Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido

$$X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma)$$

La variable aleatoria ***X*** definida en la población es continua y tiene distribución normal de media $\boldsymbol{\mu}$ y desvío estándar $\boldsymbol{\sigma}$

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

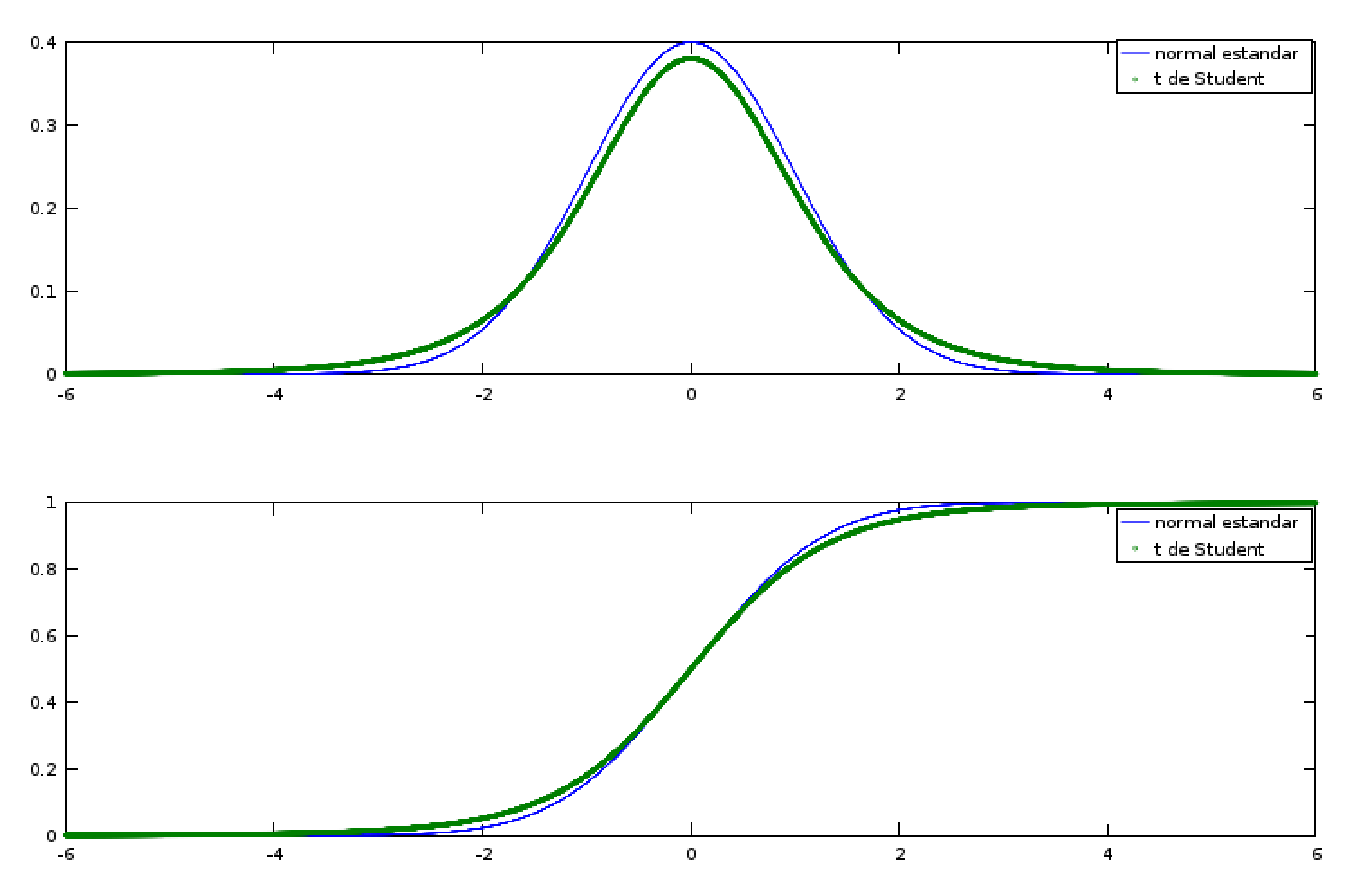
Se considera una muestra aleatoria de tamaño *n* de ***X*** .

