Problema 2 Guía 2.

Suponga que la demanda diaria de un artículo es una variable aleatoria D con recorrido $R(D) = \{1, 2, 3, 4\}$ y función de probabilidad $P\big(r\big) = C\, 2^r/r!$. Calcule la constante C y calcule el valor esperado de D.

Respuesta:

Variable aleatoria discreta.

Se dice que una variable aleatoria X es discreta si toma valores en un conjunto enumerable denominado *recorrido* y denotado como $\mathcal{R}_X$. El comportamiento de una variable aleatoria discreta (v.a.d.) está determinado por su *distribución de probabilidad* o *función de masa de probabilidad* p_x definida como

$$p_x = P\big(X = x\big) \qquad \forall x \in \mathcal{R}_X. \tag{1}$$

La distribución de probabilidad cumple con la condición

$$\sum_{x \in \mathcal{R}_X} p_x = 1. \tag{2}$$

Otra forma de equivalente de definir el comportamiento de una v.a.d. es a través de la *función de distribución de probabilidad acumulada* definida como

$$F_X(x) = \sum_{\{y \in \mathcal{R}_X : \, y \leq x\}} p_y \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Es fácil mostrar que F_X cumple siempre las siguientes condiciones:

- Es monótona no decreciente (porque $p_x \geq 0 \; \forall x \in \mathcal{R}_X$).
- $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$
- $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$

Aún otra forma de describir una v.a.d. es a través de sus momentos, definidos como

$$E\left[X^k\right] = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x^k p_x \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Dos parámetros importantes de toda v.a.d. son su *valor esperado* o *media* y su *varianza* dados por

$$\mu_X = E\left[X\right] = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x p_x, \tag{5}$$

$$\sigma_X^2 = V\left[X\right] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2, \tag{6}$$

respectivamente.

La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta cumple la condición que la suma de sus valores para todo el recorrido debe ser 1. Si se plantea esa condición para esta variable entonces resulta:

$$C\left(2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}\right) = 1. \tag{7}$$

Resolviendo para C resulta $C = \frac{1}{6}$. Con ese valor de C se pueden obtener las probabilidades correspondientes a los 4 valores posibles de D. Se resume la información de la distribución de probabilidades en la siguiente tabla:

Demanda	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

El valor esperado de D es:

$$E\left[D\right] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = \frac{19}{9}. \tag{8}$$

La varianza de D es:

$$V\left[D\right] = E\left[D^2\right] - \left(E\left[D\right]\right)^2 = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} - (\frac{19}{9})^2 = \frac{80}{81}. \tag{9}$$

Problema 11 Guía 2.

Un vendedor de diarios compra cada periódico a 40 centavos y lo vende a 1 peso y no puede devolver los diarios que no vendió. La demanda diaria es independiente de la del día anterior y tiene la siguiente distribución de probabilidades :

cantidad demandada	63	64	65	66	67	68	69	70
probabilidad	0.01	0.04	0.06	0.08	0.15	0.28	0.22	0.16

¿Cuántos diarios debe adquirir diariamente si desea maximizar la ganancia esperada? (Tenga en cuenta que la insatisfacción de la demanda no está penalizada.)

Respuesta:

Teoría de la decisión

Una aplicación importante de la matemática es en teoría de la decisión, esto es, el estudio del comportamiento de un agente (un individuo, por ej.) frente a eventos inciertos. ¿Qué decisión tomar? ¿Cuál es la más conveniente? ¿Cómo se encuentra un camino óptimo a seguir? Estas son algunas de las preguntas contestadas por la teoría de la decisión.
Determinar la decisión óptima depende del problema, el acercamiento personal al mismo, etc. Un criterio muy común es el de maximización del valor esperado: se toma aquella decisión que maximiza el valor esperado de la ganancia o retorno.

Vamos a resolver este problema de dos maneras distintas, aunque completamente equivalentes.

Forma 1:

Llamemos

$$G_k = \text{Ganancia cuando el vendedor compra } k \text{ diarios } (k \geq 0). \tag{10}$$

Observe que estamos definiendo una variable aleatoria distinta para cada elección de la cantidad de diarios comprados. Esto implica que, para calcular el valor esperado de cada G_k, debemos determinar su recorrido y su distribución de probabilidades. Las Tablas 1-5 muestran los resultados, incluyendo el cálculo del valor esperado. De estas tablas se desprende que el vendedor debe comprar 68 diarios si desea maximizar la ganancia esperada.

