Ejercicios Resueltos TP6

Índice

1. Ejercicio 3

Enunciado

Suponga un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto definido de la siguiente manera:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n$$

para n tomando los valores 0, 1, 2, ... (el tiempo discreto) y con $X_0 = 0$. Las variables aleatorias Z_n se suponen independientes, e igualmente distribuidas con recorrido $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con función de probabilidad $p_Z(z) = P(Z = z)$ tal que $p_Z(-2) = p_Z(2) = 0{,}1$, $p_Z(-1) = p_Z(1) = 0{,}25$ y $p_Z(0) = 0{,}3$.

a) Obtener la distribución de probabilidades de X_n para n tomando los valores 1, 2 y 3.

b) Calcular $E(X_n)$ y $V(X_n)$.

Resolución

1.1. Item a

La primer consigna nos induce a utilizar una herramienta muy útil para un análisis inicial de cualquier proceso estocástico: visualizar los primeros instantes de tiempo para detectar patrones en el comportamiento.

Tenemos como dato que $X_0 = 0$. En base a este valor inicial se desarrolla el proceso. A partir de ese momento, se tiene:

$$X_{n+1} = X_n + Z_n, \quad \forall n \geq 0$$

Es decir, si $n = 0$:

$$X_1 = \underbrace{X_0}_{0} + Z_0 \Rightarrow X_1 = Z_0$$

Por lo tanto, al ser iguales como variables aleatorias, ambas son discretas y la distribución de X_1 es idéntica a la distribución de Z_0, es decir:

- $R_{X_1} = R_{Z_0} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $p_{X_1}(-2) = p_{Z_0}(-2) = 0{,}1$
- $p_{X_1}(-1) = p_{Z_0}(-1) = 0{,}25$
- $p_{X_1}(0) = p_{Z_0}(0) = 0{,}3$
- $p_{X_1}(1) = p_{Z_0}(1) = 0{,}25$
- $p_{X_1}(2) = p_{Z_0}(2) = 0{,}1$

Continuando con la ecuación que nos define el proceso, podemos determinar cómo se comporta X_2:

$$X_2 = \underbrace{X_1}_{Z_0} + Z_1 \Rightarrow X_2 = Z_0 + Z_1$$

Es decir, podemos escribir a X_2 como la suma de Z_1 y Z_0. Por lo que su recorrido es:

$$R_{X_2} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Vale aclarar que como Z_1 y Z_0 son independientes, al cumplirse $Z_0 = X_1$, también son independientes Z_1 y X_1.
Calculamos estas probabilidades puntuales, utilizando probabilidad total y comenzando por $p_{X_2}(-4)$:

$$p_{X_2}(-4) = P(X_2 = -4) = P(Z_1 + X_1 = -4) = \sum_{i=-2}^{2} P(Z_1 + X_1 = -4, X_1 = i) = \sum_{i=-2}^{2} P(Z_1 = -4 - i, X_1 = i) \overset{\text{IND}}{=} \sum_{i=-2}^{2} P(Z_1 = -4 - i) P(X_1 = i)$$

Notemos que de esta última suma, $-4 - i < -2$ si $i \geq -1$. Es decir, $P(Z_1 = -4 - i) = 0$ si $i \geq -1$. Por lo tanto,

$$p_{X_2}(-4) = \sum_{i=-1}^{2} \underbrace{P(Z_1 = -4 - i)}_{0} P(X_1 = i) + \underbrace{P(Z_1 = -4 - (-2)) P(X_1 = -2)}_{i=-2} = P(Z_1 = -2) P(X_1 = -2) = 0{,}1^2 = 0{,}01$$

Notemos que en este cálculo, muchos términos se anulan y sólo uno de ellos es de importancia. Esto obedece a cierta intuición de que para que $Z_1 + X_1 = -4$, siguiendo sus recorridos se puede dar únicamente en el caso en que $Z_1 = X_1 = -2$. El teorema de probabilidad total nos asiste en el caso en que esta progresión de eventos no es tan trivial.

Equivalentemente, obviando las probabilidades nulas, podemos proceder con el resto de las probabilidades puntuales:

- $p_{X_2}(-3)$:

$$p_{X_2}(-3) = \sum_{i=-2}^{2} P(Z_1 = -3 - i)P(X_1 = i) = \underbrace{P(Z_1 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = -2)}_{0{,}1} + \underbrace{P(Z_1 = -2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = -1)}_{0{,}25} = 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$$

- $p_{X_2}(-2)$:

$$p_{X_2}(-2) = \underbrace{P(Z_1 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_1 = -2)}_{0{,}1} + \underbrace{P(Z_1 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = -1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = -2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = 0)}_{0{,}3} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}25^2 = 0{,}1225$$

- $p_{X_2}(-1)$:

$$p_{X_2}(-1) = \underbrace{P(Z_1 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = -2)}_{0{,}1} + \underbrace{P(Z_1 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_1 = -1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = 0)}_{0{,}3} + \underbrace{P(Z_1 = -2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = 1)}_{0{,}25} = 0{,}2$$

- Para calcular $p_{X_2}(0)$, usaremos la simetría respecto del cero de la distribución $p_Z = p_{Z_1} = p_{X_1}$:

$$p_{X_2}(0) = \sum_{i=-2}^{2} P(Z_1 = 0 - i)P(X_1 = i) = \sum_{i=-2}^{2} p_Z(-i) \cdot p_Z(i) = \sum_{i=-2}^{2} p_Z^2(i) = 0{,}235$$

