Ejercicios Resueltos TP5

Índice

1. Ejercicio 7

Enunciado

El radio R de una esfera se considera una variable aleatoria continua. Supongamos que R tiene una función densidad de probabilidad $f_R(r) = 6r(1-r),\ 0 < r < 1$. Obtener la función densidad de probabilidad del volumen V y del área A de la esfera.

Resolución

Variable aleatoria

Las variables aleatorias nos vienen dadas y son:

- $R =$ radio de una esfera seleccionada al azar.
- $V =$ volumen de una esfera seleccionada al azar.
- $A =$ área externa de una esfera seleccionada al azar.

Eventos y Datos

Tenemos como datos la densidad de R y además, que V y A son funciones de R:

- $V(R) = \dfrac{4\pi}{3} \cdot R^3$
- $A(R) = 4\pi \cdot R^2$

Además, vale rescatar que todas estas variables aleatorias son continuas.

Nos piden la densidad de V y A. Para eso, podemos empezar calculando sus funciones de distribución y luego derivarlas. Además, si bien no tenemos la distribución de R, sí tenemos su densidad y podemos utilizar esa información ya que V y A son funciones de R.

Distribución de V

Por definición, la distribución de V viene dada por:

$$F_V(v) = P(V \leq v), \quad v \in \mathbb{R}$$

Recordemos ahora que $V = V(R) = \dfrac{4\pi}{3} \cdot R^3$. Por lo tanto:

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \leq v) = P\left(R^3 \leq \frac{3v}{4\pi}\right) = P\left(R \leq \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right) = F_R\left(\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right)$$

Es decir, hemos logrado escribir la distribución de V en función de la distribución de R. No tenemos la distribución de R pero veamos que no es necesario. Como nos piden la densidad de V, podemos derivar la expresión obtenida:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv}[F_V(v)] = \frac{d}{dv}\left[F_R\left(\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right)\right] = f_R\left(\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right) \cdot \underbrace{\frac{d}{dv}\left[\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right]}_{\text{Regla de la cadena}} = f_R\left(\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4\pi}}_{\text{Regla de la cadena}}$$

Notar que aún no hemos determinado valores para v, por lo que la igualdad es para todo $v \in \mathbb{R}$, aunque muchos valores tendrán densidad nula. Intuitivamente, si $0 < r < 1$, entonces $0 < v < \frac{4\pi}{3}$. Sin embargo, esta determinación no siempre es tan intuitiva, por lo que debemos aprender a hacerlo con cuidado para esos casos:

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r(1-r) & \text{si } 0 < r < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_V(v) = f_R\left(\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{4\pi} = \begin{cases} 6\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\left(1-\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{4\pi} & \text{si } 0 < \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Aglomerando términos (están exceptuados de la distancia social), tenemos la siguiente expresión:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi}\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) & \text{si } 0^3 \cdot \frac{4\pi}{3} < v < 1^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3v}} - 1\right) & \text{si } 0 < v < \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Observación: Notar que cuando $v \to 0$, $f_V(v) \to +\infty$, sin embargo, se puede verificar que la integral impropia de esta densidad da 1 como resultado.

Distribución de A

Nuevamente, comenzamos con la distribución de A:

$$F_A(a) = P(A \leq a) = P(4\pi R^2 \leq a) = P\left(R^2 \leq \frac{a}{4\pi}\right)$$

Para poder tomar raíz a ambos lados, el miembro derecho debe ser mayor o igual que cero. Esto no significa que para $a < 0$ no se pueda calcular:

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow F_A(a) = P\left(\underbrace{R^2}_{\geq 0} \leq \underbrace{\frac{a}{4\pi}}_{<0}\right) = 0 \Rightarrow \text{Si } a < 0 : f_A(a) = 0$$

Ahora, tomando $a \geq 0$, podemos tomar la raíz cuadrada a ambos lados:

$$P\left(R^2 \leq \frac{a}{4\pi}\right) = P\left(\sqrt{R^2} \leq \sqrt{\frac{a}{4\pi}}\right) = P\left(|R| \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \leq R \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) = F_R\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) - F_R\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right)$$

Por otro lado, podemos derivar esta expresión respecto de a:

$$f_A(a) = \frac{d}{da}\left[F_R\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) - F_R\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right)\right] = f_R\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{\pi a}}\right) - f_R\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right)\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi a}}\right)$$

