Probabilidad y Estadística (93.24)
Trabajo Práctico N$^{\underline{o}}$ 5

Mezcla de variables aleatorias, funciones de variable aleatoria y distribuciones conjuntas

1. La tensión de salida V del receptor de un sistema de comunicación digital cuando se recibe un **0**, es gaussiana (sólo ruido) con media 0 y dispersión 0.3. Cuando se recibe un **1** binario la tensión también tiene distribución gaussiana (ahora señal más ruido) de media 0.9 y y dispersión 0.25. La lógica del receptor decide que si $V > 0.\ 50$ entonces se recibió un **1** y un **0** en caso contrario. Si los ceros y unos llegan al sistema en igual proporción:

   a) Calcular la probabilidad de que se cometa error en la detección del bit que se decodifica,

   b) Obtener la función de distribución de V y su valor esperado.
   Construya un árbol y use el teorema de la probabilidad total para obtener la función de distribución de V.

2. Dos máquinas A y B producen piezas cuyos pesos (en gramos) se pueden suponer variables aleatorias continuas con las siguientes funciones densidad de probabilidad: $f_A(x) = (16 - 2\,x)/49$ si $x \in (1, 8)$ y 0 fuera de ese intervalo, y $f_B(x) = (2\,x - 2)/49$ si $x \in (1, 8)$ y 0 fuera de ese intervalo. La máquina A produce el 40 % de las piezas y el resto lo produce la máquina B.

   a) Obtener las funciones de distribución y densidad de probabilidad del peso X de las piezas de la producción total.

   b) Determinar el valor esperado $\mathrm{E}[X]$ y el desvío estándar σ_X.

3. La variable aleatoria discreta X tiene un recorrido y función de probabilidad como indica la siguiente tabla:

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0.1	0.3	0.2	0.4

   Obtener la función de probabilidad, el valor esperado y varianza de Y si:
   a) $Y = 3X$ b) $Y = X^2$ c) $Y = 2\,X^3$.

4. La variable aleatoria Z tiene distribución normal standard.

   a) Obtener la distribución de probabilidades de la variable $X = m + sZ$ donde m y s son constantes reales y $s > 0$.

   b) Obtener la función densidad de probabilidad de $X = Z^2$.
   Sugerencia: $P(X < x) = P(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x})$.

5. La variable aleatoria U tiene distribución uniforme en (0,1).

a) Obtenga la distribución de probabilidades de $W = U^2$.

b) Demostrar que $X = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - U)$, con $\lambda > 0$, es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Realice una simulación generando 10 valores de X si $\lambda = 5$ usando el generador de números aleatorios (en realidad pseudo-aleatorios) de su calculadora de mano.

6. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en (1,3).

   a) Obtener las funciones densidad de probabilidad de $Y = 3X + 4$ y $Z = e^X$.

   b) Calcular los valores esperados de Y y Z.

7. El radio R de una esfera se considera una variable aleatoria continua. Supongamos que R tiene una función densidad de probabilidad $f_R(r) = 6\,r\,(1-r) \quad 0 < r < 1$. Obtener la función densidad de probabilidad del volumen V y del área A de la esfera.

8. El beneficio total de una empresa está dado por $B = 10\,Q - 5\,Q^2$ (en miles de pesos) si Q es la cantidad vendida, que se supone es una variable aleatoria continua que toma valores entre 0 y 2 con función densidad de probabilidad: $f_Q(q) = q$ si $0 < q < 1$ y $f_Q(q) = -q + 2$ si $1 < q < 2$.

   a) Calcular la probabilidad de obtener un beneficio superior a los 3000 pesos.

   b) Calcular el valor esperado de B.

   c) Obtener la función de distribución de B.

9. El costo C para producir una cantidad X de un producto viene dado por $C(X) = (X - 4)(X - 8) + 10$ (en miles de pesos). Suponga que X es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en (4, 8).

   a) Calcular la probabilidad de que el costo sea mayor que 9.

   b) Calcular el valor esperado de C.

   c) Obtener la función de distribución de C.

10. Una corriente eléctrica variable I se puede considerar como una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo (9, 11). Si esta corriente pasa por una resistencia de 2 ohms entonces la potencia disipada W viene dada por $W = 2\,I^2$.

    a) Obtener la función densidad de probabilidad de W.

    b) Calcular $\mathrm{E}[W]$ y $\mathrm{Var}(W)$.

    c) Calcular $P(W > \mathrm{E}[W])$.

11. La variable aleatoria continua X tiene una función densidad de probabilidad tal que $f_X(x) = x+1$ para $x \in (-1, 0)$, $f_X(x) = -x + 1$ en $(0, 1)$ y cero fuera del intervalo $(-1, 1)$.

    a) Obtener las funciones de distribución y densidad de probabilidad de $Y = X^2$.

b) Determinar $\mathrm{E}[Y]$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

12. La tabla siguiente representa la distribución de probabilidades conjunta de la variable aleatoria discreta (X, Y). Calcule todas las distribuciones marginales y condicionales.