- $p_{X_2}(1)$:

$$p_{X_2}(1) = \underbrace{P(Z_1 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = -1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = 0)}_{0{,}3} + \underbrace{P(Z_1 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_1 = 1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = 2)}_{0{,}1} = 0{,}2$$

- $p_{X_2}(2)$:

$$p_{X_2}(2) = \underbrace{P(Z_1 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = 0)}_{0{,}3} + \underbrace{P(Z_1 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = 1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_1 = 2)}_{0{,}1} = 0{,}1225$$

- $p_{X_2}(3)$:

$$p_{X_2}(3) = \underbrace{P(Z_1 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = 1)}_{0{,}25} + \underbrace{P(Z_1 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_1 = 2)}_{0{,}1} = 0{,}05$$

- $p_{X_2}(4)$:

$$p_{X_2}(4) = \underbrace{P(Z_1 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_1 = 2)}_{0{,}1} = 0{,}01$$

Notar que la distribución de X_2 también es simétrica respecto del cero. Es decir, $p_{X_2}(i) = p_{X_2}(-i)$ para todo i. Esto se debe a que se suman dos variables simétricas respecto del cero. Esto se puede generalizar a cualquier suma finita de variables simétricas. Por lo tanto, como:

$$X_3 = \underbrace{X_2}_{\text{simétrica}} + \underbrace{Z_2}_{\text{simétrica}}$$

podemos concluir que X_3 también será simétrica, y podemos reducir sus cálculos a los valores no negativos y en base a ellos, deducir la parte negativa. Más aún, podemos restringirnos únicamente a la parte positiva, por la siguiente propiedad:

$$P(X_3 < 0) + P(X_3 = 0) + P(X_3 > 0) = 1 \Rightarrow P(X_3 = 0) + 2 \cdot P(X_3 > 0) = 1 \Rightarrow P(X_3 = 0) = 1 - 2 \cdot P(X_3 > 0)$$

Como $X_3 = X_2 + Z_2$, el recorrido será

$$R_{X_3} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por el razonamiento anterior, podemos calcular únicamente $p_{X_3}(k)$ con $1 \leq k \leq 6$, haciendo probabilidad total con los valores de X_2:

- $p_{X_3}(6):$

$$p_{X_3}(6) = \sum_{i=-4}^{4} P(Z_2 = 6 - i)P(X_2 = i) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 4)}_{0{,}01} = 0{,}001 = p_{X_3}(-6)$$

- $p_{X_3}(5):$

$$p_{X_3}(5) = \sum_{i=-4}^{4} P(Z_2 = 5 - i)P(X_2 = i) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 3)}_{0{,}05} + \underbrace{P(Z_2 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 4)}_{0{,}01} = 0{,}0075 = p_{X_3}(-5)$$

- $p_{X_3}(4):$

$$p_{X_3}(4) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 2)}_{0{,}1225} + \underbrace{P(Z_2 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 3)}_{0{,}05} + \underbrace{P(Z_2 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_2 = 4)}_{0{,}01} = 0{,}02775 = p_{X_3}(-4)$$

- $p_{X_3}(3):$

$$p_{X_3}(3) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 1)}_{0{,}2} + \underbrace{P(Z_2 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 2)}_{0{,}1225} + \underbrace{P(Z_2 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_2 = 3)}_{0{,}05} + \underbrace{P(Z_2 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 4)}_{0{,}01} = 0{,}066625 = p_{X_3}(-3)$$

- $p_{X_3}(2):$

$$p_{X_3}(2) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 0)}_{0{,}235} + \underbrace{P(Z_2 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 1)}_{0{,}2} + \underbrace{P(Z_2 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_2 = 2)}_{0{,}1225} + \underbrace{P(Z_2 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 3)}_{0{,}05} + \underbrace{P(Z_2 = -2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 4)}_{0{,}01}$$

$$p_{X_3}(2) = 0{,}12375 = p_{X_3}(-2)$$

- $p_{X_3}(1):$

$$p_{X_3}(1) = \underbrace{P(Z_2 = 2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = -1)}_{0{,}2} + \underbrace{P(Z_2 = 1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 0)}_{0{,}235} + \underbrace{P(Z_2 = 0)}_{0{,}3}\underbrace{P(X_2 = 1)}_{0{,}2} + \underbrace{P(Z_2 = -1)}_{0{,}25}\underbrace{P(X_2 = 2)}_{0{,}1225} + \underbrace{P(Z_2 = -2)}_{0{,}1}\underbrace{P(X_2 = 3)}_{0{,}05}$$

$$p_{X_3}(1) = 0{,}174375 = p_{X_3}(-1)$$

Por otro lado:

$$P(X_3 = 0) = 1 - 2 \cdot P(X_3 > 0) = 1 - 2\sum_{i=1}^{6} P(X_3 = i) = 1 - 2(0{,}001 + 0{,}0075 + 0{,}02775 + 0{,}066625 + 0{,}12375 + 0{,}174375) = 0{,}198$$

Comentario: Que X_1 y Z_0 sean iguales como variables aleatorias, es más fuerte que el hecho de que tengan la misma distribución. $X_1 = Z_0$ implica que siempre que Z_0 tome un valor k, X_1 tomará también el valor k. Es decir, todos los eventos que involucren a X_1 son iguales a los eventos equivalentes de Z_0. Sin embargo, por ejemplo, X_1 tiene la misma distribución que Z_1, pero no son iguales como variables, lo que dice es que $P(Z_1 = k) = P(X_1 = k)$, a pesar de que Z_1 y X_1 pueden tomar distintos valores.