Tengamos en cuenta que $-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} < 0$, $f_R\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) = 0$. Entonces,

$$f_A(a) = \frac{1}{4\sqrt{\pi a}} f_R\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\pi a}} 6 \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) & \text{si } 0 < \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego:

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\right) & \text{si } 0 < a < 4\pi \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2. Ejercicio 18

Enunciado

Cierto supermercado tiene una caja de atención común y otra caja rápida. Supongamos que X es el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y que Y es el número de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. La distribución de probabilidades conjunta de (X, Y) se resume en la siguente tabla:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0,08	0,07	0,04	0
1	0,06	0,15	0,05	0,04
2	0,05	0,04	0,1	0,06
3	0	0,03	0,04	0,07
4	0	0,01	0,05	0,06

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada línea de espera?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de clientes en cada cola sea la misma?

c) Calcular la probabilidad de que haya por lo menos dos clientes más en una cola de espera que en la otra.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de clientes en ambas colas sea exactamente 4?

e) Calcular el valor esperado del número de clientes en cada caja.

f) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

Resolución

Variables Aleatorias

Las variables son las definidas en el enunciado:

- X = cantidad de clientes en la caja común.
- Y = cantidad de clientes en la caja rápida.

Datos

Sabemos la función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$.

2.1. Item a

La probabilidad de que haya un cliente en cada línea se corresponde con el evento $X = 1, Y = 1$:

$$P(X = 1, Y = 1) = p_{XY}(1, 1) = 0{,}15$$

2.2. Item b

Que ambas filas tengan la misma cantidad de gente se traduce en el evento $X = Y$. Para calcular este evento, podemos usar el teorema de probabilidad total, basado en la partición dada por $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$P(X = Y) = \sum_{j \in R_Y} P(X = Y, Y = j) = \sum_{j=0}^{3} P(X = j, Y = j) = 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}07 = 0{,}4$$

2.3. Item c

Consideramos el siguiente evento:

$$A = \text{hay al menos dos personas más en una fila que en otra.}$$

Este evento se puede dar en dos circunstancias, en las que $X > Y$ o $X < Y$. Notar que no pueden ocurrir simultáneamente A y $X = Y$. Es decir,

$$P(A) = P(A \cap X > Y) + P(A \cap X < Y)$$

Calcularemos ambos términos por separado:

$$P(A \cap X > Y) = \underbrace{P(X=2,Y=0)}_{0{,}05} + \underbrace{P(X=3,Y=0)}_{0} + \underbrace{P(X=4,Y=0)}_{0} + \underbrace{P(X=3,Y=1)}_{0{,}03} + \underbrace{P(X=4,Y=1)}_{0{,}01} + \underbrace{P(X=4,Y=2)}_{0{,}05} = 0{,}14$$

Por otro lado,

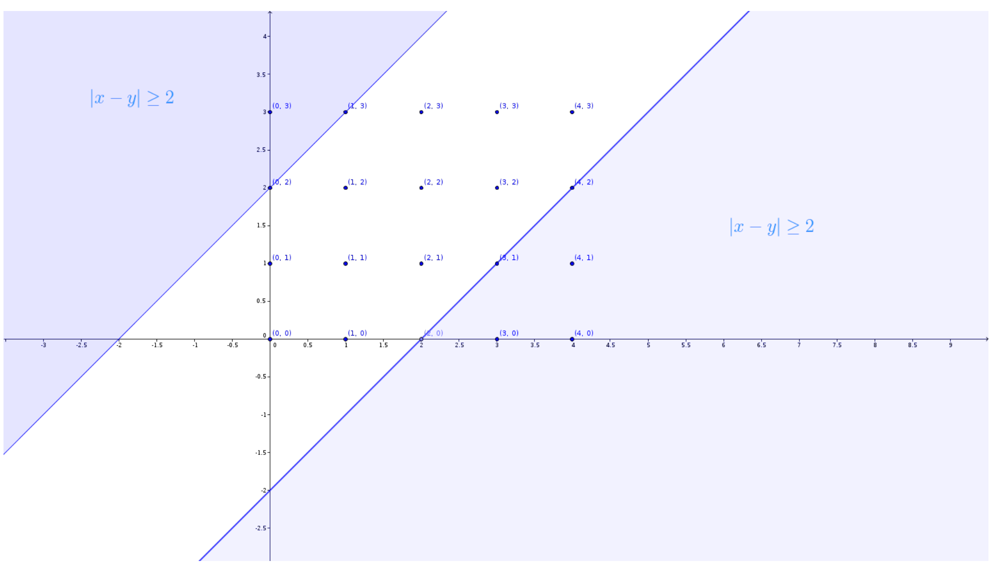
$$P(A \cap X < Y) = \underbrace{P(X=0,Y=2)}_{0{,}04} + \underbrace{P(X=0,Y=3)}_{0} + \underbrace{P(X=1,Y=3)}_{0{,}04} = 0{,}08$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 0{,}14 + 0{,}08 = 0{,}22$$

