Proceso de Markov

Se dice que un proceso estocástico es un **proceso de Markov** sii para todo toda secuencia y todo

Es decir, sólo importa el valor más “reciente”.

Hechos:

- La caminata aleatoria es un proceso de Markov.
- Asumir que se trata de un proceso de Markov simplifica mucho las cosas.

Cadena de Markov

Habitualmente, se llama **cadena de Markov** a un proceso de Markov que tiene un espacio de parámetro discreto: **T**.

En nuestro caso, consideraremos también un espacio de estados discreto: .

Hecho:

- La caminata aleatoria es una cadena de Markov.

Cadena de Markov

Una cadena de Markov queda completamente descripta por:

1. La distribución de probabilidades del estado inicial

$$p_j(0) = P(X(0) = e_j) \qquad \sum_j p_j(0) = 1$$

2. Las probabilidades de transición entre cada par de estados

$$p_{ij}(n) = P(X(n+1) = e_j \vee X(n) = e_i)$$

$$\sum_j p_{ij}(n) = 1$$

Cadena de Markov

Vector de probabilidades:

$$\vec{p}(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) & p_2(n) & \cdots \end{pmatrix}$$

Suma 1.

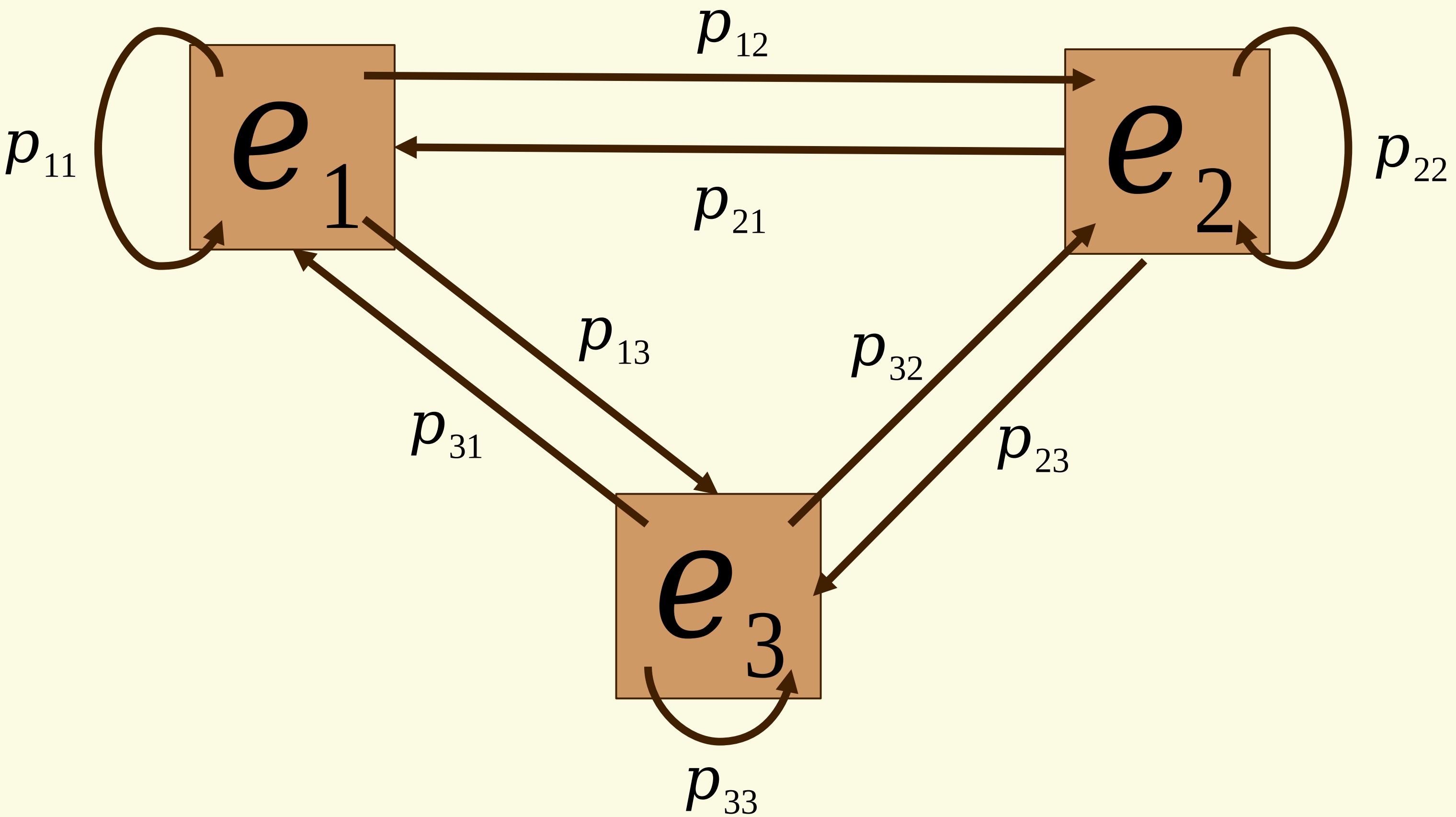
Matriz de probabilidades de transición de un solo paso:

