Experimento aleatorio

Ejemplos de experimentos no determinísticos o aleatorios

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.

E_2: Se lanza una moneda y se cuenta el número de caras obtenidas.

E_3: Se consideran los artículos producidos en una línea de producción y se cuenta el número de defectuosos.

E_4: Se cuenta el número de accesos a un servidor Web en una hora.

E_5: Se registran las temperaturas máxima y mínima de un día.

E_6: Se mide el tiempo de duración de una lámpara LED

¿Qué tienen en común todos estos experimentos?

Experimento aleatorio

Características de un experimento aleatorio

1. Es posible repetir el experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones en que se realiza.

2. Aunque, en general, no podemos identificar un resultado particular del experimento, se puede indicar el conjunto de todos los resultados posibles (este conjunto es el **ESPACIO MUESTRAL** del experimento).

3. A medida que el experimento se repite, los resultados parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un *gran* número de veces, aparece un patrón de regularidad. Este patrón hace posible la construcción de un modelo matemático con el cual analizar el experimento.

Sobre el álgebra de sucesos

E: experimento aleatorio – resultados inciertos

S: espacio muestral de un experimento aleatorio - conjunto de *todos* los resultados posibles

A: suceso o evento – conjunto de resultados posibles

$$A \subset S$$

Sobre el álgebra de sucesos

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$A_1 = \{2,4,6\}$ - sale un número par

$$A_1 \subset S_1$$

Sobre el álgebra de sucesos

Se imponen ciertas reglas sobre las cosas de las que se desea y debe hablar

Queremos hablar sobre la posibilidad de que salga par:

$$A_1 = \{2,4,6\}$$

Entonces debemos poder hablar acerca de la posibilidad de que **NO** salga par:

$$A_1^c = \{1,3,5\}$$

Sobre el álgebra de sucesos

Se imponen ciertas reglas sobre las cosas de las que se desea y debe hablar

Queremos hablar sobre la posibilidad de que salga par:

$$A_1 = \{2,4,6\}$$

Y queremos hablar sobre la posibilidad de que sea mayor a 3:

$$B_1 = \{4,5,6\}$$

Entonces debemos poder hablar acerca de la posibilidad de que salga par **O** mayor a 3:

$$A_1 \cup B_1 = \{2,4,5,6\}$$

Sobre el álgebra de sucesos

Se imponen ciertas reglas sobre las cosas de las que se desea y debe hablar

Queremos hablar sobre la posibilidad de que salga par:

$$A_1 = \{2,4,6\}$$

Y queremos hablar sobre la posibilidad de que sea mayor a 3:

$$B_1 = \{4,5,6\}$$

Entonces debemos poder hablar acerca de la posibilidad de que salga par **Y** mayor a 3:

$$A_1 \cap B_1 = \{4,6\}$$

Sobre el álgebra de sucesos

Se imponen ciertas reglas sobre las cosas de las que se desea y debe hablar

Debemos poder hablar sobre la posibilidad de que salga *algo*:

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Debemos poder habar sobre la posibilidad de que salga *nada*:

$$S_1^c = \emptyset$$

Sobre el álgebra de sucesos

S	suceso cierto
$\emptyset$	suceso imposible

$A, B \subset S$ - sucesos asociados con cierto experimento aleatorio

A' , A^c	no ocurrencia de A
$A \cap B$	ocurrencia de los dos sucesos
$A \cup B$	ocurrencia de por lo menos uno de los dos sucesos

Sobre el álgebra de sucesos

Una propiedad importante de dos sucesos:

Dos sucesos son **MUTUAMENTE EXCLUYENTES** sii

$$A \cap B = \emptyset$$

Dos sucesos son **MUTUAMENTE EXCLUYENTES** sii

Es imposible que sucedan juntos

Sobre el álgebra de sucesos

Una propiedad importante de dos sucesos:

En el lanzamiento de un dado, los siguientes sucesos son **MUTUAMENTE EXCLUYENTES**

$A_1 = \{2,4,6\}$ - sale un número par

$B_1 = \{1,3,5\}$ - sale un número impar

Frecuencia relativa de un suceso

Sea E es un experimento aleatorio, S su espacio muestral y $A \subset S$ un suceso.

El experimento se repite n veces y se cuenta el número de veces n_A que ocurre A.

La frecuencia relativa de A viene dada por:

Frecuencia relativa de un suceso

Propiedades

- $0 \leq f(A) \leq 1$
- $f(S) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

Probabilidad de un suceso

Axiomática de Kolmogorov

$$P(A) \geq 0$$

La probabilidad de un suceso es un número real no negativo

$$P(S) = 1$$

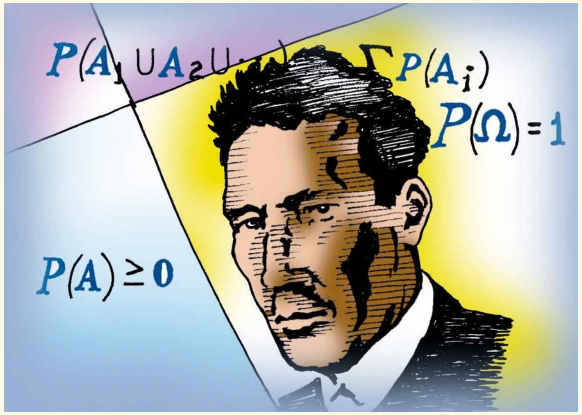
La probabilidad asignada al espacio muestral de un experimento aleatorio es 1.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La probabilidad asignada a la ocurrencia de por lo menos uno de dos sucesos mutuamente excluyentes es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Probabilidad de un suceso

Teoremas



$$P(A) \leq 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Probabilidad de un suceso

Teoremas

Demostración: $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$

$$A\cap\varnothing=,A\cup\varnothing=A\Rightarrow P\left(A\right)=P\left(A\right)+P\left(\varnothing\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\varnothing\right)=0$$

Demostración: $P\left(A\right)\leq 1$

$$P\left(\overline{A}\right)\geq 0\Rightarrow P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)\leq 1$$

Probabilidad de un suceso

Teoremas

Demostración: $P\left(\varnothing\right)=0$

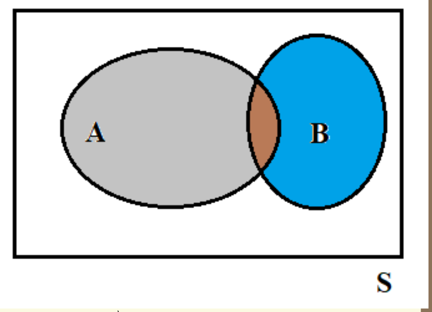
$$A\cap\overline{A}=\varnothing\,,A\cup\overline{A}=S\Rightarrow 1=P\left(A\cup\overline{A}\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$$

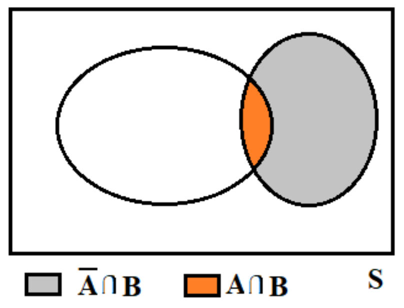
El suceso imposible tiene probabilidad nula. El recíproco no es verdadero. Hay sucesos posibles que tienen probabilidad nula.