Notemos que tuvimos que contabilizar una gran cantidad de celdas de la tabla de contingencia y no es tan inmediato cuáles de estas celdas incluir en el cálculo. Otra forma de pensarlo es mediante un gráfico bidimensional que capture las características probabilísticas de ambas variables, nos puede facilitar cómo determinar las probabilidades a considerar.

Antes tenemos que pensar el evento A en términos de X e Y. Notemos que una diferencia entre ambos de dos o más personas, se traduce en el evento $|X - Y| \geq 2$. Por lo tanto, caracterizando los puntos de la tabla como coordenadas en el plano cartesiano, podemos identificar fácilmente los que pertenecen a la región:



Es decir, podemos determinar los puntos a considerar sólo mirando el gráfico:

- $(X,Y) = (0,2)$
- $(X,Y) = (1,3)$
- $(X,Y) = (3,0)$
- $(X,Y) = (3,1)$
- $(X,Y) = (4,2)$
- $(X,Y) = (0,3)$
- $(X,Y) = (2,0)$
- $(X,Y) = (4,0)$
- $(X,Y) = (4,1)$

Más aún, podíamos excluir de antemano los puntos de probabilidad nula del gráfico y obtener únicamente: Es decir, podemos determinar los puntos a considerar sólo mirando el gráfico:

- $(X, Y) = (0, 2)$
- $(X, Y) = (1, 3)$
- $(X, Y) = (2, 0)$
- $(X, Y) = (3, 1)$
- $(X, Y) = (4, 1)$
- $(X, Y) = (4, 2)$

2.4. Item d

Aquí nos piden la probabilidad de que entre ambas colas haya 4 clientes. Entonces, usando el teorema de probabilidad total:

$$P(X+Y=4) = \sum_{j \in R_Y} P(X+Y=4, Y=j) = \sum_{j=0}^{3} P(X=4-j, Y=j) =$$

$$= P(X=4, Y=0) + P(X=3, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=1, Y=3) = 0 + 0{,}03 + 0{,}1 + 0{,}04 = 0{,}17$$

2.5. Item e

Para calcular el valor medio de cada variable, podríamos pensar dos funciones $g(X, Y) = X$ y $h(X, Y) = Y$. Entonces,

- $E(X) = E(g(X,Y)) = \sum_{i \in R_X} \sum_{j \in R_Y} g(i,j) \cdot p_{XY}(i,j) = \sum_{i \in R_X} \sum_{j \in R_Y} i \cdot p_{XY}(i,j)$
- $E(Y) = E(h(X,Y)) = \sum_{i \in R_X} \sum_{j \in R_Y} h(i,j) \cdot p_{XY}(i,j) = \sum_{i \in R_X} \sum_{j \in R_Y} j \cdot p_{XY}(i,j)$

Notar que si bien esta opción es válida, debemos sumar sobre toda la tabla. Sin embargo, podemos utilizar la siguiente propiedad:

- $E(X) = \sum_{i \in R_X} i \cdot \underbrace{\sum_{j \in R_Y} p_{XY}(i,j)}_{p_X(i)} = \sum_{i=0}^{4} i \cdot p_X(i)$
- $E(Y) = \sum_{j \in R_Y} j \cdot \underbrace{\sum_{i \in R_X} p_{XY}(i,j)}_{p_Y(j)} = \sum_{j=0}^{3} j \cdot p_Y(j)$

Al ser variables discretas y de pocos valores, quizás resulta más sencillo utilizar las probabilidades marginales, ya que su cálculo se obtiene de sumar respecto de las filas o las columnas de la tabla, ubicando los resultados al margen (dándole el nombre de marginales):

$X \setminus Y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	0,08	0,07	0,04	0	0,19
1	0,06	0,15	0,05	0,04	0,3
2	0,05	0,04	0,1	0,06	0,25
3	0	0,03	0,04	0,07	0,14
4	0	0,01	0,05	0,06	0,12
$p_Y(y)$	0,19	0,3	0,28	0,23	1

Por lo tanto,

- $E(X) = \sum_{i=0}^{4} i \cdot p_X(i) = 0 \cdot 0{,}19 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}14 + 4 \cdot 0{,}12 = 1{,}7$
- $E(Y) = \sum_{j=0}^{3} j \cdot p_Y(j) = 0 \cdot 0{,}19 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}28 + 3 \cdot 0{,}23 = 1{,}55$

2.6. Item f

Si X e Y son independientes, $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$. Esto debe cumplirse para todo valor de x e y.