$$\mathbb{P}(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Las filas suman 1.

Cadena de Markov

Diagrama de estados



Cadena de Markov

Ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p_j(n+1) = p_1(n)\,p_{1j}(n) + p_2(n)\,p_{2j}(n) + p_3(n)\,p_{3j}(n) + \ldots$$

$$p_j(n+1) = \sum_i p_i(n)\,p_{ij}(n)$$

Forma matricial:

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n)\,\mathbb{P}(n)$$

Cadena de Markov

Cadenas homogéneas: las probabilidades de transición **no** dependen del tiempo

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(k)$$

Chapman-Kolmogorov:

Matriz de probabilidades de transición de k pasos:

Cadena de Markov

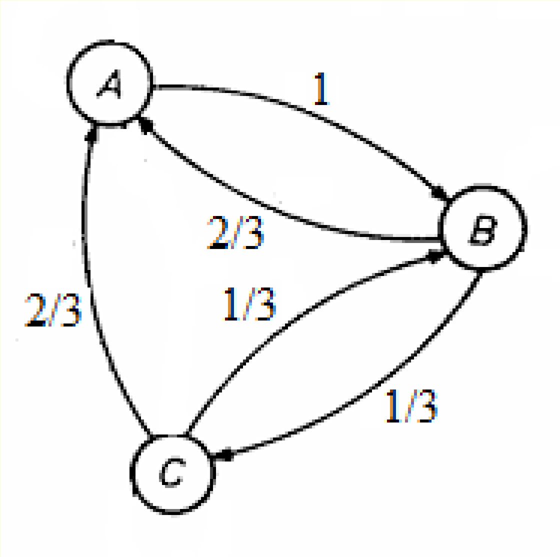
El vendedor viajero

La región de ventas de un vendedor la componen tres ciudades A, B y C. Nunca vende en la misma ciudad en días seguidos. Si vende en la ciudad A, entonces al día siguiente vende en la ciudad B. Sin embargo, si vende en una de las dos ciudades B o C, entonces al día siguiente la probabilidad de vender en A es el doble de la de vender en la restante.

Cadena de Markov

El vendedor viajero

Diagrama de transición



Matriz de probabilidades de transición

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cadena de Markov

Probabilidad a largo plazo o distribución estacionaria:

$$\vec{\pi} = \lim_{n \to \infty} \vec{p}(n)$$

No siempre existe, pero, si existe, se corresponde con un autovector a izquierda correspondiente al autovalor 1 de :

$$\vec{\pi} = \lim_{n \to \infty} \vec{p}(n) = \text{¿} \lim_{n \to \infty} \vec{p}(n+1) = \text{¿} \lim_{n \to \infty} \vec{p}(n)\,\mathbb{P} = \left[\lim_{n \to \infty} \vec{p}(n)\right]\mathbb{P}\,\text{¿¿}$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\mathbb{P}$$

No toda distribución que satisface esta ecuación es una distribución estacionaria.

