Teorema Central del Límite

Lic. Lucio José Pantazis

4/5/2023

Repaso

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda), X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda), X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda), X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$$

- **Suma de Normales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim$$

Sumas de variables aleatorias

Hemos comprobado ya las siguientes propiedades:

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left.\begin{cases} X_1, X_2 \sim Be(p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(2, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim Bi(n_1, p), X_2 \sim Bi(n_2, p) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim Po(\lambda_1), X_2 \sim Po(\lambda_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda), X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$$

- **Suma de Normales:**

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \\ X_1, X_2 \text{ ind} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Po(\lambda_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Po(\lambda_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Po(\lambda_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Po(\lambda_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- **Suma de Normales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$$

Sumas de variables aleatorias (en general)

Más generalmente, con n variables de cada "familia":

- **Suma de Bernoullies:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Be(p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, p)$$

- **Suma de Binomiales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Bi(n_i, p) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

- **Suma de Poisson:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim Po(\lambda_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- **Suma de Exponenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- **Suma de Normales:**

$$\left\{ \begin{array}{c} X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ ind} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

Desigualdad de Čebyšëv [1]

[1] **Wikipedia:** The surname Chebyshev has been transliterated in several different ways, like Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov (according to native Russian speakers, this one provides the closest pronunciation in English to the correct pronunciation in old Russian), and Chebychev, a mixture between English and French transliterations considered erroneous. **It is one of the most well known data-retrieval nightmares in mathematical literature.** Currently, the English transliteration Chebyshev has gained widespread acceptance, except by the French, who prefer Tchebychev. The correct transliteration according to ISO 9 is Čebyšëv. The American Mathematical Society adopted the transcription Chebyshev in its Mathematical Reviews.

Desigualdad de Čebyšëv [1]

Sea X una variable aleatoria **cualquiera** con media μ y varianza σ^2 (ambas finitas). Para cualquier valor de $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

[1] **Wikipedia:** The surname Chebyshev has been transliterated in several different ways, like Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov (according to native Russian speakers, this one provides the closest pronunciation in English to the correct pronunciation in old Russian), and Chebychev, a mixture between English and French transliterations considered erroneous. **It is one of the most well known data-retrieval nightmares in mathematical literature.** Currently, the English transliteration Chebyshev has gained widespread acceptance, except by the French, who prefer Tchebychev. The correct transliteration according to ISO 9 is Čebyšëv. The American Mathematical Society adopted the transcription Chebyshev in its Mathematical Reviews.

Desigualdad de Čebyšëv [1]

Sea X una variable aleatoria **cualquiera** con media μ y varianza σ^2 (ambas finitas). Para cualquier valor de $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Es decir, hay una cota para la probabilidad de que cualquier variable pueda alejarse de su valor medio, siempre y cuando tenga media y varianza finita.

[1] **Wikipedia:** The surname Chebyshev has been transliterated in several different ways, like Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov (according to native Russian speakers, this one provides the closest pronunciation in English to the correct pronunciation in old Russian), and Chebychev, a mixture between English and French transliterations considered erroneous. **It is one of the most well known data-retrieval nightmares in mathematical literature.** Currently, the English transliteration Chebyshev has gained widespread acceptance, except by the French, who prefer Tchebychev. The correct transliteration according to ISO 9 is Čebyšëv. The American Mathematical Society adopted the transcription Chebyshev in its Mathematical Reviews.

Desigualdad de Čebyšëv [1]

Sea X una variable aleatoria **cualquiera** con media μ y varianza σ^2 (ambas finitas). Para cualquier valor de $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Es decir, hay una cota para la probabilidad de que cualquier variable pueda alejarse de su valor medio, siempre y cuando tenga media y varianza finita.

Notar que esta cota no siempre es la mejor, ya que al poder adaptarse a una innumerable cantidad de variables aleatorias (ya sea discreta o continua), no siempre da la mejor información posible para algunas variables específicas.

[1] **Wikipedia:** The surname Chebyshev has been transliterated in several different ways, like Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov (according to native Russian speakers, this one provides the closest pronunciation in English to the correct pronunciation in old Russian), and Chebychev, a mixture between English and French transliterations considered erroneous. **It is one of the most well known data-retrieval nightmares in mathematical literature.** Currently, the English transliteration Chebyshev has gained widespread acceptance, except by the French, who prefer Tchebychev. The correct transliteration according to ISO 9 is Čebyšëv. The American Mathematical Society adopted the transcription Chebyshev in its Mathematical Reviews.

Desigualdad de Čebyšëv [1]

Sea X una variable aleatoria **cualquiera** con media μ y varianza σ^2 (ambas finitas). Para cualquier valor de $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Es decir, hay una cota para la probabilidad de que cualquier variable pueda alejarse de su valor medio, siempre y cuando tenga media y varianza finita.

Notar que esta cota no siempre es la mejor, ya que al poder adaptarse a una innumerable cantidad de variables aleatorias (ya sea discreta o continua), no siempre da la mejor información posible para algunas variables específicas.

De todas formas, es de mucha utilidad cuando no se sabe mucho sobre la variable que se está analizando.