En casos donde la tabla de probabilidad conjunta tiene valores nulos, podemos sospechar que ambas variables no son independientes, ya que para que lo sean, debería cumplirse que alguno de los valores tenga una probabilidad marginal nula. Esto nos diría que dicho valor no se encuentra en el recorrido.

Más concretamente, como $p_{X,Y}(4, 0) = 0$, para que sean independientes, debería suceder que $p_X(4) = 0$ o $p_Y(0) = 0$. Sin embargo, como $p_X(4) = 0{,}12$ o $p_Y(0) = 0{,}19$, entonces:

$$p_{X,Y}(4, 0) = 0 \neq 0{,}12 \cdot 0{,}19 = p_X(4) \cdot p_Y(0)$$

Por lo tanto, X e Y no son independientes.

3. Ejercicio 20

Enunciado

Las variables aleatorias discretas X e Y son independientes y cada una tiene distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0{,}5$

a) Calcular $P(2X + 3Y < 10)$ y $P(X = Y)$.

b) Obtener la distribución de probabilidades de $Z = X + Y$. Verificar que Z tiene distribución binomial e identificar sus parámetros. Calcular $E(Z)$ y $V(Z)$.

Resolución

Variables aleatorias y datos

En este caso las variables aleatorias X e Y no representan ningún escenario particular. Lo que sabemos de X e Y es que son independientes y sus distribuciones ($X, Y \sim \text{Bi}(3, p)$).

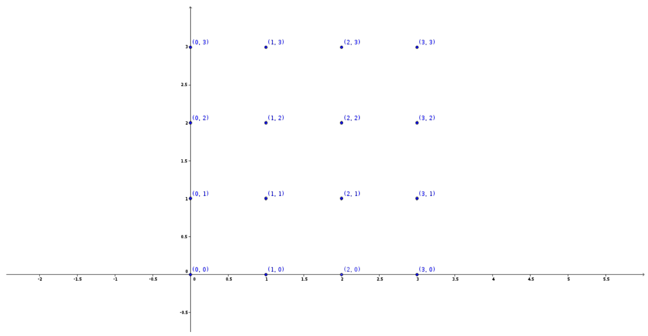
3.1. Item a

Con estos datos puedo obtener la distribución de probabilidad conjunta de X, Y. Como son independientes, se obtiene:

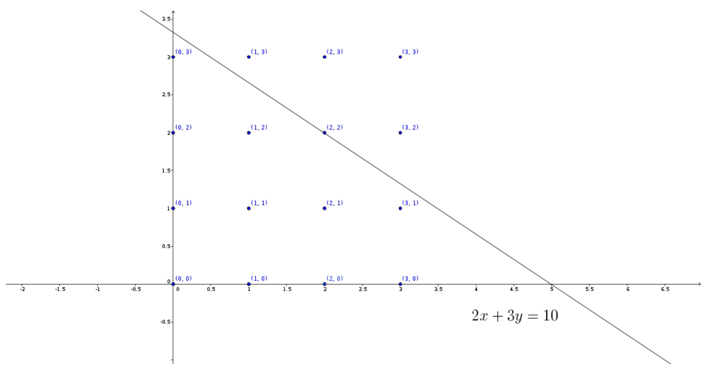
$$p_{XY}(i, j) = P(X = i, Y = j) \overset{\text{IND}}{=} P(X = i) \cdot P(Y = j) = \binom{3}{i} 0{,}5^i 0{,}5^{3-i} \cdot \binom{3}{j} 0{,}5^j 0{,}5^{3-j} = \binom{3}{i}\binom{3}{j} 0{,}5^6$$

Notar que esto tiene sentido sólo cuando $0 \leq i, j \leq 3$, de otro modo $p_{XY}(i, j) = 0$.

