Un ejemplo

Una agencia de protección al consumidor desea poner a prueba la afirmación de un fabricante de pinturas según la cual el tiempo medio de secado de su nueva pintura de *secado rápido* es de no más de min.

Para ello se pintan tableros, con el contenido de latas distintas y se mide el tiempo medio de secado.

Un ejemplo

Supongamos que el valor medio de secado de los 36 tableros da 21 min.

¿Estará mintiendo el fabricante?

¿O es simplemente que el azar hizo que el promedio sea superior en esta prueba?

Un ejemplo

Claramente, hay dos hipótesis posibles:

El fabricante dice la verdad: el tiempo medio de secado es **menor o igual** a min

El fabricante miente: el tiempo medio de secado es **superior** a min

Un ejemplo

Claramente, hay dos hipótesis posibles:

Hipótesis nula: el tiempo medio de secado es **menor o igual** a min

Hipótesis alternativa: el tiempo medio de secado es **superior** a min

Un ejemplo

Claramente, hay dos hipótesis posibles:

Hipótesis nula: min

Hipótesis alternativa: min

Un ejemplo

Cual jurado, debemos tomar una decisión:

¿Dice la verdad el fabricante o miente?

¿Es verdadera o falsa la hipótesis nula?

Pero, sea cual sea la decisión que tomemos, el azar hace podamos cometer un error.

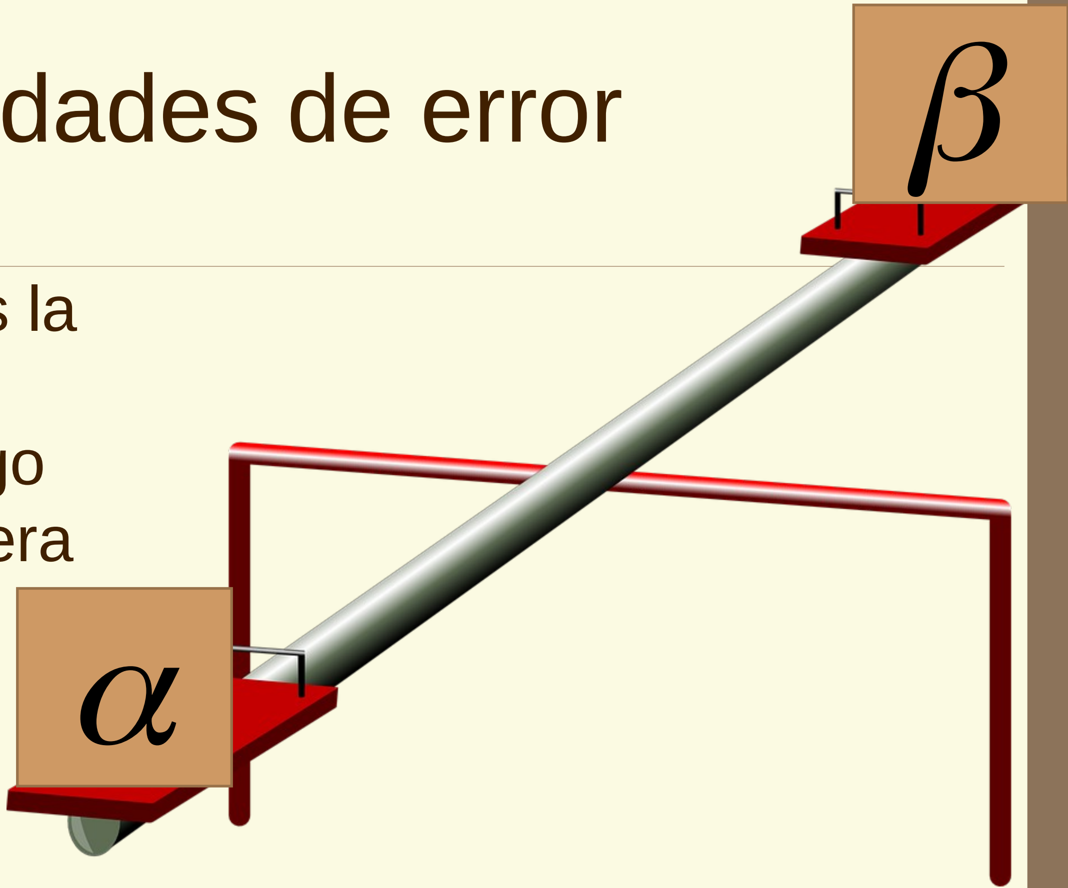
Errores en prueba de hipótesis

	Aceptamos la hipótesis nula	Rechazamos la hipótesis nula
Hipótesis nula verdadera		**Error Tipo I**
Hipótesis nula falsa	**Error Tipo II**	

Probabilidades de error

	Aceptamos la hipótesis nula	Rechazamos la hipótesis nula
Hipótesis nula verdadera		
Hipótesis nula falsa		

Probabilidades de error



Si siempre aceptamos la hipótesis nula, , pero corremos un alto riesgo de equivocarnos si fuera falsa (

Si siempre rechazamos la hipótesis nula, , entonces corremos un alto riesgo de equivocarnos si fuera verdadera (

Hay que buscar un balance

Varias estrategias

Existen varias posibilidades, pero todas se basan en escoger un **estadístico** apropiado

Recordemos que un estadístico es una función de la muestra

Dos estrategias habituales:

- Fijamos, de antemano, una regla de decisión que garantice que la probabilidad de error de tipo I no será superior a un valor pre-fijado.
- Simplemente reportamos qué tan probable es que una muestra haya sido tan contraria a la hipótesis nula: valor p.

Regla de decisión

El caso más simple es el de una variable aleatoria .

Supondremos que, mágicamente, es conocido: algo parecido hicimos en el caso de los intervalos de confianza.

Como en los intervalos de confianza, las fórmulas que deduciremos se podrán aplicar para variables aleatorias arbitrarias, si la muestra es suficientemente grande (¡gracias al TCL!).

Y con muestra **muy** grande, hasta podremos reemplazar por (desvío muestral).

Regla de decisión

, es conocido.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Se fija en la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I que es posible admitir: **nivel de significación de la prueba.**

Como estadístico de prueba, se utilizará el valor medio:

donde es el tamaño de la muestra.