Cadena de Markov

Condición suficiente para la existencia de una distribución estacionaria:

Si una cadena de Markov finita es regular, esto es, existe tal tiene todos sus elementos positivos (> 0), entonces existe una distribución de probabilidad esacionaria

Cadena de Markov

El vendedor viajero

La cadena es regular, en 4 pasos todos los estados están conectados. Existe una distribución estacionaria de probabilidades independiente de la distribución inicial de probabilidades de estados.

$$\mathbb{P}^4 = \begin{pmatrix} 42/81 & 18/81 & 21/81 \\ 26/81 & 49/81 & 6/81 \\ 26/81 & 48/81 & 7/81 \end{pmatrix}$$

Cadena de Markov

El vendedor viajero

$$\mathbb{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.41040 & 0.42920 & 0.16039 \\ 0.39306 & 0.46387 & 0.14307 \\ 0.39306 & 0.46385 & 0.14308 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^{100} = \begin{pmatrix} 0.40000 & 0.45000 & 0.15000 \\ 0.40000 & 0.45000 & 0.15000 \\ 0.40000 & 0.45000 & 0.15000 \end{pmatrix}$$

Cadena de Markov

El vendedor viajero

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\mathbb{P}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \\ b &= a + \frac{1}{3}c \\ c &= \frac{1}{3}b \end{aligned}\right\} \text{No son l.i.}$$

Cadena de Markov

El vendedor viajero

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\mathbb{P}$$

$$(a \quad b \quad c) = (a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \\ 1 &= a + b + c \\ c &= \frac{1}{3}b \end{aligned}\right\}$$

Agregamos una ecuación

Cadena de Markov

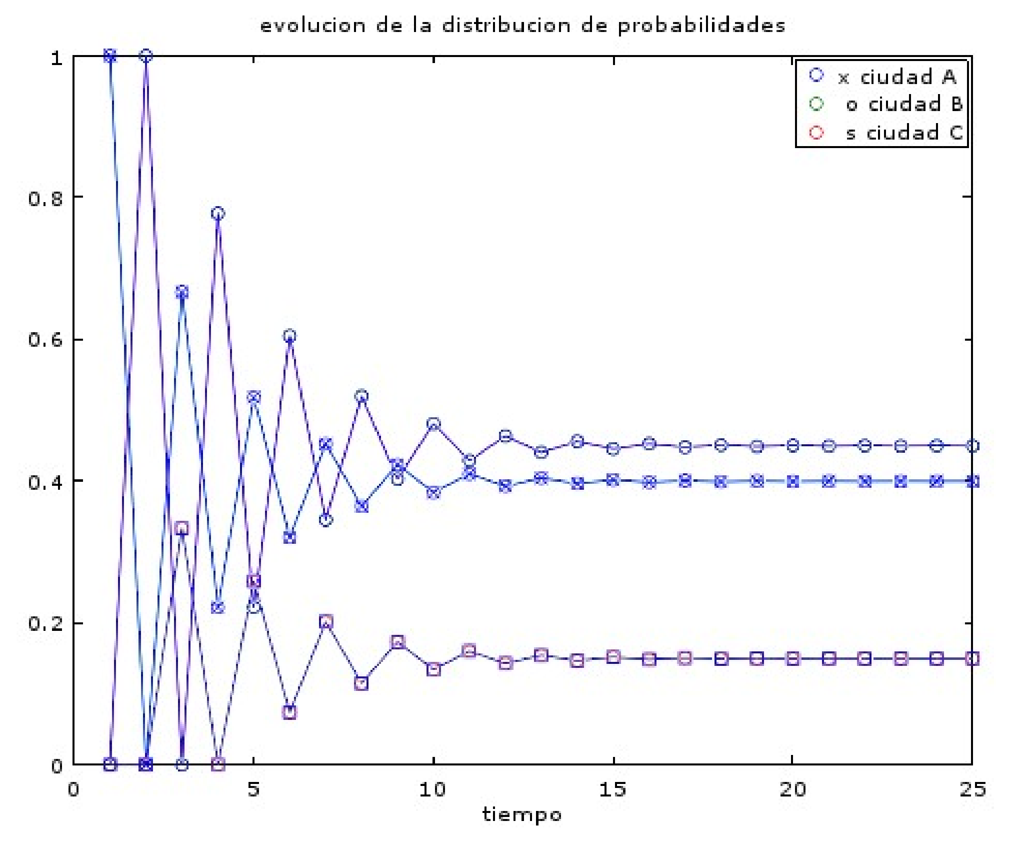
El vendedor viajero

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\, \mathbb{P}$$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.45 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Cadena de Markov