[1] **Wikipedia:** The surname Chebyshev has been transliterated in several different ways, like Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov (according to native Russian speakers, this one provides the closest pronunciation in English to the correct pronunciation in old Russian), and Chebychev, a mixture between English and French transliterations considered erroneous. **It is one of the most well known data-retrieval nightmares in mathematical literature.** Currently, the English transliteration Chebyshev has gained widespread acceptance, except by the French, who prefer Tchebychev. The correct transliteration according to ISO 9 is Čebyšëv. The American Mathematical Society adopted the transcription Chebyshev in its Mathematical Reviews.

Variables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu$
  - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{IND^2}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu$
  - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{IND^{2}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n \cdot \mu$
  - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{IND}{=}$[2] $\sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$
- Del mismo modo, si consideramos el promedio de estas variables $\left(\text{la llamamos } \overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$, podemos calcular:

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n \cdot \mu$
  - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{IND^2}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$
- Del mismo modo, si consideramos el promedio de estas variables $\left(\text{la llamamos } \overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$, podemos calcular:
  - Su media: $E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
  - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n \cdot \mu$
  - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{IND^2}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$
- Del mismo modo, si consideramos el promedio de estas variables $\left(\text{la llamamos } \overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$, podemos calcular:
  - Su media: $E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$
  - Su varianza: $V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

La abreviación V.A.I.I.D. corresponde a **V**ariables **A**leatorias **I**ndependientes **I**dénticamente **D**istribuidas.Es decir, variables independientes con la misma distribución.

En esta guía estas colecciones de variables serán de sumo interés. Por ejemplo, ya que hablamos de sumas de variables aleatorias, si éstas son I.I.D., podemos deducir algunas propiedades.

- Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D. Al ser idénticamente distribuidas, tienen la misma media $E(X_i) = \mu$ y desvío $\sigma(X_i) = \sigma$.
- Si consideramos la suma de estas variables (la llamamos S_n), podemos calcular:
    - Su media: $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu$
    - Su varianza: $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{IND^{2}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$
- Del mismo modo, si consideramos el promedio de estas variables $\left(\text{la llamamos } \overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$, podemos calcular:
    - Su media: $E(\overline{X}_n) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot E(S_n) = \dfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$
    - Su varianza: $V(\overline{X}_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot V(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

[2] **Ojo:** No vale "distribuir" la varianza a través de la suma si las variables no son independientes

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

En conclusión, dadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., con media μ y desvío σ:

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

En conclusión, dadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., con media μ y desvío σ:

- $\underline{E(S_n) = n \cdot \mu}$, $V(S_n) = n \cdot \sigma^2 \Rightarrow \underline{\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma}$

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

En conclusión, dadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., con media μ y desvío σ:

- $\underline{E(S_n) = n \cdot \mu}$, $V(S_n) = n \cdot \sigma^2 \Rightarrow \underline{\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma}$
- $\underline{E(\overline{X}_n) = \mu}$, $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \underline{\sigma(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

En conclusión, dadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., con media μ y desvío σ:

- $\underline{E(S_n) = n \cdot \mu}$, $V(S_n) = n \cdot \sigma^2 \Rightarrow \underline{\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma}$
- $\underline{E(\overline{X}_n) = \mu}$, $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \underline{\sigma(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Pregunta: ¿Qué sucede con la media y el desvío de $\overline{X}_n$ si $n \to +\infty$?

Variables Aleatorias Independientes Idénticamente Distribuidas

En conclusión, dadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., con media μ y desvío σ:

- $\underline{E(S_n) = n \cdot \mu}$, $V(S_n) = n \cdot \sigma^2 \Rightarrow \underline{\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma}$
- $\underline{E(\overline{X}_n) = \mu}$, $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \underline{\sigma(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Pregunta: ¿Qué sucede con la media y el desvío de $\overline{X}_n$ si $n \to +\infty$?

El promedio está siempre centrado en la media μ, pero el desvío tiende a 0. Por lo que la variable se concentra más y más alrededor de μ hasta el punto de parecer una constante (son las únicas variables con desvío cero).

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)
- Poisson ($X_i \sim Po(3)$)

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)
- Poisson ($X_i \sim Po(3)$)
- Exponenciales ($X_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{10})$)

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)
- Poisson ($X_i \sim Po(3)$)
- Exponenciales ($X_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{10})$)

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)
- Poisson ($X_i \sim Po(3)$)
- Exponenciales ($X_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{10})$)

Haremos crecer los valores de n para ver esta tendencia, tomando los valores $n = 10$, $n = 30$, $n = 60$, $n = 100$.

Promedios $\overline{X}_n$

Para verificar que estas conclusiones valen para **cualquier** distribución, podemos tomar promedios de n v.a.i.i.d con las siguientes distribuciones:

- Normales ($X_i \sim N(10, 4)$)
- Binomiales ($X_i \sim Bi(5, 0.9)$)
- Poisson ($X_i \sim Po(3)$)
- Exponenciales ($X_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{10})$)

Haremos crecer los valores de n para ver esta tendencia, tomando los valores $n = 10$, $n = 30$, $n = 60$, $n = 100$.

El problema es el siguiente: ¿Cómo vemos si se concentra o no el promedio a medida que aumenta n? Con un promedio solo no alcanza. Por lo tanto, para cada distribución, trataremos de replicar $M = 200$ promedios de cada tamaño.