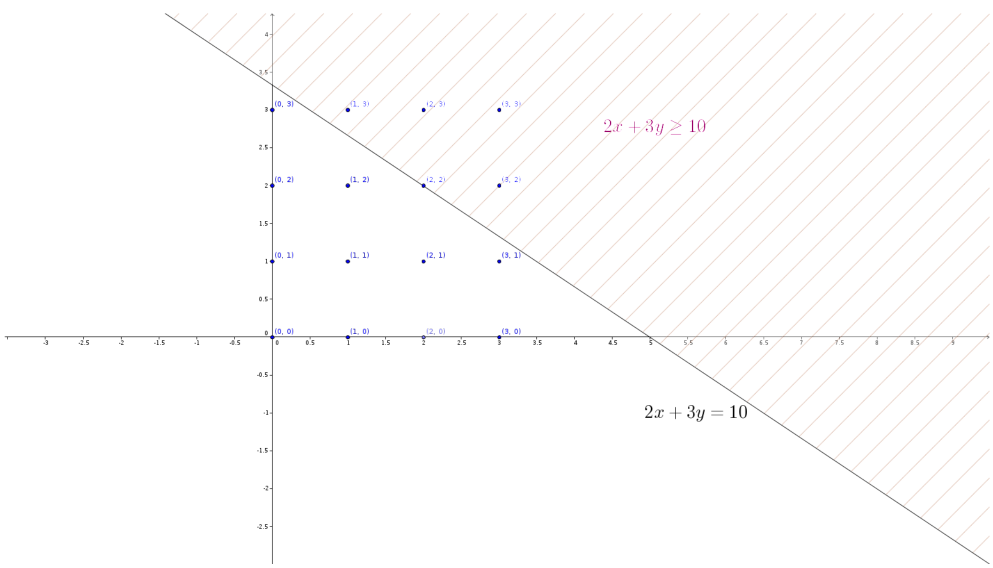
Podemos graficar estos puntos en un plano cartesiano para observar qué puntos debemos tener en cuenta para calcular la probabilidad de cualquier evento representando la región correspondiente:



Como me piden $P(2X + 3Y < 10)$, puedo graficar la región correspondiente y ver qué puntos debo considerar.



Observo que el semiplano $2x + 3y < 10$ contiene 11 puntos y el semiplano $2x + 3y \geq 10$ contiene sólo 5. Por lo tanto, me conviene calcular $P(2X + 3Y \geq 10)$ y luego utilizar la regla del complemento.



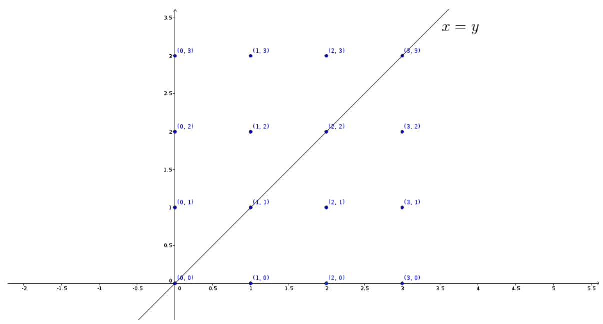
Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned}
P(2X+3Y<10) &= 1-P(2X+3Y\geq 10)\\
&= 1-p_{XY}(1,3)-p_{XY}(2,3)-p_{XY}(3,3)-p_{XY}(2,2)-p_{XY}(2,3)\\
&= 1-\binom{3}{1}\binom{3}{3}0{,}5^6-\binom{3}{2}\binom{3}{3}0{,}5^6-\binom{3}{3}\binom{3}{3}0{,}5^6-\binom{3}{2}\binom{3}{2}0{,}5^6-\binom{3}{3}\binom{3}{2}0{,}5^6\\
&= 1-0{,}5^6\cdot(3+3+1+9+3)=1-19\cdot 0{,}5^6=0{,}703125=\frac{45}{64}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular $P(X=Y)$, claramente hay que sumar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= p_{XY}(0,0)+p_{XY}(1,1)+p_{XY}(2,2)+p_{XY}(3,3)\\
&= \binom{3}{0}^2 0{,}5^6+\binom{3}{1}^2 0{,}5^6+\binom{3}{2}^2 0{,}5^6+\binom{3}{3}^2 0{,}5^6\\
&= 20\cdot 0{,}5^6=\frac{5}{16}=0{,}3125
\end{aligned}$$

Los puntos incluidos en el cálculo coinciden con lo que se puede observar gráficamente:



3.2. Item b

Ahora tenemos la siguiente variable:

$$Z=g(X,Y)=X+Y$$

Como $R_X=\{0,1,2,3\}$ y $R_Y=\{0,1,2,3\}$, considerando todos los resultados de las sumas posibles se tiene:

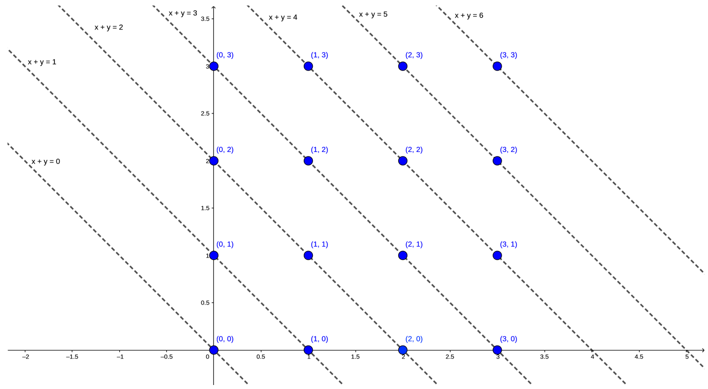
$$R_Z=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Nos piden verificar que la distribución de Z es binomial. Viendo el recorrido, ya podemos conjeturar al número 6 el primer parámetro. Resta ver la probabilidad de éxito.

Intuitivamente, tanto X como Y cuentan la cantidad de éxitos en 3 intentos independientes con una **misma** probabilidad de éxito $p=0{,}5$. Como a su vez cada grupo de tres intentos son independientes, podemos decir que $Z=X+Y$ cuenta la cantidad de éxitos en 6 intentos independientes con una probabilidad de éxito $p=0{,}5$.

Sin embargo este razonamiento no demuestra que $Z\sim \mathrm{Bi}(6;0{,}5)$ y debemos demostrarlo calculando las probabilidades puntuales y viendo que coinciden con las de dicha binomial.

Podemos calcular la probabilidad de que $Z = k$ graficando la recta $x + y = k$ y sumando sobre los puntos de probabilidad positiva que están sobre la recta. Haciendo variar k en los valores de R_Z se tiene:



Es decir,

- Para $k = 0$:

$$\begin{aligned} p_Z(0) &= P(Z=0) = P(X+Y=0) = p_{XY}(0,0) \\ &= \binom{3}{0}\binom{3}{0} 0{,}5^6 = 0{,}5^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

- Para $k = 1$:

$$\begin{aligned} p_Z(1) &= P(Z=1) = P(X+Y=1) = p_{XY}(1,0) + p_{XY}(0,1) = \\ &= \binom{3}{1}\binom{3}{0} 0{,}5^6 + \binom{3}{0}\binom{3}{1} 0{,}5^6 = 6 \cdot 0{,}5^6 = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

- Para $k = 2$:

$$\begin{aligned} p_Z(2) &= P(Z=2) = P(X+Y=2) = p_{XY}(2,0) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(0,2) \\ &= \binom{3}{2}\binom{3}{0} 0{,}5^6 + \binom{3}{1}\binom{3}{1} 0{,}5^6 + \binom{3}{0}\binom{3}{2} 0{,}5^6 \\ &= 15 \cdot 0{,}5^6 = \frac{15}{64} \end{aligned}$$

- Para $k = 3$:

$$\begin{aligned} p_Z(3) &= P(Z=3) = P(X+Y=3) = p_{XY}(3,0) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(0,3) \\ &= \binom{3}{3}\binom{3}{0} 0{,}5^6 + \binom{3}{2}\binom{3}{1} 0{,}5^6 + \binom{3}{1}\binom{3}{2} 0{,}5^6 + \binom{3}{0}\binom{3}{3} 0{,}5^6 \\ &= 20 \cdot 0{,}5^6 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

- Para $k = 4$:

$$\begin{aligned} p_Z(4) &= P(Z=4) = P(X+Y=4) = p_{XY}(3,1) + p_{XY}(2,2) + p_{XY}(1,3) \\ &= \binom{3}{3}\binom{3}{1} 0{,}5^6 + \binom{3}{2}\binom{3}{2} 0{,}5^6 + \binom{3}{1}\binom{3}{3} 0{,}5^6 \\ &= 15 \cdot 0{,}5^6 = \frac{15}{64} \end{aligned}$$

- Para $k = 5$:

$$\begin{aligned} p_Z(5) &= P(Z=5) = P(X+Y=5) = p_{XY}(2,3) + p_{XY}(3,2) = \\ &= \binom{3}{2}\binom{3}{3} 0{,}5^6 + \binom{3}{3}\binom{3}{2} 0{,}5^6 = 6 \cdot 0{,}5^6 = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