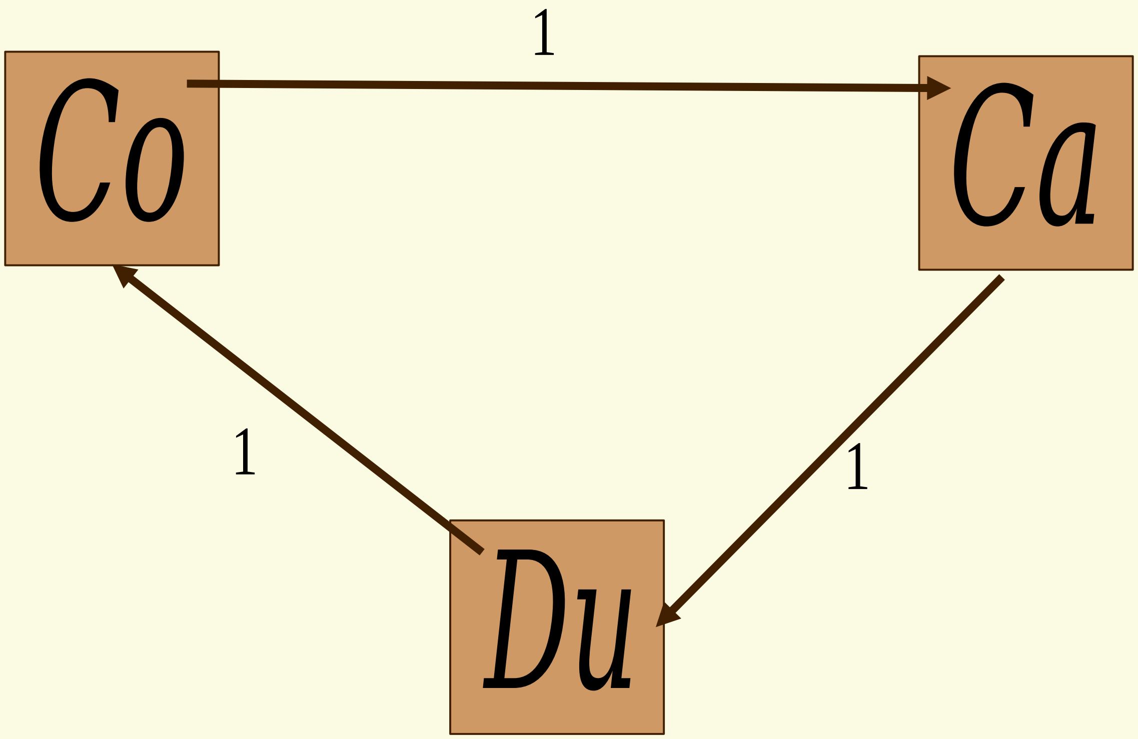


Aquí se muestra la evolución temporal de la distribución de probabilidades de estados en función del tiempo. Se supuso que inicialmente el vendedor estaba en la ciudad A.

Cadena de Markov

El bebé

Un modelo muy simple de un infante tiene tres estados: 1 – Come; 2 – Hace sus necesidades; 3 – Duerme



Cadena de Markov

El bebé

Un modelo muy simple de un infante tiene tres estados: 1 – Come; 2 – Hace sus necesidades; 3 – Duerme

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Existe una distribución estacionaria?