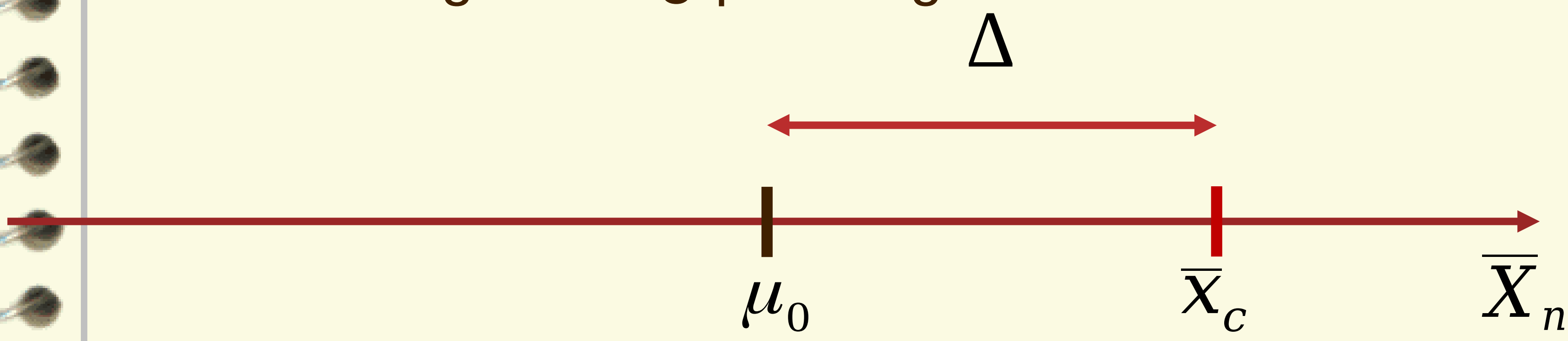
Regla de decisión

, es conocido.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

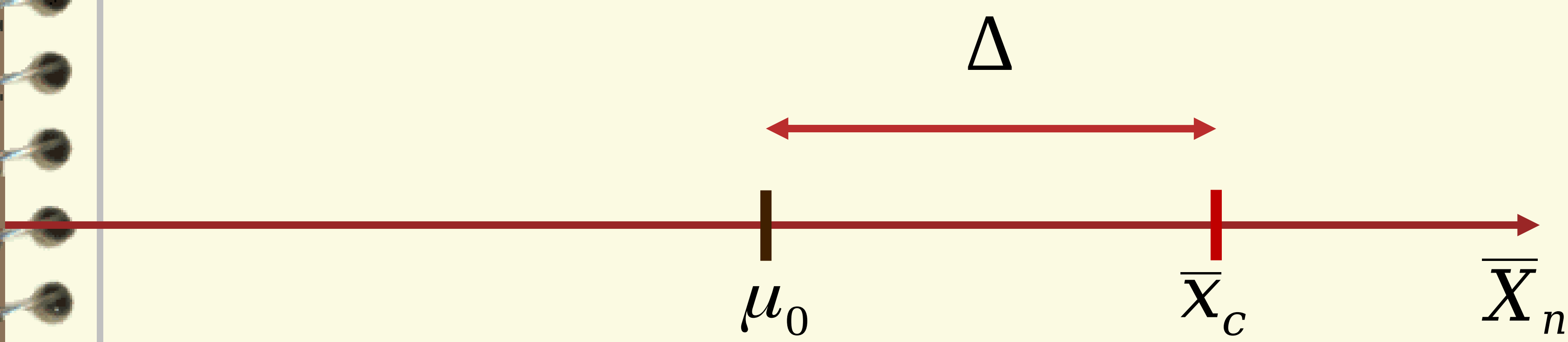
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Obvio, rechazaremos la hipótesis nula si da demasiado grande: ¿qué tan grande?



Regla de decisión

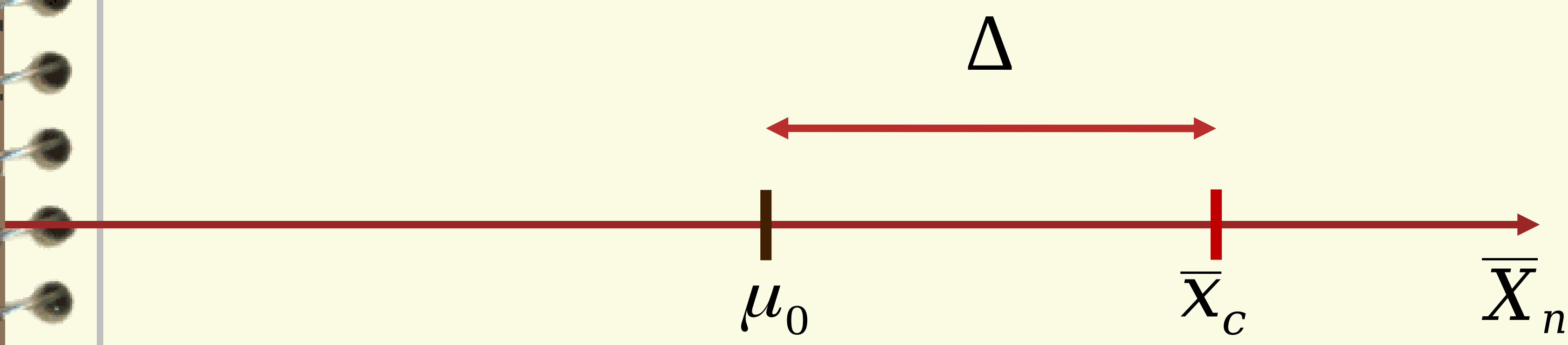
$$\overline{X}_n \quad N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$



Llamaremos a la distribución de probabilidades cuando la media es y a la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar (media 0 y desvío 1).

Regla de decisión

$$\overline{X}_n \quad N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$$



$$P_\mu\left(\overline{X}_n > \overline{x}_c\right) \le P_{\mu_0}\left(\overline{X}_n > \overline{x}_c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \le \alpha_m$$

$$\overline{x}_c = \mu_0 + z_{1-\alpha_m}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Un ejemplo

Una agencia de protección al consumidor desea poner a prueba la afirmación de un fabricante de pinturas según la cual el tiempo medio de secado de su nueva pintura de *secado rápido* es de no más de min.