1.2. Item b

En el último ítem se pedían las distribuciones de X_n para los primeros instantes de tiempo. En este caso, nos piden menos datos sobre las distribuciones (valor esperado y varianza), pero para todos los instantes de tiempo.

Para realizar este análisis, como en muchos procesos estocásticos, es de mucha utilidad expresar el proceso como una suma de variables, que permita analizar lo que sucede en cada instante de tiempo.

Para expresar el proceso X_n como una suma, volvamos a algunas ecuaciones obtenidas en el ítem anterior:

$$\begin{aligned}
&X_0 = 0\\
&X_1 = X_0 + Z_0 \Rightarrow \underline{X_1 = Z_0}\\
&X_2 = X_1 + Z_1 \Rightarrow \underline{X_2 = Z_0 + Z_1}\\
&X_3 = X_2 + Z_2 \Rightarrow \underline{X_3 = Z_0 + Z_1 + Z_2}
\end{aligned}$$

Podemos inducir que cada variable del proceso $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede escribir en términos del proceso $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Más aún, hemos logrado expresarlo como suma de variables independientes, del siguiente modo:

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

El hecho de que sea una suma nos facilita el cálculo del valor esperado, justamente por la propiedad de linealidad:

$$E(X_n) = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} Z_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{E(Z_i)}_{0} = 0$$

Esto tiene sentido ya que habíamos deducido que las variables X_n debían ser simétricas respecto del cero. Aunque esto no lo confirma (habría que calcular el coeficiente de simetría), le da consistencia al resultado ya que si son simétricas respecto del cero, su valor esperado es nulo.

El hecho de que sean independientes nos simplifica el cálculo de la varianza, ya que la covarianza entre los pares de variables distintas da cero como resultado y se puede escribir la varianza de la suma como la suma de las varianzas:

$$V(X_n) = V\left(\sum_{i=0}^{n-1} Z_i\right) \overset{\text{IND}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} V(Z_i)$$

Como además las Z_i son ídenticamente distribuidas, la varianza coincide para todos los valores de $i \in \mathbb{N}_0$, es decir, podemos :

$$V(X_n) = \sum_{i=0}^{n-1} V(Z_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} V(Z_0)}_{n \text{ términos}} = n \cdot V(Z_0)$$

Por lo que sólo nos resta calcular $V(Z_0)$:

$$V(Z_0) = E(Z_0^2) - \underbrace{E(Z_0)}_{0}^2 = E(Z_0^2) = \sum_{i=-2}^{2} i^2 P(Z_0 = i) = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$$

Por lo tanto,

$$V(X_n) = 1{,}3 \cdot n$$

2. Ejercicio 17

Enunciado

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{a, b, c\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c)$

b) Calcular $P(X_{35} = a|X_{33} = a)$

c) Estimar $P(X_{200} = a|X_0 = b)$

Resolución

2.1. Item a

Por ser cadena de Markov, la probabilidad condicional depende únicamente del último tiempo del condicionante. Es decir,

$$P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c) = P(X_2 = a|X_1 = b)$$

Esta probabilidad se obtiene en la primer fila y segunda columna de la matriz de transición. Es decir,

$$P(X_2 = a|X_1 = b, X_0 = c) = P(X_2 = a|X_1 = b) = 1$$

2.2. Item b

Por ser cadena de Markov homogénea, las matrices de transición se mantienen constantes para todo instante de tiempo n. Por lo tanto, la probabilidad pedida describe todas las formas de mantenerse en el estado a luego de dos pasos.

Hay dos maneras de realizar este cálculo, una se basa en cáclulos de probabilidades básicos:

$$P(X_{35} = a|X_{33} = a) = \frac{P(X_{35} = a, X_{33} = a)}{P(X_{33} = a)}$$

Por el teorema de probabilidad total, podríamos considerar todos los estados por los que puede pasar en el instante $n = 34$ para reescribir el numerador:

$$P(X_{35} = a, X_{33} = a) = P(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a) + P(X_{35} = a, X_{34} = b, X_{33} = a) + P(X_{35} = a, X_{34} = c, X_{33} = a)$$

Cada uno de estos términos se puede reescribir del siguiente modo:

$$P(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a) = \underbrace{\frac{P(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a)}{P(X_{34} = a, X_{33} = a)}}_{P(X_{35}=a|X_{34}=a,X_{33}=a)} \cdot \underbrace{\frac{P(X_{34} = a, X_{33} = a)}{P(X_{33} = a)}}_{P(X_{34}=a|X_{33}=a)} \cdot P(X_{33} = a)$$

Como X_n es una cadena de Markov, en el primer factor se puede prescindir del último evento del condicionante. Es decir,

$$P(X_{35} = a, X_{34} = a, X_{33} = a) = P(X_{35} = a|X_{34} = a) \cdot P(X_{34} = a|X_{33} = a) \cdot P(X_{33} = a)$$

Del mismo modo,

- $P(X_{35}=a, X_{34}=b, X_{33}=a) = P(X_{35}=a|X_{34}=b)\cdot P(X_{34}=b|X_{33}=a)\cdot P(X_{33}=a)$
- $P(X_{35}=a, X_{34}=c, X_{33}=a) = P(X_{35}=a|X_{34}=c)\cdot P(X_{34}=c|X_{33}=a)\cdot P(X_{33}=a)$