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

La variable aleatoria ***T*** tiene distribución *t* de Student, con *n* – 1 grados de libertad. Tiene valor esperado cero y su desvío estándar es superior a 1.

Comparación t vs normal estándar

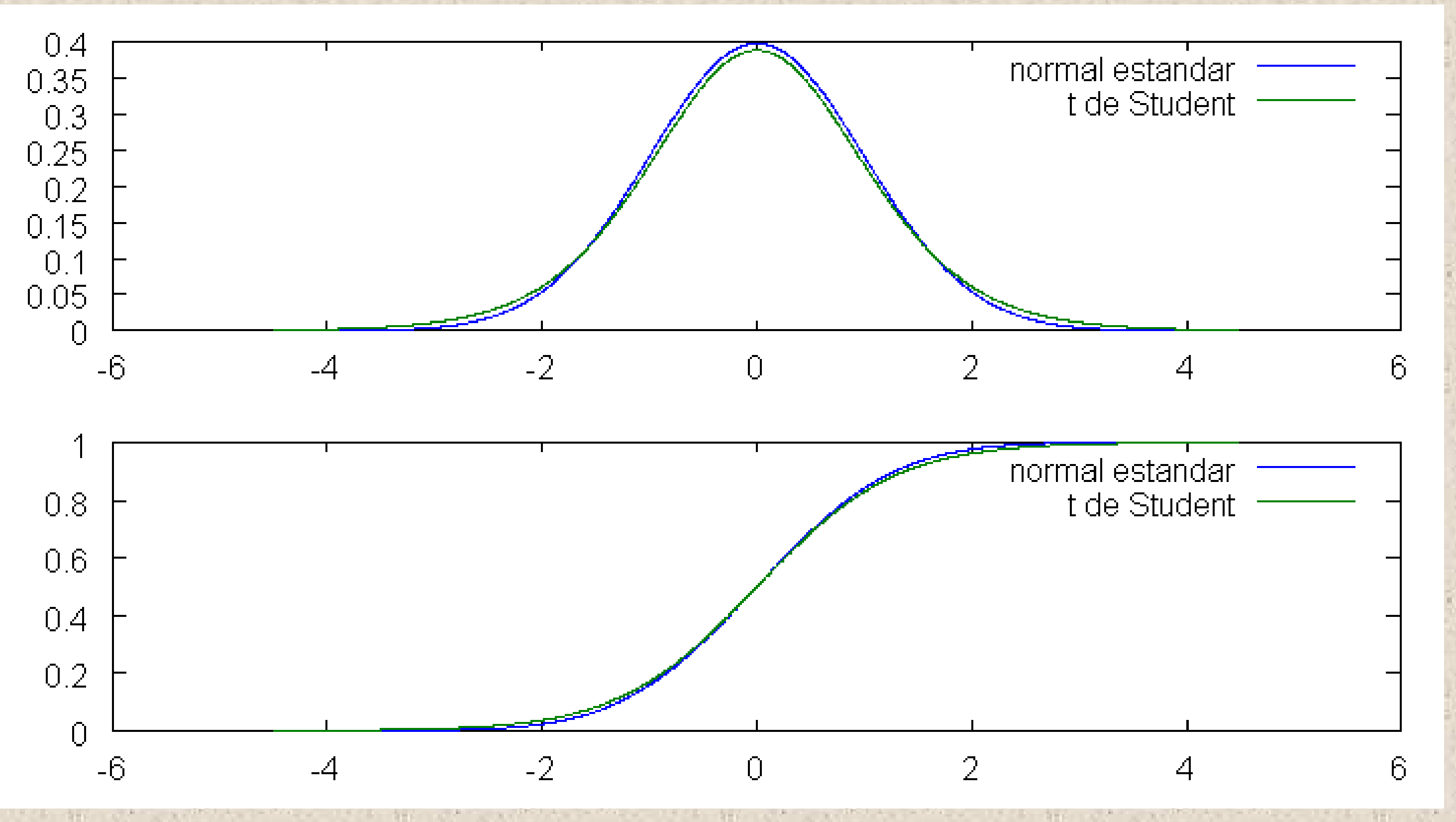
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$