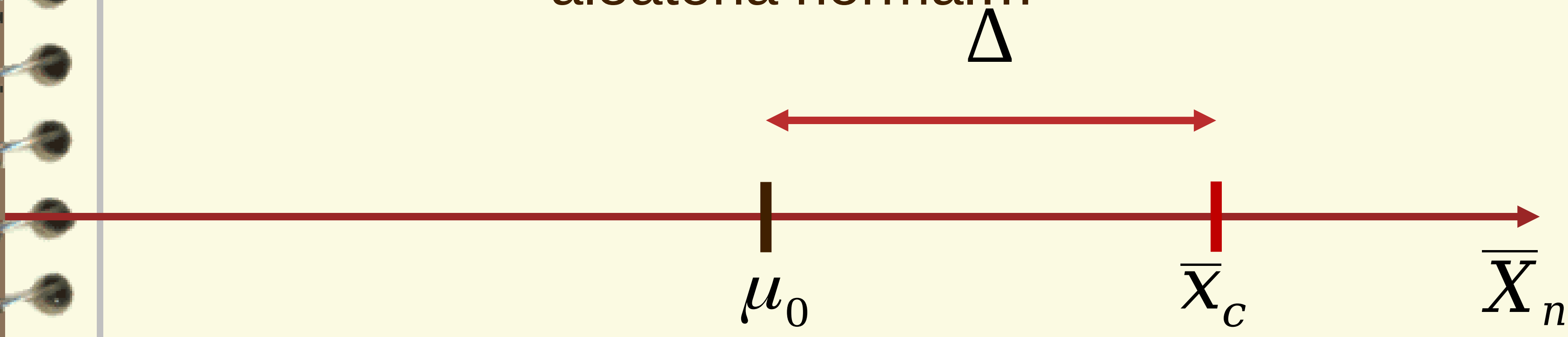
Para ello se pintan tableros, con el contenido de latas distintas y se mide el tiempo medio de secado.

Por la experiencia previa, se sabe que el desvío en el tiempo de secado es de min.

Fijamos la máxima probabilidad de un error de tipo I en .

Un ejemplo

Asumiendo que el tiempo de secado es una variable aleatoria normal…



$$\bar{x}_c = \mu_0 + z_{1-\alpha_m}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 + 1.6449\frac{2.4}{\sqrt{36}} = 20.658$$

Si el valor medio de secado de los tableros da min., entonces debemos rechazar la hipótesis nula.

Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de “qué tan falsa” sea…

$$\beta(\mu) = P_{\mu}\left(\overline{X}_n \le \overline{x}_c\right) = \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

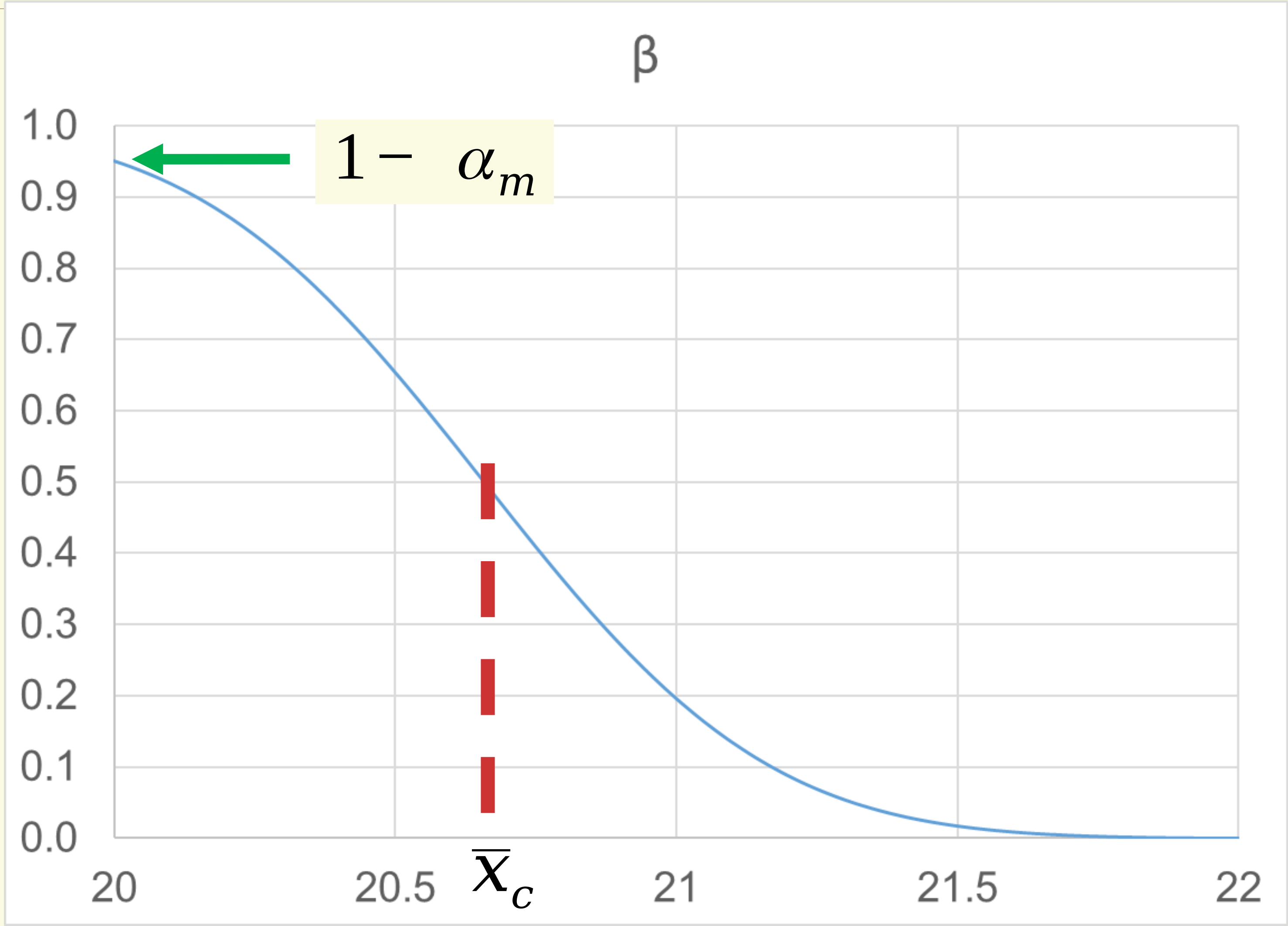
Algunos valores conocidos:

$$\beta(\mu_0) = \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha_m$$

$$\lim_{\mu \to \infty} \beta(\mu) = 0$$

$$\beta(\overline{x}_c) = \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \overline{x}_c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.5$$

Regla de decisión



Varias estrategias

Dos estrategias habituales:

- Fijamos, de antemano, una regla de decisión que garantice que la probabilidad de error de tipo I no será superior a un valor pre-fijado.
- Simplemente reportamos qué tan probable es que una muestra haya sido tan contraria a la hipótesis nula: valor p.

Valor p

El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

Es una medida de la posibilidad de que el resultado observado se produzca, debido al azar, bajo la hipótesis nula.