Cadena de Markov

El bebé

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\mathbb{P}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b \\ b &= c \\ 1 &= a+b+c \end{aligned}\right\} \quad a=b=c=\frac{1}{3}$$

Cadena de Markov

El bebé

Sin embargo, **no** existe una distribución estacionaria: la cadena es **periódica**

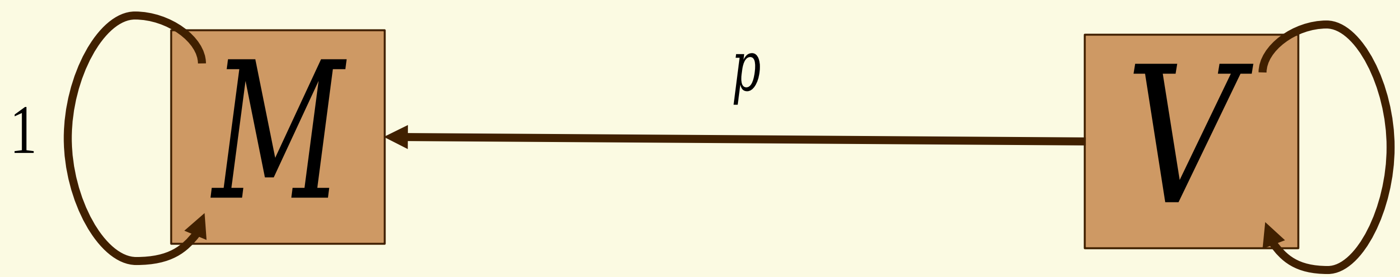
$$\mathbb{P}^4 = \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Qué significa la distribución obtenida? Que, en promedio, el bebé pasa un tercio del tiempo en cada uno de los estados.

Cadena de Markov

Vida

La probabilidad de que un individuo muera durante el próximo año es . Los estados posibles son: 1 – Muerto; 2 – Vivo



La muerte es un **estado absorbente.**

Cadena de Markov

Vida

La probabilidad de que un individuo muera durante el próximo año es . Los estados posibles son: 1 – Muerto; 2 – Vivo

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - q^n & q^n \end{pmatrix}$$

Cadena de Markov

Vida

Si (está vivo inicialmente), ¿cuántos años permanecerá en ese estado?

Llamemos número de años vivo

$$P(N=1 \vee X(0)=2)=p$$

$$P(N=2 \vee X(0)=2)=pq$$

$$P(N=3 \vee X(0)=2)=p\,q^{2}$$

$$P(N=4 \vee X(0)=2)=p\,q^{3}$$

$$\vdots$$

$$P(N=n \vee X(0)=2)=p\,q^{n-1}$$

Cadena de Markov

Vida

Si (está vivo inicialmente), ¿cuántos años permanecerá en ese estado?

Llamemos número de años vivo

$$E\left(N \vee X(0)=2\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n P\left(N=n \vee X(0)=2\right)$$

$$E\left(N \vee X(0)=2\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n p q^{n-1}$$

