APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

Autovalores y Autovectores

Sistemas de Inteligencia Artificial - 2024

TABLA DE CONTENIDOS

04

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

¿Cómo se obtienen?

COMBINACIÓN LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$

El vector $\overline{w}$ es una combinación lineal de $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\}$ cuando existen $\alpha_i \epsilon \mathbb{K}, i \epsilon \mathbb{R}$ tales que:

$$\overline{w} = \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + ... + \alpha_n \overline{v_n}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Ejemplo:
Sea la matriz A y el vector $\overline{v} = (x, y)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A\overline{v} = \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$$A\overline{v} = \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{bmatrix}$$

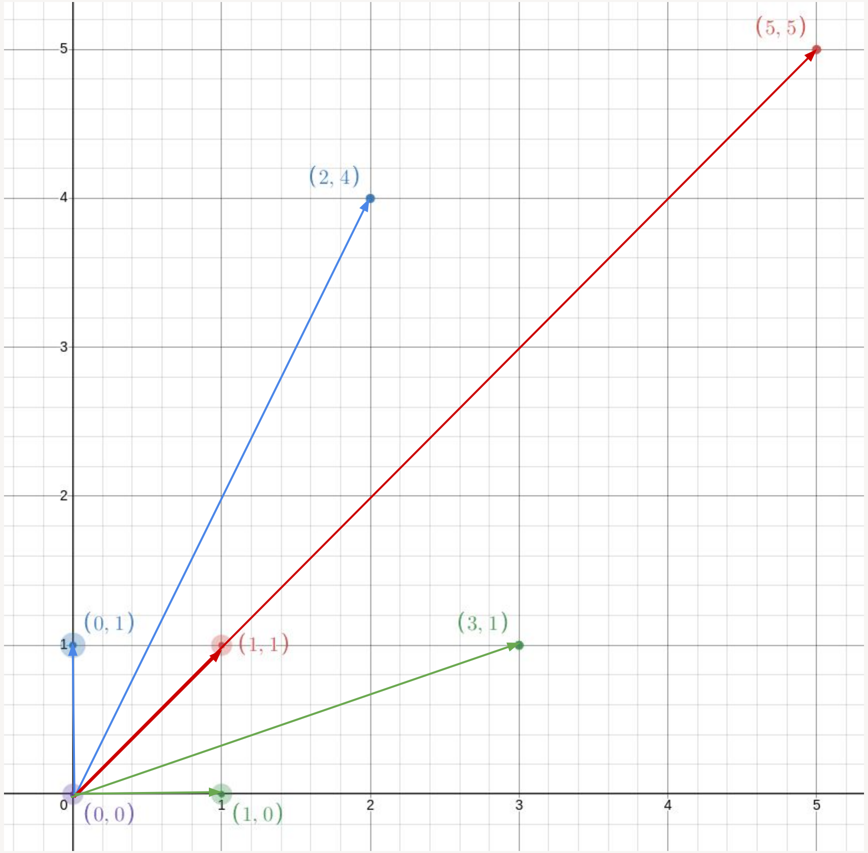
Si consideramos los siguientes ejemplos:

$$\overline{v} = (1,0) \qquad \overline{v} = (0,1) \qquad \overline{v} = (1,1)$$

$$A\overline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A\overline{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Gráficamente,
La transformación del primer cuadrante:



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

- El vector (1, 0) se transformó en el (3, 1) y no conservó la dirección
- El vector (0, 1) se transformó en el (2, 4) y no conservó la dirección
- *El vector (1, 1) se transformó en el (5, 5) y conservó la dirección con un escalamiento de 5*

Ese vector que mantuvo su dirección se denomina **autovector**,

y el factor por el cual se escaló es el **autovalor** correspondiente.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

autovector

vector que queda invariante después de una transformación

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} \;, \overline{v} \neq 0$$

autovalor

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} \ , \overline{v} \neq 0$$

Lo que es equivalente al sistema:

$$(A - \lambda\mathbb{I})\overline{v} = 0$$

Para obtener una solución no trivial:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

Polinomio característico

Las raíces son los autovalores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Los autovectores se obtienen resolviendo:

$$(A - \lambda \mathbb{I})\overline{v} = 0$$

Para cada autovalor hallado usando el polinomio característico

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Ejemplo: Calculamos los autovalores

$$A - \lambda \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 5$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$$(A - \lambda\mathbb{I})\overline{v} = 0$$

Ejemplo: Calculamos los autovectores

$$\lambda_1 = 2$$

$$(A - 2\mathbb{I}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y \xrightarrow[\text{con } y = 1]{\text{autovector}} \overline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$$(A - \lambda \mathbb{I})\overline{v} = 0$$

Ejemplo: Calculamos los autovectores

$$\lambda_2 = 5$$

$$(A - 5\mathbb{I}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \xrightarrow[\text{con } x = 1]{\text{autovector}} \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$