Por lo tanto, como $P(X_{33}=a)$ es un factor común en el numerador y aparece en el denominador:

$$\begin{aligned}
P(X_{35}=a|X_{33}=a) &= \frac{P(X_{35}=a, X_{33}=a)}{P(X_{33}=a)} \\
&= \frac{P(X_{35}=a|X_{34}=a)\cdot P(X_{34}=a|X_{33}=a)\cdot P(X_{33}=a)}{P(X_{33}=a)}+ \\
&+ \frac{P(X_{35}=a|X_{34}=b)\cdot P(X_{34}=b|X_{33}=a)\cdot P(X_{33}=a)}{P(X_{33}=a)}+ \\
&+ \frac{P(X_{35}=a|X_{34}=c)\cdot P(X_{34}=c|X_{33}=a)\cdot P(X_{33}=a)}{P(X_{33}=a)} \\
&= P(X_{35}=a|X_{34}=a)\cdot P(X_{34}=a|X_{33}=a)+ \\
&+ P(X_{35}=a|X_{34}=b)\cdot P(X_{34}=b|X_{33}=a)+ \\
&+ P(X_{35}=a|X_{34}=c)\cdot P(X_{34}=c|X_{33}=a) \\
&= 0{,}3^2 + 0{,}4\cdot 1 + 0{,}3\cdot 0 = \underline{0{,}49}
\end{aligned}$$

Este desarrollo permite obtener lo intuitivo, que hay tres opciones para que el proceso se mantenga en a luego de dos pasos:

- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{a}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$
- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{b}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$
- $\underbrace{a}_{n=33} \to \underbrace{c}_{n=34} \to \underbrace{a}_{n=35}$

y la probabilidad pedida se obtiene sumando las probabilidades respectivas a estas tres opciones.

Otra manera más directa de resolverlo, es obteniendo la primer coordenada de la segunda potencia de la matriz de transiciones P:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow (P^2)_{11} = 0{,}3^2 + 0{,}4\cdot 1 + 0{,}3\cdot 0 = 0{,}49$$

Esta herramienta es mucho más eficiente y es la que se sugiere usar en momentos donde el tiempo apremia. Sin embargo, el anterior desarrollo permite entender porqué esta herramienta es válida y trae aparejadas conceptos claves de la materia.

Además, el procedimiento anterior sirve para cualquier proceso estocástico, las particularidades de que haya sido una cadena de Markov homogénea, nos simplificó las cuentas. Sin embargo, en el caso de tener un proceso más complejo, el cálculo de las probabilidades deberá adecuarse a dicha complejidad.

2.3. Item c

Pide estimar $P(X_{200}=a|X_0=b)$, y por suerte pide estimarlo, porque sino, deberíamos calcular la potencia P^{200} y buscar la coordenada de la segunda fila y primer columna.

Si la cadena tiene una distribución estacionaria, su primer componente estimará la probabilidad de estar en el estado a a largo plazo, para **cualquier distribución inicial** (en este caso, $X_0=b$).

Para determinar la distribución estacionaria, debe existir un límite para la matriz P^n a medida que n se hace grande. En caso de existir este límite, es una matriz con filas idénticas y la distribución estacionaria coincide con este vector fila.

En el caso de que la cadena sea regular, esta distribución estacionaria se puede calcular hallando un autovector a izquierda de la matriz de transiciones P de autovalor 1.

Para eso, primero debemos probar que la cadena es regular, es decir, que existe una potencia de P con todos sus valores positivos. Para lograr esto, conviene notar lo siguiente: Si $P^k > 0$, entonces $P^m > 0$ para todo $m \geq k$. Es decir, para hacer más eficiente la búsqueda de dicha potencia, podemos tratar de buscar potencias más altas más rápido. Para eso, podemos hallar primero $P^2 = P \times P$, una vez obtenido esta potencia, en vez de hallar P^3, podemos hallar $P^4 = P^2 \times P^2$, luego $P^8 = P^4 \times P^4$, y así sucesivamente hasta encontrar una potencia de la matriz P compuesta únicamente por valores positivos.

Primero calculemos P^2:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}21 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}21 & 0{,}49 \end{pmatrix}$$

Es decir, P^2 tiene todas sus coordenadas positivas, por lo que la cadena es regular y por lo tanto, tiene sentido calcular $\vec{\pi} = (a, b, c)$ su autovector (con autovalor 1) a izquierda. Como además, tiene que ser una distribución de probabilidad, sus componentes deben sumar 1:

$$\left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times P \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 0{,}3a + b \\ b = 0{,}4a + 0{,}3c \\ c = 0{,}3a + 0{,}7c \\ a+b+c=1 \end{array} \right\}$$

Como las primeras 3 ecuaciones son linealmente independientes, podemos prescindir de alguna de ellas:

$$\left\{ \begin{array}{c} a = 0{,}3a + b \\ b = 0{,}4a + 0{,}3c \\ \cancel{c = 0{,}3a + 0{,}7c} \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0{,}7a = b \\ b = 0{,}4a + 0{,}3c \\ a+b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \color{red}{0{,}7a = b} \\ \color{red}{0{,}7a} - 0{,}4a = 0{,}3c \\ a + \color{red}{0{,}7a} + c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0{,}7a = b \\ \color{blue}{a = c} \\ 1{,}7a + \color{blue}{a} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = \dfrac{7}{27} \\ c = \dfrac{10}{27} \\ a = \dfrac{10}{27} \end{array} \right\}$$

Es decir, la distribución estacionaria es $\vec{\pi} = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right)$. Sin embargo, esto no es lo pedido. Nos piden la probabilidad de estar a largo plazo <u>en el estado a</u>. Es decir,

$$P(X_{200} = a | X_0 = b) \approx \frac{10}{27}$$

Comentario: Que la distribución estacionaria sea $\pi = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right)$, nos permite deducir lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix}$$