Y\X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.1	0.1	0.05	0.15	0.1
2	0.05	0.05	0.05	0.15	0
3	0.05	0.05	0	0.1	0

13. Considere la siguiente tabla de la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias discretas X e Y:

Y\X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

Obtener:

a) las distribuciones de probabilidad marginales;

b) la distribución de probabilidades de $X + Y$ y XY;

c) el valor esperado y la varianza de $X + Y$ y de XY.

d) la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

14. Dada la variable aleatoria bidimensional

$$(X, Y) = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}$$

tal que todos los pares tienen probabilidad $1/4$,

a) obtener las distribuciones marginales de X y de Y;

b) calcular $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[XY]$;

c) verificar que X e Y no son independientes (existe entre ellas una relación funcional sencilla).

15. Una urna contiene 10 bolillas blancas y 5 negras. Se tira una moneda al aire. Si sale cara se agregan 10 bolillas negras a la urna; si sale ceca se agregan 10 bolillas blancas. Se saca una bolilla al azar y se observa el color.
Se definen dos variables aleatorias discretas: X toma el valor 0 si sale ceca al arrojar la moneda y 1 si sale cara, e Y que toma el valor 0 si la bolilla extraída es negra y 1 si es blanca. Obtener:

a) la distribución de probabilidad condicional $p_{Y/X}(y/x)$;

b) la función de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x, y)$;

c) las funciones de probabilidad marginales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$;

d) la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

16. Se tira un dado y se anota el número X que sale. Se tira una moneda X veces y se anota el número Y de caras que salen.

a) Obtener $p_{Y/X}$ para X tomando los valores 2, 3 y 4.

b) Obtener la distribución conjunta de probabilidades para X tomando los valores 1, 2, 3 y 4.

17. Si la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) viene dada por $p_{X,Y}(x, y) = (x + y)/30$ para $x \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\ y \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Obtener:

a) $P(X \leq 2, Y = 1)$;

b) $P(X > 2, Y \leq 1)$;

c) $P(X > Y)$;

d) $P(X + Y = 4)$;

e) $P(Y = 1/X = 2)$;

f) la función de probabilidad condicional $p_{Y/X}(y/x)$;

g) las funciones de probabilidad de X e Y;

h) $\mathrm{E}[X]$ y $\mathrm{E}[Y]$;

i) $\mathrm{E}[X + Y]$ y $\mathrm{Var}(X + Y)$.

18. Cierto supermercado tiene una caja de atención común y otra caja rápida. Supongamos que X es el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y que Y es el número de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. La distribución de probabilidades conjunta de (X, Y) se resume en la siguente tabla:

$\downarrow$ **X\Y** $\rightarrow$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0.08	0.07	0.04	0
1	0.06	0.15	0.05	0.04
2	0.05	0.04	0.1	0.06
3	0	0.03	0.04	0.07
4	0	0.01	0.05	0.06

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada línea de espera?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de clientes en cada cola sea la misma?

c) Calcular la probabilidad de que haya por lo menos dos clientes más en una cola de espera que en la otra.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de clientes en ambas colas sea exactamente 4?

e) Calcular el valor esperado del número de clientes en cada caja.

f) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

19. Construya las tablas de la función de probabilidad de dos variables aleatorias discretas X e Y siendo el recorrido de ambas finito, la primera variable X de recorrido $\mathcal{R}_X = \{0\ 1\ 2\ 3\ 4\}$ y la segunda, Y, de recorrido $\mathcal{R}_Y = \{2\ 4\ 6\ 8\}$. Obtenga la distribución de probabilidades de la variable aleatoria $Z = X + Y$ si X e Y son independientes . Extraiga conclusiones respecto de la función de probabilidad de Z.
Nota: Observe como la función de probabilidad de Z se obtiene como los coeficientes de un polinomio que es producto de otros dos polinomios.

20. Dos máquinas A y B, que se accionan independientemente pueden tener un cierto número de fallas cada día. La distribución de probabilidades del número de fallas X e Y, respectivamente de las máquinas A y B, es:

Nro. de fallas k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0.10	0.20	0.30	0.20	0.09	0.07	0.04
$P(Y = k)$	0.30	0.10	0.10	0.10	0.10	0.15	0.15

Expresar los sucesos que siguen en términos de X e Y y calcular sus probabilidades:

a) A y B tienen el mismo número de fallas;
b) el número de fallas entre ambas máquinas es menor que 4;
c) A tiene más fallas que B;
d) B tiene el doble de fallas que A;
e) B tiene 4 fallas, cuando se sabe que B tiene por lo menos 2 fallas;
f) el número mínimo de fallas de las dos máquinas es 3.

21. Un examen consta de dos partes. Para un estudiante seleccionado al azar se definen las variables aleatorias: X = número de puntos en la primera parte, Y = número de puntos en la segunda parte. Supongamos que la siguiente tabla muestra la distribución conjunta de X e Y:

X\Y	**0**	**5**	**10**	**15**
0	0.02	0.06	0.02	0.10
5	0.04	0.15	0.20	0.10
10	0.01	0.15	0.14	0.01

La clasificación registrada es la suma $X + Y$ de los puntajes obtenidos en cada parte.

a) Hallar la distribución de probabilidades de $X+Y$ y la esperanza de la clasificación registrada.
b) ¿Son independientes las calificaciones de las dos partes? Justificar la respuesta.