- Para $k = 6$:

$$\begin{aligned} p_Z(6) &= P(Z=6) = P(X+Y=6) = p_{XY}(3,3) = \\ &= \binom{3}{3}\binom{3}{3} 0{,}5^6 = 0{,}5^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Notemos que si se calculan las probabilidades de una binomial de parámetros 6 y 0,5, coinciden con las obtenidas. Por ejemplo,

$$p_Z(3) = \binom{6}{3} 0{,}5^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

Por otro lado, notemos además que las probabilidades son simétricas respecto de $k = 3$. Es decir,

- $p_Z(0) = p_Z(6) = \frac{1}{64}$
- $p_Z(1) = p_Z(5) = \frac{3}{32}$
- $p_Z(2) = p_Z(4) = \frac{15}{64}$

Esto se debe a que la $p = 1 - p = 0{,}5$, por lo que las potencias de la binomial resultan siempre idénticas. En cuanto a los combinatorios, recordar que:

- $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$
- $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$

Notar que hay además que siempre que en una probabilidad puntual (por ejemplo, $p_Z(1)$) aparece uno de estos combinatorios (por ejemplo, $\binom{3}{1}$), en la probabilidad puntual simétrica (en este caso, $p_Z(5)$) aparece el combinatorio de mismo valor (es decir, $\binom{3}{2}$)

4. Ejercicio 30

Enunciado

Dos personas han quedado citadas en un lugar. El instante de llegada de cada una a ese lugar puede suponerse una variable aleatoria con distribución uniforme en (0, 30) y que esos instantes de llegada son independientes.

a) Obtener la función de distribución y de densidad de probabilidad del tiempo T que una persona espera a la otra.

b) Calcular el valor esperado y el desvío estándar de T.

Resolución

Variables aleatorias

Consideramos las siguientes variables aleatorias:

- X = tiempo de llegada de la persona A.
- Y = tiempo de llegada de la persona B.
- T = tiempo de espera entre ambos.

Datos

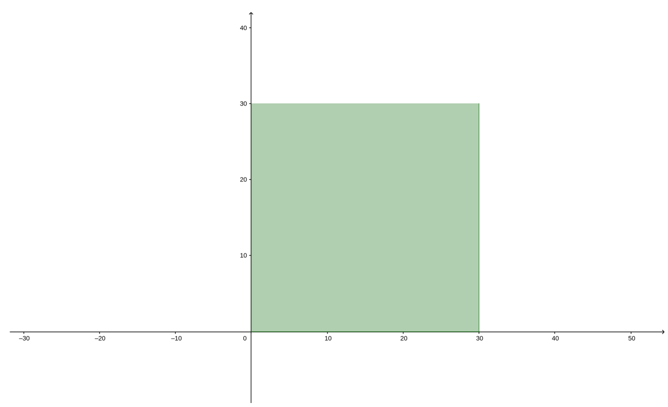
Sabemos que $X, Y \sim \mathcal{U}(0;30)$, por lo tanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si } 0 < x < 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \wedge \, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si } 0 < y < 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Al ser independientes,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{900} & \text{si } 0 < x, y < 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, todas las consideraciones sobre las probabilidades que dependen de X e Y hay que evaluarlas en este cuadrado:



4.1. Item a

Debemos calcular $F_T(t) = P(T \leq t)$. Claramente, no se pueden esperar menos de 0 minutos y con probabilidad 1 se esperan menos de 30 minutos, por lo que $F_T(t) = 0$ si $t < 0$ y $F_T(t) = 1$ si $t > 30$.

Tomaremos el caso más interesante de $t \in (0, 30)$. Notemos que por probabilidad total:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(T \leq t, X \leq Y) + P(T \leq t, X > Y)$$

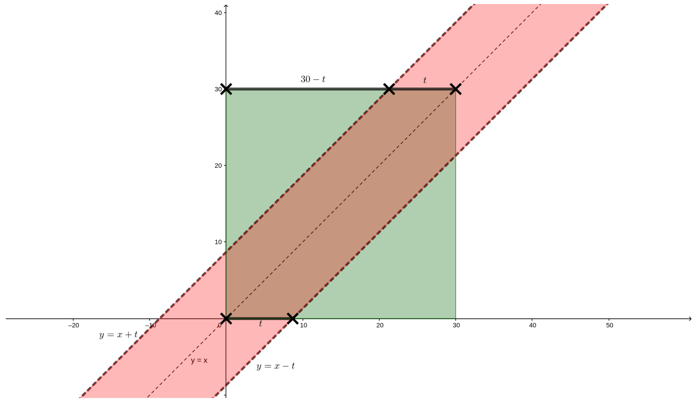
Por otro lado, si $X \leq Y$ significa que la persona A llegó antes que la persona B, por lo que $T = Y - X$. Del mismo modo, si $X > Y \Rightarrow T = X - Y$. Es decir,

$$P(T \leq t, X \leq Y) + P(T \leq t, X > Y) = P(Y - X \leq t, X \leq Y) + P(X - Y \leq t, X > Y)$$