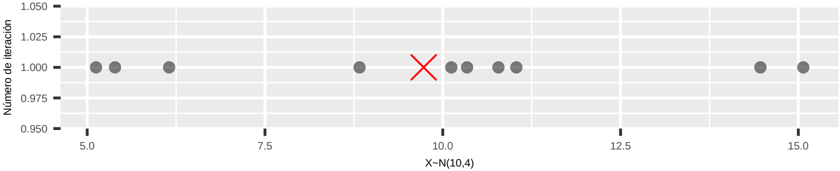
Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

A continuación mostramos cómo se visualizan estas distintas iteraciones y la concentración de los promedios. Comenzamos con una simulación de tamaño $n = 10$ de normales $X_i \sim N(10, 4)$:

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

A continuación mostramos cómo se visualizan estas distintas iteraciones y la concentración de los promedios. Comenzamos con una simulación de tamaño $n = 10$ de normales $X_i \sim N(10, 4)$:

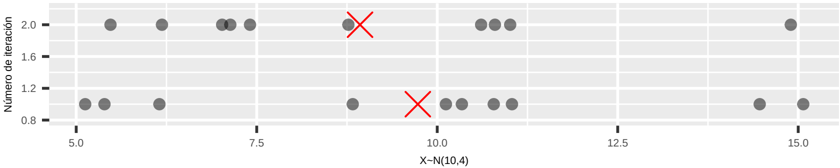
```
plot(GG)
```



Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Agregando otro vector de $n = 10$:

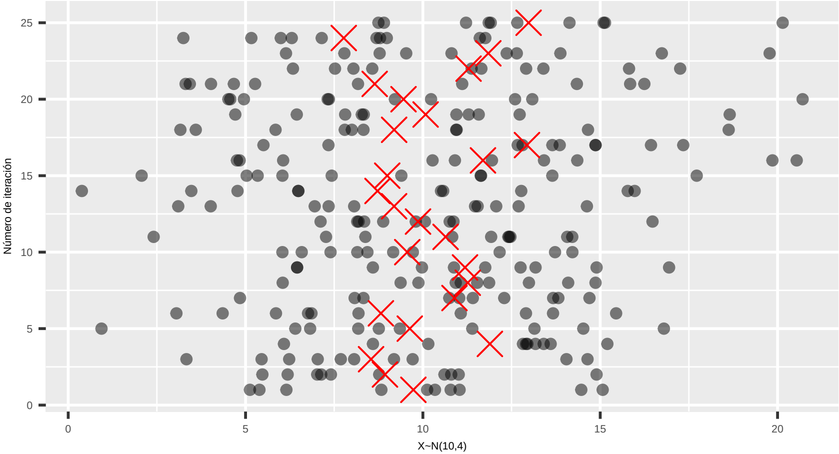
```
plot(GG)
```



Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Agregando más vectores de tamaño $n = 10$:

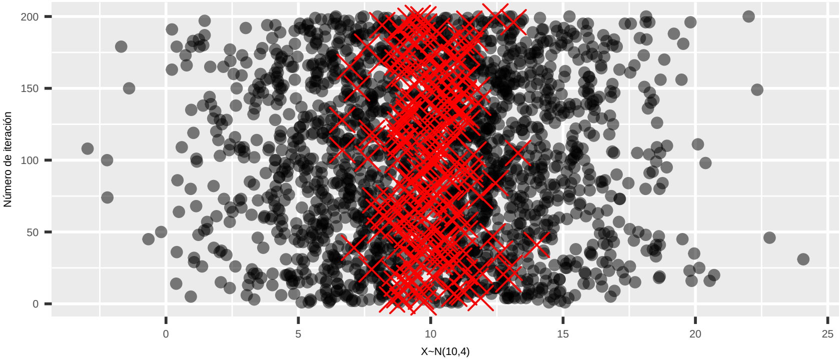
```
plot(GG)
```



Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Todas los promedios de tamaño $n = 10$ muestran la siguiente distribución:

```
plot(GG)
```

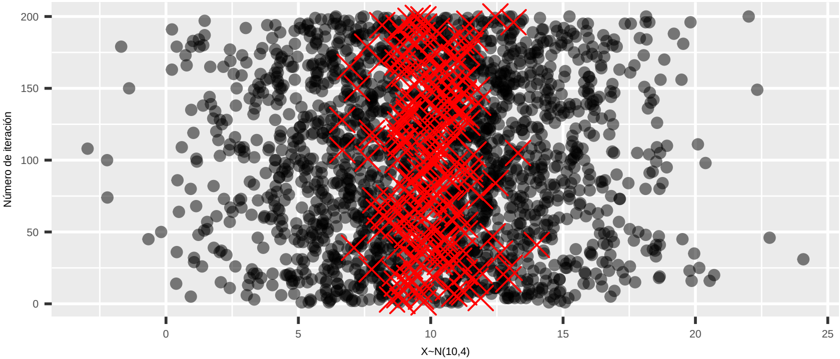


Podemos ver algunas cuestiones:

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Todas los promedios de tamaño $n = 10$ muestran la siguiente distribución:

```
plot(GG)
```



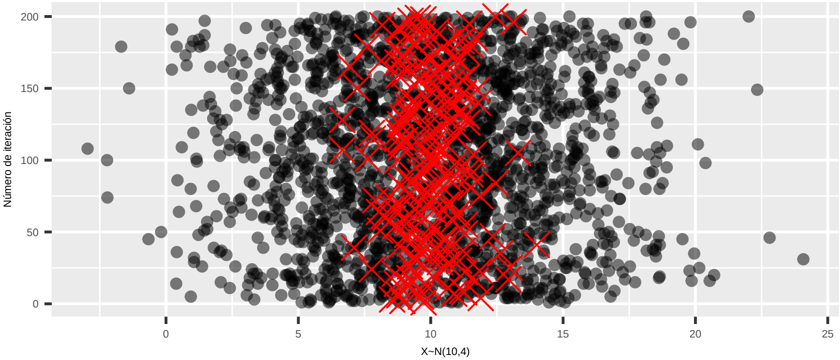
Podemos ver algunas cuestiones:

- Los promedios efectivamente se concentran alrededor de 10

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Todas los promedios de tamaño $n = 10$ muestran la siguiente distribución:

```
plot(GG)
```



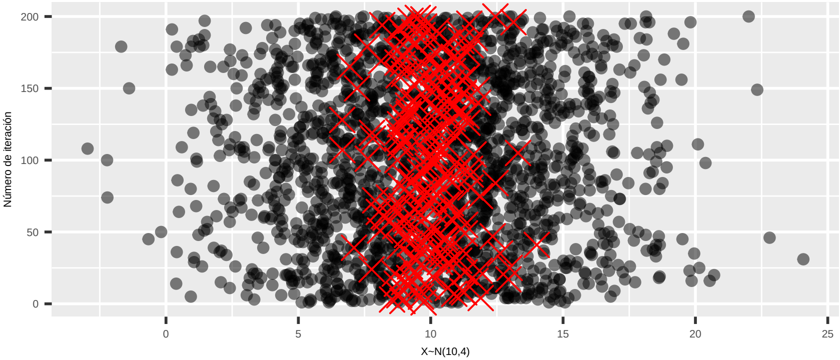
Podemos ver algunas cuestiones:

- Los promedios efectivamente se concentran alrededor de 10
- Los promedios se concentran más alrededor de 10 que la variable original

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Todas los promedios de tamaño $n = 10$ muestran la siguiente distribución:

```
plot(GG)
```



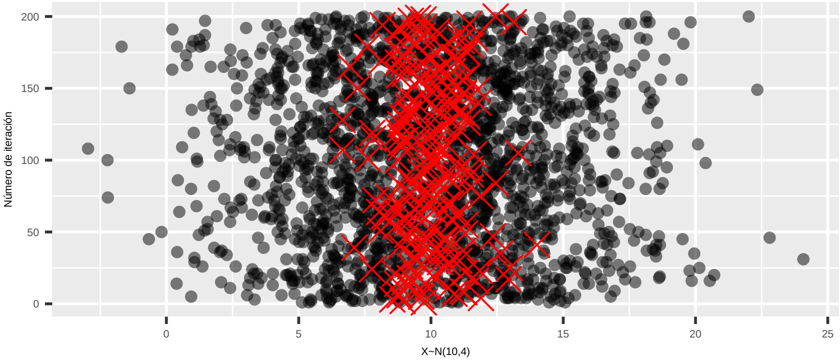
Podemos ver algunas cuestiones:

- Los promedios efectivamente se concentran alrededor de 10
- Los promedios se concentran más alrededor de 10 que la variable original
- El promedio es **variable**, es decir, puede tomar distintos valores.

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Todas los promedios de tamaño $n = 10$ muestran la siguiente distribución:

```
plot(GG)
```



Podemos ver algunas cuestiones:

- Los promedios efectivamente se concentran alrededor de 10
- Los promedios se concentran más alrededor de 10 que la variable original
- El promedio es **variable**, es decir, puede tomar distintos valores.

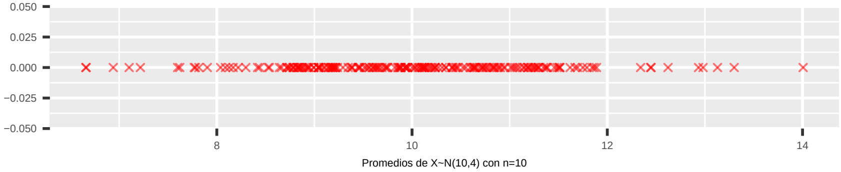
Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Podemos ver cómo se distribuyen estos promedios con un gráfico de valor vs constante:

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Podemos ver cómo se distribuyen estos promedios con un gráfico de valor vs constante:

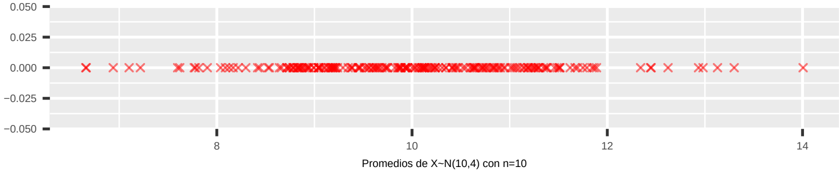
```
plot(GG)
```



Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Podemos ver cómo se distribuyen estos promedios con un gráfico de valor vs constante:

```
plot(GG)
```