Comparación de las funciones de densidad de probabilidad y de distribución de las variables aleatorias normal estándar y t de Student con 5 grados de libertad

Comparación t vs normal estándar

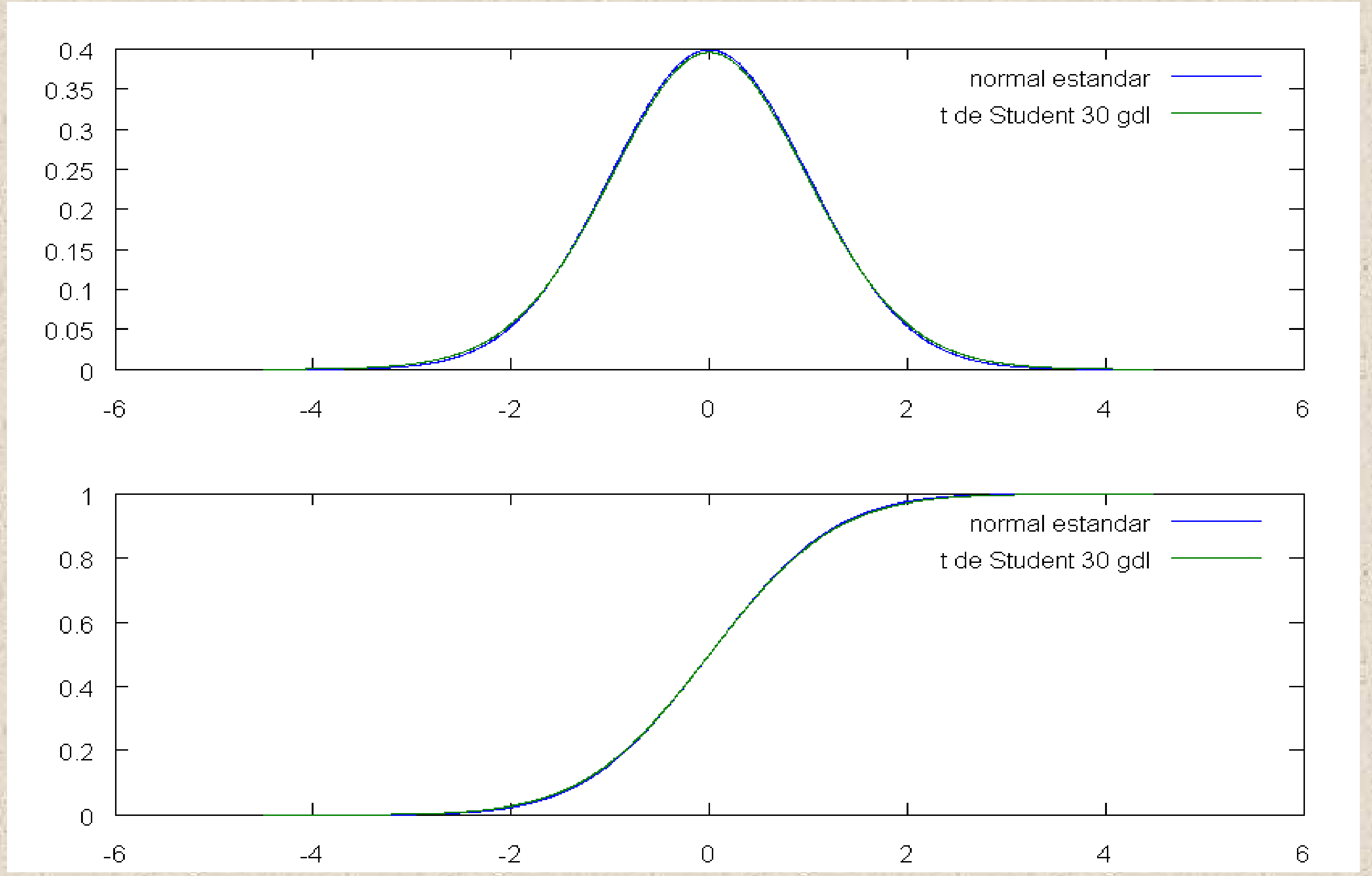
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$



Comparación de las funciones de densidad de probabilidad y de distribución de las variables aleatorias normal estándar y t de Student con 10 grados de libertad