Probabilidad de un suceso

Teoremas

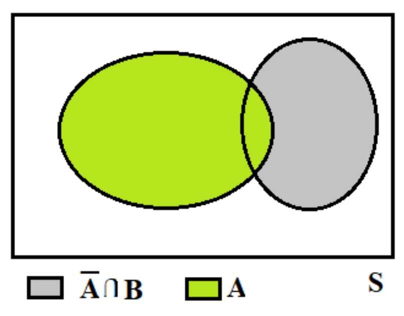


Demostración: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$$B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap B\right)$$

$$\left(\overline{A} \cap B\right) \cap \left(A \cap B\right) = \varnothing$$

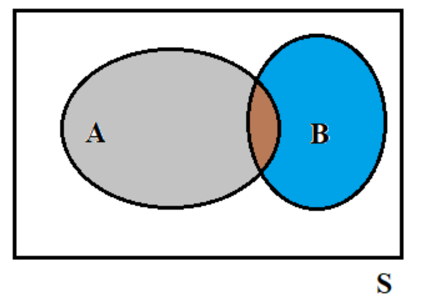


$$A \cup B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup A$$

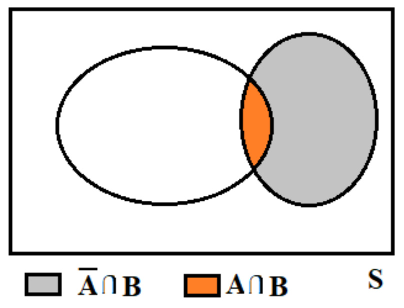
$$\left(\overline{A} \cap B\right) \cap A = \varnothing$$

Probabilidad de un suceso

Teoremas

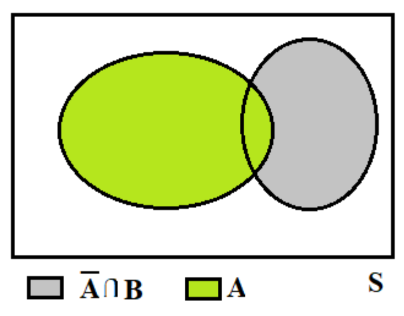


Demostración: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cup B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(B) - P(A \cap B) + P(A)$$

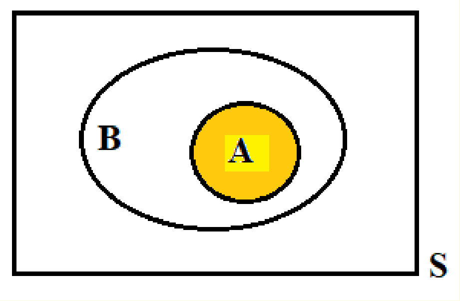
Probabilidad de un suceso

Teoremas

Demostración: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup A$$

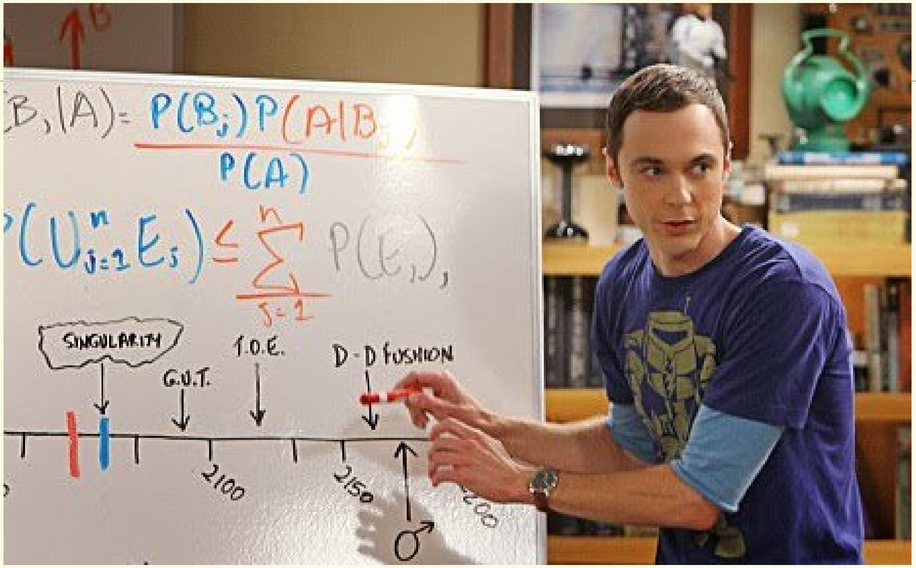
$$(\overline{A} \cap B) \cap A = \varnothing$$



$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A) \Rightarrow P(B) - P(A) = P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(\overline{A} \cap B) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0$$

Una demostración que nos deja Sheldon Cooper



$$P\left(¿\, j=1 ¿\, n\, E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P\left(E_j\right)$$

Desigualdad de Bonferroni

Sugerencia: La demostración es por inducción. El caso sale del caso de la probabilidad de la unión de dos sucesos. Analizar el caso especial del igual.

Probabilidad de un suceso

Axiomática de Kolmogorov

¿Son suficientes estos axiomas para desarrollar toda la probabilidad?

¡NO!

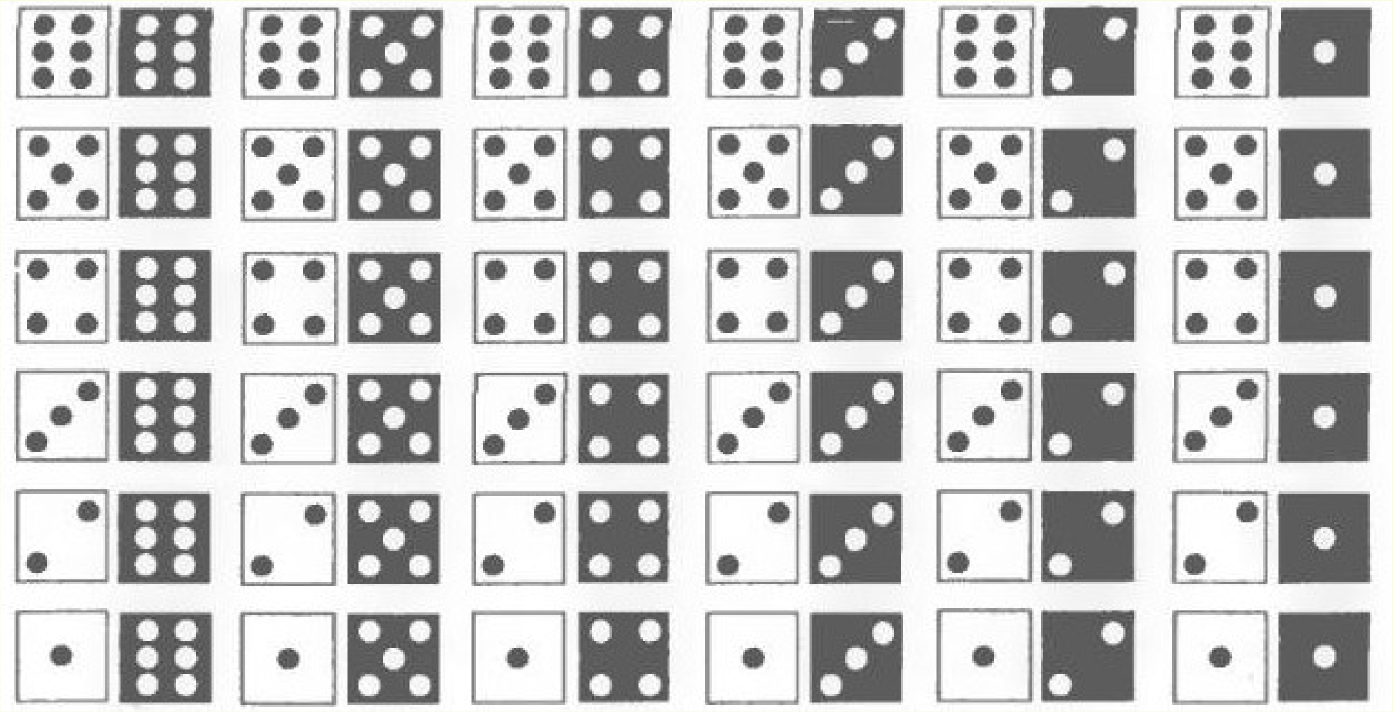
Se necesitan otros dos conceptos fundamentales:

INDEPENDENCIA

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Independencia

Se tiran dos dados



Son 36 casos posibles. La probabilidad de cada caso es 1/36.

