Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Se asume que todos los casos son igualmente probables

$$\Rightarrow P\left(\left\{s_i\right\}\right)=\frac{1}{n}$$

$$P\left(A\right)=\sum_{s_i\in A} P\left(\left\{s_i\right\}\right)=\sum_{s_i\in A}\frac{1}{n}=\frac{\#\ \text{de casos en}\ A}{\#\ \text{total de casos}}$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Se asume que todos los casos son igualmente probables

$$P(A) = \# \text{ de casos } \mathit{favorables} \ (\text{en } A\text{¿} \frac{\text{¿}}{\# \text{ total de casos}}$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Hallar la probabilidad de sacar una suma de 8 puntos al lanzar un dado dos veces.

Si el primer elemento de un par ordenado se puede seleccionar de *n* formas y por cada una de éstas se puede seleccionar el segundo elemento del par de *m* maneras entonces el número de pares posibles es *n* x *m.*

Casos posibles $6 \text{ x } 6 = 36$

Casos favorables $5 \quad \{(5,3),(3,5),(6,2),(2,6),(4,4)\}$

$$P = \frac{5}{36} \approx 0.1389$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Hallar la probabilidad de sacar por suma o bien 4, o bien 11 al lanzar dos dados.

Casos posibles $6 \text{ x } 6 = 36$

Supongamos que el procedimiento 1 se puede hacer de *n* maneras y el procedimiento 2 se puede hacer de *m* maneras. Si no es posible que ambos, 1 y 2, se hagan juntos entonces el número de maneras en que se puede hacer 1 o 2 es *n* + *m.*

Casos favorables $5 \quad \{(2,2),(3,1),(1,3)\} \text{ o } \{(5,6),(6,5)\}$

$$\text{P} = \frac{5}{36} \approx 0.1389$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se escriben todos los números posibles de tres dígitos, sin repetir dígitos en el número. Calcular la probabilidad de que un número elegido al azar sea múltiplo de 4.

Casos posibles $5 \times 4 \times 3 = 60$

Casos favorables $2 \times 3 \times 2 = 12$

$$P = \frac{1}{5} = 0.2$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Una computadora genera en forma aleatoria la contraseña de cada nuevo usuario. Si este código consta de 8 caracteres elegidos al azar entre las 26 letras y los 10 dígitos, calcular la probabilidad de que empiece por letra y termine en dígito.

Casos posibles

$$(26+10)^8 = 36^8 \approx 2.8211 \times 10^{12}$$

Casos favorables

$$26 \cdot (26+10)^6 \cdot 10 = 260 \cdot 36^6 \approx 5.6596 \times 10^{11}$$

$$P = \frac{260 \cdot 36^6}{36^8} \approx 0.2006$$

Regla de Laplace
Dos iguales entre tres

Se lanzan 3 dados simultáneamente. Si salen al menos dos números iguales se gana un premio. Si los tres dados muestran números diferentes no se gana nada. Determinar la probabilidad de ganar.

Casos posibles $6^3 = 216$

Casos favorables $6^3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 216 - 120 = 96$

$$P = \frac{96}{216} = \frac{4}{9} \approx 0.44$$

Regla de Laplace
Dos iguales entre tres

Se lanzan 3 dados simultáneamente. Si salen al menos dos números iguales se cobra un premio *A*. Si los tres dados muestran números diferentes se pierde la puesta *P*. Determinar el valor de *P* para que el juego sea equitativo o *noble*.

El jugador debe pagar una cierta cantidad *P* para intervenir en el juego

La banca le paga una cantidad *A* al jugador si gana el juego.

Si se juegan *N* jugadas entonces la banca cobra *N P*. Si en *n* de ellas el jugador gana entonces cobra *n A*. Para que el juego sea equitativo deberá ser $N P = n A$.

Si *N* es grande entonces la razón n / N *es* próxima a la probabilidad de ganar. En este juego esa probabilidad es 4/9, luego si $P = (4/9) A$ el juego es equitativo o noble.

Regla de Laplace
¿Qué conviene hacer?

Una lotería tiene   números y sólo un premio. Ud. tiene dinero para comprar números. ¿Cómo le conviene comprar esos números?

a) Comprar los   números en un solo sorteo.

b) Comprar un número a lo largo de   sorteos.

$$P_a = \frac{n}{N}$$

Regla de Laplace
¿Qué conviene hacer?

Una lotería tiene números y sólo un premio. Ud. tiene dinero para comprar números. ¿Cómo le conviene comprar esos números?

a) Comprar los números en un solo sorteo.

b) Comprar un número a lo largo de sorteos.

Se calcula la probabilidad de ganar por lo menos una vez.

El número de maneras de elegir un número en jugadas de entre los posibles es . El número de maneras de perder a lo largo de jugadas es

$$P_b = 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \approx 1 - \left(1 - \frac{n}{N} + \frac{n(n-1)}{2N^2} \right)$$

Regla de Laplace
¿Qué conviene hacer?

Una lotería tiene números y sólo un premio. Ud. tiene dinero para comprar números. ¿Cómo le conviene comprar esos números?

a) Comprar los números en un solo sorteo.

b) Comprar un número a lo largo de sorteos.

$$P_a = \frac{n}{N}$$

$$P_b = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \approx \frac{n}{N} - \frac{n(n-1)}{2N^2}$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En el banco de un aula, hay 4 asientos disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia y Bautista se sienten dejando libre el asiento junto a la pared?

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Casos posibles

A	B		
B	A		

	A	B	
	B	A	

A		B	
B		A	

	A		B
	B		A

A			B
B			A

		A	B
		B	A

$$\frac{4 \times 3}{2} \text{ ¿ } \frac{4!}{2! \times 2!} \text{ ¿ } \binom{4}{2}$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En el banco de un aula, hay 4 asientos disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia y Bautista se sienten dejando libre el asiento junto a la pared?