Tabla 1: Ganancia G_{70}, G_{69}

G_{70}

x	p_x	$x \cdot p_x$
35.0	0.01	0.350
36.0	0.04	1.440
37.0	0.06	2.220
38.0	0.08	3.040
39.0	0.15	5.850
40.0	0.28	11.200
41.0	0.22	9.020
42.0	0.16	6.720
SUMA	1.00	39.840

G_{69}

x	p_x	$x \cdot p_x$
35.4	0.01	0.354
36.4	0.04	1.456
37.4	0.06	2.244
38.4	0.08	3.072
39.4	0.15	5.910
40.4	0.28	11.312
41.4	0.38	15.732
SUMA	1.00	40.080

Tabla 2: Ganancia G_{68}, G_{67}

G_{68}

x	p_x	$x \cdot p_x$
35.8	0.01	0.358
36.8	0.04	1.472
37.8	0.06	2.268
38.8	0.08	3.104
39.8	0.15	5.970
40.8	0.66	26.928
SUMA $= E[G_{68}]$		40.100

G_{67}

x	p_x	$x \cdot p_x$
36.2	0.01	0.362
37.2	0.04	1.488
38.2	0.06	2.292
39.2	0.08	3.136
40.2	0.81	32.562
SUMA	1.00	39.840

Tabla 3: Ganancia G_{66}, G_{65}

G_{66}

x	p_x	$x \cdot p_x$
36.6	0.01	0.366
37.6	0.04	1.504
38.6	0.06	2.316
39.6	0.89	35.244
SUMA	1.00	39.430

G_{65}

x	p_x	$x \cdot p_x$
37.0	0.01	0.370
38.0	0.04	1.520
39.0	0.95	37.050
SUMA	1.00	38.94

Tabla 4: Ganancia G_{64}, G_{63}

G_{64}

x	p_x	$x \cdot p_x$
37.4	0.01	0.374
38.4	0.99	38.016
SUMA	1.00	38.390

G_{63}

x	p_x	$x \cdot p_x$
37.80	1.00	37.80
SUMA	1.00	37.80

Tabla 5: Ganancia G_k cuando $k > 70$ o $k < 63$

G_k con $k > 70$

x	p_x	$x \cdot p_x$
$63 - 0.4k$	0.01	$0.630 - 0.004k$
$64 - 0.4k$	0.04	$2.560 - 0.016k$
$65 - 0.4k$	0.06	$3.900 - 0.024k$
$66 - 0.4k$	0.08	$5.280 - 0.032k$
$67 - 0.4k$	0.15	$10.050 - 0.060k$
$68 - 0.4k$	0.28	$19.040 - 0.112k$
$69 - 0.4k$	0.22	$15.180 - 0.088k$
$70 - 0.4k$	0.16	$11.200 - 0.064k$
SUMA	1.00	$67.840 - 0.400k \leq 39.44$

G_k con $k < 63$

x	p_x	$x \cdot p_x$
$0.6k$	1.00	$0.6k$
SUMA	$0.6k$	$0.6k \leq 37.2$

Forma 2:

En este caso, utilizaremos conocimientos que se corresponden con la guía 3, más específicamente, sobre funciones de variables aleatorias. Nuevamente llamemos

$$X = \text{Número de diarios demandados,} \quad (11)$$
$$G_k = \text{Ganancia cuando el vendedor compra } k \text{ diarios } (k \geq 0). \quad (12)$$

El recorrido $\mathcal{R}_X$ y la distribución de probabilidades de X están dados en la tabla del enunciado. G_k es una variable aleatoria cuyo valor depende de X. Es fácil ver que

$$G_k(X) = \begin{cases} 1 \cdot X - 0.40 \cdot k & \text{si } X < k, \\ 1 \cdot k - 0.40 \cdot k & \text{si } X \geq k. \end{cases} \quad (13)$$

Podemos encontrar, entonces, el valor esperado de la ganancia

$$E\left[G_k\right] = \sum_{i \in \mathcal{R}_X} G_k(i) P\big(X = i\big). \quad (14)$$

La Tabla 6 muestra los resultados en el caso de utilizar esta expresión para el cálculo del valor esperado de la ganancia. Como se desprende de dicha tabla, el vendedor debe comprar 68 diarios si desea maximizar el la ganancia esperada.

Tabla 6: Ganancia por la venta de diarios como función de la demanda

Prob.	0.01	0.04	0.06	0.08	0.15	0.28	0.22	0.16	
V.A.	**Recorrido**								$E[\cdot]$
X	63	64	65	66	67	68	69	70	67.84
G_k $k < 63$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$	$0.6k$ $\leq$ 37.20
G_{63}	37.8	37.8	37.8	37.8	37.8	37.8	37.8	37.8	37.80
G_{64}	37.4	38.4	38.4	38.4	38.4	38.4	38.4	38.4	38.39
G_{65}	37.0	38.0	39.0	39.0	39.0	39.0	39.0	39.0	38.94
G_{66}	36.6	37.6	38.6	39.6	39.6	39.6	39.6	39.6	39.43
G_{67}	36.2	37.2	38.2	39.2	40.2	40.2	40.2	40.2	39.84
G_{68}	35.8	36.8	37.8	38.8	39.8	40.8	40.8	40.8	40.10
G_{69}	35.4	36.4	37.4	38.4	39.4	40.4	41.4	41.4	40.08
G_{70}	35.0	36.0	37.0	38.0	39.0	40.0	41.0	42.0	39.84
G_k $k > 70$	63 $-$ $0.4k$	64 $-$ $0.4k$	65 $-$ $0.4k$	66 $-$ $0.4k$	67 $-$ $0.4k$	68 $-$ $0.4k$	69 $-$ $0.4k$	70 $-$ $0.4k$	$67.84 - 0.4k$ $\leq$ 39.44