Comparación t vs normal estándar

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

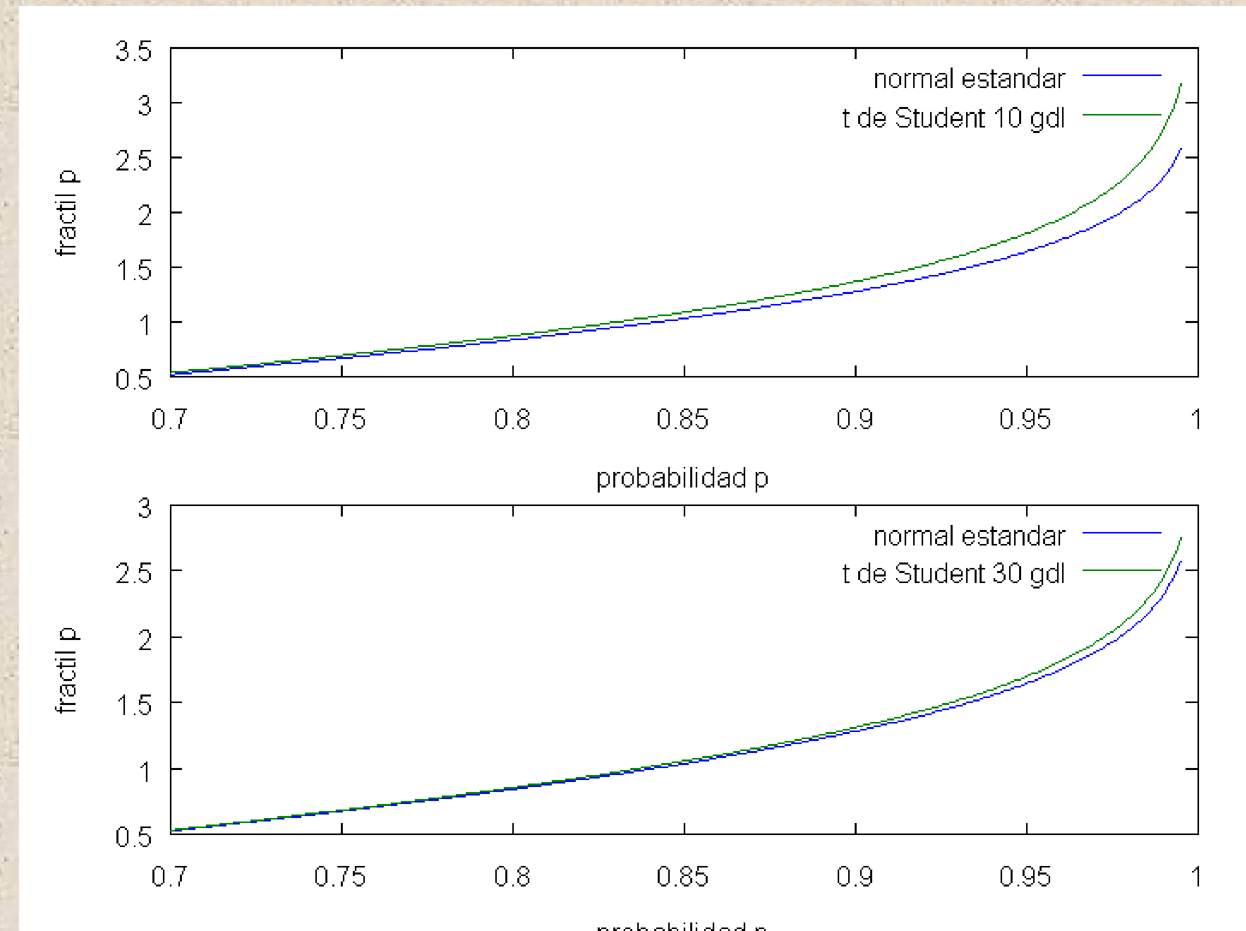


Comparación de las funciones de densidad de probabilidad y de distribución de las variables aleatorias normal estándar y t de Student con 30 grados de libertad