Si el valor p es menor a , entonces la hipótesis nula debería rechazarse.

$$P_{\mu}\left(\overline{X}_n > \overline{x}_{obs}\right) \leq P_{\mu_0}\left(\overline{X}_n > \overline{x}_{obs}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

Un ejemplo

Una agencia de protección al consumidor desea poner a prueba la afirmación de un fabricante de pinturas según la cual el tiempo medio de secado de su nueva pintura de *secado rápido* es de no más de min.

Para ello se pintan tableros, con el contenido de latas distintas y se mide el tiempo medio de secado.

Por la experiencia previa, se sabe que el desvío en el tiempo de secado es de min.

Fijamos la máxima probabilidad de un error de tipo I en .

Un ejemplo

Si el valor medio de secado de los tableros da min.:

$$\text{Valor p} = 1 - \Phi\left(\frac{21-20}{\frac{2.4}{\sqrt{36}}}\right) = 0.00621 < \alpha_m$$

Debe rechazarse la hipótesis nula.

De hecho, podría habérsela rechazado para todo , el valor p.

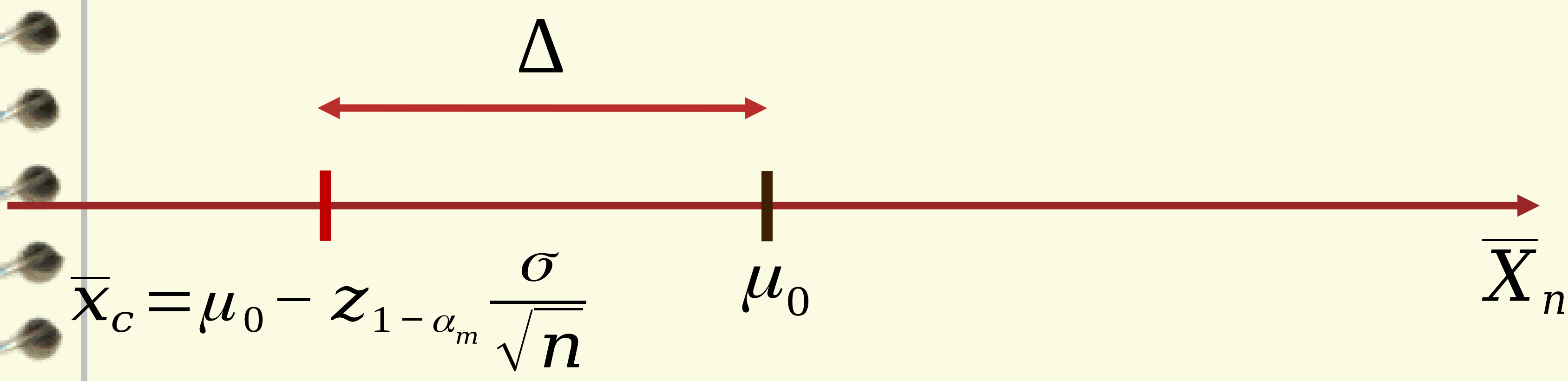
Regla de decisión

, es conocido.

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Obvio, rechazaremos la hipótesis nula si da demasiado chica: ¿qué tan chica?



Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de “qué tan falsa” sea…

$$\beta(\mu) = P_{\mu}\left(\overline{X}_n \geq \overline{x}_c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

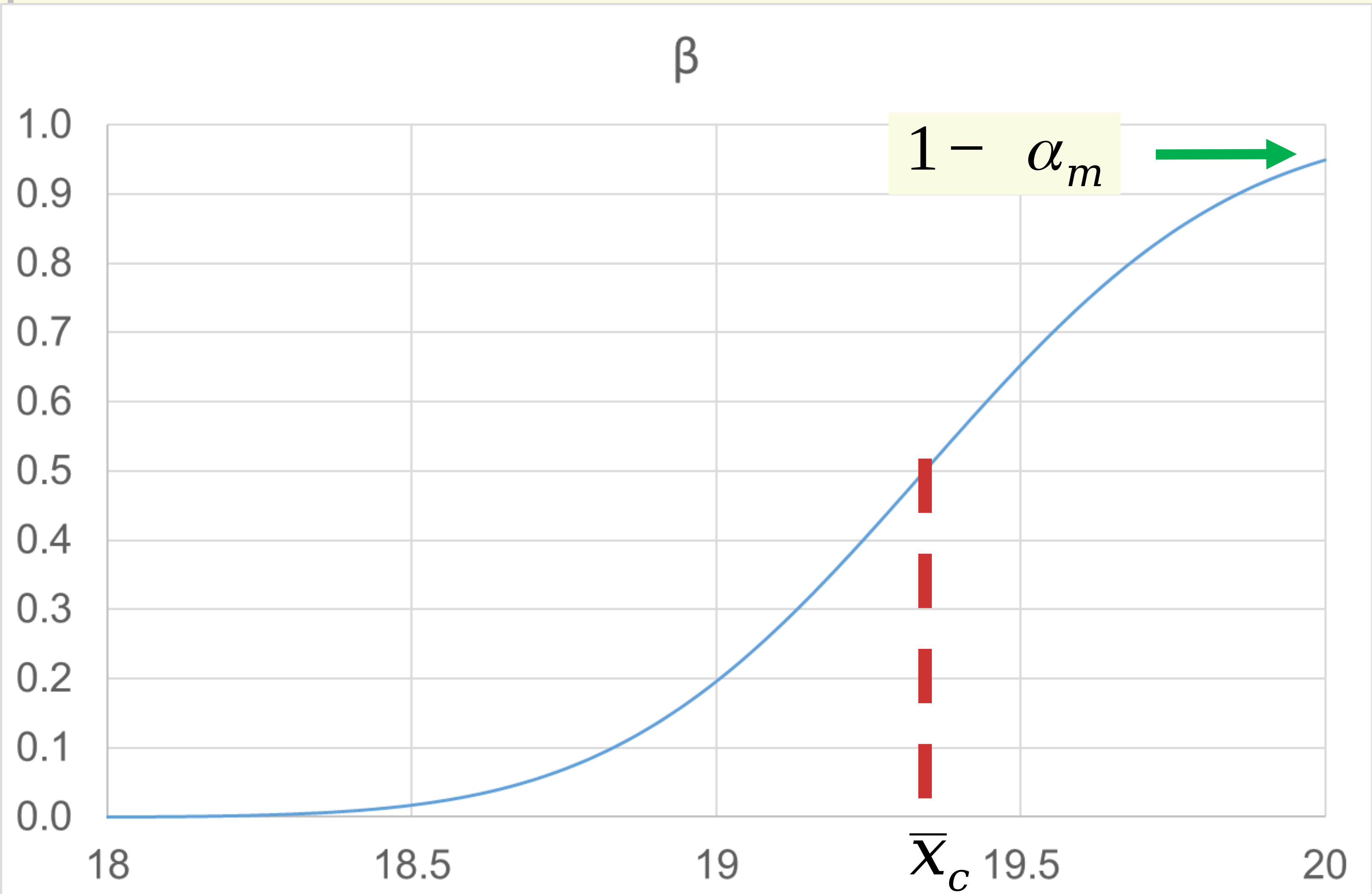
Algunos valores conocidos:

$$\beta(\mu_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha_m$$

$$\lim_{\mu \to -\infty} \beta(\mu) = 0$$

$$\beta(\overline{x}_c) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \overline{x}_c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.5$$