Independencia

Se tiran dos dados

en el dado blanco sale

en el dado negro sale

Como hay 6 resultados posibles para cada dado:

para todo

Como ya vimos:

$$P\left(A_k \cap B_m\right) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P\left(A_k\right) \times P\left(B_m\right)$$

Intuitivamente, también sabemos que lo que sale en un dado es *independiente* de lo que sale en el otro.

Independencia

Definición

Dos eventos y son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Un par de consecuencias:

es independiente de todo :

es independiente de todo :

es independiente de es independiente de

Independencia

Definición

Una familia de eventos son independientes si y sólo si

$$P\left(¿ k \in J \; A_k \right) = \prod_{k \in J} P\left(A_k\right) \forall J \subseteq K$$

Ejemplo de 3 eventos:

$$P\left(A_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right)$$

$$P\left(A_1 \cap A_3\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_3\right) \qquad P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) P\left(A_3\right)$$

$$P\left(A_2 \cap A_3\right) = P\left(A_2\right) P\left(A_3\right)$$

Independencia

Importante

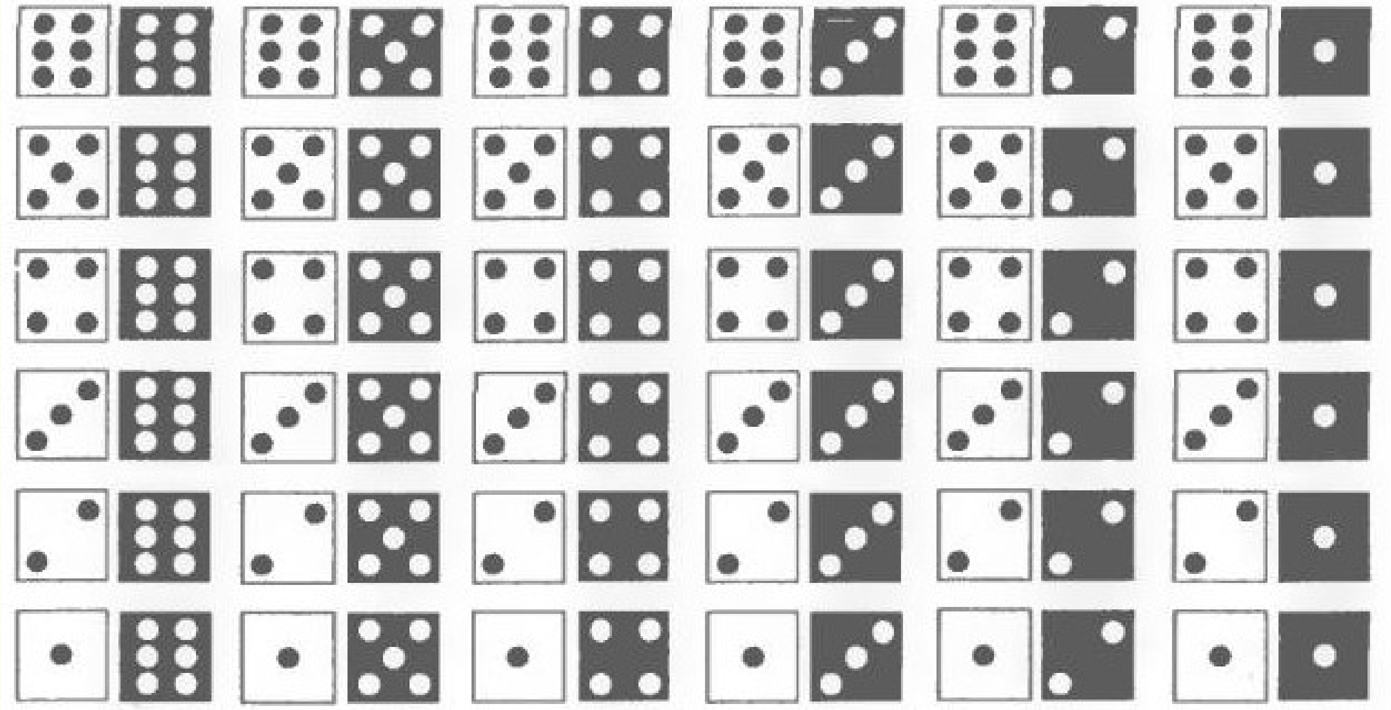
Que dos eventos sean independientes o mutuamente excluyentes son **dos cosas diferentes**. Si dos sucesos con probabilidad positiva son excluyentes, no pueden ser independientes. Si son independientes, no pueden ser excluyentes.

En muchas situaciones la independencia se supone ante la falta de información de la dependencia o porque efectivamente no hay dependencia por condiciones del problema.

Si y son independientes, también lo son: y ; y; y.

Probabilidad Condicional

Se tiran dos dados



Son 36 casos posibles. La probabilidad de cada caso es 1/36.

Probabilidad Condicional

Se tiran dos dados y se consideran los siguientes sucesos:

: la suma de los números obtenidos es menor que 8

: la suma de los números obtenidos es impar

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
casos	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

se pueden calcular, entonces :

$$P(A)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

$$P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Probabilidad Condicional

Se tiran dos dados y se consideran los siguientes sucesos:

: la suma de los números obtenidos es menor que 8

: la suma de los números obtenidos es impar

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
casos	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Pregunta: de entre los casos que están en , ¿qué proporción están en ?

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Hemos reducido el universo de casos posibles a B: es como nuestro nuevo “espacio muestral”

Probabilidad Condicional

Se tiran dos dados y se consideran los siguientes sucesos:

: la suma de los números obtenidos es menor que 8

: la suma de los números obtenidos es impar

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
casos	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Otra interpretación: si sabemos que acontece, ¿cuál es la probabilidad que ocurra?

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Hemos reducido el universo de casos posibles a B: es como nuestro nuevo “espacio muestral”

Probabilidad Condicional

Definición

La probabilidad condicional del evento dado el evento viene dada por

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ si\ P(B)\neq 0$$

Una conclusión importante:

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)$$

¿Importa que sea?

Probabilidad Condicional

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\; si\; P(B)\neq 0$$

Esta regla de asignación de probabilidades satisface los axiomas de Kolmogorov:

$$P(A\cap B)\geq 0\,,\,P(B)>0\Rightarrow P(A|B)\geq 0$$

$$S\cap B=B\Rightarrow P(S|B)=\frac{P(S\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

Probabilidad Condicional

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\; si\; P(B)\neq 0$$

Esta regla de asignación de probabilidades satisface los axiomas de Kolmogorov:

$$P(A|B)\geq 0$$

$$P(S|B)=1$$

Probabilidad Condicional

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\; si\; P(B)\neq 0$$

Esta regla de asignación de probabilidades satisface los axiomas de Kolmogorov y, por tanto, algunos de los teoremas ya vistos:

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$

$$P(\varnothing|B)=0$$

¡Ojo!: En general, se tiene

$$P(A|\overline{B})\neq 1-P(A|B)$$

Probabilidad Condicional

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ si\ P(B)\neq 0$$

Importante:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\,P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A)$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

Probabilidad Condicional e Independencia

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\; si\; P(B)\neq 0$$

Si y son independientes:

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)\Rightarrow P(A|B)=P(A)$$

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B)\Rightarrow P(B|A)=P(B)$$

Probabilidad Condicional e Independencia

Dos tiradores hacen una descarga simultánea. Las probabilidades de hacer blanco son, respectivamente, 0.6 y 0.7. Se supone que los tiros de uno y otro tirador son independientes (no hay influencia alguna en el resultado del disparo de uno de ellos por la performance del otro). Calcular las probabilidades de los sucesos: a) Exactamente un tirador hace blanco. b) Exactamente dos tiradores hacen blanco.