Comparación t vs normal estándar

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

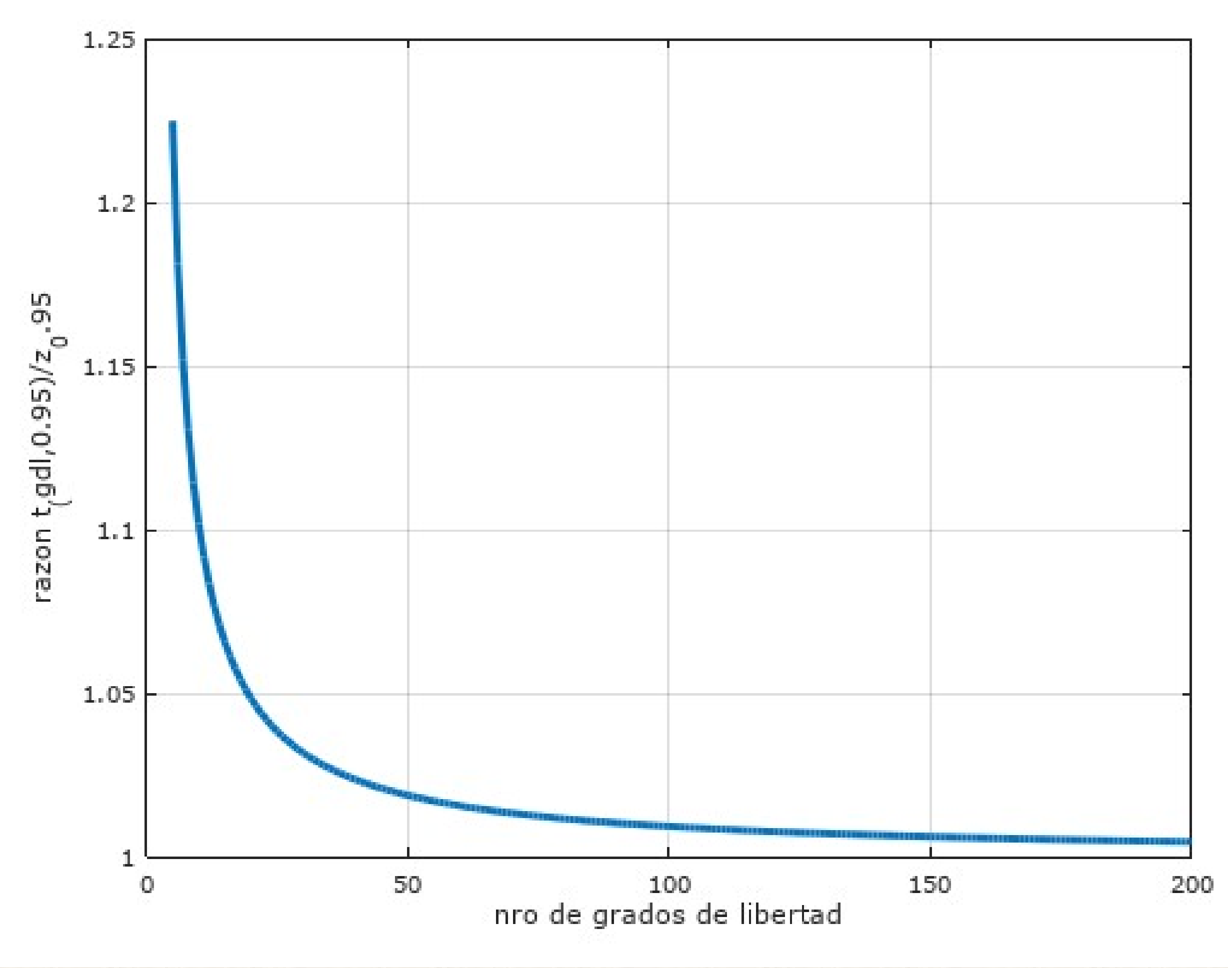
$$t_{n-1,w} > z_w \quad \forall\, w \in (0,1)$$



Comparación de los fractiles de las distribuciones normal estándar y t de Student con 10 y con 30 grados de libertad. Las diferencias mas importantes ocurren para valores de p cercanos a 1 y si el número de grados de libertad es pequeño (aún con 30 se nota la diferencia).