Regla de decisión



Valor p

El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

$$P_{\mu}\left(\overline{X}_n < \overline{x}_{obs}\right) \leq P_{\mu_0}\left(\overline{X}_n < \overline{x}_{obs}\right) = \Phi\left(\frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

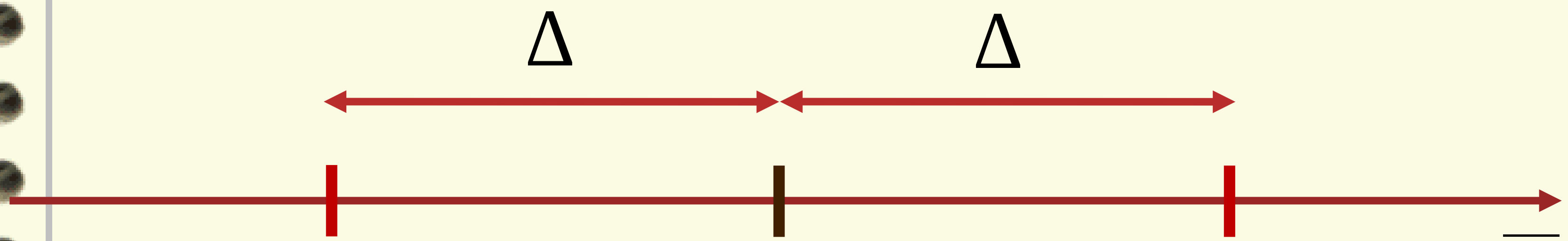
Regla de decisión

, es conocido.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Obvio, rechazaremos la hipótesis nula si da demasiado distinta: ¿qué tan distinta?



$$\bar{x}_{c_1} = \mu_0 - z_{1-\alpha_m/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu_0 \qquad \bar{x}_{c_2} = \mu_0 + z_{1-\alpha_m/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \bar{X}_n$$

Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de "qué tan falsa" sea…

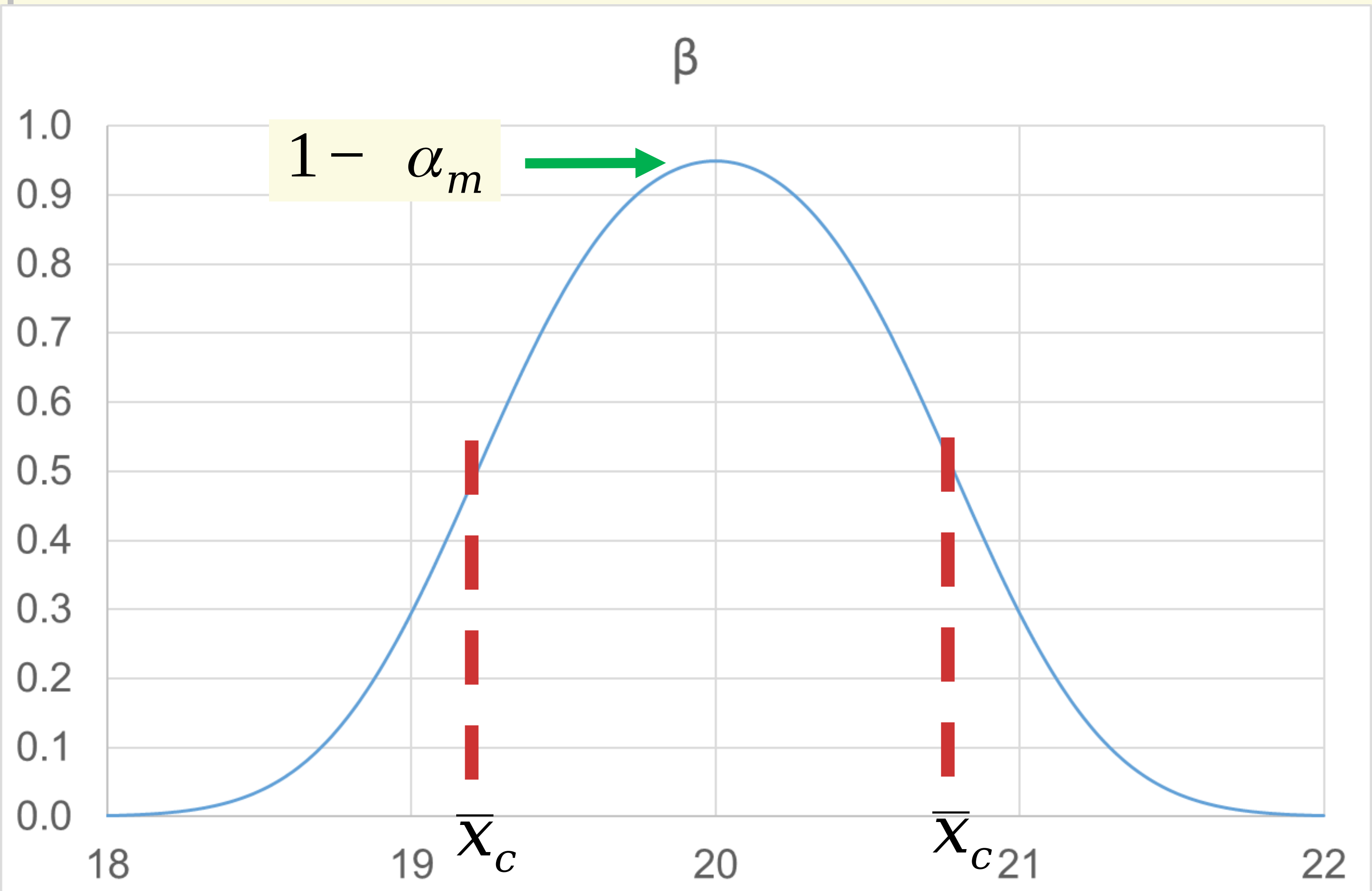
Algunos valores conocidos:

$$\beta\left(\mu_0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha_m$$

$$\lim_{\mu \to \pm\infty} \beta\left(\mu\right) = 0$$

$$\beta\left(\overline{x}_{c_1}\right) \approx 0.5 \qquad \beta\left(\overline{x}_{c_2}\right) \approx 0.5$$

