} < \hat{p}_c\right) \approx \Phi\left(\frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

4. Los chanchos del criadero son de una raza muy especial. Se sabe que la cantidad de veces que cada chancho ingiere alimento puede considerarse un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 0.5\,\text{hora}^{-1}$.
   (a) (1 pto.) ¿Cuál es la probabilidad que pasen más de 4 horas entre la primera y la sexta ingesta?
   (b) (1 pto.) Estos chanchos tan especiales comen exactamente 50 g en cada ingesta. Si se compran alimentos cada 4 días, ¿cuántos kilogramos deben comprarse si se desea que la probabilidad de que no alcance para 100 cerdos sea menor al 1 %?

Respuesta:

(a) Sea $N(t)$ el proceso de Poisson con parámetro λ correspondiente a la cantidad de ingestas de un chancho dado. Si entre la primera y la sexta ingesta pasan más de 4 horas, significa que en 4 horas hubo menos de cinco (5) ingestas. Dado que un proceso de Poisson tiene incrementos independientes, la probabilidad pedida se calcula

$$P\left(N(4) \leq 4\right) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(0.5 \times 4)^k}{k!} e^{-0.5\times 4} \approx 0.9473.$$

(b) Llamemos $N_i(t)$ al número de ingestas hasta tiempo t del i-ésimo chancho. Sea $S_{100}(t)$ el número correspondiente a los 100 chanchos, es decir

$$S_{100}(t) = \sum_{i=1}^{100} N_i(t),$$
$$\mathrm{E}\left[S_{100}(t)\right] = 100 \times \mathrm{E}\left[N_i(t)\right] = 100 \times 0.5 \times t,$$
$$\mathrm{Var}\left[S_{100}(t)\right] = 100 \times \mathrm{Var}\left[N_i(t)\right] = 100 \times 0.5 \times t,$$

donde en el último paso hemos asumido que las ingestas de los 100 chanchos son **independientes** entre sí.

En 4 días (= 96 horas), el número de ingestas tendrá

$$\mathrm{E}\left[S_{100}(96)\right] = 100 \times 0.5 \times 96 = 4800,$$
$$\mathrm{Var}\left[S_{100}(96)\right] = 100 \times 0.5 \times 96 = 4800.$$

Llamemos C a la cantidad de alimento consumida por los 100 chanchos en 4 días y c a la cantidad comprada. Luego,

$$P\left(C > c\right) = P\left(0.05 S_{100}(96) > c\right) = P\left(S_{100}(96) > \frac{c}{0.05}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\frac{c}{0.05} - 4800}{\sqrt{4800}}\right) \leq 0.01,$$

donde hemos usado el TCL (sumamos 100 variables aleatorias; otro punto de vista: S_100 es suma de Poisson independientes y, por tanto, Poisson, por lo que se puede aproximar por la normal). Entonces

$$\frac{\frac{c}{0.05} - 4800}{\sqrt{4800}} \geq z_{0.99} = 2.3263 \therefore c \geq 0.05 \times \left(4800 + 2.3263\sqrt{4800}\right) = 248.06.$$

5. Luego de haber trabajado muchos años en el criadero, usted está completamente seguro que el dueño le mintió o no sabía de lo que hablaba. De hecho, en el transcurso de sus investigaciones ha determinado que el peso Y de un chancho y el peso de su padre X están dados por la distribución de probabilidades conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{si } x \in (195,205),\ y \in (x-5, x+5), \\ 0 & \text{para todo otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) (1 pto.) Determine las densidades de probabilidad marginales. Grafíquelas.

   (b) (1 pto.) Calcule $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Respuesta:
La clave es hacer un dibujo de la región de interés en 2D. Omitimos los detalles de las cuentas.

(a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x \in (195,205), \\ 0 & x \notin (195,205). \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 190, \\ \frac{y-190}{100} & 190 < y < 200, \\ \frac{210-y}{100} & 200 < y < 210, \\ 0 & y > 210. \end{cases}$$

(b)

$$\mu_X = 200,$$
$$\mu_Y = 200.$$

$$\mathrm{E}[XY] = \frac{120025}{30},$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{25}{3} \approx 8.3333.$$