Comparación t vs normal estándar

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$



$$t_{n-1,w} > z_w \quad \forall\, w \in (0,1)$$

Comparación de los fractiles 0.95 de las distribuciones normal estándar y t de Student con n grados de libertad. Se representa la razón entre ambos fractiles que tiende asintóticamente a 1.

Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido

Un fabricante de lámparas eléctricas ha desarrollado un nuevo proceso de producción que él espera aumentará la eficiencia (se supone una variable normal) media (en lúmenes/watt) de su producto que hasta el momento es de 9.5. Los resultados de un experimento realizado sobre 10 lámparas se dan a continuación: 9.28, 10.25, 11.52, 13.02, 11.58, 9.97, 11.46, 12.05, 9.87, y 10.85. ¿Debe el fabricante concluir que la eficiencia aumentó? Usar 5 % como nivel de significación del test. Calcule el *valor P* de esta prueba de hipótesis

La variable aleatoria ***X*** medida en cada lámpara es *la eficiencia* (en lum/w). Se supone que tiene distribución normal. Si la afirmación del fabricante es verdadera entonces el estadístico de prueba tiene *distribución t de Student con n-1 grados de libertad*. La hipótesis nula de esta prueba es **H0** : $\mu \leq 9.5$ frente a **H1** : $\mu > 9.5$. Si se rechaza H0 se concluirá que el nuevo proceso de producción produce un aumento significativo de la eficiencia media.

Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido

Si **H0** es verdadera entonces el estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{X} - 9.5}{S / \sqrt{10}}$$

tiene *distribución de Student con 9 grados de libertad*. Si el valor observado de T en una muestra excede el valor crítico del nivel 0,05 entonces se rechaza **H0**. El valor crítico es

$$t_{9,0.95} \approx 1.833$$

Para esta muestra de 10 lámparas la media muestral y el desvío estándar muestral son, respectivamente, 10.985 y 1.149. Por consiguiente el valor observado de T es:

$$t_{obs} = \frac{10.985 - 9.5}{1.149 / \sqrt{10}} \approx 4.087$$

Como el valor observado es superior al crítico se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media del proceso aumentó y por consiguiente el nuevo proceso mejora la eficiencia media de las lámparas.

Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido

El valor observado del estadistico de prueba T es $t$obs $\approx$ 4,087. Como es mayor que el crítico 1.833 entonces se rechaza **H0** al nivel de significación del 5%. Para este valor observado se rechaza **H0** a cualquier nivel de significación mayor a