Regla de decisión



Valor p

El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

$$\Delta_{obs} = \left| \overline{x}_{obs} - \mu_0 \right|$$

$$P_{\mu_0}\left(\left| \overline{X}_n - \mu_0 \right| > \Delta_{obs} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) + \Phi\left(- \frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$$

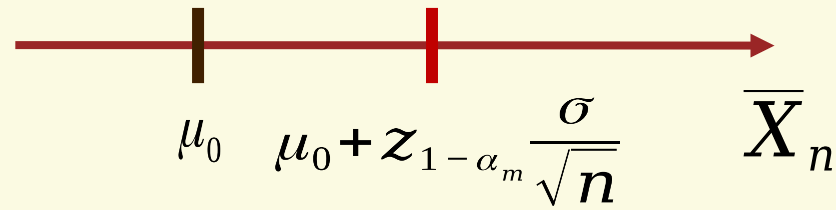
$$P_{\mu_0}\left(\left| \overline{X}_n - \mu_0 \right| > \Delta_{obs} \right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \right]$$

Regla de decisión

, es conocido.

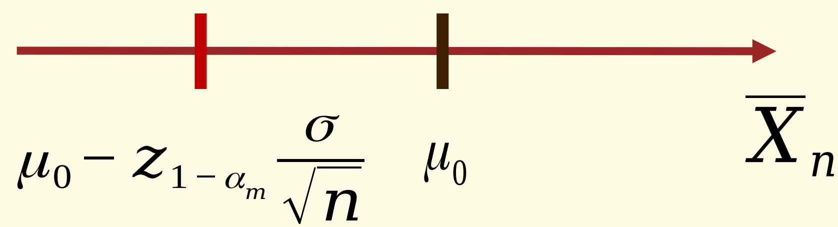
$H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$



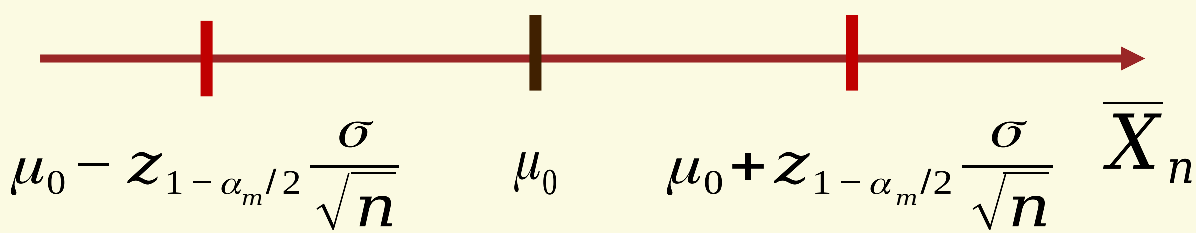
$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$



$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$



Valor p

, es conocido.

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$1 - \Phi\left(\frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$
$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\Phi\left(\frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$2\left[1 - \Phi\left(\left|\frac{\Delta_{obs}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right)\right]$$

Regla de decisión

¿No puede usarse otro estadístico de prueba además de ?

Sí, hay otro estadístico que es absolutamente equivalente:

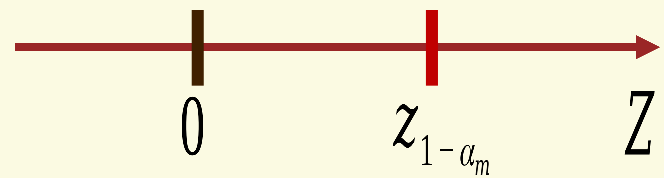
$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Regla de decisión

, es conocido.

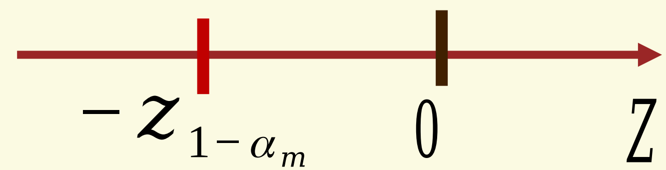
$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$



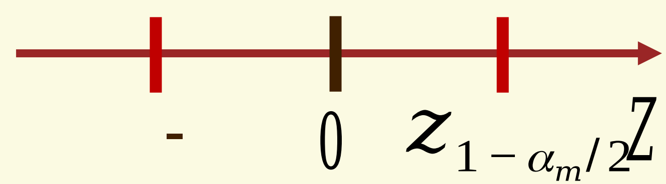
$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$



$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



Valor p

, es conocido.

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$1 - \Phi\left(z_{obs}\right)$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\Phi\left(z_{obs}\right)$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$2\left[1 - \Phi\left(\left|z_{obs}\right|\right)\right]$$

Otro ejemplo

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8%. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

¿Indican los resultados que hay que ajustar la máquina dosificadora?

Se trata de una prueba de hipótesis asociada con la proporción de una población.

Pruebas para la proporción

Es muy parecido al caso de conocido

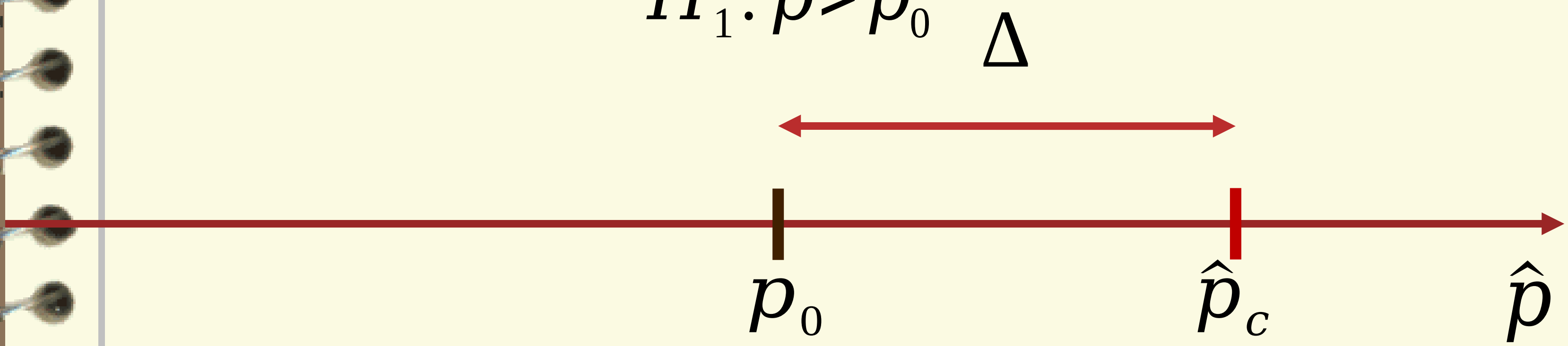
Sabemos que, para grande

$$\hat{p} \quad \mathrm{N}\left(p, \sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}\right)$$