: El tirador 1 hace blanco cuando dispara

: El tirador 2 hace blanco cuando dispara

: Algún tirador hace blanco : los dos tiradores hacen blanco

$$P(C)=P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$$

y son m.e.

y son independientes

$$P(C)=P(A)\,P(\overline{B})+P(\overline{A})\,P(B)=0.6\;0.3+0.4\;0.7=0.46$$

$$P(D)=P(A)\,P(B)=0.6\;0.7=0.42$$

¿Cuál es la probabilidad de que ambos tiradores no den en el blanco?

Probabilidad Condicional e Independencia

Una máquina tiene 4 subsistemas que pueden fallar cuando se pone en marcha. Esos 4 subsistemas operan en forma independiente y las probabilidades de fallar al poner en marcha de los subsistemas 1 a 4 son 0.05, 0.1, 0.15 y 0.2, respectivamente Determinar la probabilidad de que la máquina funcione al ponerla en marcha si:

a) tienen que funcionar todos los subsistemas (conexión serie);
b) tiene que funcionar al menos uno de los subsistemas (conexión paralelo);
c) tienen que funcionar al menos uno de los subsistemas 1 y 2 y al menos uno de los otros dos (conexión serie-paralelo).

el subsistema no funciona correctamente

P(A¿¿1)=0.05, P(A¿¿2)=0.10, P(A¿¿3)=0.15, P(A¿¿4)=0.20¿¿¿¿

Probabilidad Condicional e Independencia

a) tienen que funcionar todos los subsistemas (conexión serie)

Se plantea una intersección de 4 sucesos. Como es una familia de sucesos independientes también lo es cualquier familia que contenga alguno de ellos y los complementarios de los restantes. Entonces una intersección de unos suceso y complementarios de los restantes tiene por probabilidad el producto de probabilidades como ocurre en este caso.

Probabilidad Condicional e Independencia

b) tiene que funcionar al menos uno de los subsistemas (conexión paralelo)

Se plantea una unión de 4 sucesos. Usando el evento complementario y la independencia de los 4 sucesos se logra calcular la probabilidad pedida.

Probabilidad Condicional e Independencia

b) tiene que funcionar al menos uno de los subsistemas (conexión paralelo)

Se plantea una unión de 4 sucesos. Usando el evento complementario y la independencia de los 4 sucesos se logra calcular la probabilidad pedida.

Probabilidad condicional e independencia

c) tienen que funcionar al menos uno de los subsistemas 1 y 2 y al menos uno de los otros dos (conexión serie-paralelo).

Se plantea una combinación de 4 sucesos. Tenga en cuenta que los sucesos no son excluyentes y se usa la regla adecuada para la unión y para la probabilidad de la intersección se usa la condición de la independencia. Un planteo alternativo puede ser el que sigue:_

Probabilidad Condicional y Total

En una población, el 4% de los varones y el 2% de las mujeres son daltónicos. Las mujeres son el 53% de la población. ¿Cuál es la proporción de varones entre los daltónicos?

: una persona es daltónica : mujer : varón

$$P(D/V)=0.04 \quad P(D/M)=0.02 \quad P(M)=0.53$$

$$P(D\cap V)=P(D/V)\,P(V)=0.04\;0.47=0.0188$$

$$P(D\cap M)=P(D/M)\,P(M)=0.02\;0.53=0.0106$$

$$P(\overline{D}\cap V)=P(\overline{D}/V)\,P(V)=(1-0.04)\,0.47=0.4512$$

$$P(\overline{D}\cap M)=P(\overline{D}/M)\,P(M)=(1-0.02)\,0.53=0.5194$$

Probabilidad Condicional y Total

En una población, el 4% de los varones y el 2% de las mujeres son daltónicos. Las mujeres son el 53% de la población. ¿Cuál es la proporción de varones entre los daltónicos?

: una persona es daltónica : mujer : varón

	D	D’	
V	0.0188	0.4512	0.4700
M	0.0106	0.5194	0.5300
	0.0294	0.9706	1.0000

$$P(D \cap V) = 0.0188$$
$$P(D \cap M) = 0.0106$$
$$P(\overline{D} \cap V) = 0.4512$$
$$P(\overline{D} \cap M) = 0.5194$$

(2.94%)

proporción de daltónicos en la población

PROBABILIDAD TOTAL

Probabilidad Condicional y Total

En una población, el 4% de los varones y el 2% de las mujeres son daltónicos. Las mujeres son el 53% de la población. ¿Cuál es la proporción de varones entre los daltónicos?

: una persona es daltónica : mujer : varón

	D	D’	
V	0.0188	0.4512	0.4700
M	0.0106	0.5194	0.5300
	0.0294	0.9706	1.0000

$$P(D \cap V) = 0.0188$$
$$P(D \cap M) = 0.0106$$
$$P(\overline{D} \cap V) = 0.4512$$
$$P(\overline{D} \cap M) = 0.5194$$

(63.95%)

proporción de varones entre los daltónicos

Detección de una enfermedad

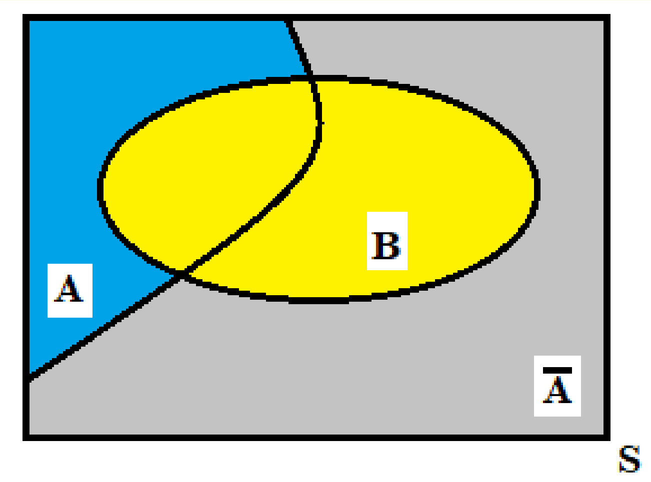
Consideremos los siguientes sucesos:

: la persona está infectada de la enfermedad

: el test detecta la enfermedad (*da positivo*)

sensibilidad de la detección

especificidad de la detección



Lo deseable es que estas dos probabilidades condicionales sean próximas a 1.

Detección de una enfermedad

Se pueden calcular, también, las siguientes probabilidades:

y

y

probabilidad de tener la enfermedad dado que el análisis da positivo

$$P(B)=p\,p1+(1-p)(1-p2)$$

probabilidad de no tener la enfermedad dado que el análisis da positivo (falsos positivos)

$$P(\overline{A}/B)=(1-p2)(1-p)/(p1p+(1-p2)(1-p))$$

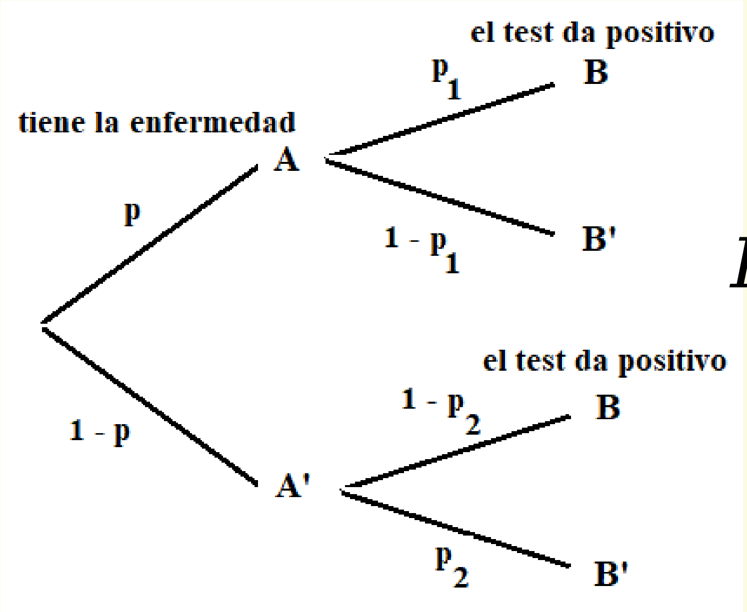
Detección de una enfermedad

Se pueden calcular las siguientes probabilidades:

Detección de una enfermedad

	B	B'	
A	$p\,p_1$	$p\,(1 - p_1)$	p
A'	$(1 – p)\,(1 – p_2)$	$(1 – p)\,(1 – p_2)$	$1 - p$

Diagrama de árbol:

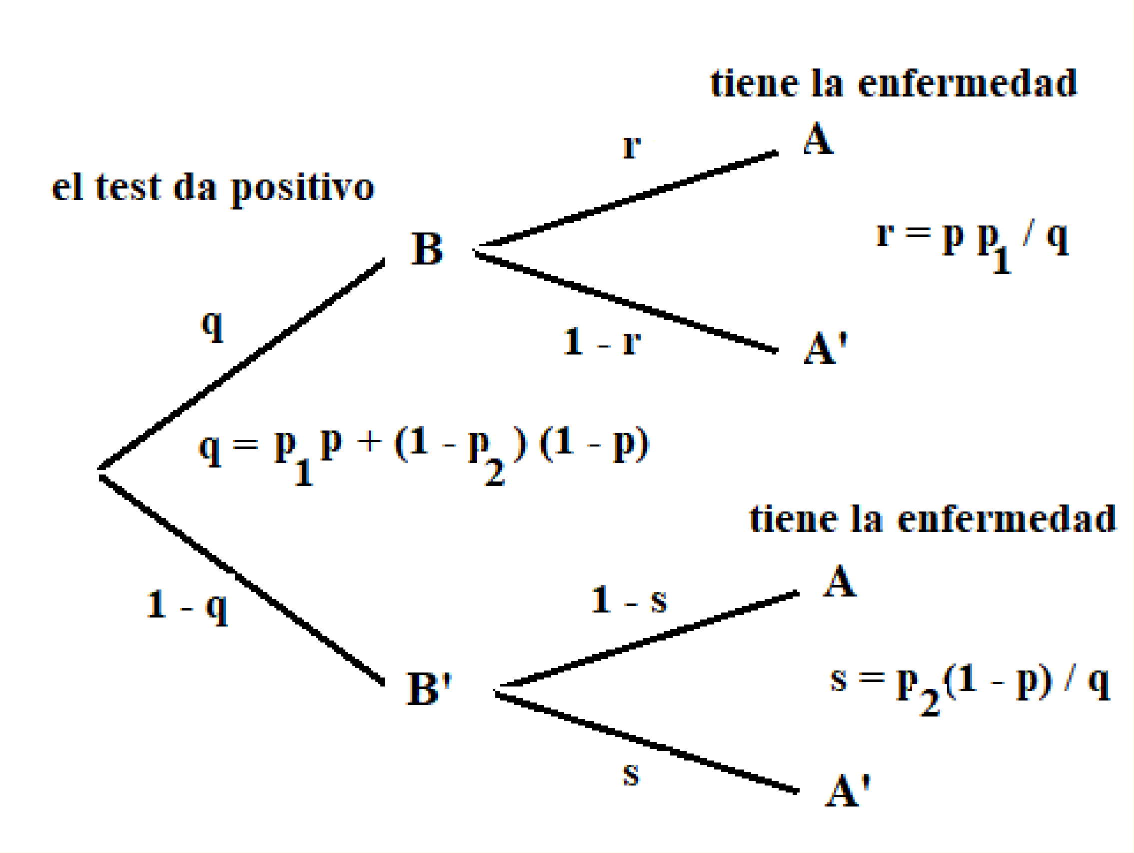


Probabilidad de que el test dé positivo

$$P(B)=p\,p1+(1-p)(1-p2)$$

Detección de una enfermedad

Diagrama de árbol:



Detección de una enfermedad

Consideremos los siguientes sucesos:

: la persona está infectada de la enfermedad

: el test detecta la enfermedad (*da positivo*)

sensibilidad de la detección

$$P(A) = 0.1$$

especificidad de la detección

$$P(B) = 0.1\,0.95 + 0.9\,0.05 = 0.14$$

$$P(A) = 0.1 \qquad P(A/B) = 0.1\,0.95 / 0.14 = 0.679$$

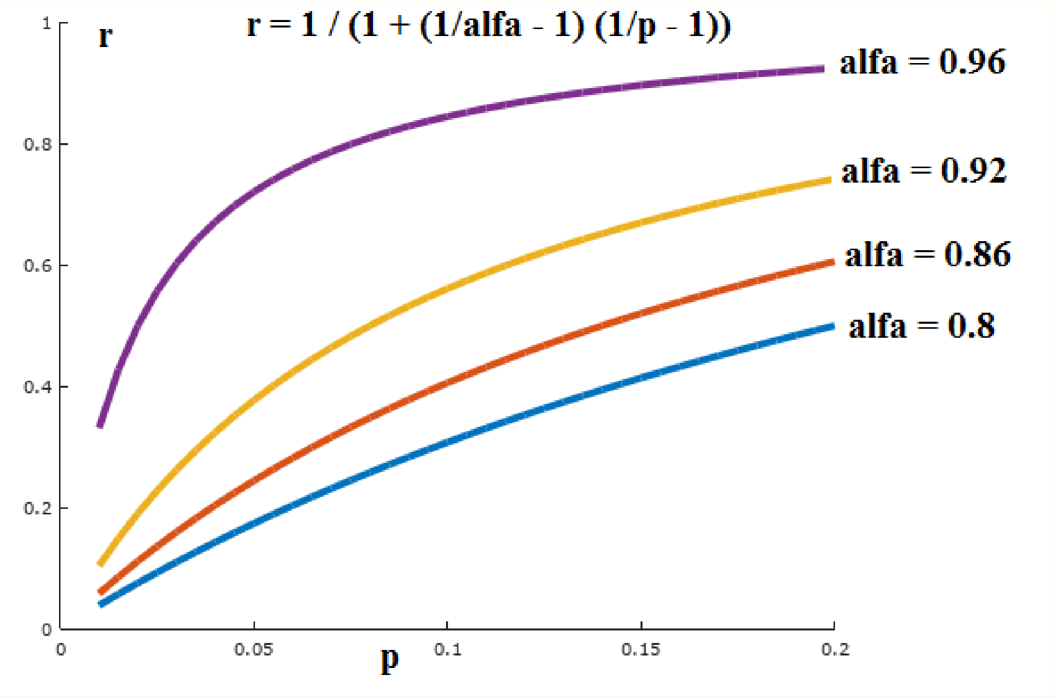
Probabilidad "a priori" **Probabilidad "a posteriori"**

Detección de una enfermedad

probabilidad de tener la enfermedad dado que el análisis da positivo

$$P(A/B)=p1p/(p1p+(1-p2)(1-p))$$

Si alfa resulta



Para valores pequeños de (del orden de 0.01) la probabilidad de tener la enfermedad dado que el test da positivo es sorprendentemente pequeña incluso para valores grandes de alfa.