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Casos favorables

A	B		
B	A		

A		B	
B		A	

	A	B	
	B	A	

$$\frac{3\times 2}{2} \text{ ¿ } \frac{3!}{2!\times 1!} \text{ ¿ } \binom{3}{2}=\binom{3}{1}$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En el banco de un aula, hay 4 asientos disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia y Bautista se sienten dejando libre el asiento junto a la pared?

$$P=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=0.5$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En un colectivo hay 10 asientos vacíos, de ellos hay dos que están en la última fila. Si se suben 7 personas y eligen al azar su asiento: ¿cuál es la probabilidad de que queden vacíos los dos asientos de la última fila?

Casos posibles
$$\binom{10}{7}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$$

Casos favorables
$$\binom{\text{¿}\,8}{\text{¿}\,7}=8$$

$$P=\frac{8}{120}\approx 0.067$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Se sacan una tras otra (o las dos al tiempo) dos cartas de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean un caballo y un tres?

Casos posibles

$$\binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

Casos favorables

$$\binom{\text{¿}4}{\text{¿}1} \cdot \binom{\text{¿}4}{\text{¿}1} = 4 \cdot 4 = 16$$

$$P = \frac{16}{780} = \frac{4}{195} \approx 0.0205$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

A un congreso asisten 80 personas. De ellos 70 hablan inglés y 50 francés. Se eligen dos de ellos al azar. ¿cuál es la probabilidad de que se entiendan sin necesidad de intérprete?

Casos posibles

$$\binom{80}{2}=\frac{80\cdot 79}{2}=3160$$

Con los datos disponibles resulta que hay 30 que hablan sólo ingles, 10 que hablan sólo francés y 40 congresistas que hablan ambos idiomas.

Casos favorables

$$\binom{30}{2}+\binom{40}{2}+\binom{10}{2}+\binom{40}{1}\binom{30}{1}+\binom{40}{1}\binom{10}{1}=2860$$

$$P=\frac{2860}{3160}=\frac{143}{158}\approx 0.905$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

A un congreso asisten 80 personas. De ellos 70 hablan inglés y 50 francés. Se eligen dos de ellos al azar. ¿cuál es la probabilidad de que se entiendan sin necesidad de intérprete?

Casos posibles

$$\binom{80}{2} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 3160$$

Con los datos disponibles resulta que hay 30 que hablan sólo ingles, 10 que hablan sólo francés y 40 congresistas que hablan ambos idiomas.

Casos (des)favorables

$$\binom{30}{1}\binom{10}{1} = 300$$

$$P = 1 - \frac{300}{3160} = 1 - \frac{15}{158} = \frac{143}{158} \approx 0.905$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Para trasladarse de *A* a *B* pueden hacerse desplazamientos solamente hacia arriba o hacia la derecha siguiendo las líneas del cuadriculado. Si los desplazamientos se realizan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la trayectoria pase por *C*?

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

Son 10 desplazamientos en total
(4⇨ + 8 ⇧)

Casos posibles $\binom{10}{4} = \frac{90 \cdot 56}{24} = 210$

4 pasos hasta *C*, (2⇨ + 2 ⇧)
6 pasos hasta *B*
(2⇨ + 4 ⇧)

Casos favorables $\binom{¿4}{¿2}\binom{¿6}{¿2} = 6 \cdot 15 = 90$

$$P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \approx 0.429$$

Regla de Laplace
Póker en una mano

Calcular la probabilidad de tener póker (4 cartas iguales) al repartir una mano de póker (5 cartas extraídas al azar de un mazo de cartas francesas de 52 cartas sin comodines).

Casos posibles $$\binom{52}{5}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{120}=2598960$$

Como hay 13 cartas en cada palo entonces hay 13 cuartetos. Una vez elegido uno de ellos quedan 48 cartas posibles para la quinta restante.

Casos favorables $$13\cdot 48=624$$

$$P=\frac{624}{2598960}\approx 0.00024\left(\approx\frac{1}{4167}\right)$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En una concesionaria de autos, sólo venden coches de 4 colores: rojo (R), azul (A), blanco (B) y negro (N). Si dos clientes que entran eligen el color al azar, calcule la probabilidad de que elijan el mismo color.

Casos posibles $4 \times 4 = 4^2$

Casos favorables 4 {(R,R),(A,A),(B,B),(N,N)}

$$P = \frac{4}{4^2} = 0.25$$

Cálculo de probabilidades con la regla de Laplace

En una concesionaria de autos, sólo venden coches de 4 colores: rojo (R), azul (A), blanco (B) y negro (N). Si dos clientes que entran eligen el color al azar, calcule la probabilidad de que elijan el mismo color.

Casos posibles $4\times 4=4^2$

También se puede analizar observando el evento complementario: que los dos elijan colores distintos.

Casos (des)favorables 4×3

$$P=1-\frac{4\times 3}{4^2}=0.25$$

Regla de Laplace
Un problema de cumpleaños

Calcular la probabilidad de que en una reunión de *n* personas elegidas al azar al menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños.

Casos posibles 365^n

Suponga que todos los días son igualmente probables y que por supuesto pueden repetirse los cumpleaños.

Conviene analizar el caso en que todos los cumpleaños son distintos.

Casos favorables $365^n - 365 \cdot 364 \cdot \ldots \left(365 - (n-1)\right)$

$$P_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \left(365 - (n-1)\right)}{365^n}$$

Regla de Laplace
Un problema de cumpleaños

$$P_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - (n-1))}{365^n}$$

N	**P_n**
18	0.347
19	0.379
20	0.411
21	0.444
22	**0.476**
23	**0.507**
24	0.538
25	0.569

Regla de Laplace
Un desafío