Es decir, como la distribución inicial es $\vec{\pi}_0 = (0, 1, 0)$ y podemos suponer que P^{200} es una potencia suficientemente grande, podemos aproximar esa potencia por el límite:

$$\vec{\pi}_0 \times P^{200} \approx (0,1,0) \times \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix} = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right) \Rightarrow P(X_{200} = a | X_0 = b) \approx \frac{10}{27}$$

Este resultado no aporta nada nuevo a lo ya obtenido anteriormente. Sin embargo, permite ver que la probabilidad de estar en el estado a a largo plazo es independiente de la distribución inicial. Es decir, cualquier vector inicial $\vec{\pi}_0 = (p_a, p_b, p_c) \geq 0$ con $p_a + p_b + p_c = 1$, cumplirá lo mismo:

$$\vec{\pi}_0 \times P^{200} \approx (p_a, p_b, p_c) \times \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix} = \left((p_a + p_b + p_c)\frac{10}{27}, (p_a + p_b + p_c)\frac{7}{27}, (p_a + p_b + p_c)\frac{10}{27}\right) = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right)$$

$$\Rightarrow P(X_{200} = a | \vec{\pi}_0) \approx \frac{10}{27}$$

3. Ejercicio 22

Enunciado

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y matriz de transición de probabilidades dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Represente el diagrama de transición de estados de la cadena.

b) Por inspección del diagrama verifique que:

   1) el conjunto de estados tiene tres subconjuntos disjuntos (se denominan clases) que corresponden a estados comunicados entre ellos.
   2) Hay dos clases que son cerradas y recurrentes, una vez que uno de los estados de la clase cerrada es alcanzado entonces todos los estados subsiguientes de la cadena corresponden a esa clase.
   3) La clase restante es transiente, el proceso puede terminar saliendo de ella.
   4) Una de las clases cerradas es periódica de periodo 3, la otra no es periódica.

c) Usando solo el álgebra del cálculo de probabilidades y la suma de alguna serie numérica demuestre que si el proceso comienza en:

   1) el estado 0 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 6 es $\frac{1}{4}$
   2) el estado 1 entonces la probabilidad de alcanzar el estado 3 es 1.
   3) el estado 1 entonces el numero promedio de pasos hasta llegar al estado 3 es 3.
   4) el estado 1 entonces a largo plazo la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado 2 es $\frac{3}{8}$.

   Son datos

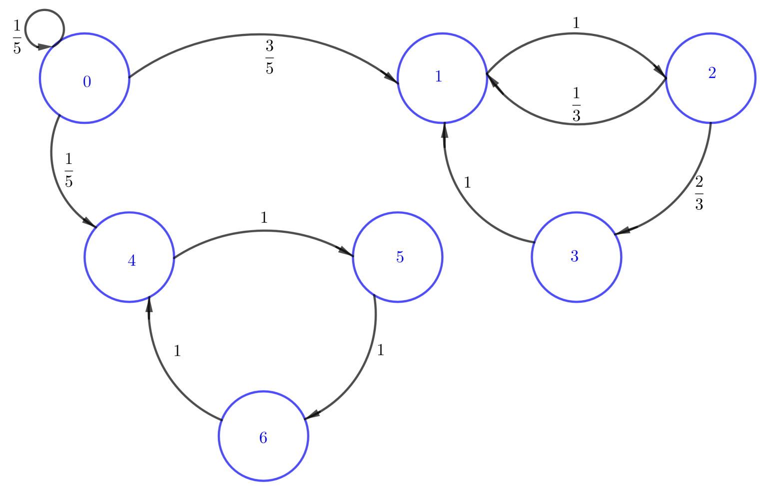
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad |q| < 1$$

Resolución

3.1. Item a

El diagrama de transición es el siguiente:



3.2. Item b1

Cuando se refiere a un conjunto de estados comunicados entre sí, hay que hacer hincapié en el hecho de que de cualquiera de los estados del conjunto, se pueda llegar con probabilidad positiva a otro estado del conjunto en un tiempo finito. Es decir, para dos estados $i \neq j$ del conjunto, tiene que existir un valor $k \in \mathbb{N}$ tal que $(P^k)_{ij} > 0$.

Por ejemplo, el conjunto $A = \{0, 1\}$ no es una clase, ya que $(P)_{01} = \frac{3}{5} > 0$, pero $(P^k)_{10} = 0$ para todo valor de $k \in \mathbb{N}$. Es decir, se puede acceder al estado 1 desde el estado 0, pero no se puede acceder al estado 0 desde el estado 1.

Por lo tanto, las tres clases son:

$$C_1 = \{0\}$$
$$C_2 = \{1, 2, 3\}$$
$$C_3 = \{4, 5, 6\}$$

Notemos que todos los estados de estas clases están comunicadas entre sí.

3.3. Item b2

Las clases cerradas y recurrentes son C_2 y C_3. Esto se debe a la ausencia de flechas que van de estados de C_2 al resto de los estados. Lo mismo ocurre con la clase C_3.

3.4. Item b3

La otra clase, C_1 es transiente ya que la probabilidad de salir de la clase es positiva. Más aún, esto puede ocurrir en un único paso, ya que $P_{01} = \frac{3}{5}$. Si bien calcular todos los casos en los que se sale de la clase C_1 puede resultar complicado, lo que podemos asegurar es que la probabilidad es mayor que $\frac{3}{5}$ y por lo tanto, positiva.