Si y alfa = 0.99 entonces r = 0.09 (9%)

Detección de una enfermedad

Test serológico para detectar COVID 19

Test para detectar presencia de anticuerpos al virus

sensibilidad del test: 0.875

(12.5 % de las personas infectadas tienen test negativo

especificidad del test: 0.975

(2.5 % de las personas no infectadas tienen test positivo)

p = 0.10 (Nueva York Junio 2020)

$P(B) = 0.875\,0.1 + 0.025\,0.9 = 0.11$ el test da positivo

$P(A/B) = 0.875\,0.1/0.11 \approx 0.795$ dado que el test da positivo está contagiado

$P(\overline{A}/B) = 0.025\,0.9/0.11 \approx 0.205$ “falso positivo”

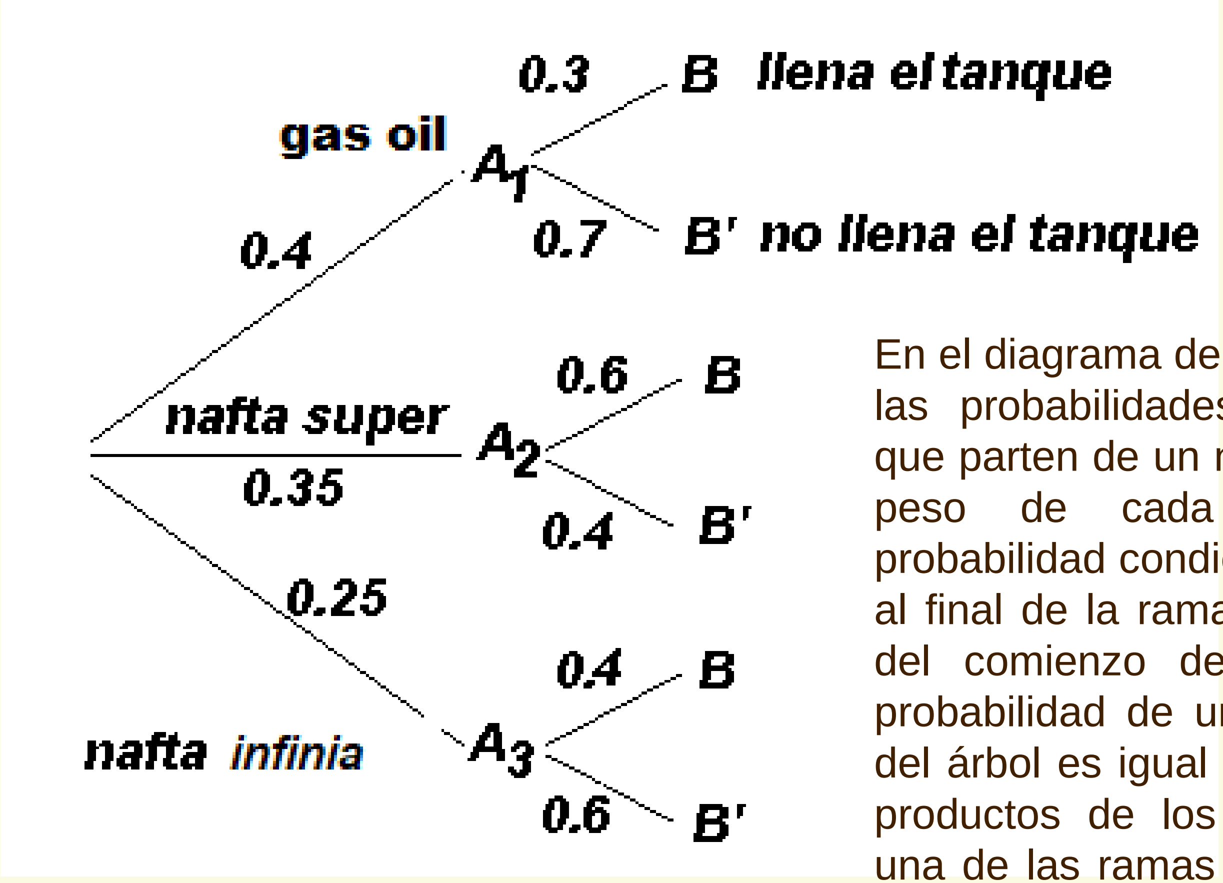
$P(A/\overline{B}) = 0.125\,0.1/0.89 \approx 0.014$ “falso negativo”

Probabilidad condicional y total

En cierta estación de servicio, el 40% de los clientes utilizan gas oil (), 35% utiliza nafta super (), y 25% consume nafta infinia ().
De los clientes que consumen gas oil sólo el 30% llena su tanque (evento); de los que cargan nafta super, 60% llena el tanque; de los que usan infinia, el 40% llena el tanque

Probabilidad condicional y total

Un diagrama de árbol



En el diagrama de árbol la suma de las probabilidades de las ramas que parten de un nodo suman 1. El peso de cada rama es la probabilidad condicional del suceso al final de la rama dado el suceso del comienzo de esa rama. La probabilidad de un suceso al final del árbol es igual a la suma de los productos de los pesos de cada una de las ramas que terminan en el suceso de interés.

Probabilidad condicional y total

La proporción TOTAL de personas que llenan el tanque se obtiene combinando las proporciones de personas que en cada subpoblación de personas (que cargan cada tipo de combustible) llenan el tanque.

$$P(B) = 0.3 \cdot 0.4 + \ 0.6 \cdot 0.35 + \ 0.25 \cdot 0.4 = 0.43$$

La probabilidad de es una combinación lineal convexa de las probabilidades condicionales de B dado cada miembro de la partición del espacio muestral.

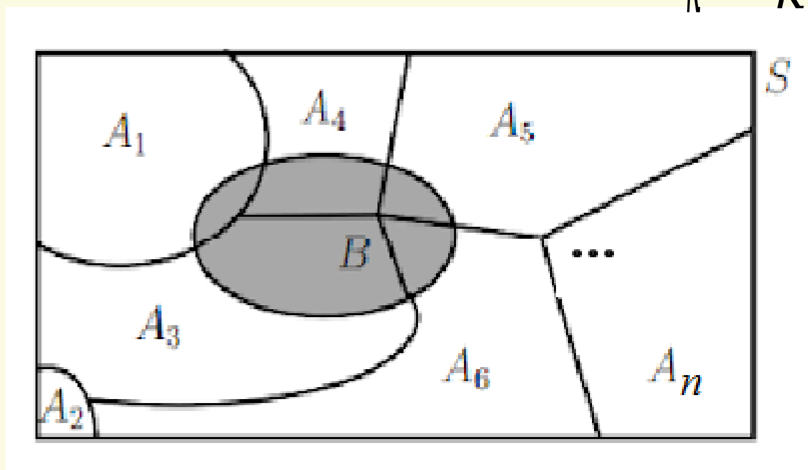
Teorema de la probabilidad total

$\left\{A_k\right\}_{k=1}^{n}$ **Partición del espacio muestral**

$S=¿k=1¿nA_k$

$A_k \neq \emptyset \ \forall k$

$A_k \cap A_k = \emptyset \ k \neq j$



$$B=¿k=1¿n\left(B \cap A_k\right) \Rightarrow P\left(B\right)=P\left(¿k=1¿n\left(B \cap A_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n} P\left(B \cap A_k\right)$$

$$P\left(B\right)=\sum_{k=1}^{n} P\left(B \middle| A_k\right) P\left(A_k\right)$$