Con algunos despejes, se tiene:

$$F_T(t) = P(X \leq Y \leq X + t) + P(X - t \leq Y < X)$$

Para calcular estas probabilidades, recurriremos a graficar la región:



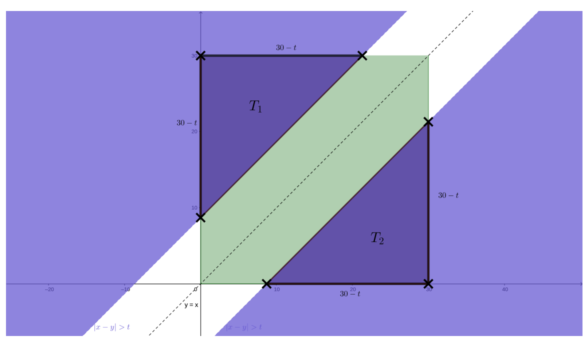
Por lo tanto, como cambian los límites de integración,

$$F_T(t) = \int_0^t \int_0^{x+t} f_{XY}(x,y)\,dydx + \int_t^{30-t} \int_{x-t}^{x+t} f_{XY}(x,y)\,dydx + \int_{30-t}^{30} \int_{x-t}^{30} f_{XY}(x,y)\,dydx$$

Esto se puede resolver de este modo, sin embargo, hay una forma más sencilla. Por empezar, notemos que dividir entre los casos $X \leq Y$ y $X > Y$ se puede simplificar considerando el tiempo de espera $T = |X - Y|$. Además, podemos calcular $F_T(t)$ usando el complemento:

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(|X - Y| > t)$$

Esta última expresión da lugar al siguiente gráfico:



Por lo tanto, podemos integrar la densidad sobre las regiones T_1 y T_2:

$$P(T > t) = \int\int_{T_1} f_{XY}(x,y)\,dydx + \int\int_{T_2} f_{XY}(x,y)\,dydx = \int\int_{T_1} \frac{1}{900}\,dydx + \int\int_{T_2} \frac{1}{900}\,dydx$$

Es decir,

$$P(T > t) = \frac{\int\int_{T_1} 1\,dydx}{900} + \frac{\int\int_{T_2} 1\,dydx}{900} = \frac{\text{Área}(T_1)}{900} + \frac{\text{Área}(T_2)}{900} = \frac{2\text{Área}(T_1)}{900} = \frac{(30-t)^2}{30^2} = \left(1 - \frac{t}{30}\right)^2$$

Por último,

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{t}{30}\right)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 30 \\ 1 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

Además, nos piden la densidad de probabilidad:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}[F_T(t)] = \begin{cases} 2\left(1 - \dfrac{t}{30}\right) \cdot \dfrac{1}{30} & \text{si } 0 \leq t \leq 30 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{15} - \dfrac{t}{450} & \text{si } 0 \leq t \leq 30 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

4.2. Item b

Ahora nos piden el valor esperado y el desvío de T. En cuanto al planteo, es inmediato al tener la densidad:

$$E(T) = \int_0^{30} t \cdot f_T(t)\, dt = \int_0^{30} \frac{t}{15} - \frac{t^2}{450}\, dt = \frac{30^2}{30} - \frac{30^3}{1350} = 30 - 20 = 10$$

Recordando que el desvío cumple $\sigma(T) = \sqrt{E(T^2) - E^2(T)} = \sqrt{E(T^2) - 10^2}$, debemos calcular $E(T^2)$:

$$E(T^2) = \int_0^{30} t^2 \cdot f_T(t)\, dt = \int_0^{30} \frac{t^2}{15} - \frac{t^3}{450}\, dt = \frac{30^3}{45} - \frac{30^4}{1800} = 600 - 450 = 150$$

De este modo, el desvío es $\sigma(T) = \sqrt{150 - 100} = \sqrt{50}$