3.5. Item b4

Se puede ver que C_3 es la clase periódica, y además, de período 3. Esto se debe a lo siguiente, tomando un estado $i \in C_3$:

$$P(X_{n+m} = i|X_n = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 3 \cdot k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Por otro lado, C_2 no es periódica, ya que las probabilidades de volver a un mismo estado deben ser siempre 0 o 1 según el período. Sin embargo, por ejemplo:

$$P(X_{n+2} = 1|X_n = 1) = \frac{1}{3} \notin \{0, 1\}$$

3.6. Item c

Para todos estos ítems, siguiendo la otra guía de ejercicios resueltos de la guía 6, notaremos del siguiente modo una serie de probabilidades (para cada par de estados i, j) que nos será de utilidad:

$$q_{ij}(n) = P\left(X_n = j, \bigcap_{m=1}^{n-1} X_m \neq j|X_0 = i\right)$$

En resumidas cuentas, esta probabilidad corresponde al evento en el que se llega **por primera vez** al estado j desde el estado i en n pasos.

Vamos a poner un par de ejemplos:

- $q_{13}(4) = P(X_4 = 3, X_3 \neq 3, X_2 \neq 3, X_1 \neq 3|X_0 = 1)$. Notemos que hay sólo una forma de que esto suceda:

$$X_0 = 1 \to X_1 = 2 \to X_2 = 1 \to X_3 = 2 \to X_4 = 3$$

  Es decir,

$$q_{13}(4) = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} \cdot p_{23} = \frac{2}{9}$$

  Comentario: Esta multiplicación también se puede obtener de un modo más deductivo:

$$q_{13}(4) = P(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2|X_0 = 1) = \frac{P(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)}$$

  Multiplicando y dividiendo por los términos adecuados, podemos transformarlo en una multiplicación de condicionales:

$$\frac{P(X_4 = 3, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \cdot \frac{P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)} \cdot \frac{P(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_3 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)} \cdot \frac{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$$

$$P(X_4 = 3|X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1) \cdot P(X_3 = 2|X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 1|X_1 = 2, X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 2|X_0 = 1)$$

  Por ser un proceso de Markov, las probabilidades se pueden basar únicamente en el último evento. Es decir:

$$q_{13}(4) = P(X_4 = 3|X_3 = 2) \cdot P(X_3 = 2|X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1|X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2|X_0 = 1) = p_{23} \cdot p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} = \frac{2}{9}$$

- $q_{03}(2) = P(X_2 = 3, X_1 \neq 3|X_0 = 0)$. Notemos que esto no puede suceder, ya que el camino más rápido entre los estados 0 y 3 es:

$$X_0 = 0 \to X_1 = 1 \to X_2 = 2 \to X_3 = 3$$

  Por lo tanto, no se puede llegar en 2 pasos del estado 0 al 3, decimos que $q_{03}(2) = 0$.

- $q_{45}(4) = P(X_4 = 5, X_3 \neq 5, X_2 \neq 5, X_1 \neq 5 | X_0 = 4)$. En este caso, hay un camino que llega del 4 al 5 en 4 pasos:
$$X_0 = 4 \to X_1 = 5 \to X_2 = 6 \to X_3 = 4 \to X_4 = 5$$
Sin embargo, no cumple la condición de que sea la **primera vez** que llega al estado 5 desde el estado 4. De este modo, $q_{45}(4) = 0$, pero, como se llega en un paso del 4 al 5, $q_{45}(1) = p_{45} = 1$.

- Por último, analicemos $q_{06}(6)$. Hay dos caminos para llegar del 0 al 6 en 6 pasos:
$$\begin{array}{c} X_0 = 0 \to X_1 = 4 \to X_2 = 5 \to X_3 = 6 \to X_4 = 4 \to X_5 = 5 \to X_6 = 6 \\ X_0 = 0 \to X_1 = 0 \to X_2 = 0 \to X_3 = 0 \to X_4 = 4 \to X_5 = 5 \to X_6 = 6 \end{array}$$
Sin embargo, notemos que el primer camino se llega en 6 pasos, pero no por primera vez. Por lo tanto, el evento sólo se corresponde con el segundo camino:
$$\begin{aligned} q_{06}(6) &= P(X_6 = 6, X_5 \neq 6, X_4 \neq 6, X_3 \neq 6, X_2 \neq 6, X_1 \neq 6 | X_0 = 0) \\ &= P(X_6 = 6, X_5 = 5, X_4 = 4, X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0) \\ &= p_{00}^3 \cdot p_{04} \cdot p_{45} \cdot p_{46} = \frac{1}{625} \end{aligned}$$

Cuando no especificamos el número de pasos, nos referimos a la probabilidad de llegar en algún momento desde el estado i al estado j:
$$q_{ij} = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k = j \middle| X_0 = i\right)$$

Esta unión no es disjunta, y aquí se ve la utilidad de la definición de $q_{ij}(n)$. Considerar los eventos en los que se llega **por primera vez** en n pasos, hace que los eventos sean mutuamente excluyentes y permite transformar esta probabilidad en una suma:
$$q_{ij} = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = j \middle| X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{ij}(n)$$

3.7. Item c1

Con las definiciones anteriores, nos piden
$$q_{06} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{06}(n)$$

Notemos que el proceso no puede llegar al 6 desde el 0 en menos de 3 pasos, por lo que $q_{06}(1) = q_{06}(2) = 0$:
$$q_{06} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{06}(n) = \underbrace{q_{06}(1)}_{0} + \underbrace{q_{06}(2)}_{0} + \sum_{n=3}^{+\infty} q_{06}(n) = \sum_{n=3}^{+\infty} q_{06}(n)$$