Probabilidad total y Bayes

$\{A_k\}_{k=1}^{n}$ **Partición del espacio muestral**

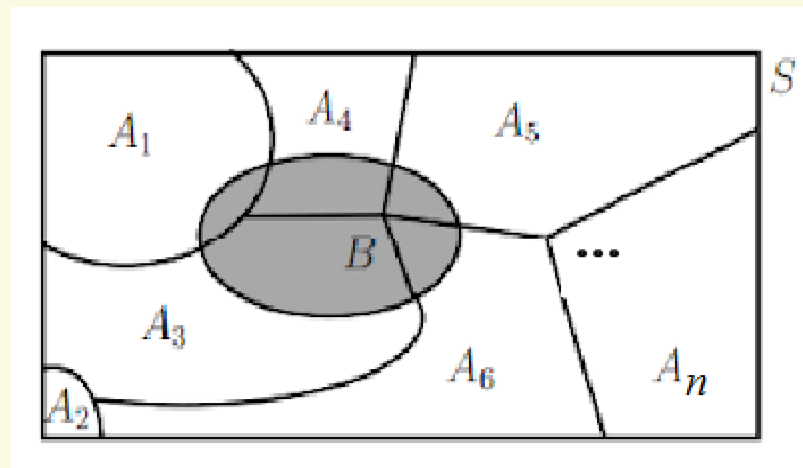
S=¿k=1¿nA_k

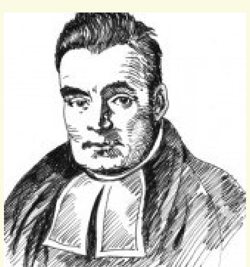
$A_k \neq \emptyset \;\forall k$

$A_k \cap A_k = \emptyset \; k \neq j$

Teorema de la probabilidad total

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\,P(A_k)$$





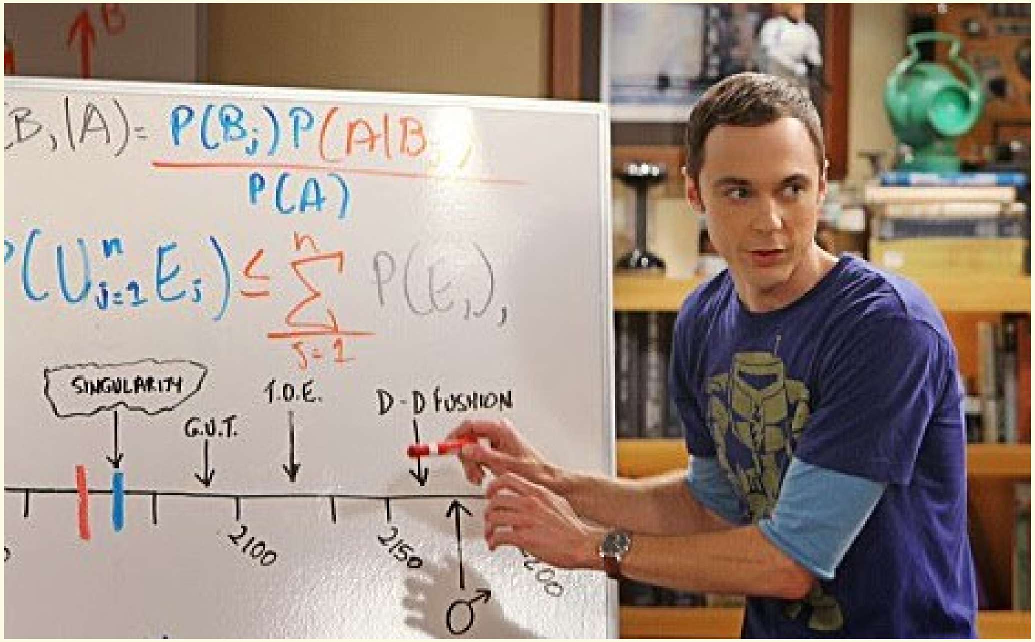
Teorema de Bayes

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\,P(A_k)}$$

Probabilidad total y Bayes

Teorema de Bayes

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)P(A_k)}$$



Una interpretación del teorema de Bayes:

***Probabilidad a priori*:** probabilidad de que la hipótesis H sea cierta

Probabilidad de observar la evidencia E si H es cierta

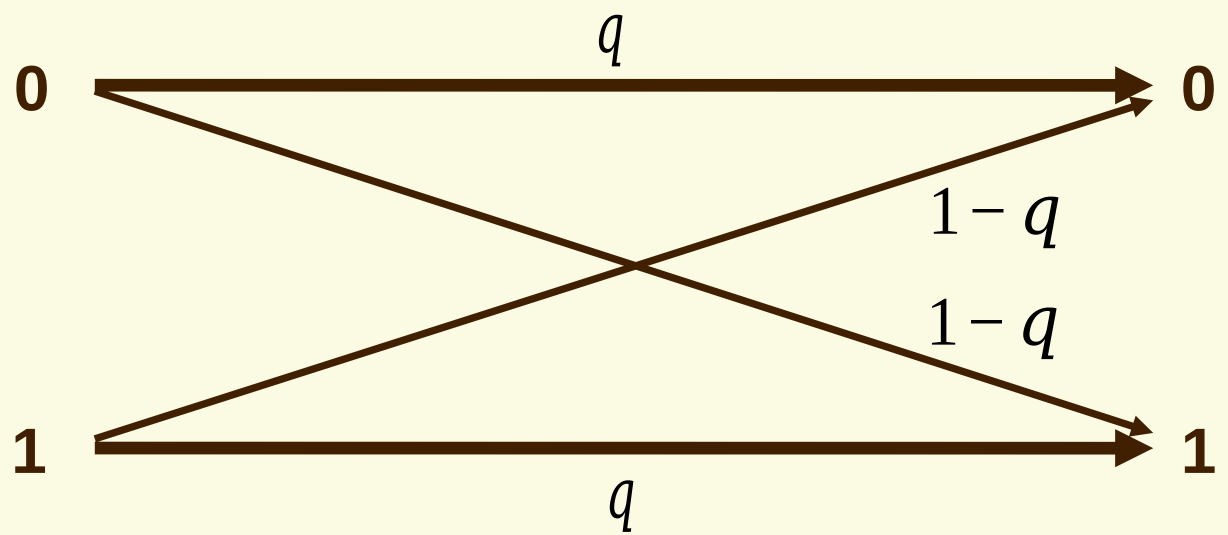
$$P(H|E) = \frac{P(H)\,P(E|H)}{P(E)}$$

***Probabilidad a posteriori*:** probabilidad de que la hipótesis H sea cierta dada la evidencia E

Probabilidad de observar la evidencia E

Probabilidad total y Bayes

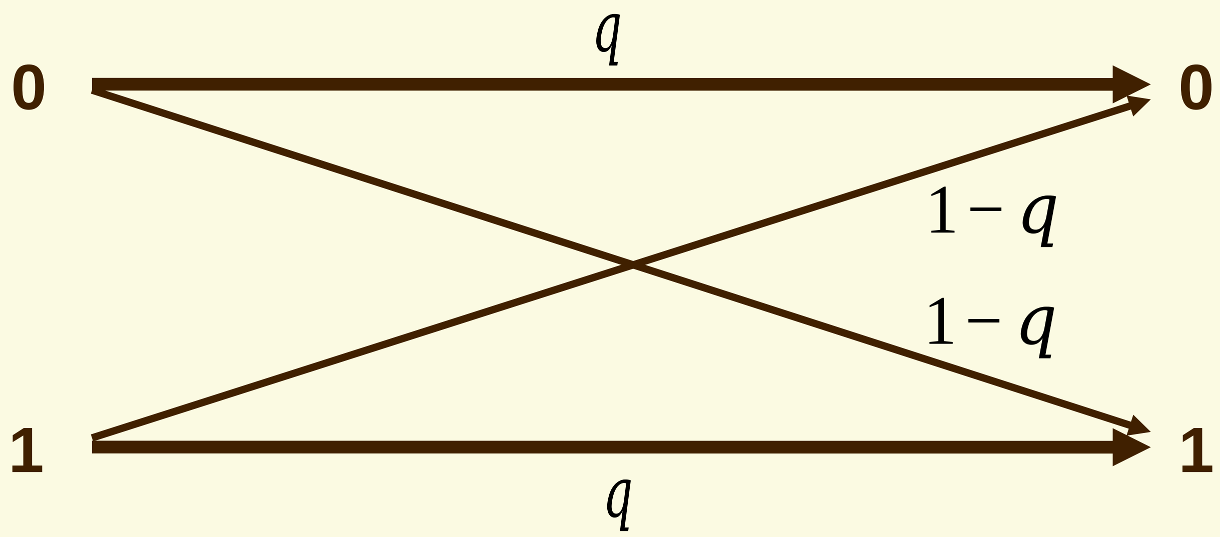
Un sistema de comunicaciones elemental consta de un transmisor que envía uno de dos posibles símbolos (**0** o **1**) a través de un canal hasta un receptor. Ocasionalmente se producen errores en el canal, de modo que un 1 aparece en el receptor como un 0 y viceversa.



