Mezcla de variables aleatorias

Experimento

Un empleado va al trabajo en subte el 70% de las veces y en colectivo el 30% restante. El tiempo que tarda cuando va en subte es una variable aleatoria normal con media 30 min. y dispersión 5 min, mientras que el tiempo que tarda cuando va en colectivo es una variable aleatoria normal con media 40 min. y dispersión 8 min.

Se definen dos variables aleatorias continuas:

: tiempo de viaje (en min) .
: medio de transporte; = 0 si es subte, =1 sino.

Mezcla de variables aleatorias

$$p_M(m)=\begin{cases}0.7 & m=0\\ 0.3 & m=1\end{cases}$$

$$f_{T\vee M}(t\vee m)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi}5} & m=0\\ \text{¿}\,\dfrac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi}8} & m=1\end{cases}$$

$$f_{T,M}(t,m)=f_{T\vee M}(t\vee m)\,p_M(m)=\begin{cases}0.7\,\dfrac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi}5} & m=0\\ \text{¿}\,0.3\,\dfrac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi}8} & m=1\end{cases}$$

Mezcla de variables aleatorias

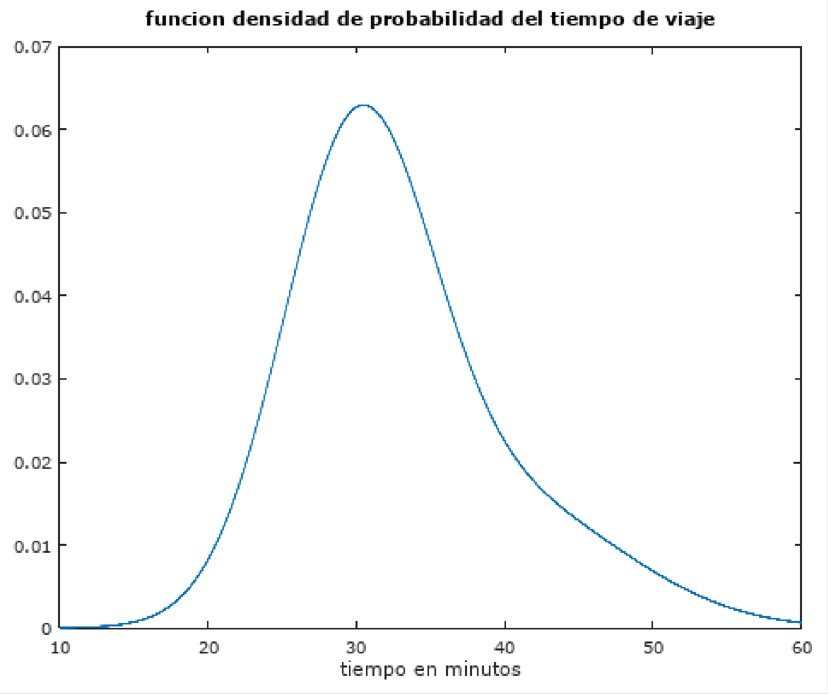
$$f_{T,M}(t,m) = f_{T \vee M}(t \vee m)\, p_M(m) = \begin{cases} 0.7 \dfrac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi 5}} & m=0 \\ \text{¿}0.3 \dfrac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi 8}} & m=1 \end{cases}$$

Densidad marginal

$$f_T(t) = \sum_{m=0}^{1} f_{T,M}(t,m) = 0.7 \frac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi 5}} + 0.3 \frac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi 8}}$$

Mezcla de variables aleatorias

$$f_T(t)=\sum_{m=0}^{1} f_{T,M}(t,m)=0.7\frac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi}5}+0.3\frac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi}8}$$



Mezcla de variables aleatorias

$$f_T(t)=\sum_{m=0}^{1} f_{T,M}(t,m)=0.7\,\frac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi}\,5}+0.3\,\frac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi}\,8}$$

$$\mu_T=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_T(t)\,dt=0.7\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi}\,5}\,dt+0.3\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi}\,8}\,dt$$

$$\mu_T=0.7\cdot 30+0.3\cdot 40=33$$

$$E\left[T^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t)\,dt=0.7\cdot\left(5^2+30^2\right)+0.3\cdot\left(8^2+40^2\right)=1146.7$$

$$\sigma_T^2=1146.7-33^2=57.7$$

$$\sigma_T\approx 7.6$$

Mezcla de variables aleatorias

$$f_{T,M}(t,m)=f_{T\vee M}(t\vee m)\,p_M(m)=\begin{cases} 0.7\dfrac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi 5}} & m=0 \\ \text{¿}\,0.3\dfrac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi 8}} & m=1 \end{cases}$$

Función marginal de masa de probabilidad

$$p_M(m)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T,M}(t,m)\,dt=\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0.7\frac{e^{-\frac{(t-30)^2}{50}}}{\sqrt{2\pi 5}}\,dt=0.7 & m=0 \\ \text{¿}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0.3\frac{e^{-\frac{(t-40)^2}{128}}}{\sqrt{2\pi 8}}\,dt=0.3 & m=1 \end{cases}$$

Mezcla de variables aleatorias

En general

Una variable aleatoria continua cuya densidad depende del valor de una variable aleatoria discreta .

$$f_{X \vee Y}(x \vee y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X \vee Y}(x \vee y)\, p_Y(y)$$

$$f_X(x) = \sum_{x \in R_Y} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x \in R_Y} f_{X \vee Y}(x \vee y)\, p_Y(y)$$

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_Y} E(g(X) | Y = y)\, p_Y(y) = \sum_{x \in R_Y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X \vee Y}(x \vee y)\, dx \right] p_Y(y)$$