Además, el proceso no puede llegar del 0 al 6 sin pasar por el 4, entonces, la primera vez que pase por el 6 está vinculada con la primera vez que llegue al 4. Más aún, por la dinámica del proceso, pasa exactamente 2 pasos antes por el 4. Es decir:
$$q_{06}(n) = q_{04}(n-2) \cdot \underbrace{p_{45}}_{1} \underbrace{p_{56}}_{1} \Rightarrow q_{06} = \sum_{n=3}^{+\infty} q_{04}(n-2) \overset{k=n-2}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} q_{04}(k)$$

Analicemos $q_{04}(k)$. Sería la probabilidad de que el proceso llegue por primera vez del 0 al 4 en k pasos. Esto sólo se puede dar si los $k-1$ pasos anteriores se mantuvo en el estado 0 y luego pasó al estado 4. Es decir,

$$q_{04}(k) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{04} = \frac{1}{5}^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}^{k} \Rightarrow q_{06} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k}$$

Notemos que resultó una serie que no es exactamente la dada como dato, ya que esa serie comienza desde cero. Por lo tanto, sumaremos y restaremos el término pertinente:

$$q_{06} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k}\right) + \frac{1}{5}^{0} - \frac{1}{5}^{0} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5}^{k}\right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 = \frac{1}{4}$$

De este modo, obtuvimos lo pedido.

3.8. Item c2

Ahora nos piden la probabilidad dada por q_{13}:

$$q_{13} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{13}(n)$$

Nos sería de mucha utilidad ir viendo que sucede con los primeros valores de n para ver si logramos obtener un patrón.

- $n = 1$: notemos que no se puede llegar del estado 1 al estado 3 en 1 paso por lo que $q_{13}(1) = 0$
- $n = 2$: esto se puede dar si se cumple la siguiente progresión: $1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(2) = \frac{2}{3}$
- $n = 3$: notemos que no se puede llegar del estado 1 al estado 3 en 3 pasos, ya que debe ciclar entre el estado 1 y 2 para no llegar en 2 pasos, por lo que $q_{13}(3) = 0$
- $n = 4$: esto se puede dar si se cumple la siguiente progresión: $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(4) = \frac{2}{9}$
- $n = 5$: nuevamente, para evitar llegar antes al 3, debe ciclar entre 1 y 2, por lo que $q_{13}(5) = 0$
- $n = 6$: esto se puede dar si se cumplen dos ciclos entre 1 y 2, es decir: $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$. Entonces, $q_{13}(6) = \frac{2}{27}$

Así, vamos viendo que los términos impares son nulos y sólo sobreviven los pares $n = 2k$. Por lo tanto,

$$q_{13} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_{13}(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_{13}(2k) \overset{h=k-1}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} q_{13}(2h+2)$$

Además, podemos ir viendo que para llegar por primera vez al 3 en $2h+2$ pasos, tienen que haberse dado antes h ciclos entre los estados 1 y 2, luego pasar del 2 al 3. Cada ciclo tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$, por lo tanto:

$$q_{13} = \sum_{h=0}^{+\infty} q_{13}(2h+2) = \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{h} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

3.9. Item c3

Ahora debemos definir una variable aleatoria, que es la siguiente:

$$T_{13} = \text{Cantidad de transiciones hasta llegar por primera vez al estado 3, comenzando desde el estado 1}$$

Notar que el enunciado pide el valor esperado de T_{13}. T_{13} es una variable discreta, y podemos deducir a partir de su definición, que $P(T_{13} = n) = q_{13}(n)$, ya que $q_{13}(n)$ representa la probabilidad de llegar del estado 1 por primera vez al estado 3 en n pasos. Es decir,

$$E(T_{13}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(T_{13} = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot q_{13}(n)$$

La ventaja es que descubrimos un patrón para $q_{13}(n)$ en el ítem anterior. Habíamos visto que se anula para los impares y que para los pares, vale $q_{13}(2k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$. Por lo tanto,

$$E(T_{13}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot q_{13}(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

3.10. Item c4

Por último, acá nos piden analizar una probabilidad específica, no es que en algún momento llegue del estado 1 al estado 2, porque eso es claramente 1. Justamente, llega del estado 1 al 2 en un paso ya que $p_{12} = 1$.

Aquí hay que estudiar el comportamiento de la siguiente probabilidad:

$$P(X_n = 2|X_0 = 1), \quad n \to +\infty$$

Contar todas las posibles combinaciones a medida que n se hace muy grande puede ser muy dificultoso, justamente porque se ven dos alternativas, ciclos del tipo $1 \to 2 \to 1$, o el ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Pero además, estos ciclos pueden darse de varias formas distintas y en distintos momentos para un n grande. El cálculo se hace inmanejable.

Por lo tanto, vamos a recurrir a otra alternativa. La cadena X_n no es regular (ya que $(P^k)_{10} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$). Sin embargo, una vez en la clase $C_2 = \{1, 2, 3\}$, la cadena se mantiene dentro de la clase (justamente vimos que es cerrada). Entonces podemos considerar una nueva cadena de Markov Y_n con estos 3 estados y las mismas probabilidades de transición y tendrá la misma dinámica.