$$P(T > t_{obs}) \approx 0.0014$$

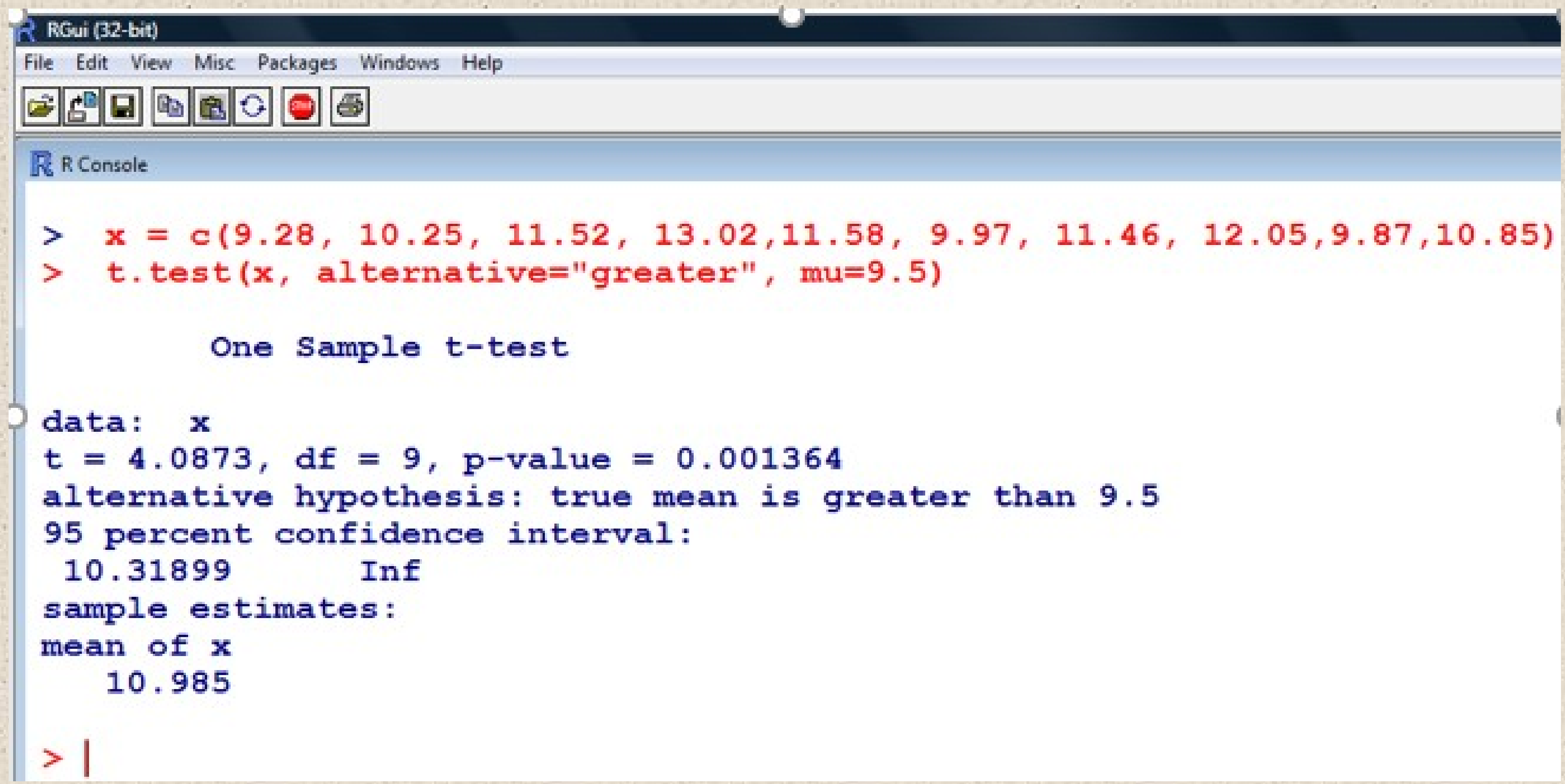
```
1-tcdf(4.087,9)
ans =  0.0013646
```

Salida de Octave

Esta probabilidad, calculada con la función de distribución *t*, se denomina *valor P* del test, en este caso de *cola derecha;* y mide la probabilidad de que el estadístico de prueba tome valores mayores que el observado. Para esta prueba de hipótesis la condicion de rechazo puede expresarse en forma equivalente como:

$$t_{obs} > t_{9,0.95} \quad \acute{o} \quad valorP < 0.05$$

Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido



Pantalla de salida de **R** donde se ingresan los datos en una tabla y luego se invoca la prueba t (**t.test**) indicando los datos, el tipo de prueba (cola derecha – **greater**) y el valor de la media que se indica en la hipótesis nula (**mu_0**).

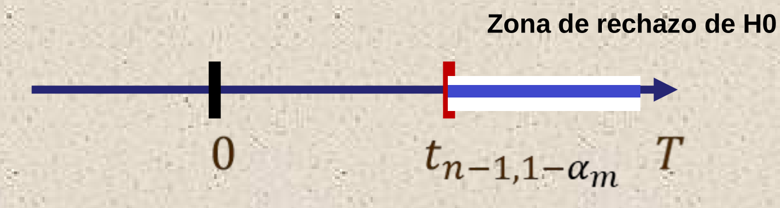
Prueba de hipótesis sobre la media poblacional con desvío poblacional desconocido

Regla de decisión

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, σ desconocido.

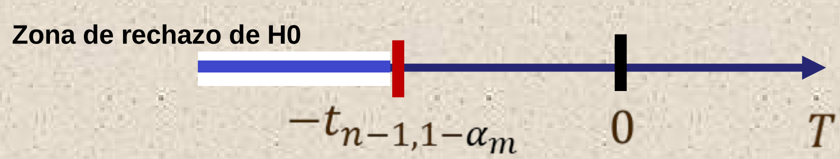
H_0: $\mu \leq \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$



H_0: $\mu \geq \mu_0$

H_1: $\mu < \mu_0$



H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$