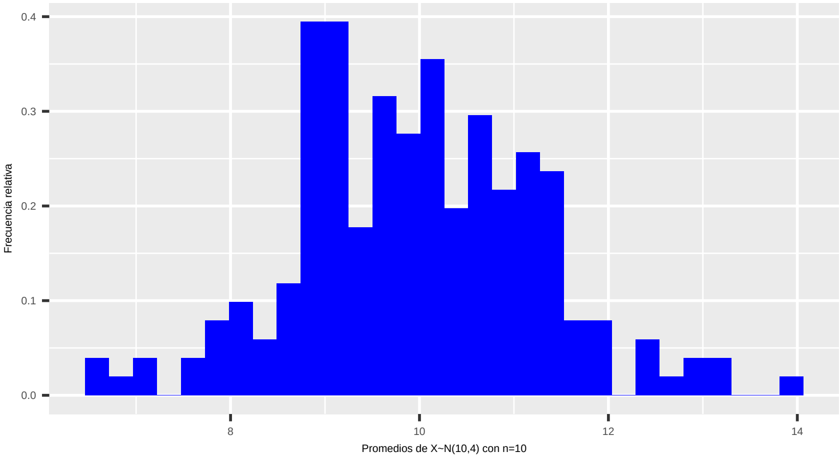


Notamos que, **al menos estos** promedios toman valores entre 6 y 14 aproximadamente, pero que hay mucha superposición que no permite evaluar correctamente cómo se distribuyen.

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Por lo tanto, vamos a evaluar mejor la distribución con un histograma de estos valores:

```
plot(GG)
```



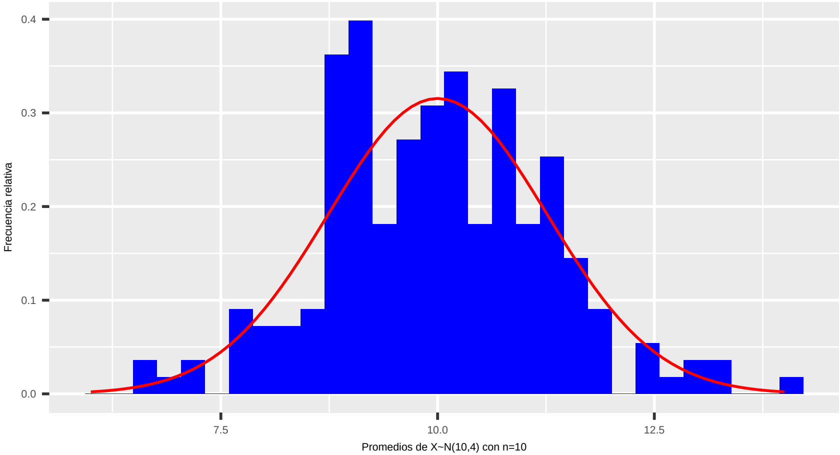
Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Además, como vimos anteriormente, al promediar normales también se observa que siguen una distribución normal de media 10 y desvío $\frac{4}{\sqrt{10}}$:

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Además, como vimos anteriormente, al promediar normales también se observa que siguen una distribución normal de media 10 y desvío $\frac{4}{\sqrt{10}}$:

```
plot(GG)
```



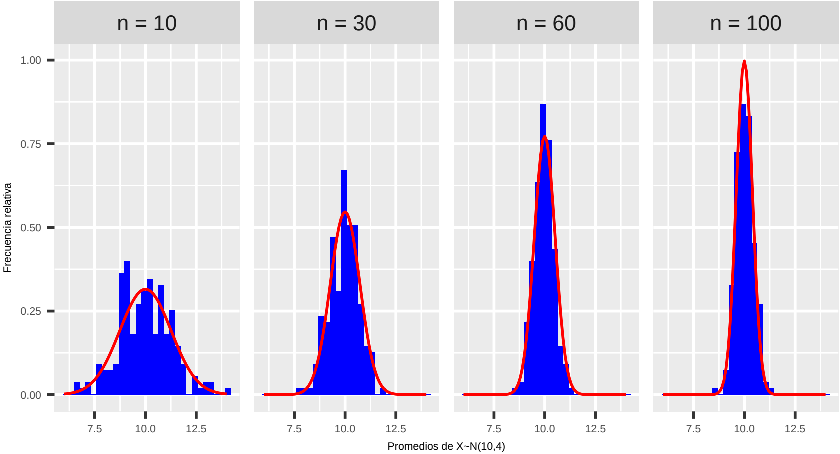
Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n, podemos comparar los distintos histogramas para evaluar la concentración alrededor de la media 10. Además, sabemos que deberían tener distribuciones normales de media 10 y desvío $\frac{4}{\sqrt{n}}$, por lo tanto, comparamos con esa distribución:

Promedios $\overline{X}_n$ (Normales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n, podemos comparar los distintos histogramas para evaluar la concentración alrededor de la media 10. Además, sabemos que deberían tener distribuciones normales de media 10 y desvío $\frac{4}{\sqrt{n}}$, por lo tanto, comparamos con esa distribución:

```
plot(GG)
```



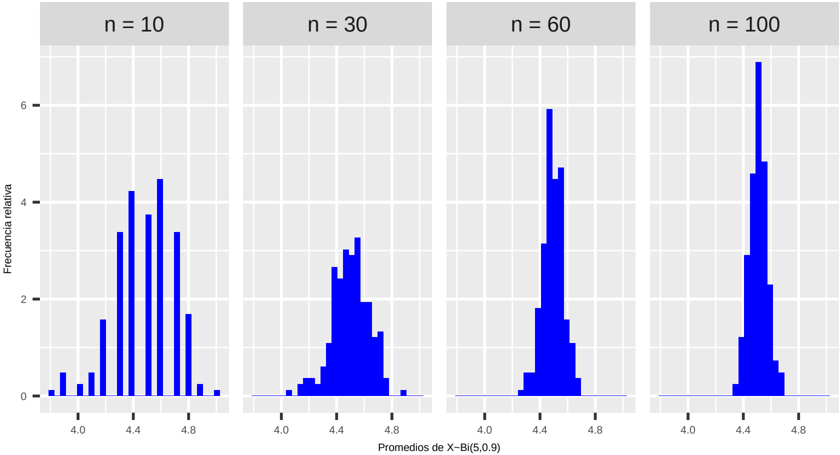
Promedios $\overline{X}_n$ (Binomiales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para binomiales con $Bi(5, 0.9)$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = 5 \cdot 0.9 = 4.5$:

Promedios $\overline{X}_n$ (Binomiales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para binomiales con $Bi(5, 0.9)$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = 5 \cdot 0.9 = 4.5$:

```
plot(GG)
```



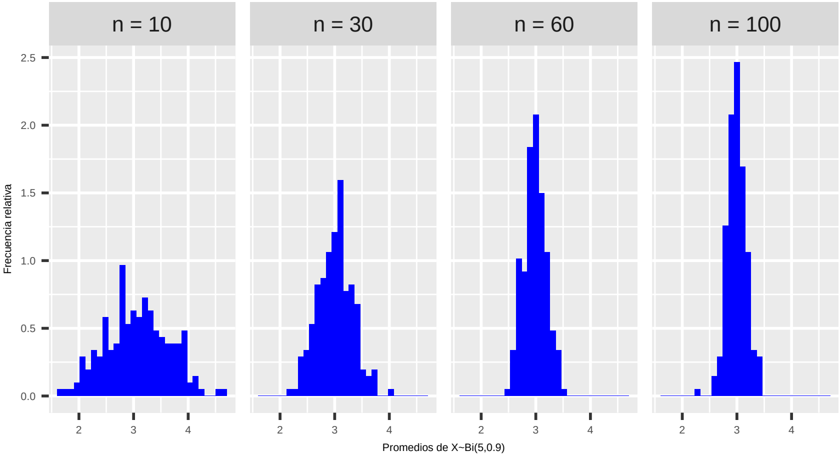
Promedios $\overline{X}_n$ (Poisson)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para binomiales con $Po(3)$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = \lambda = 3$:

Promedios $\overline{X}_n$ (Poisson)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para binomiales con $Po(3)$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = \lambda = 3$:

```
plot(GG)
```



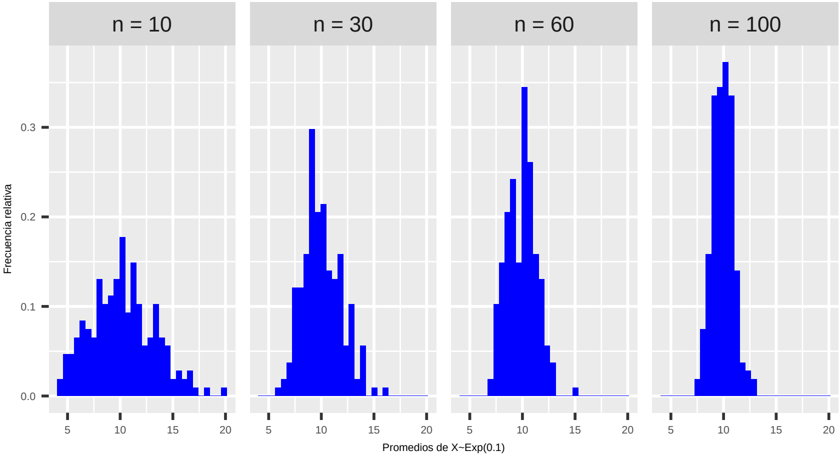
Promedios $\overline{X}_n$ (Exponenciales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para exponenciales con $\lambda = \frac{1}{10}$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = 10$:

Promedios $\overline{X}_n$ (Exponenciales)

Repitiendo este procedimiento con M=200 con distintos tamaños de n para exponenciales con $\lambda = \frac{1}{10}$, deberían concentrarse alrededor de $\mu = 10$:

```
plot(GG)
```



Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, la probabilidad de que el promedio esté lejos de su media siempre tiende a 0 a medida que más variables se promedian.

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, la probabilidad de que el promedio esté lejos de su media siempre tiende a 0 a medida que más variables se promedian. **Dato de color:**

Esto da lugar a una propiedad llamada "la Ley de los Grandes Números":

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, la probabilidad de que el promedio esté lejos de su media siempre tiende a 0 a medida que más variables se promedian. **Dato de color:**

Esto da lugar a una propiedad llamada "la Ley de los Grandes Números":

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de media μ y desvío finito σ, para todo $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusiones

Efectivamente vemos que los promedios se concentran más y más alrededor de su media a medida que se promedian más variables.

Más aún, eso lo podíamos comprobar con la desigualdad de Čebyšëv. Dado que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son V.A.I.I.D., sabemos la media y la varianza de $\overline{X}_n$. Cuando aplicamos la desigualdad, para **cualquier** $\varepsilon > 0$, observamos lo siguiente:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, la probabilidad de que el promedio esté lejos de su media siempre tiende a 0 a medida que más variables se promedian. **Dato de color:**

Esto da lugar a una propiedad llamada “la Ley de los Grandes Números”:

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de media μ y desvío finito σ, para todo $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Se dice en este caso que $\overline{X}_n$ “converge en probabilidad” a μ.