Por lo tanto, consideramos Y_n con espacio de estados $E_Y = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición dada por:

$$P_Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si esta cadena es regular, tendremos una distribución estacionaria, lo que nos permite calcular:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2|X_0 = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n = 2|Y_0 = 1)$$

Veamos si Y_n es regular:

$$P_Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_Y^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Por último:

$$P_Y^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{81} & \frac{2}{9} & \frac{26}{81} \\ \frac{32}{81} & \frac{37}{81} & \frac{4}{27} \\ \frac{2}{9} & \frac{13}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix} > 0$$

Por lo tanto, la cadena es regular y tiene una distribución estacionaria, que coincide con el autovector a izquierda de P_Y de autovalor 1:

$$\left\{\begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times P_Y \\ a+b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (a,b,c) = (a,b,c) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a+b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \cancel{a = \frac{b}{3} + c} \\ b = a \\ c = \frac{2b}{3} \\ a+b+c=1 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto,

$$\left\{\begin{array}{c} \color{red}{b = a} \\ \color{blue}{c = \frac{2b}{3}} \\ \color{red}{b} + b + \color{blue}{\frac{2b}{3}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \dfrac{3}{8} \\ \\ b = \dfrac{3}{8} \\ \\ c = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que, comenzando en el estado 1, el proceso (sea X_n o Y_n) esté en el estado 2 a largo plazo es $b = \frac{3}{8}$

4. Ejercicio 25

Enunciado

Cada materia que cursa un alumno en una universidad tiene tres oportunidades para dar el examen final. Suponga que la probabilidad de aprobar el examen final es siempre p. Sea X_n la variable aleatoria que da el número de oportunidades que tiene el alumno en el período n. El recorrido de X_n es el conjunto $\{0,1,2,3\}$ siendo el valor cero el estado que se alcanza cuando se aprueba el examen final (claramente un estado absorbente). El estado 3 corresponde al que se tiene una vez aprobada la cursada. Cuando no se aprueba en la última de las instancias se produce una transición del estado 1 al 3 (la materia se recursa).

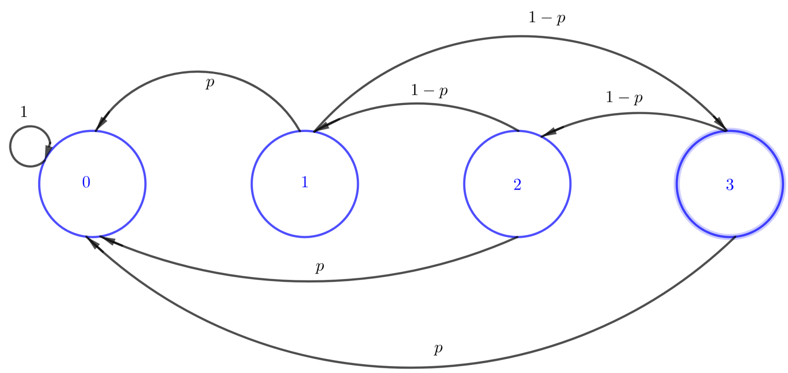
a) Modelar la evolución de este proceso como una cadena de Markov obteniendo la matriz de probabilidades de transición de un paso.

b) Suponga que el estado inicial es el 3. En este caso la distribución de probabilidades es (0,0,0,1). Obtener la distribución de probabilidades para los primeros tres períodos y conjeturar sobre su forma para todo n. Analizar su valor límite.

Resolución

4.1. Item a

El diagrama de transición de la cadena viene dada por:



Por lo tanto, la matriz de transiciones es la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Item b

Nos dicen que $X_0 = 3$, es decir:

$$\vec{\pi}_0 = (0,0,0,1)$$

Nos piden determinar $\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_3$ para determinar si hay algún patrón.

$$\vec{\pi}_1 = \vec{\pi}_0 \times P = (0,0,0,1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} = (p, 0, 1-p, 0)$$

$$\vec{\pi}_2 = \vec{\pi}_1 \times P = (p,0,1-p,0) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} = (2p - p^2, (1-p)^2, 0, 0)$$

$$\vec{\pi}_3 = \vec{\pi}_2 \times P = (2p - p^2, (1-p)^2, 0, 0) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} = (p^3 - 3p^2 + 3p, 0, 0, (1-p)^3)$$

No parece haber un patrón muy claro en la primer coordenada. Sin embargo, el patrón es claro en los estados 1, 2, 3. En cada intento, la probabilidad de no aprobar la materia (estado 0) es haber reprobado todas las instancias anteriores.

Es decir, en el instante n, la probabilidad de no estar en el estado 0 es $(1-p)^n$. Por lo tanto, la probabilidad de estar en el estado 0 es $1-(1-p)^n$. En efecto:

- $n = 0 : 1 - (1-p)^0 = 0$
- $n = 1 : 1 - (1-p)^1 = p$
- $n = 2 : 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$
- $n = 3 : 1 - (1-p)^3 = 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) = p^3 - 3p^2 + 3p$

Es decir, lo único que se altera es la cantidad de oportunidades, que se repite periódicamente cada 3 oportunidades. Por lo que dependerá del resto de dividir por 3 y podemos inferir el siguiente patrón:

$$\vec{\pi}_n = \begin{cases} (1-(1-p)^n, 0, 0, (1-p)^n) & \text{si } n = 3k \\ (1-(1-p)^n, 0, (1-p)^n, 0) & \text{si } n = 3k+1 \\ (1-(1-p)^n, (1-p)^n, 0, 0) & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

Por lo tanto, para analizar el valor límite, como $(1-p)^n$ tiende a cero cuando $n \to +\infty$, todas las componentes correspondientes a los estados 1,2,3 tienden a cero. Del mismo modo, la primer coordenada tenderá a 1. Es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} \vec{\pi}_n = (1, 0, 0, 0)$$

Es decir, probabilísticamente, un alumno termina aprobando la materia, por lo que este ejercicio tiene el condimento especial de sembrar optimismo en nuestros alumnos.