Probabilidad total y Bayes

: “el símbolo antes de entrar en el canal es **1**”,
: es el complemento de ;
: es el suceso: “el símbolo a la salida del canal es **1**”;
: es el complemento de .

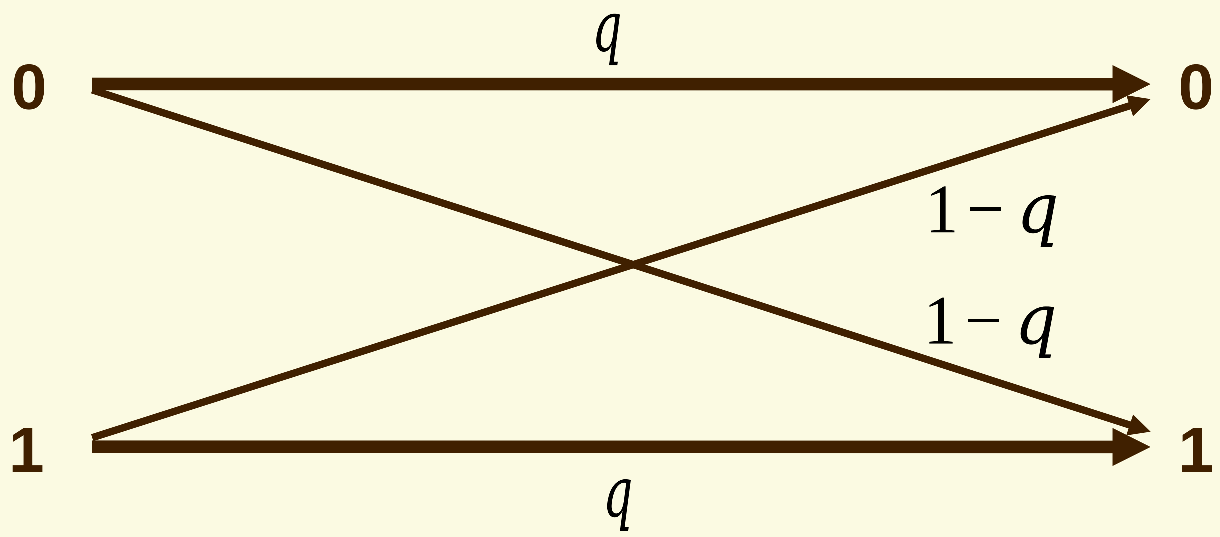
Se supone que y que el canal es simétrico ya que .



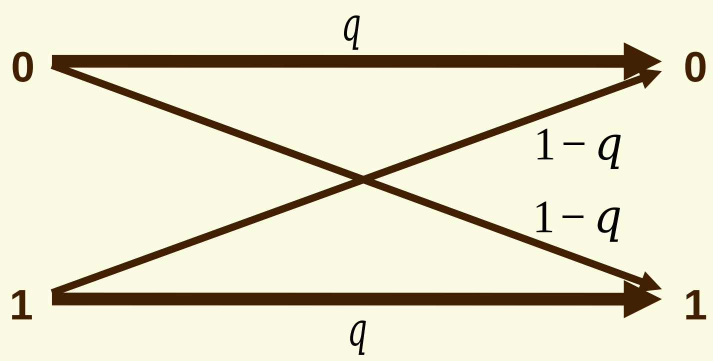
Probabilidad total y Bayes

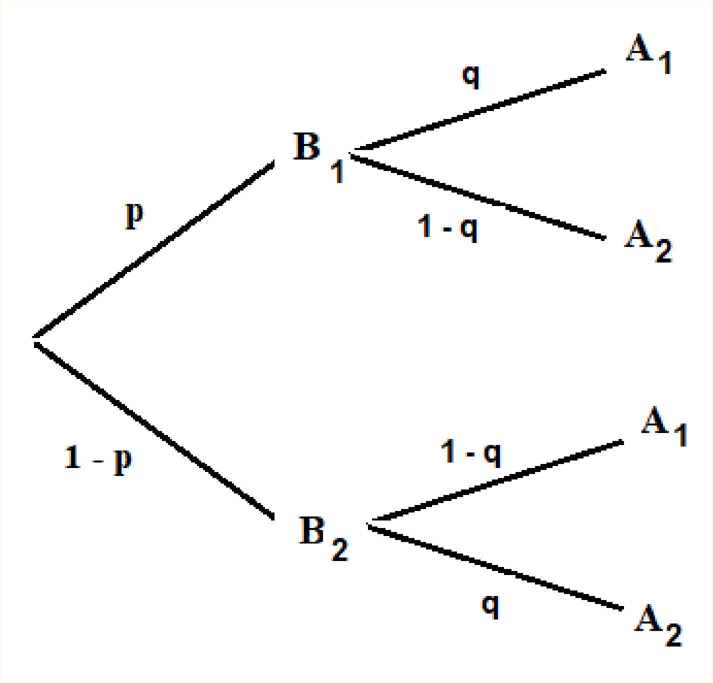
- Si y calcule y .

- Calcule la probabilidad de que un símbolo cambie entre la entrada y la salida del canal.



Probabilidad total y Bayes





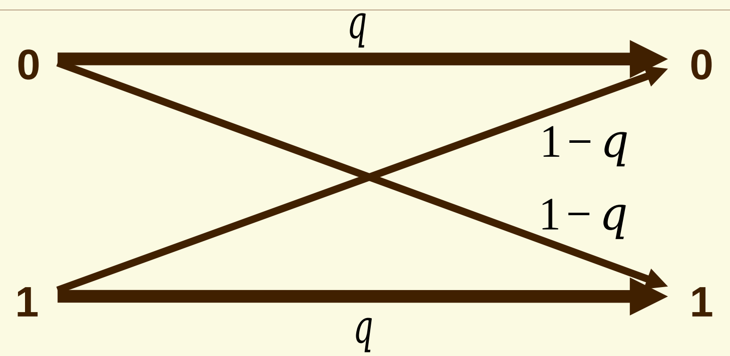
(

$$P(A_2)=1-P(A_1)=1-0.58=0.42$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{P(A_1|B_1)P(B_1)}{P(A_1)}=\frac{q\,p}{P(A_1)}=\frac{0.54}{0.58}\approx 0.931$$

$$P(B_2|A_1)\approx 0.069$$

Probabilidad total y Bayes



$$P(B_2|A_2)=\frac{P(A_2|B_2)P(B_2)}{P(A_2)}=\frac{q(1-p)}{P(A_2)}=\frac{0.36}{0.42}\approx 0.857$$

$$P(B_1|A_2)\approx 0.143$$

: el símbolo cambia entre entrada y salida

$$P(C)=P(A_2|B_1)P(B_1)+P(A_1|B_2)P(B_2)=(1-q)p+(1-q)(1-p)$$

$P(C)=(1-q)=0.1$ El resultado es independiente de