Conclusiones

Pero vemos otra cosa revisando los histogramas, a medida que se promedian más variables, todos los promedios parecen distribuirse de manera normal, sea cual sea la variable que se promedia.

Conclusiones

Pero vemos otra cosa revisando los histogramas, a medida que se promedian más variables, todos los promedios parecen distribuirse de manera normal, sea cual sea la variable que se promedia.

Pero dado el caso, ¿cuáles deberían ser la media y el desvío de esa variable normal?

Conclusiones

Pero vemos otra cosa revisando los histogramas, a medida que se promedian más variables, todos los promedios parecen distribuirse de manera normal, sea cual sea la variable que se promedia.

Pero dado el caso, ¿cuáles deberían ser la media y el desvío de esa variable normal?

Claramente, lo mínimo que le tendría que pedir a esa variable normal es que tenga la misma media y desvío que el promedio $\overline{X}_n$, es decir, media μ y desvío $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

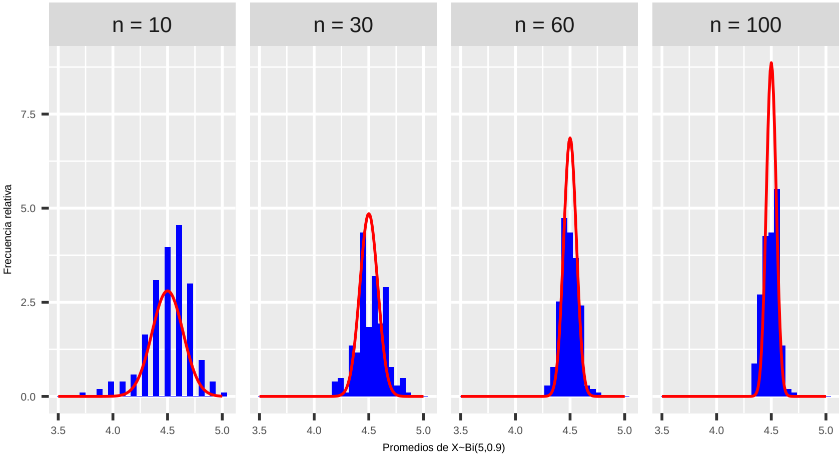
Conclusiones Normalidad (Binomial)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la binomial del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 5 \cdot 0.9 = 4.5$ y desvío $\sigma = \sqrt{\frac{5 \cdot 0.9 \cdot 0.1}{n}}$:

Conclusiones Normalidad (Binomial)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la binomial del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 5 \cdot 0.9 = 4.5$ y desvío $\sigma = \sqrt{\frac{5 \cdot 0.9 \cdot 0.1}{n}}$:

```
plot(GG)
```



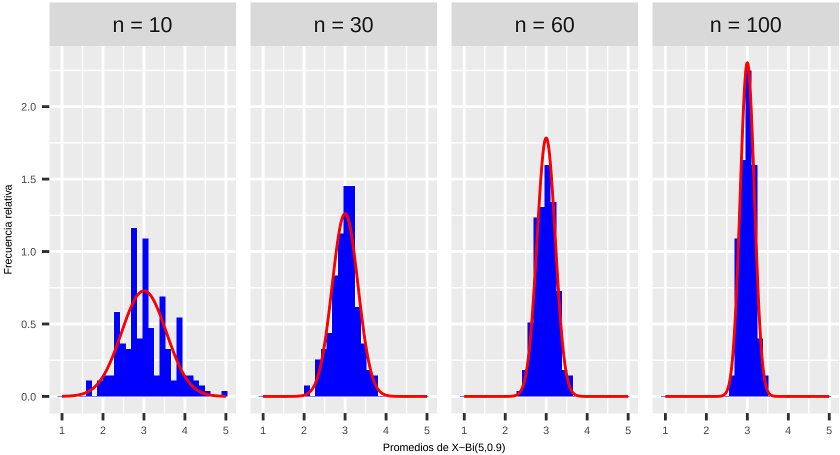
Conclusiones Normalidad (Poisson)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la poisson del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 3$ y desvío $\sigma = \sqrt{\frac{3}{n}}$:

Conclusiones Normalidad (Poisson)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la poisson del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 3$ y desvío $\sigma = \sqrt{\frac{3}{n}}$:

```
plot(GG)
```



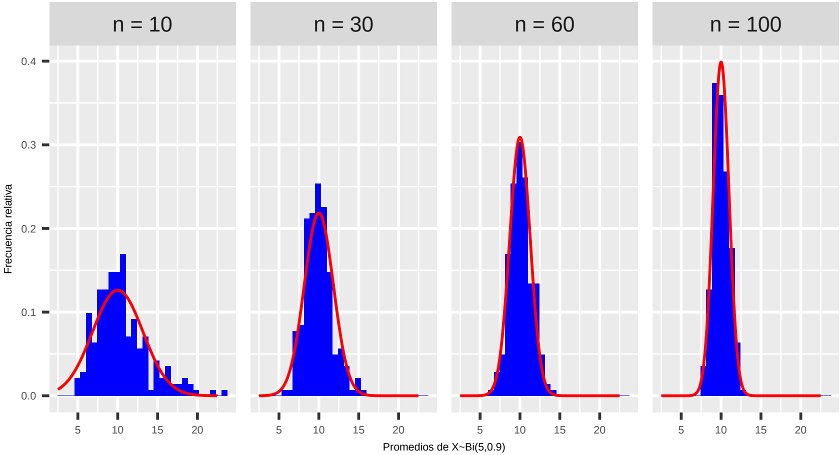
Conclusiones Normalidad (Exponenciales)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la exponenciales del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 10$ y desvío $\sigma = \frac{10}{\sqrt{n}}$:

Conclusiones Normalidad (Exponenciales)

Podemos verificar entonces comparando los histogramas de la exponenciales del mismo modo que comparamos las que sabíamos que eran normales. Si fueran normales, tendrían media $\mu = 10$ y desvío $\sigma = \dfrac{10}{\sqrt{n}}$:

```
plot(GG)
```



Teorema Central del Límite

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Observación: Esto dice más que “el promedio se concentra alrededor de la media”, permite calcular las probabilidades de que el promedio se encuentre en algún rango.

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Observación: Esto dice más que "el promedio se concentra alrededor de la media", permite calcular las probabilidades de que el promedio se encuentre en algún rango.

Observación: Esto vale para cualquier distribución

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Observación: Esto dice más que “el promedio se concentra alrededor de la media”, permite calcular las probabilidades de que el promedio se encuentre en algún rango.

Observación: Esto vale para **cualquier distribución**

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ V.A.I.I.D., de **cualquier** distribución con media μ y desvío finito σ, a medida que $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Del mismo modo, se puede probar lo siguiente:

$$S_n \overset{(aprox)}{\sim} N\left(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma\right) \Rightarrow \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \overset{(aprox)}{\sim} N(0,1)$$

Es decir, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = P(\overline{X}_n \leq t) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{t - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi\left(\frac{t - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Observación: Esto dice más que "el promedio se concentra alrededor de la media", permite calcular las probabilidades de que el promedio se encuentre en algún rango.

Observación: Esto vale para **CUALQUIER DISTRIBUCIÓN**

Teorema Central del Límite (TCL)

Tendría que haber puesto “El mejor teorema del mundo mundial”.

Ojo: No vale si las variables que se promedian no son independientes o no tienen exactamente la misma distribución. En la práctica, es difícil que esto se cumpla o que se pueda verificar.

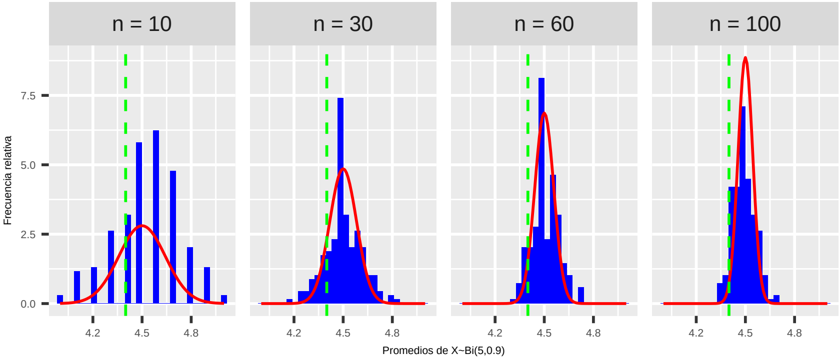
Utilización del TCL

Comprobemos cómo se visualiza el Teorema Central del Límite. Consideremos las variables binomiales ya utilizadas. Calculemos por ejemplo, para cada n, qué probabilidad hay de que el promedio esté por debajo de 4.4:

Utilización del TCL

Comprobemos cómo se visualiza el Teorema Central del Límite. Consideremos las variables binomiales ya utilizadas. Calculemos por ejemplo, para cada n, qué probabilidad hay de que el promedio esté por debajo de 4.4:

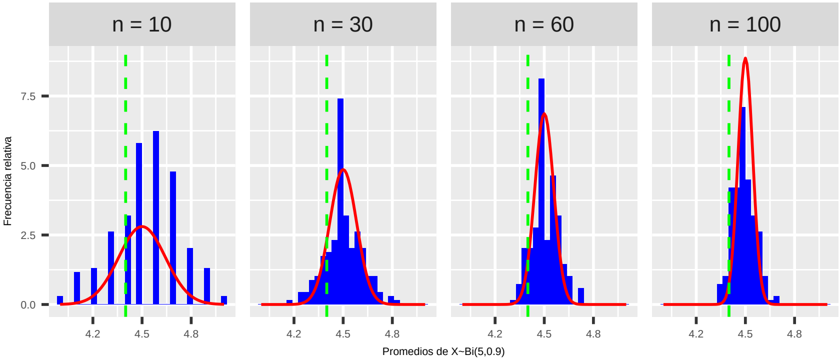
```
plot(GG)
```



Utilización del TCL

Comprobemos cómo se visualiza el Teorema Central del Límite. Consideremos las variables binomiales ya utilizadas. Calculemos por ejemplo, para cada *n*, qué probabilidad hay de que el promedio esté por debajo de 4.4:

```
plot(GG)
```



En cada caso, la suma de las alturas de las barras a la izquierda de 4.4 y el área bajo la curva normal correspondiente da lo siguiente:

```
pbinom(4.4*ns,t*ns,p)
```

```
## [1] 0.38387699 0.24194154 0.14534121 0.08098716
```

```
pnorm(4.4,mean=t*p,sd=sqrt(t*p*(1-p)/ns))
```

```
## [1] 0.31867594 0.20710809 0.12410654 0.06801856
```