$$E\left(N \vee X(0)=2\right)=\frac{1}{1-q}$$

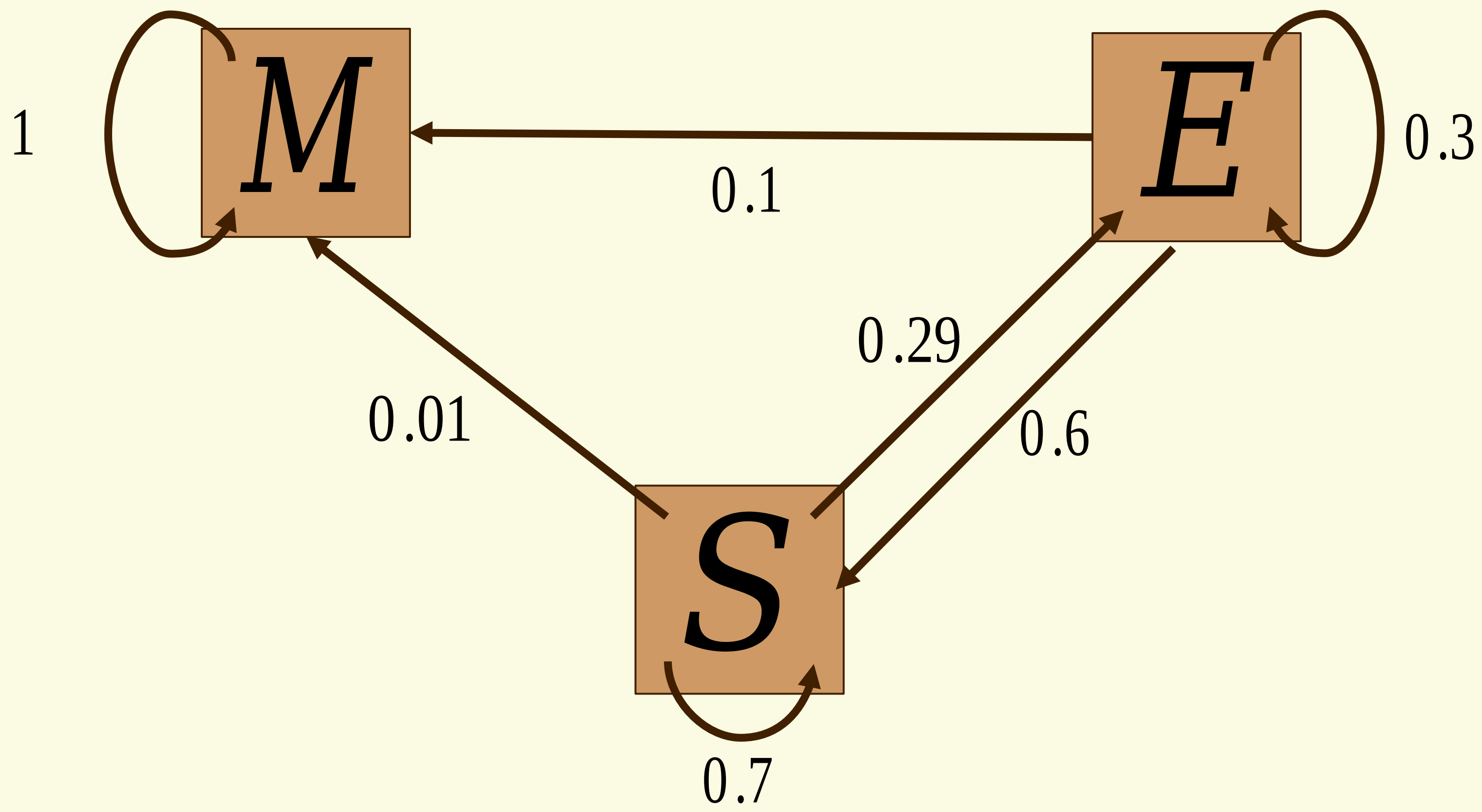
Cadena de Markov

Vida más compleja

Un individuo puede estar en cualquiera de tres estados: 1 – Muerto; 2 – Enfermo; 3 – Sano.

Cadena de Markov

Vida más compleja



Cadena de Markov

Vida más compleja

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.30 & 0.60 \\ 0.01 & 0.29 & 0.70 \end{pmatrix}$$

Estructura:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbb{F} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Definimos:

Al igual que en el ejemplo anterior, se puede demostrar que valor esperado del tiempo pasado en , dado que se comenzó en , antes de alcanzar un estado absorbente.

Cadena de Markov

Vida más compleja

$$\mathbb{E}=\left(\mathbb{I}-\mathbb{Q}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{25}{3} & \frac{50}{3} \\ \frac{145}{18} & \frac{175}{9} \end{pmatrix}$$

Llamemos:

número de años enfermo,

número de años sano

,

,

Andrei Andreyevich Markov
(1856-1922)

Cadena de Markov

```
function p = markov(P,p0,N)
% P es la matriz de transición
% p0 es el vector inicial de probabilidades
% N es el vector de instantes donde se desea analizar

M = rows(P);
N = sort(N);
n  = max(N);
p  = zeros(n+1,M);
p(1,:) = p0;
for k = 1:n
  p(k+1,:) = p(k,:)*P;
end
p = p(N,:);
```

Cadena de Markov

```
function X = simulmarkov(P,x0,n)
% Genera una realización de una cadena de Markov
% P es la matriz de transición
% x0 es el estado inicial
% n es la cantidad de instantes considerados

M = rows(P);
E = 1:M;
X = zeros(n,1);
X(1)=x0;
for k=1:n-1
  X(k+1) = discrete_rnd(E,P(X(k),:),1);
end
```