Regla de decisión

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$



$$\hat{p}_c = p_0 + z_{1-\alpha_m}\sqrt{\frac{p_0\left(1-p_0\right)}{n}}$$

Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de “qué tan falsa” sea…

$$\beta(p) = P_p(\hat{p} \leq \hat{p}_c) = \Phi\left(\frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

Algunos valores conocidos:

$$\beta(p_0) = 1 - \alpha_m$$

$$\beta(1) = 0$$

$$\beta(\hat{p}_c) = 0.5$$

Valor p

El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

$$\text{Valor p} = P_{p_0}\left(\hat{p} > \hat{p}_{obs}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{p}_{obs} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$$

Otro ejemplo

Una máquina dosificadora en una operación de producción se debe ajustar si el porcentaje de envases con falta de llenado es significativamente superior al 8%. En una muestra aleatoria de 145 envases de la producción de un día se encontraron 18 envases incompletos en su llenado.

¿Indican los resultados que hay que ajustar la máquina dosificadora?

Utilizar un nivel de significación del 5%.

Otro ejemplo

$$H_0 : p \leq 0.08$$

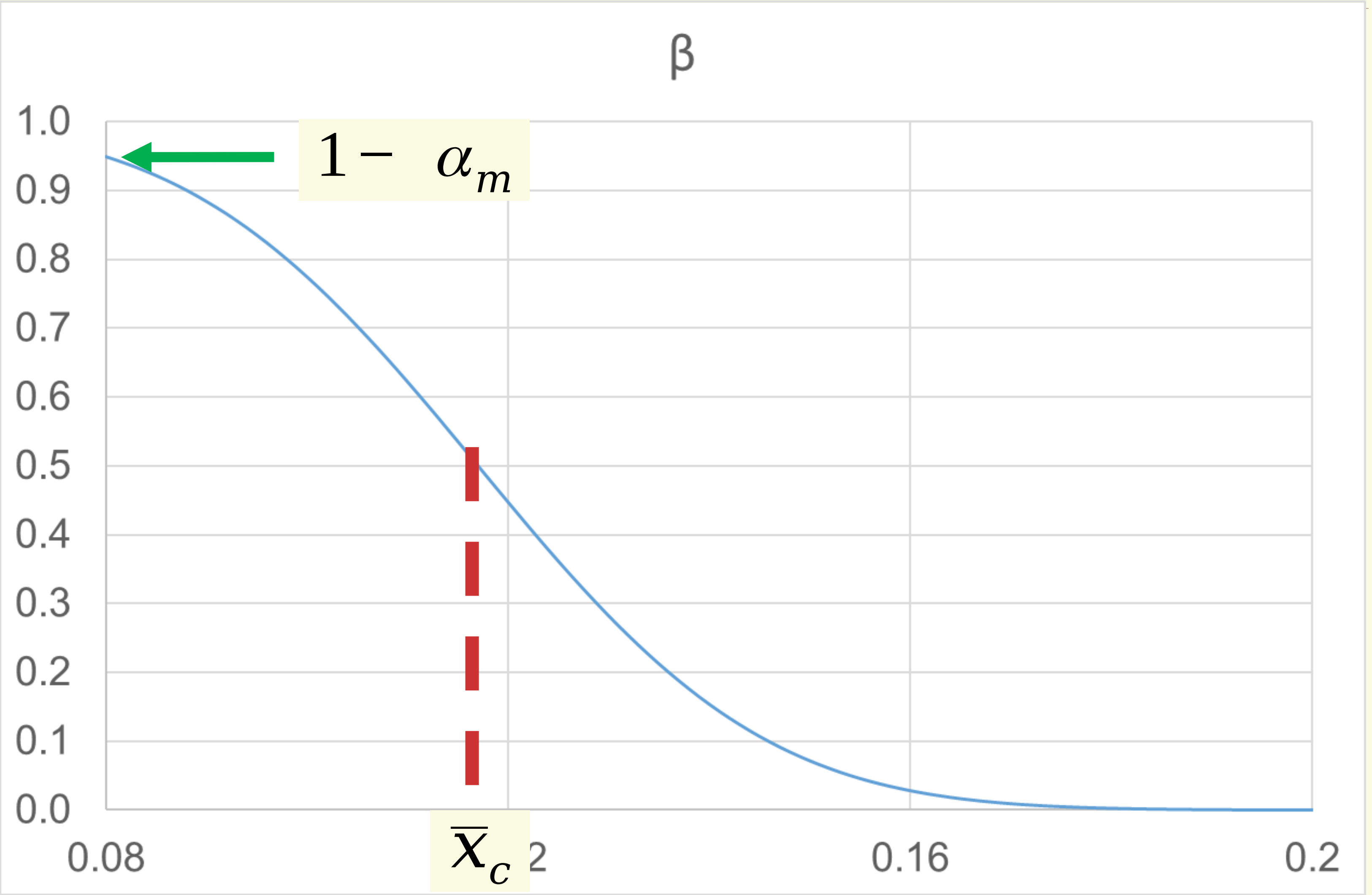
$$H_1 : p > 0.08$$

$$\hat{p}_c = 0.08 + 1.6449\sqrt{\frac{0.08\,0.92}{145}} = 0.1171$$

Rechazamos la hipótesis nula

$$\text{Valor p} = P_{p_0}(\hat{p} > 0.1241) = 1 - \Phi\left(\frac{0.1241 - 0.08}{\sqrt{\frac{0.08\,0.92}{145}}}\right) = 0.0251$$