22. Las variables aleatorias discretas X e Y son independientes y cada una tiene distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0.5$.

a) Calcular $P(2\,X + 3\,Y < 10)$ y $P(X = Y)$.
b) Obtener la distribución de probabilidades de $Z = X + Y$. Verificar que Z tiene distribución binomial e identificar sus parámetros. Calcular $\mathrm{E}[Z]$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

23. Considere las tablas de distribución conjunta de probabilidades:

Tabla 1

Y\X	**-1**	**0**	**1**
-1	0	0.1	0
0	0.1	0.6	0.1
1	0	0.1	0

Tabla 2

Y\X	**-1**	**0**	**1**
-1	0.2	0	0
0	0	0.6	0
1	0	0	0.2

Tabla 3

Y\X	**-1**	**0**	**1**
-1	0	0	0.2
0	0	0.6	0
1	0.2	0	0

En cada caso, analice la independencia de las variables X e Y y calcule:

a) $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[XY]$;

b) $\mathrm{Var}(X)$ y $\mathrm{Var}(Y)$;

c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ y el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$.

24. La función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y) es

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} a(x + y) & 0 < x < 3,\ 0 < y < 3 \\ 0 & x \notin (0, 3) \times (0, 3) \end{cases}$$

a) Calcular $P(1 < X < 2, 1 < Y < 2)$

b) Calcular $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, σ_X y σ_Y.

25. La cantidad de combustible, en miles de litros, que contiene un tanque al principio del día es una variable aleatoria X, de la cual una cantidad aleatoria Y se vende durante el día. Se supone que el tanque no se rellena durante el día, de forma tal que la función de densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1,\ 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine si X e Y son independientes.

b) Calcule la probabilidad de que se hayan vendido en un día más de 500 litros, si la cantidad de combustible que había en el tanque al principio del día era mayor a 700 litros.

26. Dos componentes electrónicos tienen la siguiente distribución de probabilidades conjunta para sus tiempos de duración X e Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x\exp[-x(1+y)] & 0 < x,\, 0 < y \\ 0 & x < 0 \text{ o } y < 0. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración X del primer componente sea mayor que 3?

b) Obtener las distribuciones marginales de probabilidad de cada variable y analizar si son independientes.

c) Calcular la covarianza de X e Y.

27. Se cortan chapas rectangulares de lados X (largo) e Y (ancho) que se suponen variables aleatorias con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\,x^2\,y & 1 < x < 2,\, 1 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Obtenga el valor de k.

b) Calcule la probabilidad de ocurrencia de cada uno de estos eventos: *el largo es mayor que 1.8*, *el largo es un 20 % mayor que el ancho* y *el área de la chapa es mayor a 2.*

c) Calcule el ancho y el largo medio.

d) ¿ Son el ancho y largo variables aleatorias independientes?

28. El precio de mercado de cierto bien se supone que es una variable aleatoria P con distribución uniforme en el intervalo (10, 12). La demanda D de ese producto depende del precio P con una densidad condicional de probabilidad dada por $f_{D/P}(d/p) = e^{-(d-p)}\; d > p$.

a) Obtenga la función densidad de probabilidad de la demanda.

b) Calcule la probabilidad de que la demanda supere 13.

29. Considere dos dispositivos que forman parte de un sistema y sean X e Y sus tiempos de vida o duración (en miles de horas) hasta que fallen. Si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ:

a) Obtenga la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada dispositivo dure a lo sumo $1/\lambda$?
(**Sugerencia:** considere $P(X < 1/\lambda,\, Y < 1/\lambda)$).

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total $(X + Y)$ sea a lo sumo t miles de horas?
(**Sugerencia:** considere la región $A = \{(x,y) \,:\, x > 0,\, y > 0,\, x + y < t\}$ e integre).

30. Dos personas han quedado citadas en un lugar. El instante de llegada de cada una a ese lugar puede suponerse una variable aleatoria con distribución uniforme en (0, 30) y que esos instantes de llegada son independientes.

    a) Obtener la función de distribución y de densidad de probabilidad del tiempo T que una persona espera a la otra.

    b) Calcular el valor esperado y el desvío estándar de T.

31. Se eligen dos números al azar en (0,1). Se supone que la elección de uno es independiente de la del otro. Calcular la probabilidad de que:

    a) la suma sea menor que 1;

    b) la suma de sus cuadrados sea menor que 1;

    c) su producto no exceda $\frac{2}{9}$.

32. Suponga que X e Y son variables aleatorias . Demostrar que

    a) si X e Y son independientes entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$;

    b) $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = a\,c\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ para a, b, c y d constantes;

    c) $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ para a, b, c y d constantes y $\mathrm{sign}(a) = \mathrm{sign}(c)$;

    d) Si $Y = aX + b$ con a y b constantes y $(a \neq 0)$ entonces $\rho(X, Y) = \mathrm{sign}(a)$.