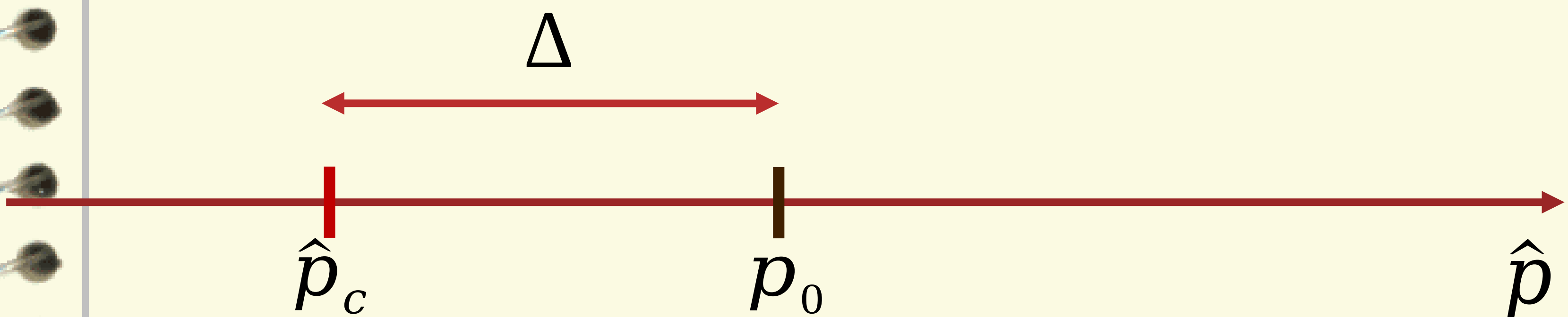
Otro ejemplo



Regla de decisión

$$H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$



$$\hat{p}_c = p_0 - z_{1-\alpha_m}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de "qué tan falsa" sea…

$$\beta(p) = P_p(\hat{p} \geq \hat{p}_c) = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

Algunos valores conocidos:

$$\beta(p_0) = 1 - \alpha_m$$

$$\beta(0) = 0$$

$$\beta(\hat{p}_c) = 0.5$$

Valor p

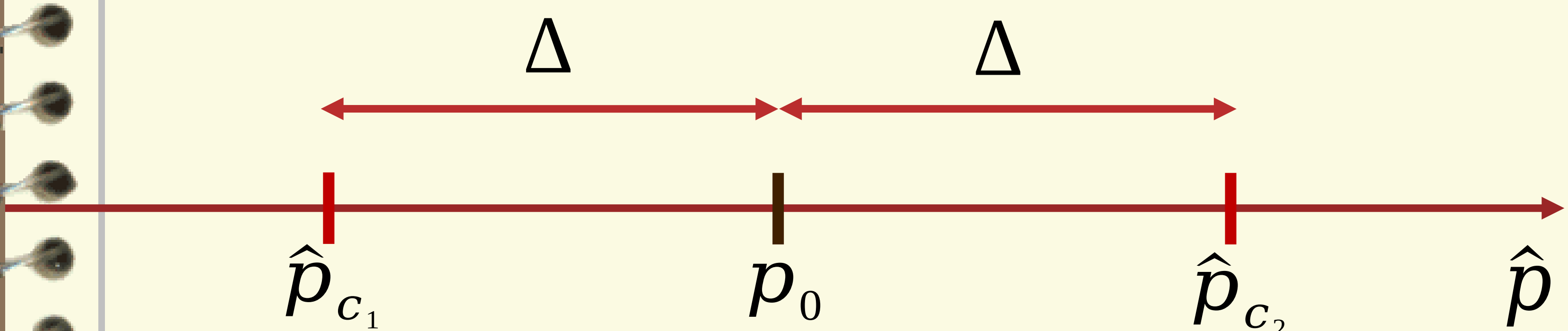
El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

$$\text{Valor p} = P_{p_0}\left(\hat{p} < \hat{p}_{obs}\right) = \Phi\left(\frac{\hat{p}_{obs} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$$

Regla de decisión

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$



$$\Delta = z_{1-\alpha_m/2}\sqrt{\frac{p_0\left(1-p_0\right)}{n}}$$

Regla de decisión

Si la hipótesis nula fuera falsa: ¿qué error estaríamos cometiendo?

Va a depender de “qué tan falsa” sea…

$$\beta\left(p_0\right)=1-\ \alpha_m$$

$$\beta\left(0\right)=\beta\left(1\right)=0$$

$$\beta\left(\hat{p}_{c_1}\right)\approx 0.5 \quad \beta\left(\hat{p}_{c_2}\right)\approx 0.5$$

Valor p

El valor p se define como la probabilidad de que, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de prueba dé tan mal o peor de lo que dio.

$$\Delta_{obs} = \left| \hat{p}_{obs} - p_0 \right|$$

$$P_{\mu_0}\left(\left| \hat{p} - p_0 \right| > \Delta_{obs} \right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta_{obs}}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) \right]$$

Regla de decisión

¿No puede usarse otro estadístico de prueba además de ?

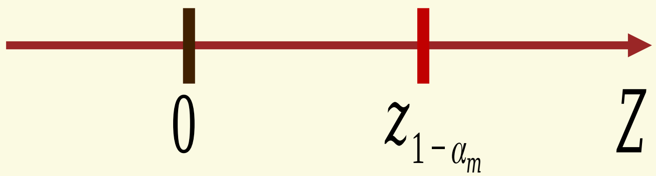
Sí, hay otro estadístico que es absolutamente equivalente:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Regla de decisión

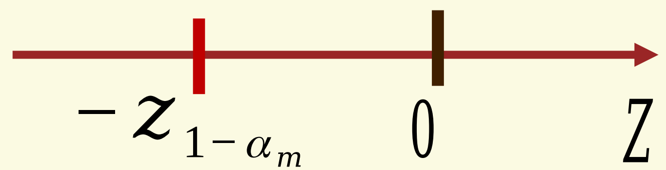
$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$



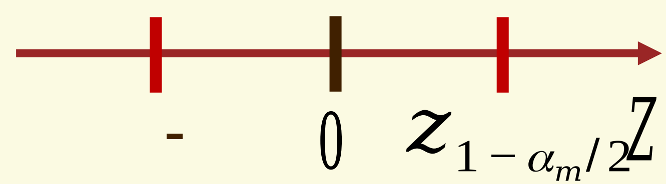
$$H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$



$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$



Valor p

$$H_0: p \leq p_0$$
$$H_1: p > p_0$$

$$1 - \Phi\left(z_{obs}\right)$$

$$H_0: p \geq p_0$$
$$H_1: p < p_0$$

$$\Phi\left(z_{obs}\right)$$

$$H_0: p = p_0$$
$$H_1: p \neq p_0$$

$$2\left[1 - \Phi\left(\left|z_{obs}\right|\right)\right]$$